UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

ALLANA RIBEIRO MENDES

ABORDAGEM NUMÉRICA E METAMODELAGEM PREDITIVA DA GEOMETRIA DO FILETE NA IMPRESSÃO 3D DE CONCRETO

Londrina
2026

ALLANA RIBEIRO MENDES

ABORDAGEM NUMÉRICA E METAMODELAGEM PREDITIVA DA GEOMETRIA DO FILETE NA IMPRESSÃO 3D DE CONCRETO

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina, como requisito à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Profª Drª Berenice Martins Toralles
Coorientador: Profº Drº Ricardo Vicente de Paula Rezende

Londrina
2026

ALLANA RIBEIRO MENDES

ABORDAGEM NUMÉRICA E METAMODELAGEM PREDITIVA DA GEOMETRIA DO FILETE NA IMPRESSÃO 3D DE CONCRETO

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina, como requisito à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª Drª Berenice Martins Toralles
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Coorientador: Profº Drº Ricardo Vicente de Paula Rezende
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Membro Externo - Prof. Drº Albert de La Fuente
Universidade Politécnica da Catalunha – UPC

Membro Externo - Prof. Drº Carlos Humberto Martins
Universidade Estadual de Maringá - UEM

Membro Externo - Prof. Drº Eudes José Arantes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Membro Externo - Prof. Drº Manuel Gomes Vieira
Laboratório Nacional de Engenharia Civil - LNEC

Londrina, 21 de setembro de 2026.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

M538a Mendes, Allana Ribeiro.
Abordagem Numérica e Metamodelagem Preditiva da Geometria do Filete na Impressão 3D de Concreto / Allana Ribeiro Mendes. - Londrina, 2026.
311 f. : il.

Orientador: Berenice Martins Toralles.
Coorientador: Ricardo Vicente de Paula Rezende.
Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Tecnologia e Urbanismo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2026.
Inclui bibliografia.

1. Simulação Numérica - Tese. 2. Método dos Volumes Finitos - Tese. 3. Impressão 3D de Concreto - Tese. 4. Metamodelos Preditivos - Tese. I. Martins Toralles, Berenice . II. Vicente de Paula Rezende, Ricardo . III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDU 62

DEDICATÓRIA

A todos que, com um gesto, uma palavra ou um exemplo, tornaram esta caminhada mais leve e possível. Ao meu marido, Rodrigo, pelo amor e pelo apoio incondicional. À memória do meu pai, Jamil.

"Consagre ao Senhor tudo o que você faz, e os seus planos serão bem-sucedidos.”

Provérbios 16:3

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter iluminado cada passo desta jornada e por me conceder força e serenidade nos momentos em que elas pareciam faltar.

Ao meu marido, Rodrigo Teles Pimenta, companheiro de vida, a quem agradeço com todo o meu amor. Sua paciência, seu apoio incondicional e sua presença constante me sustentaram ao longo de todo este percurso. Nunca me permitiu desistir e sempre me impulsionou a seguir adiante.

Aos meus pais, pelo incentivo e pela dedicação ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. À minha mãe, Ivanir, e ao meu pai, Jamil, que jamais mediram esforços para que eu pudesse estudar e construir um futuro melhor. Em memória do meu pai, deixo a certeza de que, do céu, você continua a torcer e a rezar por mim, como fez durante toda sua a minha vida.

À minha orientadora, Profª Drª Berenice Martins Toralles, pela orientação generosa, pela disponibilidade e pelo cuidado com que conduziu este trabalho. Não mediu esforços para me auxiliar e, sempre que as dificuldades extrapolaram sua área de atuação, indicou-me pessoas que pudessem contribuir. Sua confiança e seu apoio foram essenciais ao longo de toda a pesquisa.

Ao meu coorientador, Profº Drº Ricardo Vicente de Paula Rezende, que surgiu ao longo da caminhada e se tornou um verdadeiro divisor de águas para esta pesquisa. Sem o seu conhecimento, a sua orientação atenta, cada dica e cada ajuda generosa, este trabalho não teria sido possível. Sua contribuição foi fundamental, crucial e inestimável. Registro aqui a minha mais profunda gratidão e admiração.

À Regiani Almeida, por ter intermediado o meu encontro com o Prof. Ricardo. Seu gesto foi, para mim, a resposta de Deus às minhas orações.

Aos colegas do programa de doutorado, pelo companheirismo, pelo apoio e pelas conversas que aliviaram os momentos mais difíceis desta trajetória, em especial às queridas amigas Monique, Vanessa e Lívia, com quem pude sempre contar.

Aos membros da banca examinadora, pela leitura atenta e pelas valiosas contribuições a esta tese.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos, e ao Governo do Estado do Paraná, pelo apoio financeiro que possibilitou a aquisição da impressora e fortaleceu a equipe de pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual

de Londrina e à sua secretaria, pelo acolhimento e pelo suporte durante todo o curso.

Por fim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho, e aos amigos próximos que acompanharam.

RESUMO

MENDES, Allana Ribeiro. **Abordagem numérica e metamodelagem preditiva da geometria do filete na impressão 3D de concreto.** 2026. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2026.

A impressão 3D de concreto (3DCP) consolida-se como uma das tecnologias mais promissoras da manufatura aditiva na construção civil, mas sua plena adoção ainda esbarra na dificuldade de controlar com precisão a deposição do material no estado fresco, etapa em que a interação entre parâmetros operacionais e propriedades reológicas governa a qualidade geométrica e a estabilidade do filete extrudado. Apesar dos avanços recentes, a literatura é escassa em critérios quantitativos que delimitem as condições de deposição estável e de ferramentas preditivas que orientem o ajuste dos parâmetros em campo, sem novos ensaios ou simulações custosas — lacuna que esta tese busca preencher. O objetivo foi avaliar o comportamento da extrusão durante a deposição e traduzi-lo em subsídios técnicos para o controle do processo, investigando como a altura do bico (H_n) e a razão entre as velocidades de impressão e de extrusão (V/U) determinam a geometria e a estabilidade do filete. Adotou-se simulação numérica multifásica (CFD), com o escoamento concreto–ar representado pelo modelo Volume of Fluid (VOF) e resolvido pelo Método dos Volumes Finitos (FVM); o modelo foi verificado em 2D, validado em 3D frente à literatura e, sobre essa base, foram construídos metamodelos preditivos por Superfície de Resposta (RSM) e Krigagem (GPR). Como resultados, quantificaram-se a distribuição de velocidade e a vazão do processo; estabeleceram-se critérios para classificar o regime de alimentação e a estabilidade do filete; delimitou-se uma fronteira crítica de estabilidade no espaço dos parâmetros; e propôs-se um Índice de Qualidade geométrica que ordena as condições dentro da região estável. Os metamodelos de Superfície de Resposta e de Krigagem, ajustados a quinze simulações próprias e a doze casos da literatura, foram validados contra simulações independentes em dois pontos operacionais inéditos e estimaram a largura e a altura do filete sem novas simulações, com erro relativo máximo de 5,04% e com os valores simulados contidos no intervalo de credibilidade de 95% da Krigagem. A principal contribuição desta tese está em fazer a ponte entre a simulação numérica e a prática de campo: reunir a fronteira de estabilidade, o Índice de Qualidade geométrica e os metamodelos preditivos validados em um único protocolo capaz de orientar o ajuste dos parâmetros diretamente na impressão, de forma rápida e quantitativa. Mais do que descrever o escoamento, o trabalho fornece à comunidade da 3DCP critérios objetivos e ferramentas reaproveitáveis para projetar deposições estáveis, reduzindo a dependência de ensaios experimentais e de simulações custosas — e abrindo caminho para o controle preditivo do processo.

Palavras-chave: simulação numérica; método dos volumes finitos; impressão 3D de concreto; extrusão; estabilidade da deposição; metamodelos preditivos.

ABSTRACT

MENDES, Allana Ribeiro. **Numerical approach and predictive metamodeling of filament geometry in 3D concrete printing.** 2026. Thesis (Doctorate in Civil Engineering) – State University of Londrina, Londrina, 2026.

Three-dimensional concrete printing (3DCP) is establishing itself as one of the most promising additive manufacturing technologies for civil construction; however, its full adoption is still hindered by the difficulty of precisely controlling the deposition of fresh-state material, a stage in which the interaction between operational parameters and rheological properties governs the geometric quality and the stability of the extruded filament. Despite recent advances, the literature still lacks quantitative criteria to delimit the conditions for stable deposition and predictive tools to guide the adjustment of parameters in the field, without new tests or costly simulations — a gap that this thesis seeks to fill. The objective was to evaluate the behavior of extrusion during deposition and to translate this understanding into objective technical guidelines for process control, investigating how the nozzle height (H_n) and the ratio between printing and extrusion speeds (V/U) determine the geometry and stability of the filament. A multiphase numerical simulation (CFD) approach was adopted, in which the concrete–air flow was represented by the Volume of Fluid (VOF) model and solved by the Finite Volume Method (FVM); the model was verified in 2D, validated in 3D against established results in the literature and, on this basis, predictive metamodels were built using Response Surface Methodology (RSM) and Kriging (GPR). As results, the velocity distribution and the flow rate of the process were quantified; criteria were established to classify the feeding regime and the geometric stability of the filament; a critical stability boundary was delimited in the parameter space; and a geometric Quality Index was proposed to rank the conditions within the stable region. The Response Surface and Kriging metamodels, fitted to fifteen in-house simulations and twelve cases from the literature, were validated against independent simulations at two unseen operating points and estimated the width and height of the filament without new simulations, with a maximum relative error of 5.04% and with the simulated values within the 95% credible interval of the Kriging model. The main contribution of this thesis lies in bridging numerical simulation and field practice: bringing together the stability boundary, the geometric Quality Index and the validated predictive metamodels into a single decision-support protocol capable of guiding the adjustment of parameters directly during printing, in a fast and quantitative way. More than describing the flow, this work provides the 3DCP community with objective criteria and reusable tools to design stable depositions, reducing the dependence on experimental testing and costly simulations — and paving the way for predictive process control.

Keywords: numerical simulation; finite volume method; 3D concrete printing; extrusion; deposition stability; predictive metamodels.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas da revisão sistemática utilizada nesta pesquisa 17
Figura 2 –Fluxo de identificação, triagem e seleção das publicações da revisão sistemática (busca original e atualização até 2026) 20
Figura 3 – Exemplos de tipos de aplicação de 3DCP e orientação dos componentes fabricados 31
Figura 4 – Simulação de concreto imprimível em extrusor de grande escala elucidando processos de extrusão e deposição 36
Figura 5 – A influência da distância de afastamento do bico (nozzle standoff distance) no processo de extrusão de concreto durante a impressão 3D 38
Figura 6 – Representação esquemática da configuração do 3DCP 50
Figura 7 – Curva de escoamento característica da argamassa no estado fresco, medida por ensaios rotacionais CSR de rampa decrescente 51
Figura 8 – Comparação das formas de seção transversal das simulações e dos experimentos 52
Figura 9 – Vistas em perspectiva das simulações de impressão virtual utilizando o modelo EVP: (a) baixa altura do bico e baixa velocidade de deslocamento do bico (Caso ID 2) e (b) grande altura do bico e alta velocidade de deslocamento do bico (Caso ID 12) 53
Figura 10 – Modelo CFD simulando a impressão 3D de múltiplas camadas 54
Figura 11 – Formas de seções transversais obtidas a partir do modelo CFD e dos experimentos de impressão 3D (3DCP) 55
Figura 12 – Dispositivo de impressão 3D 56
Figura 13 – Geometria e malha computacional do modelo CFD 57
Figura 14 – A influência da razão de área entre a saída e a entrada (AR) na distribuição de pressão no bico (a); a influência da razão de aspecto do bico (Ψ) na distribuição de pressão no bico (b); a influência da direção de deposição do material (θ) na distribuição de pressão no bico (c). 58
Figura 15 – A influência da razão de área entre a saída e a entrada (AR) na taxa de deformação do filamento depositado 59
Figura 16 – Configuração de extrusão do material 61
Figura 17 – Domínio computacional do modelo numérico 62
Figura 18 – Comparação entre a simulação numérica e os resultados experimentais, onde as linhas vermelhas indicam os resultados numéricos e as linhas tracejadas indicam os resultados experimentais 63
Figura 19 – A influência do diâmetro do bico na forma da seção transversal de duas camadas impressas 64
Figura 20 – A influência da velocidade de impressão na forma da seção transversal de duas camadas impressas 64
Figura 21 – A influência da mudança na altura de impressão na geometria da seção transversal de duas camadas impressas 65
Figura 22 – Elementos-chave do domínio computacional e condições de contorno 66
Figura 23 – Magnitude da taxa de deformação limitada pelas condições das paredes durante a extrusão de argamassa e deposição de camadas 69
Figura 24 – Volume de controle contendo duas fases imiscíveis separadas por uma interface 75
Figura 25 – Volume de controle V(t) com o campo de velocidade u, o vetor normal unitário externo n̂ e o elemento de área dA 76

Figura 26 – Variação das velocidades na interface e no interior de um volume material, resultando em sua deformação 81
Figura 27– Vetor normal unitário à interface ($\hat{n}i = \nabla\alpha/|\nabla\alpha|$), direção tangente e força de tensão superficial $F\sigma$ sobre as superfícies de α constante 86
Figura 28 – Curvas reológicas canônicas: tensão de cisalhamento (τ) em função da taxa de deformação ($\dot{\gamma}$) 87
Figura 29 - Exemplo bidimensional da discretização de um domínio e os esquemas de montagem dos volumes de controle 93
Figura 30 – Balanço de uma grandeza qualquer em um volume de controle 94
Figura 31 – Etapas do Método dos Volumes Finitos: da equação diferencial contínua ao sistema algébrico discreto 100
Figura 32 – Superfície de resposta de segunda ordem para os dois fatores do estudo (h_n e r_1): (a) curvas de nível; (b) superfície 3D, com o ponto crítico destacado 102
Figura 33 – Classificação do ponto crítico segundo os autovalores da Hessiana: (a) mínimo local (λ_1, $\lambda_2 > 0$, definida positiva); (b) máximo local (λ_1, $\lambda_2 < 0$, definida negativa); (c) ponto de sela (autovalores de sinais opostos, indefinida). 106
Figura 34 – Processo Gaussiano com kernel exponencial quadrático (SE). (a) Três funções amostradas da priori, com região de credibilidade de 95%; (b) três funções da posteriori após condicionamento em cinco observações (+), com a média preditiva e a região de 95% — a incerteza colapsa nos pontos e cresce entre eles e na extrapolação 109
Figura 35 – Correlação espacial no Kriging: a influência (zona de influência) de cada ponto amostrado decai com a distância r, com alcance governado pelo comprimento de escala ℓ; a incerteza preditiva (faixa IC 95%) cresce nas regiões afastadas dos dados 111
Figura 36 – Funções de covariância empregadas — (a) formato de k(r) para RBF, Matérn 3/2, Matérn 5/2 e Rational Quadratic; (b) realizações (amostras) de funções geradas por cada kernel, evidenciando o grau de suavidade correspondente. 113
Figura 37 – Kernel RBF (Squared Exponential): (a) forma da função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) funções amostradas de um Processo Gaussiano com kernel RBF para cada ℓ, evidenciando que ℓ controla a suavidade e o comprimento de onda característico das realizações 114
Figura 38 – Kernel Matérn v = 3/2: (a) função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente, cujas realizações são uma vez diferenciáveis (classe C^1) 115
Figura 39 – Kernel Matérn v = 5/2: (a) função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente, cujas realizações são duas vezes diferenciáveis (classe C^2) 116
Figura 40 – Kernel Rational Quadratic: (a) função de covariância k(r) para diferentes valores do parâmetro de mistura de escalas α, com o RBF ($\alpha \to \infty$) em tracejado; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente 117
Figura 41 – Esquema do procedimento LOOCV: a cada iteração, um ponto é separado (teste) e os $n - 1$ restantes formam o conjunto de treino; cada predição gera um resíduo e_i. Ao final, PRESS e Q^2 resumem o desempenho fora da amostra, e o modelo definitivo é ajustado com todo o conjunto 119
Figura 42 – Interpretação da razão d/σ^* em unidades de desvio-padrão, análoga à escala sigma (1σ, 2σ, …, 6σ) dos programas de qualidade Seis Sigma: quanto maior o afastamento em sigmas, mais significativo o conflito entre os metamodelos 124
Figura 43 – Diagnóstico gráfico: (a) Parity plot: pontos alinhados à diagonal indicam bom ajuste, enquanto a dispersão indica ajuste ruim. (b) Resíduos versus valores

preditos: uma nuvem aleatória em torno de zero indica ausência de tendência, ao passo que padrões (curvatura, funil) revelam problemas no modelo 126
Figura 44 – Etapas metodológicas da pesquisa 128
Figura 45 – Domínio bidimensional e condições de contorno em 2D 132
Figura 46 – Definição das posições de amostragem (Linhas 1 a 4) ao longo do comprimento de deposição para extração da altura do filete extrudado 134
Figura 47 – Geometria do tubo, malha e regiões de contorno 139
Figura 48 – Representação tridimensional do domínio com identificação das regiões de contorno 142
Figura 49 – Esquema da condição de contorno wall_deposition nas etapas de parede fixa e parede móvel 142
Figura 50 – Malha tridimensional gerada e detalhe do refinamento local na região de deposição 144
Figura 51 – Representação tridimensional do domínio com identificação das regiões de contorno 147
Figura 52 – Representação esquemática do domínio computacional utilizado no estudo paramétrico 152
Figura 53 – Condições de contorno em 2D 179
Figura 54 – Modelo geométrico em 2D com definição das principais dimensões 180
Figura 55 - Altura do filamento (em mm) nas quatro seções transversais avaliadas (linha 1, 2, 3 e 4) em função da configuração de malha (refinamento: A→E) 181
Figura 56 – Perfil adimensional do filamento extrudado (altura Y/D versus comprimento X/D) para as diferentes malhas testadas 184
Figura 57 – Perfil geométrico do filamento do caso 5 185
Figura 58 – Etapas da extrusão e deposição do concreto fresco durante a simulação tridimensional 189
Figura 59 – Sistema de impressão 3D de concreto e camadas impressas 190
Figura 60 – Vista superior do filete impresso obtido na simulação numérica 191
Figura 61 – Comparação entre os perfis transversais do filete de concreto fresco do Estudo 1 e do modelo numérico da tese 192
Figura 62 – Camadas impressas experimentalmente e segmentos seccionados para diferentes alturas do bico e velocidades de impressão 194
Figura 63 – Vista superior do filete impresso obtido na simulação numérica 195
Figura 64 – Comparação entre os perfis transversais do filete de concreto fresco do Estudo 2 e do modelo numérico da tese 196
Figura 65 – Filete extrudado obtido na simulação tridimensional no ANSYS CFX, com destaque para o plano de corte X = 80 mm 198
Figura 66 – Sobreposição dos perfis geométricos da seção transversal do filete extrudado no ANSYS CFX para diferentes configurações do modelo numérico 201
Figura 67 – Comparação das seções transversais do filete extrudado obtidas experimentalmente e numericamente no Estudo 2 da literatura e numericamente no presente trabalho utilizando os solvers ANSYS CFX e Fluent 202
Figura 68 – Contorno das malhas e detalhe ampliado 208
Figura 69 – Altura e Largura × Tempo de Simulação 209
Figura 70 – Ábaco operacional: classificação dos casos no plano V/U × HN 215
Figura 71 – Superfície 3D do espalhamento em função de V/U e HN 217
Figura 72 – Mapa contínuo da razão de aspecto AR 218
Figura 73 – Seções transversais dos filetes extrudados para os quinze casos simulados 221
Figura 74 – Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função das três respostas

geométricas que compõem o índice: (a) área normalizada; (b) espalhamento lateral EL; (c) perda de altura PH. 227
Figura 75 – Mapa do índice de qualidade (IQn) para os quinze casos numéricos . 228
Figura 76 - Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função da razão velocidade/alimentação (V/U), por nível de altura de bico (H_N), para os quinze casos numéricos 230
Figura 77 — Mapa do índice de qualidade (IQ_n) para os vinte e sete casos (quinze numéricos próprios e doze de Comminal et al., 2020) 232
Figura 78 – Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função da altura de bico HN (conjunto ampliado de 27 casos). 235
Figura 79 — Fronteira crítica de estabilidade ajustada aos quinze casos numéricos (p = 0,3; p = 0,5 e p = 0,7). Acurácia de classificação = 73,3% (11/15) no conjunto de treinamento; 66,7% (10/15) na LOO-CV 237
Figura 80 - Fronteira crítica de estabilidade ajustada aos vinte e sete casos numéricos 239
Figura 81 – Incerteza da Fronteira: bandas de confiança de 95% (bootstrap) para os dois modelos 241
Figura 82 — Superfícies de incerteza preditiva σ do GPR para a largura e a altura (15 casos) 246
Figura 83 – Parity plots de treino e resíduos (largura/altura) LOOCV 248
Figura 84 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a largura (15 casos) 251
Figura 85 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a altura (15 casos) 252
Figura 86 — Parity plots e resíduos de LOOCV para a largura (27 casos) 256
Figura 87 — Parity plots e resíduos de LOOCV para a altura (27 casos) 257
Figura 88 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a largura (27 casos) 260
Figura 89 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a altura (27 casos) 260
Figura 90 — Superfícies de incerteza preditiva σ do GPR para a largura e a altura (27 casos) 261
Figura 91 — Ábaco operacional com a fronteira crítica e a localização dos pontos VP1 e VP2 264

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Síntese dos resultados da revisão sistemática 21
Tabela 2 – Comparativo dos kernels de covariância 118
Tabela 3 – Métricas de avaliação dos metamodelos 122
Tabela 4 – Estudos de referência e casos adotados 131
Tabela 5 - Parâmetros físicos e geométricos do escoamento no bico de extrusão 137
Tabela 6 – Comprimentos característicos do bico de extrusão na simulação auxiliar 138
Tabela 7 – Parâmetros físicos empregados na simulação da região de deposição145
Tabela 8 – Faixas de valores extraídos da literatura especializada.....153
Tabela 9 – Definição dos níveis do fator altura do bico de extrusão.....154
Tabela 10 – Definição dos níveis do fator velocidade de impressão 154
Tabela 11 – Velocidade de extrusão (U) reportada na literatura de referência.....155
Tabela 12 – Fatores e níveis adotados no estudo paramétrico 156
Tabela 13 – Matriz de simulações do planejamento fatorial reduzido (CCP – 15 casos) com ordem randomizada de execução 157
Tabela 14 – Resultados numéricos obtidos nos testes paramétricos 170
Tabela 15 – Casos adicionais extraídos de Comminal et al. (2020).....175
Tabela 16 – Pontos de validação externa independente 176
Tabela 17 – Detalhamento das malhas e tamanhos de elementos nas regiões de interesse.....181
Tabela 18 – Alturas do filamento (linha 1, 2, 3 e 4) por configuração de malha 182
Tabela 19 – Comparação das dimensões geométricas do filete e erros percentuais do modelo numérico da tese em relação aos resultados do Estudo 1 192
Tabela 20 – Comparação das dimensões geométricas do filete e erros percentuais do modelo numérico da tese em relação aos resultados do Estudo 2 196
Tabela 21 – Dimensões geométricas do filete extrudado (X=80mm) obtidas no ANSYS CFX 199
Tabela 22 – Influência da taxa mínima de cisalhamento no CFX 200
Tabela 23 – Influência da tensão superficial no modelo VOF (CFX) 201
Tabela 24 – Comparação das dimensões geométricas e da área transversal do filete extrudado 202
Tabela 25 – Configurações das malhas.....208
Tabela 26 – Dados das malhas utilizadas no cálculo do GCI 211
Tabela 27 – Correlação de postos entre a configuração de pesos adotada (0,40/0,30/0,30) e as configurações alternativas.....223
Tabela 28 - Índice de qualidade normalizado (IQ_n) dos quinze casos sob as cinco configurações de pesos avaliadas 224
Tabela 29 – Parâmetros operacionais, respostas geométricas e Índice de Qualidade geométrica dos quinze casos simulados.....226
Tabela 30 – Parâmetros operacionais, respostas geométricas e Índice de Qualidade geométrica dos vinte e sete casos (quinze próprios e doze de Comminal et al., 2020) 231
Tabela 31 — Coeficientes do modelo logístico (β_0, β_1, β_2) e equação da fronteira crítica para os dois ajustes 236
Tabela 32 — Probabilidade estimada e acerto no treino e na LOO-CV para os quinze casos numéricos (Modelo 1) 237
Tabela 33 — Probabilidade estimada e acerto no treino e na LOO-CV para os vinte e

sete casos (Modelo 2) 239
Tabela 34 — Desempenho dos dois modelos no treino e na validação cruzada (LOO-CV) 240
Tabela 35 — Intervalos de confiança de 95% (bootstrap, 5.000 reamostras) para a fronteira crítica em função de H_N 242
Tabela 36 – Métricas de desempenho dos metamodelos: largura (w), 15 casos ... 244
Tabela 37 – Métricas de desempenho dos metamodelos: altura (h), 15 casos 244
Tabela 38 — Comparação sintética RSM vs. GPR no treino e na LOOCV: largura (w) e altura (h), 15 casos 246
Tabela 39 — Ponto crítico das superfícies RSM: largura (w) e altura (h), 15 casos 249
Tabela 40 — Análise local comparativa RSM vs. GPR no ponto P*: largura (w) e altura (h), 15 casos 249
Tabela 41 — Síntese comparativa: largura (w) vs. altura (h), 15 casos 252
Tabela 42 — Métricas de desempenho dos metamodelos: largura (w), 27 casos .. 253
Tabela 43 — Métricas de desempenho dos metamodelos: altura (h), 27 casos 253
Tabela 44 — Comparação sintética RSM vs. GPR na LOOCV: largura (w) e altura (h), 27 casos 254
Tabela 45 — Ponto crítico das superfícies RSM: largura (w) e altura (h), 27 casos 258
Tabela 46 — Análise local comparativa RSM vs. GPR no ponto P*: largura (w) e altura (h), 27 casos 259
Tabela 47 — Pontos de validação externa: coordenadas e predições de largura e altura 261
Tabela 48 — Métricas de validação externa: RSM e Kriging vs. CFD 262
Tabela 49 — Índice de Qualidade Geométrica nos pontos de validação externa ... 263
Tabela 50 — Posicionamento dos pontos de validação na fronteira crítica de estabilidade 263

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Evolução das estratégias de busca (queries) utilizadas na revisão sistemática 18
Quadro 2 – Propriedades reológicas dos materiais cimentícios aplicados à impressão 3D.....48
Quadro 3 – Comparativo entre os modelos de Bingham e Herschel–Bulkley 89
Quadro 4 - Comparação entre as formulações numéricas adotadas nos solvers ANSYS Fluent e ANSYS CFX.....147
Quadro 5 – Nomeação das condições de contorno no Fluent.....180

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3DCP Impressão 3D de concreto (3D Concrete Printing)
AIC Critério de Informação de Akaike (Akaike Information Criterion)
AMR Refinamento adaptativo de malha (Adaptive Mesh Refinement)
BIC Critério de Informação Bayesiano (Bayesian Information Criterion)
CCP Planejamento Composto Central (Central Composite Plan)
CFD Dinâmica dos Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics)
DEM Método dos Elementos Discretos (Discrete Element Method)
EVP Modelo elasto-viscoplástico
FAVOR Fractional Area/Volume Obstacle Representation
FVM Finite Volume Method (Método dos Volumes Finitos)
GCI Índice de Convergência de Malha (Grid Convergence Index)
GNF Fluido Newtoniano Generalizado (Generalized Newtonian Fluid)
GPR Regressão por Processos Gaussianos / Krigagem (Gaussian Process Regression)
IQ Índice de Qualidade geométrica
LOOCV Validação cruzada Leave-One-Out (Leave-One-Out Cross-Validation)
MAE Erro Médio Absoluto (Mean Absolute Error)
MAPE Erro Percentual Absoluto Médio (Mean Absolute Percentage Error)
MEF Método dos Elementos Finitos
FVM Método dos Volumes Finitos
OLS Mínimos Quadrados Ordinários (Ordinary Least Squares)
PRESS Soma dos quadrados dos resíduos de predição (Predicted Residual Error Sum of Squares)
RBF Função de Base Radial (Radial Basis Function)
RMSE Raiz do Erro Quadrático Médio (Root Mean Squared Error)
RSM Metodologia de Superfície de Resposta (Response Surface Methodology)
VOF Modelo Volume of Fluid (Volume de Fluido)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

1.1 Contextualização/Justificativa 14
1.2 Lacuna do Conhecimento e Aspectos de Ineditismo 15
1.3 Questão da Pesquisa 22
1.4 Hipótese de Pesquisa 23
1.5 Objetivos 23
1.5.1 Objetivo Geral 23
1.5.2 Objetivos Específicos 23
1.6 CONTRIBUIÇÕES DA TESE 24
1.7 Delimitação da Pesquisa 25
1.8 Definição dos principais termos 25
1.9 Estrutura do Trabalho 27
1.10 Trabalhos e Parcerias do Grupo de Pesquisa da UEL 28

2 IMPRESSÃO 3D DE CONCRETO 30

2.1 Tecnologia da Impressão 3D Aplicada à Construção Civil 30
2.1.1 Aplicações e Avanços Recentes 31
2.1.2 Desafios e Oportunidades 32
2.2 Processo de Extrusão do Concreto 3D 34
2.2.1 Princípios da Extrusão 34
2.2.2 Características de Extrudabilidade 36
2.3 Reologia na impressão 3D 38
2.3.1 Classificação dos Modelos Reológicos 39
2.3.2 Propriedades Reológicas 44
2.3.3 Valores Característicos dos Materiais Cimentícios Aplicados na Impressão 3D 47
2.4 Estado da arte em simulação numérica do processo de extrusão na impressão 3D do concreto 49

3 MODELAGEM MATEMÁTICA 73

3.1 Metodologia de Volumes de Controle 73
3.1.1 Fração Volumétrica 74
3.1.2 Conservação da Massa 75
3.1.3 Quantidade de Movimento 76
3.1.4 Modelo Homogêneo e Propriedades de Mistura (ANSYS CFX) 79
3.2 Abordagem Euleriana 80
3.2.1 Promediação 81
3.2.2 Função Indicadora de Fase 82
3.2.3 Equações de Balanço Promediadas 83
3.2.4 Interpretação Probabilística e Fechamento 83
3.2.5 Método de Volume de Fluido (VOF) 84
3.2.6 Força de Tensão Superficial (Continuum Surface Force) 85
3.3 Modelos Reológicos 86
3.3.1 Modelo de Herschel–Bulkley 87
3.3.2 Modelo de Bingham 88
3.3.3 Diferenças Essenciais entre os Modelos Reológicos 89

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 92

4.1 Método dos Volumes Finitos (FVM) 92
4.1.1 Discretização do Domínio de Cálculo 96
4.1.2 Forma genérica das equações de transporte 97

5 METAMODELAGEM 101

5.1 Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) 102
5.1.1 Formulação Matemática 103
5.1.2 Estimação por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) 103
5.1.3 Regularização e Condicionamento 104
5.1.4 Análise do Ponto Crítico da Superfície 105
5.1.5 Interpretação Física 106
5.1.6 Vantagens e Limitações 106
5.2 Metodologia Kriging / Gaussian Process Regression (GPR) 107
5.2.1 Formulação Matemática 108
5.2.2 Formulação Bayesiana e Predição 108
5.2.3 Estimação dos Hiperparâmetros por Máxima Verossimilhança 109
5.2.4 Interpretação Física 111
5.2.5 Vantagens e Limitações 111
5.3 Funções de Covariância (Kernels) do Kriging 112
5.3.1 Kernel RBF (Squared Exponential) 113
5.3.2 Kernel Matérn v = 3/2 114
5.3.3 Kernel Matérn v = 5/2 115
5.3.4 Kernel Rational Quadratic 116
5.3.5 Modelo de Ruído: WhiteKernel 117
5.3.6 Critério de Escolha do Kernel 117
5.4 Validação Cruzada Leave-One-Out (LOOCV) 118
5.4.1 Procedimento 118
5.4.2 Diagnóstico de Sobreajuste 119
5.5 Métricas de Avaliação dos Metamodelos 120
5.5.1 Coeficiente de Determinação (R^2) 120
5.5.2 Root Mean Squared Error (RMSE) 120
5.5.3 Mean Absolute Error (MAE) 121
5.5.4 Mean Absolute Percentage Error (MAPE) 121
5.5.5 BIAS 121
5.5.6 PRESS e Q^2 121
5.5.7 Critério de Akaike (AIC) e Critério Bayesiano (BIC) 122
5.6 Análise Local de Predição e Diagnóstico de Concordância 123
5.6.1 Métricas de Concordância Local 123
5.7 Critério de Classificação de Concordância 125
5.8 Gradiente e Curvatura Local 125
5.9 Diagnóstico Gráfico: Parity Plot e Análise de Resíduos 126

6 METODOLOGIA 128

6.1 Estudos de Referência 130
6.2 Etapa de Verificação e Calibração (Modelo 2D) 131
6.2.1 Teste de Independência de Malha 133

6.3 ETAPA DE VALIDAÇÃO DO MODELO TRIDIMENSIONAL (3D) 135
6.3.1 Estratégia Geral da Validação Tridimensional 136
6.3.2 Simulação Auxiliar para Obtenção do Perfil de Velocidade no Bico de Extrusão 136
6.3.3 Simulação Principal da Região de Deposição do Material (Modelo Tridimensional) 140
6.3.3.1 Estratégia Numérica Comum para a Simulação da Deposição 140
6.3.3.2 Configuração Física da Região de Deposição 144
6.3.3.3 Procedimento Metodológico de Validação do Modelo Tridimensional 145
6.3.4 Migração da Simulação Tridimensional para o Solver ANSYS CFX 146
6.3.4.1 Procedimento de extração geométrica e cálculo da área das seções transversais 149
6.3.4.2 Estudos Verificativos de Sensibilidade do Modelo Numérico no CFX 150
6.4 TESTE DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA NO MODELO 3D 151
6.5 ESTUDOS PARAMÉTRICOS 152
6.5.1 Protocolo de simulação dos estudos paramétricos 153
6.5.2 Planejamento fatorial e matriz de simulações (CCP) 156
6.5.3 Pós-processamento dos resultados do Protocolo numérico 158
6.5.3.1 Critérios de classificação do Regime de alimentação e da Estabilidade geométrica 158
6.6 DETERMINAÇÃO DA FRONTEIRA DE ESTABILIDADE 162
6.6.1 Índice de Qualidade 164
6.6.2 Formulação matemática do índice 164
6.6.3 Aplicação do índice aos casos numéricos 166
6.6.4 Validação com dados da literatura 167
6.7 METAMODELAGEM DO PROCESSO DE EXTRUSÃO 168
6.7.1 Dados Numéricos e Variáveis do Modelo 169
6.7.2 Construção e Ajuste do Modelo GPR (Krigagem) 171
6.7.2.1 Pré-processamento 171
6.7.2.2 Definição do Kernel 171
6.7.2.3 Estimação dos Hiperparâmetros e Predição 171
6.7.3 Validação Cruzada e Métricas de Desempenho 172
6.7.4 Análise Comparativa e Diagnóstico Local 173
6.7.5 Implementação Computacional 174
6.7.6 Incorporação de Casos Adicionais da Literatura 175
6.7.7 Validação dos Metamodelos por Simulação Numérica Independente 176
6.7.7.1 Validação dos Metamodelos 177
6.7.7.2 Classificação pelo Índice de Qualidade Normalizado (IQn) 177
6.7.7.3 Localização na fronteira crítica de estabilidade 177
7 RESULTADOS E DISCUSSÕES 179
7.1 PARÂMETROS DA VERIFICAÇÃO E CALIBRAÇÃO (MODELO 2D) 179
7.1.1 Teste de independência de malha 181
7.1.2 Comparação com os Dados de Referência e Verificação Qualitativa do Modelo 2D 185
7.1.2.1 Extração do valor de referência 185
7.1.2.2 Valor obtido no modelo 2D 186

7.1.2.2.1 Discussão e justificativa da discrepância 186
7.1.2.3 Validação qualitativa do perfil 187
7.1.2.4 Conclusão da etapa de verificação 187
7.2 Verificação do Protocolo Numérico no Modelo 3D e Seleção do Ambiente de Simulação 188
7.2.1 Simulações no ANSYS Fluent — diagnóstico de incompatibilidade física 188
7.2.1.1 Estudo 1 — Tao et al. (2024) 189
7.2.2 Estudo 2 — Comminal et al. (2020) 193
7.2.3 Diagnóstico e decisão de migração 197
7.2.4 Resultados da Migração da Simulação Tridimensional para o Solver ANSYS CFX 197
7.2.5 Estudos de sensibilidade no CFX 199
7.2.5.1 Influência da taxa mínima de cisalhamento 200
7.2.5.2 Influência da tensão superficial 200
7.2.6 Comparação entre solvers e com os dados de referência 202
7.2.7 Diferenças numéricas entre os solvers Fluent e CFX na predição da geometria do filete extrudado 203
7.2.8 Considerações Finais 207
7.3 Teste de Independência de Malha 207
7.3.1 Análise qualitativa das curvas de contorno 208
7.3.2 Análise quantitativa: altura, largura e custo computacional 209
7.3.3 Estimativa do erro de discretização pelo Índice de Convergência de Malha (GCI) 210
7.3.4 Seleção da malha de trabalho 213
7.4 Estudos Paramétricos 214
7.4.1 Classificação dos Regimes operacionais e identificação dos padrões de estabilidade 214
7.4.2 Quantificação das respostas geométricas: Espalhamento e Razão de Aspecto 216
7.4.2.1 Integração entre a classificação e a justificativa geométrica 219
7.4.3 Perfis transversais dos filetes simulados 221
7.4.4 Índice de Qualidade 223
7.4.4.1 Análise de sensibilidade dos pesos 223
7.4.4.2 Aplicação do índice de qualidade aos casos simulados 225
7.4.4.3 Coerência com a classificação qualitativa de estabilidade 227
7.4.4.4 Tendência em função dos parâmetros operacionais 229
7.4.4.5 Capacidade de generalização: validação com dados da literatura 231
7.4.5 Fronteira de Estabilidade 235
7.4.5.1 Etapa 1 — Modelo numérico (15 casos) 236
7.5 Modelagem e Análise por Metamodelos (15 casos) 243
7.5.1 Ajuste dos modelos e equações RSM 243
7.5.2 Validação cruzada (LOOCV) e comparação RSM vs. GPR 246
7.5.3 Ponto crítico da superfície RSM 249
7.5.4 Análise local no ponto P (H_n = 16,0 mm; r_1 = 0,950 V/U) 249*
7.5.5 Superfícies de resposta 250
7.5.6 Síntese comparativa — largura vs. altura (15 casos) 252
7.6 Expansão do Banco de Dados e Reajuste dos Metamodelos 253
7.6.1 Ajuste dos modelos e equações RSM 253

7.6.2 Validação cruzada (LOOCV) e comparação RSM vs. GPR 254
7.6.3 Ponto crítico da superfície RSM 258
7.6.4 Análise local no ponto P (H_n = 16,0 mm; r_1 = 0,950 V/U) 258*
7.6.5 Superfícies de resposta 259
7.7 VALIDAÇÃO EXTERNA POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA INDEPENDENTE — LARGURA E ALTURA 261
7.7.1 Classificação dos pontos de validação pelo IQn e pela fronteira de estabilidade 262
7.7.2 Convergência do protocolo e recomendações operacionais 264
8 CONCLUSÃO 267
8.1 LIMITAÇÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 270
REFERÊNCIAS 271
APÊNDICE A - SIMULAÇÃO AUXILIAR PARA OBTENÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE NO BICO DE EXTRUSÃO **..... 278**
APÊNDICE B - SIMULAÇÃO PRINCIPAL DA REGIÃO DE DEPOSIÇÃO DO MATERIAL **..... 281**
APÊNDICE C - SETUP NUMÉRICO DA SIMULAÇÃO NO ANSYS CFX **..... 284**
APÊNDICE D - FRONTEIRA CRÍTICA DE ESTABILIDADE (3DCP) — REGRESSÃO LOGÍSTICA BINÁRIA PARA CLASSIFICAÇÃO DE REGIMES DE DEPOSIÇÃO **..... 288**
APÊNDICE E - ÍNDICE DE QUALIDADE GEOMÉTRICA DA DEPOSIÇÃO (IQN) **..... 292**
APÊNDICE F — METAMODELOS: SUPERFÍCIES DE RESPOSTA (RSM) E KRIGING (GAUSSIAN PROCESS REGRESSION) **..... 295**

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO/JUSTIFICATIVA

O crescente interesse global por tecnologias que aumentam a produtividade tem impulsionado soluções que conciliam avanço tecnológico e eficiência operacional. Na construção civil, a manufatura aditiva e, em particular, a impressão 3D de concreto (3DCP) desponta como alternativa promissora para a fabricação de elementos de geometria complexa, aliando liberdade geométrica, precisão dimensional, redução de custos e sustentabilidade ambiental (Nguyen-Van et al., 2023; An et al., 2024). A técnica possibilita a construção de estruturas tridimensionais pela deposição sucessiva de camadas de material cimentício, cuja fluidez e coesão são ajustadas para garantir a extrudabilidade e a estabilidade geométrica do material (Tu et al., 2023).

Entre os benefícios frequentemente destacados estão a redução de custos, decorrente da menor dependência de mão de obra tradicional e da dispensa de fôrmas; o aumento de produtividade, viabilizado por sistemas automatizados e robóticos; e o alinhamento à sustentabilidade, pela redução do desperdício de material e pela possibilidade de estruturas mais eficientes em termos energéticos (Nguyen-Van et al., 2023; An et al., 2024). Esses fatores explicam o crescente interesse acadêmico e industrial pela tecnologia 3DCP em escala global.

Apesar desses avanços, a consolidação da tecnologia depende da compreensão dos parâmetros que controlam o processo de extrusão tais como vazão, velocidade de deposição, geometria e altura do bico extrusor e propriedades reológicas do concreto fresco. Segundo Reinold et al. (2022), compreender o comportamento do escoamento do concreto durante a impressão é essencial para evitar falhas, deformações plásticas e descontinuidades entre as camadas depositadas, o que impacta diretamente a qualidade geométrica e mecânica das estruturas e a otimização das condições operacionais.

No 3DCP, a extrusão caracteriza-se por um escoamento multifásico composto por duas fases imiscíveis, o concreto fresco e o ar, que interagem por meio de uma superfície livre. A forma e a estabilidade dessa interface são determinantes para a qualidade da deposição e reologia da mistura, pois é nela que ocorre a troca simultânea de massa e de quantidade de movimento entre as fases (Rezende, 2014).

Representar corretamente essa interface, cuja posição varia no tempo e depende da configuração geométrica, do regime de escoamento e das propriedades físicas das fases, constitui um dos aspectos mais críticos da modelagem matemática do processo.

Nesse cenário, a simulação computacional constitui uma ferramenta poderosa para analisar o comportamento físico e reológico do concreto no estado fresco, reduzindo o número de ensaios experimentais e permitindo o controle detalhado das variáveis envolvidas (Reinold et al., 2022). Entre as abordagens disponíveis, o modelo Volume of Fluid (VOF) (Hirt e Nichols, 1981), de formulação Euleriana, mostra-se eficiente para escoamentos com superfícies livres bem definidas, pois rastreia a fração volumétrica de cada fase em cada ponto do domínio e localiza a interface de maneira contínua e estável. Resolvido numericamente pelo Método dos Volumes Finitos (FVM), o modelo VOF permite acompanhar a evolução do filete extrudado, avaliar a deformação da superfície do material e observar a estabilidade do escoamento ao longo da deposição (Rezende, 2014).

Além da modelagem numérica, a metamodelagem preditiva (surrogate models) amplia o alcance da investigação ao estabelecer relações quantitativas entre os parâmetros operacionais e a geometria do filete, possibilitando estimar a largura e a altura do cordão sem a necessidade de novas simulações (Queipo et al., 2005; Forrester, Sóbester e Keane, 2008). No contexto da impressão 3D de concreto, abordagens preditivas baseadas em dados já vêm sendo empregadas para estimar a geometria do filete depositado a partir dos parâmetros de processo (Alhussain, Duarte e Brown, 2024; Rizzieri et al., 2026).

A relevância desta pesquisa reside, portanto, em integrar a inovação tecnológica da impressão 3D à modelagem numérica via CFD e à metamodelagem preditiva, investigando a física do processo de extrusão e traduzindo esse entendimento em subsídios técnicos objetivos para o controle do processo. Essa abordagem, de caráter preditivo e parametrizável, contribui para o avanço técnico-científico da manufatura aditiva de materiais cimentícios e serve de base metodológica para estudos sobre o controle de qualidade e o desempenho das estruturas impressas.

1.2 LACUNA DO CONHECIMENTO E ASPECTOS DE INEDITISMO

Para identificar a lacuna de conhecimento que fundamenta esta tese,

adotou-se o método de revisão sistemática da literatura. Segundo Donato e Donato (2019), a revisão sistemática caracteriza-se pela reprodutibilidade e pela propensão à imparcialidade: diferentemente da revisão tradicional ou narrativa, a abordagem sistemática responde a uma questão de pesquisa claramente definida e é reconhecida por sua abrangência metodológica, transparência e replicabilidade.

A partir dessa revisão, observou-se que os estudos sobre impressão 3D de concreto se concentram majoritariamente na análise experimental dos materiais cimentícios e na avaliação de parâmetros como resistência mecânica, reologia e adesão entre camadas. Ainda são relativamente escassas as pesquisas que tratam de forma aprofundada a modelagem numérica do processo de extrusão, sobretudo no que se refere à representação da interface entre o concreto fresco e o ar, sendo este um aspecto essencial para prever o comportamento do filete depositado. Constatou-se, também, que a simulação multifásica pelo modelo *Volume of Fluid* (VOF) apresenta grande potencial para representar o fenômeno de extrusão, embora essa representação enfrente desafios de estabilidade numérica e de fidelidade física, sobretudo em razão da alta viscosidade do concreto e da complexidade de capturar a morfologia da interface concreto–ar de forma realista. Soma-se a isso uma lacuna metodológica: os trabalhos publicados na área frequentemente reportam resultados sem detalhar o procedimento numérico que os sustenta: formulação reológica, esquema de discretização, tratamento da interface e critérios de convergência e estabilidade, o que compromete a reprodutibilidade e obriga cada grupo a reconstruir, por tentativa e erro, boa parte das decisões de modelagem. É nesse ponto que se insere uma das contribuições deste trabalho: a construção de um protocolo numérico robusto e replicável, que explicita as escolhas necessárias para representar a deposição do concreto fresco.

A revisão foi conduzida segundo as etapas propostas por Donato e Donato (2019), ilustradas na Figura 1, que compreendem um total de nove etapas.

Figura 1 – Etapas da revisão sistemática utilizada nesta pesquisa



Fonte: Adaptado de Donato e Donato (2019)

Concluída a Etapa 1 — Formulação da questão de investigação —, avançou-se para a Etapa 2 — Elaboração e registro do protocolo de pesquisa —, na qual foram definidas as bases de dados e elaboradas as consultas (queries) de busca correspondentes. A seleção das bases considerou a área de Engenharia I, conforme a classificação da plataforma Periódicos Capes, resultando na escolha de Web of Science, Scopus e Compendex (Engineering Village) — bases que oferecem ampla cobertura de publicações técnico-científicas e permitem uma análise comparativa quanto à aderência à questão de pesquisa. A consulta foi desenvolvida de forma iterativa, a partir da leitura de artigos de referência em simulação computacional aplicada à impressão 3D de concreto; o Quadro 1 apresenta a evolução das estratégias de busca até a formulação final adotada nesta pesquisa. A mesma estratégia foi reaplicada, sem modificações, para atualizar a revisão com as publicações de 2024 a 2026 (última linha do Quadro 1).

Quadro 1 – Evolução das estratégias de busca (queries) utilizadas na revisão sistemática

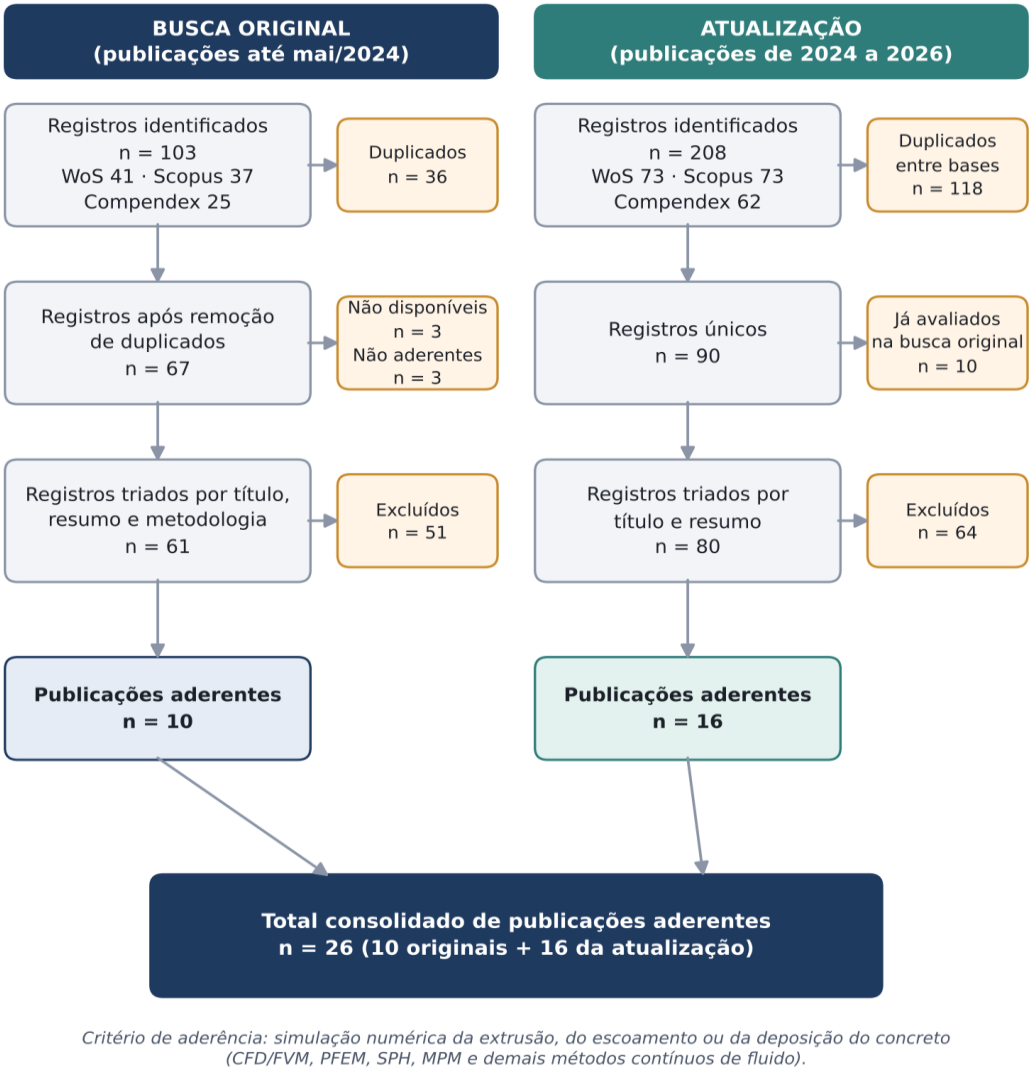
Período de elaboração	**Evolução conceitual e ajustes principais**	***Query* resultante**
Dez/2023	Primeiras formulações com foco na simulação numérica e comportamento reológico do concreto. Foram testadas variações entre *finite element modelling* e *simulation*, incluindo termos como *mortar* e *pumping*, ainda com resultados dispersos.	*("3D printed concrete" OR "3D concrete printing") AND ("processes simulation*" OR "simulation*" OR " Finite element modelling*" OR "Finite element*") AND (Rheology* OR pumping* OR mortar)*
Jan/2024	Inclusão de termos relacionados ao processo de extrusão (*extrusion process*, *material flow*, *nozzle shape*) e variáveis operacionais (*speed*, *flow rate*), buscando restringir o escopo à dinâmica do escoamento durante a impressão 3D.	*("Concrete 3D printing" OR "Extrusion process in concrete 3D printing") AND ("Extrusion speed" OR "Material flow" OR "Printer nozzle shape") AND ("Layer adhesion" OR "Printing uniformity" OR "Concrete mechanical properties" OR "Process efficiency")*
Abril a Maio/2024	Consolidação do *query* com enfoque no método dos volumes finitos (*finite volume method*), dinâmica dos fluidos computacional (*CFD*) e propriedades reológicas, estabelecendo o refinamento final utilizado nas buscas sistemáticas.	*("3D printed concrete" OR "3D concrete printing" OR "3DCP") AND ("processes simulation*" OR "simulation*" OR "finite volume method*" OR "finite volumes*") AND ("Rheology*" OR "CFD*" OR "Extrusion*")*
Junho/2024 a 2026	*Reaplicação da consulta final consolidada, sem alteração de*	*("3D printed concrete" OR "3D concrete printing" OR "3DCP")*

Período de elaboração	Evolução conceitual e ajustes principais	*Query* resultante
	termos, às três bases (Web of Science, Scopus e Compendex), restrita às publicações de 2024 a 2026 e com remoção das duplicidades em relação aos 103 registros da busca original. Realizada como atualização da revisão, em atendimento às recomendações da banca.	*AND ("processes simulation*" OR "simulation*" OR "finite volume method*" OR "finite volumes*") AND ("Rheology*" OR "CFD*" OR "Extrusion*") [filtro de período: 2024–2026]*

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

As buscas foram executadas de modo independente em cada plataforma, observando critérios de filtragem temporal, abrangência (título, resumo e texto completo) e operadores booleanos compatíveis. Diversas combinações de queries foram testadas, com ajustes sucessivos voltados à exclusão de resultados irrelevantes, especialmente artigos que abordavam aditivos, compósitos ou cimentos sem foco em modelagem computacional. Ao término das buscas e do cruzamento de dados entre as plataformas, obteve-se um total de 103 publicações (Figura 2). A revisão foi conduzida em duas fases, com a mesma estratégia de busca. Na primeira, executada em abril e maio de 2024, quando a estratégia foi consolidada (Quadro 1), obteve-se, ao término das buscas e do cruzamento de dados entre as plataformas, um total de 103 publicações (41 na Web of Science, 37 na Scopus e 25 na Compendex). Na segunda, a consulta final foi reaplicada, sem modificações, às mesmas três bases, restrita às publicações de 2024 a 2026, de modo a atualizar a revisão com a literatura posterior à busca original (Figura 2). A atualização retornou 73 registros na Web of Science, 73 na Scopus e 62 na Compendex (208 no total); removidas as duplicidades entre as bases (118), restaram 90 registros únicos, dos quais 10 já haviam sido avaliados na busca original, restando 80 registros inéditos para triagem. Os trabalhos de 2024 a 2026 identificados por essa atualização integram, portanto, a revisão sistemática, e não mais apenas a fundamentação complementar.

Figura 2 –Fluxo de identificação, triagem e seleção das publicações da revisão sistemática (busca original e atualização até 2026)



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Na Etapa 3 — Definição dos critérios de inclusão e exclusão —, eliminaram-se as publicações duplicadas, de acesso restrito e de baixa aderência à questão de pesquisa. A Etapa 4 consistiu na leitura sistemática de títulos, resumos e metodologias, priorizando os trabalhos que empregavam simulação multifásica (CFD) ou o Método dos Volumes Finitos (FVM); as Etapas 5 e 6 corresponderam, respectivamente, à seleção dos estudos e à avaliação de sua aderência à questão de pesquisa (Tabela 1). A Etapa 7 — Extração dos dados — permitiu reunir informações sobre propriedades reológicas, modelagem numérica e processos de extrusão e deposição. Na atualização, os 80 registros inéditos foram triados por título e resumo segundo os mesmos critérios, adotando-se como critério de aderência a presença de

simulação numérica da extrusão, do escoamento ou da deposição do concreto (CFD/FVM, PFEM, SPH, MPM ou outros métodos contínuos de fluido). Foram excluídos 64 registros, por tratarem de propriedades mecânicas, reforço e desempenho estrutural, materiais e reologia experimental, controle de processo, modelagem por elementos discretos (DEM) isolada, ou por se tratarem de revisões, sem simulação do escoamento no processo de extrusão; os demais 16 foram considerados aderentes, elevando para 26 o total de publicações aderentes (10 da busca original e 16 da atualização), conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Síntese dos resultados da revisão sistemática

Categoria	Quantidade
Busca original (até mai/2024): total de artigos obtidos	103
Duplicados	36
Não disponíveis	3
Não aderentes	3
Total após filtragem	61
Excluídos após leitura de títulos, resumos e metodologias	51
Publicações aderentes aos objetivos	10
Atualização (2024–2026): total de registros obtidos (Web of Science 73; Scopus 73; Compendex 62)	208
Duplicados entre as bases	118
Registros únicos	90
Já avaliados na busca original	10
Registros inéditos triados por título e resumo	80
Excluídos após leitura de títulos e resumos	64
Publicações aderentes aos objetivos (atualização)	16
Total consolidado de publicações aderentes (busca original + atualização)	26

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A Etapa 8 — Síntese e análise crítica dos resultados —, evidenciou que, embora existam avanços significativos na simulação da impressão 3D de concreto, grande parte dos estudos se concentra na validação experimental, persistindo a necessidade de trabalhos que representem com fidelidade a interface entre o concreto fresco e o ar durante o processo de extrusão. Essa dificuldade decorre da natureza multifásica do escoamento, em que a interface livre sofre deformações complexas e exige soluções numéricas estáveis e de custo computacional elevado. A atualização até 2026 manteve esse panorama: entre os trabalhos aderentes recentes predominam métodos lagrangianos e de partículas (SPH, PFEM, MPM) e formulações fluido-sólido, além de estudos de CFD aplicados ao bocal, ao bombeamento e à mistura. Com base

na leitura de títulos e resumos, não se identificou, entre os trabalhos aderentes, estudo que apresente de forma sistemática um protocolo numérico com tratamento da interface concreto–ar e critérios objetivos de qualidade e estabilidade da geometria do filete, o que mantém a lacuna identificada. Por fim, a Etapa 9 — Disseminação dos resultados — foi contemplada com a publicação dos achados desta tese em periódicos especializados em modelagem numérica e impressão 3D de materiais cimentícios.

Assim, a análise sistemática da literatura permitiu identificar como principal lacuna a *dificuldade de capturar numericamente o comportamento da interface concreto–ar durante a extrusão 3D, assegurando simultaneamente estabilidade numérica, coerência físico-computacional e custo computacional viável*.

Complementarmente à lacuna principal, identificou-se uma *lacuna secundária, de natureza metodológica: a escassez de ferramentas preditivas capazes de generalizar os resultados das simulações numéricas e de relacionar quantitativamente os parâmetros operacionais à geometria do filete, dispensando a realização de novas simulações a cada nova condição*. Essa lacuna complementar não decorre da revisão sistemática — delimitada à modelagem numérica do processo de extrusão —, mas emergiu no decorrer da pesquisa, com a incorporação da metamodelagem preditiva como estratégia para transformar os estudos paramétricos em uma ferramenta de apoio à decisão. Seu embasamento teórico é desenvolvido no Capítulo 5, por meio de revisão específica da literatura sobre Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e Krigagem (GPR). Ressalta-se, ainda, que as abordagens preditivas baseadas em dados, aplicadas à geometria do filete na impressão 3D de concreto, são recentes (Alhussain, Duarte e Brown, 2024; Rizzieri et al., 2026), o que reforça o caráter atual e ainda em consolidação dessa linha e situa a presente pesquisa na fronteira do conhecimento.

Em conjunto, essas lacunas fundamentam a questão de pesquisa, a hipótese e os objetivos desta tese, apresentados na sequência.

1.3 QUESTÃO DA PESQUISA

Como a abordagem numérica pode representar o processo de extrusão do concreto na impressão 3D, permitindo analisar a influência dos parâmetros operacionais sobre a geometria e a estabilidade do filete, e como a metamodelagem preditiva, desenvolvida a partir desses resultados, pode estimar a

geometria do filete depositado sem a necessidade de novas simulações?

1.4 HIPÓTESE DE PESQUISA

A hipótese sustentada é a de que a abordagem numérica multifásica é capaz de representar, com fidelidade físico-computacional e estabilidade numérica, o processo de extrusão do concreto 3D, permitindo analisar a influência dos parâmetros operacionais, notadamente a altura do bico (H_n) e a razão entre a velocidade de deslocamento e a velocidade de extrusão (V/U), sobre a geometria e a estabilidade do filete depositado. Admite-se, ainda, que a metamodelagem preditiva, desenvolvida a partir desses resultados, é capaz de estimar a largura e a altura do filete sem a necessidade de novas simulações, apoiando a seleção de condições operacionais estáveis a um custo computacional viável.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo Geral

Desenvolver, validar e aplicar uma metodologia integrada baseada em dinâmica dos fluidos computacional multifásica (CFD), estudos paramétricos e metamodelagem preditiva para analisar e predizer a morfologia do filete na impressão 3D de concreto (3DCP), estabelecendo relações quantitativas entre os parâmetros operacionais e a estabilidade geométrica da deposição.

1.5.2 Objetivos Específicos

Para sustentar o objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

1. Verificar e calibrar um modelo numérico bidimensional da extrusão do concreto fresco, avaliando a independência de malha e a consistência física dos resultados;
2. Validar o modelo tridimensional frente a resultados consagrados da literatura, avaliando sua capacidade de reproduzir a deposição de materiais viscoplásticos;
3. Investigar a sensibilidade do modelo a parâmetros secundários que influenciam o espalhamento lateral do material;

4. Conduzir estudos paramétricos sistemáticos para quantificar a influência da altura do bico (H_n) e da razão V/U sobre a largura e a altura do filete;
5. Estabelecer critérios quantitativos para classificar o regime de alimentação e a estabilidade geométrica, propondo um Índice de Qualidade geométrica e uma fronteira crítica de estabilidade;
6. Desenvolver e validar metamodelos preditivos da largura e da altura do filete, avaliando sua capacidade preditiva e de generalização;
7. Validar externamente os metamodelos por simulação numérica independente, verificando a precisão preditiva em condições operacionais não pertencentes ao conjunto de treinamento.

1.6 CONTRIBUIÇÕES DA TESE

Ao articular modelagem numérica e metamodelagem preditiva, esta tese oferece as seguintes contribuições ao estudo do processo de extrusão na impressão 3D de concreto:

- um protocolo numérico verificado e validado para representar a extrusão do concreto fresco, com tratamento consistente da interface concreto–ar;
- critérios quantitativos para classificar o regime de alimentação e a estabilidade geométrica do filete;
- uma fronteira crítica de estabilidade no espaço dos parâmetros operacionais, delimitando as combinações que asseguram deposição estável;
- um Índice de Qualidade geométrica que ordena a adequação das condições operacionais dentro da região estável;
- metamodelos preditivos, baseados na Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e na Krigagem (GPR) e validados contra simulação numérica independente, capazes de estimar a largura e a altura do filete sem a necessidade de novas simulações.

Em conjunto, essas ferramentas constituem um protocolo de apoio à decisão para a seleção e o ajuste dos parâmetros operacionais no 3DCP, contribuindo para o avanço técnico-científico sobre o comportamento de materiais

cimentícios no estado fresco e para o aprimoramento das práticas construtivas com impressão 3D.

1.7 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa delimita-se à análise do processo de extrusão do concreto no contexto da impressão 3D, por meio de simulação computacional multifásica (CFD) resolvida pelo Método dos Volumes Finitos (FVM), utilizando o modelo Volume of Fluid (VOF) para representar a interface entre o concreto fresco e o ar. O estudo concentra-se na fase de extrusão e deposição do material no estado fresco, desconsiderando os efeitos de cura, endurecimento e aderência entre camadas.

As simulações foram conduzidas em regime laminar e transiente, adotando-se estratégias de modelagem que conciliam representatividade física e custo computacional viável, como a redução do domínio geométrico por condição de simetria e o tratamento da malha nas regiões de interface entre o concreto e o ar. As variáveis operacionais investigadas são a altura do bico extrusor em relação à base de deposição (H_n) e a razão entre a velocidade de deslocamento e a velocidade de extrusão (V/U); o diâmetro do bico e as propriedades reológicas do material foram mantidos fixos.

O detalhamento do ambiente de simulação, a definição dos parâmetros mantidos fixos a partir do estudo preliminar e as estratégias numéricas adotadas, incluindo a seleção do solver empregado nas etapas de validação e nos estudos paramétricos, são apresentados no capítulo de Metodologia.

1.8 DEFINIÇÃO DOS PRINCIPAIS TERMOS

1) Manufatura aditiva: representa um processo de produção que envolve a adição controlada de material por meio de comandos digitais, abrangendo uma variedade de equipamentos e modelos, incluindo, entre estes, a impressora 3D.

2) Impressão 3D: constitui-se como uma tecnologia de fabricação aditiva que emprega um modelo tridimensional como base para seu desenvolvimento.

3) Concreto Impresso: refere-se à tecnologia de Impressão 3D que emprega materiais cimentícios, notadamente concreto e/ou outros materiais similares de natureza cimentícia.

4) Parâmetros da impressão 3D: referem-se a características e propriedades

reológicas ou processuais inerentes à execução de materiais cimentícios por meio do maquinário especializado.

5) Bombeabilidade: é a tradução direta e mais utilizada para descrever a capacidade do concreto de ser bombeado de forma eficiente. Refere-se à habilidade do concreto fresco de fluir de maneira contínua e sem obstruções por meio de um sistema de bombeamento, garantindo que o material chegue ao ponto de aplicação sem perda de consistência ou pressão.

6) Construtibilidade: é um termo amplamente utilizado em engenharia e arquitetura para descrever a facilidade com que uma estrutura pode ser construída. No contexto da impressão 3D de concreto, refere-se à capacidade do material de ser impresso em camadas sucessivas sem colapsar, mantendo sua forma e integridade. Além disso, envolve a habilidade do concreto de sustentar as camadas subsequentes durante o processo de construção, garantindo a estabilidade e a qualidade da estrutura final.

7) Extrudabilidade: é a capacidade do concreto fresco de ser extrudado de forma contínua e uniforme através do bocal de impressão, mantendo sua forma e estabilidade após a deposição. Um concreto com boa extrudabilidade apresenta fluidez adequada, coesão e resistência à deformação, garantindo que as camadas impressas sejam consistentes e suportem a aplicação de camadas subsequentes sem colapsar.

8) 3DCP: A sigla significa *3D Concrete Printing* (impressão 3D de concreto). Trata-se de uma técnica de fabricação aditiva que utiliza impressoras 3D para depositar camadas de concreto de maneira precisa e controlada, criando estruturas tridimensionais diretamente a partir de um modelo digital.

9) CFD: sigla de *Computational Fluid Dynamics* (Dinâmica dos Fluidos Computacional). Designa o conjunto de métodos numéricos empregados na simulação de escoamentos, permitindo resolver as equações de conservação que governam o comportamento dos fluidos.

10) FVM: sigla de Método dos Volumes Finitos. Trata-se de uma técnica numérica utilizada na dinâmica dos fluidos computacional (CFD) para resolver as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, mediante a discretização do domínio em volumes de controle.

1.9 ESTRUTURA DO TRABALHO

Com o intuito de facilitar a leitura e a compreensão deste estudo, a presente tese está organizada em oito capítulos, além dos elementos pré-textuais e pós-textuais.

O primeiro capítulo, de natureza introdutória, fornece o direcionamento da pesquisa. Divide-se em subitens que abordam a contextualização, a justificativa, a relevância do tema, o objetivo geral e os objetivos específicos, a questão e a hipótese de pesquisa, a delimitação do estudo, a lacuna do conhecimento e os aspectos de ineditismo, a definição dos principais termos, a estrutura do trabalho e os trabalhos e parcerias do grupo de pesquisa da UEL.

O segundo capítulo apresenta a impressão 3D de concreto, aprofundando o embasamento teórico do tema. São abordadas a tecnologia da impressão 3D aplicada à construção civil, o processo de extrusão do concreto 3D, a reologia dos materiais cimentícios aplicados à impressão 3D e o estado da arte em simulação numérica do processo de extrusão.

O terceiro capítulo dedica-se à modelagem matemática que fundamenta as simulações, apresentando a metodologia de volumes de controle, a abordagem Euleriana e o método Volume of Fluid (VOF) para o escoamento multifásico, além dos modelos reológicos adotados (Herschel-Bulkley e Bingham).

O quarto capítulo trata da simulação numérica, descrevendo o Método dos Volumes Finitos (FVM) e a discretização do domínio de cálculo empregada na solução das equações de governo.

O quinto capítulo aborda a metamodelagem e a representação de processos, apresentando a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e a Krigagem / Regressão por Processos Gaussianos (GPR), incluindo as funções de covariância (kernels), a validação cruzada *Leave-One-Out* e as métricas de avaliação dos metamodelos.

O sexto capítulo detalha a metodologia da investigação computacional, organizada em etapas: a verificação e calibração do modelo bidimensional; a validação do modelo tridimensional e a migração do solver ANSYS Fluent para o ANSYS CFX, motivada pelo espalhamento lateral excessivo do filete obtido no Fluent nos dois casos de referência (Seção 7.2.3); os estudos paramétricos; a determinação do Índice de Qualidade e da fronteira de estabilidade; e a

metamodelagem do processo de extrusão.

O sétimo capítulo apresenta os resultados e as discussões, em conformidade com a metodologia estabelecida: a verificação e calibração 2D/3D, a seleção do ambiente de simulação, o teste de independência de malha, os estudos paramétricos, a modelagem por metamodelos e a validação externa por simulação numérica independente.

Por fim, o oitavo capítulo traz a conclusão do trabalho, retomando os objetivos propostos, verificando a hipótese de pesquisa e apresentando as contribuições, as limitações e as sugestões para investigações futuras.

1.10 TRABALHOS E PARCERIAS DO GRUPO DE PESQUISA DA UEL

O grupo de pesquisa da UEL iniciou suas atividades, em 2018, na área de tecnologia de impressão 3D com materiais cimentícios, na qual vem desenvolvendo pesquisas que envolvem iniciação científica, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses, com destaque para:

Trabalho de conclusão de curso da discente Ester Meira Ramos Amorim, com o título: “Avaliação no estado fresco de argamassas para impressão 3D com substituição por metacaulim”;

Trabalho de conclusão de curso do discente Gustavo de Pinheiro Tavares Filla, com o título: “Influência da cinza volante nas propriedades físicas e reológicas das argamassas para impressão 3D”.

Trabalho de conclusão de curso da discente Lauane Trinetto Costa, com o título: "Avaliação das propriedades em estado fresco de uma argamassa para impressão 3D com substituição do cimento Portland por Metacaulim e adição de HPMC".

Dissertação de mestrado, de autoria de Monique de Brito Filgueiras, com o título: “Avaliação das propriedades mecânicas de material cimentício produzido por impressão 3D com foco na aderência entre as camadas”.

E com a tese de doutorado, de autoria de Lívia Fernanda Silva, com o título: "Materiais cimentícios suplementares desenvolvidos com metacaulim e HPMC para impressão 3D: influência nos aspectos de extrudabilidade e construtibilidade".

E com a tese de doutorado em andamento da discente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv) da UEL, Monique de Brito Filgueiras, com o título: "Projeto aplicado à impressão 3D de material cimentício com

o uso da tecnologia BIM".

E por fim a tese de doutorado em andamento da discente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGECiv) da UEL, Allana Ribeiro Mendes, com o título: "Abordagem numérica e metamodelagem preditiva da geometria do filete na impressão 3D de concreto".

O desenvolvimento desta pesquisa contou com o apoio do Governo do Estado do Paraná, por meio da concessão de um projeto que possibilitou a aquisição de uma impressora 3D em escala real e de outra em escala de protótipo, equipamentos fundamentais para a sua realização.

2 IMPRESSÃO 3D DE CONCRETO

Este capítulo apresenta a impressão 3D de concreto (3DCP) e os fundamentos que sustentam o estudo do processo de extrusão. Parte dos princípios da manufatura aditiva aplicada à construção civil e discute as variáveis que governam o comportamento do concreto fresco durante a deposição, com destaque para as características de extrudabilidade e para a reologia dos materiais cimentícios. Em seguida, reúne os principais estudos que empregam a simulação computacional na análise desse processo. Com isso, o capítulo consolida o conhecimento existente sobre o tema e evidencia as lacunas das pesquisas atuais, oferecendo a base conceitual para o desenvolvimento desta tese.

2.1 TECNOLOGIA DA IMPRESSÃO 3D APLICADA À CONSTRUÇÃO CIVIL

A tecnologia de impressão 3D aplicada à construção civil tem avançado significativamente, como evidenciado pelas várias demonstrações de componentes e estruturas impressas descritas por Buswell *et al. (*2018) como ilustra a Figura 3. Nesta figura é possível verificar as diferentes aplicações da impressão 3D, incluindo a fabricação de componentes independentes e para montagem, impressão *in situ* de paredes e colunas, e a criação de fôrmas permanentes que são posteriormente preenchidas com concreto convencional. Estes exemplos destacam a versatilidade da impressão 3D em criar geometrias complexas e customizadas sem a necessidade de fôrmas tradicionais, permitindo uma maior liberdade e eficiência na construção. A adoção dessa tecnologia promete revolucionar o setor, oferecendo novas possibilidades de projetos arquitetônicos e métodos de construção mais rápidos e sustentáveis, conforme apontado pelos autores.

Figura 3 – Exemplos de tipos de aplicação de 3DCP e orientação dos componentes fabricados

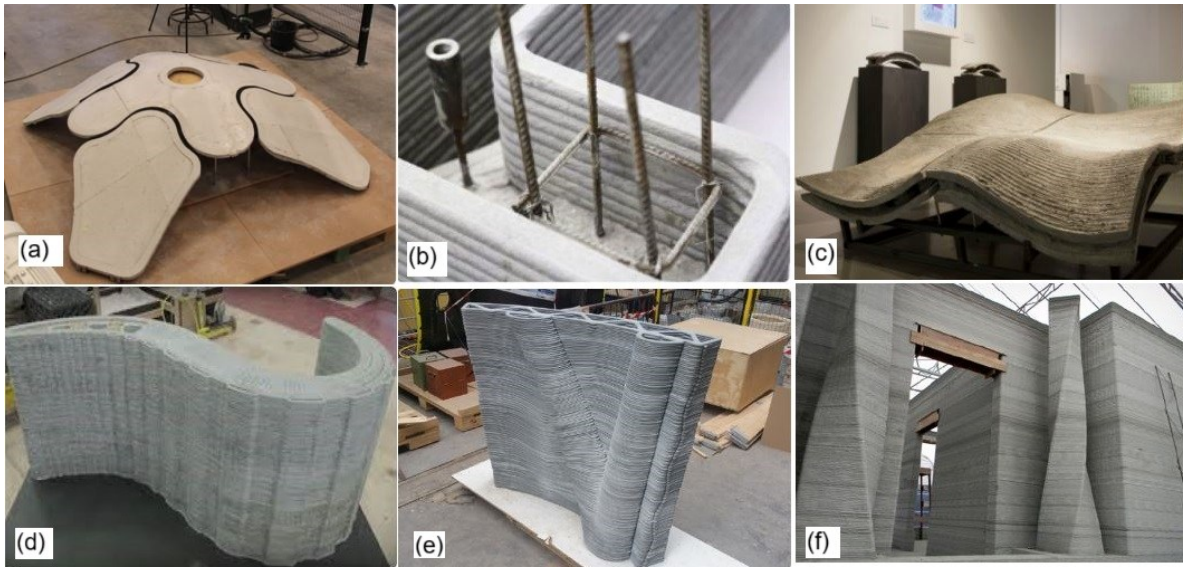


Figura 3.(a). Painel, impresso horizontalmente, com aplicação de casca e preenchimento. **Figura 3.(b)**. Parede in situ, impressa verticalmente, aplicação de casca e preenchimento. **Figura 3.(c)**. Fabricação de componente horizontal. **Figura 3.(d)**. Componente de geometria sólida impresso verticalmente. **Figura 3.(e)**. Componente de painel impresso verticalmente. **Figura 3.(f)**. Paredes e colunas impressas verticalmente in situ. **Fonte**: Buswell *et al. (*2018, p. 2).

Complementando, An *et al. (*2024) apontam que a impressão 3D de concreto dispensa o uso de fôrmas tradicionais ao depositar camadas frescas de concreto diretamente para a construção das estruturas. Eles salientam que, além da redução do tempo de execução e do esforço no canteiro de obras, essa abordagem inovadora oferece vantagens econômicas e ambientais significativas. A tecnologia também possibilita maior liberdade de desenhos, favorecendo a criação de projetos customizados e acelerando o processo de construção.

2.1.1 Aplicações e Avanços Recentes

Spangenberg et al. (2021) destacam os avanços recentes e as amplas possibilidades de aplicação da impressão 3D de concreto na construção civil, ressaltando que a tecnologia permite a criação de formas mais orgânicas e complexas, difíceis de serem executadas por métodos convencionais. Essa liberdade de projeto contribui para a concepção de estruturas arquitetônicas inovadoras, ao mesmo tempo em que reduz o desperdício de materiais e amplia o potencial de personalização das edificações.

Complementando essa perspectiva, Xiao et al. (2021) enfatizam que

o uso da impressão 3D de concreto traz benefícios adicionais, como a aceleração do processo construtivo e a mitigação de perdas de material durante a execução. Os autores também salientam que essa tecnologia favorece práticas mais sustentáveis, ao reduzir o consumo de energia e as emissões de carbono, configurando-se como uma alternativa eficiente e ambientalmente responsável para os desafios contemporâneos da construção civil.

A integração entre os avanços tecnológicos e as aplicações práticas da impressão 3D de concreto tem impulsionado o desenvolvimento de estruturas mais eficientes e sustentáveis. Nguyen-Van et al. (2023) evidenciam que a modelagem das propriedades do concreto no estado fresco é fundamental para aprimorar o controle das variáveis de impressão e garantir a qualidade do produto final. Nesse contexto, ferramentas de simulação, como o Método dos Volumes Finitos (FVM), assumem papel essencial ao permitir a análise das interações entre parâmetros operacionais, como velocidade e vazão, e a identificação de possíveis zonas de instabilidade durante o processo. Assim, a combinação entre modelagem reológica, simulação numérica e liberdade de projeto tem consolidado a impressão 3D de concreto como uma tecnologia promissora, capaz de unir precisão, sustentabilidade e inovação no setor da construção civil.

2.1.2 Desafios e Oportunidades

A impressão 3D de concreto ainda enfrenta desafios técnicos e operacionais que limitam sua plena consolidação na construção civil. Entre eles destacam-se o controle preciso da deposição do material, o desenvolvimento de concretos com propriedades reológicas adequadas à extrusão e a necessidade de atender às normas de qualidade e desempenho estrutural. Somam-se a esses aspectos as barreiras econômicas, relacionadas ao alto custo de equipamentos e materiais, que exigem avanços tecnológicos e estratégias de otimização para tornar o processo mais viável e competitivo.

Um dos principais desafios apontados por Xiao et al. (2021) está na variação das propriedades mecânicas entre as camadas impressas. Essa diferença é influenciada por fatores como as características das interfaces, o número de camadas depositadas e as dimensões do bico de extrusão. A ausência de uniformidade no desempenho estrutural do concreto impresso está diretamente relacionada a essas

variáveis, tornando o controle de qualidade e a previsibilidade do comportamento do material aspectos técnicos de grande complexidade.

Reinold *et al. (*2022) destacam outra dificuldade crítica: equilibrar a eficiência do processo de extrusão com a precisão na deposição das camadas. A interação complexa entre fatores como vazão, velocidade de impressão e geometria do bico de extrusão pode impactar significativamente a forma e a uniformidade das camadas impressas. O desafio aqui consiste em encontrar o equilíbrio para garantir que o processo de extrusão atenda tanto às exigências de eficiência quanto às de qualidade na deposição das camadas, algo essencial para assegurar a integridade estrutural das construções.

Nguyen-Van *et al. (*2023) também chamam a atenção para a complexidade envolvida na modelagem analítica e numérica do processo de impressão 3D de concreto. A dificuldade em simular de maneira precisa o comportamento dos materiais durante a fabricação digital continua a ser um grande obstáculo. Embora existam avanços na compreensão dos processos de extrusão e impressão, os modelos disponíveis ainda não oferecem soluções completas, tornando a otimização desses processos um campo de estudo em aberto.

Adicionalmente, Long *et al. (*2019) identificam desafios relacionados à transformação de materiais convencionais em versões imprimíveis, mantendo suas propriedades de desempenho durante todo o processo de impressão. Garantir que o material não apenas flua adequadamente durante a extrusão, mas também mantenha sua forma após a deposição, é uma questão crítica para a viabilidade da impressão 3D de concreto. Contudo, esses autores também enxergam oportunidades promissoras, como o desenvolvimento de materiais mais sustentáveis, como aqueles à base de microcelulose cristalina, e o uso de propriedades tixotrópicas para melhorar a capacidade de impressão dos materiais.

Em síntese, os principais desafios da impressão 3D de concreto envolvem a complexidade da modelagem do processo, o aperfeiçoamento da extrusão e a adaptação de materiais cimentícios às exigências da impressão. Paralelamente, essas limitações abrem espaço para o desenvolvimento de novas formulações e técnicas, promovendo soluções mais sustentáveis para a construção civil. Superar esses obstáculos é essencial para consolidar a impressão 3D de concreto como uma tecnologia viável e eficiente no setor.

2.2 PROCESSO DE EXTRUSÃO DO CONCRETO 3D

No contexto da fabricação aditiva, a etapa de extrusão pode ser vista como o processo de moldar a camada de material cimentício depositada conforme sua seção transversal. Essa etapa é realizada ao forçar o material ao escoar através de uma contração de seção (Mechtcherine *et al.,* 2020).

Reinold *et al. (*2022) discutem detalhadamente o processo de extrusão do concreto 3D. Eles abordam a importância da compreensão dos processos de extrusão e deposição durante a impressão 3D de concreto para garantir a qualidade do produto final. Os autores destacam que as forças de extrusão geradas no bico de extrusão podem ser significativamente maiores do que aquelas induzidas pelo peso próprio de uma camada, podendo chegar a ser até 6 vezes maiores para o intervalo de parâmetros estudado. Essas forças de extrusão podem influenciar a estabilidade estrutural, a resistência à adesão entre camadas e causar deformações nas camadas de substrato. Além disso, enfatizam a importância de compreender e controlar o processo de extrusão do concreto 3D, destacando a necessidade de considerar as forças de extrusão, as características de deformação do substrato e a escolha adequada de parâmetros de processo e material para garantir a qualidade e a estabilidade das estruturas impressas em 3D.

2.2.1 Princípios da Extrusão

No entendimento de Reinold et al. (2022), os princípios fundamentais do processo de extrusão do concreto 3D incluem o controle das forças de extrusão para garantir a estabilidade estrutural e a adesão entre camadas, a melhoria dos parâmetros de processo como velocidade de impressão e geometria do bico, a consideração das propriedades reológicas e mecânicas do material de impressão, e o monitoramento da deformação do substrato para prevenir deformações indesejadas. Ao seguir esses princípios, é possível garantir a qualidade e a precisão na fabricação de estruturas impressas em 3D.

A eficácia da impressão 3D com extrusão de concreto depende da capacidade do material fluir e extrudar pelo bico de maneira controlada, sem deformação excessiva. Isso requer o controle preciso das propriedades reológicas,

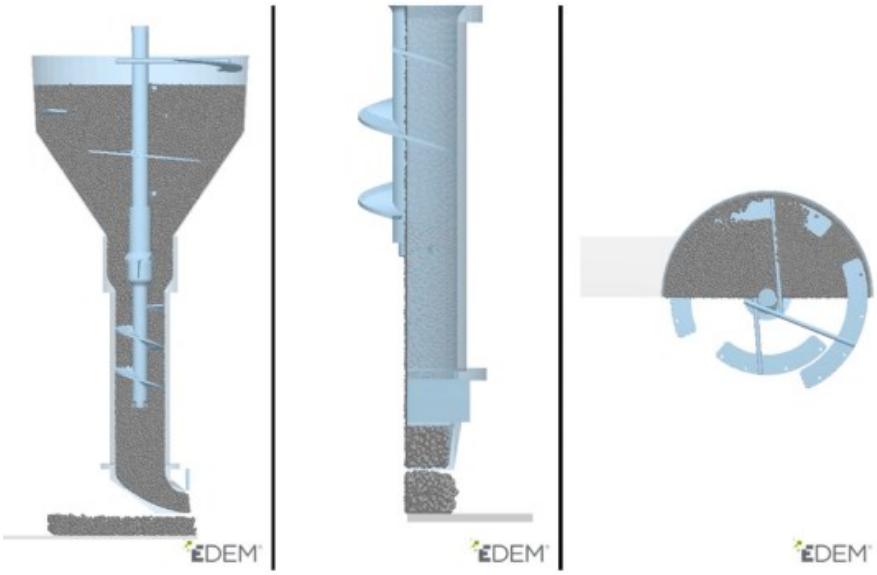
como viscosidade e tixotropia, para garantir a consistência e a integridade estrutural durante o processo. Além disso, a formulação do material, incluindo a granulometria dos agregados e a distribuição das partículas, desempenha um papel crucial na capacidade consistente de extrusão do material (Buswell et al., 2018).

O processo de extrusão do concreto 3D envolve uma interação complexa entre o material e a geometria do extrusor, sendo importante o ajuste dos parâmetros de extrusão para garantir a integridade estrutural do material depositado. Na simulação apresentada na Figura 4, foi utilizado o Método dos Elementos Discretos (DEM) para resolver numericamente o comportamento do escoamento do concreto em um extrusor helicoidal de grande escala, capaz de lidar com agregados de até 8 mm de diâmetro. Essa abordagem permite visualizar detalhadamente como as partículas de concreto se comportam durante a extrusão e subsequente deposição das camadas, fornecendo uma compreensão aprofundada das dinâmicas de escoamento que ocorrem dentro do extrusor[1] (Perrot *et al.,* 2021).

Com a capacidade de modelar individualmente os constituintes do concreto, como partículas de agregado e pasta cimentícia, e de acompanhar suas interações em nível de partícula, o DEM mostrou-se uma ferramenta numérica eficiente para simular com precisão o comportamento de materiais heterogêneos e de alto desempenho em geometrias complexas, tanto na simulação fornecida por Perrot et al. (2021) quanto nos resultados obtidos pelos pesquisadores da IAB Weimar GmbH e da TU Dresden.

[1] O Método dos Elementos Discretos (DEM), proposto por Cundall e Strack (1979), é uma técnica numérica que modela o material como um conjunto de partículas discretas que interagem entre si por contato. O movimento de cada partícula é calculado individualmente pela segunda lei de Newton, enquanto as forças de contato (normais, tangenciais e de atrito) são obtidas por leis constitutivas a cada passo de tempo. É especialmente adequado para representar materiais granulares e o escoamento de misturas com agregados, como o concreto fresco.

Figura 4 – Simulação de concreto imprimível em extrusor de grande escala elucidando processos de extrusão e deposição



Fonte: Perrot *et al. (*2021, p. 9)

De modo geral, por meio da Figura 4 é possível visualizar as partículas no extrusor, permitindo assim identificar os pontos críticos de escoamento e áreas onde pode haver segregação de material, contribuindo para o refinamento dos parâmetros de extrusão.

Enfim, um sistema de extrusão bem projetado, de acordo com Formiga et al. (2022), garante um fornecimento consistente e preciso do material de construção, contribuindo para uma extrusão precisa e uniforme, essencial para a qualidade das peças impressas na construção civil. A escolha adequada da composição do material, dimensionamento correto dos componentes e dos parâmetros elétricos e mecânicos são fundamentais para obter bons resultados na impressão 3D e aumentar a eficiência do processo.

2.2.2 Características de Extrudabilidade

A extrudabilidade na impressão 3D de concreto refere-se à capacidade do material ser continuamente depositado em camadas sucessivas, mantendo forma e estabilidade durante a construção. Essa propriedade é determinante para a precisão dimensional e para a integridade estrutural das peças

impressas, exigindo que o concreto apresente consistência e reologia adequadas para fluir pelo bico sem interrupções nem deformações excessivas.

Rubin (2021) sustenta que a propriedade fundamental que distingue o concreto destinado à impressão 3D na construção civil é a extrudabilidade. Essa característica refere-se à capacidade de o material sair pelo bocal de impressão e formar um filamento homogêneo com as dimensões desejadas. A avaliação da mistura aceitável considera a ausência de defeitos superficiais, rachaduras ou rupturas, bordas visíveis e bem definidas, e conformidade dimensional ao longo das camadas. Para garantir a qualidade, desempenho e durabilidade do produto final, é determinante melhorar a formulação do concreto, assegurando a compatibilidade das propriedades no estado fresco com as configurações dos equipamentos de impressão.

Silva (2023) acrescenta que o controle da taxa de extrusão e da estabilidade da camada depositada é crucial para evitar obstruções, deformações ou perda de precisão geométrica. Essa etapa requer um balanceamento entre viscosidade, velocidade e pressão de bombeamento, além do desenvolvimento de métodos de ensaio que avaliem o desempenho do material durante a extrusão, permitindo otimizar o processo de impressão e sua automação.

De acordo com Nguyen-Van et al. (2023), a extrudabilidade compõe, junto com a bombeabilidade e a construtibilidade, o conjunto de parâmetros fundamentais que determinam o sucesso da impressão 3D de concreto. Esses fatores são interdependentes: o material deve fluir de forma contínua pelo bico, manter a forma após a deposição e aderir adequadamente às camadas anteriores. Propriedades como viscosidade, taxa de extrusão e geometria do bico exercem influência direta sobre esses resultados.

No processo de extrusão de concreto durante a impressão 3D, Chen et al. (2020) ilustram a influência da distância de afastamento do bico (*nozzle standoff distance*) na Figura 5, destacando como diferentes distâncias afetam a precisão e a qualidade da deposição das camadas. Distâncias maiores podem resultar em deposição imprecisa, criando inconsistências na altura das camadas e reduzindo a qualidade da impressão. A variação na distância altera as pressões de contato e as áreas de superfície entre camadas, impactando a resistência de ligação. Deposição imprecisa aumenta a porosidade na interface entre as camadas, diminuindo a resistência mecânica. Além disso, intervalos de tempo entre as deposições afetam a

adesão entre camadas, com intervalos mais longos potencialmente reduzindo a ligação. A viscosidade e as propriedades reológicas do material também influenciam a interação e a adesão entre camadas.

Figura 5 – A influência da distância de afastamento do bico (nozzle standoff distance) no processo de extrusão de concreto durante a impressão 3D

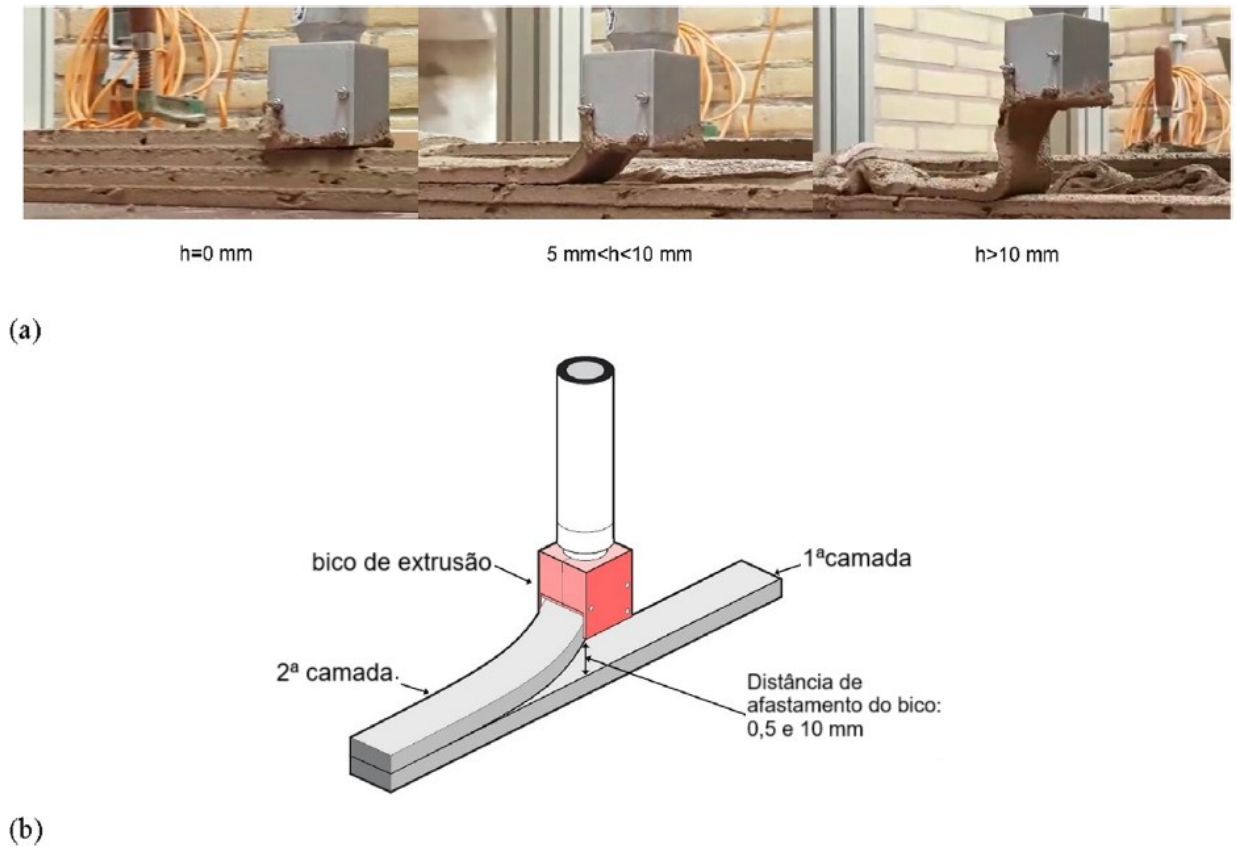


Figura 5.a. Aumentar a distância de afastamento do bico *h* pode levar a uma deposição de camada imprecisa. **Figura 5.b. Diagrama esquemático** do processo de impressão com diferentes distâncias de afastamento do bico entre duas camadas.
Fonte: Chen *et al. (*2020, p. 4).

Em suma, a Figura 5 destaca a importância de se analisar a distância de afastamento do bico e outros parâmetros na qualidade, além da resistência das camadas de concreto 3D impressas, enfatizando a necessidade de ajustes cuidadosos para a extrusão das camadas de materiais cimentícios.

2.3 REOLOGIA NA IMPRESSÃO 3D

Estudar a reologia é compreender como as propriedades reológicas

dos materiais afetam processos de fabricação, transporte e aplicação em uma variedade de indústrias, incluindo a indústria de materiais de construção, alimentos, farmacêutica, cosméticos e e muito mais (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989).

A reologia, cujos fundamentos remontam aos trabalhos de Bingham (1922), é a ciência que estuda o escoamento e a deformação da matéria sob a ação de tensões (BINGHAM, 1922; BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987; BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). Aplicada ao concreto fresco, é relevante para entender e modelar as propriedades viscoelásticas do material durante o processo de impressão 3D (ROUSSEL, 2018).

Conforme Abbaoui *et al. (*2023), a reologia é a ciência que estuda o escoamento e a deformação do fluido, sendo relevante para entender e modelar as propriedades viscoelásticas do concreto fresco durante o processo de impressão 3D.

A reologia, segundo Long *et al. (*2019), é a área do conhecimento que se dedica ao estudo do comportamento de materiais em relação ao seu escoamento e deformação. É uma ciência que consiste em compreender como os materiais se comportam durante processos de fabricação, especialmente na impressão 3D, onde é fundamental entender como os materiais fluem e mantêm sua forma. A capacidade de um material de se ajustar adequadamente durante o processo de impressão é vista como um fator crítico na avaliação e no desenvolvimento de materiais que possam ser impressos de forma satisfatória.

Nguyen-Van *et al. (*2023) exploram em sua pesquisa a reologia no contexto das propriedades no estado fresco do concreto imprimível em 3D, destacando sua importância para entender como o concreto se comporta sob diferentes condições de tensão, influenciando diretamente a extrudabilidade e a capacidade de construção. Propriedades reológicas, como viscosidade e tensão de escoamento, são importantes para garantir uma extrusão eficaz e a manutenção da forma após a deposição.

2.3.1 Classificação dos Modelos Reológicos

Na impressão 3D com concreto, é importante distinguir entre a reologia como propriedade intrínseca do material e o modelo reológico como representação matemática do seu comportamento físico. A reologia descreve experimentalmente a forma como o concreto fresco responde às tensões aplicadas,

revelando suas características de fluidez, resistência ao escoamento, tixotropia e capacidade de recuperação estrutural. Essas propriedades são determinadas por meio de ensaios reológicos que fornecem curvas de tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação, a partir das quais se infere o comportamento do material: plástico, pseudoplástico, dilatante ou tixotrópico.

O modelo reológico, por outro lado, constitui a formulação matemática que traduz esse comportamento físico em equações constitutivas, permitindo que ele seja incorporado a simulações numéricas ou análises computacionais de fluxo. Segundo Lim e Tan (2024), enquanto o comportamento reológico é uma característica física mensurável do concreto fresco, o modelo reológico é uma abstração desenvolvida para representar esse comportamento de modo contínuo e compatível com as equações de conservação de massa e quantidade de movimento empregadas em simulações computacionais (CFD). Dessa forma, o modelo não altera a composição ou a formulação do material, mas fornece uma descrição matemática refinada de suas propriedades reológicas observadas experimentalmente.

Dessa forma, a identificação do modelo reológico mais adequado decorre diretamente da análise experimental do comportamento do material, e não de uma escolha arbitrária. Segundo Lim e Tan (2024), o modelo reológico adequado não é definido por decisão subjetiva, mas inferido a partir da resposta do concreto fresco quando submetido a cisalhamento controlado. As curvas obtidas nos ensaios de reologia evidenciam o regime predominante: plástico, pseudoplástico ou tixotrópico, permitindo associar o comportamento medido ao modelo constitutivo correspondente. Eles destacam que os principais modelos reológicos aplicados ao concreto na manufatura aditiva são o modelo de plástico de Bingham, o modelo de Herschel–Bulkley, o modelo de Casson, o modelo de Papanastasiou, o modelo de Banfill, o modelo de Roussel e o modelo de Krüger. Os autores explicam que o modelo de plástico de Bingham descreve materiais que se comportam como sólidos até que uma tensão de escoamento crítica seja ultrapassada, passando então a fluir com uma viscosidade plástica constante. O modelo de Herschel–Bulkley, por sua vez, amplia essa concepção ao incorporar uma relação de lei de potência entre tensão e taxa de deformação, permitindo representar materiais que exibem comportamento pseudoplástico (*shear-thinning*) ou dilatante (*shear-thickening*). O modelo de Casson é citado como uma alternativa voltada a materiais de fluência não linear, enquanto o de Papanastasiou introduz uma função de crescimento de tensão que suaviza a

descontinuidade de escoamento em baixas taxas de cisalhamento, evitando o problema da viscosidade infinita. Já o modelo de Banfill considera simultaneamente a dependência da tensão de escoamento e da viscosidade plástica em relação à taxa de cisalhamento. O modelo de Roussel incorpora explicitamente os efeitos da estruturação dependente do tempo, introduzindo um termo de taxa de tixotropia que descreve o endurecimento progressivo do material em repouso e sua destruturação durante o cisalhamento. Por fim, o modelo de Krüger acrescenta um termo de refloculação rápida às formulações anteriores, permitindo capturar o comportamento tixotrópico de concretos imprimíveis com maior precisão.

Conforme Sérgio Filho *et al. (*2020) o comportamento desses fluidos não newtonianos é determinado pela relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, diferentemente dos fluidos newtonianos, nos quais essa relação é constante, resultando em uma viscosidade única e invariável. No caso específico de fluidos não newtonianos, a relação entre tensão e taxa de cisalhamento não é constante, manifestando uma viscosidade variável com a taxa de cisalhamento.

Nguyen-Van *et al. (*2023) abordam a classificação dos modelos reológicos na modelagem das propriedades no estado fresco do concreto imprimível em 3D, destacando a complexidade da reologia do material. A classificação desses modelos frequentemente inclui categorias como os modelos newtonianos, que possuem viscosidade constante, e os modelos não newtonianos, onde a viscosidade varia com a taxa de deformação, como os modelos Bingham e Herschel-Bulkley. A correta classificação dos modelos é fundamental para entender o comportamento do concreto durante a extrusão e deposição.

O comportamento reológico dos fluidos pode ser descrito pela relação entre o tensor de tensões e o tensor taxa de deformação. Para um fluido incompressível, o tensor de tensões de Cauchy decompõe-se em uma parcela isotrópica de pressão e uma parcela desviadora (viscosa), conforme a Equação (2.1):

$$\sigma = -p\,I + \tau \tag{2.1}$$

em que σ é o tensor de tensões, p a pressão, I o tensor identidade e τ (tau) o tensor de tensões viscosas (desviador). Cabe destacar que τ é um tensor de segunda ordem, com nove componentes (3×3), das quais seis são independentes por simetria — de modo que a usual “tensão de cisalhamento” corresponde a apenas uma de suas componentes.

O tensor taxa de deformação, representado por D (em negrito, para distingui-lo do diâmetro D do bocal), é definido a partir do gradiente do campo de velocidades u (Equação 2.2):

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \tag{2.2}$$

e sua magnitude escalar γ̇, empregada nas leis constitutivas e que depende do próprio tensor D, é dada pelo segundo invariante (Equação 2.3):

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\, D : D} \tag{2.3}$$

Para um fluido newtoniano generalizado, a relação constitutiva entre o tensor de tensões viscosas τ e o tensor taxa de deformação D assume a forma (Equação 2.4):

$$\tau = 2\,\eta(\dot{\gamma})\, D \tag{2.4}$$

na qual a viscosidade aparente η depende da magnitude da taxa de deformação (BIRD; ARMSTRONG; HASSAGER, 1987). No caso newtoniano, η = μ é constante; nos fluidos não newtonianos, η varia com γ̇.

Segundo Roussel (2018), os concretos destinados à impressão 3D apresentam comportamento viscoelástico-plástico e podem ser representados por diferentes modelos reológicos, conforme o regime de deformação. O autor identifica o modelo plástico de Bingham (BINGHAM, 1922) como o mais recorrente, no qual o material só escoa após ser superada a tensão de escoamento (τ_0), mantendo, a partir de então, viscosidade plástica constante (μ_p), conforme a Equação (2.5):

$$\eta(\dot{\gamma}) = \mu_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}, |\tau| > \tau_0 \tag{2.5}$$

Para respostas não lineares, aplica-se o modelo de Herschel–Bulkley (HERSCHEL; BULKLEY, 1926), que substitui a viscosidade constante por uma lei de potência, capturando comportamentos pseudoplástico (n < 1) ou dilatante (n > 1), conforme a Equação (2.6):

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\,\dot{\gamma}^{n-1} \tag{2.6}$$

em que K é o índice de consistência e n o índice de escoamento.

Observa-se que, em ambos os modelos, o termo $\tau_0/\dot{\gamma}$ faz a viscosidade

aparente tender ao infinito quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ (regiões não escoadas), o que constitui a descontinuidade de escoamento e gera instabilidade numérica. A regularização proposta por Papanastasiou (1987) contorna esse problema ao introduzir um parâmetro de crescimento exponencial de tensão m (s), conforme a Equação (2.7):

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\,\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0(1 - e^{-m\dot{\gamma}})}{\dot{\gamma}} \tag{2.7}$$

O efeito regularizador torna-se evidente ao avaliar o limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$: expandindo o termo exponencial em série de Taylor, $1 - e^{(-m\dot{\gamma})} \approx m\dot{\gamma}$, o termo plástico assume valor finito ($\tau_0 \cdot m$) e, para o modelo de Bingham (n = 1; K = μ_p), a viscosidade aparente resulta (Equação 2.8):

$$\eta = \mu_p + \tau_0\, m \quad (\dot{\gamma} \rightarrow 0) \tag{2.8}$$

ou seja, para o modelo de Bingham, a formulação de Papanastasiou elimina o problema da viscosidade infinita — o que não é evidente apenas na descrição verbal —, viabilizando a solução numérica em toda a extensão do domínio, inclusive nas zonas de baixa taxa de deformação. Para o modelo de Herschel–Bulkley com n < 1, contudo, a regularização remove apenas a singularidade do termo plástico (que passa a $\tau_0 \cdot m$): a parcela $K \cdot \dot{\gamma}^{(n-1)}$ continua divergindo quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, de modo que é necessário limitá-la, por exemplo, por uma viscosidade máxima η_{max} ou por uma taxa de cisalhamento mínima, como adotado nas simulações (Apêndices A e B).

No estudo de Comminal et al. (2020), com base na modelagem desenvolvida pelos autores, os modelos reológicos aplicados aos concretos imprimíveis foram classificados em duas categorias principais derivadas do modelo de Bingham: o modelo de fluido newtoniano generalizado (GNF) e o modelo elasto-visco-plástico (EVP). O primeiro representa o concreto como um fluido viscoplástico inelástico, que permanece sem escoar até que a tensão aplicada ultrapasse o limite de escoamento (σ_γ), passando então a fluir com viscosidade plástica constante (η_p), com tensão proporcional à taxa de cisalhamento. Já o modelo EVP introduz uma componente elástica ao comportamento do material não escoado, simulando o concreto como um sistema composto por mola, amortecedor e elemento de atrito seco, o que permite representar deformações reversíveis antes do início do escoamento. Assim, enquanto o GNF descreve o comportamento viscoplástico puro, o EVP incorpora a elasticidade e a resposta viscoelástica típica do concreto fresco,

sendo mais fiel à realidade observada durante o processo de extrusão e deposição em camadas na impressão 3D. Os autores afirmam que a escolha do modelo afeta, portanto, a fidelidade da simulação em relação ao comportamento real do material, especialmente em cenários que envolvem mudanças rápidas de velocidade ou tensão durante a extrusão, como ocorre em processos de impressão de múltiplas camadas ou geometrias complexas.

2.3.2 Propriedades Reológicas

De acordo com Lim e Tan (2024), a compreensão e o controle das propriedades reológicas do concreto imprimível são determinantes para assegurar a qualidade geométrica e a estabilidade do processo de manufatura aditiva. Entre as variáveis mais críticas, destacam-se a tensão de escoamento, a viscosidade aparente e a tixotropia, as quais governam o comportamento do material desde a extrusão até a deposição em camadas sucessivas. A tensão de escoamento estática (τ_{sy}) e a dinâmica (τ_{dy}) representam os limites entre o estado sólido e o fluido, sendo responsáveis pelo equilíbrio entre fluidez e capacidade de sustentação da camada depositada. Valores excessivamente baixos de tensão de escoamento conduzem à instabilidade geométrica e colapso da camada após a extrusão, enquanto valores elevados resultam em bloqueio do escoamento e entupimento do bico, prejudicando a continuidade do processo. A viscosidade aparente (η), por sua vez, se manifesta em dois regimes distintos: pré-escoamento (η_p) e pós-escoamento (η_γ), que determinam, respectivamente, a rigidez inicial do material em repouso e sua resistência ao fluxo durante o cisalhamento. Lim e Tan (2024) demonstram que a transição contínua entre esses regimes, governada pela função de ativação reológica (φ) proposta pelos autores, é fundamental para evitar descontinuidades de escoamento e oscilações de pressão que comprometem a uniformidade e a aderência entre camadas.

Além disso, a tixotropia é identificada como a propriedade que mais influencia o desempenho reológico ao longo do tempo, pois reflete a estruturação e destruturação progressiva da matriz cimentícia. O fenômeno de estruturação em repouso (aumento de viscosidade e tensão de escoamento) e de quebra estrutural sob cisalhamento (redução de viscosidade aparente) define a janela de tempo ideal entre deposições sucessivas, garantindo que o material flua durante a extrusão, mas recupere rigidez suficiente para suportar camadas subsequentes sem deformação.

Nos experimentos de Lim e Tan (2024), observou-se que a relação água/cimento (a/c) é outro fator crítico: misturas com a/c = 0,45 apresentaram exsudação de água (*bleeding*) e perda de homogeneidade da pasta, fenômenos caracterizados pela separação entre as fases líquida e sólida do material, enquanto composições mais secas (a/c = 0,35) exibiram melhor capacidade de estruturação e estabilidade reológica. Essa segregação compromete a estabilidade da mistura, reduz a viscosidade aparente e afeta a uniformidade do escoamento durante a extrusão, prejudicando a formação regular e a aderência das camadas impressas.

O ensaio de Bridge Flow, conduzido pelos autores, evidenciou ainda que variáveis operacionais como velocidade de impressão, distância entre o bico e a base (*stand-off distance*) e tempo entre camadas influenciam diretamente o comportamento tixotrópico e a estabilidade do filete extrudado, resultando em fenômenos como flambagem, colapso e perda de forma quando não adequadamente ajustadas às propriedades reológicas do material. Assim, Lim e Tan (2024) concluem que o domínio das propriedades reológicas, em especial da tensão de escoamento, viscosidade e tixotropia, em função do tempo e da taxa de cisalhamento, é indispensável para a previsibilidade e o controle do processo de impressão 3D com concreto, sendo essas variáveis as principais responsáveis pela extrudabilidade, regularidade geométrica e estabilidade estrutural inicial do produto impresso.

No caso do concreto extrudável, as propriedades reológicas são características que garantem tanto a precisão geométrica das estruturas quanto a estabilidade estrutural das formas impressas, assegurando a eficácia dessa abordagem inovadora de fabricação de componentes e estruturas. Sérgio Filho *et al. (*2020) ressaltam que a reologia, enquanto ramo científico, dedica-se à análise do escoamento e da deformação do fluido, avaliando a relação entre a tensão de cisalhamento e a deformação ao longo do tempo. Tal propriedade está intimamente vinculada à estabilidade e à integridade estrutural durante e após a impressão.

Segundo Vespalec *et al. (*2023), a caracterização reológica é fundamental para determinar os parâmetros ideais do processo de impressão, como a velocidade de impressão, a largura e a altura da extrusão, que afetam diretamente a capacidade do material de ser extrudado de maneira contínua e uniforme. Além disso, a reologia influencia a coesão e a resistência ao escoamento do material, fatores essenciais para a manutenção da forma e da estabilidade das camadas sucessivas durante a construção. A utilização adequada de modificadores de

viscosidade, por exemplo, pode melhorar significativamente a extrudabilidade e reduzir a incidência de falhas estruturais nas impressões de concreto.

Os requisitos reológicos fundamentais para concretos impressos, com base no trabalho de Roussel (2018), abrangem a tensão de escoamento inicial, o módulo elástico inicial, a deformação crítica no início do escoamento e a taxa de estruturação do material, que se refere à velocidade com que o concreto recupera sua rigidez em repouso, garantindo a manutenção da forma após a extrusão e o suporte às camadas subsequentes. Estes aspectos são críticos para assegurar que o concreto possa ser impresso de maneira apropriada, mantendo a estabilidade e a integridade estrutural não apenas durante o processo de impressão, mas também após a conclusão da estrutura.

Chen et al. (2020) destacam que as principais propriedades incluem a extrudabilidade, que é a capacidade do material de ser extrudado de maneira contínua e uniforme pelo bico de impressão sem entupimentos ou interrupções, e a construtibilidade que se refere à habilidade do material de manter sua forma e sustentar camadas subsequentes após a deposição, garantindo a estabilidade da estrutura impressa. A tixotropia é outra propriedade crucial, relacionada à viscosidade do material, permitindo que ele se comporte como um líquido durante a extrusão e como um sólido em repouso, assegurando que as camadas não se deformem após a deposição. Além disso, a resistência inicial é fundamental, pois o material deve desenvolver resistência suficientemente rápida após a extrusão para suportar o peso das camadas subsequentes e evitar colapsos. Finalmente, a porosidade controlada é necessária para garantir uma distribuição adequada de poros no material, evitando macroporos que podem comprometer a resistência mecânica e a durabilidade da estrutura. Essas propriedades são determinantes para assegurar que as misturas cimentícias sejam adequadas para o processo de impressão 3D, permitindo a construção de estruturas estáveis e duráveis.

Por fim, no estudo de revisão desenvolvido por Nguyen-Van et al. (2023), os autores destacam a relevância dos parâmetros como viscosidade, tensão de escoamento e tixotropia. Eles enfatizam a importância da fluidez do material, que facilita o transporte e a extrusão sem obstruções, enquanto a viscosidade reflete a resistência ao escoamento, devendo ser equilibrada para evitar bloqueios. A tensão de escoamento é apontada como fundamental para o início do escoamento do concreto, assegurando uma extrusão contínua e estável. Além disso, os desafios na

formulação das misturas cimentícias são discutidos, com enfoque no impacto dos aditivos e da relação água/cimento sobre as propriedades reológicas, afetando diretamente o desempenho do material durante o processo de impressão. O estudo explora como a tixotropia é crucial para a manutenção da forma do material após a deposição, e como a modelagem dessas propriedades envolve variáveis como composição, temperatura e umidade, exigindo ajustes contínuos na formulação para equilibrar a extrudabilidade e a capacidade de construção, evitando problemas como perda de forma ou dificuldades no processo de extrusão.

2.3.3 Valores Característicos dos Materiais Cimentícios Aplicados na Impressão 3D

Os valores dos parâmetros característicos dos materiais cimentícios aplicados na impressão 3D são obtidos experimentalmente por meio de ensaios reológicos, que permitem quantificar o comportamento do concreto no estado fresco sob diferentes condições de cisalhamento. Esses parâmetros descrevem quantitativamente as propriedades reológicas do material, como tensão de escoamento, viscosidade plástica, módulo elástico e taxa de estruturação, e servem como dados de entrada para os modelos reológicos empregados nas simulações numéricas, possibilitando reproduzir o escoamento, a deposição e a estabilidade das camadas durante o processo de extrusão. A literatura apresenta variações significativas desses valores em função da composição da mistura, do tipo de aditivo e da metodologia de ensaio, sendo possível estabelecer faixas típicas que delimitam a janela reológica adequada à extrudabilidade.

Comminal *et al. (*2020) estudaram o comportamento físico do material cimentício por meio de testes de reometria rotacional e oscilatória experimental, empregando o modelo reológico de *Bingham* para descrever as características do fluido não newtoniano da argamassa. Além disso, um modelo de fluido elasto-viscoplástico foi utilizado para simular o escoamento do concreto, capturando a complexidade do material durante o processo de impressão. Os autores apresentam dados detalhados sobre a geometria do bico, a taxa de cisalhamento e a viscosidade do concreto fresco nas simulações. A taxa de cisalhamento foi obtida por meio de testes reológicos, com base no modelo de fluido de *Bingham*, variando entre 5 s^{-1} e 10 s^{-1}. A viscosidade plástica do concreto fresco foi determinada em 7,5 Pa·s, com uma tensão de escoamento de 630 Pa, informações essenciais para uma modelagem

numérica do escoamento do concreto durante a impressão.

No estudo de Tao *et al. (*2024) utilizou-se o modelo reológico de Herschel-Bulkley para descrever o comportamento do concreto 3D durante o processo de extrusão, sendo a tensão de escoamento, o índice de consistência e o índice de potência as propriedades reológicas fundamentais para o estudo. A tensão de escoamento foi definida como 405,7 Pa, o índice de consistência foi de 74,07 Pa·s^n, e o índice de potência foi de 0,81. Esses valores foram decisivos para entender o ponto em que o concreto começa a fluir sob pressão e como ele se deforma permanentemente durante o processo de impressão, garantindo a previsibilidade e estabilidade das camadas impressas.

Para o desenvolvimento do estudo de Abbaoui *et al. (*2024), foram consideradas propriedades reológicas essenciais do concreto fresco, a tensão de escoamento (630 Pa) e a viscosidade plástica (7,5 Pa·s), ambas importantes para descrever a resistência do concreto ao escoamento e sua estabilidade após o início da extrusão. Além disso, o modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (GNF) utilizou uma taxa de cisalhamento crítica de 0,01 s^{-1}, permitindo que a viscosidade variável fosse determinada de acordo com a taxa de cisalhamento. O módulo de cisalhamento elástico, usado no modelo Elasto-Viscoplástico (EVP), foi definido como 2×10^5 Pa, descrevendo a resistência elástica do material antes de ultrapassar a tensão de escoamento. A massa específica do concreto fresco foi considerada como 2100 kg/m³. No Quadro 2 é apresentada a síntese das informações, organizada de acordo com os autores e as propriedades reológicas na extrusão para impressão 3D, de acordo com os mesmos.

Quadro 2 – Propriedades reológicas dos materiais cimentícios aplicados à impressão 3D

Autor(es)	Modelo Reológico	Propriedades reológicas e parâmetros característicos
Comminal *et al. (*2020)	Modelo de Bingham (fluido não newtoniano) e modelo Elasto-Viscoplástico (EVP) para simulação numérica	Tensão de escoamento: 630 Pa • Viscosidade plástica: 7,5 Pa·s • Taxa de cisalhamento: 5–10 s^{-1} • Geometria do bico: circular, 25 mm de diâmetro interno e 2 mm de espessura de parede • Utilização do modelo EVP para representar o comportamento estrutural do material durante a extrusão
Tao *et al.*	Modelo de Herschel–	• Tensão de escoamento: 405,7 Pa

Autor(es)	Modelo Reológico	Propriedades reológicas e parâmetros característicos
Comminal *et al. (*2020)	Modelo de Bingham (fluido não newtoniano) e modelo Elasto-Viscoplástico (EVP) para simulação numérica	Tensão de escoamento: 630 Pa • Viscosidade plástica: 7,5 Pa·s • Taxa de cisalhamento: 5–10 s^{-1} • Geometria do bico: circular, 25 mm de diâmetro interno e 2 mm de espessura de parede • Utilização do modelo EVP para representar o comportamento estrutural do material durante a extrusão
*(*2024)	Bulkley	• Índice de consistência (K): 74,07 Pa·s^n • Índice de potência (n): 0,81 • Parâmetros empregados para prever o início do escoamento e a deformação permanente durante a extrusão
Abbaoui *et al. (*2024)	Modelos Fluido Newtoniano Generalizado (GNF) e Elasto-Viscoplástico (EVP)	• Tensão de escoamento: 630 Pa • Viscosidade plástica: 7,5 Pa·s • Taxa de cisalhamento crítica: 0,01 s^{-1} • Módulo de cisalhamento elástico (G): 2×10^5 Pa • Massa específica: 2100 kg/m^3 • Parâmetros empregados para descrever a resistência elástica e o escoamento viscoplástico do concreto fresco

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Assim, o domínio das características reológicas dos materiais cimentícios representa um requisito importante para a previsibilidade do processo de manufatura aditiva, permitindo ajustar o comportamento do concreto às condições operacionais da impressão e assegurar a qualidade final dos elementos produzidos.

2.4 ESTADO DA ARTE EM SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE EXTRUSÃO NA IMPRESSÃO 3D DO CONCRETO

Esta seção revisa e identificar os principais avanços, desafios e lacunas existentes na literatura, fornecendo uma visão abrangente do estado da arte e apontando direções para futuras pesquisas.

No estudo de Comminal *et al. (*2020) foi investigada a aplicação da dinâmica de fluidos computacional (CFD) na modelagem da impressão 3D de concreto, com ênfase na previsão da geometria das camadas impressas no *software Flow-3D*. O estudo buscou aprimorar a técnica de impressão 3D por meio de simulações de "impressão virtual", considerando variáveis como velocidade de impressão e altura do

bico de extrusão. A configuração do 3DCP (ilustrada na Figura 6) do experimento envolveu a impressão de 12 segmentos de 50 cm, variando a altura do bico (7,5 mm, 12,5 mm e 17,5 mm) e a velocidade de impressão (20-50 mm/s).

Figura 6 – Representação esquemática da configuração do 3DCP

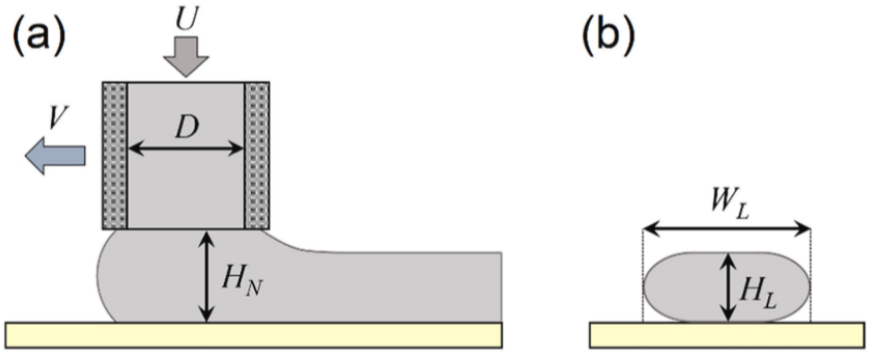


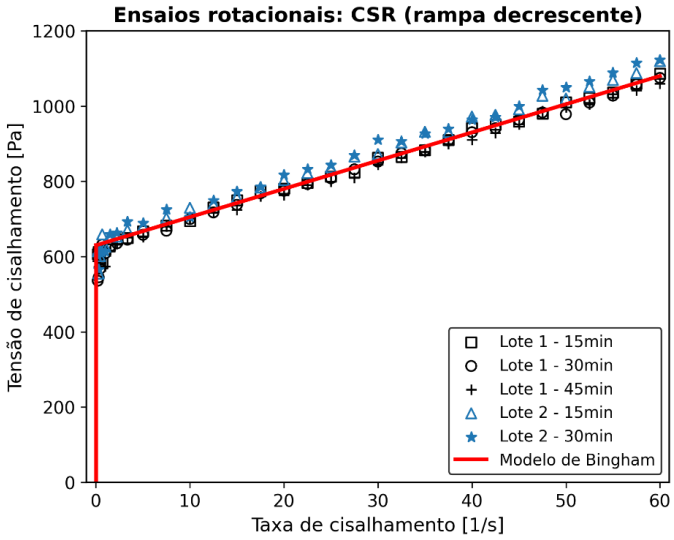
Figura 6.a. Vista lateral: altura do bico HN, diâmetro D, fluxo volumétrico de extrusão U e velocidade de impressão V. **Figura 6.b.** Vista frontal: altura da camada intermediária (HL) e largura da camada (WL). **Fonte**: Comminal *et al. (*2020, p. 4).

A metodologia adotada abrangeu simulações numéricas utilizando um modelo de fluido elasto-viscoplástico da argamassa de cimento, empregando o método dos volumes finitos. Experimentos paramétricos foram conduzidos para analisar a influência das variáveis mencionadas na geometria das camadas impressas. A caracterização reológica da argamassa foi realizada por meio de testes de reometria rotacional e oscilatória, com a argamassa sendo modelada como um fluido de Bingham, apresentando uma tensão de escoamento de 630 Pa e viscosidade plástica de 7,5 Pa·s. A geometria do bico de extrusão foi definida com um diâmetro interno de 25 mm e espessura de parede de 2 mm, enquanto a taxa de cisalhamento variou entre 5 s^{-1} e 10 s^{-1} nas simulações.

Continuando no estudo de Comminal *et al. (*2020), constatou-se que os autores empregaram dois tipos de simulação: o modelo de fluido Newtoniano Generalizado (GNF) e o modelo de fluido Elasto-Viscoplástico (EVP). Esses dois modelos foram utilizados para descrever e simular o comportamento do concreto no estado fresco durante o processo de impressão 3D. O modelo GNF foi usado para simulações mais simples e rápidas, considerando apenas a variação da viscosidade em função da taxa de cisalhamento, comportamento este descrito pela curva reológica de escoamento do material (tensão × taxa de cisalhamento) ajustada ao modelo de Bingham,

apresentada na Figura 7, enquanto o modelo EVP incluiu também a resposta elástica do concreto antes de ele começar a fluir, o que oferece uma previsão mais detalhada do comportamento do material.

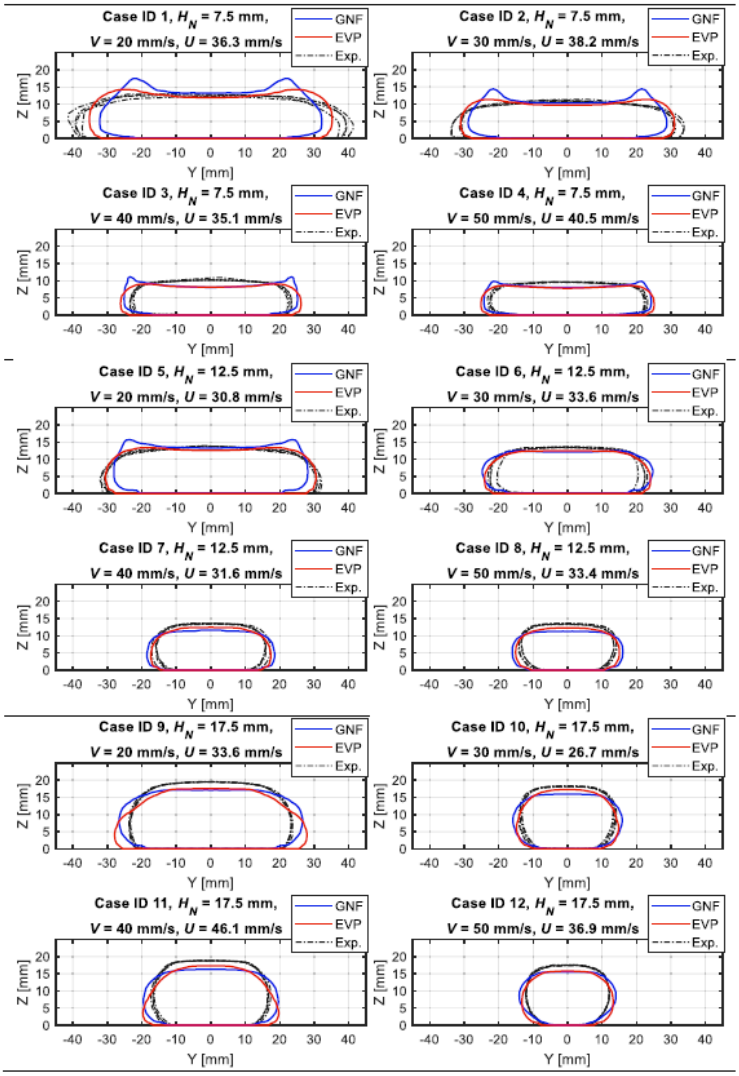
Figura 7 – Curva de escoamento característica da argamassa no estado fresco, medida por ensaios rotacionais CSR de rampa decrescente



Fonte: Adaptado de Comminal et al. (2020)

As simulações com o modelo EVP forneceram previsões mais precisas da forma das camadas impressas, embora tenham demandado mais tempo computacional. O estudo comparou os resultados obtidos com ambos os modelos e validou que, enquanto o modelo GNF é eficaz para cenários que envolvem cisalhamento, o modelo EVP é mais adequado para capturar a complexidade do comportamento do concreto em condições que exigem maior precisão, como a deformação e a estabilidade estrutural durante a impressão de múltiplas camadas. Os resultados (Figura 8) também indicaram uma concordância entre as simulações de "impressão virtual" e as impressões físicas, validando a abordagem de modelagem por CFD.

Figura 8 – Comparação das formas de seção transversal das simulações e dos experimentos



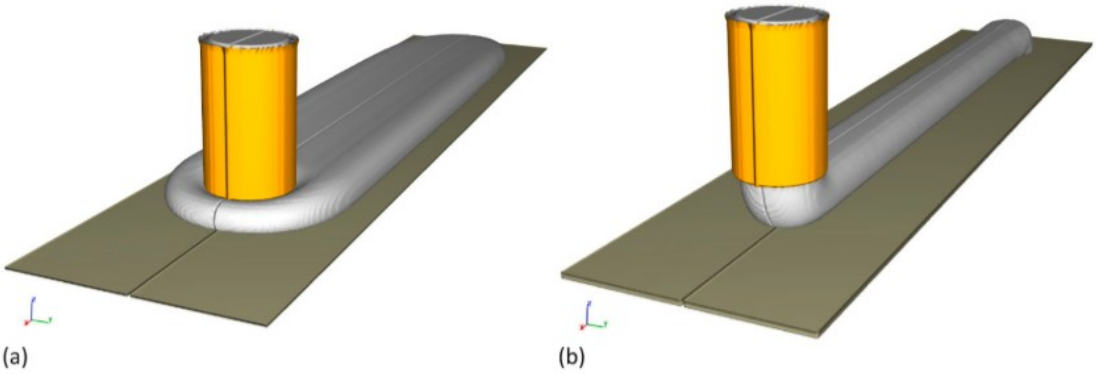
Fonte: Comminal *et al. (*2020, p. 10)

Observou-se na Figura 8 que o modelo EVP proporcionou previsões mais precisas das seções transversais, embora tenha demandado um tempo computacional mais significativo: enquanto as simulações com o modelo GNF levaram em média cerca de 18 horas, as simulações com o modelo EVP demandaram aproximadamente 2 dias (cerca de 48 horas), ou seja, um tempo cerca de 2,7 vezes maior. Segundo os autores, esse custo poderia ser reduzido a um terço com o uso de uma malha mais grosseira, ainda que com menor resolução. A geometria da camada depositada variou entre uma forma cilíndrica e um perfil quase retangular, dependendo da interação entre a velocidade de impressão e a altura do bico de extrusão. Enfim, a comparação entre os resultados das simulações e os experimentos mostrou que esses modelos reológicos são eficazes para prever o comportamento do

concreto sob diferentes condições de impressão.

Por fim, na parte de resultados da pesquisa de Comminal *et al. (*2020), a Figura 9 apresenta vistas em perspectiva das simulações de impressão virtual utilizando o modelo EVP. Ela compara dois cenários diferentes: no Caso ID 2, a simulação mostra uma baixa altura do bico e uma baixa velocidade de deslocamento, resultando em uma forma de camada mais larga e uniforme; já no Caso ID 12, uma grande altura do bico e alta velocidade de deslocamento resultam em camadas mais finas e com uma forma menos controlada. Essa comparação demonstra como a altura do bico e a velocidade de impressão influenciam diretamente a geometria das camadas depositadas.

Figura 9 – Vistas em perspectiva das simulações de impressão virtual utilizando o modelo EVP: (a) baixa altura do bico e baixa velocidade de deslocamento do bico (Caso ID 2) e (b) grande altura do bico e alta velocidade de deslocamento do bico (Caso ID 12)



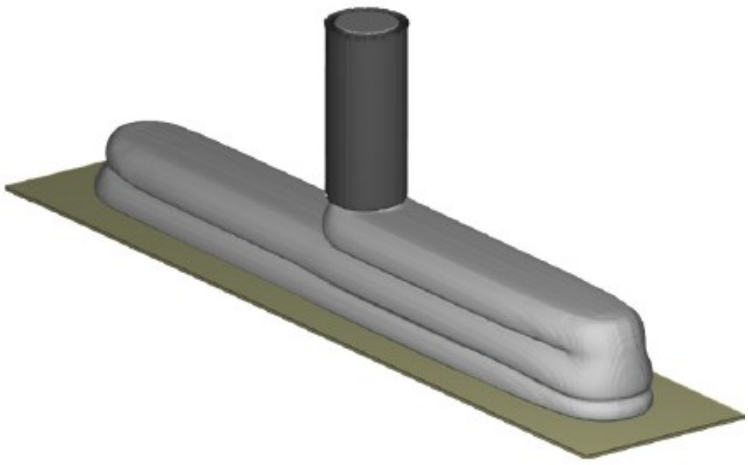
Fonte: Comminal *et al. (*2020, p. 11)

Os resultados (Figura 9) indicam que, com o bico mais próximo à superfície e em velocidades mais baixas, a camada impressa tende a ser mais uniforme. Por outro lado, quando a altura do bico e a velocidade de impressão aumentam, as camadas se tornam menos estáveis e mais propensas a deformações. Isso ressalta a importância de controlar essas variáveis para garantir a precisão da geometria das camadas. Esse controle é fundamental para o processo de impressão 3D para assegurar que o concreto no estado fresco mantenha suas propriedades reológicas adequadas durante a deposição camada por camada.

O estudo de Spangenberg *et al. (*2021) focou no desenvolvimento e validação de um modelo numérico utilizando o programa *Flow-3D* para simular o processo de

impressão 3D de múltiplas camadas de concreto. As propriedades reológicas da argamassa: densidade de 2100 kg/m³, tensão de escoamento de 630 Pa e viscosidade plástica de 7,5 Pa·s, foram determinadas experimentalmente e incorporadas ao modelo de simulação. A única exceção foi o módulo de cisalhamento linear-elástico, ajustado para 100 kPa em vez dos 200 kPa medidos, a fim de mitigar instabilidades numéricas originadas na parcela não escoada (elástica) do material. Vale destacar que essa instabilidade é uma dificuldade reconhecida na modelagem de materiais elasto-viscoplásticos: abaixo da tensão de escoamento, o material é descrito como um sólido linear-elástico e, quanto maior o módulo G, mais rígida é essa resposta, o que eleva a velocidade das ondas elásticas e exige passos de tempo progressivamente menores para a convergência do solver, além de acentuar a transição abrupta entre os regimes sólido e fluido. A redução de G suaviza essa não linearidade e estabiliza a solução a baixo custo computacional, sem alterar criticamente o resultado, uma vez que o material não escoado praticamente não se deforma. Segundo os próprios autores, trata-se de um comportamento “notoriamente difícil de tratar numericamente”. Todos os parâmetros de processo, como velocidade de impressão (30 mm/s), taxa de extrusão (33,6 mm/s), diâmetro do bocal (25 mm) e altura do bocal (12,5 mm), foram adaptados a partir dos dados experimentais, utilizando um *setup* de impressão 3D composto por um braço robótico de 6 eixos, uma bomba com funil e uma mangueira de borracha com fio de aço, além de um bocal de polímero impresso em 3D. Os resultados mostraram que o modelo foi eficaz ao prever a forma e o comportamento das camadas impressas, como a estabilidade da primeira camada sob a pressão das camadas subsequentes (Figura 10).

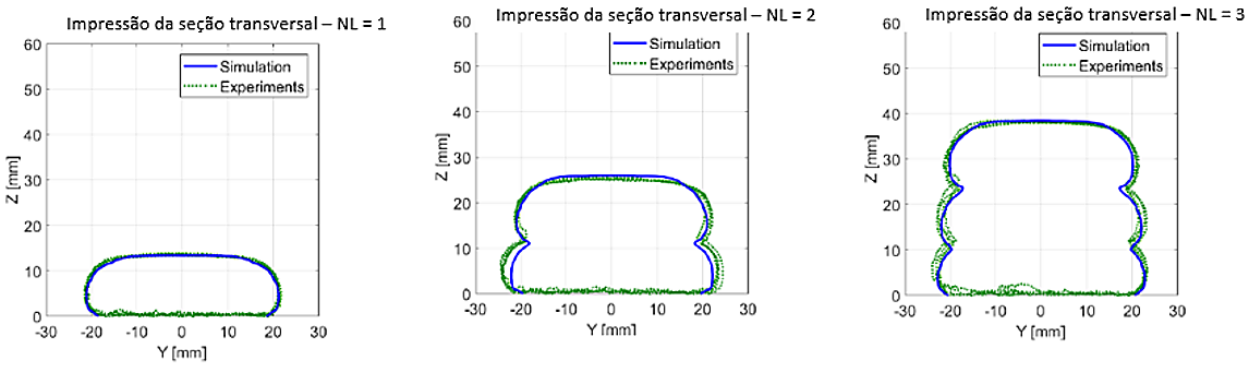
Figura 10 – Modelo CFD simulando a impressão 3D de múltiplas camadas



Fonte: Spangenberg *et al. (*2021, p. 121)

A Figura 10 ilustra como o material cimentício, modelado como um material elasto-viscoplástico permite que a primeira camada suporte a pressão das camadas subsequentes sem colapsar. As formas das seções transversais após a deposição de cada camada foram comparadas entre o modelo CFD e o experimento de impressão 3D (Figura 11).

Figura 11 – Formas de seções transversais obtidas a partir do modelo CFD e dos experimentos de impressão 3D (3DCP)



Fonte: Spangenberg *et al. (*2021, p. 121)

Verificou-se na Figura 11 que a simulação registrou com precisão a largura e altura das camadas e a superfície ranhurada das laterais, comum no processo. Embora tenha havido uma pequena discrepância após a deposição da segunda camada, onde o modelo subestimou levemente a largura da seção, essa diferença foi considerada aceitável devido às incertezas experimentais. Além disso, a simulação mostrou que a largura de uma camada aumenta com a deposição de uma nova, indicando que a pressão exercida pelo material extrudado excede a tensão de escoamento da camada anterior.

Enfim, o estudo de Spangenberg *et al. (*2021) demonstrou que o modelo CFD pode ser uma ferramenta eficaz para os processos de impressão 3D de concreto, ajustando parâmetros e prevendo o comportamento estrutural das camadas durante a extrusão.

Por sua vez, Pan *et al. (*2022) focaram em investigar como os parâmetros geométricos dos bicos de extrusão afetam o comportamento do escoamento e a deformação dos materiais cimentícios durante a impressão 3D. Para isso, o estudo utilizou uma abordagem experimental, testando materiais com diferentes bicos, e

simulação numérica utilizando CFD. As simulações e experimentos focaram em variáveis como a forma do bico, a razão de área entre a saída e a entrada, a razão de aspecto (refere-se à relação entre a largura (Wn) e a altura (Hn) da saída do bico de extrusão), e a direção da deposição influenciam a pressão de extrusão, a deformação dos filamentos impressos, e a qualidade final da impressão. O estudo visa orientar o formato e a seleção de bicos de extrusão para o processo de impressão 3D de concreto. Neste trabalho, foi utilizada uma impressora 3D de pórtico, de fabricação própria e escala laboratorial, com volume de construção de (500 × 500 × 500) mm, conforme mostrado na Figura 12. A cabeça de impressão pode ser movida nas direções X, Y e Z pelo controle do programa.

Figura 12 – Dispositivo de impressão 3D

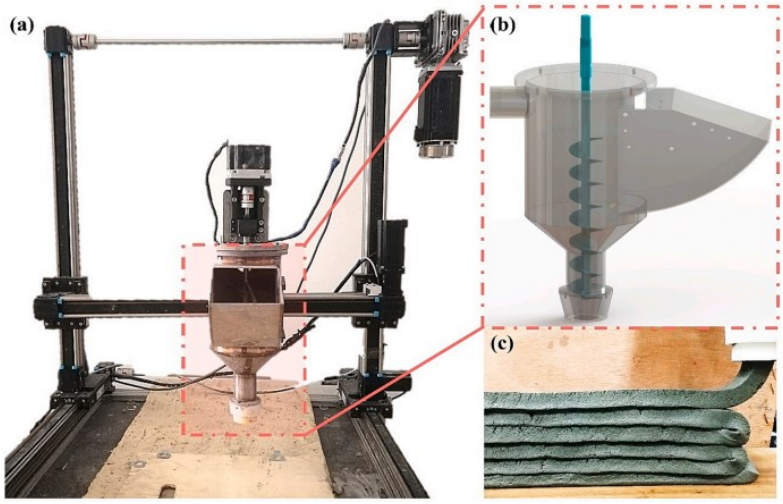
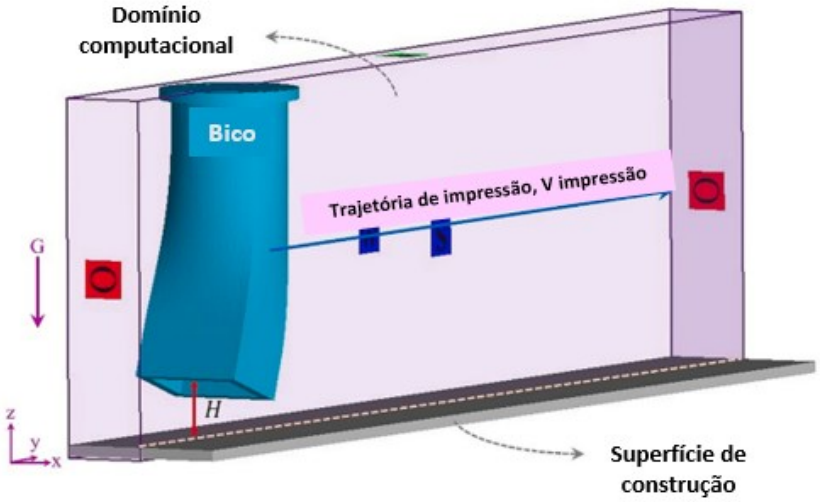


Figura 12.a impressora 3D de pórtico em laboratório. **Figura 12.b** cabeça de impressão com haste de parafuso. **Figura 12.c** estruturas impressas multicamadas. **Fonte**: Pan *et al. (*2022, p. 5)

Quanto ao método empregado por Pan *et al. (*2022), o estudo utilizou duas abordagens. A experimental, onde foram preparados e testados materiais cimentícios imprimíveis, utilizando diferentes bicos de extrusão que variavam nos parâmetros geométricos. E a simulação numérica (CFD), utilizando o software *ANSYS® Fluent* R18.2, para analisar o comportamento do escoamento e da deformação dos materiais ao passarem pelos bicos. O método Volume de Fluido (VOF) foi utilizado para capturar a evolução da superfície livre durante o processo de deposição. Além disso, o estudo considerou a possibilidade de deslizamento entre a parede do bico e o material, mas assumiu uma condição de não deslizamento para simplificação. Em teoria, um domínio computacional cuboide (X×Y×Z) deve ser utilizado para conter todos os

componentes da simulação CFD, onde o processo de extrusão-deposição ocorre, conforme mostrado na Figura 13. No entanto, devido à simetria do layout experimental no processo de extrusão-deposição, apenas metade do domínio computacional (X×0,5Y×Z) precisa ser calculada, o que reduz o tempo de processamento. Assim, uma condição de contorno de simetria foi aplicada no plano central. Todos os outros limites do domínio computacional são definidos como saídas de pressão para permitir o fluxo livre das argamassas de cimento. O domínio inteiro é discretizado em uma malha de células cúbicas uniformes, cujo tamanho de elemento (aresta de cada célula) é de 1 mm.

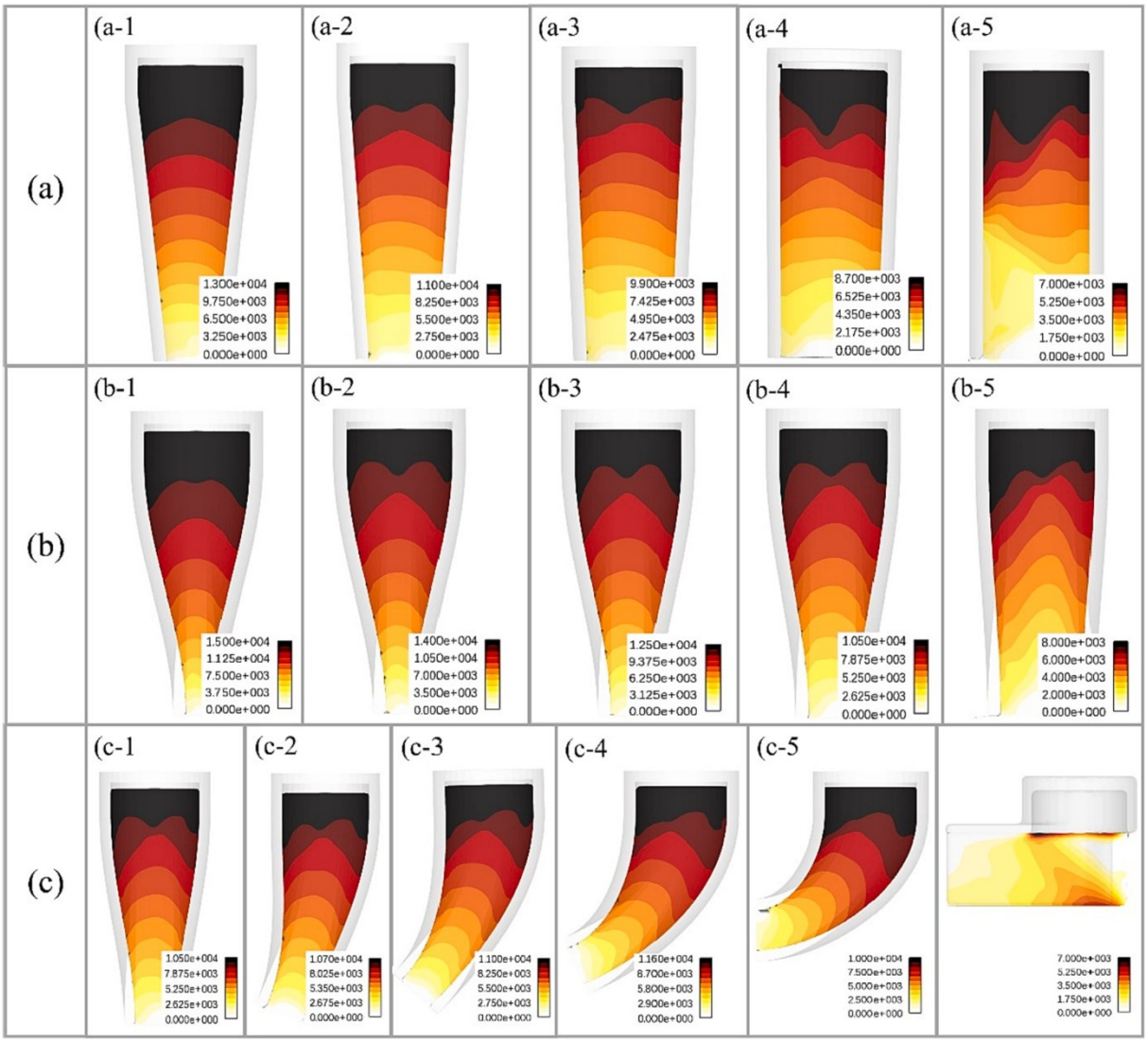
Figura 13 – Geometria e malha computacional do modelo CFD



Fonte: Pan *et al. (*2022, p.6)

O estudo verificou que os parâmetros geométricos dos bicos de extrusão, como a forma da saída, a razão de área entre saída e entrada, a razão de aspecto e a direção de deposição, influenciam significativamente a pressão de extrusão, a pressão de impressão e a deformação dos filamentos impressos (Figura 14).

Figura 14 – A influência da razão de área entre a saída e a entrada (AR) na distribuição de pressão no bico (a); a influência da razão de aspecto do bico (Ψ) na distribuição de pressão no bico (b); a influência da direção de deposição do material (θ) na distribuição de pressão no bico (c).

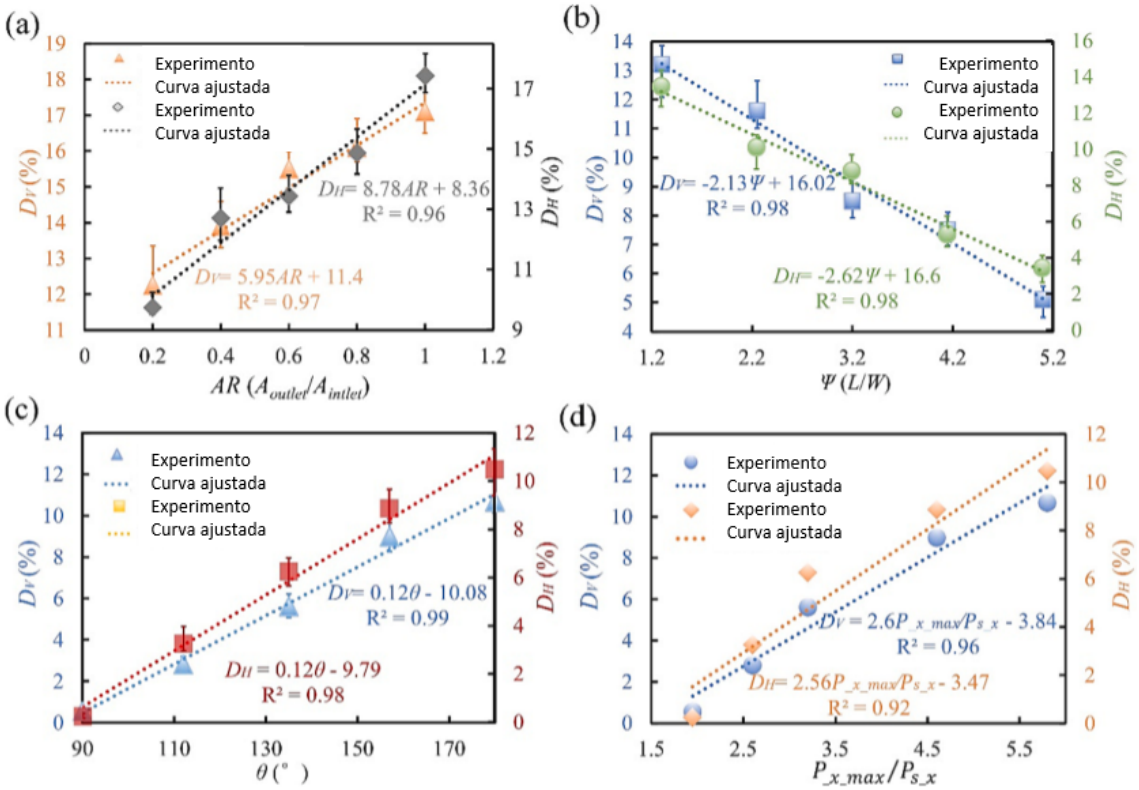


Fonte: Pan *et al. (*2022, p.8)

Referente à pressão de extrusão, os resultados obtidos (Figura 14) mostram que a pressão de extrusão diminui ao longo do comprimento do bico, sendo maior na entrada e diminuindo gradualmente até a saída. Esse comportamento está relacionado à resistência ao escoamento causada pelas paredes do bico e pelas mudanças na geometria do bico. Foi observado que quanto menor a razão entre a área da saída e da entrada (AR), maior é a pressão de extrusão, e bicos com formato retangular apresentam pressões de extrusão maiores do que bicos circulares, devido à maior superfície de contato com o fluido viscoso. Além disso, a direção da deposição

também influenciou a pressão de extrusão. Quando o ângulo de deposição (θ) foi reduzido de 180° para 90°, a pressão de extrusão aumentou, o que se deve ao fato de que a reorientação do fluido durante a extrusão aumenta a resistência ao escoamento. Por último, a Figura 14 apresenta a representação visual do gradiente de pressão ao longo do bico de extrusão, mostrando como essa variação ocorre desde a entrada até a saída. A diminuição da pressão à medida que o material flui é evidenciada, permitindo uma análise comparativa das mudanças nos parâmetros geométricos, assegurando um escoamento adequado e evitando problemas como entupimentos ou deformações no material impresso. Em relação ao comportamento de deformação do filamento final depositado, os resultados (Figura 15) mostraram que a taxa de deformação dos filamentos depende significativamente dos parâmetros geométricos do bico, como a razão de aspecto (Ψ), a razão de área entre a saída e a entrada (AR) e a direção da deposição (θ).

Figura 15 – A influência da razão de área entre a saída e a entrada (AR) na taxa de deformação do filamento depositado



Nota: (a); a influência da razão de aspecto do bico (Ψ) na taxa de deformação do filamento depositado (b); a influência da direção de deposição do material (θ) na taxa de deformação do filamento depositado (c); correlação entre a pressão de impressão e a taxa de deformação (d)

Fonte: Pan *et al.* (2022, p. 12)

Com o aumento da razão de área entre a saída e a entrada (AR), tanto a deformação vertical quanto a horizontal do filamento depositado aumentaram. Isso ocorre porque uma área de saída maior permite que o material flua mais facilmente, resultando em uma deformação mais acentuada após a deposição. O aumento da razão de aspecto do bico (Ψ), que relaciona a largura à altura da saída, resultou em uma menor deformação do filamento. Isso indica que bicos com uma saída mais larga em comparação à altura proporcionam maior estabilidade ao filamento depositado, reduzindo a deformação. Reduzir o ângulo de deposição (θ) diminuiu significativamente a deformação do filamento, uma vez que ângulos menores favorecem a deposição controlada, minimizando a fluidez excessiva do material. Para concluir, o estudo de Pan *et al. (*2022) investigou a influência dos parâmetros geométricos do bico, como formato da saída, razão de área (AR), razão de aspecto (Ψ) e direção de deposição (θ) no comportamento de fluxo e deformação do filamento de concreto impresso em 3D. Os resultados mostraram que bicos com saídas circulares facilitam a extrusão contínua, mas geram maior taxa de deformação, enquanto bicos retangulares oferecem melhor precisão e fidelidade geométrica. Aumentar a razão de aspecto do bico melhora a estabilidade das camadas impressas, mas pode elevar o custo dos materiais. A direção de deposição (θ) demonstrou ser um fator chave para controlar a pressão de impressão, com ângulos menores reduzindo a deformação para misturas de baixa tensão de escoamento, e ângulos maiores promovendo a fusão entre camadas para misturas de alta tensão. Portanto, a escolha adequada dos parâmetros geométricos do bico é essencial para otimizar a qualidade e a eficiência do processo de impressão 3D de concreto, contribuindo para alcançar o objetivo do estudo de aprimorar o desempenho e a precisão das estruturas impressas.

Por sua vez, o estudo de Tao et al. (2024) buscou analisar numericamente o comportamento do concreto 3D impresso, focando no escoamento plástico durante a extrusão. O estudo avaliou como diferentes parâmetros do processo, como velocidade de impressão, altura e diâmetro do bocal, e propriedades reológicas do material, influenciam a formação de regiões de escoamento plástico, conforme consta na Figura 16.

Figura 16 – Configuração de extrusão do material

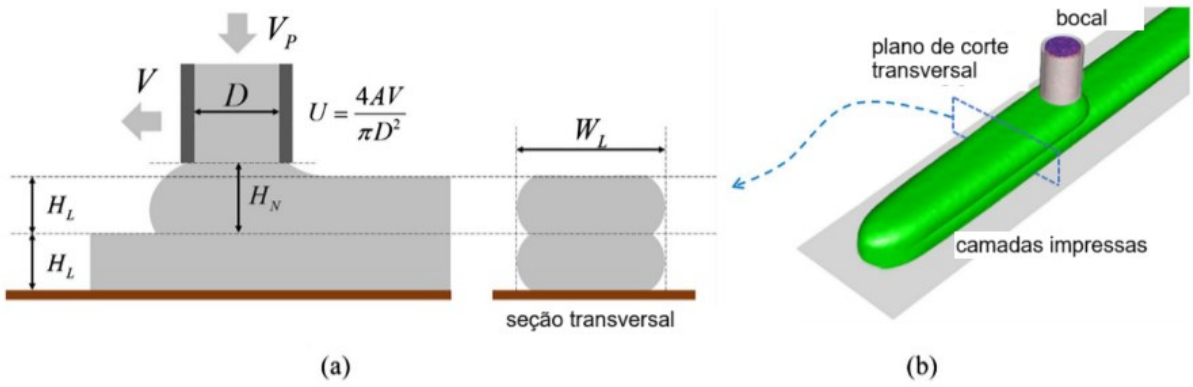


Figura 16. (a) Vistas esquemáticas da configuração de extrusão com duas camadas. **Figura 16. (b)** exemplo de plano de seção transversal para análise de imagem.
Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 4)

Para garantir a conservação do volume, o volume do material extrudado deve ser equivalente ao volume do material impresso, como mostrado na Figura 16. A área da seção transversal de cada camada depende da razão de velocidades SR = V/U, definida pela relação entre dois parâmetros distintos do processo. O primeiro, V, é a velocidade de impressão (mm/s), ou seja, a velocidade com que o bocal se desloca horizontalmente ao longo do caminho de impressão, sendo determinada pela cinemática da máquina. O segundo, U, é o fluxo volumétrico de extrusão (mm/s), definido como a vazão volumétrica de material dividida pela área do orifício do bocal; por corresponder a uma vazão por unidade de área, é expresso em unidade de velocidade e equivale à velocidade média com que o material é extrudado através do bocal, sendo controlado pela bomba. Trata-se, portanto, de duas velocidades independentes: enquanto V descreve o avanço do bocal, U descreve a saída do material.

Por conservação de volume, a vazão de material extrudado deve igualar-se à vazão depositada na camada, o que conduz à Equação (2.1):

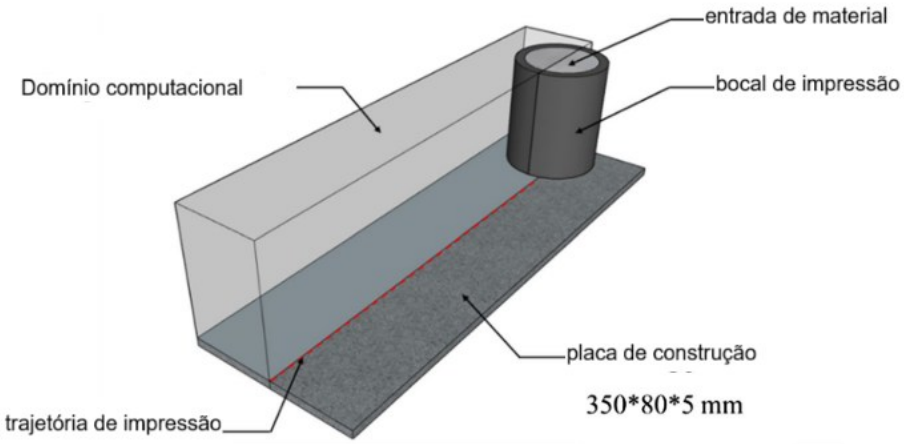
$$\frac{\pi D^2}{4} U = A V \tag{2.1}$$

$$A = \frac{\pi D^2 U}{4 V} = \frac{\pi D^2}{4 SR} \tag{2.2}$$

na qual D é o diâmetro do bocal (mm) e A é a área da seção transversal da camada impressa (mm²). Outros parâmetros relevantes para a geometria da camada incluem a espessura da camada impressa (H_L), a largura da camada (W_L) e a altura do bocal (H_N) em relação à camada anterior.

O método empregado utilizou a dinâmica dos fluidos computacional (CFD) no software *ANSYS Fluent*. O domínio do fluido computacional no modelo (Figura 17) abrangeu o bocal de impressão, a superfície plana da estrutura, a trajetória de impressão e a área de extrusão de material no *Fluent.*

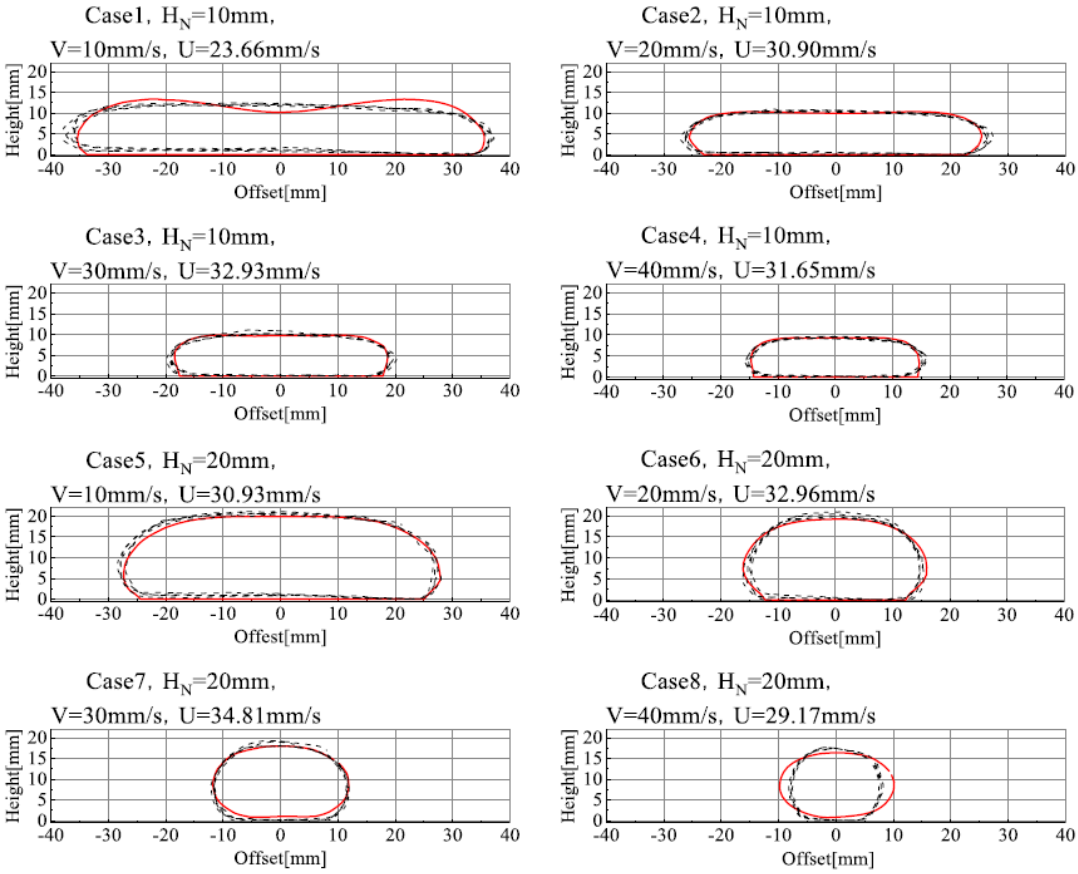
Figura 17 – Domínio computacional do modelo numérico



Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 3)

Foram aplicadas condições de fronteira adequadas e realizado o refinamento da malha. Testes de impressão 3D e reológicos foram realizados para validar o modelo computacional comparando os resultados experimentais e simulados. Uma comparação visual entre a altura e a largura das camadas nos resultados numéricos e experimentais é apresentada na Figura 18, mostrando que os cálculos do modelo correspondem bem aos dados experimentais para diferentes velocidades de impressão.

Figura 18 – Comparação entre a simulação numérica e os resultados experimentais, onde as linhas vermelhas indicam os resultados numéricos e as linhas tracejadas indicam os resultados experimentais



Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 8)

É importante observar que o fluxo volumétrico de extrusão (U) foi ajustado com base na área real da seção transversal, levando em conta as variações de fluxo que ocorrem em impressões reais. Isso se deve ao fato de que os parâmetros do processo e as propriedades do material, como a coesão, influenciam diretamente o perfil geométrico da camada extrudada. Se a velocidade de impressão for muito alta ou muito baixa, pode ocorrer uma deposição insuficiente ou excessiva de material, assim como a fratura do material enquanto ainda está no estado fresco.

O diâmetro do bico na impressão 3D de concreto tem impacto direto na geometria das camadas. As Figuras 19(a) e 19(b) evidenciam como a variação no diâmetro altera o formato e o perfil geométrico das camadas impressas.

Figura 19 – A influência do diâmetro do bico na forma da seção transversal de duas camadas impressas

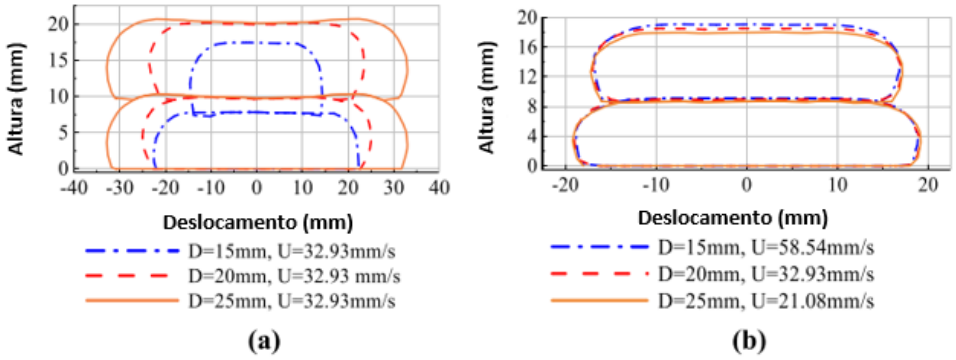


Figura 19. (a) Apenas mudando o diâmetro do bico, enquanto as outras condições permanecem as mesmas (V = 30 mm/s, HN = 10 mm). **Figura 19. (b)** adaptando o fluxo de extrusão de fluido de acordo com a mudança do diâmetro do bico (V = 30 mm/s, HN = 10 mm).
Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 9)

Verifica-se na Figura 19 que bocais maiores distribuem melhor a tensão, ampliando a área de escoamento plástico e contribuindo para uma maior estabilidade estrutural, enquanto bocais menores concentram a tensão, aumentando a chance de defeitos e deformações.

A velocidade de impressão na impressão 3D de concreto influencia diretamente a geometria das camadas (Figuras 20(a) e 20(b)).

Figura 20 – A influência da velocidade de impressão na forma da seção transversal de duas camadas impressas

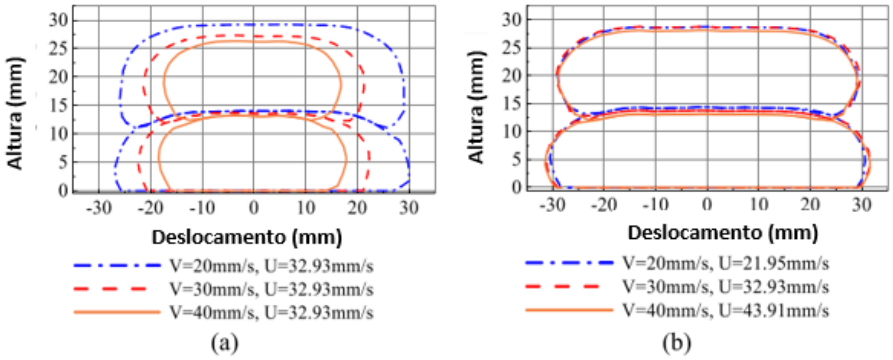


Figura 20. (a) Apenas mudando a velocidade de impressão, enquanto as outras condições permanecem as mesmas (D = 20 mm, HN = 10 mm). **Figura 20. (b)** Adaptando o fluxo de extrusão de fluido de acordo com a mudança da velocidade de impressão (D = 20 mm, HN = 10 mm).
Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 9)

A influência da velocidade de impressão e da altura do bico é discutida

em relação ao impacto direto que essas variáveis têm na geometria e estabilidade das camadas impressas. Velocidades de impressão mais altas tendem a diminuir a área de escoamento plástico, o que pode resultar em uma menor qualidade de impressão e maior probabilidade de defeitos. Velocidades mais baixas, por outro lado, melhoram a estabilidade da impressão.

Quanto à altura do bico, uma altura menor pode gerar maior concentração de tensão e cisalhamento no material, aumentando a carga sobre as camadas inferiores, enquanto uma altura maior reduz esses efeitos, conforme Figura 21.

Figura 21 – A influência da mudança na altura de impressão na geometria da seção transversal de duas camadas impressas

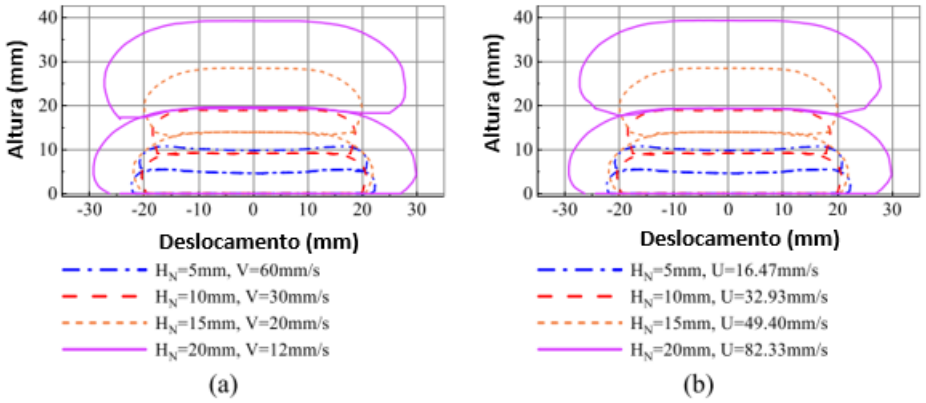


Figura 21. (a) Alterando a velocidade de impressão para corresponder à altura de impressão (D = 20 mm, U = 32,93 mm/s). **Figura 21. (b)** ajustando o fluxo de extrusão do material para corresponder à altura de impressão (D = 20 mm, V = 30 mm/s).
Fonte: Tao *et al. (*2024, p. 10)

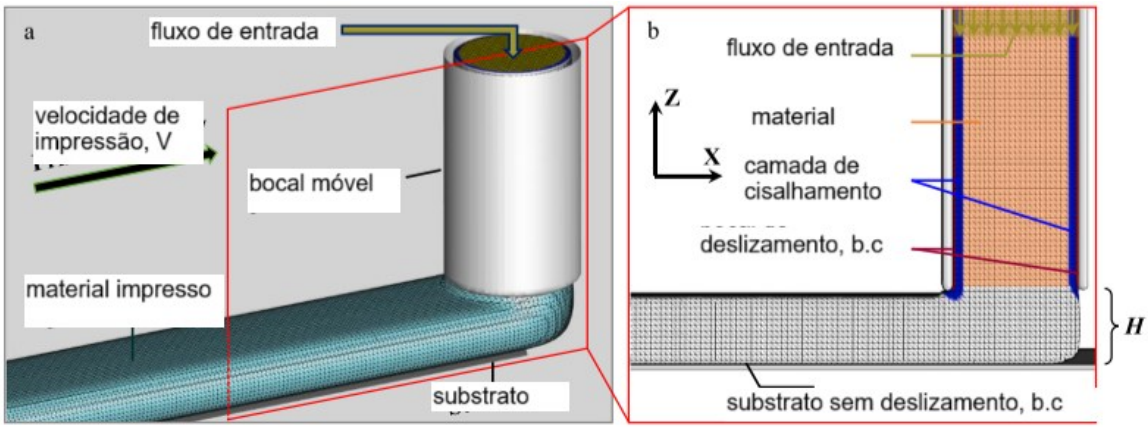
Em suma, a avaliação do perfil geométrico é fundamental para assegurar que os parâmetros do processo, como velocidade de impressão, diâmetro e altura do bico, resultem em camadas impressas de maneira precisa e estável, impactando diretamente a qualidade e a integridade do produto final.

Ainda na pesquisa de Tao et al. (2024), o artigo analisa os efeitos da tensão de escoamento do material (yield stress, τ_0), do diâmetro do bico, da altura do bico e da velocidade de impressão sobre o escoamento plástico durante a extrusão. A tensão de escoamento é o parâmetro do modelo reológico de Herschel–Bulkley ($\tau = \tau_0 + k \cdot \gamma^n$) adotado no estudo, obtido por ensaios de curva de fluxo e caracterizado como uma propriedade do concreto imprimível no estado fresco; o escoamento plástico, por sua vez, corresponde à deformação irreversível do material extrudado sob carga e ocorre nas regiões em que a tensão atuante supera a tensão de escoamento do material. A

análise dos parâmetros de impressão 3D de concreto revela que uma tensão de escoamento mais elevada na camada inferior, da ordem de 1000 Pa ou mais, proporciona maior estabilidade, permitindo que essa camada suporte as cargas da extrusão e sustente a camada superior sem apresentar região de escoamento plástico, minimizando as deformações. O aumento do diâmetro do bico, como 25 mm, gera uma região influenciada maior e distribui as tensões de forma mais dispersa — sem alterar a tensão de escoamento, que é propriedade da mistura —, o que amplia o volume de material sujeito ao escoamento plástico e resulta em maior deformação. Em relação à altura do bico, alturas maiores, entre 15 e 20 mm, reduzem a concentração de tensões e diminuem a região de escoamento plástico na camada inferior, enquanto alturas menores concentram as tensões abaixo do bico e na protuberância formada, provocando maior cisalhamento e mais deformações. Por fim, a velocidade de impressão tem impacto direto na estabilidade das camadas; velocidades mais baixas, como 20 mm/s, favorecem uma impressão mais estável e menor volume de escoamento plástico, enquanto velocidades mais altas, como 40 mm/s, aumentam a tensão de extrusão instantânea e o volume escoado, podendo comprometer a integridade estrutural das camadas impressas.

Em complemento o artigo de Abbaoui *et al. (*2024) buscou analisar a influência das condições de contorno de deslizamento na modelagem de dinâmica dos fluidos computacional (CFD) durante a extrusão e deposição de camadas no processo de impressão 3D de concreto. O domínio computacional é uma caixa retangular concebida para representar a extrusão do concreto e a deposição da camada. Os principais elementos envolvidos constam na Figura 22.

Figura 22 – Elementos-chave do domínio computacional e condições de contorno



Fonte: Abbaoui *et al. (*2024, p. 450)

Para a simulação do processo de impressão 3D de concreto, diversos parâmetros de entrada foram configurados. O bico de extrusão, que possui um diâmetro interno de 25 mm e uma espessura de 2 mm, extruda o concreto a uma velocidade de extrusão variável, com uma velocidade constante atribuída ao topo do domínio computacional. A velocidade de impressão também é variável e, conforme os diferentes casos simulados, a altura de impressão foi ajustada em 7,5 mm, 12,5 mm e 17,5 mm. O domínio computacional foi definido com dimensões de (350 × 80 × 80) mm^3 e, como o percurso de impressão é reto, apenas metade do domínio foi simulada para reduzir o custo computacional. Uma análise de sensibilidade de malha foi conduzida com cinco malhas, cujo número total de células variou de 514.550 (malha 1; célula de 1,0 mm), 648.296 (malha 2; 0,9 mm), 1.281.987 (malha 3; 0,7 mm) e 3.240.000 (malha 4; 0,5 mm) até 9.041.382 (malha 5; 0,3 mm). A malha 4, com 3.240.000 células, foi escolhida para todas as simulações subsequentes, uma vez que, a partir desse refinamento, os resultados se mostraram consistentes e refinamentos adicionais não foram necessários. Simulações de deposição de múltiplas camadas também foram realizadas para avaliar a interação entre camadas sucessivas.

As condições de contorno aplicadas no bico variaram entre deslizamento livre e sem deslizamento, enquanto o substrato foi mantido com uma condição de não deslizamento. Para representar os componentes sólidos no domínio computacional, foi empregada a técnica de porosidade de célula FAVOR (*Fractional Area/Volume Obstacle Representation)*, proposta por Hirt e Sicilian (1985). As simulações foram conduzidas com o software FLOW-3D® (versão 12.0, 2019).

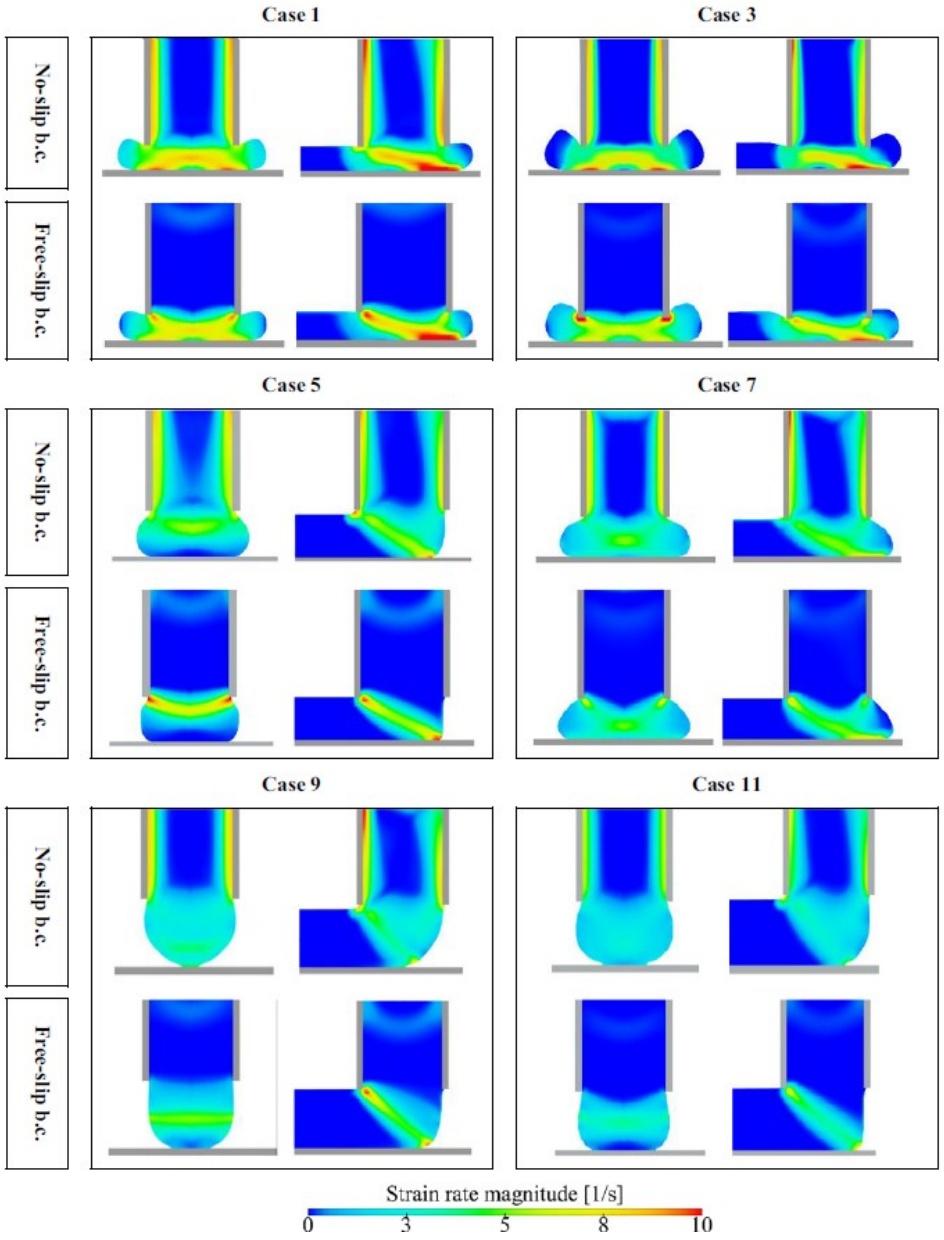
A interface entre o concreto no estado fresco e o substrato foi configurada com condições de contorno de não deslizamento, enquanto no bocal, as condições de deslizamento são variáveis. Dois tipos de condições de contorno de deslizamento foram analisados numericamente: sem deslizamento e deslizamento livre. Uma velocidade de extrusão constante é atribuída ao topo do domínio computacional, e uma região de fluido é criada dentro do bocal para permitir que o concreto no estado fresco flua e saia pelo orifício com um perfil totalmente desenvolvido. O "perfil totalmente desenvolvido" refere-se ao estado estável do escoamento do concreto dentro do bocal de extrusão, onde a velocidade do fluido se estabiliza ao longo da seção transversal do bocal. Inicialmente, quando o concreto começa a fluir, o perfil de velocidade pode ser irregular devido à aceleração e à interação com as paredes do

bocal. No entanto, após um certo ponto, chamado de comprimento de entrada, o fluxo se estabiliza, resultando em um perfil típico: a velocidade é zero nas paredes, devido à aderência do fluido, e atinge seu máximo no centro. Esse equilíbrio entre as forças viscosas e de inércia caracteriza o perfil de fluxo totalmente desenvolvido. A criação de uma região de fluido dentro do bocal garante que esse perfil seja atingido antes que o concreto seja extrudado, assegurando uma extrusão precisa e controlada. Esse controle é essencial para que as camadas de concreto depositadas durante a impressão 3D mantenham qualidade e uniformidade. A borda inferior do domínio é definida como uma parede estacionária e contém o substrato. As demais bordas do domínio são configuradas como contínuas, o que implica uma derivada nula do campo vetorial de velocidade ao longo dessas bordas, na Figura 22(b).

Para descrever o comportamento do concreto fresco durante a extrusão, El Abbaoui et al. (2024) adotaram dois modelos reológicos (constitutivos), resolvidos no solver FLOW-3D® (versão 12.0): o Modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (GNF), um modelo inelástico que representa o afinamento por cisalhamento (shear-thinning) e a tensão de escoamento por meio de uma viscosidade aparente dependente da taxa de cisalhamento, baseada em um modelo de Bingham bi-viscoso; e o Modelo de Fluido Elasto-Viscoplástico (EVP), que combina uma fase elástica recuperável, abaixo da tensão de escoamento, com uma fase viscoplástica, acima dela, na qual ocorre o escoamento plástico. Enquanto a modelagem do tipo newtoniano generalizado corresponde a uma capacidade padrão do solver, o modelo EVP adiciona um tensor de tensão elástica às equações de governo para captar a deformação elástica do material. Esses modelos permitiram simular o comportamento do material durante a impressão, considerando tanto o escoamento quanto a resposta elástica do concreto.

A distribuição da magnitude da taxa de deformação nas camadas impressas permite identificar a relação entre as propriedades do material, os parâmetros de impressão e o comportamento do escoamento, contribuindo para a melhoria do processo de impressão 3D de concreto. A distribuição da magnitude da taxa de deformação é exibida em um intervalo de 0 a 10 s^{-1} nos planos seccionais e longitudinais no meio das camadas impressas (casos 1, 3, 5, 7, 9 e 11), conforme mostrado na Figura 23.

Figura 23 – Magnitude da taxa de deformação limitada pelas condições das paredes durante a extrusão de argamassa e deposição de camadas



Fonte: Abbaoui *et al. (*2024, p. 457)

Os resultados de El Abbaoui et al. (2024) revelam a interação entre as propriedades do material, os parâmetros de impressão e as condições de contorno adotadas no bico. A presença de regiões escoadas e não escoadas nas camadas evidencia a natureza de fluido de Bingham (modelo GNF) da argamassa, o que reforça a necessidade de superar a tensão de escoamento para haver fluxo. Sob condição de não deslizamento (no-slip), os autores observam zonas de cisalhamento concentradas junto à parede do bico, decorrentes do atrito na interface, o que superestima as forças de atrito e eleva a pressão de extrusão. É importante ressaltar, porém, que a condição

de contorno tem significado físico: o deslizamento não é um artifício numérico, mas um fenômeno real da extrusão de concreto, associado à formação de uma camada lubrificante de partículas finas na interface concreto–parede, descrita pela teoria da lubrificação. Por isso, a condição de deslizamento livre (free-slip) reproduz melhor os ensaios, resultando em menor pressão de extrusão, menores taxas de deformação, perfil de velocidade mais uniforme e núcleo não escoado menor. Os próprios autores, no entanto, ponderam que o free-slip é uma idealização (atrito nulo) e que a representação fisicamente mais realista seria o deslizamento parcial, no qual a velocidade de deslizamento é proporcional à tensão de cisalhamento na parede — recomendação deixada para trabalhos futuros.

Quanto aos parâmetros de processo, a altura de impressão (H = 7,5; 12,5 e 17,5 mm, com D = 25 mm) mostrou-se determinante: menores alturas, como H = 7,5 mm (razão geométrica H/D < 0,5), produziram deposição mais precisa e melhor contato com o substrato, enquanto H = 17,5 mm (H/D > 0,5) comprometeu esse contato e a acurácia da deposição. A velocidade de extrusão constante foi essencial para garantir o perfil de fluxo plenamente desenvolvido na saída do bico, e a razão entre as velocidades de impressão e de extrusão influenciou a forma e o alinhamento das camadas. A análise de sensibilidade de malha, com cinco resoluções (de 514.550 a 9.041.382 células), indicou que a malha de 3.240.000 células (malha 4) ofereceu o melhor equilíbrio entre precisão e custo computacional. As simulações de múltiplas camadas, por sua vez, mostraram que a extrusão contínua, sem interrupções, reduziu defeitos nas interfaces entre camadas, sobretudo sob deslizamento livre.

Por fim, o estudo demonstra que a escolha da condição de contorno no bico é determinante e tem base física: como existe uma camada lubrificante de partículas finas na parede, o deslizamento livre reproduz os ensaios com maior fidelidade e reduz a pressão de extrusão (por exemplo, de 7463 para 6910 Pa no caso com H = 7,5 mm), eliminando o inchamento (die-swell) típico do não deslizamento e diminuindo a deformação das camadas. Do ponto de vista de modelagem, o modelo elasto-viscoplástico (EVP) com deslizamento livre foi o que melhor reproduziu o perfil das camadas, inclusive as ranhuras entre elas. A principal ressalva dos autores, e a diretriz mais relevante para trabalhos futuros, é que o deslizamento livre é uma idealização; a representação fisicamente mais fiel exige o deslizamento parcial, com velocidade de deslizamento proporcional à tensão de cisalhamento na parede.

Em síntese, os estudos revisados convergem ao demonstrar que a

simulação numérica, sobretudo a Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) resolvida pelo Método dos Volumes Finitos (FVM) e associada ao modelo Volume of Fluid (VOF), constitui ferramenta eficaz para reproduzir a morfologia do filete extrudado e para analisar a influência dos parâmetros operacionais (altura e diâmetro do bico, velocidade de impressão e de extrusão e geometria do bocal) e das propriedades reológicas (modelos de Bingham, Herschel–Bulkley, GNF e EVP) sobre a geometria e a estabilidade das camadas. Verificou-se, de modo recorrente, boa concordância entre simulações e experimentos quanto à largura, à altura e à forma da seção transversal, o que confirma o potencial preditivo dessas abordagens.

Ainda assim, a análise crítica da literatura evidencia lacunas que merecem maior aprofundamento. A primeira diz respeito à representação numérica da interface concreto–ar, que permanece um desafio em razão da dificuldade de conciliar estabilidade numérica e fidelidade física diante da elevada viscosidade do material. A segunda é que boa parte dos trabalhos se concentra na análise de parâmetros isolados e em validações predominantemente qualitativas ou visuais, sendo ainda incipiente a proposição de critérios quantitativos e objetivos para classificar o regime de alimentação e a estabilidade geométrica do filete.

A par dessas lacunas, identificam-se duas frentes que se configuram menos como deficiências da literatura e mais como oportunidades de avanço metodológico. A primeira delas é o emprego de metamodelos preditivos: consolidados em outras áreas, cabe questionar por que ainda são pouco utilizados na extrusão de concreto 3D para estimar a geometria do cordão a partir dos parâmetros operacionais. A segunda é a comparação sistemática entre diferentes solvers quanto à robustez na representação da reologia e da interface fluido–ar, ainda pouco praticada no contexto do 3DCP. Mais do que preencher uma ausência, essas frentes representam novas análises e ferramentas capazes de ampliar o modo de avaliar o processo.

Estabelecido o estado da arte, resta representar a física central da impressão 3D de concreto: o escoamento multifásico, transiente e não newtoniano do material fresco através do bico, com uma interface móvel concreto–ar que define a geometria do filete. Descrever esse fenômeno com rigor exige um modelo matemático de equações de governo: conservação da massa e da quantidade de movimento, rastreamento da interface e os modelos reológicos, objeto do capítulo de Modelagem Matemática. Como tais equações são acopladas, não lineares e sem solução analítica fechada, sua resolução se dá por simulação numérica (CFD/Método dos Volumes

Finitos), tema do capítulo seguinte.

Dessa forma, os três eixos que estruturam esta etapa do trabalho articulam-se de maneira encadeada: o estudo da impressão 3D de concreto fornece a fundamentação teórica e delimita o problema; a modelagem matemática formaliza a física em um conjunto de equações de governo; e a simulação numérica as resolve, produzindo os campos e as respostas geométricas posteriormente analisados.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação matemática que descreve o comportamento do escoamento multifásico envolvido no processo de impressão 3D de concreto fresco, sendo que o escoamento é tratado como transiente e isotérmico. O modelo considera um fluido incompressível, de regime laminar e comportamento não newtoniano, composto por duas fases imiscíveis: o concreto fresco (fase α) e o ar (fase β). No Fluent, a interface entre as fases é acompanhada por meio do modelo Volume of Fluid (VOF), amplamente utilizado na simulação de superfícies livres e especialmente adequado para representar o processo de extrusão e deposição de materiais cimentícios (HIRT; NICHOLS, 1981).

Já as simulações conduzidas no software ANSYS CFX adotam o modelo homogêneo de escoamento multifásico. Nesse modelo, as fases compartilham um único campo de velocidade, isto é, $u\alpha = u\beta = u$, e as propriedades efetivas do meio são obtidas pela soma dos campos ponderados pela fração volumétrica, resultando nas grandezas de mistura ρmix, μmix e $umix$. De maneira geral, qualquer propriedade φ é ponderada segundo $\varphi mix = r\alpha\, \varphi\alpha + r\beta\, \varphi\beta$, com a ação da gravidade considerada no eixo Y (ANSYS, 2023; REZENDE, 2014).

A adoção dessa formulação permite representar de forma realista a dinâmica da interface entre o concreto e o ar, reproduzindo os fenômenos físicos associados ao processo de extrusão. Além disso, possibilita o acoplamento direto com o modelo reológico do material, o que assegura a coerência físico-computacional das simulações e fornece subsídios para avaliar, com maior precisão, o comportamento do concreto fresco durante a impressão 3D.

3.1 METODOLOGIA DE VOLUMES DE CONTROLE

De acordo com Rezende (2014), a aplicação de balanços em volumes de controle para escoamentos multifásicos pode gerar inconsistências quando não há um embasamento físico e matemático rigoroso, especialmente devido à presença de interfaces móveis e à definição da fração volumétrica no modelo de dois fluidos.

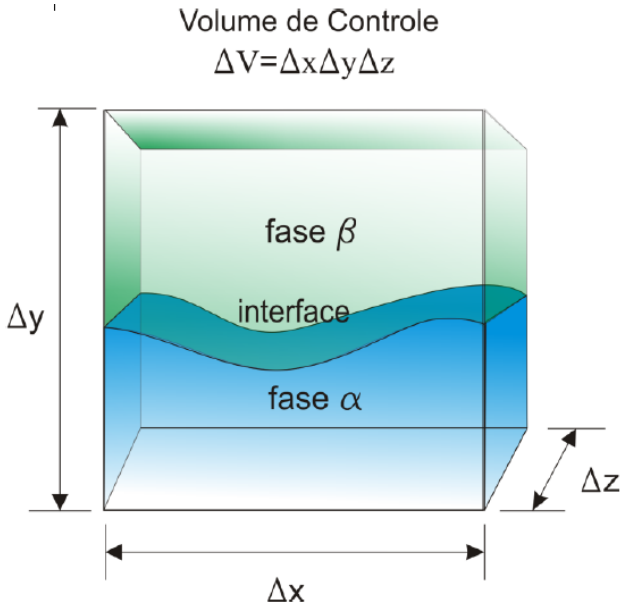
3.1.1 Fração Volumétrica

Seja Rα(V) a razão entre o volume ocupado pela fase α dentro de um volume arbitrário V, conforme ilustrado na Figura 24. Denotando por Vα(x, t) o volume efetivo da fase α no interior de V, a razão é dada por Rα(V) = Vα(x, t)/V. Fazendo o volume V tender a zero em torno de um ponto arbitrário x = (x1, x2, x3), define-se formalmente a fração volumétrica local da fase α, indicada por rα(x, t), como o limite:

$$r_\alpha(\mathbf{x},t) = \lim_{V\to 0} R_\alpha(\mathbf{x},t), \qquad R_\alpha(V) = \frac{V_\alpha(\mathbf{x},t)}{V} \qquad (3.1)$$

Deve-se observar que, ao fazer V → 0, o volume aproxima-se de um ponto x e, pela hipótese do contínuo, duas porções de matéria não podem coexistir no mesmo ponto do espaço. Nesse limite, rα assume apenas os valores 0 ou 1, tornando-se descontínua e incapaz de descrever rigorosamente os campos macroscópicos (ISHII; MISHIMA, 1984). Como argumenta Drew (1983), o volume material não é, na prática, arbitrariamente pequeno (V ≠ 0): situa-se em uma escala intermediária, grande o bastante para que as flutuações moleculares não afetem os campos internos e pequeno o bastante para que as variações espaciais sejam desprezíveis. Assim, na formulação numérica utiliza-se, de fato, a razão de volume finito Rα (Equação 3.1, à direita), que representa o percentual do volume material preenchido por cada fase, contornando a singularidade do limite pontual (REZENDE, 2014).

Figura 24 – Volume de controle contendo duas fases imiscíveis separadas por uma interface



Fonte: Rezende (2008).

3.1.2 Conservação da Massa

A concentração mássica de cada fase segue raciocínio análogo ao da fração volumétrica. A massa da fase α por unidade de volume total é dada pelo produto da fração volumétrica pela massa específica local, rα(x, t) ρα(x, t). Assim, a quantidade total de massa da fase α presente em um volume de controle arbitrário é:

$$\int_V r_\alpha \, \rho_\alpha \, dV \qquad (3.2)$$

A massa de uma fase em um volume de controle pode variar por dois processos. O primeiro é a transferência de massa através da interface entre as fases — por exemplo, mudança de estado físico ou dissolução —, que ocorre a uma taxa Γα, em unidades de massa transferida por unidade de volume e de tempo. O segundo é o escoamento pelas fronteiras ∂V do volume, cujo fluxo de massa por unidade de área e tempo é dado por rα ρα uα · n̂, sendo n̂ o vetor normal unitário ao elemento diferencial de superfície e uα a velocidade baricêntrica da fase α. Aplicando o Teorema de Gauss e o Teorema de Transporte de Reynolds a um volume fixo (FOX; PRITCHARD; McDONALD, 2015), obtém-se a equação de conservação da massa da

fase α em sua forma diferencial:

$$\frac{\partial(r_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (r_\alpha \rho_\alpha \, \mathbf{u}_\alpha) = \Gamma_\alpha \qquad (3.3)$$

No caso específico deste trabalho — escoamento isotérmico de concreto fresco e ar, sem mudança de fase nem reação química —, não há transferência de massa entre as fases, de modo que Γα = 0 (REZENDE, 2014).

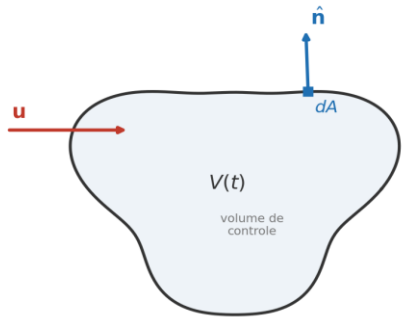
3.1.3 Quantidade de Movimento

A quantidade de movimento da fase α no interior de V é definida por:

$$\int_V r_\alpha \ \rho_\alpha \, \mathbf{u}_\alpha \, dV \qquad (3.4)$$

Para deduzir a equação de transporte de forma rigorosa, parte-se de um balanço geral de conservação para uma propriedade genérica φ, transportada em um volume de controle V(t) de fronteira A(t), conforme a Figura 25. O balanço estabelece que, em um volume de controle, o termo transiente somado ao fluxo advectivo, ao fluxo difusivo e ao termo de geração ou consumo é nulo (ROSA, 2019; REZENDE, 2014):

Figura 25 – Volume de controle V(t) com o campo de velocidade u, o vetor normal unitário externo n̂ e o elemento de área dA



Fonte: Elaborada pela autora (2025), com base em Rezende (2014).

Em termos de balanço conceitual, tem-se: {termo transiente de φ} + {fluxo advectivo de φ} + {fluxo difusivo de φ} = {geração/consumo de φ}. Escrevendo cada termo em sua forma integral sobre o volume de controle e sua fronteira, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho\, \phi\, dV + \int_{A(t)} \rho\, \phi\, (\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA + \int_{A(t)} \Phi\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \int_{V(t)} S_\phi\, dV \quad (3.4a)$$

em que Φ representa o fluxo difusivo da propriedade, Sφ o termo de fonte ou sumidouro e n̂ o vetor normal unitário externo à superfície A(t). Considerando o volume de controle parado e não deformável (V(t) = const e A(t) = const), a Regra de Leibniz permite comutar a derivada temporal com a integral de volume no termo transiente:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, \phi\, dV = \int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\, dV \quad (3.4b)$$

Em seguida, aplica-se o Teorema de Gauss (Teorema da Divergência) aos termos de superfície, convertendo as integrais de área em integrais de volume. Reunindo todos os termos sob uma única integral de volume, resulta:

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\phi) + \nabla\cdot\Phi - S_\phi\right] dV = 0 \quad (3.4c)$$

Definindo o fluxo difusivo como proporcional ao gradiente da propriedade e orientado no sentido oposto a ele (relação constitutiva do tipo Fick–Fourier),

$$\Phi \equiv -\Gamma_\phi\, \nabla\phi \quad (3.4d)$$

e observando que o volume de controle é arbitrário, aplica-se o Lema de Dubois-Reymond, segundo o qual, se a integral de volume de uma função contínua sobre um volume arbitrário é nula, então o próprio integrando deve ser nulo. Obtém-se, assim, a forma diferencial (canônica) da equação geral de transporte:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\phi) = \nabla\cdot(\Gamma\varphi\ \nabla\varphi) + S_\phi \quad (3.4e)$$

Essa é a equação canônica de transporte de uma propriedade genérica φ, na qual o primeiro termo do lado esquerdo é o transiente, o segundo é o advectivo, e no lado direito figuram o termo difusivo, $\nabla\cdot(\Gamma\varphi\nabla\varphi)$, e o termo de fonte ($S\varphi$). Quando $\Gamma\varphi$ é constante, o termo difusivo reduz-se a $\Gamma\varphi\nabla^2\varphi$. A partir dela, particularizam-se as equações de conservação: para a massa, fazendo $\varphi = 1$, com $\Gamma\varphi = 0$ e $S\varphi = 0$; e para a quantidade de movimento, fazendo $\varphi = u$, caso em que o fluxo difusivo corresponde ao tensor de tensões viscosas e o termo de fonte reúne o gradiente de pressão ($-\nabla p$) e as forças de corpo. Considerando a força gravitacional expressa por $\rho_\alpha\, g$ atuando uniformemente sobre o volume da fase α:

$$\int_V r_\alpha\ \rho_\alpha\, \mathbf{g}\, dV \qquad (3.5)$$

onde g é a aceleração do campo gravitacional. Nos modelos multifásicos gerais, a troca de quantidade de movimento entre as fases é representada por uma força interfacial Mα, que expressa por unidade de volume a taxa de transferência de momento entre as fases em contato:

$$\int_V \mathbf{M}_\alpha\ dV \qquad (3.6)$$

De modo análogo, quando ocorre transferência de massa entre as fases, a massa que atravessa a interface transporta consigo uma parcela de quantidade de movimento, dada por:

$$\int_V \Gamma_\alpha\ \mathbf{u}_{\alpha i}\, dV \qquad (3.7)$$

Portanto, para o problema tratado: modelo homogêneo, duas fases imiscíveis sem troca de massa nem de momento interfacial, os termos das Equações (3.6) e (3.7) anulam-se, e a equação de quantidade de movimento reduz-se à forma da mistura apresentada na Seção 3.1.4.

3.1.4 Modelo Homogêneo e Propriedades de Mistura (ANSYS CFX)

Embora o ANSYS CFX também ofereça o modelo multifásico não homogêneo (inhomogeneous), no qual cada fase possui seu próprio campo de velocidade, neste trabalho o escoamento das duas fases foi resolvido por meio do modelo homogêneo, adequado a escoamentos de superfície livre com fases imiscíveis e interface bem definida, no qual todas as fases compartilham os mesmos campos de velocidade, pressão e turbulência. Assim, a hipótese fundamental é (ANSYS, 2023):

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}$$

As propriedades efetivas do meio são obtidas como médias ponderadas pela fração volumétrica de cada fase, dando origem às grandezas de mistura:

$$\rho_{mix} = \sum_k r_k \rho_k = r_\alpha \rho_\alpha + r_\beta \rho_\beta, \quad \mu_{mix} = r_\alpha \mu_\alpha + r_\beta \mu_\beta, \quad \phi_{mix} = r_\alpha \phi_\alpha + r_\beta \phi_\beta$$

Substituindo as propriedades de mistura nas equações de conservação e somando as contribuições das fases, obtêm-se a equação da continuidade e a equação de quantidade de movimento (equações de Navier–Stokes) para a mistura (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002):

$$\frac{\partial \rho_{mix}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mix}\, \mathbf{u}) = 0 \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial (\rho_{mix} \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mix}\, \mathbf{uu}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu_{mix}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \rho_{mix}\, \mathbf{g} + \mathbf{F}_\sigma \qquad (3.9)$$

em que p é a pressão compartilhada, g a aceleração gravitacional e Fσ a força de tensão superficial na interface (Seção 3.2.6). Essa formulação de mistura é a efetivamente resolvida pelo método dos volumes finitos no CFX (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995) e constitui o acoplamento entre o modelo VOF, que transporta a fração volumétrica, e o modelo reológico, que

define μmix a partir do comportamento não newtoniano do concreto fresco (ANSYS, 2023; REZENDE, 2014).

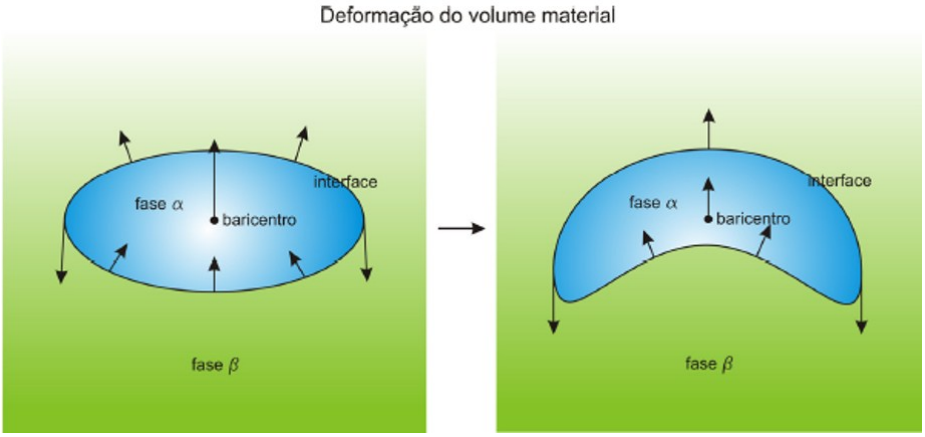
3.2 ABORDAGEM EULERIANA

A abordagem euleriana é uma formulação matemática amplamente empregada na modelagem de escoamentos multifásicos, em que diferentes fases, como líquido, gás ou sólido, coexistem em um mesmo domínio físico. Nessa perspectiva, o fluido é descrito a partir de um referencial fixo no espaço, ou seja, o foco da análise está nos pontos do domínio e na variação temporal das propriedades físicas que passam por eles, em contraste com a abordagem lagrangiana, que segue o movimento individual das partículas.

De acordo com Rezende (2014), se fosse possível conhecer exatamente a posição de cada interface e sua evolução no tempo, as condições de contorno seriam expressas por condições de salto, que garantem o equilíbrio de fluxo nas superfícies de separação entre as fases (DREW; PASSMAN, 1999). Entretanto, como a solução exata dessas múltiplas fronteiras móveis é impraticável (ISHII; MISHIMA, 1984), recorre-se a uma formulação média, na qual se define uma variável indicadora de fase que permite descrever o comportamento médio do escoamento. Essa metodologia é a base para os modelos de volume de fluido (VOF) e outros métodos de captura de interface utilizados em simulações numéricas de escoamentos com fronteiras móveis, como os processos de extrusão e deposição na impressão 3D de concreto.

A diferença entre a velocidade da interface e a velocidade baricêntrica do volume material — que não são necessariamente iguais nem uniformes ao longo da superfície — reflete a natureza local do escoamento interfacial e pode resultar na deformação do próprio volume material, como ilustrado esquematicamente na Figura 26 (REZENDE, 2008).

Figura 26 – Variação das velocidades na interface e no interior de um volume material, resultando em sua deformação



Fonte: Rezende (2008, p.37).

3.2.1 Promediação

A promediação é o procedimento matemático que permite representar o comportamento médio de um escoamento multifásico a partir de suas variáveis instantâneas, convertendo as equações locais de conservação em formas suavizadas e adequadas à escala de interesse do modelo. O conceito baseia-se na necessidade de lidar com a natureza aleatória e complexa dos fenômenos de transporte, especialmente em escoamentos turbulentos ou multifásicos (DREW, 1983; REZENDE, 2014). De acordo com Drew (1983), Drew e Lahey Junior (1979) e Rezende (2014), há diferentes formas de promediação, aplicáveis conforme o tipo de escoamento:

Média temporal (Reynolds average): utilizada para escoamentos estatisticamente estacionários, corresponde à média no tempo de uma variável f(t, x) sobre um intervalo T (REZENDE, 2014):

$$\overline{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f\,(t, \mathbf{x})\,dt \qquad (3.10)$$

Média volumétrica: usada em meios porosos ou escoamentos

espacialmente homogêneos (REZENDE, 2014):

$$\overline{F}(t) = \frac{1}{V}\int_V f\,(t, \mathbf{x})\, dV \qquad (3.11)$$

Média das realizações (ensemble average): considera N experimentos idênticos, sendo a mais adequada para o tratamento estatístico de escoamentos multifásicos (DREW, 1983):

$$\overline{F}(t, \mathbf{x}) = \int_E f\,(t, \mathbf{x})\, dm(\xi) \qquad (3.12)$$

em que dm(ξ) representa a probabilidade de ocorrência de uma realização ξ dentro do conjunto de eventos possíveis E. Neste trabalho, a promediação adotada é a média conjunta (ensemble average), que permite tratar probabilisticamente o comportamento das fases (DREW, 1983; REZENDE, 2014).

3.2.2 Função Indicadora de Fase

Define-se a função indicadora de fase χk(x, t) para representar a presença da fase k em um ponto do domínio, assumindo o valor 1 se o ponto está ocupado pela fase k e 0 caso contrário. A derivada material dessa função na interface i obedece à equação topológica:

$$\frac{D\chi_i}{Dt} = 0 \qquad (3.13)$$

o que assegura a conservação da interface móvel entre as fases. A demonstração formal dessa relação emprega o conceito de função generalizada (distribuição) e o Lema de Dubois-Reymond, garantindo que a derivada material da função indicadora seja nula ao longo da interface (DREW, 1983; ISHII; MISHIMA, 1984).

3.2.3 Equações de Balanço Promediadas

As equações locais de conservação de massa e de quantidade de movimento são multiplicadas pela função indicadora de fase e promediadas no conjunto de realizações. Assim, obtêm-se as formas promediadas das equações de conservação (DREW; LAHEY JUNIOR, 1979; DREW, 1983; ISHII; MISHIMA, 1984):

Conservação da massa:

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \, \mathbf{u}_k) = \dot{m}_k \qquad (3.14)$$

onde αk é a fração volumétrica e ṁk o fluxo de massa interfacial. Conservação da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k \mathbf{u}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \, \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = -\alpha_k \nabla p + \nabla \cdot (\alpha_k \tau_k) + \alpha_k \rho_k \, \mathbf{g} + \mathbf{M}_k \qquad (3.15)$$

onde Mk representa as forças interfaciais e τk = 2 μk Dk o tensor de tensões viscosas. Essas expressões correspondem às equações promediadas de conservação e constituem a base dos modelos multifásicos eulerianos empregados na modelagem CFD (DREW; LAHEY JUNIOR, 1979; DREW, 1983; ISHII; MISHIMA, 1984; DREW; PASSMAN, 1999).

3.2.4 Interpretação Probabilística e Fechamento

A média da função indicadora χk fornece a fração volumétrica da fase k, que pode ser interpretada como a probabilidade de encontrar essa fase no ponto x e no instante t. As frações de todas as fases somam a unidade:

$$\sum_{k=1}^{N_f} \alpha_k = 1 \qquad (3.16)$$

Os termos de interface (ṁk, Mk) surgem naturalmente do processo de promediação, sem necessidade de imposição explícita de condições de contorno na

interface. Entretanto, a perda de informação microscópica gera um sistema não fechado, exigindo relações constitutivas para modelar a interação entre as fases e a turbulência, de modo análogo ao fechamento das equações RANS (ISHII; MISHIMA, 1984; DREW; PASSMAN, 1999). Segundo Rezende (2014), o processo de promediação atua como um filtro, suprimindo flutuações instantâneas e fornecendo um modelo médio do escoamento; apesar da perda de informação microscópica, o método possibilita a descrição adequada de sistemas multifásicos na escala de engenharia, servindo de base para o modelo de dois fluidos e para a formulação numérica utilizada nas simulações.

3.2.5 Método de Volume de Fluido (VOF)

O Método de Volume de Fluido (VOF) é uma técnica empregada na simulação de escoamentos multifásicos com interface móvel, sendo particularmente eficaz na modelagem de sistemas com deformação da interface entre duas fases imiscíveis, como o ar e o concreto fresco durante a impressão 3D. Proposto originalmente por Hirt e Nichols (1981), o método baseia-se na introdução de uma função indicadora F(x, t) que representa a fração de volume de uma das fases em cada célula do domínio computacional, tratando a superfície livre como uma fronteira a partir de um modelo euleriano. A função assume o valor 1 quando a célula está completamente preenchida pelo fluido, 0 quando está vazia e 0 < F < 1 quando contém a interface entre os fluidos. A evolução temporal dessa função é descrita pela equação de transporte do VOF:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \qquad (3.17)$$

em que u = (u, v, w) é o vetor de velocidades. Essa equação indica que o campo de fração volumétrica F é transportado pelo campo de velocidades, garantindo que a interface se mova coerentemente com o escoamento. Em formulações incompressíveis, ela é equivalente à conservação de massa aplicada ao fluido marcador, o que mantém a integridade volumétrica da interface. Hirt e Nichols (1981) mostram que, ao integrar essa equação sobre o volume de controle (malha de volumes finitos), obtém-se a forma discreta em que o fluxo de F entre células é

calculado por um esquema doador-receptor (donor–acceptor) para preservar a nitidez da interface:

$$\frac{dF_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{V_{i,j}} \sum_{\text{faces}} (F\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\, A_f \qquad (3.18)$$

em que Vi,j é o volume da célula, Af a área da face e n o vetor normal. Essa formulação garante que o transporte de F não provoque difusão numérica excessiva, o que é essencial para manter a interface bem definida — especialmente em materiais viscosos, laminares e com fronteiras suaves, como o concreto fresco durante a extrusão. Estudos recentes, como os de Comminal et al. (2020) e Mechtcherine et al. (2020), apontam o VOF como uma das ferramentas mais adequadas para a modelagem acurada do escoamento e da deposição de materiais cimentícios na manufatura aditiva.

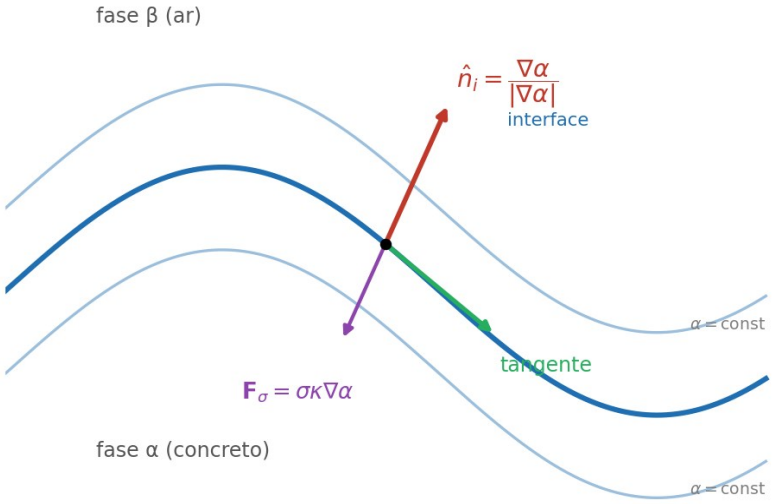
3.2.6 Força de Tensão Superficial (Continuum Surface Force)

Uma das vantagens do método VOF é permitir a modelagem de mudanças topológicas da interface, como fusão, cisão e aprisionamento de bolhas. A curvatura da interface (κ) e a força de tensão superficial (Fσ) são comumente modeladas pelo método Continuum Surface Force (CSF), proposto por Brackbill, Kothe e Zemach (1992), sendo expressas por:

$$\mathbf{F}_\sigma = \sigma\,\kappa\,\nabla\alpha, \qquad \kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|}\right), \qquad \hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\nabla\alpha}{|\nabla\alpha|} \qquad (3.19)$$

em que σ é o coeficiente de tensão superficial e n̂i = ∇α/|∇α| é o vetor normal unitário à interface, orientado na direção do gradiente da fração volumétrica, conforme ilustrado na Figura 27. A força Fσ atua na direção normal às superfícies de fração volumétrica constante (α = const), enquanto a direção tangente permanece livre.

Figura 27– Vetor normal unitário à interface (n̂i = ∇α/|∇α|), direção tangente e força de tensão superficial Fσ sobre as superfícies de α constante



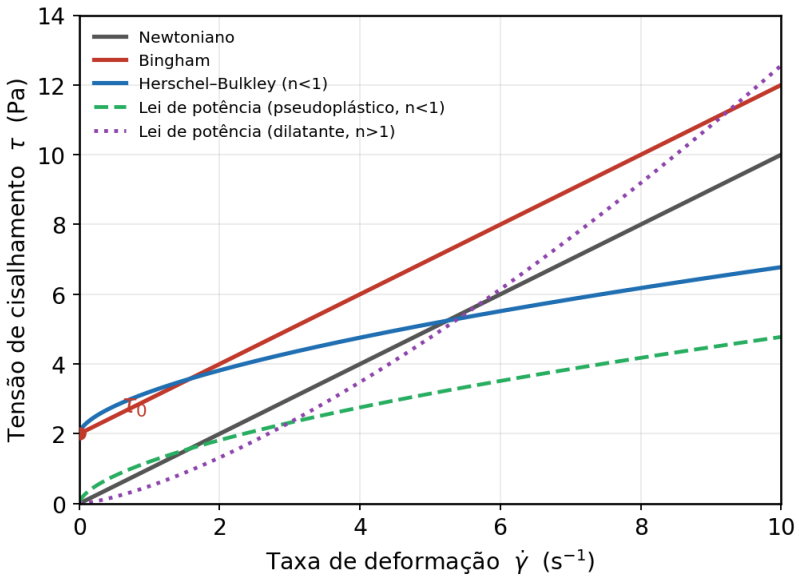
Fonte: Elaborada pela autora (2025), com base em Brackbill, Kothe e Zemach (1992).

3.3 MODELOS REOLÓGICOS

Nesta seção são descritos os modelos reológicos empregados na presente tese, com ênfase nas formulações utilizadas para representar o comportamento do concreto no estado fresco durante o processo de extrusão. A partir dessas expressões constitutivas, é possível relacionar a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação do material, caracterizando a resposta reológica do fluido não newtoniano e inserindo-a nas simulações numéricas conduzidas pelo método dos volumes finitos no software ANSYS CFX. Os modelos apresentados a seguir fundamentam a representação física e computacional do escoamento do concreto imprimível, conforme amplamente discutido na literatura clássica de reologia e modelagem de escoamentos viscoplásticos (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002; BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989; VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995).

A Figura 28 apresenta as curvas reológicas canônicas — tensão de cisalhamento em função da taxa de deformação — para os comportamentos newtoniano, de Bingham, de lei de potência (pseudoplástico e dilatante) e de Herschel–Bulkley, evidenciando o papel da tensão de escoamento τ0 e do expoente n.

Figura 28 – Curvas reológicas canônicas: tensão de cisalhamento (τ) em função da taxa de deformação (γ̇)



Fonte: Elaborada pela autora (2025), com base em Barnes, Hutton e Walters (1989).

3.3.1 Modelo de Herschel–Bulkley

O modelo de Herschel–Bulkley é uma generalização dos modelos de Bingham e da Lei de Potência, utilizado para representar fluidos não newtonianos que apresentam tensão de escoamento e dependência não linear entre tensão e taxa de deformação (HERSCHEL; BULKLEY, 1926; BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). Esse modelo tem sido amplamente empregado na descrição do comportamento reológico de materiais viscoplásticos, incluindo suspensões concentradas e materiais cimentícios no estado fresco (ROUSSEL, 2006; WALLEVIK, 2003). A relação constitutiva é dada por:

$$\tau = \tau_0 + k\,\dot{\gamma}^{\,n} \qquad (3.20)$$

onde: τ — tensão de cisalhamento (Pa); τ0 — tensão de escoamento (Pa); k — índice de consistência (Pa·sⁿ); γ̇ — taxa de deformação de cisalhamento (s⁻¹); n — índice de comportamento do fluido (adimensional). A viscosidade aparente (η) é obtida pela razão entre tensão e taxa de cisalhamento:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\,\dot{\gamma}^{\,n-1} \qquad (3.21)$$

Essa expressão evidencia que a viscosidade aparente depende inversamente da taxa de deformação e diverge quando γ̇ → 0, refletindo o comportamento quase sólido do material em repouso, típico de fluidos viscoplásticos (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989; COUSSOT, 2005). Do ponto de vista numérico, essa singularidade impede a solução direta das equações e precisa ser regularizada. As estratégias usuais consistem em limitar a viscosidade aparente a um valor máximo ηmax ou em adotar a regularização de Papanastasiou (1987), que substitui a descontinuidade em γ̇ = 0 por uma transição suave controlada pelo parâmetro de regularização m:

$$\eta = \min\left(\eta_{\max},\ \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\,\dot{\gamma}^{\,n-1}\right) \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{\tau_0\left(1 - e^{-m\dot{\gamma}}\right)}{\dot{\gamma}} + k\,\dot{\gamma}^{\,n-1}$$

Quando n = 1, o material se comporta como um fluido de Bingham; para n < 1, apresenta comportamento shear-thinning (pseudoplástico); e para n > 1, shear-thickening (dilatante). Esse modelo é particularmente adequado para materiais cimentícios, pois captura de forma realista o comportamento observado experimentalmente, no qual o concreto permanece estável sob pequenas solicitações e flui somente após superar a tensão de escoamento (ROUSSEL, 2006; MECHTCHERINE et al., 2020). Cabe notar que, para n < 1, o termo k·γ̇^(n−1) permanece singular quando γ̇ → 0 e não é removido pela regularização de Papanastasiou, que atua apenas sobre o termo plástico; nesses casos, é necessário também limitar a viscosidade (η_{max}) ou impor uma taxa de cisalhamento mínima.

3.3.2 Modelo de Bingham

O modelo de Bingham descreve o comportamento de fluidos viscoplásticos, isto é, materiais que se comportam como sólidos até que a tensão aplicada ultrapasse um valor crítico denominado tensão de escoamento. A partir desse ponto, o material passa a fluir de forma linear em relação à taxa de deformação (BINGHAM, 1922; BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002). A formulação matemática

é expressa por:

$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \qquad (3.22)$$

onde: τ — tensão de cisalhamento (Pa); τ0 — tensão de escoamento (Pa); μp — viscosidade plástica (Pa·s); γ̇ — taxa de deformação de cisalhamento (s^{-1}). Quando τ < τ0, o material não escoa e se comporta como um corpo rígido; quando τ ≥ τ0, o escoamento ocorre com relação linear entre tensão e taxa de deformação. A viscosidade aparente (η) pode ser obtida a partir da relação:

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p \qquad (3.23)$$

Novamente, essa expressão evidencia que a viscosidade tende ao infinito quando a taxa de deformação se aproxima de zero ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$), refletindo a resistência inicial ao escoamento característica de materiais viscoplásticos e exigindo o mesmo tratamento de regularização discutido na Equação (3.21) (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989). O modelo de Bingham é um caso particular do modelo de Herschel–Bulkley, obtido quando o expoente de comportamento do fluido é n = 1. Por sua simplicidade e boa aderência ao comportamento de diversos materiais cimentícios, é amplamente utilizado em análises teóricas e numéricas do escoamento do concreto fresco (ROUSSEL, 2006; WALLEVIK, 2003).

3.3.3 Diferenças Essenciais entre os Modelos Reológicos

Para evidenciar de forma clara as diferenças fundamentais entre os modelos reológicos de Bingham e Herschel–Bulkley, apresenta-se a seguir uma síntese comparativa de seus principais aspectos matemáticos e conceituais, conforme o Quadro 3.

Quadro 3 – Comparativo entre os modelos de Bingham e Herschel–Bulkley

Aspecto	**Modelo de Bingham**	**Modelo de Herschel–Bulkley**
Tipo de relação	Linear	Não linear

Aspecto	Modelo de Bingham	Modelo de Herschel–Bulkley
Parâmetros	τ_0, μ_p	τ_0, k, n
Expoente n	Fixo em 1	Variável (n<1: shear-thinning; n>1: shear-thickening)
Comportamento	Fluido viscoplástico linear	Fluido viscoplástico generalizado
Caso particular	—	Para n = 1, torna-se o modelo de Bingham

Fonte: Elaborada pela autora (2025).

Esse comparativo permite compreender como a introdução do expoente de comportamento do fluido (n) no modelo de Herschel–Bulkley amplia sua capacidade de representar a não linearidade entre tensão e taxa de deformação, característica frequentemente observada em materiais cimentícios e, em particular, em concretos imprimíveis, nos quais o comportamento shear-thinning exerce influência direta sobre a extrusão e a estabilidade geométrica do filete depositado (BARNES; HUTTON; WALTERS, 1989; ROUSSEL, 2012; MECHTCHERINE et al., 2020).

Cabe assinalar, contudo, as principais dificuldades associadas à aplicação desses modelos ao concreto fresco, as quais impactam diretamente a própria modelagem matemática do escoamento. A primeira é de natureza matemática: em ambos os modelos a viscosidade aparente diverge quando $\dot{\gamma} \to 0$, o que exige regularização (por limitação de η_{max} ou pela regularização de Papanastasiou) para que as relações constitutivas permaneçam bem definidas e o problema, matematicamente tratável. A segunda é de natureza experimental: a determinação dos parâmetros reológicos (τ_0, k, n, μ_p) depende de ensaios de reometria de execução difícil em materiais cimentícios, uma vez que o concreto fresco é uma suspensão concentrada, evolutiva no tempo (tixotropia) e sujeita a efeitos de segregação, deslizamento na parede e sedimentação. Como consequência, os dados reológicos disponíveis são frequentemente escassos, dispersos ou de baixa confiabilidade, o que compromete a calibração dos modelos constitutivos e, portanto, a fidelidade da própria modelagem matemática do concreto imprimível (WALLEVIK, 2003; ROUSSEL, 2012). Essas limitações, originadas ainda na etapa de modelagem, comprometem a representação matemática do material e, por conseguinte, propagam-se para as etapas subsequentes, repercutindo sobre os resultados da simulação numérica que delas

depende.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

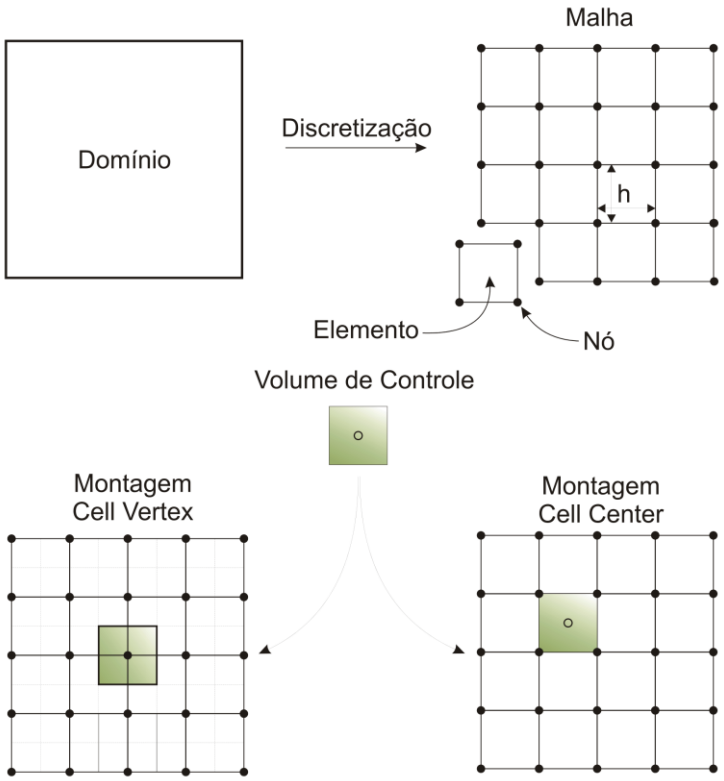
A formulação numérica é apresentada neste capítulo da tese, por meio do emprego do Método dos Volumes Finitos para a solução dos sistemas de equações diferenciais abordados no capítulo anterior.

4.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS (FVM)

O presente trabalho empregou o Método dos Volumes Finitos (FVM), implementado no ANSYS Fluent with Meshing (formulação baseada no centro da célula, cell-centered) e no ANSYS CFX (formulação baseada em elementos, Element-based Finite Volume Method – EbFVM), como ferramenta numérica para a solução das equações governantes do escoamento do concreto durante o processo de impressão 3D. Esse método é amplamente utilizado na dinâmica dos fluidos computacional (CFD) em razão de sua formulação conservativa e da capacidade de tratar geometrias complexas e malhas não estruturadas, o que o torna adequado para representar o comportamento do concreto extrudado. Optou-se por essa abordagem euleriana, em vez de formulações de elementos finitos (como as disponíveis no Abaqus, inclusive a formulação euleriana-lagrangiana acoplada – CEL), porque o problema envolve grandes deformações de um fluido viscoplástico com superfície livre, tratadas naturalmente pelo método VOF sem distorção ou remalhamento da malha; na impressão 3D de concreto, as abordagens por elementos finitos têm sido empregadas sobretudo na análise mecânica do material já depositado (WOLFS et al., 2018; XIAO; LIU; DING, 2021) ou exigem formulações de partículas, como o PFEM (REINOLD et al., 2022).

O FVM é um método baseado em balanços locais de volume de controle, nos quais as equações diferenciais que descrevem a conservação de massa, quantidade de movimento e energia são integradas sobre pequenos volumes finitos que compõem o domínio de cálculo. Cada volume de controle corresponde a uma entidade geométrica discreta, onde os fluxos através das faces são avaliados numericamente. O conjunto desses volumes define a malha computacional, cujos pontos de interseção são denominados nós (Figura 29).

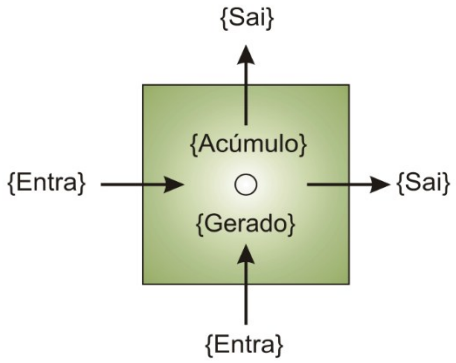
Figura 29 - Exemplo bidimensional da discretização de um domínio e os esquemas de montagem dos volumes de controle



Fonte: Rezende (2014, p. 136).

A solução numérica do problema é obtida por meio da discretização das equações diferenciais parciais que governam o escoamento, transformando-as em um sistema de equações algébricas discretas resolvidas de forma iterativa. Esse procedimento é característico do Método dos Volumes Finitos, no qual as equações de conservação são integradas sobre volumes de controle e os fluxos são avaliados nas superfícies que delimitam cada volume (Figura 30) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; MALISKA, 2004). O processo de discretização assegura que, à medida que o tamanho das células tende a zero, a solução numérica convirja para a solução exata das equações diferenciais, propriedade conhecida como convergência. Pelo teorema de equivalência de Lax, a convergência é garantida quando o esquema é consistente (as equações discretizadas tendem às equações diferenciais com o refinamento) e estável; a representação adequada do comportamento físico do escoamento, por sua vez, depende da validação do modelo (ROACHE, 1998; FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Figura 30 – Balanço de uma grandeza qualquer em um volume de controle



$$\{Entra\} + \{Sai\} + \{Acúmulo\} + \{Gerado\} = 0$$

Fonte: Rezende (2014, p. 137).

No ANSYS Fluent, a formulação adotada baseia-se predominantemente no esquema *cell-centered*, no qual as variáveis primárias do escoamento, tais como velocidade, pressão e fração volumétrica, são armazenadas no centro de cada célula do domínio computacional, conforme o esquema de montagem *cell center* ilustrado na Figura 29. Essa abordagem favorece a estabilidade numérica e a avaliação precisa dos gradientes locais, sendo amplamente empregada em simulações de escoamentos multifásicos e não newtonianos. Em particular, no contexto da aplicação do modelo Volume of Fluid (VOF), a formulação cell-centered contribui para a adequada reconstrução da interface entre o concreto fresco e o ar, uma vez que a precisão dos campos de fração volumétrica é diretamente dependente da discretização espacial adotada (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; ANSYS, 2023a).

Por sua vez, o ANSYS CFX adota uma formulação baseada em volumes de controle *cell vertex*, na qual as variáveis primárias são armazenadas nos nós da malha e os volumes de controle são construídos ao redor desses vértices, conforme o esquema de montagem *cell vertex* apresentado na Figura 29. Essa estratégia resulta em campos de pressão e velocidade mais suaves e em uma melhor conservação local das propriedades do escoamento, além de contribuir para a redução de oscilações numéricas, especialmente em simulações transientes e em escoamentos fortemente não lineares (FERZIGER; PERIĆ, 2002; ANSYS, 2023b). Embora ambos os solvers resolvam as equações de conservação na forma integral, as diferenças na localização das variáveis e na construção dos volumes de controle

implicam características numéricas distintas, que podem influenciar a estabilidade da solução e a representação da interface multifásica.

O Método dos Volumes Finitos mostra-se particularmente adequado para o estudo de escoamentos com regiões de interface bem definidas, como no caso do concreto fresco durante o processo de extrusão e deposição. Sua natureza conservativa assegura o correto fechamento dos balanços locais de massa e quantidade de movimento entre fases distintas, como o material cimentício e o ar, permitindo a reprodução fiel dos fenômenos de deposição, espalhamento e deformação do filete extrudado ao longo do processo de impressão 3D (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; ANSYS, 2023a).

A importância do método dos volumes finitos (FVM), segundo Comminal et al. (2020), reside na sua capacidade de simular com precisão o escoamento de concreto no estado fresco, considerando os efeitos da pressão de extrusão e da distribuição de taxas de deformação. Isso é importante para prever a geometria das camadas impressas e validar os resultados numéricos com dados experimentais. O FVM proporciona uma representação robusta e detalhada do comportamento do material, sendo fundamental para otimizar o processo de impressão e garantir a estabilidade estrutural dos elementos impressos.

No contexto da impressão 3D de concreto, de acordo com Mechtcherine et al. (2020), o Método dos Volumes Finitos (FVM) é utilizado para simular o comportamento do concreto no estado fresco durante a extrusão e a deposição de camadas. Essa simulação inclui a previsão de como o concreto fluirá através do bico de extrusão, como se depositará e como manterá sua forma após a deposição. Além disso, o método auxilia na análise de defeitos, permitindo identificar e mitigar potenciais problemas na estrutura impressa, como a formação de vazios ou rachaduras. Finalmente, a simulação possibilita a previsão do comportamento de diferentes misturas de concreto sob várias condições de impressão, permitindo ajustes no material ou no processo para melhorar a qualidade da impressão.

A pesquisa realizada por Comminal *et al. (*2020) optou pelo Método dos Volumes Finitos (FVM) devido à sua capacidade de discretizar as equações governantes do escoamento, como as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, em células de volume finito no domínio computacional. Essa abordagem é importante para resolver variáveis de pressão e velocidade de maneira precisa e eficiente em um esquema semi-implícito iterativo desacoplado. A equação

de transporte serve como base para a modelagem computacional em FVM, a escolha de método também se justifica pela necessidade de garantir a conservação de massa e de quantidade de movimento durante o processo de extrusão de concreto, que envolve complexidades como variações de pressão e distribuição de taxas de deformação.

4.1.1 Discretização do Domínio de Cálculo

A discretização do domínio de simulação envolve dividir a área total de interesse em pequenos elementos ou volumes, como elementos triangulares ou tetraédricos. Segundo Neves e Bezerra (2013), esta etapa é essencial para a aplicação do Método dos Volumes Finitos (FVM), pois permite a integração das equações diferenciais que governam o fenômeno físico em questão em cada volume de controle. A discretização transforma um problema contínuo em discreto, facilitando a aplicação de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas em problemas complexos. Ela proporciona uma melhor aproximação das variáveis em todo o domínio, resultando em uma representação mais precisa do comportamento físico. Além disso, a discretização oferece flexibilidade para aplicação em diferentes geometrias e condições de contorno, tornando o FVM versátil e aplicável a uma ampla gama de problemas de engenharia e ciências aplicadas. Também possibilita o cálculo e análise das variáveis de interesse em pontos específicos do domínio, facilitando a visualização e interpretação dos resultados. Por fim, a discretização é crucial para a validação dos modelos numéricos, permitindo a comparação dos resultados com soluções analíticas ou experimentais, o que contribui para a credibilidade das simulações.

Na pesquisa de Comminal et al. (2020), os autores explicam que a discretização do domínio de simulação refere-se ao processo de dividir o espaço físico em uma malha ou grade de células menores, permitindo a resolução numérica das equações governantes, como as de Navier-Stokes. A importância dessa discretização reside em vários aspectos. Primeiro, uma malha refinada nas regiões de mudanças significativas no escoamento permite capturar melhor as dinâmicas do fluido, resultando em maior precisão dos resultados. Segundo, a adequada escolha da malha e do tamanho das células influencia a estabilidade numérica da simulação, evitando erros de convergência ou instabilidades. Terceiro, a discretização afeta a eficiência

computacional, pois malhas muito finas aumentam o tempo de simulação, enquanto malhas grosseiras podem perder detalhes importantes. Além disso, permite a representação de geometrias complexas, facilitando a simulação das interações entre o fluido e superfícies sólidas.

Segundo Versteeg e Malalasekera (1995), essa discretização é essencial para a aplicação do FVM, pois permite a integração das equações de conservação sobre volumes finitos definidos. O domínio de cálculo é discretizado em um conjunto de pequenos volumes de controle (VC). Cada VC é centrado em um ponto de grade, e as variáveis de interesse, como densidade, velocidade e energia, são armazenadas nesses pontos. A superfície de cada VC é compartilhada com os VCs adjacentes, facilitando o cálculo dos fluxos através das fronteiras comuns.

Portanto, a discretização do domínio de simulação no Método dos Volumes Finitos (FVM) permite a transformação de um problema contínuo em um modelo discreto, facilitando a resolução das equações governantes e proporcionando uma representação mais precisa dos fenômenos físicos. Com isso, torna-se possível capturar dinâmicas complexas e simular interações entre fluidos e superfícies de forma eficiente. A seguir, discute-se a forma genérica das equações de transporte, que são fundamentais para descrever os processos físicos em simulações de dinâmica dos fluidos e desempenham um papel central no FVM.

4.1.2 Forma genérica das equações de transporte

As equações que governam o escoamento: conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia, podem ser escritas de forma unificada por meio de uma equação de transporte genérica para uma propriedade ϕ (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}\,\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \qquad (4.1)$$

em que ρ é a massa específica, $\vec{u}$ o vetor velocidade, Γ o coeficiente de difusão da propriedade e S_ϕ o termo fonte. Os quatro termos representam, respectivamente, a variação temporal (transiente), o transporte advectivo associado ao escoamento, o transporte difusivo e a geração ou o consumo da propriedade no interior do volume.

A escolha adequada de ϕ, Γ e S_ϕ recupera cada equação de conservação de interesse: fazendo $\phi = 1$ obtém-se a conservação da massa; $\phi = u_i$ (com $\Gamma = \mu$) recuperam-se as equações de Navier-Stokes, que expressam a conservação da quantidade de movimento; e $\phi = T$ descreve a conservação de energia. É justamente essa formulação unificada que permite tratar todas as equações governantes com um mesmo procedimento numérico no Método dos Volumes Finitos (COMMINAL et al., 2020).

No FVM, essa equação diferencial é integrada sobre cada volume de controle da malha. Aplicando o teorema da divergência aos termos advectivo e difusivo, as integrais de volume convertem-se em integrais de superfície, de modo que o balanço passa a ser expresso pelos fluxos que atravessam as faces do volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\phi\,dV + \oint_A \rho\,\phi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dA = \oint_A \Gamma\,\nabla\phi\cdot\vec{n}\,dA + \int_V S_\phi\,dV \quad (4.2)$$

Como a superfície de cada volume de controle é compartilhada com os volumes adjacentes, o fluxo que sai de um volume entra exatamente no vizinho, o que assegura a conservação local das propriedades do escoamento (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995; NEVES; BEZERRA, 2013).

Uma vez que as variáveis são armazenadas nos nós, o cálculo dos fluxos exige estimar o valor de ϕ e de seus gradientes nas faces do volume, o que é feito por esquemas de interpolação. No esquema de diferenças centrais, o valor na face é obtido pela média dos nós adjacentes, resultando em precisão de segunda ordem; entretanto, quando a advecção predomina sobre a difusão (elevados números de Péclet), esse esquema pode gerar oscilações numéricas não físicas. No esquema upwind, o valor na face assume o do nó situado a montante, conforme o sentido do escoamento, o que garante estabilidade incondicional, mas apenas primeira ordem de precisão, introduzindo difusão numérica. Esquemas de ordem superior, como o upwind de segunda ordem e o QUICK, buscam equilibrar precisão e estabilidade (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995).

O termo transiente, por sua vez, é discretizado no tempo por esquemas de marcha temporal. Na formulação explícita, o campo no novo passo de tempo depende somente de valores já conhecidos do passo anterior, o que simplifica a solução, porém a submete a critérios de estabilidade que limitam o tamanho do passo de tempo

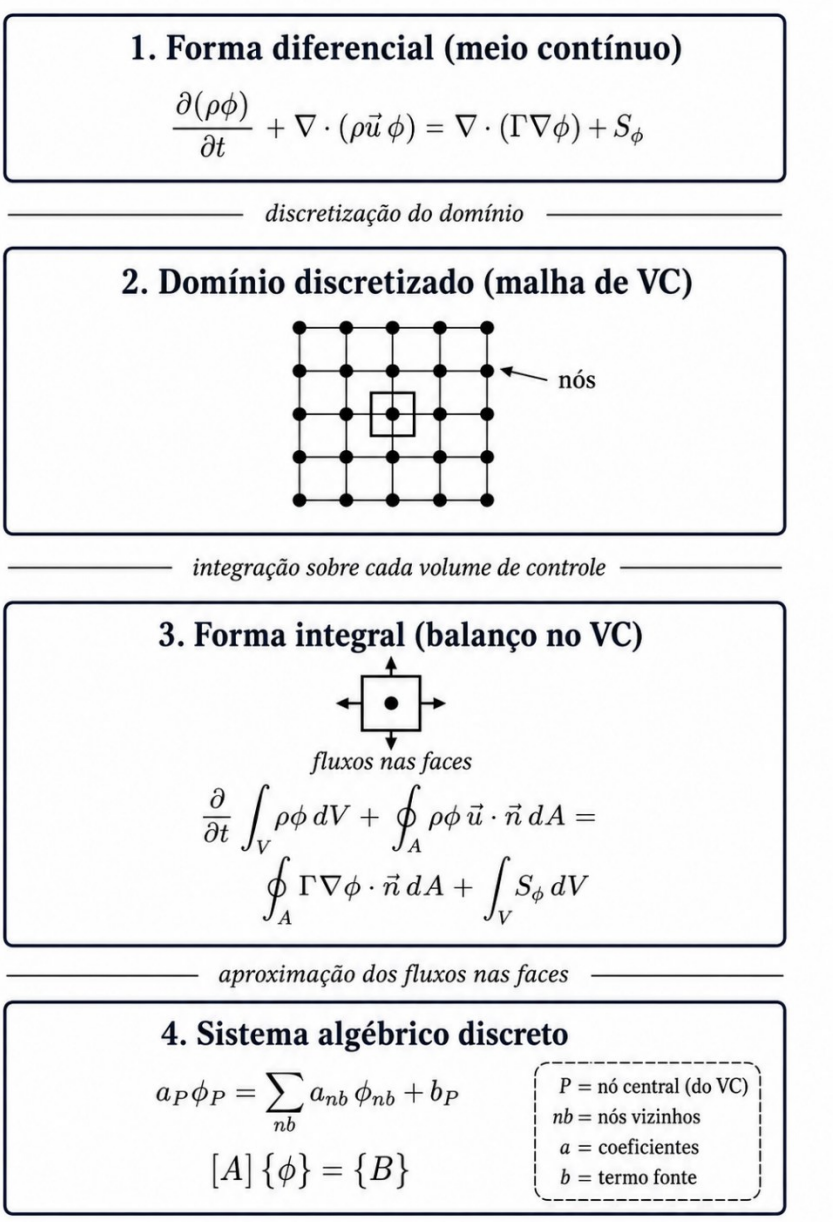
(condição de Courant). Na formulação implícita, a incógnita aparece também nos termos de fluxo, exigindo a solução de um sistema de equações a cada passo, mas com estabilidade incondicional — razão pela qual é usualmente preferida em simulações transientes, como as realizadas neste trabalho. Esquemas mistos, como o de Crank-Nicolson, combinam as duas abordagens (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995).

Reunindo a discretização espacial e a temporal, a equação integral de cada volume converte-se em uma equação algébrica que relaciona o valor de ϕ no nó central (P) aos valores nos nós vizinhos (nb):

$$a_P\,\phi_P = \sum_{nb} a_{nb}\;\phi_{nb} + b_P \qquad \Rightarrow \qquad [A]\{\phi\} = \{B\} \quad (4.3)$$

em que os coeficientes a_{nb} carregam as contribuições advectiva e difusiva de cada face e b_P reúne os termos fonte e transiente. Montando-se as equações de todos os volumes do domínio, obtém-se o sistema linear $[A]\{\phi\} = \{B\}$, resolvido iterativamente até a convergência. Todo esse encadeamento da forma diferencial contínua ao sistema algébrico discreto está sintetizado na Figura 31.

Figura 31 – Etapas do Método dos Volumes Finitos: da equação diferencial contínua ao sistema algébrico discreto



Fonte: Elaborado pela autora (2026).

5 METAMODELAGEM

A metamodelagem, também denominada modelagem substituta ou *surrogate modeling*, consiste em ajustar modelos matemáticos a um conjunto reduzido de observações experimentais, criando representações do espaço de projeto. Em muitos casos, embora não em todos, o metamodelo pode substituir parcialmente o modelo de alta fidelidade ou o experimento físico. Com o metamodelo construído, é possível realizar predições, otimizações e análises de sensibilidade sem a necessidade de novos experimentos, o que é de especial relevância em processos físicos caros, demorados ou de difícil repetição.

A motivação para o emprego de metamodelos decorre de três aspectos fundamentais: (i) simulações e experimentos físicos frequentemente impõem custos elevados em tempo e recursos; (ii) a exploração direta e exaustiva do espaço paramétrico é inviável na prática; e (iii) deseja-se obter superfícies de resposta suaves, interpretáveis e utilizáveis para análise e otimização futura.

Neste trabalho, adotam-se duas famílias de metamodelos com perfis complementares: a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM — Response Surface Methodology), de natureza polinomial e elevada interpretabilidade, e a Krigagem, formulada computacionalmente como Gaussian Process Regression (GPR ou Kriging), de natureza probabilística e maior flexibilidade adaptativa. A escolha dessas duas abordagens permite uma comparação técnica abrangente entre modelos com diferentes premissas estruturais.

Cabe justificar a escolha metodológica. Abordagens de aprendizado de máquina amplamente difundidas — como as redes neurais artificiais (Artificial Neural Networks, ANN) e as técnicas de redução de dimensionalidade, a exemplo da Análise de Componentes Principais (PCA) — exigem, em geral, grandes volumes de dados para atingir desempenho confiável, o que as torna inviáveis no regime de poucas observações típico de experimentos físicos custosos. A RSM e a Krigagem, por outro lado, foram concebidas justamente para operar com conjuntos amostrais reduzidos, mantendo boa capacidade preditiva. Essa é a razão central para sua adoção neste trabalho.

Do ponto de vista matemático, o problema geral de metamodelagem pode ser representado por:

$$y = f(x), \quad x = [x1, x2, ..., xp]T \tag{5.1}$$

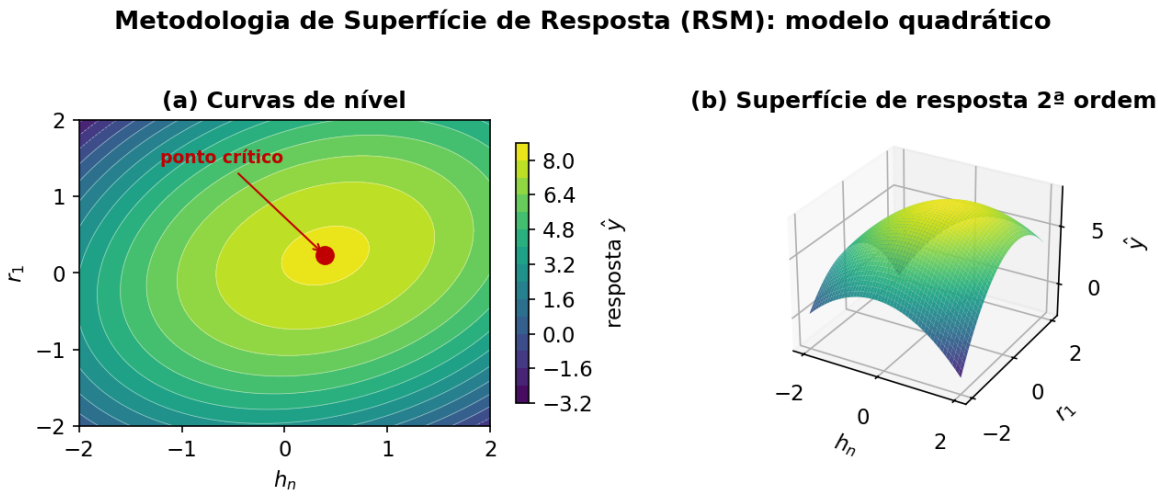
onde x representa o vetor de variáveis de processo e y a resposta de interesse. O objetivo é construir um aproximador ŷ(x) que represente adequadamente a função desconhecida f(x) a partir de um número limitado de pontos amostrados.

5.1 METODOLOGIA DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (RSM)

A Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) foi introduzida por Box e Wilson (1951) e consiste no ajuste de uma função polinomial para representar a relação entre variáveis de entrada e a resposta de interesse. Trata-se de um conjunto de técnicas estatísticas e matemáticas que modela essa relação por meio de um polinômio de baixo grau, geralmente de primeira ou segunda ordem.

A principal vantagem da RSM reside na simplicidade estrutural e na interpretabilidade física dos coeficientes ajustados. Em problemas de engenharia, a RSM é particularmente útil quando se espera que a resposta varie de forma relativamente suave e globalmente regular dentro do domínio estudado, sendo especialmente valiosa como referência estrutural e ferramenta de análise. A Figura 32 ilustra uma superfície de resposta de segunda ordem típica, com suas curvas de nível e o ponto crítico associado.

Figura 32 – Superfície de resposta de segunda ordem para os dois fatores do estudo (h_n e r_1): (a) curvas de nível; (b) superfície 3D, com o ponto crítico destacado



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2016).

5.1.1 Formulação Matemática

Para k fatores x_1, x_2, …, x_k e uma resposta escalar y, o modelo de primeira ordem é:

$$\hat{y}(x) = \beta_0 + \Sigma_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \tag{5.2}$$

onde ŷ(x) é a resposta predita; β_0 é o termo constante (intercepto); β_i são os coeficientes de regressão dos efeitos lineares; xi são as variáveis de entrada (fatores); e ε é o erro aleatório, suposto independente e identicamente distribuído segundo uma normal de média zero e variância σ².

Quando há curvatura significativa na superfície de resposta, utiliza-se o modelo de segunda ordem (quadrático completo):

$$\hat{y}(x) = \beta_0 + \Sigma_{i=1}^{p} \beta_i x_i + \Sigma_{i=1}^{p} \beta_{ii} x_i^2 + \Sigma_{i<j} \beta_{ij} x_i x_j \tag{5.3}$$

onde β_0 é o intercepto, βi são os coeficientes dos efeitos lineares, β_{ii} representam a curvatura (efeito quadrático) e β_{ij} capturam as interações entre os fatores i e j.

Para o caso com dois fatores, denominados hn e r_1 no contexto deste trabalho, o modelo quadrático completo possui seis coeficientes e é expresso por:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 h_n + \beta_2 r_1 + \beta_3 h_n r_1 + \beta_4 h_n^2 + \beta_5 r_1^2 \tag{5.4}$$

Em notação matricial compacta, escreve-se:

$$\hat{y} = X_{poly}\, \beta \tag{5.5}$$

onde X_{poly} é a matriz de termos polinomiais, de dimensão n × 6, cujas linhas contêm os termos avaliados para cada observação:

$$X_{poly} = [\, 1 \quad h_{n,i} \quad r_{1,i} \quad h_{n,i}\, r_{1,i} \quad h_{n,i}^2 \quad r_{1,i}^2 \,], \quad i = 1, \ldots, n \tag{5.6}$$

5.1.2 Estimação por Mínimos Quadrados Ordinários (OLS)

A estimação dos coeficientes β é realizada pelo método dos mínimos

quadrados ordinários (OLS), que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos (SSE):

$$SSE(\beta) = \|y - X\beta\|^2 \tag{5.7}$$

A solução analítica é:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{5.8}$$

Esta expressão tem solução única quando a matriz X^TX é não singular, condição garantida pela independência linear das colunas de X. Na prática computacional, a resolução é feita via decomposição em valores singulares (SVD), para maior estabilidade numérica.

5.1.3 Regularização e Condicionamento

Quando as colunas de X apresentam forte colinearidade — situação comum em modelos quadráticos completos, que incluem termos de interação e quadráticos, a matriz X^TX torna-se mal condicionada e seu número de condição torna-se elevado (autovalores próximos de zero), tornando a solução de OLS instável ou até divergente. Duas providências mitigam o problema: (i) a normalização prévia das variáveis para um intervalo comum, tipicamente [0, 1], que equaliza a influência dos fatores e melhora o condicionamento; e (ii) a introdução de um termo de regularização (penalização) na função objetivo. As três formulações clássicas de regularização são descritas a seguir.

Regressão de crista (Ridge, penalização L2). Acrescenta à soma dos quadrados uma penalidade proporcional ao quadrado da norma dos coeficientes:

$$\hat{\beta}_{ridge} = argmin_{\beta} \{ \Sigma_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \Sigma_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \Sigma_{j=1}^{p} \beta_j^2 \} \tag{5.9}$$

A Ridge reduz a magnitude dos coeficientes ($\beta_j \rightarrow 0$, sem contudo anulá-los), o que estabiliza a estimação sob colinearidade.

Regularização Lasso (penalização L1). Penaliza a norma L1 dos coeficientes:

$$\hat{\beta}_{lasso} = argmin_{\beta} \{ \Sigma_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \Sigma_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})^2 + \lambda \Sigma_{j=1}^{p} |\beta_j| \} \tag{5.10}$$

Diferentemente da Ridge, o Lasso pode zerar coeficientes ($\beta_j = 0$), realizando seleção automática de variáveis.

Elastic Net (combinação L1 + L2). Combina as duas penalizações:

$$\hat{\beta}_{EN} = \text{argmin}_{\beta} \{ \Sigma_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \Sigma_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})^2 + \lambda_1 \Sigma_{j=1}^{p} |\beta_j| + \lambda_2 \Sigma_{j=1}^{p} \beta_j^2 \} \quad (5.11)$$

reunindo as vantagens de ambas — estabilização (L2) e esparsidade/seleção (L1) — , sendo especialmente útil quando há grupos de variáveis correlacionadas. Os hiperparâmetros λ (ou λ_1 e λ_2) controlam a intensidade da penalização e são selecionados por validação cruzada.

5.1.4 Análise do Ponto Crítico da Superfície

Uma vantagem central da RSM é a possibilidade de determinar analiticamente o ponto crítico (ótimo ou ponto de sela) da superfície ajustada. O gradiente da função é dado por:

$$\nabla\hat{y} = [\, \partial\hat{y}/\partial h_n \,,\ \partial\hat{y}/\partial r_1 \,]^T \quad (5.12)$$

com:

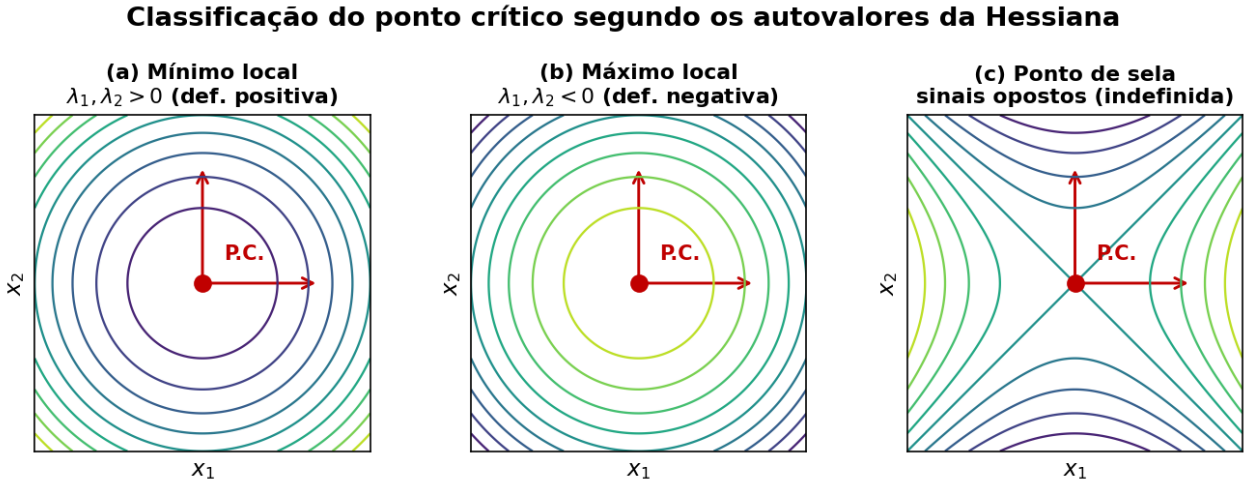
$$\partial\hat{y}/\partial h_n = \beta_1 + \beta_3 r_1 + 2\beta_4 h_n \,; \quad \partial\hat{y}/\partial r_1 = \beta_2 + \beta_3 h_n + 2\beta_5 r_1 \quad (5.13)$$

A curvatura local é descrita pela matriz Hessiana (matriz das derivadas parciais de segunda ordem):

$$H = [\, 2\beta_4 \quad \beta_3 \,; \quad \beta_3 \quad 2\beta_5 \,] \quad (5.14)$$

O ponto crítico é obtido resolvendo o sistema $\nabla\hat{y} = 0$, que possui solução analítica direta. A natureza desse ponto é determinada pelos autovalores λ_1 e λ_2 de H: se ambos forem positivos, a Hessiana é definida positiva e trata-se de um mínimo local; se ambos forem negativos, definida negativa, um máximo local; e se os sinais forem opostos (Hessiana indefinida), um ponto de sela. A Figura 33 resume graficamente esses três casos, conforme os autovalores da Hessiana.

Figura 33 – Classificação do ponto crítico segundo os autovalores da Hessiana: (a) mínimo local (λ_1, $\lambda_2 > 0$, definida positiva); (b) máximo local (λ_1, $\lambda_2 < 0$, definida negativa); (c) ponto de sela (autovalores de sinais opostos, indefinida).



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2016).

5.1.5 Interpretação Física

A RSM assume implicitamente que a resposta pode ser aproximada por uma superfície global de baixa complexidade. Isso significa que ela tende a representar bem tendências médias, curvaturas suaves e interações globais entre parâmetros. Entretanto, pode apresentar limitações quando a resposta possui curvatura local pronunciada, mudanças de inclinação não bem representadas por polinômios de segunda ordem, ou comportamento espacial mais rico do que uma forma quadrática global consegue capturar.

5.1.6 Vantagens e Limitações

As principais vantagens da RSM são:

- Alta interpretabilidade dos coeficientes e forma analítica explícita;
- Facilidade de visualização e ampla aceitação em planejamento de experimentos (DOE) e engenharia;
- Menor risco de sobreajuste na forma quadrática clássica, por ser um modelo mais rígido;
- Possibilidade de determinação analítica do ponto crítico (ótimo ou sela).

As principais limitações são:

- Menor flexibilidade local, com tendência a suavizar excessivamente comportamentos mais complexos;
- Desempenho limitado quando a resposta não é bem descrita por um polinômio global;
- Ausência de estimativa de incerteza preditiva local.

5.2 METODOLOGIA KRIGING / GAUSSIAN PROCESS REGRESSION (GPR)

A Krigagem — cujo nome homenageia o geoestatístico sul-africano D. G. Krige e deriva do francês krigeage — é uma técnica de interpolação espacial que modela a resposta como uma realização de um Processo Gaussiano (GP). Na literatura de aprendizado de máquina, é amplamente conhecida como Gaussian Process Regression (GPR). Diferentemente da RSM, o Kriging não impõe uma forma polinomial rígida para a superfície; em vez disso, constrói a resposta a partir da estrutura de correlação espacial entre os pontos amostrados.

A diferença fundamental em relação à RSM é a natureza probabilística: o GPR fornece não apenas uma predição pontual, mas também uma medida explícita da incerteza associada. Isso o torna especialmente adequado para pequenos conjuntos de dados, superfícies suaves porém não necessariamente polinomiais, e problemas nos quais se deseja quantificar a incerteza da predição. Em síntese, enquanto a RSM entrega uma equação polinomial global e interpretável sem estimativa de incerteza, o Kriging entrega uma predição local, flexível e acompanhada de sua confiança — distinção central para a comparação conduzida neste trabalho.

A hipótese central do Kriging é que respostas em pontos próximos do espaço paramétrico tendem a apresentar comportamento correlacionado, o que se expressa formalmente pela definição de Processo Gaussiano:

$$f(x) \sim GP(m(x), k(x, x')) \tag{5.15}$$

onde m(x) é a função média e k(x, x′) é a função de covariância (kernel) (RASMUSSEN; WILLIAMS, 2006). As observações são descritas por:

$$y(x) = f(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_n^2) \tag{5.16}$$

5.2.1 Formulação Matemática

O modelo de Kriging pode ser escrito conceitualmente como a soma de uma tendência determinística e um componente estocástico:

$$y(x) = \mu(x) + Z(x) \tag{5.17}$$

onde μ(x) representa a tendência média (determinística) e Z(x) é um processo gaussiano de média zero, espacialmente correlacionado, que captura os desvios em torno dessa tendência. O termo σ_n² (Equação 5.16) representa o nível de ruído observacional, que também atua como regularização do modelo. O conjunto de n observações {y(x_1), …, y(x_n)} segue, por definição, uma distribuição normal multivariada com vetor de médias m(X) e matriz de covariância K, cujos elementos são K_{ij} = k(x_i, x_j).

5.2.2 Formulação Bayesiana e Predição

Dados os pontos de treinamento X = {x_1, …, x_n} e as observações y = f(X) + ε, a distribuição preditiva para um novo ponto x* é gaussiana:

$$f(x^*) \mid X, y, x^* \sim N(\mu^*, \sigma^{*2}) \tag{5.18}$$

com média e variância preditivas dadas, respectivamente, por:

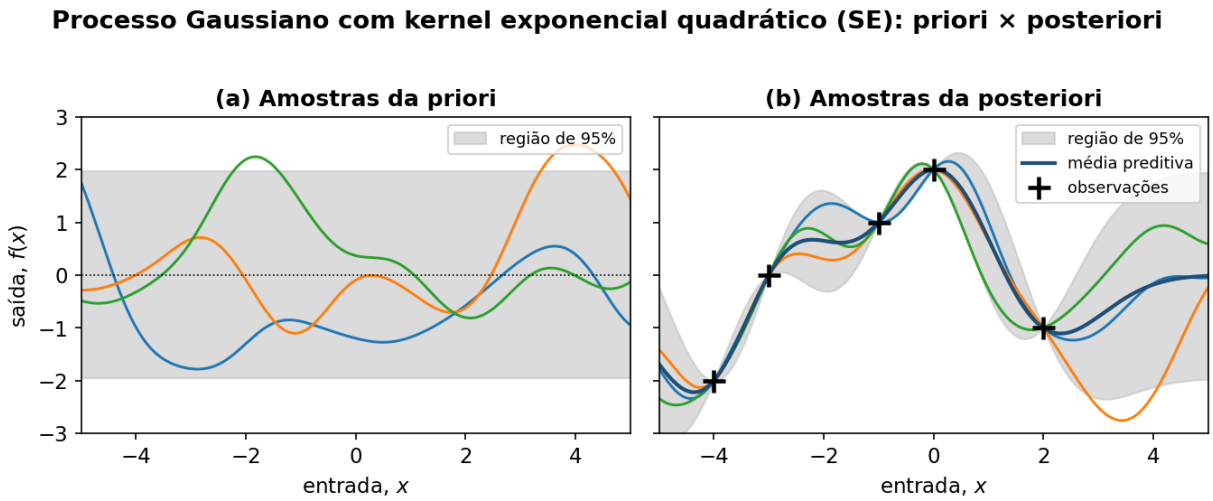
$$\mu^* = k^{*T} (K + \sigma_n^2 I)^{-1} y \tag{5.19}$$

$$\sigma^{*2} = k(x^*, x^*) - k^{*T} (K + \sigma_n^2 I)^{-1} k^* \tag{5.20}$$

onde K é a matriz de kernel de dimensão n × n com K_{ij} = k(x_i, x_j), e k* é o vetor de covariâncias entre o novo ponto x* e os pontos de treinamento. O intervalo de credibilidade de 95% é dado por μ* ± 1,96 σ*. Quando σ* é pequeno, o modelo é confiante; quando é grande, reconhece que está em região de extrapolação ou de alta variabilidade.

A Figura 34 ilustra esse comportamento. Antes de observar dados, o Processo Gaussiano descreve apenas uma distribuição de funções (a priori); após condicionar às observações, a posteriori concentra-se nas funções compatíveis com os dados, colapsando a incerteza junto aos pontos amostrados e ampliando-a nas regiões afastadas.

Figura 34 – Processo Gaussiano com kernel exponencial quadrático (SE). (a) Três funções amostradas da priori, com região de credibilidade de 95%; (b) três funções da posteriori após condicionamento em cinco observações (+), com a média preditiva e a região de 95% — a incerteza colapsa nos pontos e cresce entre eles e na extrapolação



Fonte: Adaptado de Rasmussen e Williams (2006, Fig. 2.2)

Esta é uma das principais vantagens do Kriging frente à RSM: além da estimativa da resposta, obtém-se uma medida explícita de confiança associada à predição, inexistente na RSM clássica.

5.2.3 Estimação dos Hiperparâmetros por Máxima Verossimilhança

O kernel k(x, x′) contém hiperparâmetros — o comprimento de escala ℓ e a amplitude do sinal σ_f — que são estimados maximizando a log-verossimilhança marginal:

$$\log p(y \mid X, \theta) = -\tfrac{1}{2}\, y^{T}(K + \sigma_n^2 I)^{-1} y - \tfrac{1}{2} \log|K + \sigma_n^2 I| - (n/2) \log(2\pi) \qquad (5.21)$$

Cada elemento da Equação (5.21) tem significado próprio. Os símbolos empregados são:

- y — vetor com as n respostas observadas (dados de treinamento);
- X — conjunto dos n pontos de entrada correspondentes;
- θ = (ℓ, σ_f, σ_n) — vetor de hiperparâmetros a serem estimados;
- K — matriz de covariância de dimensão n × n, com elementos K_{ij} = k(x_i, x_j);

- σ_n^2 — variância do ruído observacional; I — matriz identidade de dimensão n × n;
- $(K + \sigma_n^2 I)$ — matriz de covariância regularizada pelo ruído; $(K + \sigma_n^2 I)^{-1}$ é a sua inversa e $|K + \sigma_n^2 I|$ o seu determinante;
- y^T — vetor y transposto; n — número de observações; e log — logaritmo natural.

Interpretando a expressão termo a termo:

- Primeiro termo, $-\frac{1}{2}\, y^T(K + \sigma_n^2 I)^{-1}y$ (termo de ajuste aos dados): mede o quão bem o modelo reproduz as observações; quanto melhor o ajuste, maior (menos negativo) é o seu valor;
- Segundo termo, $-\frac{1}{2}\log|K + \sigma_n^2 I|$ (termo de complexidade): o determinante cresce com a flexibilidade do modelo, de modo que penalizá-lo desestimula modelos excessivamente complexos — é a aplicação automática do princípio da parcimônia (navalha de Occam);
- Terceiro termo, $-(n/2)\log(2\pi)$ (constante de normalização): não depende dos hiperparâmetros e apenas garante que a distribuição de probabilidade integre a um.

Os hiperparâmetros têm interpretação física direta: ℓ (comprimento de escala) controla o alcance da correlação espacial, isto é, a que distância dois pontos deixam de se influenciar; σf (amplitude do sinal) controla a variância do processo, ou seja, a magnitude típica das oscilações da resposta; e σn (nível de ruído) representa o desvio-padrão do erro de medição.

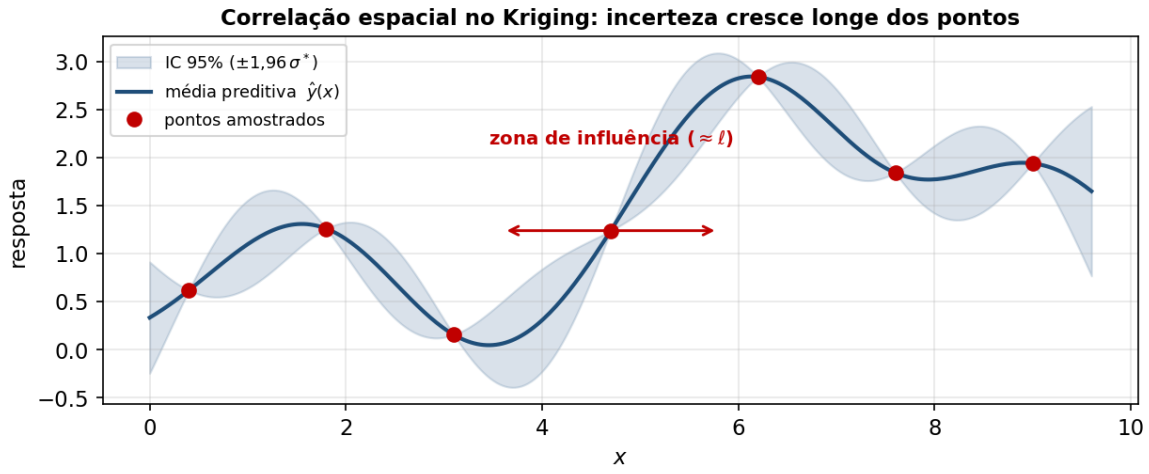
A maximização da Equação (5.21) em relação a θ não possui solução analítica fechada, sendo obtida numericamente. Emprega-se para isso o algoritmo L-BFGS-B, sigla — em inglês — de Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno with Bound constraints (método de Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno de memória limitada e com restrições de contorno). Trata-se de um método de otimização quasi-Newton baseado no gradiente, cujos três atributos do nome significam: quasi-Newton — aproxima a curvatura (matriz Hessiana) da função a partir dos gradientes, sem calculá-la explicitamente, o que acelera a convergência; memória limitada (limited-memory) — armazena apenas algumas das atualizações mais recentes, em vez da matriz completa, tornando-se eficiente mesmo com muitos parâmetros; e restrições de contorno (bound constraints) — respeita limites inferiores e superiores impostos

aos hiperparâmetros, por exemplo ℓ, σ_f, σ_n > 0. Como a log-verossimilhança pode apresentar múltiplos máximos locais, a otimização é reiniciada a partir de diferentes pontos iniciais aleatórios, retendo-se a melhor solução encontrada (BYRD et al., 1995).

5.2.4 Interpretação Física

Fisicamente, o Kriging parte da premissa de que pontos próximos no espaço de entrada devem produzir respostas semelhantes. Isso o torna especialmente interessante quando a resposta é contínua, há estrutura local relevante, deseja-se capturar curvaturas mais sutis, e o conjunto de dados é pequeno, mas informativo. A Figura 35 ilustra essa noção de zona de influência e o crescimento da incerteza preditiva à medida que se afasta dos pontos amostrados.

Figura 35 – Correlação espacial no Kriging: a influência (zona de influência) de cada ponto amostrado decai com a distância r, com alcance governado pelo comprimento de escala ℓ; a incerteza preditiva (faixa IC 95%) cresce nas regiões afastadas dos dados



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

5.2.5 Vantagens e Limitações

As principais vantagens do Kriging/GPR são:

- Alta flexibilidade e excelente desempenho com pequenos conjuntos de dados;

- Representação local refinada, capturando estruturas que polinômios globais não conseguem;
- Fornece estimativa explícita de incerteza preditiva (σ*), permitindo análise de confiabilidade local;
- Não impõe forma paramétrica rígida à superfície de resposta.

As principais limitações são:

- Menor interpretabilidade direta dos parâmetros em comparação à RSM;
- Maior sensibilidade à escolha do kernel e de seus hiperparâmetros;
- Possibilidade de sobreajuste (overfitting) caso a avaliação seja feita apenas nos dados de treinamento;
- Custo computacional cúbico, $O(n^3)$, para a inversão da matriz de covariância — o que torna o método proibitivo para conjuntos grandes de dados.

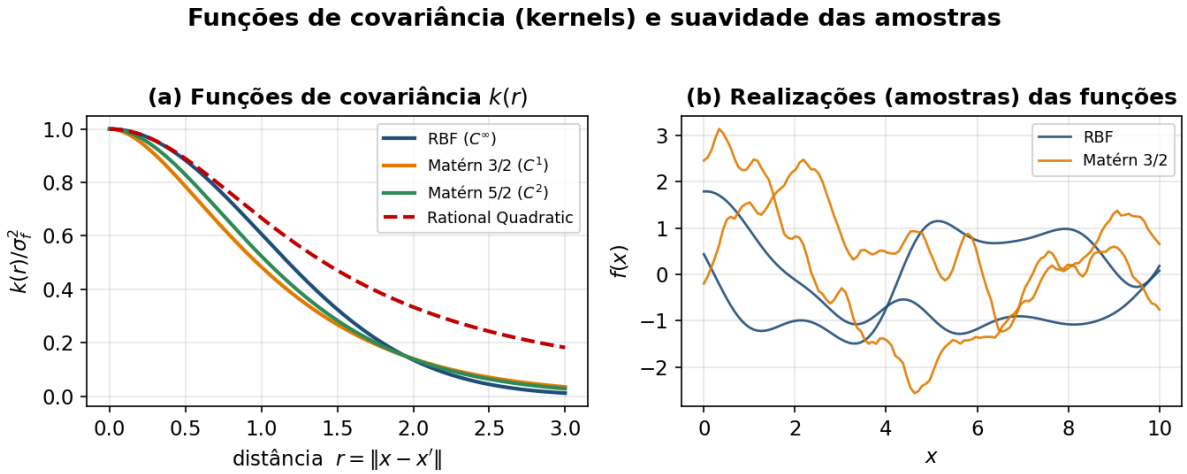
5.3 Funções de Covariância (Kernels) do Kriging

O kernel define como a correlação entre dois pontos do espaço paramétrico diminui com a distância entre eles. Em termos matemáticos, o kernel é a função que fornece a covariância entre as respostas em dois pontos:

$$k(x_i, x_j) = Cov[\, f(x_i), f(x_j)\,] \tag{5.22}$$

isto é, k(xi, xj) quantifica o quanto as respostas nos pontos xi e xj variam conjuntamente. Em termos práticos, o kernel controla a suavidade da superfície ajustada, a sensibilidade local do modelo e a forma da resposta interpolada. Convencionando r = ‖x − x′‖ como a distância euclidiana entre dois pontos, e ℓ e σ_f como o comprimento de escala e a amplitude do sinal, os kernels empregados neste trabalho são descritos a seguir. A Figura 36 compara o formato dessas funções de covariância e a suavidade das amostras por elas geradas.

Figura 36 – Funções de covariância empregadas — (a) formato de k(r) para RBF, Matérn 3/2, Matérn 5/2 e Rational Quadratic; (b) realizações (amostras) de funções geradas por cada kernel, evidenciando o grau de suavidade correspondente.



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

5.3.1 Kernel RBF (Squared Exponential)

O kernel RBF (Radial Basis Function), também conhecido como Squared Exponential, é dado por:

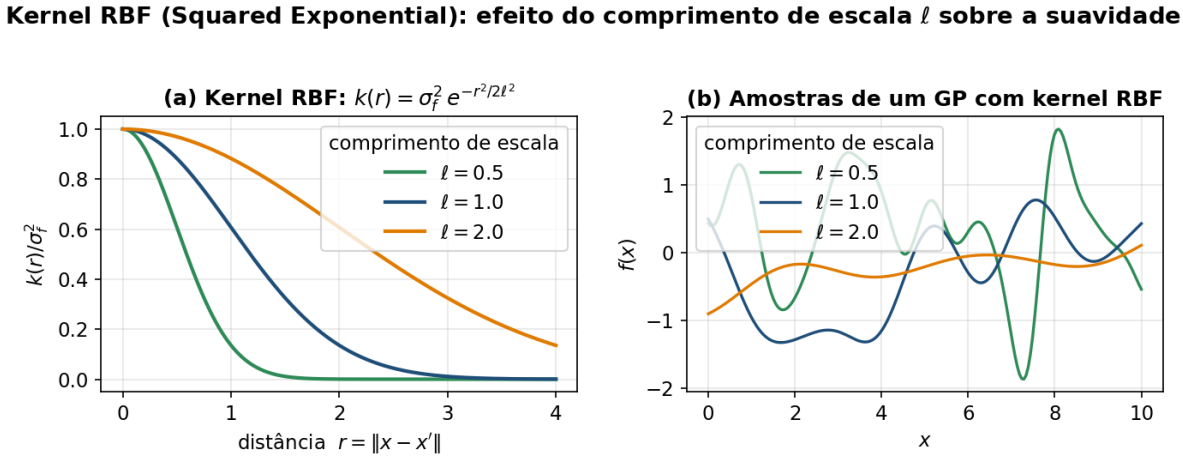
$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(- \|x - x'\|^2 / (2\,\ell^2) \right) \tag{5.23}$$

Este kernel produz funções infinitamente diferenciáveis: isto é, de classe C∞, o que significa que possuem derivadas contínuas de todas as ordens (mais suaves não é possível). A correlação decai como uma gaussiana com a distância r. É adequado quando a resposta é muito suave e sem descontinuidades, embora possa não capturar variações bruscas em fenômenos de engenharia próximos a limiares de comportamento.

A notação *C^n designa a classe de funções cujas derivadas são contínuas até a ordem n; C^∞ indica funções com derivadas contínuas de todas as ordens. Na prática de engenharia, quanto maior a ordem, mais suave (menos "quebrada") é a superfície gerada.*

A Figura 37 mostra o formato do kernel RBF e o papel do comprimento de escala ℓ: valores menores de ℓ produzem uma correlação que decai rapidamente com a distância, gerando funções mais oscilantes; valores maiores de ℓ mantêm a correlação por distâncias maiores, produzindo superfícies mais suaves.

Figura 37 – Kernel RBF (Squared Exponential): (a) forma da função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) funções amostradas de um Processo Gaussiano com kernel RBF para cada ℓ, evidenciando que ℓ controla a suavidade e o comprimento de onda característico das realizações



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

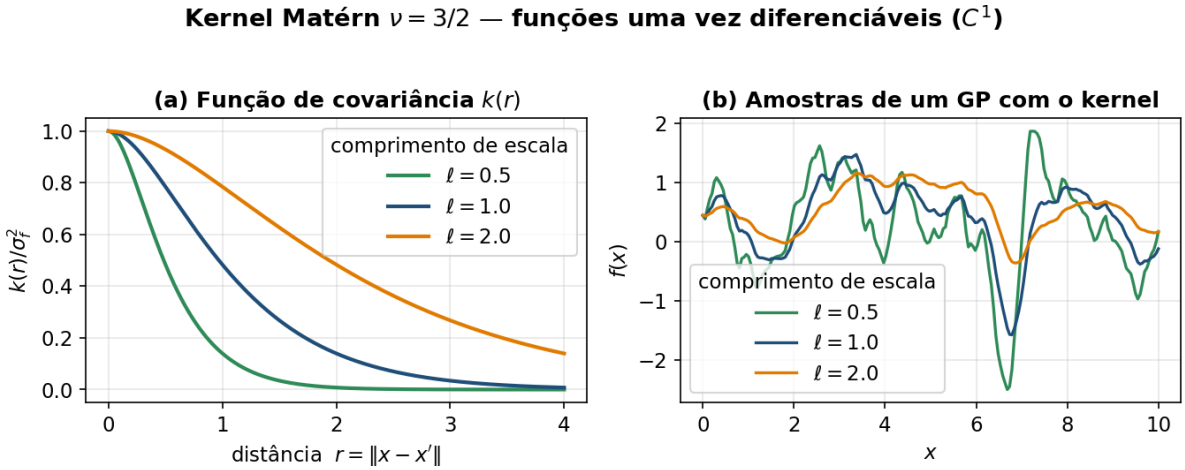
5.3.2 Kernel Matérn v = 3/2

O kernel Matérn com parâmetro v = 3/2 é expresso por:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \left(1 + \sqrt{3}\, r / \ell\right) \exp\left(-\sqrt{3}\, r / \ell\right) \tag{5.24}$$

As funções amostradas por este kernel são uma vez diferenciáveis (classe C^1, isto é, com primeira derivada contínua). É mais flexível que o RBF para capturar variações moderadamente rápidas, com correlação que decai mais rapidamente a curtas distâncias (e com cauda mais longa que a do RBF). Indicado para processos com variações moderadas em experimentos de engenharia nos quais a suavidade infinita do RBF é irrealista. A Figura 38 mostra a função de covariância do kernel Matérn 3/2 e amostras de um Processo Gaussiano correspondente; note que as realizações são visivelmente menos suaves do que as do RBF, refletindo a diferenciabilidade apenas de primeira ordem (classe C^1).

Figura 38 – Kernel Matérn v = 3/2: (a) função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente, cujas realizações são uma vez diferenciáveis (classe C¹)



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

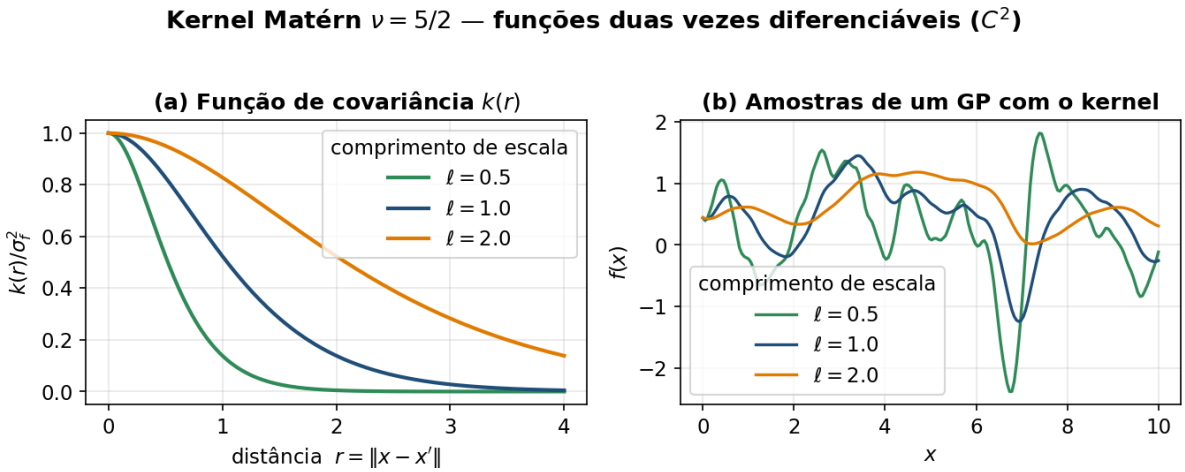
5.3.3 Kernel Matérn v = 5/2

O kernel Matérn com parâmetro v = 5/2 é dado por:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \left(1 + \sqrt{5}\, r / \ell + 5\, r^2 / (3\, \ell^2) \right) \exp\left(- \sqrt{5}\, r / \ell \right) \qquad (5.25)$$

As funções amostradas são duas vezes diferenciáveis (classe C², com derivadas contínuas até a segunda ordem), representando um compromisso ideal entre suavidade e flexibilidade. Com v = 5/2, as realizações são suficientemente suaves para modelar a maioria dos fenômenos físicos, sendo o kernel padrão adotado neste trabalho para a comparação principal. A Figura 39 apresenta a função de covariância do kernel Matérn 5/2 e amostras de um Processo Gaussiano correspondente; as realizações são mais suaves que as do Matérn 3/2 (classe C²), oferecendo o compromisso entre suavidade e flexibilidade que motiva sua adoção como kernel padrão.

Figura 39 – Kernel Matérn v = 5/2: (a) função de covariância k(r) para diferentes comprimentos de escala ℓ; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente, cujas realizações são duas vezes diferenciáveis (classe C²)



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

5.3.4 Kernel Rational Quadratic

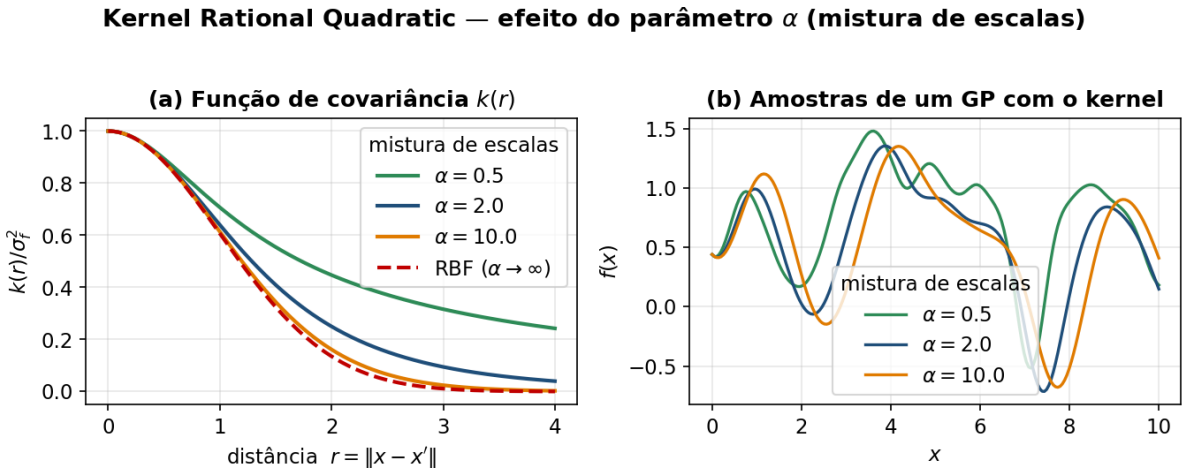
O kernel Rational Quadratic é definido por:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \left(1 + r^2 / (2\,\alpha\,\ell^2) \right)^{-\alpha} \qquad (5.26)$$

onde α é o parâmetro de mistura de escalas. Quando α → ∞, este kernel recupera o kernel RBF. Matematicamente, equivale a uma mistura infinita de kernels RBF com comprimentos de escala variáveis, o que o torna útil quando o processo apresenta variações em escalas espaciais distintas — uma tendência global suave sobre a qual se sobrepõem variações locais mais rápidas.

A Figura 40 ilustra o efeito do parâmetro α: valores pequenos produzem correlação com cauda mais longa (mistura de várias escalas), enquanto α → ∞ recupera exatamente o kernel RBF, como indicado pela curva tracejada.

Figura 40 – Kernel Rational Quadratic: (a) função de covariância k(r) para diferentes valores do parâmetro de mistura de escalas α, com o RBF (α → ∞) em tracejado; (b) amostras de um Processo Gaussiano correspondente



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Rasmussen e Williams (2006).

5.3.5 Modelo de Ruído: WhiteKernel

Em todos os casos, o kernel base é acrescido de um termo de ruído observacional (WhiteKernel):

$$k(x, x') = \sigma_n^2 \, \delta(x, x') \tag{5.27}$$

onde δ(x, x′) é o delta de Kronecker (igual a 1 quando x = x′ e 0 caso contrário), de modo que o kernel total é k = k_base + k_white. O WhiteKernel modela o ruído de medição e, sem ele, o GPR interpolaria exatamente os pontos de treinamento (σ* = 0 nos dados de treinamento), o que poderia levar a sobreajuste. Com o WhiteKernel, o modelo estima σ_n² via máxima verossimilhança.

5.3.6 Critério de Escolha do Kernel

A escolha do kernel não deve ser feita apenas por aparência gráfica, mas sim considerando o desempenho em validação cruzada, a coerência física da superfície, a estabilidade das métricas e o comportamento da incerteza local. Na prática, a comparação entre kernels é orientada pelo RMSE_LOOCV, pelo R²_LOOCV, pelo PRESS e pela inspeção visual da superfície predita. A Tabela 2 apresenta um

comparativo resumido dos kernels estudados.

Tabela 2 – Comparativo dos kernels de covariância

Kernel	Suavidade	Flexibilidade	Parâmetros	Uso típico
RBF	C∞	Baixa	ℓ, σ_f	Funções muito suaves
Matérn 3/2	C¹	Média	ℓ, σ_f	Variações moderadas
Matérn 5/2	C²	Média-alta	ℓ, σ_f	Engenharia (padrão)
Rational Quadratic	C∞	Alta	ℓ, σ_f, α	Múltiplas escalas

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

5.4 VALIDAÇÃO CRUZADA LEAVE-ONE-OUT (LOOCV)

Em conjuntos de dados pequenos, a simples avaliação em treinamento pode ser enganosa, especialmente para modelos mais flexíveis como o Kriging. A validação cruzada leave-one-out (LOOCV) é a técnica preferencial para bases amostrais reduzidas (n = 5 a 30, típico em experimentos de engenharia), pois fornece uma estimativa não enviesada da capacidade de generalização do modelo.

5.4.1 Procedimento

Dado um conjunto de n pontos, o LOOCV consiste no seguinte protocolo iterativo:

- Remover temporariamente o ponto i do conjunto de treinamento;
- Ajustar o modelo com os n − 1 pontos restantes;
- Prever o valor da resposta para o ponto removido;
- Repetir para todos os n pontos.

Para cada ponto i, obtém-se uma predição fora da amostra $\hat{y}^{(i)}$, em que o sobreíndice indica que o ponto i não foi utilizado no ajuste correspondente. O resíduo de validação cruzada é:

$$e_i = y_i - \hat{y}^{(i)} \tag{5.28}$$

e a estatística acumulada PRESS (Predicted Residual Error Sum of Squares) é:

$$PRESS = \Sigma_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}^{(i)})^2 = \Sigma_{i=1}^{n} e_i^2 \tag{5.29}$$

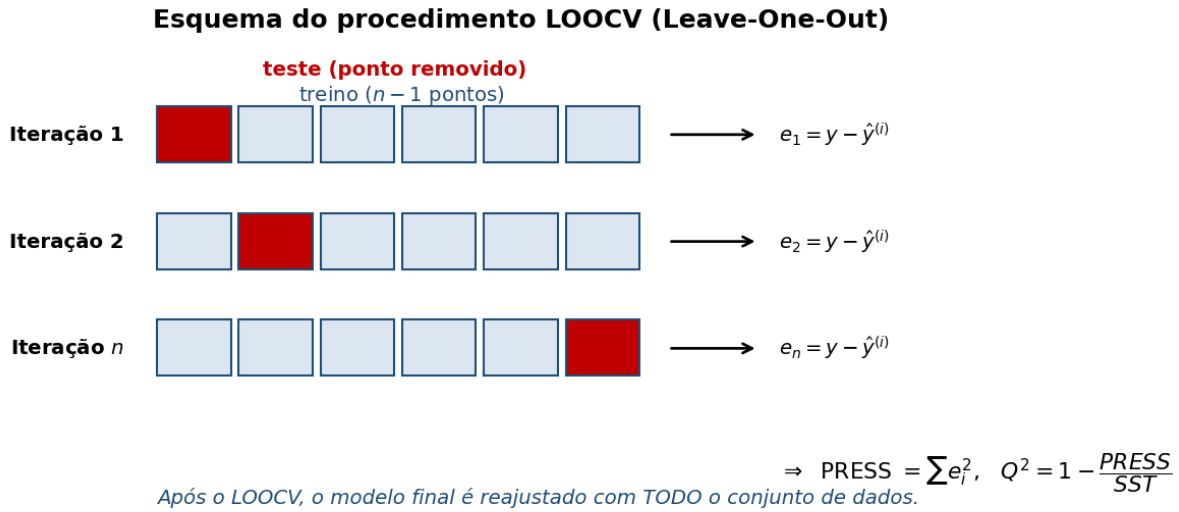
O coeficiente de predição Q² é definido por:

$$Q^2 = 1 - PRESS / SST \tag{5.30}$$

onde SST = Σ_i (y_i − ȳ)² é a soma total dos quadrados. O critério interpretativo para Q² é: Q² > 0,75 indica boa capacidade preditiva; Q² > 0,50 é aceitável; e Q² < 0,50 sinaliza problemas de generalização.

Concluída a validação cruzada — cuja finalidade é exclusivamente estimar a capacidade de generalização —, o modelo final de Kriging/GPR (ou de RSM) é reajustado utilizando todo o conjunto de dados, de modo a aproveitar toda a informação disponível na predição definitiva. A Figura 41 sintetiza esquematicamente esse procedimento.

Figura 41 – Esquema do procedimento LOOCV: a cada iteração, um ponto é separado (teste) e os n − 1 restantes formam o conjunto de treino; cada predição gera um resíduo e_i. Ao final, PRESS e Q² resumem o desempenho fora da amostra, e o modelo definitivo é ajustado com todo o conjunto



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Hastie, Tibshirani e Friedman (2009).

5.4.2 Diagnóstico de Sobreajuste

O sobreajuste (overfitting) ocorre quando o modelo se ajusta excessivamente aos dados de treinamento, perdendo capacidade de generalização. Em termos práticos, manifesta-se como um erro de treinamento muito baixo combinado com erro fora da

amostra significativamente maior. A condição $R^2 = 1$ com $Q^2 \ll 1$ é o diagnóstico clássico de sobreajuste. Como referência conceitual, podem-se considerar os seguintes limiares:

- $\Delta R^2 = R^2_treino - Q^2 < 0{,}10$ e $\Delta RMSE < 20\%$: sem sobreajuste detectado;
- $0{,}10 \leq \Delta R^2 < 0{,}25$ ou $20\% \leq \Delta RMSE < 40\%$: sobreajuste leve — cautela;
- $\Delta R^2 \geq 0{,}25$ ou $\Delta RMSE \geq 40\%$: sobreajuste severo.

Neste trabalho, entretanto, adotou-se o critério operacional descrito na Seção 6.7.3, baseado em valores absolutos de ΔR^2 e $\Delta RMSE$. A hierarquia de julgamento adotada neste trabalho privilegia: (1) desempenho em LOOCV; (2) métricas de erro preditivo (especialmente RMSE_LOOCV e PRESS); (3) coerência física da superfície; (4) consistência da análise local; e (5) apenas secundariamente, o ajuste em treinamento.

5.5 MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO DOS METAMODELOS

A avaliação de um metamodelo não deve apoiar-se em uma única métrica isolada nem no simples ajuste (fitting) aos dados de treinamento. Recomenda-se analisar simultaneamente a aderência aos dados conhecidos, a capacidade de previsão, a robustez local e a coerência física da superfície ajustada. As métricas empregadas neste trabalho são apresentadas a seguir.

5.5.1 Coeficiente de Determinação (R^2)

$$R^2 = 1 - \Sigma_i (y_i - \hat{y}_i)^2 / \Sigma_i (y_i - \bar{y})^2 = 1 - SSE / SST \tag{5.31}$$

Mede a fração da variabilidade total explicada pelo modelo. Quanto mais próximo de 1, melhor o ajuste. Deve ser analisado com cautela, pois pode mascarar sobreajuste quando observado apenas em treinamento.

5.5.2 Root Mean Squared Error (RMSE)

Mede o erro quadrático médio em unidades da resposta, penalizando mais fortemente os erros grandes.

$$RMSE = \sqrt{((1/n) \Sigma_i (y_i - \hat{y}_i)^2)} = \sqrt{(SSE / n)} \tag{5.32}$$

É a métrica central de desempenho e especialmente importante quando calculada sobre o LOOCV (RMSE_LOOCV).

5.5.3 Mean Absolute Error (MAE)

Mede o erro absoluto médio. É mais robusto que o RMSE a outliers isolados e fornece uma noção prática do erro típico do modelo em unidades originais da resposta.

$$MAE = (1/n)\ \Sigma_i\ |y_i - \hat{y}_i| \tag{5.33}$$

5.5.4 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Mede o erro percentual médio absoluto, expressando o erro em termos relativos. É útil para comparar respostas em escalas distintas, mas deve ser utilizado com cautela quando y_i se aproxima de zero.

$$MAPE = (100/n)\ \Sigma_i\ |y_i - \hat{y}_i| \ /\ |y_i| \tag{5.34}$$

5.5.5 BIAS

Indica a tendência média de superestimação ou subestimação. BIAS > 0 indica tendência a superestimar; BIAS < 0, a subestimar. Idealmente, um modelo não enviesado apresenta BIAS próximo de zero.

$$BIAS = (1/n)\ \Sigma_i\ (\hat{y}_i - y_i) \tag{5.35}$$

Complementa métricas puramente baseadas em magnitude de erro, sendo útil para detectar viés sistemático.

5.5.6 PRESS e Q²

O PRESS e o Q², já definidos nas Equações 5.29 e 5.30, são as métricas preditivas por excelência. São particularmente relevantes para conjuntos de dados pequenos e estão fortemente associados à capacidade real de generalização dos metamodelos.

5.5.7 Critério de Akaike (AIC) e Critério Bayesiano (BIC)

Os critérios de informação AIC e BIC equilibram qualidade de ajuste e complexidade do modelo:

$$AIC = n\ ln(\ SSE / n\ ) + 2p \tag{5.36}$$

$$BIC = n\ ln(\ SSE / n\ ) + p\ ln\ n \tag{5.37}$$

onde p é o número de parâmetros do modelo e n o número de observações. Modelos com menor AIC ou BIC são preferidos. A diferença $|\Delta AIC| < 2$ indica modelos praticamente equivalentes. O BIC penaliza mais fortemente a complexidade em relação ao AIC, sendo particularmente útil quando se deseja maior parcimônia. Esses critérios são aplicados apenas à RSM: como o GPR é um modelo não paramétrico, sem número fixo de parâmetros no sentido clássico, o AIC e o BIC não são calculados para ele. Na comparação RSM vs. Kriging, priorizam-se as métricas obtidas na LOOCV (RMSE_LOOCV e Q^2). A Tabela 3 apresenta um resumo das métricas empregadas.

Tabela 3 – Métricas de avaliação dos metamodelos

Métrica	Fórmula	Interpretação
R^2	$R^2 = 1 - SSE/SST$	Fração da variância explicada pelo modelo
RMSE	$RMSE = \sqrt{(SSE/n)}$	Erro médio em unidades da resposta; penaliza erros grandes
MAE	$MAE = (1/n)\ \Sigma\ \|y - \hat{y}\|$	Erro absoluto médio; mais robusto a outliers que o RMSE
MAPE	$MAPE = (100/n)\ \Sigma\ \|y - \hat{y}\|/\|y\|$	Erro percentual médio absoluto; útil para comparar escalas distintas
BIAS	$BIAS = (1/n)\ \Sigma\ (\hat{y} - y)$	Detecta tendência sistemática de super ou subestimação
PRESS	$PRESS = \Sigma\ (y - \hat{y}^{(i)})^2$	Erro preditivo acumulado fora da amostra (LOOCV)
Q^2	$Q^2 = 1 - PRESS/SST$	Coeficiente de predição; $Q^2 > 0{,}75$ indica boa capacidade preditiva
AIC	$AIC = n\ ln(SSE/n) + 2p$	Equilibra qualidade de ajuste e número de parâmetros
BIC	$BIC = n\ ln(SSE/n) + p\ ln\ n$	Semelhante ao AIC; penaliza mais fortemente a complexidade

SSE = soma dos quadrados dos resíduos; SST = soma total dos quadrados; p = número de parâmetros do modelo.

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

5.6 ANÁLISE LOCAL DE PREDIÇÃO E DIAGNÓSTICO DE CONCORDÂNCIA

Além da avaliação global do modelo, considera-se relevante a análise pontual da predição em coordenadas específicas do espaço paramétrico. Esta análise é importante porque dois modelos podem apresentar métricas globais semelhantes, mas fornecer respostas locais diferentes em pontos de interesse operacional.

5.6.1 Métricas de Concordância Local

A concordância local entre os metamodelos é quantificada por métricas que comparam diretamente suas respostas no ponto avaliado. A primeira delas é a diferença absoluta entre as predições:

$$Diff_{abs}(x^*) = | \hat{y}_K(x^*) - \hat{y}_{RSM}(x^*) | \tag{5.38}$$

Essa grandeza mede a discrepância absoluta entre os dois metamodelos na unidade original da variável resposta. A segunda métrica é a diferença relativa, definida por:

$$Diff_{rel}(x^*) = | \hat{y}_K(x^*) - \hat{y}_{RSM}(x^*) | / | \hat{y}_K(x^*) | \tag{5.39}$$

Quando expressa em porcentagem, pode-se escrever:

$$Diff_{rel}^{(\%)}(x^*) = 100 \cdot | \hat{y}_K(x^*) - \hat{y}_{RSM}(x^*) | / | \hat{y}_K(x^*) | \tag{5.40}$$

Essa métrica permite interpretar o desacordo entre os modelos em termos relativos à magnitude da resposta estimada pelo Kriging. Uma terceira métrica importante é a discrepância normalizada pela incerteza local do modelo probabilístico, denominada neste documento como razão d/σ*:

$$d / \sigma^* = Diff_{abs}(x^*) / \sigma^* \tag{5.41}$$

Essa quantidade mede diretamente quantos desvios-padrão de incerteza (σ*) separam a predição da RSM da predição do GPR, e sua leitura segue a distribuição normal (regra 68–95–99,7):

- d/σ* < 1 — a divergência é inferior a um desvio-padrão e, portanto, plenamente compatível com a incerteza local da Krigagem; como cerca de 68% da massa de

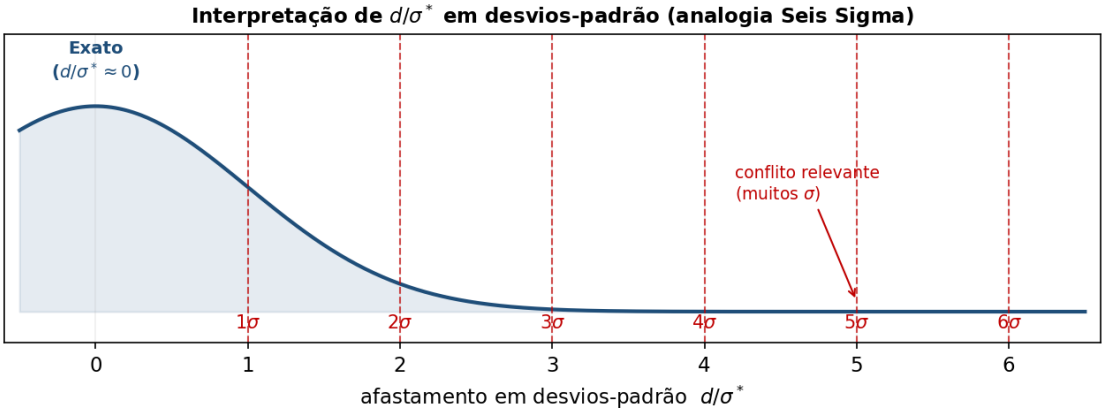
probabilidade está contida em ±1σ, as duas predições são estatisticamente indistinguíveis;

- 1 ≤ d/σ* < 2 — a divergência ainda se encontra dentro da faixa de ≈ 95% (±2σ), exigindo cautela;
- 2 ≤ d/σ* < 3 — a divergência situa-se entre dois e três desvios-padrão (até ±3σ, ≈ 99,7%), indicando discordância relevante;
- d/σ* ≥ 3 — caracteriza conflito significativo: a diferença entre os modelos excede a própria incerteza preditiva e, com alta probabilidade, reflete extrapolação ou inadequação de um dos metamodelos no ponto avaliado.

Em outras palavras, o valor de d/σ* é literalmente o número de desvios-padrão que separa os dois modelos — a mesma lógica da escala sigma empregada no controle de qualidade. Esses limiares são retomados de forma consolidada no critério de classificação da Seção 5.7.

Essa interpretação é análoga à empregada nos programas de qualidade Seis Sigma (Six Sigma) e nas certificações Black Belt e Green Belt na indústria, em que o afastamento de um resultado em relação ao alvo é medido em número de desvios-padrão (σ): quanto maior o número de sigmas, mais distante o ponto se encontra do comportamento esperado. A Figura 42 ilustra essa leitura da razão d/σ* em unidades de desvio-padrão.

Figura 42 – Interpretação da razão d/σ* em unidades de desvio-padrão, análoga à escala sigma (1σ, 2σ, …, 6σ) dos programas de qualidade Seis Sigma: quanto maior o afastamento em sigmas, mais significativo o conflito entre os metamodelos



Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Montgomery (2019).

Adicionalmente, define-se a incerteza relativa da Krigagem em relação à

amplitude total observada da resposta:

$$\sigma^*_{rel} = \sigma^* / (y_{max} - y_{min}) \tag{5.42}$$

em que y_max e y_min correspondem, respectivamente, aos valores máximo e mínimo da resposta no domínio analisado. Essa métrica auxilia na interpretação da magnitude da incerteza em termos adimensionais.

Como o modelo GPR fornece uma distribuição preditiva Gaussiana no ponto x*, pode-se construir um intervalo de credibilidade de 95% para a resposta prevista:

$$IC_{95\%}(x^*) = \hat{y}_K(x^*) \pm 1{,}96\ \sigma^* \tag{5.43}$$

ou, de forma explícita:

$$IC_{95\%}(x^*) = [\ \hat{y}_K(x^*) - 1{,}96\ \sigma^*\ ,\ \ \hat{y}_K(x^*) + 1{,}96\ \sigma^*\ ] \tag{5.44}$$

5.7 CRITÉRIO DE CLASSIFICAÇÃO DE CONCORDÂNCIA

A concordância entre os modelos no ponto x* é classificada com base na razão $r_\sigma = |\text{diff}|/\sigma^*$, que expressa a diferença entre as predições em unidades de incerteza preditiva do GPR, e na fração da faixa $\text{frac}_{\text{faixa}} = |\text{diff}|/\text{faixa}_y$, que a expressa como proporção da amplitude da resposta (Seção 6.7.4, Equações 6.14 e 6.15), segundo os critérios abaixo, avaliados em ordem:

- (i) excelente concordância local quando $r_\sigma < 1$ e $\text{frac}_{\text{faixa}} < 0{,}03$;
- (ii) boa concordância quando $r_\sigma < 2$ e $\text{frac}_{\text{faixa}} < 0{,}07$;
- (iii) concordância moderada quando $r_\sigma < 3$ ou $\text{frac}_{\text{faixa}} < 0{,}12$; e
- (iv) conflito relevante: $r_\sigma \geq 3$ e $\text{frac}_{\text{faixa}} \geq 0{,}12$ (isto é, quando nenhuma das condições anteriores é satisfeita).

Esses limiares têm caráter heurístico, adotados como convenção prática neste trabalho. Quando há conflito relevante, recomenda-se verificar se o ponto está em região de extrapolação (distância ao experimento mais próximo), preferir a predição do Kriging acompanhada do intervalo de incerteza, e considerar experimentos adicionais na região de conflito.

5.8 GRADIENTE E CURVATURA LOCAL

Para a RSM, o gradiente no ponto x* tem forma analítica (Equações 5.12 e

5.13), e sua magnitude é:

$$\| \nabla \hat{y} \| = \sqrt{((\partial \hat{y}/\partial h_n)^2 + (\partial \hat{y}/\partial r_1)^2)} \quad (5.45)$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 da Hessiana H (Equação 5.14) indicam a curvatura local: λ_1, $\lambda_2 > 0$ corresponde a mínimo; λ_1, $\lambda_2 < 0$ a máximo; sinais opostos indicam ponto de sela. Esta análise local complementa a avaliação global baseada em métricas agregadas e é metodologicamente importante para identificar discordâncias pontuais entre os modelos.

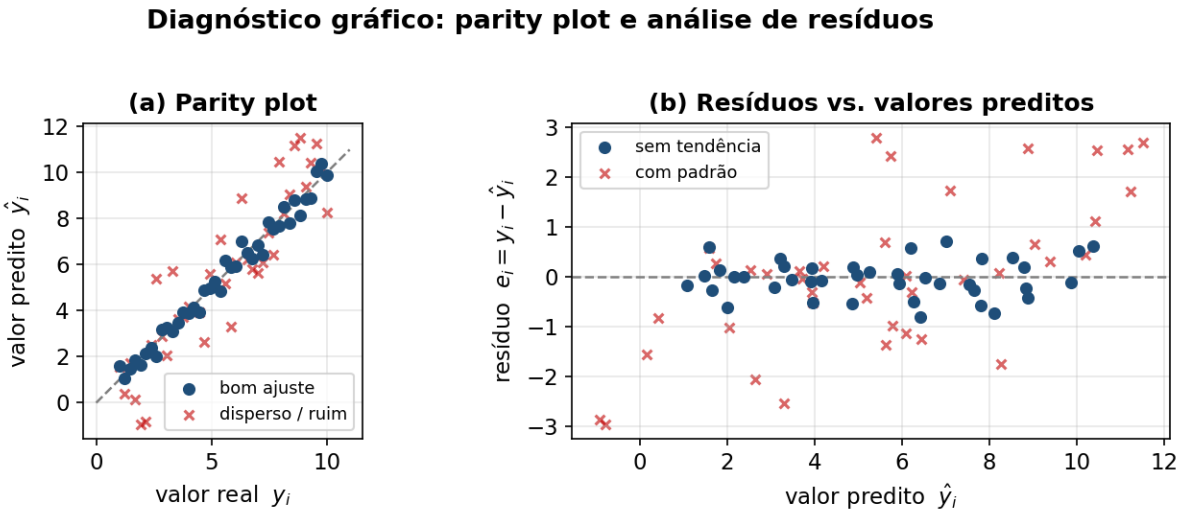
5.9 DIAGNÓSTICO GRÁFICO: PARITY PLOT E ANÁLISE DE RESÍDUOS

O parity plot de treinamento compara os valores reais yi com os valores preditos ŷi nos mesmos pontos utilizados no ajuste, avaliando a aderência aos dados conhecidos. Entretanto, o parity plot de treinamento não deve ser interpretado como prova suficiente de qualidade preditiva, especialmente em modelos flexíveis. Um modelo pode apresentar excelente desempenho em treinamento com desempenho significativamente inferior fora da amostra — condição de sobreajuste que somente o LOOCV e o PRESS conseguem detectar adequadamente. Os resíduos são definidos como:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (5.46)$$

A análise de resíduos permite investigar tendências sistemáticas, viés, dispersão do erro e possíveis regiões de pior ajuste. A interpretação dos resultados é sempre complementada por LOOCV, PRESS, análise de resíduos e análise local, de modo a garantir conclusões metodologicamente robustas. A Figura 43 exemplifica os padrões típicos do parity plot e do gráfico de resíduos.

Figura 43 – Diagnóstico gráfico: (a) Parity plot: pontos alinhados à diagonal indicam bom ajuste, enquanto a dispersão indica ajuste ruim. (b) Resíduos versus valores preditos: uma nuvem aleatória em torno de zero indica ausência de tendência, ao passo que padrões (curvatura, funil) revelam problemas no modelo

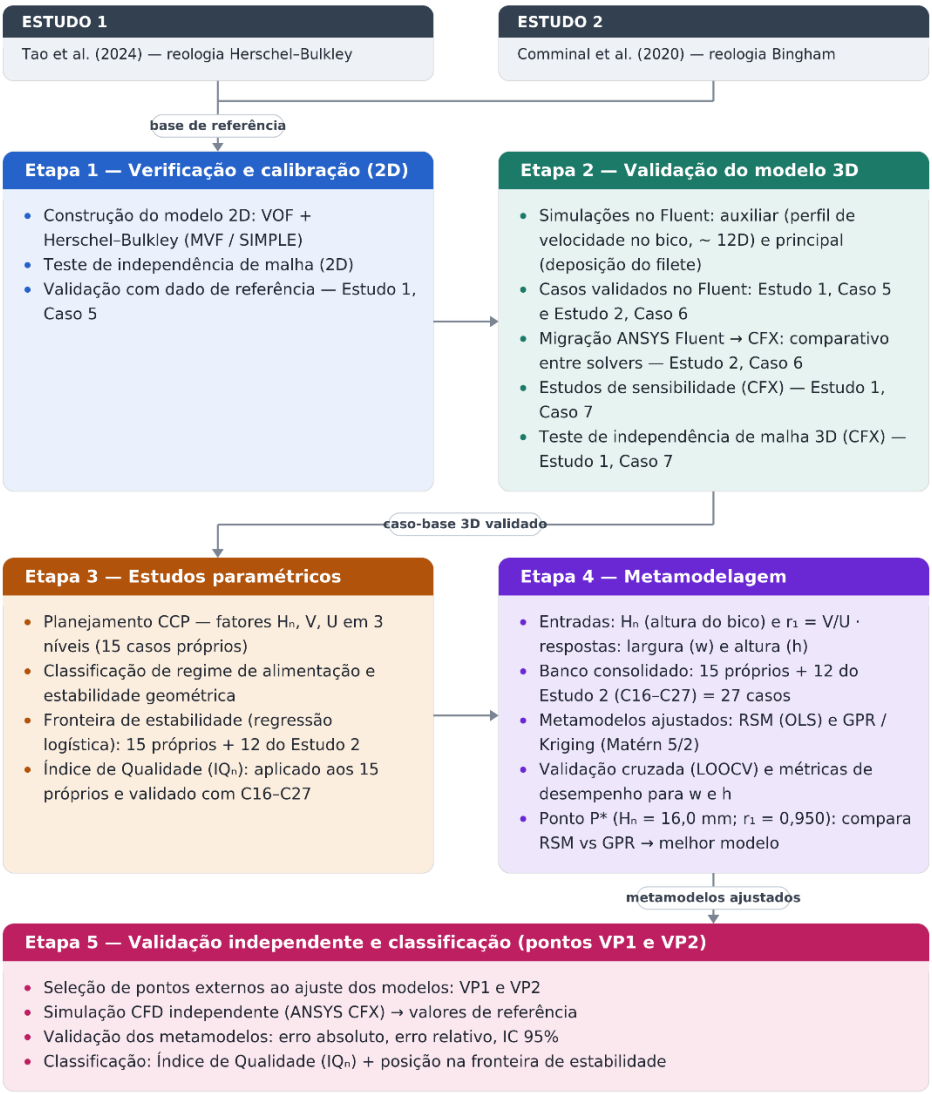


Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Montgomery, Peck e Vining (2012).

6 METODOLOGIA

A metodologia foi organizada em cinco etapas complementares (Figura 44): (1) verificação e calibração físico-numérica do modelo bidimensional (2D), com base em estudos de referência; (2) validação do modelo tridimensional (3D), analisando o comportamento real da extrusão e da deposição; (3) estudos paramétricos sistemáticos, para identificar os efeitos dos parâmetros sobre a estabilidade geométrica do filete; (4) desenvolvimento de metamodelos preditivos, capazes de substituir as simulações CFD a custo computacional reduzido; e (5) validação independente e classificação, aplicando as ferramentas desenvolvidas a pontos externos (VP1 e VP2) não utilizados no ajuste dos modelos.

Figura 44 – Etapas metodológicas da pesquisa



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

O protocolo de simulação numérica adotado neste trabalho foi estruturado em etapas sequenciadas de modo sistemático, contemplando desde a construção do modelo geométrico até a análise crítica dos resultados. A seguir, são descritas as principais fases que compõem o processo de simulação como um todo:

1. Geração da geometria e da malha: A geometria representativa do domínio físico foi criada no software ANSYS® SpaceClaim. A geração de malha ocorreu de forma integrada, permitindo a criação, o refinamento e o controle da discretização do domínio diretamente no ambiente do solver. Após a verificação, a malha foi exportada internamente, mantendo as zonas e condições de contorno.
2. Pré-processamento: Foram definidas as condições físicas e geométricas do problema, incluindo a caracterização das propriedades reológicas do concreto fresco e a configuração dos parâmetros numéricos empregados. Foram também estabelecidas as condições de contorno e de inicialização, os modelos físicos utilizados (multifásico VOF e reológico não newtoniano) e os critérios de convergência adotados.
3. Resolução do sistema de equações: As equações de conservação da massa, da fração volumétrica e da quantidade de movimento, discretizadas segundo o Método dos Volumes Finitos (FVM), foram resolvidas em regime transiente. O acoplamento pressão–velocidade foi conduzido pelo algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), adequado para escoamentos incompressíveis. O passo de tempo foi ajustado de forma adaptativa, limitado por um número de Courant global igual a 2 (ver Seção 6.2 e Apêndice B). O processo iterativo prosseguiu até que os resíduos das variáveis dependentes atingissem valores estáveis abaixo do critério estabelecido.
4. Diagnóstico e controle de inconsistências numéricas: Nas ocorrências de falhas de convergência, divergências locais ou resultados fisicamente inconsistentes, procedeu-se à análise das causas — distinguindo entre limitações numéricas inerentes ao método, erros de discretização ou inadequações nas condições de contorno. As correções foram aplicadas para assegurar robustez e estabilidade da solução.
5. Pós-processamento e análise dos resultados: Após a convergência, os resultados foram avaliados por meio de mapas de contorno, vetores e gráficos, gerados no módulo CFD-Post do ANSYS e nos softwares Tecplot e EnSight.

6. Estudo de independência de malha: Realizou-se estudo de independência de malha para garantir que as variáveis de interesse não dependessem do tamanho dos elementos.
7. Validação e comparação com dados de referência: Os resultados numéricos foram confrontados com dados disponíveis na literatura, com o objetivo de verificar a coerência física do modelo e validar a configuração numérica adotada. Essa etapa assegurou a confiabilidade do modelo antes dos estudos paramétricos.
8. Recurso Computacional: As simulações foram conduzidas com a licença acadêmica *Ansys® Student*, executadas em um computador do tipo notebook, modelo Lenovo®, equipado com processador Intel® Core™ i5-12450H (12ª geração, 2.00 GHz), 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 11 de 64 bits. As malhas empregadas — com até cerca de 590 mil nós no teste de independência de malha tridimensional e cerca de 140 mil nós na malha de trabalho — permaneceram dentro do limite de tamanho de malha da licença estudantil, limite que, em contrapartida, restringiu a possibilidade de refinamentos adicionais.

6.1 ESTUDOS DE REFERÊNCIA

Esta seção caracteriza os dois estudos da literatura que foram empregados como referência para fundamentar a verificação e a validação do modelo numérico. Cada estudo trabalhou com um conjunto de casos, dos quais foram adotados casos específicos, com as configurações reológicas, geométricas e operacionais reunidas na Tabela 4. O Estudo 1 corresponde ao trabalho de Tao et al. (2024), do qual se adotaram o Caso 5 (verificação e calibração do modelo bidimensional e base comparativa) e o Caso 7 (estudos de sensibilidade e independência de malha, no ANSYS CFX); o Estudo 2 corresponde a Comminal et al. (2020), do qual se adotou o Caso 6 (validação tridimensional e comparação entre os *solvers*). Ao longo do texto, cada referência a esses estudos remete às condições apresentadas nesta Tabela 4.

Tabela 4 – Estudos de referência e casos adotados

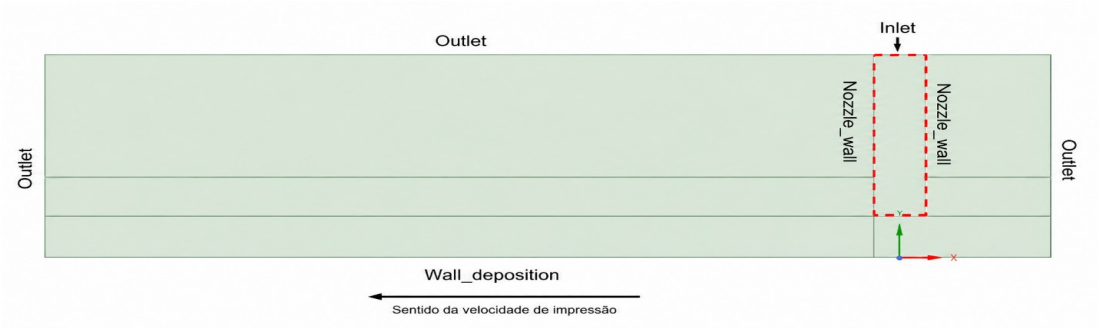
Parâmetro	Estudo 1 — Tao et al. (2024) · Caso 5	Estudo 1 — Tao et al. (2024) · Caso 7	Estudo 2 — Comminal et al. (2020) · Caso 6
Modelo reológico	Herschel–Bulkley	Herschel–Bulkley	Bingham (regularizado)
Tensão de escoamento (τ_0)	405,7 Pa	405,7 Pa	630 Pa
Consistência (K) / viscosidade plástica (μ_p)	K = 74,07 Pa·s^n	K = 74,07 Pa·s^n	μ_p = 7,5 Pa·s
Índice de escoamento (n)	0,81	0,81	1
Densidade (ρ)	2150 kg/m³	2150 kg/m³	2100 kg/m³
Diâmetro do bico (D)	20 mm	20 mm	25 mm
Altura / distância bico–mesa (H_n)	20 mm	20 mm	12,5 mm
Velocidade de impressão (V)	10 mm/s	30 mm/s	30 mm/s
Velocidade de extrusão (U)	30,93 mm/s	34,81 mm/s	33,6 mm/s
Razão V/U	0,32	0,86	0,89
Aplicação na tese	Verificação e calibração 2D (base comparativa); Validação 3D	Sensibilidade e independência de malha (CFX)	Validação 3D e comparação de solvers

Fonte: Elaborada pela autora (2026), com base em Tao et al. (2024) e Comminal et al. (2020).

6.2 ETAPA DE VERIFICAÇÃO E CALIBRAÇÃO (MODELO 2D)

Para assegurar a consistência físico-numérica do modelo, realizou-se a verificação e calibração do *setup* computacional a partir da reprodução do Estudo 1, por meio do software *Fluent*. A calibração do setup computacional foi realizada com base nos dados do Caso 5 do Estudo 1. Os parâmetros adotados na simulação estão apresentados na Tabela 4. A construção do modelo físico foi realizada com base nas configurações geométricas descritas pelos autores, as quais compreendem um domínio bidimensional contendo uma região superior que representa o bico extrusor e uma região inferior correspondente ao espaço de deposição sobre a base, conforme a Figura 45.

Figura 45 – Domínio bidimensional e condições de contorno em 2D



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A formulação numérica foi baseada no método dos volumes finitos (FVM), com ativação do modelo multifásico *Volume of Fluid* (VOF), conforme proposto por Hirt e Nichols (1981), em sua formulação implícita. Essa abordagem permite a representação da interface entre o concreto fresco e o ar por meio de uma função indicadora de fração volumétrica. A formulação implícita contribui para a estabilidade numérica da solução e proporciona maior flexibilidade na escolha do passo de tempo, influenciando o comportamento global do escoamento. Ressalta-se, entretanto, que a acurácia na captura da interface está associada principalmente aos algoritmos de reconstrução e advecção empregados no modelo VOF, sendo sensível à difusão numérica e à resolução da malha.

O regime de escoamento foi considerado laminar, em função da elevada viscosidade do concreto fresco e dos baixos números de Reynolds associados ao processo, da ordem de 10^{-2}, conforme cálculo apresentado na Seção 6.3.2. As propriedades reológicas do material (Tabela 4) foram implementadas por meio do modelo de Herschel–Bulkley (Herschel e Bulkley, 1926).

A tensão superficial entre o concreto e o ar foi adotada como 0,0035 N/m, sendo considerada como parâmetro de ajuste, uma vez que não há valores consolidados na literatura para materiais cimentícios, em função da complexidade da interface e da variabilidade das propriedades do material.

As condições de contorno também foram configuradas conforme a descrição de Tao et al. (2024): na entrada do bico foi imposta a velocidade média de 0,03093 m/s, a saída foi definida com condição de pressão ambiente (0 Pa manométrica), e todas as paredes receberam condição de não deslizamento (*no-slip*). Especificamente, para simular o deslocamento da extrusora durante a impressão,

adotou-se um sistema de referência fixo no bico, de modo que o movimento relativo entre o bico e a base fosse representado por meio da imposição de uma condição de parede móvel (*moving wall*) na superfície de deposição. Dessa forma, a base foi definida com velocidade de 0,01 m/s no eixo X (direção negativa), equivalente à velocidade de avanço do bico no sistema físico (Figura 45). Essa abordagem permite representar o processo de deposição em regime transiente sem a necessidade de malhas móveis ou técnicas de *dynamic mesh*, reduzindo o custo computacional e aumentando a estabilidade numérica da simulação.

A simulação foi inicializada com o domínio completamente preenchido pela fase ar (fase secundária). Em seguida, foi definida uma região interna ao bico de extrusão contendo exclusivamente a fase concreto (fase primária), por meio da atribuição de fração volumétrica unitária nessa região. Essa condição inicial representa o material já presente no interior do bico, pronto para ser extrudado no início da simulação. A simulação transcorreu até a completa deposição do filete sobre a base. O solver foi configurado para regime transiente, com acoplamento pressão–velocidade por meio do algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) (Patankar; Spalding, 1972). A simulação foi conduzida em regime transiente, com controle adaptativo do passo de tempo pelo método específico para escoamento multifásico. A duração total simulada foi de 30 s, com passo de tempo inicial de $1{,}0 \times 10^{-4}$ s, passo mínimo de $1{,}0 \times 10^{-4}$ s e passo máximo de $1{,}0 \times 10^{-2}$ s. O ajuste automático do passo de tempo foi limitado por um fator mínimo de alteração de 0,8 e por um fator máximo de alteração de 1,2, considerando ainda a restrição baseada na física ativada. O número de Courant global utilizado foi igual a 2. Para cada passo de tempo, foram permitidas até 40 iterações, com atualização do passo de tempo a cada passo e intervalo de relatório igual a 20.

Essa etapa metodológica teve como finalidade calibrar o modelo antes das demais etapas e dos estudos paramétricos, assegurando que as variações posteriores fossem analisadas a partir de uma configuração previamente verificada em relação a um caso real descrito na literatura técnica.

6.2.1 Teste de Independência de Malha

Para assegurar a confiabilidade das simulações de extrusão de concreto em impressão 3D, foi realizado um teste de independência de malha. *O objetivo desse*

teste é avaliar a influência do refinamento da malha na altura do filete extrudado, verificando se resultados consistentes são obtidos independentemente do tamanho dos elementos da malha.

A altura do cordão de concreto extrudado é um parâmetro geométrico crítico, pois impacta a precisão dimensional e a qualidade da peça impressa. Assim, garantir que a solução numérica não dependa do refinamento da malha é fundamental antes de prosseguir com análises mais aprofundadas.

Foram avaliados diferentes tamanhos médios de elemento de malha (variando de 12 mm a 0,25 mm), com o objetivo de analisar a influência do refinamento espacial na solução numérica e nas variáveis de interesse. Ressalta-se que essa análise está associada exclusivamente à discretização espacial do domínio (malha), sendo mantidos constantes os esquemas de discretização das equações governantes ao longo das simulações. O refinamento concentrou-se nas regiões críticas — como saída do bico, região de interface concreto-ar e superfície de deposição. Foram definidas quatro seções transversais ao longo do comprimento do filete extrudado, Figura 46, posicionadas a distâncias previamente estabelecidas em relação ao eixo do bico de extrusão, com o objetivo de avaliar a variação da altura ao longo da deposição.

Figura 46 – Definição das posições de amostragem (Linhas 1 a 4) ao longo do comprimento de deposição para extração da altura do filete extrudado



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

As posições de medida foram definidas da seguinte forma:

1. **Linha 1:** localizada a 30 mm do eixo do bico de extrusão, representando a região inicial do filete, imediatamente após a deposição do material;

2. **Linha 2:** posicionada a 130 mm do eixo do bico, caracterizando uma região intermediária próxima à zona inicial de escoamento e acomodação do material;
3. **Linha 3:** situada a 230 mm do eixo do bico, correspondente à região central do filete depositado;
4. **Linha 4:** localizada a 333 mm do eixo do bico, representando a extremidade final do filete, na região mais distante da fonte de extrusão.

Além das alturas em cada uma dessas posições discretas, calculou-se também a altura média do filamento (média aritmética dos valores das quatro linhas) para cada malha. A partir dessas medidas, foram determinadas estatísticas descritivas: média geral, desvio-padrão e coeficiente de variação (CV) das alturas ao longo do filamento em cada malha, bem como a diferença percentual entre os resultados das malhas sucessivas. Esses indicadores permitem quantificar a variação dos resultados com o refinamento e identificar a convergência da solução.

6.3 ETAPA DE VALIDAÇÃO DO MODELO TRIDIMENSIONAL (3D)

Após a etapa de verificação e calibração do modelo numérico em escala bidimensional (2D), procedeu-se à extensão da modelagem para a escala tridimensional (3D), com o objetivo de representar de forma mais realista o comportamento físico do processo de extrusão e deposição do concreto fresco.

Destaca-se que, nesta etapa, a modelagem tridimensional foi empregada para fins de validação do modelo, não sendo realizada nova calibração dos parâmetros reológicos ou operacionais previamente definidos na etapa bidimensional. Uma vez validado, o modelo tridimensional foi utilizado nas etapas subsequentes de estudos paramétricos. Os estudos de sensibilidade conduzidos no CFX (Seção 6.3.4.2) avaliaram apenas parâmetros numéricos secundários (taxa mínima de cisalhamento e tensão superficial), sem alterar a calibração do material.

A validação do modelo tridimensional foi conduzida por meio da comparação com resultados reportados na literatura, adotando-se como referência os dados do Caso 5 do Estudo 1 e Caso 6 do Estudo 2, presentes na Tabela 4, sendo ambos amplamente citados na área de impressão 3D de concreto e reconhecidos pela abordagem numérica aplicada à simulação do processo de extrusão.

A estratégia metodológica proposta neste trabalho foi estruturada de modo a contemplar uma abordagem numérica unificada, aplicada de forma consistente a ambos os estudos de referência, combinada com ajustes específicos nas configurações geométricas e nas condições operacionais, de acordo com as particularidades de cada caso analisado.

Ressalta-se que as figuras apresentadas ao longo deste capítulo referem-se exclusivamente à implementação da metodologia no Estudo 1 (Tao et al., 2024), no qual o modelo tridimensional foi inicialmente configurado, testado e verificado. Para o Estudo 2 (Comminal et al., 2020), foi adotada a mesma estratégia metodológica proposta neste trabalho, com as devidas adaptações nas geometrias e condições de contorno, conforme descrito ao longo do texto.

6.3.1 Estratégia Geral da Validação Tridimensional

A estratégia adotada para a validação do modelo tridimensional baseou-se na decomposição do processo de extrusão em duas etapas complementares: (i) uma simulação auxiliar, destinada à obtenção do perfil de velocidade totalmente desenvolvido no interior do bico de extrusão, e (ii) uma simulação principal, correspondente ao processo de deposição do concreto sobre a superfície de impressão.

Essa abordagem permitiu reduzir o custo computacional da simulação tridimensional, uma vez que o bico de extrusão não precisou ser incluído integralmente no domínio principal de deposição. O perfil de velocidade desenvolvido, obtido na simulação auxiliar, foi aplicado como condição de contorno de entrada (*inlet*) no modelo tridimensional da superfície de deposição, assegurando coerência físico-numérica entre as etapas e representatividade do escoamento na saída do bico.

6.3.2 Simulação Auxiliar para Obtenção do Perfil de Velocidade no Bico de Extrusão

Para representar adequadamente o escoamento do concreto fresco no interior do bico de extrusão, foi conduzida uma simulação auxiliar em regime permanente, considerando exclusivamente o domínio correspondente ao tubo de extrusão. Essa etapa teve como finalidade a obtenção de um perfil de velocidade hidrodinamicamente desenvolvido, posteriormente aplicado como condição de

contorno de entrada *(inlet)* no modelo tridimensional da superfície de deposição.

A simulação auxiliar foi realizada de forma análoga para os dois estudos de referência considerados nesta pesquisa, mantendo-se o mesmo procedimento numérico, regime de escoamento e estratégia de discretização. As diferenças entre os estudos referem-se às propriedades reológicas do material e às dimensões geométricas do bico de extrusão, conforme reportado na literatura. No Estudo 1 – Caso 5, o concreto fresco foi modelado reologicamente como um fluido não newtoniano do tipo Herschel–Bulkley, enquanto no Estudo 2 – Caso 6 do tipo Bingham. Ambos os modelos descrevem o concreto como um material viscoplástico com tensão de escoamento, característica essencial para a correta representação do processo de extrusão. A Tabela 5 apresenta um resumo dos principais parâmetros físicos e geométricos considerados na simulação auxiliar para cada estudo de validação.

Tabela 5 - Parâmetros físicos e geométricos do escoamento no bico de extrusão

Estudo	Modelo reológico	Diâmetro interno D (mm)	Densidade ρ (kg/m³)	Velocidade média U (m/s)	Viscosidade aparente μ_{app} (Pa·s)
Estudo 1 – Tao et al. (2024)	Herschel–Bulkley	20	2150	0,03093	76
Estudo 2 – Comminal et al. (2020)	Bingham	25	2100	0,0336	7,5

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A estimativa do comprimento de entrada (L_e) pode ser obtida pela correlação clássica para escoamento laminar newtoniano em tubos circulares, expressa por:

$$\frac{L_e}{D} \approx 0{,}05\, Re \qquad (6.1)$$

conforme apresentado por White (2006) e Fox et al. (2015). A partir dessa relação, tem-se:

$$L_e = (0{,}05\, Re)\, D. \qquad (6.2)$$

Com base nas propriedades do material (modelo de Herschel–Bulkley), foi considerada a densidade $\rho = 2150\ kg/m^3$, a velocidade média $U = 0{,}03093\ m/s$, o diâmetro interno $D = 0{,}02\ m$e a viscosidade aparente $\mu_{app} \approx 76\ Pa.s$. O número de Reynolds, aproximado com base na viscosidade aparente, é calculado como (a viscosidade aparente constante é adotada apenas nesta estimativa; nas

simulações, a viscosidade varia com a taxa de cisalhamento segundo o modelo de Herschel–Bulkley):

$$Re = \frac{\rho\, U\, D}{\mu_{app}} = \frac{2150 \times 0{,}03093 \times 0{,}02}{76} \approx 0{,}017 \qquad (6.3)$$

Assim, pela correlação newtoniana:

$$L_e = 0{,}05 \times 0{,}017 \times 0{,}02 \approx 1{,}7 \times 10^{-5}\, m = 0{,}017\, mm. \qquad (6.4)$$

O valor calculado é extremamente reduzido e, portanto, não representa adequadamente o comportamento real do escoamento do concreto fresco. Tal limitação decorre do fato de o concreto ser um fluido não newtoniano com tensão de escoamento, no qual ocorre a formação de uma região central de escoamento do tipo *plug*. Para fluidos viscoplásticos descritos por modelos como Herschel–Bulkley e Bingham, a literatura recomenda a adoção de comprimentos de entrada significativamente maiores, tipicamente da ordem de 10 a 15 vezes o diâmetro interno do tubo, a fim de eliminar os efeitos de entrada e assegurar o desenvolvimento completo do perfil de velocidade (DÜZ, 2019).

Com base nessas recomendações, foi adotado, para ambos os estudos, um comprimento alongado equivalente a aproximadamente 12D, valor considerado adequado para garantir a estabilização do escoamento antes da saída do bico. A Tabela 6 apresenta um resumo dos comprimentos característicos adotados na simulação auxiliar.

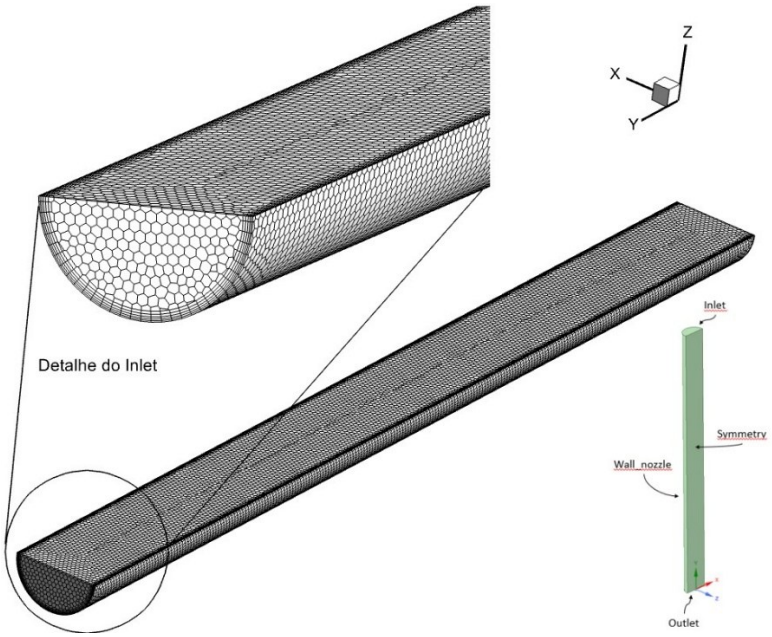
Tabela 6 – Comprimentos característicos do bico de extrusão na simulação auxiliar

Estudo	Comprimento original (mm)	Comprimento alongado (mm)	Relação L/D
Estudo 1 – Tao et al. (2024)	80	240	12
Estudo 2 – Comminal et al. (2020)	Adotado 25	300	12

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A simulação foi conduzida sobre metade da geometria, mediante a aplicação de uma condição de simetria, com o objetivo de reduzir o custo computacional. A Figura 47 apresenta a geometria do domínio e as regiões de contorno adotadas: *inlet*, *outlet*, *wall_nozzle* e *symmetry*, responsáveis pela definição das condições de fronteira do problema.

Figura 47 – Geometria do tubo, malha e regiões de contorno



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

O escoamento foi tratado como permanente (*steady-state*), com condição de não deslizamento (*no-slip*) nas paredes do tubo. A discretização do domínio foi realizada por meio de uma malha híbrida do tipo *Poly-Hexcore*, com a aplicação de cinco camadas de refinamento do tipo *inflation* nas regiões próximas à parede, visando capturar adequadamente os gradientes de velocidade associados ao cisalhamento do material, conforme a Figura 47.

Após a convergência da solução, verificada por meio da redução dos resíduos normalizados das equações de continuidade e quantidade de movimento para valores inferiores a 10^{-4}, bem como pela estabilização das variáveis monitoradas na seção de saída do bico, como a velocidade, o perfil de velocidade plenamente desenvolvido foi extraído em uma seção transversal posicionada próxima à saída do bico e exportado como arquivo de perfil (*profile file*), sendo posteriormente aplicado como condição de contorno de entrada no modelo tridimensional da superfície de deposição do concreto fresco, tanto para o Estudo 1 quanto para o Estudo 2.

Para a realização da simulação auxiliar do escoamento no interior do tubo de extrusão, foram definidas as configurações gerais do modelo numérico no software ANSYS *Fluent with Meshing*, abrangendo a seleção do solver, a formulação de escoamento, o regime adotado e as condições físicas aplicadas, conforme descrito no Apêndice A.

6.3.3 Simulação Principal da Região de Deposição do Material (Modelo Tridimensional)

Após a obtenção do perfil de velocidade plenamente desenvolvido no interior do bico de extrusão, procedeu-se à simulação tridimensional da região de deposição do concreto fresco sobre a base de impressão. Essa etapa teve como objetivo representar o comportamento do material após a saída do bico, considerando a interação entre o concreto e o ar, bem como o efeito do movimento relativo entre a extrusora e a superfície de deposição.

A simulação da região de deposição foi conduzida de forma análoga para os dois estudos de referência considerados nesta pesquisa, mantendo-se a mesma estratégia numérica, os mesmos modelos físicos e a mesma abordagem de discretização espacial. As diferenças entre os estudos referem-se exclusivamente às dimensões geométricas do domínio computacional e às condições operacionais associadas, conforme Tabela 7 – Parâmetros físicos empregados na simulação da região de deposição.

6.3.3.1 Estratégia Numérica Comum para a Simulação da Deposição

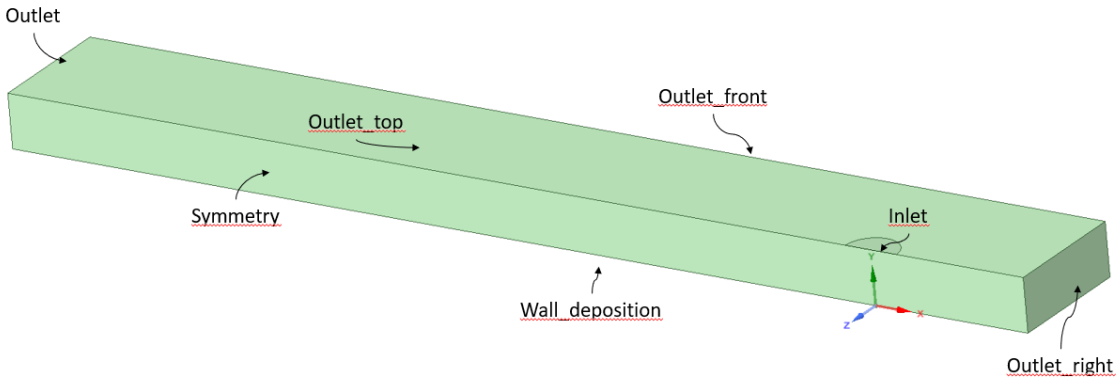
Em ambos os estudos, o domínio computacional foi reduzido de modo a representar apenas a região de deposição do material, não sendo necessária a inclusão integral do bico de extrusão, previamente simulado na etapa auxiliar. Com o objetivo de reduzir o custo computacional, adotou-se uma condição de simetria longitudinal, permitindo a simulação de apenas metade do domínio físico. Para estes baixos números de Reynolds, sem fluxo transversal e turbulência, é uma simplificação que se aplica sem prejuízo dos resultados ou perda de generalidade.

O escoamento foi modelado em regime transiente, considerando a atuação da gravidade. O sistema bifásico concreto fresco–ar foi tratado pelo modelo multifásico *Volume of Fluid* (VOF), na formulação implícita, no qual se resolve um único campo de fração volumétrica compartilhado por ambas as fases. A interface entre o concreto e o ar não é imposta diretamente, mas emerge como consequência desse campo, sendo capturada com modelagem de interface do tipo *Sharp* (nítida) e discretização da fração volumétrica pelo esquema *Compressive*. O concreto foi

definido como fase primária e o ar como fase secundária, ambas tratadas como fases contínuas e imiscíveis — em oposição a uma abordagem de fase dispersa, que exigiria diâmetro de partícula, área de troca interfacial e modelos de arraste próprios. A tensão superficial na interface concreto–ar foi considerada pelo modelo *Continuum Surface Force* (CSF), com coeficiente de 0,0035 N/m e adesão de parede. Essa escolha não foi arbitrária, estando diretamente associada à adequada representação física do processo de extrusão e deposição. A definição do concreto como fase primária permite que o escoamento principal — caracterizado por um fluido de elevada viscosidade e com comportamento não newtoniano — seja tratado como fase contínua dominante, garantindo maior estabilidade numérica e melhor resolução do campo de velocidades e tensões. Por outro lado, o ar, por apresentar baixa densidade e viscosidade, é tratado como fase contínua secundária, cuja principal função é representar o meio circundante durante a deposição. Adicionalmente, a inversão dessa configuração pode levar a inconsistências físicas e numéricas relevantes, como a predição inadequada do deslocamento do ar e a ocorrência de efeitos não físicos, incluindo a ascensão do ar através do concreto e o consequente arraste do material extrudado na região do bico.

Foram definidos, no domínio, os principais contornos de fronteira: *inlet*, correspondente à entrada do fluxo de concreto com o perfil de velocidade previamente desenvolvido (extraído da simulação auxiliar); *wall_deposition, que representa* a superfície de deposição do material; outlet e subdivisões associadas (*outlet_front, outlet_top* e *outlet_right*), responsáveis pela saída do fluido e alívio de pressão na região final do domínio; e *symmetry*, plano de simetria, que reduz o custo computacional mantendo a simetria do escoamento. As informações supracitadas constam na Figura 48.

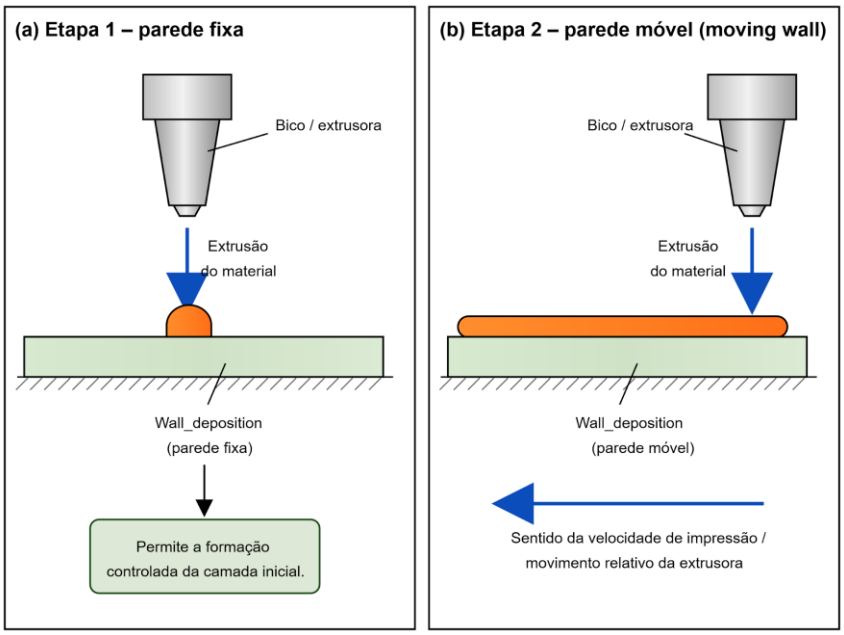
Figura 48 – Representação tridimensional do domínio com identificação das regiões de contorno



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A base de deposição foi configurada inicialmente como uma condição de parede fixa (*stationary wall*), de modo a permitir a formação controlada da camada inicial de material. A simulação transiente foi conduzida por um tempo total de 30 s, sendo que, durante os primeiros 1,5 s, manteve-se a base estática, favorecendo o depósito uniforme do material extrudado e a estabilização do campo de velocidades próximo à região de contato, conforme Figura 49.

Figura 49 – Esquema da condição de contorno *wall_deposition* nas etapas de parede fixa e parede móvel



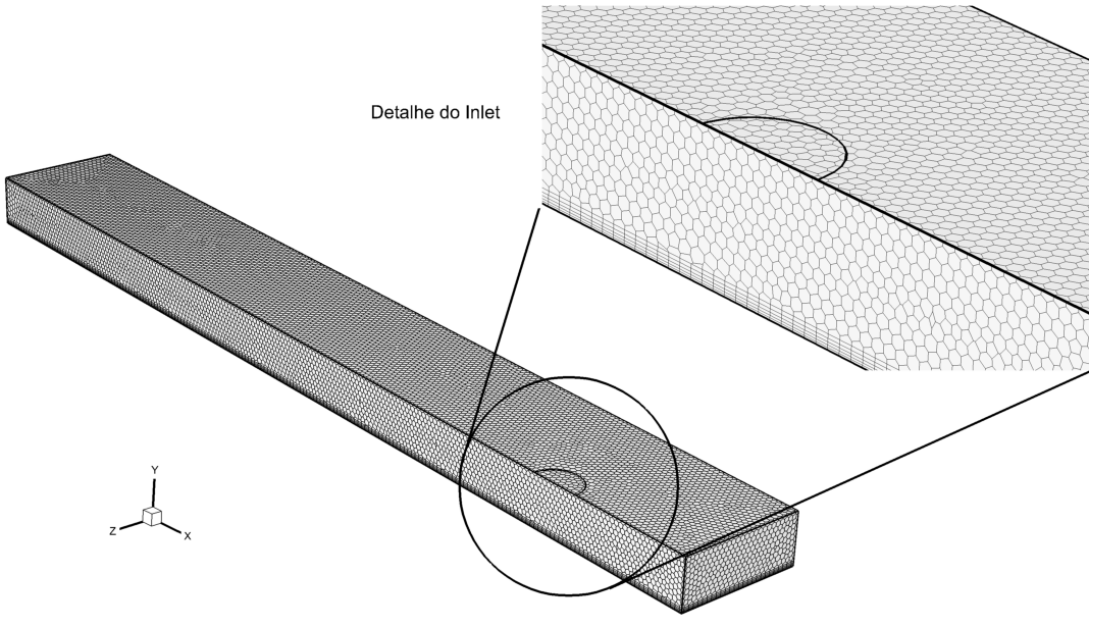
Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Após esse intervalo inicial, a simulação foi interrompida e reconfigurada para a segunda etapa, na qual a base de deposição passou a atuar como parede móvel (*moving wall*), com velocidade no eixo X (sentido negativo), representando o movimento relativo da extrusora em relação à impressão da camada de concreto fresco. Essa estratégia numérica permitiu reproduzir de forma realista o comportamento dinâmico do processo de impressão, assegurando continuidade no escoamento e coerência entre as etapas de deposição e deslocamento.

A Figura 50 apresenta a discretização espacial do domínio, realizada por meio de malhas tridimensionais do tipo Poly-Hexcore, as quais combinam elementos hexaédricos regulares nas regiões centrais do domínio com elementos poliédricos nas zonas próximas às fronteiras. A adoção desse tipo de malha deve-se à sua capacidade de fornecer resultados com acurácia comparável àqueles obtidos com malhas totalmente tetraédricas, porém com um número menor de elementos. Essa característica resulta em redução do custo computacional, tanto em termos de tempo de processamento quanto de uso de memória, sem prejuízo da qualidade da solução numérica.

O tamanho mínimo do elemento adotado foi de 0,5 mm, enquanto o máximo foi de 2 mm. Adicionalmente, foi aplicado refinamento adaptativo de malha (*Adaptive Mesh Refinement – AMR*) nas regiões de interface entre o concreto e o ar e nas zonas de maior gradiente de velocidade, de modo a aprimorar a precisão local da solução.

Figura 50 – Malha tridimensional gerada e detalhe do refinamento local na região de deposição



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Além do refinamento adaptativo (AMR) aplicado durante a solução, não foram definidos refinamentos locais estáticos na etapa de geração da malha, uma vez que a estrutura poli-hexaédrica com núcleo hexadominante já assegura uma distribuição adequada dos elementos em zonas de maior complexidade geométrica. Para a região próxima à parede, foram adicionadas cinco camadas de inflação sobre a superfície de deposição *wall_deposition*, utilizando o método de transição suave e taxa de crescimento geométrica de 1,2. Nesse método, a altura inicial da primeira camada não foi definida diretamente, sendo calculada automaticamente pelo Fluent Meshing em função da malha superficial local e dos parâmetros de transição adotados. Essa abordagem permite melhorar a resolução da região próxima à parede, contribuindo para a captura dos gradientes de velocidade e das interações viscosas associadas ao escoamento de um fluido não newtoniano de elevada viscosidade.

6.3.3.2 Configuração Física da Região de Deposição

As configurações da região de deposição foram definidas com base nas dimensões e proporções reportadas nos estudos de referência considerados nesta pesquisa. Embora mantida a mesma estratégia numérica e de modelagem, as dimensões do domínio computacional diferem entre os estudos, refletindo

particularidades experimentais e operacionais de cada caso.

A Tabela 7 apresenta um resumo das principais dimensões geométricas adotadas para a simulação da região de deposição, incluindo largura da base, distância entre o bico e a superfície de deposição, altura do domínio e comprimento total da região simulada.

Tabela 7 – Parâmetros físicos empregados na simulação da região de deposição

Parâmetro	**Estudo 1**	**Estudo 2**
Casos empregados	5	6
Diâmetro (mm)	20	25
Largura da base de deposição (mm)	50	80
Altura total do domínio (mm)	20	20
Comprimento do domínio (mm)	400	400
Distância bico–base (mm)	20	12,5
Velocidade da parede móvel (*moving wall*) (m/s)	0,01	0,03
Condição de simetria	Aplicada	Aplicada

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

O roteiro sequencial das etapas de configuração da simulação (Fluent with Meshing), incluindo a definição do solver, modelo multifásico, propriedades dos materiais, métodos numéricos e critérios de controle temporal e de convergência, constam no Apêndice B.

6.3.3.3 Procedimento Metodológico de Validação do Modelo Tridimensional

O procedimento de validação possui caráter comparativo e verificativo, estruturado em duas etapas complementares de natureza qualitativa e quantitativa.

A análise qualitativa avaliou o comportamento global do processo de deposição — conformação do filete, evolução da interface concreto–ar e estabilidade da camada depositada —, por meio de comparação visual e descritiva entre os perfis numéricos obtidos e os reportados nos estudos de referência.

A análise quantitativa baseou-se na extração de parâmetros geométricos característicos do filete — especificamente altura e largura da seção transversal —, utilizados como métricas objetivas para comparação com os valores numéricos e experimentais apresentados pelo Estudo 1 (Tao et al., 2024) e pelo Estudo 2 (Comminal et al., 2020).

6.3.4 Migração da Simulação Tridimensional para o Solver ANSYS CFX

Com o propósito de investigar a influência do método numérico na simulação do processo de extrusão e deposição do concreto fresco, optou-se pela implementação do modelo tridimensional também no solver ANSYS CFX, em complemento às simulações previamente conduzidas no ANSYS Fluent.

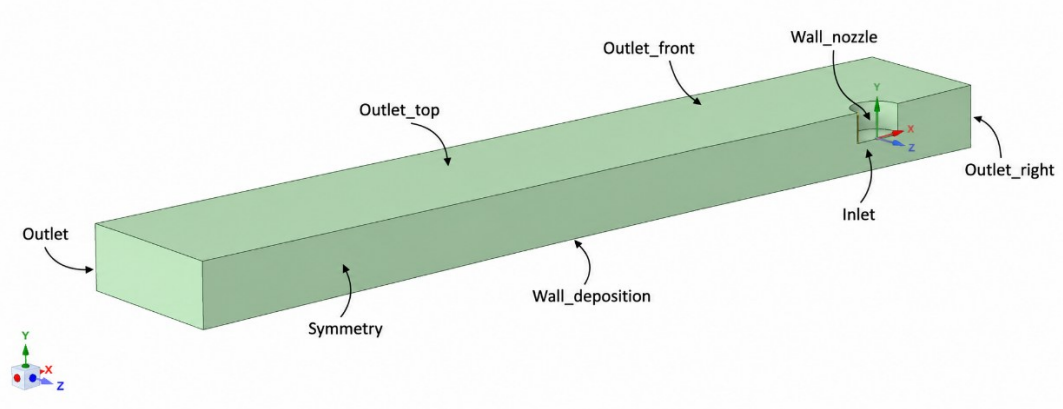
A migração para o solver CFX permitiu avaliar diferenças associadas à formulação numérica, particularmente no que se refere à estratégia de acoplamento pressão–velocidade, ao tratamento transiente do escoamento, à representação da interface fluido–ar e à implementação do comportamento reológico do material durante o processo de deposição. Essa etapa foi concebida como uma verificação cruzada da robustez do modelo matemático adotado, analisando sua consistência quando implementado em diferentes ambientes computacionais baseados no método dos volumes finitos.

Ressalta-se que a troca de solver constitui, por si só, uma nova variável do problema. Além das diferenças intrínsecas de formulação entre os dois códigos (volumes finitos baseados no centro da célula, no Fluent, e baseados em elementos, no CFX), algumas configurações não puderam ser reproduzidas de forma idêntica nos dois ambientes: o acoplamento pressão–velocidade (segregado, pelo algoritmo SIMPLE, no Fluent; acoplado, no CFX), os esquemas de discretização (de primeira ordem no Fluent; *High Resolution* e *Second Order Backward Euler* no CFX), a forma de regularização da viscosidade em baixas taxas de cisalhamento (taxa de cisalhamento crítica, no Fluent; taxa mínima de cisalhamento, no CFX), a forma de prescrição da condição de entrada e a consideração da tensão superficial (incluída no Fluent e avaliada separadamente no CFX, Seção 6.3.4.2). Foram mantidos, por outro lado, a geometria do domínio, os parâmetros reológicos do material e as condições operacionais. Dessa forma, a comparação entre os resultados obtidos no Fluent e no CFX não teve como objetivo modificar a física do problema, mas avaliar a sensibilidade da solução ao conjunto formado pela formulação numérica de cada solver e por essas configurações, e não ao solver isoladamente.

Dado o elevado custo computacional das simulações tridimensionais, analisou-se um único caso representativo, selecionado com base nos parâmetros do Caso 6 de Comminal et al. (2020). Foram mantidos a geometria, os parâmetros reológicos e as condições operacionais, de modo a preservar a comparabilidade entre os dois

ambientes de simulação, ainda que com as diferenças de configuração numérica descritas anteriormente. A representação tridimensional e suas respectivas condições de contorno do caso constam na Figura 51. O passo a passo adotado para a configuração da simulação no CFX está apresentado no Apêndice C, contemplando a escolha do solver, a definição do modelo multifásico, a especificação das propriedades dos materiais, os métodos numéricos empregados, bem como os critérios de controle temporal e de convergência.

Figura 51 – Representação tridimensional do domínio com identificação das regiões de contorno



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

As principais diferenças entre as abordagens numéricas empregadas nos dois solvers são apresentadas no Quadro 4. Essa comparação evidencia que Fluent e CFX foram utilizados para resolver o mesmo problema físico, porém por meio de formulações numéricas e estratégias de solução ligeiramente distintas, as quais podem impactar os resultados obtidos.

Quadro 4 - Comparação entre as formulações numéricas adotadas nos solvers ANSYS Fluent e ANSYS CFX

Aspecto	ANSYS Fluent	ANSYS CFX	Possível impacto na simulação
Método numérico	Método dos volumes finitos com formulação baseada em centro de célula (cell-centered); gradientes avaliados por Green-Gauss ou Mínimos Quadrados (Least-	Método dos volumes finitos baseado em elementos (Element-based Finite Volume Method – EbFVM), com armazenamento nos vértices (cell-vertex) e uso de	A formulação por elementos com funções de forma tende a conferir menor sensibilidade à qualidade da malha no CFX. No Fluent, o uso de malha

Aspecto	ANSYS Fluent	ANSYS CFX	Possível impacto na simulação
	Squares).	funções de forma para a interpolação.	poliédrica aproxima o comportamento ao do CFX, com reflexos na difusão numérica e na representação dos gradientes de pressão e velocidade.
Solver	Oferece múltiplas opções: solver baseado em pressão (pressure-based) e baseado em densidade (density-based), em solução segregada ou acoplada.	Solver acoplado e baseado em pressão, com interpolação de Rhie-Chow e solução por ILU acelerada por Multigrid Algébrico (AMG).	Influencia a robustez, a estabilidade e o custo computacional; a formulação acoplada do CFX tende a ser mais robusta em problemas fortemente acoplados.
Acoplamento pressão–velocidade	Algoritmos SIMPLE, SIMPLEC, PISO ou Coupled, à escolha do usuário.	Tratado de forma inerente pela formulação acoplada, com interpolação de Rhie-Chow.	Diferenças no acoplamento podem afetar a convergência em escoamentos incompressíveis, altamente viscosos ou com fortes gradientes locais.
Solução acoplada ou segregada	Permite abordagem segregada ou acoplada, conforme escolha do usuário.	Predominantemente acoplada e implícita.	A solução acoplada tende a ser mais robusta para problemas fortemente acoplados, porém demanda maior memória computacional.
Tratamento transiente	Esquema temporal de Euler de 2ª ordem (backward Euler), com passo de tempo fixo ou variável.	Esquema temporal equivalente (Euler de 2ª ordem), com passo de tempo fixo ou variável.	Tratamento equivalente nos dois solvers — sem impacto significativo na simulação.
Tratamento multifásico / interface fluido–ar	Modelo VOF com esquemas de reconstrução/compressão da interface: High Resolution, CICSAM, Geo-Reconstruct e Level-Set.	Modelo homogêneo (Free Surface Model), com esquema High Resolution e termo antidifusivo (β = 1): $\varphi f = \varphi up + \beta \nabla \varphi up$	Diferenças no transporte da fração volumétrica podem alterar a definição da superfície livre e a geometria final do filete.
Reologia	Permite modelos não newtonianos (viscosidade dependente da taxa de deformação e tensão limite de escoamento); mais sensível à forma de regularização da viscosidade.	Também representa fluidos não newtonianos com propriedades reológicas equivalentes; comportamento mais indiferente à	A regularização da viscosidade e o tratamento da tensão limite podem afetar a altura, a largura e o espalhamento do filete depositado.

Aspecto	ANSYS Fluent	ANSYS CFX	Possível impacto na simulação
		regularização, resultando em maior robustez.	

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

6.3.4.1 Procedimento de extração geométrica e cálculo da área das seções transversais

As seções transversais foram extraídas a partir dos resultados numéricos e de dados experimentais reportados nos estudos da literatura indicados como referência, sendo representadas por conjuntos discretos de coordenadas bidimensionais (x, y). O procedimento adotado para a obtenção da área pode ser sintetizado em três etapas: reporte dos dados, tratamento dos dados e cálculo da área.

No reporte, as coordenadas foram exportadas do ambiente computacional. Como os pontos provenientes da simulação numérica não eram fornecidos segundo a marcha contínua do contorno externo da seção, foi necessária uma etapa de tratamento, na qual os pontos foram reordenados de modo a reconstruir um polígono fechado, simples e não autointersectante: condição indispensável para a aplicação correta da fórmula de Gauss. Para as seções extraídas do artigo de referência, cujos pontos já se encontravam ordenados segundo a marcha natural do contorno, essa etapa foi dispensada.

Com o contorno adequadamente ordenado, a área da seção transversal foi calculada pela fórmula do Cadarço de Gauss (*Shoelace*), dada por:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right| \qquad (6.5)$$

onde *n* é o número de pontos e $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$.

Esse método permite o cálculo robusto da área de qualquer polígono simples a partir dos vértices ordenados ao longo do contorno. O procedimento foi empregado para comparar quantitativamente a geometria obtida via simulação com a seção numérica reportada no estudo de referência, garantindo a consistência geométrica da análise.

6.3.4.2 Estudos Verificativos de Sensibilidade do Modelo Numérico no CFX

Esta etapa metodológica paralela teve como objetivo investigar, de forma sistemática, quais parâmetros do modelo numérico influenciavam o espalhamento lateral e a espessura do filete extrudado, considerando os resultados prévios obtidos nas simulações.

No âmbito da modelagem reológica, manteve-se o modelo adotado previamente no Caso 7 - Estudo 1, e foram conduzidas duas investigações específicas no CFX:

- Alteração da taxa mínima de cisalhamento: avaliou-se a influência da taxa mínima de cisalhamento (*minimum shear rate*) adotada no modelo, variando-se o valor padrão de 0,001 s^{-1} para 0,01 s^{-1}, com o objetivo de analisar o impacto dessa parametrização na viscosidade aparente em regiões de baixas taxas de deformação. Hipótese investigada: verificar se a redução da viscosidade máxima imposta pelo modelo, decorrente de um limite inferior mais elevado, alteraria de forma significativa a geometria do filete, em especial o espalhamento lateral.
- Inclusão da tensão superficial: a tensão superficial foi considerada no modelo multifásico com VOF por meio da formulação nativa do solver, baseada no modelo de força superficial contínua (*Continuum Surface Force* – CSF), proposto por Brackbill, Kothe e Zemach (1992). Nessa abordagem, os efeitos interfaciais são incorporados de forma implícita nas equações de quantidade de movimento, não sendo necessária qualquer implementação adicional, como funções definidas pelo usuário (UDF). A tensão superficial adotada para a fase líquida foi de 73,5 mN/m (0,0735 N/m). Essa fase líquida corresponde à solução porosa da pasta de cimento, a fração líquida aquosa que preenche os poros da pasta fresca e que forma a interface com a fase gasosa durante a extrusão. O valor foi definido com base nos resultados experimentais de Lan et al. (2024), que mediram a tensão superficial da solução porosa de pasta de cimento sem agente incorporador de ar entre 72,9 e 73,5 mN/m, verificando variação mínima dessa propriedade em toda a faixa de pressão avaliada, da pressão atmosférica padrão (≈ 0,1 MPa) às pressões reduzidas. Como as simulações foram conduzidas em condição de pressão atmosférica padrão, adotou-se o limite superior dessa faixa (73,5 mN/m) como valor representativo da solução

porosa nessa condição, sendo utilizado como parâmetro de entrada no modelo CFD. A hipótese subjacente a essa escolha era a de que a inclusão da tensão superficial no modelo multifásico restringiria a expansão radial: isto é, o espalhamento lateral do filete durante a extrusão, de modo que a forma da seção transversal simulada se aproximasse daquela observada experimentalmente.

6.4 TESTE DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA NO MODELO 3D

Após a definição do solver a ser empregado nas etapas seguintes do protocolo de simulação, em função dos melhores resultados obtidos na etapa de validação do modelo tridimensional, procedeu-se à realização do estudo de independência de malha. Esse procedimento consistiu no refinamento progressivo do domínio computacional, monitorando-se a convergência das variáveis de interesse até que variações adicionais se tornem insignificantes, indicando que a solução numérica não é mais sensível ao tamanho dos elementos. Foram estabelecidas cinco configurações, com tamanhos característicos de elemento iguais a 2,6 mm, 2,0 mm, 1,5 mm, 1,125 mm e 0,86 mm, resultando em grades computacionais compostas por aproximadamente 38 mil, 70 mil, 140 mil, 295 mil e 590 mil nós, respectivamente. Todas as malhas foram geradas mantendo-se invariáveis a geometria do domínio, as propriedades reológicas, as condições operacionais e de contorno do Caso 7 do estudo de Tao et al. (2024), assegurando que o refinamento constituísse o único fator modificador no conjunto de simulações.

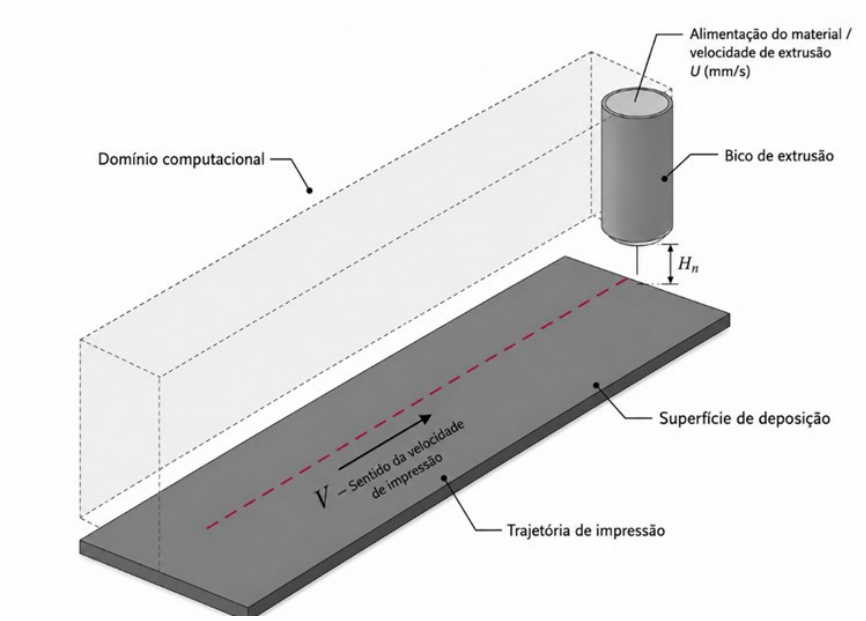
A análise quantitativa do estudo de independência de malha foi baseada inicialmente nos parâmetros geométricos de altura e largura do filete extrudado, obtidos a partir do contorno da seção transversal em diferentes posições de avaliação no pós-processamento. Adicionalmente, foi considerada a área da seção transversal do filete como um terceiro parâmetro de verificação. Essa área foi calculada pela Fórmula do Cadarço (*Shoelace Formula* ou Método de Gauss), a partir das coordenadas ordenadas do contorno da seção transversal.

6.5 ESTUDOS PARAMÉTRICOS

Após a determinação da malha independente e a validação do método numérico com base no estudo de Comminal et al. (2020), a etapa seguinte teve como objetivo investigar, de forma sistemática e controlada, a influência dos principais parâmetros de processo sobre a geometria e a estabilidade do filete extrudado durante a impressão 3D de concreto.

A Figura 52 apresenta uma representação esquemática do domínio computacional adotado no estudo paramétrico, destacando a superfície de deposição, o bico de extrusão, a trajetória de impressão e os principais parâmetros de processo investigados. Nesta etapa, foram avaliadas as influências da velocidade de impressão do bico V, da velocidade de extrusão ou alimentação do material U, e da altura do bico em relação à superfície de deposição H_n. A velocidade de impressão Vdefine o deslocamento do bico ao longo da trajetória prescrita, enquanto a velocidade de extrusão Ucontrola a taxa de alimentação do material no domínio. Já a altura $H_n$determina a distância entre a saída do bico e a mesa de deposição, influenciando o grau de confinamento, espalhamento e acomodação do filete extrudado.

Figura 52 – Representação esquemática do domínio computacional utilizado no estudo paramétrico



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Os estudos foram conduzidos a partir do caso-base (indicado acima) validado e discretizado com a malha independente, variando-se esses parâmetros de forma controlada, de modo a avaliar seus efeitos sobre a geometria final e a estabilidade do filete depositado. Essa abordagem permitiu explorar o espaço paramétrico do processo de impressão, de modo a identificar tendências físicas associadas às variações operacionais, sem a introdução de novas fontes de incerteza relacionadas à modelagem numérica ou às propriedades do material.

6.5.1 Protocolo de simulação dos estudos paramétricos

Foi definido um protocolo de simulação para os estudos paramétricos, contemplando a seleção dos fatores de interesse, suas faixas de variação e a organização dos cenários numéricos avaliados. Essa estrutura permitiu analisar sistematicamente a influência dos parâmetros de processo sobre a geometria e a estabilidade do filete extrudado.

A definição dos fatores e dos respectivos intervalos de variação adotados nos estudos paramétricos foi fundamentada em uma análise da literatura sobre simulação numérica e impressão 3D de concreto. A Tabela 8 apresenta a síntese das faixas de valores reportadas na literatura para os principais parâmetros do processo, bem como os intervalos efetivamente adotados neste estudo. Para simplificar a leitura das tabelas a seguir, os estudos de referência são identificados pelos códigos: E1 – Comminal et al. (2020); E2 – Spangenberg et al. (2021); E3 – Pan et al. (2022); E4 – Tao et al. (2024); E5 – Abbaoui et al. (2024).

Tabela 8 – Faixas de valores extraídos da literatura especializada

Parâmetro	**Faixa na literatura**	**Intervalo adotado neste estudo**
Altura do bico (H_N)	7,5 – 20 mm (E1, E4, E5)	10 – 20 mm
Velocidade de impressão (V)	20 – 50 mm/s (E1, E4, E5)	20 – 40 mm/s
Diâmetro do bico (D)	15 – 25 mm (E4);	25 mm (fixo)
Velocidade de extrusão (U)	26,7 – 46,1 mm/s (E5, explícita); derivada (E1, E4)	28 – 38 mm/s

Nota: E1 – Comminal et al. (2020); E2 – Spangenberg et al. (2021); E3 – Pan et al. (2022); E4 – Tao et al. (2024); E5 – Abbaoui et al. (2024).

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A seleção desses intervalos considerou tanto os limites inferiores e superiores observados nos trabalhos de referência quanto a necessidade de evitar regimes reconhecidamente instáveis ou não representativos do processo de impressão. A altura do bico de extrusão foi definida no intervalo de 10 a 20 mm, conforme Tabela 9. Valores inferiores a esse intervalo, como 7,5 mm, embora reportados na literatura, estão associados a maiores concentrações de tensão e instabilidades geométricas durante a deposição. Por outro lado, alturas superiores a 20 mm tendem a comprometer o controle geométrico do filamento. Assim, os valores adotados neste estudo representam uma faixa segura e amplamente utilizada, conforme indicado por Comminal et al. (2020), Tao et al. (2024) e Abbaoui et al. (2024).

Tabela 9 – Definição dos níveis do fator altura do bico de extrusão

Nível	Valor	Fundamentação
Baixo (−1)	10 mm	Limite inferior seguro (E4)
Médio (0)	15 mm	Valor intermediário / clássico
Alto (+1)	20 mm	Limite superior da literatura (E4)

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A velocidade de impressão foi selecionada no intervalo de 20 a 40 mm/s, Tabela 10. A literatura reporta valores que se estendem até 50 mm/s; contudo, velocidades mais elevadas estão frequentemente associadas à subextrusão e à perda de estabilidade geométrica do filamento. Dessa forma, optou-se por restringir o intervalo superior a 40 mm/s, garantindo a análise de regimes estáveis e representativos do processo, conforme observado nos estudos de Comminal et al. (2020), Spangenberg et al. (2021), Tao et al. (2024) e Abbaoui et al. (2024).

Tabela 10 – Definição dos níveis do fator velocidade de impressão

Nível	Valor	Fundamentação
Baixo (−1)	20 mm/s	Regime estável (E1, E4, E5)
Médio (0)	30 mm/s	Valor de referência (E2, E4)
Alto (+1)	40 mm/s	Regime rápido, ainda estável (E4, E5)

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

O diâmetro interno do bico de extrusão foi mantido constante em 25 mm ao longo de todas as simulações. Esse valor corresponde a uma dimensão frequentemente adotada nos estudos numéricos e reportada na literatura, sendo considerado adequado para representar o processo de deposição analisado. A fixação desse parâmetro permitiu isolar os efeitos da altura do bico, da velocidade de impressão e da velocidade de extrusão/alimentação do material, reduzindo a complexidade do protocolo de simulação.

A velocidade de extrusão foi definida com base em duas abordagens complementares reportadas na literatura. Em alguns estudos, esse parâmetro é explicitamente imposto, assumindo valores entre aproximadamente 26,7 e 46,1 mm/s, conforme reportado por Abbaoui et al. (2024). Em outros trabalhos, como os de Comminal et al. (2020) e Tao et al. (2024), a velocidade de extrusão é tratada como uma variável derivada, calculada de modo a assegurar a conservação de volume entre o material extrudado e o material depositado. No presente estudo, os valores de velocidade de extrusão (Tabela 11) foram selecionados dentro da faixa global reportada na literatura, respeitando simultaneamente a relação entre a velocidade de impressão e a taxa de alimentação do material, bem como razões adimensionais compatíveis com regimes estáveis de impressão.

Tabela 11 – Velocidade de extrusão (U) reportada na literatura de referência

Autores	Como U aparece	Faixa de U (mm/s)
Comminal et al. (2020)	*Derivada (via SR = V/U)	≈ 25 – 45
Spangenberg et al. (2021)	Explícita (caso único)	33,6
Pan et al. (2022)	Não reportada	—
Tao et al. (2024)	Derivada (conservação de volume)	≈ 30 – 35
Abbaoui et al. (2024)	Explícita	26,7 – 46,1

Nota: *U (fluxo volumétrico de extrusão) não é controlado diretamente; é retrocalculado pela conservação de volume $(\pi/4)\cdot D^2 \cdot U = A \cdot V$. Comminal et al. (2020) descrevem o processo pela razão $SR = V/U$, entre a velocidade do bico (V) e o fluxo de extrusão (U).

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Embora a literatura reporte valores de velocidade de extrusão que se estendem até aproximadamente 45–50 mm/s, os níveis adotados neste estudo foram selecionados de forma a representar o intervalo operacional mais recorrente e fisicamente estável do processo. Os valores de 28, 33 e 38 mm/s foram definidos com base na combinação de três critérios:

(i) a necessidade de compatibilidade do protocolo de simulação dos estudos paramétricos do tipo CCP (Planejamento Composto Central), a qual exige que os níveis das variáveis independentes sejam distribuídos de maneira simétrica e equilibrada em torno de um ponto central;

(ii) a preservação de regimes de impressão estáveis e representativos, evitando condições extremas associadas a instabilidades geométricas;

(iii) a manutenção de razões adimensionais V/U compatíveis com aquelas reportadas na literatura.

Dessa forma, os níveis selecionados permitiram explorar adequadamente a influência da velocidade de extrusão sem extrapolar para regimes pouco representativos do processo de impressão 3D de concreto.

6.5.2 Planejamento fatorial e matriz de simulações (CCP)

O planejamento dos estudos paramétricos foi estruturado com base nos princípios do planejamento fatorial, metodologia consagrada para a investigação sistemática da influência simultânea de múltiplos parâmetros de processo (Montgomery, 2017). Considerando três fatores de interesse: altura do bico de extrusão, velocidade de deslocamento do bico durante a impressão e velocidade de alimentação do material (Tabela 12). Sendo que cada um foi definido em três níveis, o conjunto completo de combinações corresponderia a um planejamento fatorial do tipo 3^3, totalizando 27 cenários possíveis de simulação.

Tabela 12 – Fatores e níveis adotados no estudo paramétrico

Fator	**Parâmetro**	**Símbolo**	**Nível −1 Baixo**	**Nível 0 Médio**	**Nível +1 Alto**
A	Altura do bico de extrusão	HN	10 mm	15 mm	20 mm
B	Velocidade de impressão / deslocamento do bico	V	20 mm/s	30 mm/s	40 mm/s
C	Velocidade de alimentação / extrusão	U	28 mm/s	33 mm/s	38 mm/s

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Entretanto, a execução integral desse planejamento mostrou-se inviável no contexto do presente estudo, em função do elevado custo computacional associado a

cada simulação numérica, cujo tempo médio de processamento situou-se entre 18 e 20 horas por caso. Diante dessa limitação, adotou-se uma estratégia de redução do protocolo numérico fundamentada na Metodologia de Superfície de Resposta (*Response Surface Methodology* – RSM), proposta por Box e Wilson (1951). Optou-se por um Delineamento Composto Central face-centrado (*Face-Centered Central Composite Design* – CCF, com α = 1), resultando em 15 casos (Tabela 13). Esse delineamento combina uma porção fatorial completa 2^3 (8 pontos de canto), 6 pontos axiais (dois por fator) e 1 ponto central. Adotou-se a configuração face-centrada — com os pontos axiais posicionados no centro das faces do domínio (α = 1) — de modo a manter cada fator em apenas três níveis (−1, 0, +1), compatíveis com os limites físicos do processo, dispensando os cinco níveis exigidos por um delineamento rotacional.

Tabela 13 – Matriz de simulações do planejamento fatorial reduzido (CCP – 15 casos) com ordem randomizada de execução

Caso	HN (mm)	V (mm/s)	U (mm/s)	Tipo de ponto
C1	10	20	28	Canto
C2	10	20	38	Canto
C3	10	40	28	Canto
C4	10	40	38	Canto
C5	20	20	28	Canto
C6	20	20	38	Canto
C7	20	40	28	Canto
C8	20	40	38	Canto
C9	15	20	33	Axial
C10	15	40	33	Axial
C11	10	30	33	Axial
C12	20	30	33	Axial
C13	15	30	28	Axial
C14	15	30	38	Axial
C15	15	30	33	Ponto central

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Os casos foram organizados de forma a incluir pontos de canto, responsáveis por delimitar os extremos do domínio experimental, pontos axiais, que permitem avaliar a influência individual de cada fator, e um ponto central, utilizado para a identificação de possíveis efeitos de curvatura nas respostas. Essa configuração assegurou a avaliação dos efeitos principais e das interações de primeira ordem entre os fatores considerados. Diferentemente dos experimentos físicos, nos quais a aleatorização da ordem de execução é recomendada para mitigar a influência de

fatores de ruído de natureza temporal (MONTGOMERY, 2017), as simulações numéricas conduzidas neste estudo são deterministas e reprodutíveis, de modo que a ordem de processamento dos casos não afeta os resultados.

6.5.3 Pós-processamento dos resultados do Protocolo numérico

Após a execução das simulações, os resultados foram organizados em base de dados estruturada em planilha eletrônica (*Excel*), na qual foram consolidadas as variáveis de entrada e os parâmetros geométricos do filete. Para cada caso, registraram-se as variáveis operacionais (H_N, V, U) e calcularam-se parâmetros adimensionais relevantes, destacando-se a razão V/U como indicador do regime de alimentação. As respostas geométricas foram obtidas a partir da análise de seções transversais do filete: largura (W), altura (H) e área da seção transversal (A), calculada pelo método do Cadarço de Gauss. Os dados foram então processados por rotinas computacionais em Python para geração de gráficos bidimensionais e tridimensionais, superfícies de resposta e ábacos operacionais.

6.5.3.1 Critérios de classificação do Regime de alimentação e da Estabilidade geométrica

O regime de alimentação foi caracterizado por meio da razão adimensional entre a velocidade de deslocamento do bico de impressão (V) e a velocidade de extrusão do material (U), definida por:

$$R_{VU} = \frac{V}{U} \qquad (6.6)$$

Essa razão expressa o equilíbrio dinâmico entre a taxa de deposição e o fornecimento de material ao sistema. Valores elevados de V/U indicam que o avanço do bico supera a taxa de fornecimento de material, caracterizando um regime de subalimentação; inversamente, valores reduzidos de V/U sinalizam excesso de material em relação ao avanço do bico, configurando um regime de superalimentação. Estabeleceram-se os seguintes intervalos operacionais:

- Superalimentado: $R_{VU} < 0{,}9$
- Balanceado: $0{,}9 \leq R_{VU} \leq 1{,}1$
- Subalimentado: $R_{VU} > 1{,}1$

A adoção dessa margem de tolerância justifica-se metodologicamente pela necessidade de reduzir a sensibilidade do processo classificatório a pequenas flutuações numéricas e às variações inerentes às condições operacionais simuladas. Com isso, minimiza-se o risco de classificações excessivamente sensíveis a diferenças marginais entre os casos analisados, assegurando maior robustez, coerência e estabilidade ao esquema de classificação adotado.

A estabilidade geométrica do filete extrudado foi avaliada com base em dois indicadores complementares: a perda de altura relativa e o espalhamento lateral. A perda de altura foi definida como:

$$P_H(\%) = \left(\frac{H_N - H_i}{H_N}\right) \times 100 \qquad (6.7)$$

em que H_i corresponde à altura final do filete após a deposição e H_N à altura nominal do bico em relação à superfície de deposição. Esse parâmetro quantifica o grau de colapso vertical do material, capturando tanto reduções quanto aumentos de altura, ambos indicativos de comportamento geométrico indesejável. O espalhamento lateral foi definido por:

$$E_L(\%) = \left(\frac{W_i - D}{D}\right) \times 100 \qquad (6.8)$$

em que W_i representa a largura final do filete e D o diâmetro interno do bico de extrusão. Esse indicador expressa o grau de deformação lateral do material após a deposição. Com base nesses dois parâmetros, foi estabelecido um critério composto para a classificação da estabilidade geométrica, conforme os seguintes limites:

- Estável: |PH| ≤ 10 % e |EL| ≤ 50 %
- Moderadamente instável: 10 % < |PH| ≤ 25 % ou 50 % < |EL| ≤ 100 %
- Instável: |PH| > 25 % ou |EL| > 100 %

A adoção desses intervalos e limites fundamentou-se em três critérios complementares e interdependentes. O primeiro referiu-se à consistência com a literatura de processos de extrusão em manufatura aditiva, que aponta a condição V/U ≈ 1 como referência de equilíbrio operacional. O segundo diz respeito à adoção de uma faixa de tolerância de ±10% em torno dessa condição, visando conferir robustez

frente a variações de natureza numérica e operacional. Para a definição do terceiro critério, adotou-se uma abordagem baseada na interpretação física dos indicadores geométricos do filete impresso, tomando como referência os resultados de Tao et al. (2024) e Comminal et al. (2020). Em ambos os estudos, a seção transversal impressa é analisada como resposta direta à combinação entre vazão de extrusão, velocidade de deslocamento do bico e capacidade do material de manter sua forma após a deposição. Com base nessa interpretação, os intervalos percentuais propostos foram associados a regimes distintos de estabilidade geométrica: deformações reduzidas foram classificadas como condição estável, deformações intermediárias como condição de transição e deformações elevadas como condição crítica ou indicativa de falha. Dessa forma, os limites adotados não representam valores normativos, mas critérios interpretativos fundamentados no comportamento físico observado na literatura.

Com base nos resultados experimentais e numéricos apresentados por Comminal et al. (2020), a estabilidade geométrica das camadas impressas pode ser avaliada a partir da variação da altura da camada e do espalhamento lateral do material. Os autores analisaram os perfis impressos por meio da altura da camada (H), da largura (L) da área da seção transversal, demonstrando que esses parâmetros variam em função da altura do bico H_N e da razão entre a velocidade de impressão e a velocidade de extrusão (V/U). No referido estudo, a condição operacional usual foi associada a $H_N = D/2$ e V/U próximo de 1, sendo os casos 6 e 7 aqueles correspondentes às condições típicas de impressão e com melhor concordância entre os resultados experimentais e numéricos.

A partir dessa referência, adotou-se neste trabalho um critério composto de classificação da estabilidade geométrica, baseado em dois indicadores: a perda/desvio percentual de altura (P_H)e o espalhamento lateral (E_L). O limite de $P_H \leq 10\%$ foi associado à condição estável por representar pequenas variações em relação à altura de referência, compatíveis com a faixa de melhor concordância observada por Comminal et al. (2020). Valores intermediários, entre 10% e 25%, foram classificados como moderadamente instáveis, por indicarem deformação geométrica relevante, porém ainda sem caracterizar perda acentuada de forma. Já valores superiores a 25% foram considerados instáveis, pois se aproximam das situações em que o artigo observou alterações significativas do perfil, especialmente para alturas de bico

inferiores a $D/2$, nas quais o material sofre maior pressão, espalhamento lateral e aumento da altura da camada.

De forma complementar, o espalhamento lateral (E_L)foi utilizado para representar o aumento da largura da camada em relação à condição de referência. Essa escolha é fundamentada no fato de Comminal et al. (2020) mostrarem que a largura W_Lé diretamente afetada pela razão V/Ue pela altura do bico, sendo observados perfis mais largos e achatados quando há excesso de material depositado por unidade de comprimento. Assim, adotou-se $E_L \leq 50\%$como faixa estável, $50\% < E_L \leq 100\%$como moderadamente instável e $E_L > 100\%$como instável, considerando que aumentos expressivos de largura indicam perda de controle geométrico e maior tendência à deformação da camada.

Já a partir dos perfis de altura e largura apresentados por Tao et al. (2024), é possível também propor uma classificação geométrica baseada na perda percentual de altura e largura da camada. A perda de altura pode ser calculada em relação à altura nominal do bico, enquanto a perda de largura pode ser calculada em relação ao caso de menor razão SR = V/U. Como os resultados mostram que a altura varia pouco e a largura diminui significativamente com o aumento de SR, a largura deve ser considerada o indicador mais sensível de perda de estabilidade geométrica. Assim, perdas de largura superiores a 35% podem ser classificadas como críticas, enquanto perdas superiores a 50% indicam falha geométrica relevante ou condição ruim de impressão.

Na combinação dos dois indicadores, adotou-se, nos regimes superalimentado e balanceado, a classe mais desfavorável entre PH e EL. No regime subalimentado (V/U > 1,1), o desvio de altura (PH) não foi empregado como indicador de instabilidade, uma vez que, nesse regime, reflete sobretudo o estiramento do filete decorrente do menor volume de material depositado por unidade de comprimento, e não colapso ou espalhamento do material; nesse caso, a estabilidade foi avaliada pelo espalhamento lateral (EL), com os mesmos limites adotados para os demais regimes. Ressalta-se que esses limiares possuem caráter metodológico e foram definidos de forma sistemática na ausência de valores universalmente consolidados na literatura para esses parâmetros específicos. Nesse sentido, os critérios devem ser revistos à medida que estudos futuros estabeleçam consensos mais robustos sobre os limiares de estabilidade em processos de extrusão para manufatura aditiva.

6.6 DETERMINAÇÃO DA FRONTEIRA DE ESTABILIDADE

Com o objetivo de identificar, de forma quantitativa e reprodutível, as condições operacionais associadas à estabilidade da deposição, foi proposta a construção de uma fronteira crítica de estabilidade a partir dos resultados do estudo paramétrico. Essa abordagem buscou estabelecer a relação entre a estabilidade do processo e os principais parâmetros operacionais, fornecendo um critério contínuo e matematicamente fundamentado para a classificação das condições de impressão.

Os casos simulados foram inicialmente classificados em três categorias — estável, moderadamente instável e instável —, conforme os critérios geométricos definidos na seção anterior. Para fins de modelagem estatística, essa classificação foi convertida em uma variável binária, na qual os casos estáveis receberam o valor 1 e os demais (moderadamente instáveis e instáveis) o valor 0. Essa transformação permite tratar o problema como uma classificação binária, viabilizando o emprego de modelos probabilísticos para a estimativa contínua da probabilidade de estabilidade.

A partir dessa base de dados, foi ajustado um modelo de regressão logística binária múltipla, considerando como variáveis independentes a altura do bico (HN) e a razão entre a velocidade de deslocamento do bico e a velocidade de extrusão (V/U). O modelo logístico adotado é expresso por:

$$\hat{p}(estável) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1(V/U)+\beta_2 H_N)}} \qquad (6.9)$$

em que $\hat{p}(estável)$ representa a probabilidade estimada de ocorrência de um regime estável, e β_0, β_1 e β_2 são os coeficientes do modelo. O ajuste foi realizado em ambiente Python (Apêndice D) por meio da classe *LogisticRegression* da biblioteca *scikit-learn*, com regularização L2 padrão (parâmetro C = 1,0). Ressalta-se que essa formulação corresponde à regressão logística regularizada e não à estimação por máxima verossimilhança pura, sendo C = 1,0 o valor padrão da implementação utilizada. As variáveis de entrada foram organizadas em uma matriz de projeto e a variável resposta representada por um vetor binário.

Uma vez ajustado, o modelo possibilita a estimativa da probabilidade de estabilidade para qualquer combinação dos parâmetros V/U e HN. Para a construção da fronteira de estabilidade, foi gerada uma malha bidimensional no espaço

paramétrico, abrangendo os intervalos investigados. Para cada ponto dessa malha, a probabilidade de estabilidade foi calculada por meio da função *predict_proba(),* resultando em um campo contínuo de probabilidades que descreve o comportamento do processo ao longo de todo o domínio operacional. A fronteira crítica de estabilidade foi então definida como o conjunto de pontos para os quais a probabilidade estimada é igual a 0,5:

$$\hat{p} = 0{,}5 \implies \beta_0 + \beta_1 \cdot (V/U) + \beta_2 \cdot HN = 0$$

Essa condição delimita, no espaço dos parâmetros operacionais, uma reta de separação — resultado necessário de um modelo logístico com dois preditores lineares, sem termos de interação ou polinomiais. Essa linha é interpretada como o limiar de transição entre regimes de deposição. Para fins de visualização, a fronteira foi obtida numericamente por traçado de curvas de nível sobre o campo de probabilidade, utilizando a função *contour* da biblioteca matplotlib com nível correspondente a 0,5. Com o objetivo de capturar a natureza contínua do fenômeno e reconhecer a existência de uma zona de transição entre regimes, foram adicionalmente representadas curvas de nível associadas a probabilidades de 0,3 e 0,7.

O desempenho preditivo do modelo foi avaliado por três métricas complementares: acurácia de classificação, matriz de confusão e validação cruzada leave-one-out (LOO-CV). A acurácia mede a proporção de casos corretamente classificados; a matriz de confusão decompõe os erros em falsos positivos (casos instáveis preditos como estáveis) e falsos negativos (casos estáveis preditos como instáveis), métricas com significados físicos distintos no contexto do processo; e a LOO-CV fornece uma estimativa não enviesada da capacidade de generalização do modelo para dados não observados, especialmente relevante dado o tamanho reduzido do conjunto de treinamento (n = 15). Adicionalmente, a incerteza associada aos coeficientes e, consequentemente, à posição da fronteira foi quantificada por bootstrap não paramétrico (EFRON; TIBSHIRANI, 1993). Foram geradas 5.000 reamostras do conjunto original por amostragem com reposição dos casos, descartando-se reamostras que contivessem uma única classe. A cada reamostra, o mesmo modelo logístico regularizado (L2, C = 1,0) foi reajustado, registrando-se o intercepto ($-\beta_0/\beta_1$) e a inclinação ($-\beta_2/\beta_1$) da reta de fronteira. Os intervalos de confiança de 95% foram definidos pelos percentis 2,5% e 97,5% das distribuições

bootstrap resultantes (método dos percentis).

6.6.1 Índice de Qualidade

Com o objetivo de quantificar de forma integrada o desempenho geométrico da deposição, foi definido um índice de qualidade baseado em parâmetros extraídos diretamente das simulações numéricas. A formulação parte do reconhecimento de que a qualidade do filete extrudado não pode ser adequadamente caracterizada por um único indicador geométrico isolado, como demonstrado pelos critérios de estabilidade definidos na seção anterior, sendo necessária uma métrica escalar capaz de combinar, de forma ponderada, os principais modos de degradação geométrica observados no processo de deposição.

O índice é calculado a partir das respostas geométricas do filete e posteriormente representado no espaço dos parâmetros operacionais $\frac{V}{U}$ e HN. A formulação do índice considera três mecanismos físicos fundamentais associados à formação da camada depositada: a conservação volumétrica do material extrudado, a deformação lateral do filete e a estabilidade vertical após a deposição. Esses efeitos são representados, respectivamente, pela área normalizada ($area_{norm}$), pelo espalhamento lateral (E_L) e pela perda de altura relativa (P_H), permitindo descrever conjuntamente as principais distorções geométricas do filete.

6.6.2 Formulação matemática do índice

O índice foi inicialmente definido como uma medida agregada de erro geométrico, dada por:

$$IQ = w_1 \cdot | \, area_norm - 1 \, | + w_2 \cdot \frac{|E_L|}{E_{ref}} + w_3 \cdot \frac{|P_H|}{H_{ref}} \qquad (6.10)$$

em que:

- $area_{norm}$representa a razão entre a área final da seção transversal e a área de referência, tomada como a área da seção do bico (πD²/4), sendo o valor unitário associado a uma seção com área igual à do bico, condição correspondente à alimentação equilibrada (V/U = 1) com conservação de volume;
- $E_L$corresponde ao espalhamento lateral do filete;
- P_H representa a perda de altura após a deposição;

- E_{ref}e H_{ref} são valores de referência adotados para normalização, definidos como os valores máximos observados no conjunto de dados;
- w_1, w_2e w_3 são os pesos atribuídos a cada termo.

O uso do valor absoluto nos três termos assegura que tanto desvios positivos quanto negativos em relação à condição geométrica desejada contribuam para a penalização do índice, refletindo a degradação da qualidade independentemente do sentido da variação. Essa escolha é fisicamente justificada: no processo de deposição, tanto o excesso quanto a insuficiência de altura resultam em geometrias inadequadas para a construção de camadas sucessivas.

A definição dos pesos $w_1 = 0{,}4$, $w_2 = 0{,}3$ e $w_3 = 0{,}3$ foi baseada na relevância física dos mecanismos envolvidos na qualidade da deposição. O termo de conservação volumétrica recebeu peso maior por sua relação direta com o balanço entre fornecimento e deposição de material, já que desequilíbrios nesse termo afetam simultaneamente a largura, a altura e a continuidade do filete, configurando o modo de degradação de maior impacto sobre a geometria global. Os termos de espalhamento lateral e de perda de altura receberam pesos iguais, por representarem modos distintos e complementares de deformação: o primeiro está associado à perda de definição dimensional horizontal e à tendência ao escoamento lateral; o segundo, à capacidade do material de sustentar sua própria geometria verticalmente após a extrusão. Essa distribuição de pesos permite capturar de forma equilibrada os principais efeitos de instabilidade geométrica, evitando a predominância de um único parâmetro na métrica composta e conferindo ao índice sensibilidade adequada a variações em qualquer dos três modos físicos considerados. Ressalta-se que os valores adotados possuem caráter metodológico e podem ser revistos em estudos futuros conforme o aprofundamento do entendimento do processo.

A robustez da ponderação adotada foi verificada por meio de uma análise de sensibilidade. O índice normalizado (IQ_n) dos quinze casos foi recalculado sob cinco configurações de pesos, variando da atribuição equitativa (1/3 para cada termo) a configurações com maior ou menor ênfase no termo de conservação volumétrica. Para cada configuração, os casos foram ordenados de forma decrescente de IQ_n, e a estabilidade desse ordenamento em relação à configuração adotada foi quantificada por dois coeficientes de correlação de postos (CONOVER, 1999). O coeficiente de

Spearman (ρ) corresponde ao coeficiente de correlação de Pearson aplicado aos postos (posições) dos casos, medindo o grau de associação monotônica entre os dois ordenamentos (SPEARMAN, 1904). O coeficiente de Kendall (τ) baseia-se na diferença entre o número de pares de casos concordantes e discordantes quanto à ordem, normalizada pelo total de pares, adotando-se a variante corrigida para empates (τ-b) em razão da ocorrência de casos com IQ_n idêntico (KENDALL, 1938). Ambos os coeficientes variam entre −1 e +1, sendo que valores próximos de +1 indicam ordenamentos praticamente idênticos e, portanto, baixa sensibilidade do índice à escolha dos pesos. Registrou-se, ainda, o deslocamento máximo de posição observado no ranking entre a configuração adotada e cada alternativa. Os cálculos foram realizados em ambiente Python (APÊNDICE E), por meio das funções spearmanr e kendalltau da biblioteca SciPy. Ressalta-se que o índice de qualidade atua como métrica descritiva de ordenamento, não intervindo na classificação de estabilidade nem no ajuste da fronteira crítica, os quais se fundamentam exclusivamente nos critérios geométricos da Seção 6.5.3.1.

Com o objetivo de facilitar a interpretação e tornar os resultados diretamente comparáveis, o índice de erro foi transformado em uma forma normalizada:

$$IQ_n = 1 - IQ \qquad (6.11)$$

Nessa formulação, valores de IQn próximos de 1 indicam condições de deposição geometricamente mais adequadas, enquanto valores próximos de zero estão associados a maior degradação da camada. Essa convenção torna o índice intuitivo e compatível com sua utilização como ferramenta de comparação entre casos e de orientação para a seleção de parâmetros operacionais.

6.6.3 Aplicação do índice aos casos numéricos

O índice de qualidade foi aplicado aos quinze casos do estudo paramétrico (APÊNDICE E), conjunto de dados que fundamentou sua própria formulação. Para cada caso simulado, foram extraídos os valores de $area_{norm}$, E_L e P_H, a partir dos quais foi calculado o índice IQ conforme a formulação proposta. A normalização foi realizada pelos valores máximos de espalhamento e de perda de altura observados nesse mesmo conjunto, estabelecendo os parâmetros de referência para o conjunto de dados numéricos próprios. Quando o índice for aplicado a conjuntos de dados mais

amplos, esses parâmetros deverão ser recalibrados para os máximos do conjunto avaliado, de modo a preservar a proporcionalidade da escala e evitar que respostas geométricas fora da faixa original produzam valores normalizados inconsistentes.

Os pesos atribuídos a cada componente, maior peso ao termo de conservação volumétrica, pesos iguais aos termos de espalhamento lateral e de perda de altura foram estabelecidos com base em critérios físicos de relevância relativa, anteriormente à realização dos cálculos, e não foram ajustados a posteriori para adequar o índice às classificações qualitativas preexistentes. Ainda assim, cabe ressaltar que o índice foi formulado com conhecimento dos resultados numéricos e do comportamento qualitativo dos casos, de modo que a concordância entre os valores de *IQ* e a classificação observada é uma consequência esperada da formulação e não uma evidência de validade externa. O objetivo desta etapa é, portanto, de natureza descritiva: caracterizar a distribuição dos valores do índice no espaço dos parâmetros operacionais (*V/U*, *HN*) e identificar as regiões associadas a maior ou menor desempenho geométrico da deposição.

Os valores calculados foram associados aos respectivos pares (*V/U*, *HN*) e representados em um mapa de dispersão com escala de cor contínua, no qual a intensidade cromática corresponde ao valor de *IQ*. Essa representação permite identificar visualmente as tendências do índice em função de ambos os parâmetros operacionais simultaneamente, constituindo a base de referência para a comparação com dados externos na etapa seguinte.

6.6.4 Validação com dados da literatura

Para avaliar a capacidade de generalização do índice proposto, ele foi aplicado a um conjunto independente de dados numéricos provenientes de Comminal et al. (2020), compreendendo os casos identificados como C16 a C27, que correspondem a condições operacionais diretamente comparáveis às investigadas no presente estudo. Por não terem sido utilizados em nenhuma etapa da formulação do índice — nem na definição dos pesos nem na determinação dos parâmetros de normalização, esses dados constituem o único conjunto verdadeiramente independente disponível para a verificação da validade externa do índice.

O índice foi aplicado com a mesma formulação e os mesmos pesos definidos a partir dos dados numéricos próprios, sem qualquer alteração na estrutura da métrica.

Os parâmetros de normalização, contudo, foram recalibrados para os valores máximos do conjunto ampliado, procedimento necessário dado que os casos adicionais apresentam respostas geométricas que superam os máximos observados nos quinze casos originais, o que tornaria a escala de referência anterior inadequada para o conjunto expandido. Essa distinção é metodologicamente relevante: o que permanece invariante entre os dois conjuntos é a formulação do índice, a escolha das variáveis, a estrutura do erro composto e a ponderação dos termos, enquanto os parâmetros de normalização constituem ajuste de escala dependente do domínio de dados avaliado. O que a validação verifica, portanto, é a preservação das tendências e da coerência ordinal do índice quando aplicado a dados independentes, e não a invariância dos valores absolutos de *IQn*.

A avaliação foi conduzida com base em três critérios complementares. O primeiro é a coerência com a classificação qualitativa, que verifica se valores elevados de *IQ* correspondem às condições identificadas como estáveis nos dados externos, e valores reduzidos às condições instáveis. O segundo critério é a preservação das tendências em função dos parâmetros operacionais, que examina se a relação entre o índice e a razão *V/U* e a altura do bico H_N observada nos dados numéricos próprios se mantém quando o índice é aplicado aos dados externos. O terceiro critério é a capacidade de extrapolação, que avalia o comportamento do índice em condições paramétricas fora do domínio original das simulações em particular, nas alturas de bico não investigadas no estudo paramétrico próprio, verificando se as tendências físicas identificadas se preservam além dos limites do conjunto que fundamentou a formulação.

A satisfação conjunta desses três critérios, com a formulação e os pesos mantidos invariantes e apenas os parâmetros de normalização recalibrados para a escala do conjunto ampliado, constitui a evidência de que a formulação proposta não se restringe ao conjunto de dados que a originou, sendo capaz de capturar o comportamento geométrico da deposição em condições operacionais distintas.

6.7 METAMODELAGEM DO PROCESSO DE EXTRUSÃO

A adoção de metamodelos nesta pesquisa é motivada pela restrição computacional inerente ao processo de simulação. Cada simulação CFD

tridimensional demandou entre 18 e 20 horas de processamento em hardware de médio porte; para o conjunto de 15 casos analisados, o custo computacional acumulado situou-se aproximadamente entre 270 e 300 horas de processamento. Nesse contexto, os metamodelos foram empregados como modelos substitutos capazes de reduzir a necessidade de novas simulações CFD, preservando a capacidade de análise paramétrica do processo.

Dois metamodelos foram ajustados, comparados e validados: a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM), representada por um modelo polinomial de segunda ordem estimado por mínimos quadrados ordinários; e a Krigagem com kernel Matérn 5/2 (Regressão por Processo Gaussiano – GPR), um interpolador probabilístico não paramétrico que fornece, além de predições pontuais, intervalos de predição para cada estimativa. Em termos práticos, esses intervalos indicam a região dentro da qual o modelo admite que o valor real da resposta, largura ou altura do cordão, provavelmente se encontra, dada a incerteza de interpolação local.

A adoção conjunta dos dois modelos foi intencional e complementar: a RSM contribui com interpretabilidade e com uma equação explícita que sintetiza o comportamento global da superfície de resposta; o GPR oferece maior precisão preditiva local e quantificação formal da incerteza. Juntas, as duas abordagens, uma determinística e paramétrica, outra probabilística e flexível, permitem uma avaliação mais robusta da qualidade dos metamodelos e de sua adequação para representar o processo estudado.

A validação seguiu um protocolo em três etapas de rigor crescente: (i) ajuste e avaliação dos modelos sobre os 15 casos paramétricos próprios (C1–C15); (ii) reajuste com banco de dados expandido para 27 casos, incorporando os 12 casos de Comminal et al. (2020) (C16–C27), para investigar o efeito da heterogeneidade dos dados sobre a capacidade preditiva; e (iii) validação externa por simulação CFD independente em dois pontos operacionais inéditos, não pertencentes ao conjunto de treinamento.

6.7.1 Dados Numéricos e Variáveis do Modelo

Os dados utilizados provêm das simulações numéricas do processo de extrusão de concreto (ver Tabela 14). Como variáveis independentes, foram

consideradas a *altura do bico extrusor* (H_n) e a *relação entre a velocidade de impressão e a velocidade de extrusão* (r_1). Essas variáveis foram selecionadas por exercerem influência direta sobre o regime de deposição do material e sobre a geometria final do cordão extrudado.

Tabela 14 – Resultados numéricos obtidos nos testes paramétricos

Caso	H_n (mm)	r_1 (V/U)	w (mm)	h (mm)	Região no domínio
C1	10	0,714	62,94	11,60	Interior do domínio
C2	10	0,526	71,66	14,10	Interior do domínio
C3	10	1,429	36,96	9,80	Interior do domínio
C4	10	1,053	48,76	10,10	Interior do domínio
C5	20	0,714	39,60	19,70	Interior do domínio
C6	20	0,526	53,08	20,20	Interior do domínio
C7	20	1,429	24,24	16,64	Interior do domínio
C8	20	1,053	28,74	18,53	Interior do domínio
C9	15	0,606	58,22	15,40	Interior do domínio
C10	15	1,212	30,90	14,32	Interior do domínio
C11	10	0,909	54,36	10,31	Interior do domínio
C12	20	0,909	31,66	19,09	Interior do domínio
C13	15	1,071	34,30	14,60	Interior do domínio
C14	15	0,789	46,00	14,90	Interior do domínio
C15	15	0,909	40,26	14,80	Interior do domínio

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A altura do bico (H_n) controla a distância entre a saída do material e a superfície de deposição, determinando o grau de confinamento, espalhamento e deformação do cordão. A relação r_1 representa o balanço entre a taxa de deslocamento do bico e a taxa de fornecimento de material, sendo o parâmetro fundamental para caracterizar condições de subextrusão, deposição adequada ou sobreextrusão.

As variáveis resposta são a largura (w) e a altura (h) da seção transversal do cordão depositado. A análise conjunta dessas duas grandezas permite uma avaliação mais completa do processo, pois contempla simultaneamente a dimensão horizontal e a dimensão vertical do cordão: enquanto a largura reflete o espalhamento lateral do material e está diretamente associada à precisão dimensional das camadas, a altura determina o espaçamento entre camadas sucessivas e condiciona a estabilidade

estrutural da peça impressa.

6.7.2 Construção e Ajuste do Modelo GPR (Krigagem)

6.7.2.1 Pré-processamento

Antes do ajuste, as variáveis de entrada foram padronizadas para média nula e variância unitária. Esse procedimento é necessário porque o kernel Matérn é sensível à escala absoluta das entradas: sem padronização, a diferença de magnitude entre H_{n} (em mm) e r_1 (adimensional) distorceria os comprimentos de escala estimados pelo modelo, comprometendo sua calibração.

6.7.2.2 Definição do Kernel

O modelo GPR foi construído com um kernel Matérn de parâmetro v = 5/2, escolhido por representar um compromisso adequado entre suavidade e flexibilidade: funções amostradas com esse kernel são duas vezes diferenciáveis, o que é compatível com o comportamento esperado das superfícies de resposta do processo de extrusão. Ao kernel base foi somado um termo *WhiteKernel*, que atua como regularizador numérico, controlando o condicionamento da matriz de covariância. Como os dados provêm de simulações CFD determinísticas — e não de experimentos físicos com ruído aleatório —, esse termo não modela variabilidade estocástica real, mas estabiliza a inversão matricial durante a otimização dos hiperparâmetros.

6.7.2.3 Estimação dos Hiperparâmetros e Predição

Os hiperparâmetros do modelo: comprimentos de escala e amplitude do kernel, foram estimados pela maximização da log-verossimilhança marginal, com múltiplas reinicializações para evitar máximos locais. Para cada ponto de interesse, o GPR fornece uma distribuição preditiva caracterizada por uma média $\hat{y}$ e um desvio padrão σ. A média constitui a estimativa pontual da resposta; o desvio padrão quantifica a incerteza local de interpolação, permitindo a construção do intervalo de predição a 95%: $[\hat{y} - 1{,}96\sigma,\ \hat{y} + 1{,}96\sigma]$. Modelos GPR independentes foram ajustados para largura e altura.

6.7.3 Validação Cruzada e Métricas de Desempenho

A capacidade de generalização dos modelos foi avaliada pela técnica Leave-One-Out Cross-Validation (LOOCV), na qual cada observação é removida do conjunto de treinamento e usada como dado de teste. Essa abordagem é especialmente indicada quando o número de observações é reduzido, pois maximiza o aproveitamento dos dados disponíveis em cada rodada de avaliação.

O desempenho foi quantificado pelo conjunto de métricas descrito a seguir, aplicado tanto à largura quanto à altura do cordão:

- Coeficiente de determinação (R^2): mede a proporção da variância explicada pelo modelo;
- Raiz do erro quadrático médio (RMSE): penaliza erros maiores, sendo sensível a outliers;
- Erro absoluto médio (MAE): medida robusta do erro médio de predição;
- Erro percentual médio absoluto (MAPE): expressa o erro em termos relativos, facilitando a comparação entre as duas variáveis resposta — que possuem escalas diferentes;
- Coeficiente de predição (Q^2): análogo ao R^2, calculado sobre as predições LOOCV; diferenças expressivas entre R^2 e Q^2 são diagnósticos de sobreajuste;
- Critérios AIC e BIC (apenas para a RSM): penalizam a complexidade do modelo paramétrico, auxiliando na comparação entre especificações alternativas. Para o GPR, esses critérios não são calculados, uma vez que o modelo não possui número fixo de parâmetros no sentido paramétrico clássico.

O diagnóstico de sobreajuste foi conduzido pela comparação entre o desempenho de treino e o de validação cruzada, por meio de $\Delta R^2 = R^2_{treino} - R^2_{LOOCV}$ e $\Delta RMSE = RMSE_{LOOCV} - RMSE_{treino}$ (em mm). O risco foi classificado como Baixo quando $\Delta R^2 < 0{,}05$ e $\Delta RMSE < 1{,}5$ mm; Moderado quando $\Delta R^2 < 0{,}15$ e $\Delta RMSE < 4$ mm; e Alto nos demais casos. Esse critério operacional, implementado no Algoritmo 9 (Apêndice F), é o empregado nas Tabelas 38 e 44. Adicionalmente, foi realizada uma análise local em pontos específicos do espaço de projeto, comparando as

predições da RSM e do GPR em termos de discrepância absoluta e relativa. Situações de divergência significativa entre os dois modelos — especialmente quando a discrepância supera 2σ do GPR — foram interpretadas como indicativas de possíveis regiões de comportamento não linear acentuado ou de sub-representação amostral.

6.7.4 Análise Comparativa e Diagnóstico Local

Além da avaliação global por LOOCV, foi conduzida uma análise local no ponto de operação H_N = 16,0 mm e r_1 = 0,950 (V/U): ponto situado no interior do domínio experimental, não pertencente ao conjunto de treinamento e escolhido por ocupar uma região intermediária entre os níveis amostrais de H_n, onde divergências entre os dois metamodelos têm maior probabilidade de se manifestar.

Nesse ponto, as predições da RSM e do GPR foram comparadas para largura e altura do cordão, por meio das seguintes medidas de discrepância:

- Discrepância absoluta: diferença em módulo entre os valores preditos pelos dois modelos, em mm;
- Discrepância relativa (%): razão entre a discrepância absoluta e a predição do GPR, expressa em porcentagem;
- Razão discrepância/σ: quociente entre a discrepância absoluta e o desvio padrão preditivo local σ do GPR, indicando se a diferença entre os dois modelos é estatisticamente relevante à luz da incerteza do interpolador probabilístico.

A classificação da concordância entre os metamodelos combina, de forma conjunta, dois indicadores de discrepância entre as predições dos dois metamodelos. Sejam $\hat{y}_{RSM}$ e $\hat{y}_{GPR}$ as predições da RSM e do GPR em um mesmo ponto e defina-se a divergência local por:

$$diff = \hat{y}_{RSM} - \hat{y}_{GPR} \qquad (6.12)$$

em que σ é o desvio-padrão preditivo do GPR no mesmo ponto e $faixa_y$ é a amplitude da variável resposta no conjunto de dados, dada por:

$$faixa_y = y_{max} - y_{min} \quad (6.13)$$

Os dois indicadores, ambos definidos com o valor absoluto da divergência, são: a razão em unidades de incerteza preditiva do GPR,

$$r_\sigma = \frac{|diff|}{\sigma} \quad (6.14)$$

e a fração da faixa, que expressa a discrepância como proporção da amplitude total da variável resposta:

$$frac_{faixa} = \frac{|diff|}{faixa_y} \quad (6.15)$$

As categorias, avaliadas em ordem (atribui-se a primeira condição satisfeita), são:

(i) excelente concordância: rσ < 1 e frac_faixa < 0,03;
(ii) boa concordância: rσ < 2 e frac_faixa < 0,07;
(iii) concordância moderada: rσ < 3 ou frac_faixa < 0,12;
(iv) conflito relevante entre os modelos: rσ ≥ 3 e frac_faixa ≥ 0,12.

Note-se que a condição da categoria (iii), rσ < 3 ou frac_faixa < 0,12, é exatamente a negação da condição (iv), rσ ≥ 3 e frac_faixa ≥ 0,12. Dessa forma, as quatro categorias são mutuamente exclusivas e exaustivas, e o operador "ou" no nível (iii) impede que discrepâncias pequenas em relação à escala da variável sejam classificadas como conflito.

6.7.5 Implementação Computacional

Os modelos foram implementados em Python, utilizando as bibliotecas *scikit-learn* (ajuste do GPR e LOOCV), *numpy/scipy* (álgebra linear e estimação OLS) e *pandas* (manipulação dos dados). O fluxo computacional, representado esquematicamente no pseudocódigo (Apêndice F), compreende as seguintes etapas em sequência:

- leitura e estruturação dos dados numéricos;
- construção da matriz de delineamento para o modelo RSM;

- ajuste da RSM por regressão OLS e análise do ponto crítico (Hessiana);
- padronização das variáveis de entrada;
- ajuste do GPR com kernel Matérn 5/2 + WhiteKernel por maximização da log-verossimilhança;
- aplicação da LOOCV e cálculo das métricas de desempenho para largura e altura;
- geração das superfícies de resposta e análise local comparativa RSM vs. GPR.

6.7.6 Incorporação de Casos Adicionais da Literatura

Com o objetivo de ampliar a cobertura do espaço de projeto e reduzir a incerteza preditiva dos metamodelos, o banco de dados original composto pelos 15 casos próprios (C1–C15) foi enriquecido com 12 casos adicionais (C16–C27) extraídos do estudo numérico de Comminal et al. (2020), resultando em um conjunto consolidado de 27 observações (ver Tabela 15). Cabe destacar que os casos de Comminal et al. (2020) foram obtidos por simulação numérica validada contra dados experimentais pelos próprios autores, o que lhes confere grau de confiabilidade compatível com as simulações próprias e fundamenta sua incorporação com peso unitário no ajuste dos metamodelos.

Tabela 15 – Casos adicionais extraídos de Comminal et al. (2020)

Caso	H_n (mm)	r_1 (V/U)	w (mm)	h (mm)	Região no domínio
C16	7,5	0,551	79,04	13,04	Extensão inferior de H_n
C17	7,5	0,785	65,29	11,17	Extensão inferior de H_n
C18	7,5	1,140	45,75	10,63	Extensão inferior de H_n
C19	7,5	1,235	45,95	9,57	Extensão inferior de H_n
C20	12,5	0,649	63,24	14,15	Interior do domínio
C21	12,5	0,893	50,51	13,62	Interior do domínio
C22	12,5	1,266	32,05	13,75	Interior do domínio
C23	12,5	1,497	27,69	13,78	Interior do domínio
C24	17,5	0,595	46,90	19,82	Interior do domínio
C25	17,5	1,124	28,09	18,73	Interior do domínio
C26	17,5	0,868	33,72	19,11	Interior do domínio
C27	17,5	1,355	23,83	17,33	Interior do domínio

Fonte: Adaptado de Comminal et al. (2020)

Essa expansão amplia o domínio experimental em duas direções

complementares. Primeiro, a inclusão de H_n = 7,5 mm estende o espaço de projeto para alturas de bico abaixo do mínimo do conjunto próprio (H_n = 10 mm), cobrindo uma região de maior confinamento geométrico associada a cordões de maior largura e menor altura. Segundo, os pontos com H_n = 12,5 mm e H_n = 17,5 mm aumentam a densidade amostral no interior do domínio original, favorecendo a caracterização de não linearidades e reduzindo o risco de sub-representação de regiões intermediárias. O domínio consolidado passa a compreender $H_n \in [7,5; 20,0]$ mm e $r_1 \in [0,526; 1,497]$ V/U.

Não foi aplicada qualquer transformação estatística, filtragem ou ponderação diferenciada aos casos importados. Eventuais diferenças de comportamento entre os dois subconjuntos são investigadas a posteriori por meio do diagnóstico de resíduos e da decomposição das métricas LOOCV, conforme apresentado na Seção 7.6.

6.7.7 Validação dos Metamodelos por Simulação Numérica Independente

Para avaliar a capacidade preditiva dos metamodelos em condições externas ao treinamento e caracterizar os pontos resultantes sob o ponto de vista da qualidade geométrica e da estabilidade do processo, foram definidos dois pontos de validação VP1 (H_n = 17,5 mm; V/U = 1,01) e VP2 (H_n = 12,5 mm; V/U = 1,11) situados no interior do domínio experimental, mas sem correspondência com nenhuma das 27 observações utilizadas no ajuste dos modelos (Tabela 16). Essa escolha circunscreve a análise à capacidade interpolativa dos metamodelos, sem exigir premissas sobre comportamento extrapolativo.

Tabela 16 – Pontos de validação externa independente

Ponto	H_n (mm)	r_1 (V/U)
VP1	17,5	1,01
VP2	12,5	1,11

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Para cada ponto, uma simulação CFD foi executada no ANSYS CFX sob as mesmas condições de contorno, modelo reológico e configuração de malha do conjunto original. Essa simulação cumpriu dupla função: forneceu os valores de referência de largura e altura para a validação dos metamodelos e gerou as grandezas geométricas necessárias à aplicação das ferramentas classificatórias desenvolvidas

na tese. A identidade metodológica entre as simulações de treinamento e de validação garante que as diferenças observadas reflitam exclusivamente a qualidade de representação dos metamodelos.

6.7.7.1 Validação dos Metamodelos

A comparação entre valores simulados e preditos foi conduzida por meio de quatro métricas, aplicadas independentemente a cada variável geométrica e a cada metamodelo: erro absoluto (EA, em mm); erro relativo percentual (ER%); razão $|e|/\hat{\sigma}$, exclusiva do Kriging, que expressa o erro como múltiplo do desvio padrão preditivo local; e verificação do intervalo de credibilidade a 95% (IC 95%), também exclusiva do Kriging, que avalia se o valor CFD pertence ao intervalo $[\hat{y} - 1{,}96\hat{\sigma} ; \hat{y} + 1{,}96\hat{\sigma}]$. Os resultados são apresentados nas Tabelas 47 e 48, reunindo predições e métricas de erro de ambos os metamodelos para largura e altura.

6.7.7.2 Classificação pelo Índice de Qualidade Normalizado (IQn)

A partir das grandezas geométricas obtidas pela simulação CFD, área normalizada (area_norm), espalhamento lateral (EL) e perda de altura (PH), calculou-se o IQn para VP1 e VP2 segundo a formulação desenvolvida na Seção 6.6.2, com pesos w_1 = 0,40, w_2 = 0,30 e w_3 = 0,30 e valores de referência E_ref = 216,16% e H_ref = 73,867%. Os pontos foram enquadrados nas faixas de classificação estabelecidas para o conjunto de 27 casos, permitindo posicioná-los na escala de qualidade geométrica do processo.

6.7.7.3 Localização na fronteira crítica de estabilidade

Os pontos VP1 e VP2 foram posicionados no espaço de parâmetros (H_n, V/U) da fronteira de estabilidade obtida pela regressão logística binária (Modelo 2, 27 casos), cuja equação é dada por:

$$P(\text{estável}) = 1 / [1 + \exp(-(-5{,}8514 + 1{,}9019 \cdot V/U + 0{,}2542 \cdot H_n))]$$

Para cada ponto, calculou-se a probabilidade estimada $\hat{p}$ e a razão crítica

(V/U)crit correspondente ao seu H_n. Como o modelo logístico é binário, a classificação foi feita em relação ao limiar de 0,50: pontos com $\hat{p} \geq 0{,}50$ foram classificados como estáveis e pontos com $\hat{p} < 0{,}50$, como não estáveis. Adicionalmente, a faixa $0{,}30 \leq \hat{p} \leq 0{,}70$, delimitada pelas curvas de probabilidade de 0,3 e 0,7, foi interpretada como zona de transição, indicando pontos próximos à fronteira, cuja classificação é menos segura; valores de $\hat{p}$ abaixo de 0,30 ou acima de 0,70 indicam, respectivamente, instabilidade ou estabilidade com maior confiança. A posição dos pontos foi representada graficamente na figura da fronteira de estabilidade, possibilitando análise conjunta com os 27 casos de treinamento.

Descrita a metodologia empregada nesta pesquisa, parte-se, na sequência, para a etapa de apresentação e discussão dos resultados.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

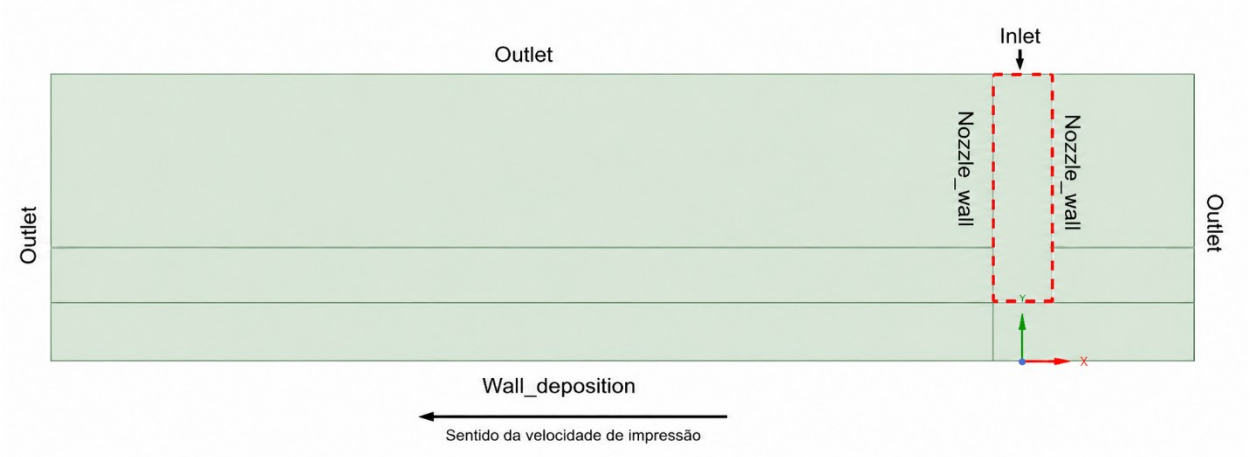
Neste capítulo, são expostos os resultados e as análises derivadas das simulações computacionais que foram conduzidas na pesquisa.

7.1 PARÂMETROS DA VERIFICAÇÃO E CALIBRAÇÃO (MODELO 2D)

Esta etapa teve por finalidade verificar e calibrar o modelo numérico bidimensional descrito na metodologia, assegurando que as configurações geométricas, condições de contorno e refinamento de malha reproduzissem adequadamente o Caso 5 do estudo de Tao et al. (2024) e apresentassem estabilidade numérica suficiente para o prosseguimento aos estudos tridimensionais. O processo se iniciou com a utilização de software ANSYS *SpaceClaim*, para a modelagem geométrica do domínio de extrusão, a escolha por uma modelagem 2D permitiu maior controle da malha e resolução local refinada, mantendo representatividade física adequada.

A geometria consiste em uma região superior que representa o bico extrusor e uma região inferior correspondente ao espaço de deposição sobre a base, conforme a Figura 53.

Figura 53 – Condições de contorno em 2D



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A nomenclatura adotada para as regiões de contorno do domínio geométrico no *Fluent*, seguem descritas no Quadro 5 e suas respectivas posições seguem ilustradas na Figura 53.

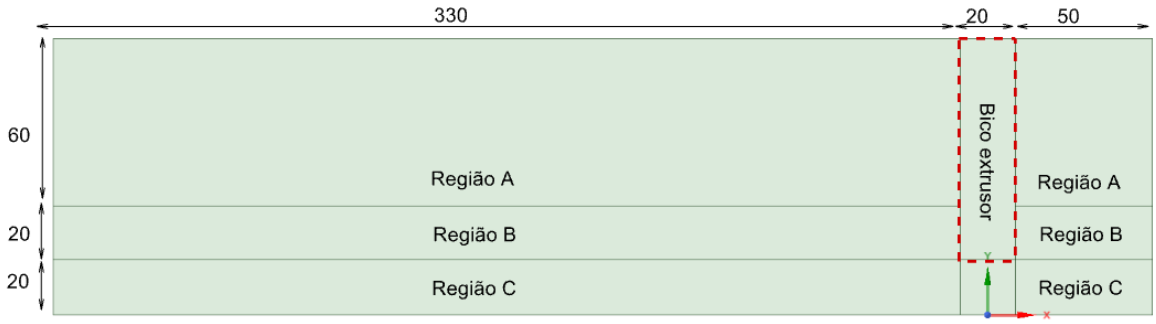
Quadro 5 – Nomeação das condições de contorno no Fluent

Região Física	Nome	Justificativa
Entrada superior do bico	*Inlet_nozzle*	Região onde o concreto é inserido no bico. Aplica-se a condição de velocidade.
Paredes internas do bico	*Wall_nozzle*	Superfícies que delimitam lateralmente o bico. Aplicação de condição *no-slip*.
Base de deposição	*Wall_deposition*	Superfície inferior móvel onde o material é depositado.
Faces laterais e superior	*Outlet*	Saída natural do escoamento, definida como *pressure outlet*, permitindo o escoamento livre para o exterior do domínio.
Região do domínio ocupada pelo fluido	*Fluid*	Volume principal onde ocorre o escoamento. Permite a aplicação do modelo matemático (reologia, multifásico).

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A Figura 54 ilustra a geometria empregada na simulação, incluindo as principais dimensões e regiões de aplicação dos refinos de malha. O bico de extrusão possui 20 mm de diâmetro e 80 mm de altura. A distância entre a saída do bico e a base de deposição é de aproximadamente 20 mm. Foi adotada uma superfície de deposição com 400 mm para capturar o efeito do escoamento do material nesta região.

Figura 54 – Modelo geométrico em 2D com definição das principais dimensões



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A partir dessa geometria, foram desenvolvidas cinco configurações de malha com refinamentos progressivos, nomeadas de A a E (da mais grosseira à mais refinada, respectivamente), permitindo a execução de um teste de independência de malha. Cada configuração difere pelos tamanhos de elemento adotados nas regiões de maior interesse do escoamento: região superior (A), correspondente à superfície livre; região intermediária (B), na porção central do domínio; e região inferior (C), próxima à base

de deposição (Figura 54). As dimensões características estão resumidas na Tabela 17, a qual permite uma visualização comparativa dos diferentes níveis de discretização aplicados ao domínio de extrusão.

Tabela 17 – Detalhamento das malhas e tamanhos de elementos nas regiões de interesse

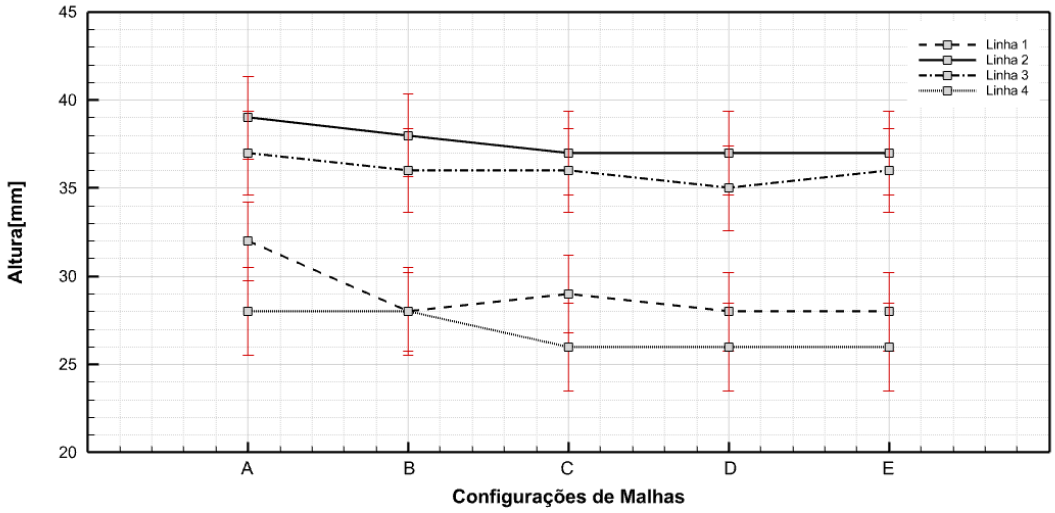
Malha	Regiões Refino			Nº de elementos	Nº de nós
	A (mm)	B (mm)	C (mm)		
Mesh A	12,0	3,0	1,50	10720	11029
Mesh B	8,0	2,0	1,00	22400	22857
Mesh C	6,0	1,5	0,75	37914	38520
Mesh D	4,0	1,0	0,50	81600	82503
Mesh E	3,2	0,8	0,40	126000	127127

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

7.1.1 Teste de independência de malha

Foi monitorada a altura do filamento extrudado em quatro seções transversais ao longo do comprimento de deposição (Figura 46), denominadas linha 1, linha 2, linha 3 e linha 4 (distribuídas uniformemente ao longo do filamento). Os resultados dessas medidas de altura para cada configuração de malha (A até E) estão apresentados na Figura 55.

Figura 55 - Altura do filamento (em mm) nas quatro seções transversais avaliadas (linha 1, 2, 3 e 4) em função da configuração de malha (refinamento: A→E)



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Conforme ilustrado na Figura 55, à medida que se refina a malha observa-se uma tendência de convergência nos valores de altura do filamento, embora haja pequenas oscilações em malhas intermediárias. Por exemplo, na linha 1 a altura estimada com a malha A (mais grosseira) é a maior dentre as configurações, reduzindo sensivelmente na malha B; já na malha C ocorre um leve aumento novamente, seguido de estabilização nas malhas D e E – indicando que as diferenças além da malha C tornam-se desprezíveis. Comportamento semelhante é verificado na linha 2, em que a malha B apresentou altura ligeiramente inferior à da malha A, e a partir da malha C os valores praticamente não se alteram (as alturas em C, D e E são muito próximas entre si). Na linha 3, os resultados mantiveram-se quase constantes de A até C, com uma pequena queda na malha D e subsequente retorno ao valor original na malha E; novamente evidenciando que as flutuações entre malhas finas são pequenas. Já na linha 4, nota-se uma oscilação um pouco mais pronunciada: as malhas A e B previram a mesma altura, enquanto a partir da malha C a altura reduziu-se e permaneceu constante em C, D e E. Apesar dessas oscilações pontuais nas linhas 1 e 4, o padrão geral é de que os valores de altura do filamento tendem a se estabilizar a partir de certo refino.

Para quantificar a estabilidade dos resultados com o refinamento, calculou-se a altura média do filamento considerando as quatro linhas medidas em cada malha, bem como o desvio padrão entre as linhas (indicativo da variabilidade da altura ao longo do filamento). Com esses dados, obteve-se também o coeficiente de variação (CV) – definido como o desvio padrão dividido pela média, expresso em porcentagem – e a diferença percentual da altura média em relação à malha anterior. Os valores compilados encontram-se na Tabela 18.

Tabela 18 – Alturas do filamento (linha 1, 2, 3 e 4) por configuração de malha

Linha	**Alturas das malhas (mm)**				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Linha 1	32,00	28,00	29,00	28,00	28,00
Linha 2	39,00	38,00	37,00	37,00	37,00
Linha 3	37,00	36,00	36,00	35,00	36,00
Linha 4	28,00	28,00	26,00	26,00	26,00
Média das malhas	34,00	32,50	32,00	31,50	31,75
Desvio padrão	4,97	5,26	5,35	5,32	5,56
CV (%)	14,61	16,18	16,73	16,90	17,51
Diferença % p/ anterior	-	-4,62	-1,56	-1,59	+0,79

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

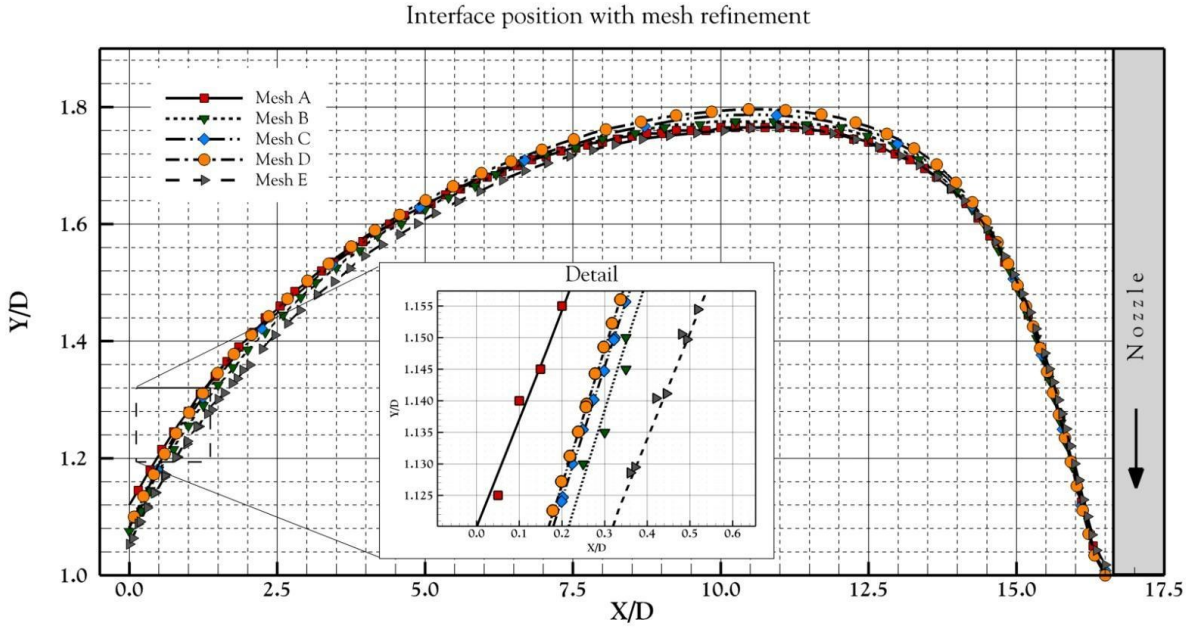
Analisando a Tabela 18, verifica-se que a altura média do filamento permaneceu praticamente constante desde as malhas mais grosseiras até as mais refinadas – evidenciando já uma independência de malha nos valores médios globais. De fato, a diferença percentual da média entre as malhas A e B foi de 4,6%, sugerindo que mesmo um primeiro refinamento não foi suficiente para equilibrar a média das alturas nas seções avaliadas. À medida que o refino prosseguiu, as variações na altura média continuaram muito pequenas: da malha B para a C houve uma redução de apenas ~1,6%, e de C para D uma redução também de ~1,6%, aproximadamente. Notavelmente, a malha E (a mais refinada) apresentou uma altura média ligeiramente *maior* que a D (cerca de +0,8%), mas essa diferença é inferior a 1%. A partir da malha B todos esses incrementos/decréscimos estão abaixo de 2%, faixa comumente considerada um critério conservador de convergência numérica em estudos de independência de malha. Isso indica que o modelo alcançou resultados praticamente estáveis a partir da malha C, com alterações insignificantes ao refinar ainda mais para D e E.

O coeficiente de variação (CV) manteve-se em torno de 15–17% para todas as malhas, refletindo que a *dispersão* das alturas entre as diferentes linhas do filamento permaneceu da mesma ordem de magnitude independentemente do refino. Observa-se um leve aumento no CV nas malhas mais finas (passando de ~14,6% em A para ~17,5% em E), possivelmente devido a uma captura mais detalhada das variações locais de altura ao longo do filamento conforme a malha se torna mais precisa. Ainda assim, essa variação de CV é modesta, indicando que o padrão de distribuição de alturas ao longo do filamento não foi alterado drasticamente pelo refinamento. Em outras palavras, o perfil do filamento extrudado conserva a mesma forma básica a partir de certo nível de refino, variando apenas em detalhes menores.

Justificativa da Malha Independente: Com base nos resultados quantitativos (Figura 55 e Tabela 18), conclui-se que a malha C pode ser adotada como malha independente. Primeiro, a partir da malha C os resultados demonstraram-se estáveis, apresentando variações muito baixas em relação a malhas mais refinadas (as diferenças de altura média de C para D e de D para E foram da ordem de 1–2%, e as curvas de altura ao longo do filamento tornaram-se praticamente coincidentes). Já a malha C mostrou-se consistente com as malhas mais finas nos valores obtidos: por exemplo, as alturas do filamento previstas na malha C estão em excelente

concordância com as da malha D e E em todas as linhas consideradas, dentro da margem de oscilação numérica observada. Além disso, os valores de CV na malha C já se encontram próximos das malhas mais refinadas, indicando que a variabilidade intrínseca do escoamento foi adequadamente capturada. Por fim, há um forte argumento de economia computacional: malhas mais refinadas (D e especialmente E) aumentam substancialmente o número de elementos e o tempo de simulação, enquanto a malha C oferece um balanceamento ótimo entre precisão e custo. Em resumo, a malha C proporciona resultados confiáveis e praticamente independentes da malha em comparação às malhas mais refinadas, ao mesmo tempo em que reduz o esforço computacional, justificando sua escolha como configuração base para as análises posteriores. O perfil adimensional foi construído a partir da normalização da altura do filamento em relação ao diâmetro do bico de extrusão, permitindo expressar tanto a altura (Y/D) quanto o comprimento depositado (X/D) em termos relativos, conforme Figura 56.

Figura 56 – Perfil adimensional do filamento extrudado (altura Y/D versus comprimento X/D) para as diferentes malhas testadas



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Observa-se que as curvas de perfil praticamente se sobrepõem nas malhas mais refinadas, indicando a tendência de convergência a valores que independem do refino de malha. Pequenas discrepâncias ocorrem na extremidade final do filamento (região de X/D mais elevada), onde a malha mais grosseira apresenta leve diferença de altura.

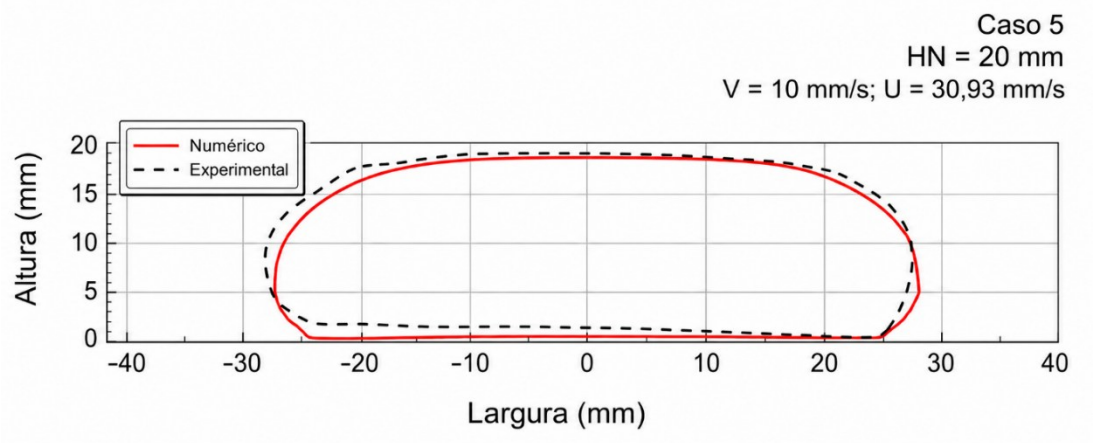
7.1.2 Comparação com os Dados de Referência e Verificação Qualitativa do Modelo 2D

A etapa de verificação do setup numérico teve como objetivo verificar se o modelo numérico bidimensional desenvolvido é capaz de reproduzir, com grau de concordância aceitável, o comportamento físico descrito por Tao et al. (2024) para o Caso 5. A métrica adotada para a comparação quantitativa foi a altura máxima do filamento extrudado, por se tratar da grandeza geométrica mais diretamente extraível tanto do modelo 2D quanto da representação do perfil transversal (Figura 57) reportado pelos autores.

7.1.2.1 Extração do valor de referência

A partir da figura do Caso 5 de Tao et al. (2024) reproduzida como Figura 57, observa-se que a altura máxima do filamento simulado em 3D pelos autores é de aproximadamente 20 mm, correspondendo à dimensão vertical do perfil elíptico depositado, com largura total de aproximadamente 56 mm (de −28 mm a +28 mm em relação ao eixo central). Essa geometria representa o corte transversal do filamento no plano de simetria da deposição.

Figura 57 – Perfil geométrico do filamento do caso 5



Fonte: Adaptado de Tao et al. (2024)

7.1.2.2 Valor obtido no modelo 2D

Adotando a malha C como configuração independente, conforme demonstrado na Seção 7.1.1, o valor de altura máxima do filamento foi extraído da Linha 2, posicionada a 130 mm do eixo do bico, correspondente à região de escoamento desenvolvido e de maior estabilidade ao longo do comprimento depositado. Conforme indicado na Tabela 18, a altura obtida nessa posição para a malha C foi de 37 mm.

O erro relativo em relação ao valor de referência é dado por:

$$e(\%) = \frac{|h_{2D} - h_{ref}|}{h_{ref}} \times 100 = \frac{|37-20|}{20} \times 100 = 85\% \qquad (7.1)$$

7.1.2.2.1 Discussão e justificativa da discrepância

A diferença observada entre o modelo 2D e a referência 3D possui explicação física direta. No modelo tridimensional de Tao et al. (2024), o material extrudado possui liberdade de escoamento nos três planos espaciais: ao ser depositado, o concreto fresco se espalha lateralmente, distribuindo volume nas direções perpendiculares ao avanço do bico. Esse espalhamento lateral limita o crescimento vertical do filamento, resultando em uma altura final menor.

No modelo bidimensional adotado neste trabalho, essa dimensão lateral é suprimida pela própria natureza da formulação planar: o material não possui graus de liberdade na direção fora do plano, de modo que todo o volume extrudado se acomoda exclusivamente na direção vertical. O resultado direto é uma superestimação sistemática da altura do filamento em relação ao caso tridimensional equivalente. Esse comportamento é consistente com o observado na Figura 56**,** onde as curvas de todas as malhas atingem valores máximos de Y/D entre 1,75 e 1,80, correspondendo a alturas absolutas de 35–36 mm para D = 20 mm, da mesma ordem do valor de 37 mm obtido na Linha 2.

Adicionalmente, contribuem para a discrepância:

- A tensão superficial adotada (σ = 0,0035 N/m) é um parâmetro de ajuste sem valor consolidado na literatura para materiais cimentícios, introduzindo incerteza na captura da interface;

- A formulação 2D não representa a curvatura tridimensional da interface concreto-ar, o que altera o equilíbrio de pressões capilares na região de deposição.

7.1.2.3 Validação qualitativa do perfil

Apesar da discrepância quantitativa na altura absoluta, esperada e fisicamente justificada, a comparação qualitativa entre o perfil adimensional obtido (Figura 56) e o perfil reportado por Tao et al. (2024) (Figura 57) revela concordância nos aspectos morfológicos fundamentais do filamento:

- Ambos os perfis apresentam altura aproximadamente uniforme na região central do filamento depositado, com leve redução nas extremidades;
- A transição entre a região sob o bico e o filamento depositado ocorre de forma gradual e contínua em ambas as representações;
- O perfil 2D obtido apresenta a assimetria esperada: a extremidade próxima ao bico (X/D elevado) apresenta ligeira queda de altura, enquanto a extremidade oposta (X/D baixo) exibe o acúmulo inicial de material, comportamento coerente com o regime superalimentado (V/U = 0,32) descrito para o Caso 5.

7.1.2.4 Conclusão da etapa de verificação

O modelo bidimensional desenvolvido demonstrou ser consistente com o comportamento físico descrito na literatura, reproduzindo qualitativamente o perfil do filamento extrudado e os padrões de deposição característicos do regime superalimentado. A superestimação da altura absoluta, da ordem de 85% em relação ao valor 3D de referência, é consequência direta e prevista da simplificação dimensional adotada, que impede o espalhamento lateral do material. Esse comportamento não compromete a validade do setup numérico para os fins a que se destina: estabelecer uma configuração físico-numérica verificada, com parâmetros reológicos, condições de contorno e critérios de convergência consistentes com a referência, sobre a qual os estudos subsequentes serão conduzidos em ambiente tridimensional. Por essa razão, a etapa bidimensional é tratada nesta tese como verificação e calibração do setup, e não como validação quantitativa do modelo, a qual é realizada na etapa tridimensional.

7.2 VERIFICAÇÃO DO PROTOCOLO NUMÉRICO NO MODELO 3D E SELEÇÃO DO AMBIENTE DE SIMULAÇÃO

Concluída a etapa de calibração do modelo numérico em ambiente bidimensional, na qual foi estabelecido o protocolo de simulação — compreendendo a formulação reológica, as condições de contorno, os esquemas de discretização e os critérios de convergência —, a investigação foi estendida ao domínio tridimensional. O objetivo desta etapa não é a validação formal do modelo, no sentido de aferir sua precisão quantitativa frente a dados experimentais controlados, mas sim verificar se o protocolo numérico construído no 2D é capaz de reproduzir, em ambiente tridimensional, o fenômeno físico da extrusão e deposição do concreto fresco — em particular, a formação de um filete com geometria e estabilidade coerentes com o comportamento observado na literatura.

Essa distinção é metodologicamente relevante. A pergunta central desta etapa é: *o protocolo numérico, transportado para o domínio 3D, reproduz o fenômeno físico?* Trata-se de uma pergunta de viabilidade, não de precisão. Em consequência, a malha utilizada nesta etapa foi selecionada de forma deliberada como uma configuração intermediária, compatível com os recursos computacionais disponíveis e com as restrições de tempo de simulação. Simulações de múltiplos dias ou semanas, neste estágio exploratório, não seriam razoáveis para simplesmente constatar se o fenômeno seria ou não reproduzido. A otimização da resolução espacial é objeto da etapa subsequente: o teste de independência de malha; e pressupõe que o ambiente de simulação já esteja consolidado, o que é exatamente o que se busca estabelecer aqui.

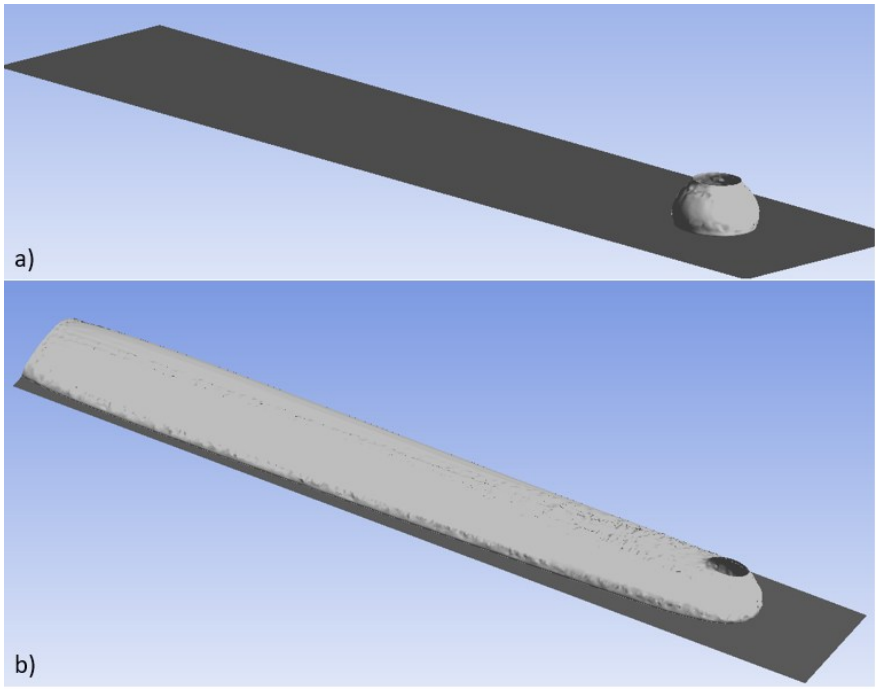
7.2.1 Simulações no ANSYS Fluent — diagnóstico de incompatibilidade física

As simulações iniciais do modelo 3D foram conduzidas no solver *ANSYS Fluent,* mantendo-se o mesmo protocolo numérico estabelecido na etapa bidimensional. Os resultados foram avaliados frente aos dois estudos de referência.

7.2.1.1 Estudo 1 — Tao et al. (2024)

A Figura 58 ilustra a evolução da fração volumétrica do concreto fresco durante a simulação tridimensional do processo de extrusão e deposição. No instante inicial, na Figura 58(a), observa-se a saída do material pelo bico de impressão e a formação do jato extrudado, delimitado por uma interface nítida entre as fases de concreto e ar. Essa etapa inicial marca a transição do escoamento confinado para o domínio livre sobre a superfície de deposição, evidenciando a coerência do modelo físico adotado.

Figura 58 – Etapas da extrusão e deposição do concreto fresco durante a simulação tridimensional



Nota: (a) Início da extrusão do material cimentício. (b) Formação final do filete depositado sobre a superfície.

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

À medida que o material extrudado avança no domínio computacional, conforme ilustrado na Figura 58(b), observa-se o desenvolvimento progressivo do filete impresso. Em comparação com a condição inicial apresentada na Figura 58(a), o material sofre acomodação sobre a base de deposição, resultando em aumento gradual da largura do filete, estabilização da interface concreto–ar e manutenção da continuidade ao longo da camada depositada.

A conformação obtida numericamente apresenta coerência qualitativa

com os registros experimentais disponíveis na literatura (Figura 59), no que se refere à formação contínua do filamento, à estabilidade global da camada depositada e à evolução longitudinal do material após a saída do bico. A simulação reproduz o comportamento geral de deposição observado por Tao et al. (2024), particularmente no que diz respeito ao escoamento contínuo e à ação da gravidade durante a etapa inicial de acomodação.

Figura 59 – Sistema de impressão 3D de concreto e camadas impressas

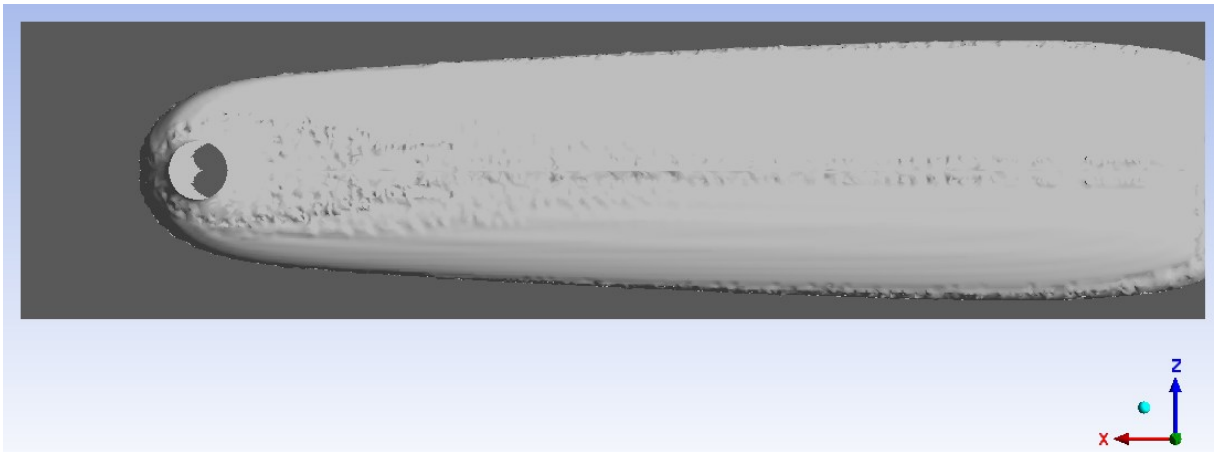


Fonte: Tao et al. (2024)

Entretanto, a análise comparativa evidencia que a abordagem numérica do *Fluent* desenvolvida nesta tese não reproduz com acurácia os valores experimentais de largura do filete reportados no estudo de referência. Observa-se, na simulação, um alargamento lateral mais pronunciado do material após a extrusão, especialmente nas regiões finais do filamento (Figura 60), quando comparado às imagens experimentais apresentadas por Tao et al. (2024).

Nas imagens experimentais (Figura 59), o concreto mantém maior coesão após a saída do bico, assumindo uma seção transversal predominantemente elíptica, com acúmulo moderado de material na extremidade final. Embora esse padrão geral de acúmulo também seja observado numericamente, conforme a Figura 60, a simulação indica uma tendência acentuada de espalhamento lateral.

Figura 60 – Vista superior do filete impresso obtido na simulação numérica



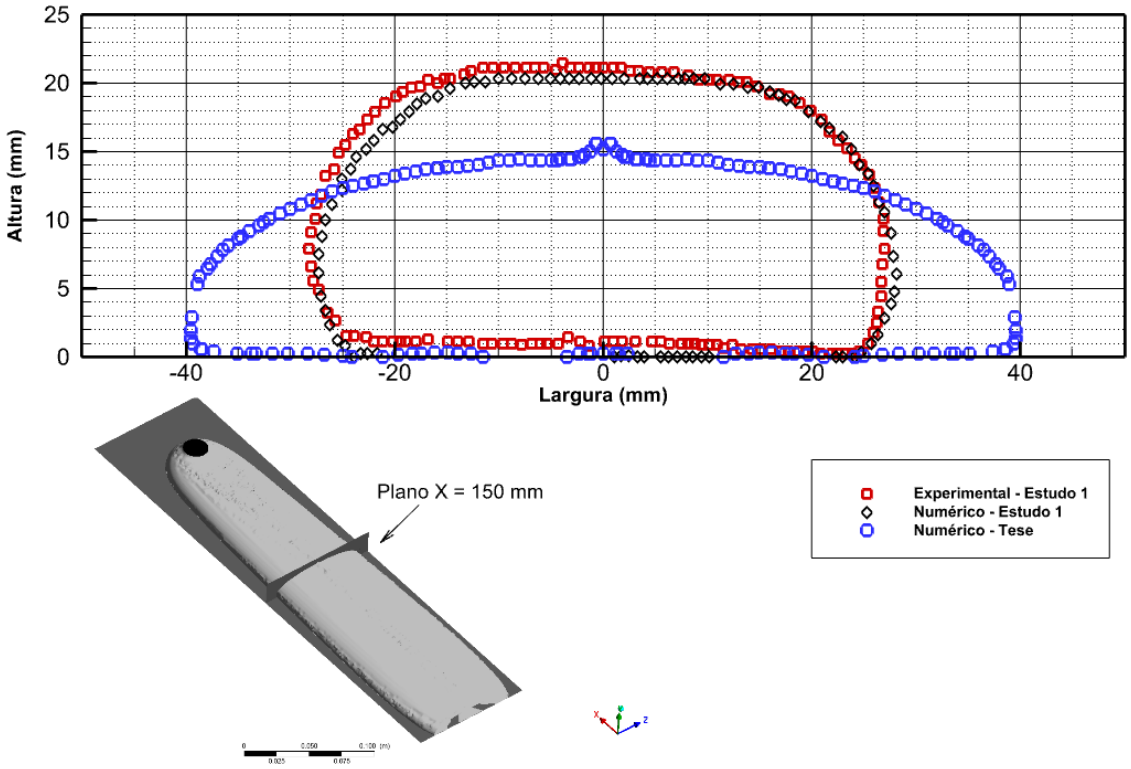
Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Dessa forma, embora o modelo matemático seja capaz de reproduzir as tendências físicas globais do processo de deposição, observa-se limitação na predição quantitativa da seção geométrica final do filamento.

Neste contexto, a análise quantitativa da Fase 1 foi conduzida a partir da avaliação da geometria transversal do filete de concreto fresco, representado pelo campo de fração volumétrica (Volume Fraction), com base em um perfil extraído no plano transversal localizado em X = 0,150 m ao longo da direção de impressão. Esse plano foi selecionado por se situar em uma região afastada da zona inicial de deposição, na qual os efeitos transientes associados à saída do material pelo bico já se encontram reduzidos, permitindo a análise de uma seção representativa do comportamento do material após a extrusão.

A Figura 61 apresenta a comparação entre o perfil transversal obtido no modelo numérico desenvolvido nesta tese e os perfis experimental e numérico reportados no Estudo 1. A comparação foi realizada com base nas dimensões geométricas características do filete, especificamente a largura (W) e a altura (H) da seção transversal.

Figura 61 – Comparação entre os perfis transversais do filete de concreto fresco do Estudo 1 e do modelo numérico da tese



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A Tabela 19 apresenta a comparação entre as dimensões geométricas do filete de concreto fresco obtidas no modelo numérico desenvolvido nesta tese e aquelas reportadas no estudo de referência, tanto para os resultados experimentais quanto para os numéricos.

Tabela 19 – Comparação das dimensões geométricas do filete e erros percentuais do modelo numérico da tese em relação aos resultados do Estudo 1

Dados de referência	Altura H (mm)	Erro H (%)	Largura W (mm)	Erro W (%)
Experimental – Estudo 1	21,4	-	48,7	-
Numérico – Estudo 1	20,3	5,14	48,0	1,44
Numérico – Tese	15,5	27,6	79,2	62,6

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Em termos de altura (H), o valor obtido no presente estudo (15,5 mm) mostrou-se significativamente inferior tanto ao valor experimental (21,4 mm) quanto ao valor

numérico (20,3 mm) reportados no Estudo 1, resultando em erros percentuais de 27,6% em relação ao resultado experimental e de 23,6% em relação ao resultado numérico. Essa subestimação indica que o modelo matemático desenvolvido nesta tese não foi capaz de representar de forma adequada os mecanismos físicos associados à manutenção da estabilidade vertical do material após a deposição, levando a uma redução excessiva da altura do filete.

As discrepâncias tornam-se ainda mais expressivas na análise da largura (W). O modelo da tese apresentou uma largura aproximada de 79,2 mm, enquanto os valores experimental e numérico do Estudo 1 situam-se em torno de 48 mm, o que resultou em erros percentuais de 62,6% em relação ao resultado experimental e de 65,0% em relação ao resultado numérico. Esse comportamento evidencia um espalhamento lateral excessivo do concreto fresco no modelo da tese, conduzindo à formação de um perfil transversal significativamente mais achatado quando comparado às referências, em consonância com a análise visual dos perfis transversais.

A magnitude dos erros observados, especialmente para a largura, indica que as diferenças não podem ser atribuídas a flutuações numéricas pontuais ou incertezas experimentais. Pelo contrário, os resultados sugerem limitações relevantes na estratégia de modelagem adotada, *possivelmente relacionadas à representação reológica do material*, à formulação numérica do solver ou à discretização das equações governantes. Dessa forma, a análise quantitativa confirma que o modelo numérico do Fluent não reproduziu de forma satisfatória a geometria transversal do filete de concreto fresco reportada no estudo de referência.

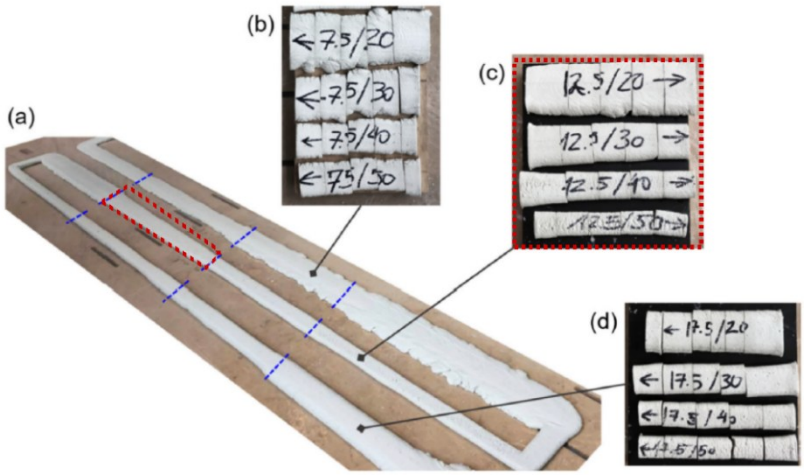
7.2.2 Estudo 2 — Comminal et al. (2020)

Neste tópico são apresentados os resultados da aplicação do modelo numérico tridimensional ao Estudo 2, fundamentado no caso 6 do trabalho de Comminal et al. (2020). Os resultados são discutidos sob os aspectos qualitativo e quantitativo, permitindo avaliar a capacidade do modelo tridimensional em representar o comportamento físico do processo de extrusão do concreto nas condições consideradas no Estudo 2.

A Figura 62 apresenta o conjunto de camadas impressas experimentalmente no estudo de referência, bem como os segmentos seccionados

correspondentes às diferentes combinações de altura do bico e velocidade de impressão. Para fins de análise qualitativa do modelo numérico tridimensional desenvolvido nesta tese, foi selecionado o caso D6, correspondente à altura do bico de 12,5 mm e à velocidade de impressão de 30 mm/s, destacado na figura.

Figura 62 – Camadas impressas experimentalmente e segmentos seccionados para diferentes alturas do bico e velocidades de impressão

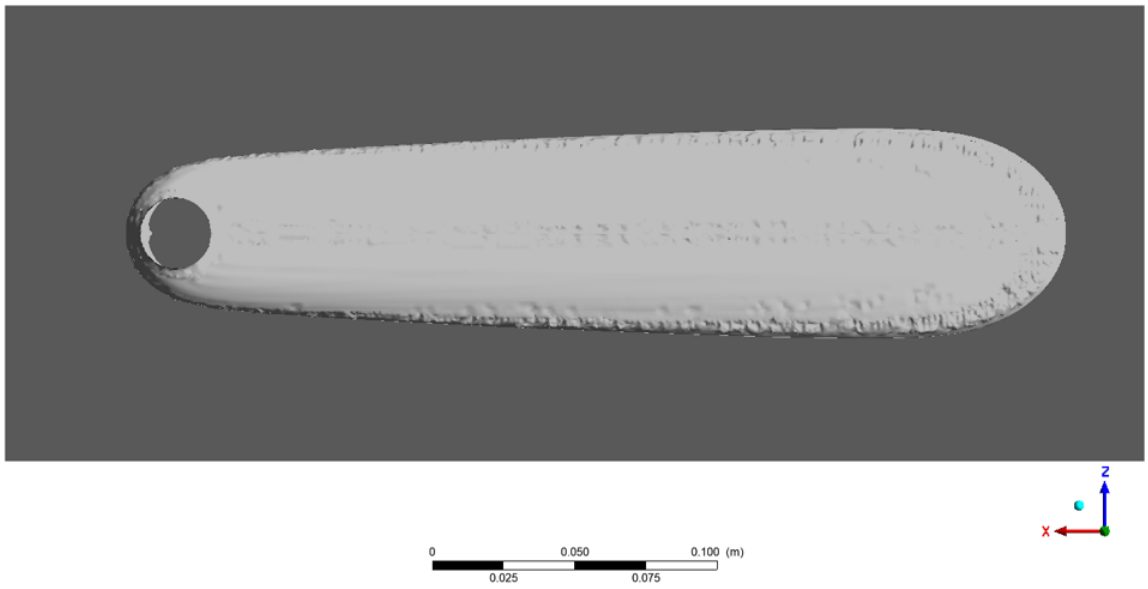


Fonte: Extraído de Comminal et al. (2020)

Observa-se que, nessa condição, o filete depositado experimentalmente apresenta conformação predominantemente retilínea, com manutenção da continuidade ao longo do percurso e ausência de alargamento excessivo, indicando um equilíbrio adequado entre o escoamento do material extrudado e sua capacidade de retenção de forma após a deposição. Essa configuração experimental constitui, portanto, uma referência relevante para a avaliação qualitativa da capacidade do modelo matemático em reproduzir a geometria e a estabilidade do filete observadas no processo real de impressão.

Em contraste, o resultado obtido na simulação numérica desenvolvida nesta tese, ilustrado na Figura 63, evidencia um alargamento significativo do filete, acompanhado por redução da altura máxima, resultando em um perfil transversal visivelmente mais achatado. Observa-se ainda que as bordas laterais se apresentam menos definidas, sugerindo maior mobilidade do material após a extrusão e menor capacidade de estabilização geométrica.

Figura 63 – Vista superior do filete impresso obtido na simulação numérica

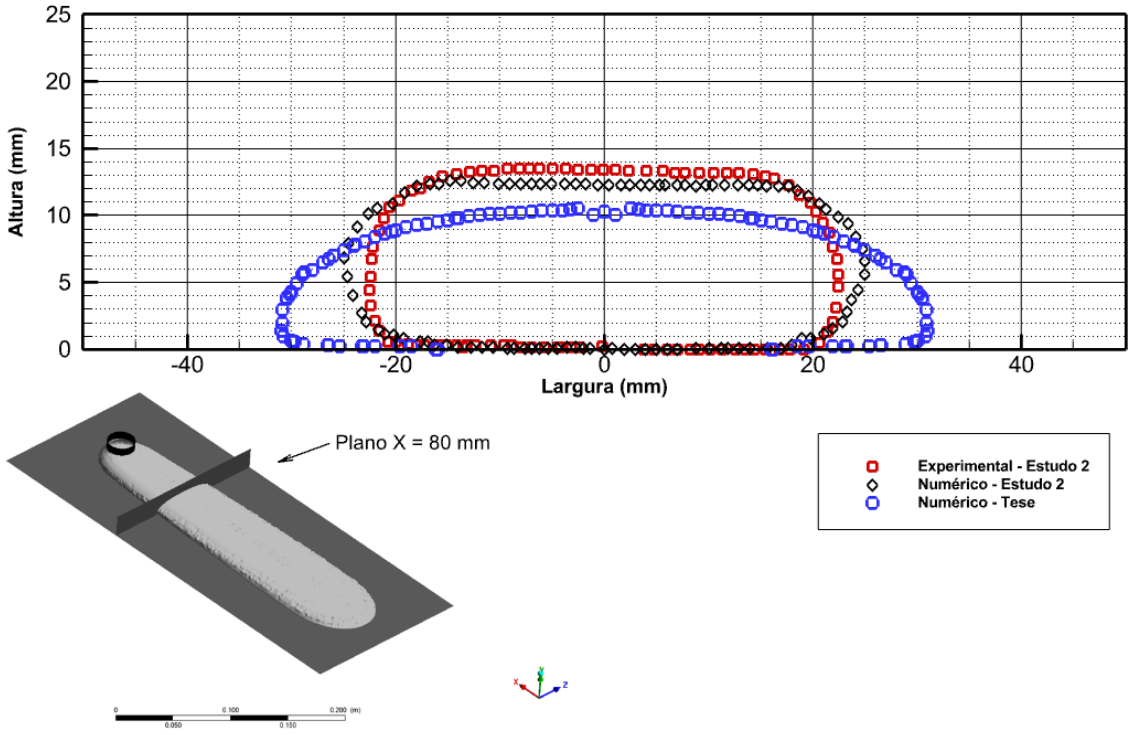


Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Quanto à análise quantitativa, esta baseou-se na caracterização da geometria transversal do filete de concreto fresco, obtida a partir do campo de fração volumétrica (Volume Fraction). Para essa avaliação, foi extraído um perfil transversal no plano localizado em X = 80 mm ao longo da direção de impressão. A escolha desse plano se deve ao fato de ele estar posicionado fora da região imediatamente adjacente à saída do bico, onde os efeitos transientes iniciais da deposição já se encontram atenuados, possibilitando a análise de uma seção mais representativa do regime de extrusão estabilizado.

A Figura 64 apresenta a comparação entre o perfil transversal obtido no modelo numérico desenvolvido nesta tese e aqueles reportados, tanto experimentalmente quanto numericamente, no Estudo 2. A análise comparativa foi conduzida com base nas dimensões geométricas características da seção transversal do filete, com ênfase na largura (W) e na altura (H), permitindo avaliar o grau de concordância entre os diferentes conjuntos de resultados.

Figura 64 – Comparação entre os perfis transversais do filete de concreto fresco do Estudo 2 e do modelo numérico da tese



Fonte: Elaborada pela autora(2025)

Conforme ilustrado na Figura 64, o perfil numérico da tese apresenta um filete significativamente mais achatado, com redução da altura e aumento da largura, quando comparado tanto ao perfil experimental quanto ao perfil numérico reportado no estudo de referência.

A Tabela 20 sintetiza a comparação quantitativa entre as dimensões geométricas do filete obtidas neste trabalho e aquelas reportadas no Estudo 2, tanto para os resultados experimentais quanto para os numéricos.

Tabela 20 – Comparação das dimensões geométricas do filete e erros percentuais do modelo numérico da tese em relação aos resultados do Estudo 2

Dados de referência	Altura H (mm)	Erro H (%)	Largura W (mm)	Erro W (%)
Experimental – Estudo 2	13,5	-	45	-
Numérico – Estudo 2	12,6	6,67	49,9	10,89
Numérico – Tese	10,5	22,2	61,9	37,56

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

O padrão se repete: subestimação da altura (22,2%) e superestimação da largura (37,56%), com desvios substancialmente superiores aos apresentados pelo modelo numérico do próprio Estudo 2 (6,67% e 10,89%, respectivamente). A consistência desse padrão nos dois estudos de referência — com conjuntos de parâmetros independentes entre si — afasta a hipótese de flutuação numérica pontual e indica uma limitação sistemática na configuração do modelo reológico adotado e no seu tratamento numérico.

7.2.3 Diagnóstico e decisão de migração

A análise conjunta dos resultados obtidos nos Estudos 1 e 2 indica que as discrepâncias observadas não decorrem de inconsistências no protocolo numérico estabelecido, uma vez que a geometria, os parâmetros reológicos e as condições operacionais foram mantidos entre as simulações (as configurações específicas de cada solver estão descritas na Seção 6.3.4 e nos Apêndices). O padrão sistemático de subestimação da altura e superestimação da largura, reproduzido de forma consistente em dois conjuntos de referência independentes, aponta para uma limitação intrínseca do solver ANSYS Fluent na representação nativa de escoamentos viscoplásticos em regime de deposição livre — particularmente no que se refere ao equilíbrio entre forças gravitacionais, viscosas e de coesão do material em regiões de baixo cisalhamento. Diante dessa evidência, a migração para o solver ANSYS CFX foi adotada como estratégia metodológica fundamentada, mantendo-se a geometria, a reologia e as condições operacionais (Seção 6.3.4), de modo que as diferenças nos resultados refletem o conjunto formado pela formulação numérica e pelas configurações de cada ambiente de simulação.

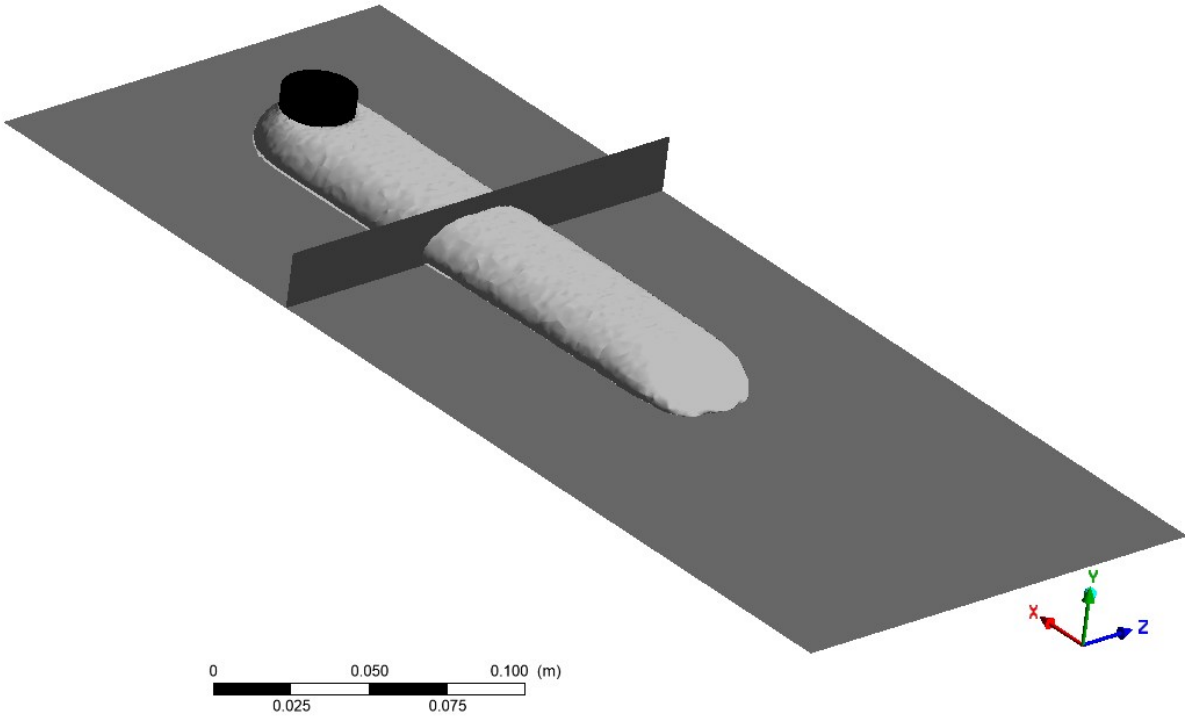
7.2.4 Resultados da Migração da Simulação Tridimensional para o Solver ANSYS CFX

A simulação foi conduzida no ANSYS CFX mantendo-se a geometria, os parâmetros reológicos e as condições operacionais previamente adotados no Fluent (Seção 6.3.4). Os resultados refletem, portanto, o conjunto das diferenças associadas à formulação numérica e às estratégias e configurações de solução empregadas por cada solver para o fluido não newtoniano.

De modo geral, a simulação no CFX apresentou comportamento numérico mais estável ao longo do regime transiente, possibilitando a reprodução contínua do processo de extrusão e deposição. Observou-se a formação de um filete com conformação geométrica coerente ao longo do percurso de deposição, com preservação da continuidade do escoamento e integridade da interface fluido–ar.

A Figura 65 ilustra a conformação tridimensional do filete extrudado obtida no CFX, com indicação do plano de corte X = 80 mm utilizado para a extração das coordenadas da seção transversal. A geometria do filete mostra-se globalmente uniforme ao longo do comprimento, com variações suaves associadas às condições transientes do processo.

Figura 65 – Filete extrudado obtido na simulação tridimensional no ANSYS CFX, com destaque para o plano de corte X = 80 mm



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Observa-se a formação de um filete contínuo ao longo do percurso de deposição, evidenciando a manutenção do escoamento durante o regime transiente considerado e a interação direta do material com a base de construção. A geometria do filete mostra-se globalmente uniforme ao longo do comprimento, com variações suaves associadas às condições transientes do processo. O plano de corte indicado (X = 80 mm) foi selecionado em uma região intermediária do filete, de modo a reduzir

a influência das regiões de entrada e saída, permitindo a obtenção de uma seção transversal representativa para a análise geométrica subsequente.

A partir da análise geométrica da seção extrudada, foram determinadas as dimensões características de altura (H) e largura (W) do filete obtido na simulação com o ANSYS CFX, conforme apresentado na Tabela 21.

Tabela 21 – Dimensões geométricas do filete extrudado (X=80mm) obtidas no ANSYS CFX

Parâmetro	Símbolo	Valor médio (mm)
Altura do filete	H	13,57
Largura do filete	W	45,84

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A comparação imediata com os dados do Estudo 2: H = 13,5 mm (experimental) e W = 45,0 mm (experimental) evidencia concordância expressiva, com desvios de 0,52% na altura e 1,87% na largura. O fenômeno físico de extrusão e deposição passa a ser reproduzido de forma coerente pelo modelo, confirmando que o protocolo numérico é viável em ambiente 3D e que a limitação anterior era do solver, não da formulação.

No ANSYS CFX, a interface fluido–ar é tratada por meio de uma formulação de superfície livre baseada em contradifusão, associada a uma variação do esquema *High-Resolution* aplicado ao transporte da fração volumétrica. Essa abordagem não envolve reconstrução geométrica da interface, o que pode resultar em maior difusão numérica. Em contraste, o Flow-3D utiliza reconstrução geométrica da interface (TrueVOF®), baseada no método de Hirt e Nichols (1981), proporcionando maior nitidez na definição da superfície livre.

De forma geral, os resultados demonstram que o modelo numérico proposto é capaz de reproduzir a ordem de grandeza da área da seção transversal e, consequentemente, da massa de material impressa.

7.2.5 Estudos de sensibilidade no CFX

Com o objetivo de verificar a robustez do modelo e descartar possíveis causas alternativas para as diferenças observadas entre os solvers, foram conduzidos

estudos paralelos de caráter verificativo no ANSYS CFX. Esses estudos avaliaram a influência de dois parâmetros secundários do setup: a taxa mínima de cisalhamento imposta ao modelo reológico e a inclusão da tensão superficial no modelo de superfície livre, mantendo-se constantes a geometria, as condições de contorno e os parâmetros reológicos principais.

7.2.5.1 Influência da taxa mínima de cisalhamento

A taxa mínima de cisalhamento é um parâmetro numérico empregado no CFX para evitar singularidades no cálculo da viscosidade aparente em regiões de baixíssima deformação. O valor padrão de 0,001 s^{-1} foi comparado com um valor elevado de 0,01 s^{-1}. A Tabela 22 apresenta os resultados.

Tabela 22 – Influência da taxa mínima de cisalhamento no CFX

Caso	Taxa mínima de cisalhamento (s^{-1})	Altura H (mm)	Largura W (mm)	Área A (mm^2)
CFX–Ref	0,001 (padrão)	16,12	26,58	341,79
CFX–γmin	0,01	16,06	26,68	342,01
Diferença (%)	—	−0,37 %	+0,38 %	+0,06 %

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

As diferenças obtidas são inferiores a 0,5% em todas as grandezas analisadas, indicando que o regime de escoamento predominante durante a extrusão ocorre em taxas de cisalhamento significativamente superiores ao limite mínimo imposto. A viscosidade aparente nas regiões críticas do filete não é influenciada por esse parâmetro numérico.

7.2.5.2 Influência da tensão superficial

Na sequência, investigou-se a influência da tensão superficial, propriedade física que não havia sido considerada nas simulações iniciais. Adotou-se o valor de 0,0735 N/m, conforme reportado por Lan et al. (2024) para pastas cimentícias sem agente incorporador de ar. A comparação entre os perfis obtidos com e sem a consideração da tensão superficial (Tabela 23) mostrou ausência de variação

significativa na altura, largura e área da seção extrudada.

Tabela 23 – Influência da tensão superficial no modelo VOF (CFX)

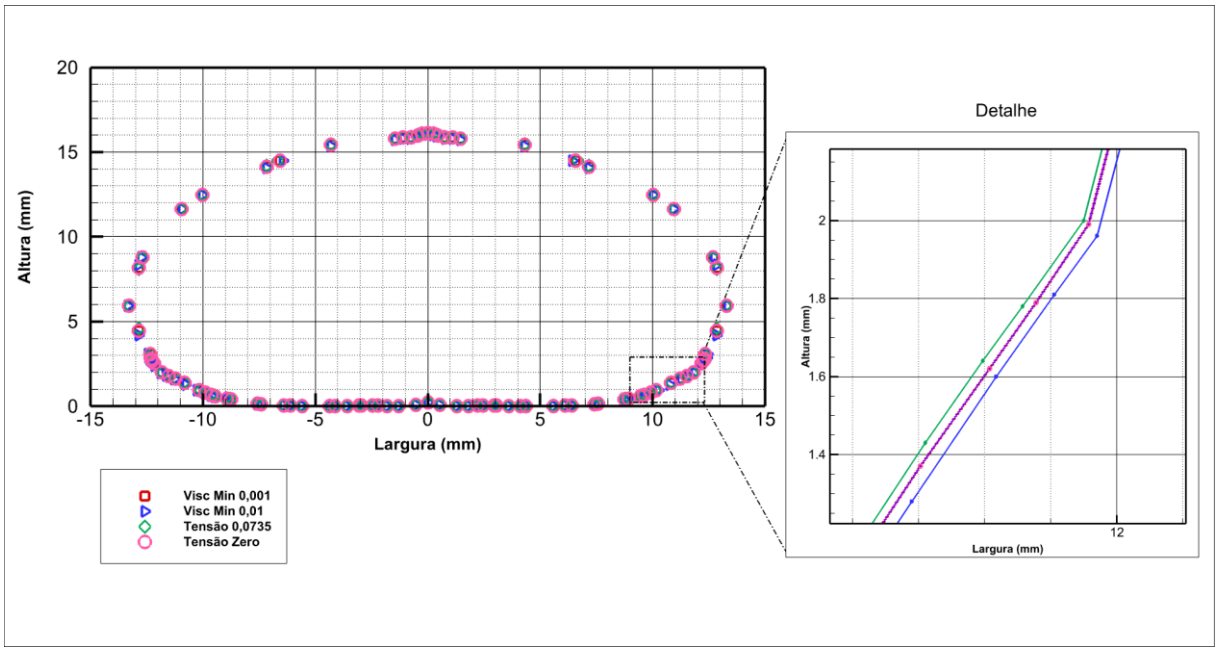
Caso	Tensão superficial (N/m)	Altura H (mm)	Largura W (mm)	Área A (mm²)
CFX – sem σ	0	16,12	26,58	341,79
CFX – com σ	0,0735	16,14	26,54	342,9
Diferença (%)	—	+0,12 %	−0,15 %	+0,32 %

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

As variações permanecem inferiores a 0,5% em todas as grandezas, confirmando que, para materiais altamente viscosos com elevada tensão de escoamento, os efeitos capilares são desprezíveis frente às forças viscosas dominantes.

A Figura 66 apresenta a sobreposição dos perfis geométricos obtidos para todas as configurações avaliadas. As curvas praticamente coincidem ao longo de toda a seção transversal, reforçando visualmente a insensibilidade do modelo a esses parâmetros secundários.

Figura 66 – Sobreposição dos perfis geométricos da seção transversal do filete extrudado no ANSYS CFX para diferentes configurações do modelo numérico



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

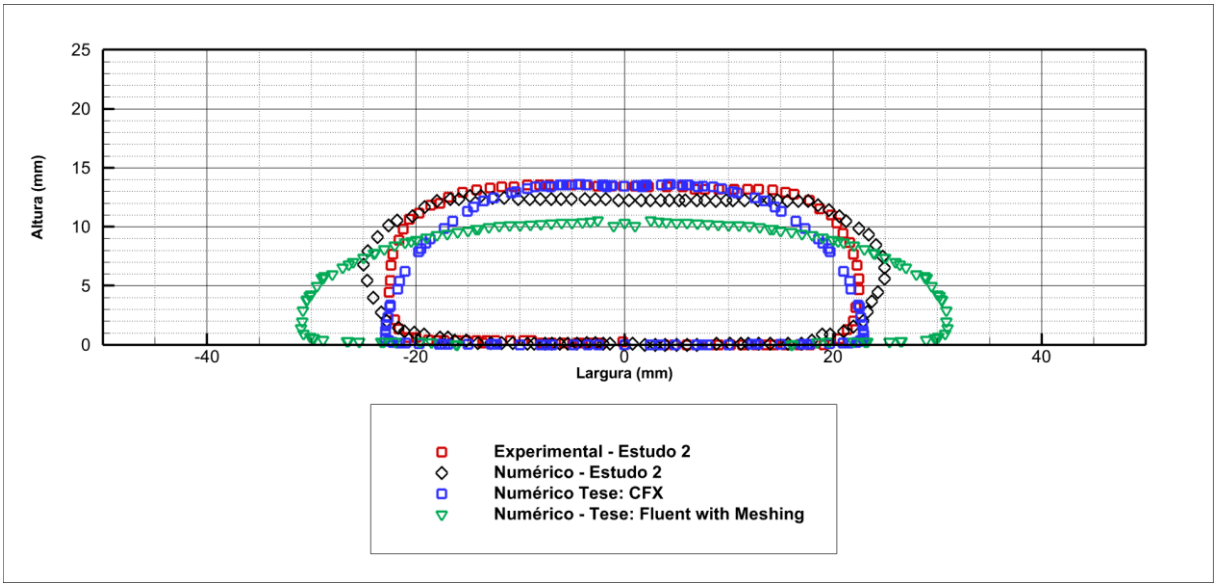
Os resultados dos estudos de sensibilidade confirmam que a melhoria

observada após a migração do Fluent para o CFX está associada predominantemente às diferenças intrínsecas dos algoritmos numéricos e dos esquemas de tratamento da reologia.

7.2.6 Comparação entre solvers e com os dados de referência

A Figura 67 apresenta a sobreposição das seções transversais do filete extrudado obtidas experimentalmente e numericamente no Estudo 2 da literatura, bem como os resultados numéricos obtidos no presente trabalho com os solvers ANSYS CFX e Fluent, considerando o plano de corte X = 80 mm.

Figura 67 – Comparação das seções transversais do filete extrudado obtidas experimentalmente e numericamente no Estudo 2 da literatura e numericamente no presente trabalho utilizando os solvers ANSYS CFX e Fluent



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A Tabela 24 reúne as dimensões geométricas características de todos os conjuntos analisados.

Tabela 24 – Comparação das dimensões geométricas e da área transversal do filete extrudado

Conjunto analisado	Altura H (mm)	Erro H (%)	Largura W (mm)	Erro W (%)
Experimental – Estudo 2	13,50	–	45,00	–
Numérico – Estudo 2	12,60	6,67	49,90	10,89
Numérico – Tese (CFX)	13,57	0,52	45,84	1,87

Conjunto analisado	Altura H (mm)	Erro H (%)	Largura W (mm)	Erro W (%)
Numérico – Tese (Fluent)	10,50	22,22	61,90	37,56

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Os resultados evidenciam que o ANSYS CFX reproduz a geometria do filete com desvios de 0,52% na altura e 1,87% na largura em relação ao experimental, sendo que são valores inferiores aos apresentados pelo próprio modelo numérico de referência do Estudo 2 (6,67% e 10,89%, respectivamente). O contraste com o Fluent é direto e inequívoco: os desvios de 22,22% e 37,56% obtidos naquele solver, para os mesmos parâmetros e a mesma malha, confirmam que a diferença é de origem numérica, no tratamento da reologia.

No que se refere à altura, o CFX reproduz de forma satisfatória a elevação do topo do filete após a deposição. Quanto à largura, a concordância com os dados experimentais e numéricos do Estudo 2 é expressiva, sem alargamento lateral significativo. O uso de estratégias de regularização da tensão de escoamento, como a formulação de Papanastasiou (1987), aliado à imposição de limites máximos de viscosidade (via taxa mínima de cisalhamento), favorece a estabilidade numérica e uma representação mais adequada do comportamento do material em regiões de baixo cisalhamento. Como resultado, as pequenas discrepâncias observadas são predominantemente locais, não comprometendo a geometria global da seção transversal do filete, o que reforça a adequação da modelagem reológica adotada para o problema analisado.

Dessa forma, pode-se afirmar que, na configuração adotada neste trabalho, o ANSYS CFX apresentou maior acurácia numérica e robustez para este tipo de problema. Ressalta-se, contudo, que ambos os solvers permitem modelos personalizados (UDF no Fluent; CEL e User Fortran no CFX), recurso que não foi explorado no presente estudo.

7.2.7 Diferenças numéricas entre os *solvers* Fluent e CFX na predição da geometria do filete extrudado

As diferenças observadas nas seções transversais do filete extrudado obtidas por meio das simulações numéricas utilizando os *solvers* ANSYS Fluent e ANSYS CFX não estão relacionadas primordialmente ao tipo de solver linear empregado, mas sim

à forma como cada software trata numericamente o modelo reológico do material e a interface multifásica fluido–ar.

Em ambos os ambientes computacionais, os algoritmos de solução apresentam semelhanças estruturais importantes. Os dois códigos utilizam formulações baseadas em métodos iterativos para solução das equações algébricas resultantes da discretização das equações de Navier–Stokes, frequentemente empregando métodos multigrid algébricos (AMG) combinados com precondicionadores como ILU (Incomplete LU) para acelerar a convergência. Além disso, a estratégia de acoplamento pressão–velocidade (P–V) pode ser semelhante entre os solvers, de modo que essa característica não constitui o principal fator responsável pelas diferenças observadas nos resultados.

A principal distinção reside na sensibilidade do solver à modelagem reológica do concreto fresco, especialmente quando são utilizados modelos constitutivos não lineares típicos de materiais cimentícios, como os modelos Bingham ou Herschel–Bulkley regularizados numericamente. No Fluent, a implementação desses modelos geralmente exige técnicas de regularização, como a relaxação de Papanastasiou, bem como a definição de uma tensão de escoamento mínima (yield stress regularization) para evitar singularidades numéricas. Quando esses parâmetros não são cuidadosamente calibrados, o solver pode apresentar comportamento fisicamente pouco realista, como a continuidade do escoamento do material após a deposição ou até mesmo problemas de convergência associados ao aumento abrupto da viscosidade aparente.

Esse comportamento foi observado nas simulações realizadas: no Fluent, o material extrudado tende a continuar escoando e se acomodando sob efeito da gravidade, resultando em maior espalhamento lateral e redução da altura do filete. Em contrapartida, nas simulações conduzidas no CFX, o material apresenta uma estabilização geométrica mais rápida após a deposição, com menor deformação gravitacional do filete extrudado.

Essa diferença pode ser atribuída, em grande medida, à forma como o CFX trata numericamente os modelos reológicos viscoplásticos e à maior robustez do solver na resolução de problemas com viscosidade altamente dependente da taxa de deformação, característica típica de concretos extrudáveis. Assim, de forma nativa, o CFX tende a apresentar maior estabilidade numérica em problemas envolvendo

materiais viscoplásticos altamente viscosos, como o concreto fresco utilizado na impressão 3D.

Outro fator relevante está relacionado ao tratamento da interface fluido–ar, que desempenha papel fundamental na predição da geometria final do filete extrudado. Tanto o Fluent quanto o CFX descrevem o escoamento bifásico (concreto fresco e ar) por meio de uma abordagem baseada em fração volumétrica, resolvendo uma equação de transporte para a fração volumétrica de cada fase; como o somatório das frações é unitário ($\Sigma\alpha = 1$), apenas ($n-1$) equações são efetivamente resolvidas — no presente caso, com apenas duas fases, uma única equação de fração volumétrica. A distinção entre os solvers, portanto, não reside na presença ou ausência dessa equação, mas na forma como o termo advectivo é discretizado e na estratégia adotada para manter a interface nítida. No Fluent, o modelo *Volume of Fluid* (VOF) disponibiliza diferentes esquemas de discretização do termo advectivo, alguns dos quais realizam reconstrução geométrica da interface — como o esquema *Geo-Reconstruct*, baseado no método PLIC (*Piecewise Linear Interface Calculation*), disponível apenas na formulação explícita. No presente trabalho, entretanto, adotou-se a formulação implícita do VOF, com modelagem de interface do tipo *Sharp* e esquema compressivo (*Compressive*) para a fração volumétrica, o qual não realiza reconstrução geométrica explícita: a interface é mantida nítida por um tratamento antidifusivo (compressivo) do termo advectivo. Dessa forma, nas configurações efetivamente empregadas, nem o Fluent nem o CFX reconstroem geometricamente a interface, capturando-a de modo difuso, embora por meio de esquemas de advecção distintos. Já o CFX utiliza uma formulação multifásica homogênea com modelo de superfície livre, na qual as fases compartilham um único campo de velocidade e pressão, e captura a interface — igualmente sem reconstrução geométrica — por meio de um esquema de alta resolução (*High-Resolution scheme*), associado a um tratamento compressivo (contradifusão) do termo advectivo da fração volumétrica, que combina localmente esquemas de primeira e segunda ordem para conter a difusão numérica e manter a interface relativamente nítida durante o escoamento (ANSYS, 2023).

Alguns softwares especializados em escoamentos multifásicos, como o Flow-3D, empregam por padrão abordagens de reconstrução geométrica da interface, como o método TrueVOF®, baseado no algoritmo original proposto por Hirt e Nichols (1981), no qual a interface é reconstruída geometricamente dentro de cada célula da malha. Cabe ressaltar, entretanto, que os códigos comerciais de propósito geral aqui

utilizados (Fluent e CFX), nas configurações adotadas neste trabalho, não realizam esse tipo de reconstrução geométrica completa. Como o CFX captura a interface sem reconstrução geométrica explícita, a solução é sensível à resolução da malha, podendo ocorrer pequenos desvios locais na posição da interface; vale notar, contudo, que essa sensibilidade não é exclusiva das abordagens de captura difusa, uma vez que os próprios métodos de reconstrução geométrica (PLIC, *Geo-Reconstruct* e reconstruções paramétricas) também dependem da malha para representar adequadamente a curvatura e a posição da interface — a diferença é de grau, e não de natureza. Em geral, esses desvios são pontuais e de pequena magnitude; entretanto, em processos transientes como a deposição de material na impressão 3D de concreto, tais diferenças podem acumular-se ao longo do tempo, resultando em variações perceptíveis na geometria final do filete extrudado.

Do ponto de vista físico, as discrepâncias observadas entre os resultados numéricos obtidos com Fluent e CFX podem, portanto, ser atribuídas a três fatores principais:

- diferenças na robustez numérica do tratamento de modelos reológicos viscoplásticos (regularização de Papanastasiou, tensão de escoamento mínima, entre outras);
- distinções no esquema de discretização do termo advectivo da fração volumétrica e no tratamento da interface fluido–ar, e não na própria formulação em fração volumétrica, comum a ambos os solvers;
- sensibilidade diferenciada de cada solver à regularização da viscosidade aparente e ao acoplamento entre a reologia não linear e a captura da interface.

Esses aspectos influenciam diretamente os mecanismos de espalhamento lateral, acomodação gravitacional e retenção de forma do material extrudado, resultando em diferentes predições da seção transversal do filete depositado.

Por fim, cabe destacar que ambos os solvers oferecem recursos de personalização: o Fluent dispõe das *User-Defined Functions* (UDFs), escritas em linguagem C, ao passo que o CFX oferece capacidade de extensão equivalente por meio da *CFX Expression Language* (CEL) e de rotinas de usuário em Fortran (*User Fortran*), com as quais é possível definir termos-fonte, condições de contorno e propriedades dependentes da solução. A distinção, nesse aspecto, é menos de disponibilidade e mais de linguagem e paradigma de programação.

7.2.8 Considerações Finais

Com base nos resultados da etapa do modelo tridimensional, verificou-se que o protocolo numérico desenvolvido foi capaz de reproduzir qualitativamente o comportamento global do processo de extrusão e deposição do concreto fresco, incluindo a formação contínua do filete, a estabilidade da interface fluido–ar e a interação do material com a superfície de deposição. Entretanto, as simulações conduzidas no ANSYS Fluent apresentaram limitações quantitativas relevantes, com erros de 27,6% na altura e 62,6% na largura em relação ao Estudo 1, além de 22,22% na altura e 37,56% na largura em relação ao Estudo 2. Esses desvios indicam tendência de subestimação da altura e superestimação da largura do filete, associada ao espalhamento lateral excessivo do material.

A migração do modelo para o ANSYS CFX, mantendo-se a geometria, os parâmetros reológicos e as condições operacionais, resultou em melhora da predição geométrica. Em relação aos dados experimentais do Estudo 2, os erros foram reduzidos para 0,52% na altura e 1,87% na largura, valores inferiores aos obtidos pelo modelo numérico de referência da literatura, que apresentou desvios de 6,67% e 10,89%, respectivamente. Além disso, os estudos de sensibilidade no CFX indicaram que variações em parâmetros secundários produziram alterações inferiores a 0,5% na geometria do filete, sugerindo que a melhoria observada está associada ao conjunto formado pela formulação numérica e pelas configurações de cada solver, e não a ajustes de parâmetros secundários.

Dessa forma, os resultados quantitativos e qualitativos justificaram a adoção do ANSYS CFX como solver de referência para a etapa seguinte o teste de independência de malha, apresentado na Seção 7.3. O teste opera dentro desse quadro já estabelecido, com o objetivo específico de identificar, dentro do CFX, a resolução espacial que oferece o melhor equilíbrio entre precisão numérica e custo computacional para os estudos paramétricos subsequentes.

7.3 TESTE DE INDEPENDÊNCIA DE MALHA

Conduziu-se um estudo de independência de malha para o modelo tridimensional com o objetivo de avaliar a convergência das variáveis de interesse à medida que o domínio computacional era progressivamente refinado. Para isso, foram

estabelecidas cinco configurações de malha, identificadas pelos códigos 1 a 5, correspondentes, respectivamente, aos tamanhos característicos de elemento de 2,6 mm, 2,0 mm, 1,5 mm, 1,125 mm e 0,86 mm, resultando em grades computacionais de aproximadamente 38 mil, 70 mil, 140 mil, 295 mil e 590 mil nós (Tabela 25).

Tabela 25 – Configurações das malhas

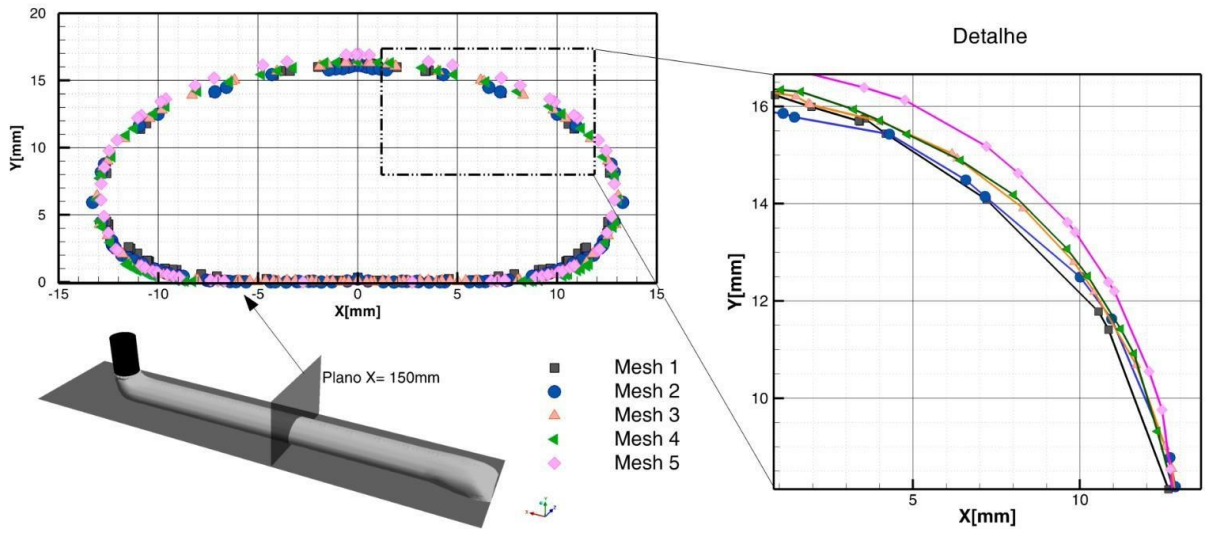
Código da Malha	Número de nós (aprox.)
1	38 k
2	70 k
3	140 k
4	295 k
5	590 k

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

7.3.1 Análise qualitativa das curvas de contorno

A Figura 68 apresenta o contorno do filete para cada malha analisada, obtido a partir do plano transversal localizado a 150 mm do bico.

Figura 68 – Contorno das malhas e detalhe ampliado



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Observa-se que, apesar de todas as malhas reproduzirem qualitativamente a geometria da seção extrudada, existem diferenças perceptíveis entre as curvas, especialmente nas regiões superiores e laterais, onde a espessura do filete é mais sensível ao refinamento numérico.

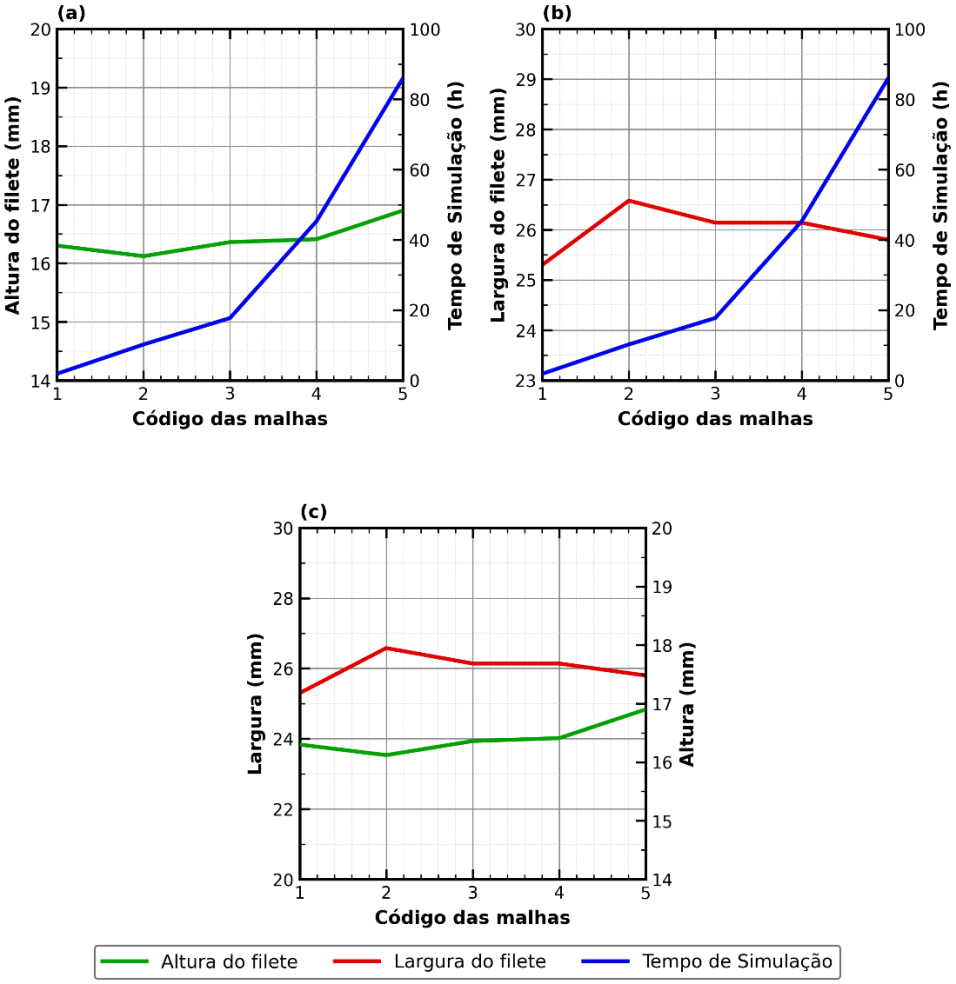
A ampliação da região crítica evidencia que as malhas 1 e 2 apresentam desvios sistemáticos na curvatura superior do filete, enquanto as malhas

3, 4 e 5 mostram convergência progressiva para uma mesma solução geométrica. Essa estabilização indica que, a partir da Malha 3, os erros de discretização passam a ser reduzidos de forma significativa, e a representação da seção transversal extrudada torna-se consistente entre as resoluções subsequentes.

7.3.2 Análise quantitativa: altura, largura e custo computacional

Para a avaliação da independência de malha, adotou-se como critério a estabilização das variáveis de interesse à medida que a malha é refinada, de modo que a solução é considerada independente da malha quando refinamentos adicionais não produzem variações significativas nas grandezas analisadas. A Figura 69 apresenta a altura (H) e a largura (W) do filete em função do código de malha, juntamente com o tempo total de simulação para cada configuração.

Figura 69 – Altura e Largura × Tempo de Simulação



Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A altura apresenta variação reduzida entre as malhas 1 a 4, oscilando

entre 16,1 mm e 16,4 mm, o que indica tendência à estabilização desde os estágios intermediários de refinamento. A Malha 5 apresenta incremento mais acentuado, comportamento compatível com resoluções de alta densidade que capturam microdeformações não observáveis em malhas intermediárias; entretanto, o ganho geométrico entre as malhas 4 e 5 não é proporcional ao custo computacional envolvido, que praticamente dobra nessa transição.

A largura demonstra maior sensibilidade ao refinamento na parte inicial da sequência (malhas 1 → 2 → 3), estabilizando-se entre as malhas 3 e 4, que entregam valores praticamente idênticos. A Malha 5 apresenta leve redução, novamente sem justificativa proporcional ao aumento expressivo do custo. Esse comportamento não monotônico da largura pode ser explicado pela natureza do problema: W é uma grandeza sensível tanto a efeitos físico-reológicos do material quanto à discretização espacial. Do ponto de vista numérico, o modelo reológico adotado é dependente da taxa de deformação (shear strain rate), calculada a partir dos gradientes de velocidade no escoamento. Como esses gradientes são função da discretização, o refinamento da malha influencia diretamente a estimativa da viscosidade aparente e, consequentemente, o padrão de deposição lateral. Dessa forma, a relação entre refinamento e resposta geométrica da largura não é necessariamente monotônica.

O tempo de processamento apresenta crescimento quase exponencial ao longo da sequência, com destaque para a transição da Malha 4 para a Malha 5, que ultrapassa 80 horas de simulação. Essa relação reforça a importância do critério de eficiência numérica: malhas que oferecem soluções equivalentes com custo substancialmente inferior representam escolhas metodologicamente mais adequadas para estudos que demandam múltiplas simulações.

7.3.3 Estimativa do erro de discretização pelo Índice de Convergência de Malha (GCI)

Com o objetivo de quantificar o erro de discretização e complementar a análise qualitativa apresentada, foi aplicado o Índice de Convergência de Malha (*Grid Convergence Index* – GCI), conforme a metodologia proposta por Roache (1998) e sistematizada por Celik et al. (2008), baseada na extrapolação de Richardson (1927) e na estimativa da ordem aparente de convergência da solução.

Para o cálculo do GCI, foram consideradas três malhas

sucessivamente refinadas localizadas na região de estabilização identificada na análise anterior: Malhas 3, 4 e 5. A altura do filete extrudado (H) foi adotada como variável de referência por dois motivos complementares: (i) apresenta comportamento estritamente monotônico com o refinamento da malha, condição necessária para a aplicação confiável do método de Richardson; e (ii) é menos suscetível aos efeitos físico-reológicos não explicitamente modelados que perturbam a convergência da largura. Reconhece-se, contudo, que a análise baseada exclusivamente em H pode subestimar a incerteza total do modelo nas direções associadas à expansão lateral do filete. A Tabela 26 apresenta os dados utilizados.

Tabela 26 – Dados das malhas utilizadas no cálculo do GCI

Código da malha	Número de nós (N)	Altura H (mm)
Malha 3	140.000	16,36
Malha 4	295.000	16,41
Malha 5	590.000	16,90

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Como o tamanho característico médio do elemento não foi diretamente extraído do gerador de malha, adotou-se a definição usual para malhas tridimensionais:

$$h \sim \sqrt[3]{\frac{1}{N}} \qquad (7.2)$$

Assim, as razões de refinamento entre as malhas sucessivas foram calculadas por:

$$r_{21} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{1/3} = \left(\frac{590000}{295000}\right)^{1/3} = 1{,}26 \qquad (7.3)$$

$$r_{32} = \left(\frac{295000}{140000}\right)^{1/3} = 1{,}28 \qquad (7.4)$$

Os valores obtidos indicam refinamentos regulares e compatíveis com a aplicação do método. As diferenças entre as soluções numéricas foram determinadas conforme:

$$\varepsilon_{21} = H_1 - H_2 = 16{,}90 - 16{,}41 = 0{,}49 \qquad (7.5)$$

$$\varepsilon_{32} = H_2 - H_3 = 16{,}41 - 16{,}36 = 0{,}05 \qquad (7.6)$$

Como $r_{21} \neq r_{32}$, a ordem aparente de convergência não deve ser obtida pela forma simplificada. Assim, utilizou-se a expressão iterativa generalizada para três malhas não uniformemente refinadas:

$$p = \frac{1}{ln(r_{21})} \left| ln \left| \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}} \right| + ln\left(\frac{r_{21}^{p} - s}{r_{32}^{p} - s}\right) \right| \qquad (7.7)$$

em que:

$$s = sign\left(\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right) = 1 \qquad (7.8)$$

Esse valor elevado decorre da diferença muito pequena entre as malhas 3 e 4 em comparação com a diferença observada para a Malha 5. Trata-se de uma assimetria entre as diferenças, o que eleva a ordem aparente. Ainda que matematicamente válido, esse resultado deve ser interpretado com cautela, pois ordens aparentes muito altas refletem a sensibilidade da estimativa a pequenas diferenças entre as soluções.

A solução iterativa forneceu:

$$p \approx 10{,}75 \qquad (7.9)$$

Esse valor elevado resulta diretamente da assimetria entre as diferenças $\varepsilon_{21} = 0{,}49$mm e $\varepsilon_{32} = 0{,}05$mm: quando $\varepsilon_{32} \ll \varepsilon_{21}$, a expressão iterativa tende a superestimar a ordem aparente. Fisicamente, esse comportamento indica que as Malhas 3 e 4 se encontram em regime de convergência — com variação de apenas 0,05 mm entre si —, enquanto a Malha 5 introduz um incremento mais expressivo (0,49 mm), possivelmente associado à captura de microdeformações reológicas que as malhas intermediárias não resolvem. Conforme recomendado por Celik et al. (2008), ordens aparentes fora da faixa esperada para o esquema numérico utilizado requerem cautela interpretativa, e o GCI resultante deve ser entendido como estimativa conservadora da incerteza numérica, e não como indicador de convergência assintótica plena do modelo.

A solução extrapolada da altura para uma malha infinitamente refinada foi estimada por:

$$H_{ext} = H_1 + \frac{H_1 - H_2}{r_{21}^{p} - 1} = 16{,}90 + \frac{16{,}90 - 16{,}41}{1{,}2599^{10{,}75} - 1} = 16{,}94\ mm \qquad (7.10)$$

Logo,

$$H_{ext} \approx 16{,}94\ mm \qquad (7.11)$$

Os desvios relativos das malhas em relação à solução extrapolada foram:

$$Erro_{Malha\ 5} = \frac{|16{,}90-16{,}94|}{16{,}94} \times 100 \approx 0{,}26\% \qquad (7.12)$$

$$Erro_{Malha\ 4} = \frac{|16{,}41-16{,}94|}{16{,}94} \times 100 \approx 3{,}15\% \qquad (7.13)$$

$$Erro_{Malha\ 3} = \frac{|16{,}36-16{,}94|}{16{,}94} \times 100 \approx 3{,}45\% \qquad (7.14)$$

O índice de convergência entre as duas malhas mais refinadas foi calculado por:

$$GCI_{21} = \frac{1{,}25|\frac{H_1-H_2}{H_1}|}{r_{21}^{p}-1} \times 100 \qquad (7.15)$$

Substituindo-se os valores:

$$GCI_{21} \approx 0{,}33\% \qquad (7.16)$$

De modo complementar, para o par Malha 4–Malha 3, obtém-se:

$$GCI_{32} \approx 0{,}03\% \qquad (7.17)$$

Os resultados indicam que a incerteza numérica associada à discretização, medida entre as duas malhas mais refinadas, é baixa. O valor $GCI_{21} \approx 0{,}33\%$confirma que a solução para a variável H já se encontra muito próxima da resposta extrapolada na faixa das malhas mais densas.

7.3.4 Seleção da malha de trabalho

A análise conjunta das curvas de contorno, das dimensões geométricas (H e W) e do custo computacional permite consolidar a Malha 3 como malha de trabalho para o restante do estudo. Do ponto de vista qualitativo, a Malha 3 reproduz de maneira consistente a forma da seção transversal extrudada, com desvios discretos em relação às malhas mais refinadas. Do ponto de vista quantitativo, adota-se como critério de aceitabilidade a estabilização das variáveis H e W dentro de uma faixa de variação inferior a 1% entre malhas consecutivas, condição verificada a partir da Malha 3.

Do ponto de vista do erro de discretização, os valores de GCI obtidos para as malhas 3, 4 e 5 confirmam que as três configurações se encontram na zona de estabilização da variável H, com incertezas numéricas de baixa magnitude. Embora a Malha 4 possua refinamento superior, o ganho geométrico resultante não é proporcional ao aumento de custo computacional. A Malha 5, por sua vez, demanda mais de 80 horas de simulação e apresenta desvio de apenas 0,26% em relação à

solução extrapolada — redução marginal frente à Malha 3 (3,45%) que não justifica o custo envolvido no contexto desta pesquisa. Ressalta-se que essa escolha é fundamentada em critérios de eficiência numérica, conforme recomendado pelo protocolo de verificação e validação em CFD (AIAA, 1998; OBERKAMPF; ROY, 2010), e é anterior à etapa de validação do modelo, na qual a Malha 3 será confrontada com dados experimentais e numéricos da literatura. Com a Malha 3 estabelecida como configuração de trabalho, os estudos paramétricos apresentados na seção seguinte foram conduzidos sob essa resolução espacial.

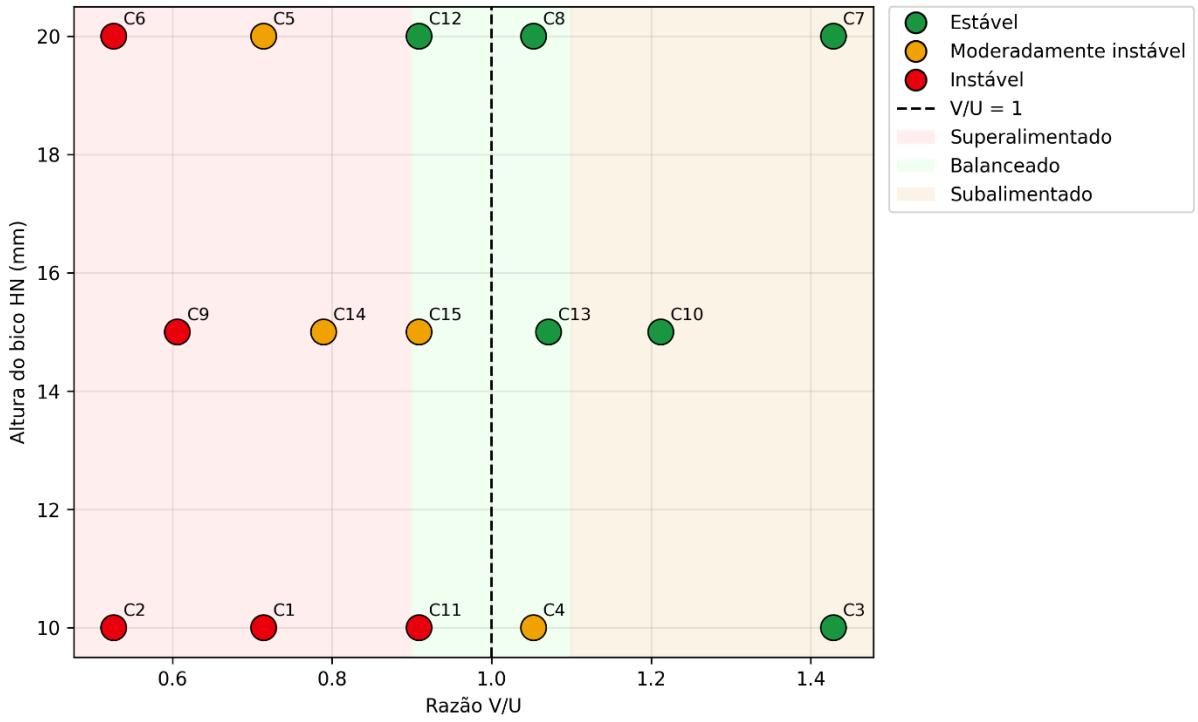
7.4 ESTUDOS PARAMÉTRICOS

A análise dos resultados dos estudos paramétricos foi estruturada de forma progressiva, partindo da identificação dos regimes operacionais no espaço paramétrico (V/U, H_N), passando pela quantificação contínua das respostas geométricas, pela confirmação visual dos perfis transversais e, por fim, pela avaliação integrada por meio do índice de qualidade: incluindo sua aplicação aos dados numéricos da literatura.

7.4.1 Classificação dos Regimes operacionais e identificação dos padrões de estabilidade

O ábaco operacional (Figura 70) apresenta os quinze casos simulados no plano definido pelas variáveis V/U e H_N, com a classificação de estabilidade obtida a partir dos critérios geométricos estabelecidos na metodologia: a perda de altura relativa (P_H, Eq. 6.7) e o espalhamento lateral normalizado (E_L, Eq. 6.8), cujos limiares de corte entre as classes estável, moderadamente instável e instável são os definidos na Seção 6.5.3.1 e cujos valores por caso constam da Tabela 29. Os três domínios de regime de alimentação: superalimentado (V/U < 0,9), balanceado (0,9 ≤ V/U ≤ 1,1) e subalimentado (V/U > 1,1), delimitam regiões com comportamentos de estabilidade distintos, embora a fronteira entre estabilidade e instabilidade não coincida exatamente com os limites de regime, dado o papel modulador de H_N.

Figura 70 – Ábaco operacional: classificação dos casos no plano V/U × HN



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

No regime subalimentado (V/U > 1,1), todos os casos — C3 (H_N = 10 mm; V/U = 1,43), C7 (H_N = 20 mm; V/U = 1,43) e C10 (H_N = 15 mm; V/U = 1,21) — foram classificados como estáveis, indicando que a menor disponibilidade de material por unidade de comprimento atua como fator protetor da integridade geométrica do filete no intervalo de H_N investigado (10–20 mm).

No regime superalimentado (V/U < 0,9), a estabilidade foi sistematicamente comprometida, com grau de instabilidade modulado por H_N. Os casos C1 (H_N = 10 mm), C2 (H_N = 10 mm), C6 (H_N = 20 mm) e C9 (H_N = 15 mm) foram classificados como instáveis, enquanto C5 (H_N = 20 mm) e C14 (H_N = 15 mm) apresentaram instabilidade moderada. Esse padrão confirma que alturas de bico maiores atenuam as consequências geométricas da superalimentação — reduzindo o espalhamento lateral de 186,64% (C2, H_N = 10 mm) a 112,32% (C6, H_N = 20 mm) para a mesma razão V/U = 0,53, sem eliminar o regime desfavorável.

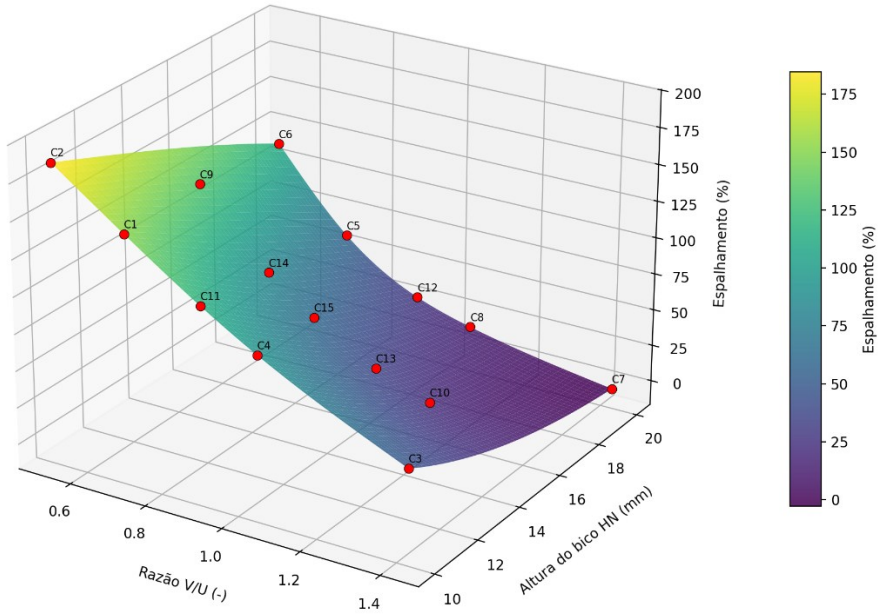
O regime balanceado (0,9 ≤ V/U ≤ 1,1) apresentou o espectro mais amplo de resultados, com HN determinando o desfecho geométrico. Os casos C8 (HN = 20 mm), C12 (HN = 20 mm) e C13 (HN = 15 mm; V/U = 1,071) foram classificados como estáveis; C4 (HN = 10 mm) e C15 (HN = 15 mm), como moderadamente instáveis; e

C11 (HN = 10 mm), como instável. Cabe observar que C13, embora classificado como estável dentro do regime balanceado, opera com V/U = 1,071 — próximo ao limite superior do intervalo (V/U = 1,1) —, o que coloca esse caso na borda do regime sem formalmente pertencer ao subalimentado. O caso C11 é paradigmático: opera com a mesma razão V/U ≈ 0,91 e as mesmas velocidades absolutas de C12 (V = 30 mm/s; U = 33 mm/s), diferindo exclusivamente em HN (10 mm versus 20 mm). A instabilidade de C11 — com espalhamento lateral de 117,44% e razão de aspecto AR = 0,190, frente a 26,64% e AR = 0,603 de C12 — não decorre de desequilíbrio cinético de alimentação, mas de restrição geométrica imposta pela baixa altura do bico, mecanismo distinto da instabilidade por superalimentação que evidencia a necessidade de tratar os dois parâmetros como variáveis interdependentes.

7.4.2 Quantificação das respostas geométricas: Espalhamento e Razão de Aspecto

A representação contínua das respostas geométricas no espaço paramétrico, obtida por interpolação bidimensional cúbica com a função *griddata()* do módulo *scipy.interpolate*, complementa a análise discreta da seção anterior com a quantificação das tendências globais e com a estimativa, por interpolação, do espalhamento em condições intermediárias de V/U e H_N não contempladas diretamente pelos 15 casos simulados (dentro da faixa ensaiada). A superfície tridimensional do espalhamento (Figura 71) oferece uma visão quantitativa do gradiente de resposta: o espalhamento decresce continuamente à medida que V/U e H_N aumentam, com os valores máximos concentrados na região de baixo V/U e baixo H_N.

Figura 71 – Superfície 3D do espalhamento em função de V/U e HN

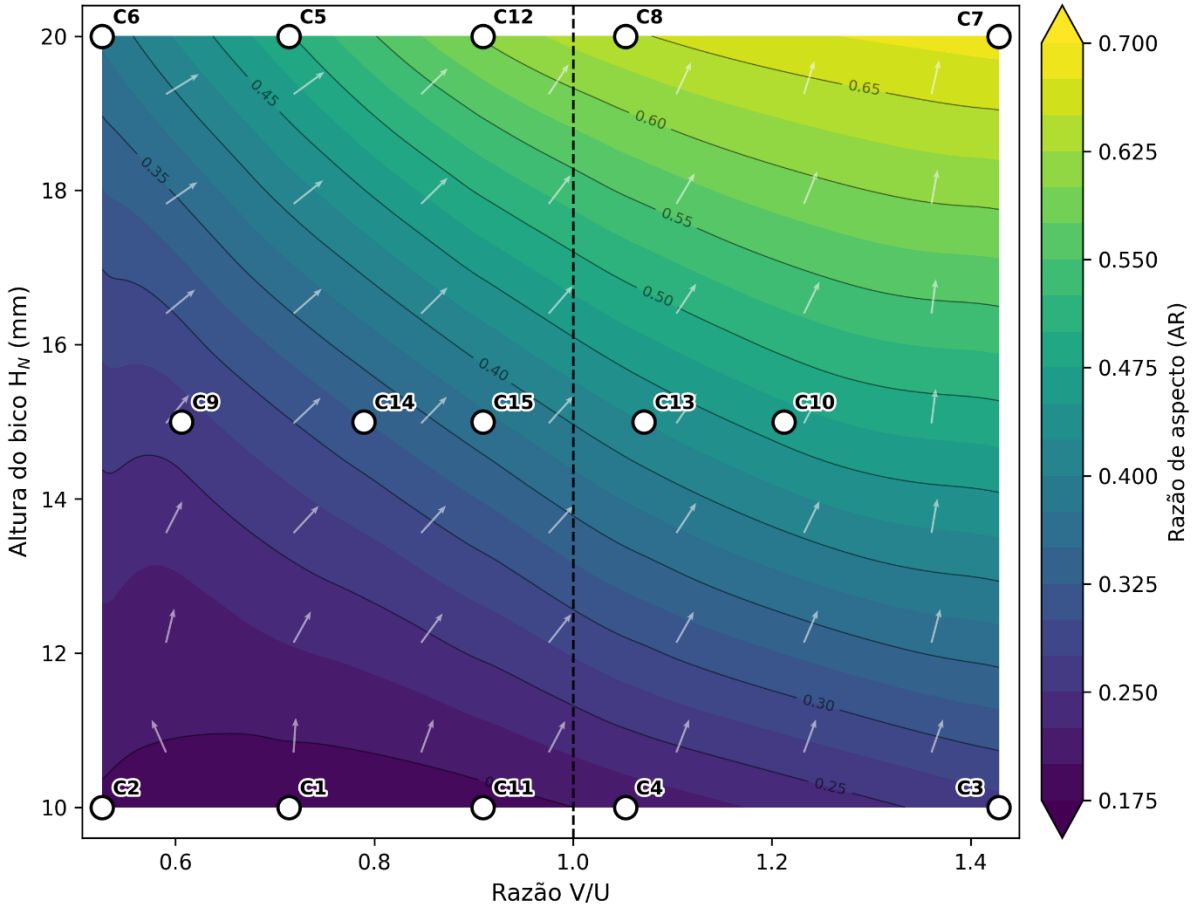


Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A superfície confirma quantitativamente essa tendência. O espalhamento máximo ocorre em C2 (H_N = 10 mm; V/U = 0,53), onde EL = 186,64 %, e o mínimo em C7 (H_N = 20 mm; V/U = 1,43), onde EL = −3,04 %. Como o espalhamento expressa a variação percentual da largura do filete em relação à largura de referência de 25 mm (igual ao diâmetro do bico de extrusão), esse valor negativo indica que o filete é mais estreito do que o de referência, resultado esperado para o regime subalimentado extremo e coerente com a menor disponibilidade de material por unidade de comprimento. Essa superfície fornece, contudo, uma leitura de conjunto; a análise quantitativa detalhada, caso a caso, é conduzida pelo mapa de razão de aspecto (Figura 72), que apresenta as mesmas tendências por meio de isolinhas legíveis e com os casos individualmente identificados.

O mapa da razão de aspecto (AR = altura/largura), apresentado na Figura 72, traduz em termos geométricos quantitativos o padrão de estabilidade identificado no ábaco. Sobre o mapa sobrepõe-se o campo de gradiente da superfície (setas), que indica, em cada ponto, o sentido de maior aumento do AR.

Figura 72 – Mapa contínuo da razão de aspecto (AR)



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Entende-se por qualidade geométrica do filete a fidelidade da seção transversal do cordão efetivamente depositado em relação à geometria pretendida: isto é, a capacidade do material de preservar a altura projetada, resistir ao espalhamento lateral e ao abatimento (*slump*) e manter contornos bem definidos e empilháveis, condição essencial para a construtibilidade das camadas subsequentes. A razão de aspecto opera como descritor quantitativo dessa qualidade: valores mais altos de AR correspondem a cordões de seção alta e estreita, que retêm a forma, ao passo que valores baixos indicam filetes achatados e espraiados, com perda de definição. Os valores de AR variam de 0,184 (C1: H_N = 10 mm; V/U = 0,71) a 0,687 (C7: H_N = 20 mm; V/U = 1,43) — uma variação de aproximadamente 3,7 vezes na qualidade geométrica do filete ao longo do domínio investigado.

O campo de gradiente sobreposto ao mapa, Figura 72, (setas brancas) torna explícitos dois aspectos. Primeiro, quanto ao sentido: as setas apontam

predominantemente para cima, revelando que a altura do bico é o parâmetro dominante sobre a razão de aspecto — o ganho de qualidade geométrica decorre, sobretudo, do aumento de H_N. A leve inclinação das setas para a direita, associada à inclinação negativa das isolinhas, indica uma compensação parcial entre os parâmetros: um mesmo nível de AR pode ser obtido por diferentes combinações de V/U e H_N. Segundo, quanto à intensidade: a densidade das isolinhas é maior na faixa de H_N elevado, onde elas se comprimem, indicando que ali pequenas variações produzem mudanças geométricas mais expressivas. Já a região de baixo H_N — sobretudo em baixo V/U (casos C1, C2 e C11) — forma um patamar largo e achatado de baixa razão de aspecto, com isolinhas espaçadas e gradiente mínimo, no qual o AR permanece sistematicamente baixo e pouco sensível aos parâmetros. Essa mesma região concentra os casos instáveis identificados no ábaco — não por elevada sensibilidade geométrica, mas pela combinação de material excedente (elevado espalhamento) e filete pouco definido.

7.4.2.1 Integração entre a classificação e a justificativa geométrica

A leitura conjunta do ábaco (Figura 70), da superfície de espalhamento (Figura 71) e do mapa de razão de aspecto (Figura 72) permite justificar geometricamente a classificação de estabilidade dos quinze casos. As duas respostas geométricas são complementares: o espalhamento mede o quanto o filete transbordou lateralmente em relação à largura de referência, enquanto o AR mede o quanto a seção resultante ficou achatada. Analisados por regime de alimentação, esses descritores explicam de forma coerente a condição de estabilidade atribuída a cada caso C*i*.

No regime superalimentado (V/U < 0,9) concentram-se os casos mais críticos. O excedente de material eleva o espalhamento aos maiores níveis da matriz e comprime a razão de aspecto, sobretudo nas menores alturas de bico: C1 (AR = 0,184; E_L = 151,76 %) e C2 (AR = 0,197; E_L = 186,64 %), ambos com H_N = 10 mm, apresentam os filetes mais degradados e são classificados como instáveis. O efeito da altura do bico é nítido: para o mesmo V/U ≈ 0,71, o aumento de H_N de 10 para 20 mm eleva o AR de 0,184 (C1, instável) para 0,497 (C5, moderadamente instável) e reduz o espalhamento de 151,76 % para 58,40 %, atenuando a severidade da instabilidade. Ainda assim, quando o excedente de material é muito elevado, como em C6 (H_N = 20 mm; E_L = 112,32 %), nem mesmo o maior afastamento do bico é

suficiente para estabilizar o processo.

No regime balanceado (0,9 ≤ V/U ≤ 1,1), a altura do bico torna-se o fator decisivo. Fixando V/U ≈ 0,91, observa-se um gradiente vertical claro: C12 (H_N = 20 mm; AR = 0,603; E_L = 26,64 %) é estável, C15 (H_N = 15 mm; AR = 0,368; E_L = 61,04 %) é moderadamente instável e C11 (H_N = 10 mm; AR = 0,190; E_L = 117,44 %) é instável. O mesmo padrão repete-se em torno de V/U ≈ 1,05, com C8 (H_N = 20 mm; E_L = 14,96 %) estável e C4 (H_N = 10 mm; E_L = 95,04 %) apenas moderadamente instável. Isso revela que o balanceamento da alimentação é condição necessária, mas não suficiente: sob bico muito próximo do substrato, o espalhamento residual mantém-se elevado o bastante para comprometer a geometria do cordão. A estabilidade plena, nessa faixa, só se estabelece quando a alimentação equilibrada é combinada a uma altura de bico suficiente: com H_N = 20 mm, V/U ≈ 0,91 já basta (C12), ao passo que, com H_N = 15 mm, o caso com V/U = 0,909 (C15) permanece moderadamente instável e a estabilidade só é alcançada com V/U próximo do limite superior do regime (C13, V/U = 1,071).

No regime subalimentado (V/U > 1,1), todos os casos — C3 (H_N = 10 mm), C10 (H_N = 15 mm) e C7 (H_N = 20 mm) — são classificados como estáveis, inclusive na menor altura de bico ensaiada. A escassez de material reduz o espalhamento a valores baixos ou negativos (E_L = 47,84 % em C3 e E_L = −3,04 % em C7), de modo que o filete preserva ou estreita a sua seção sem transbordamento lateral, favorecendo a definição geométrica e a estabilidade. É por isso que C3 se mantém estável apesar de H_N = 10 mm — condição que, nos demais regimes, esteve sistematicamente associada à instabilidade. Convém ressalvar, no entanto, que a subalimentação excessiva, para além da janela ensaiada, pode conduzir a descontinuidades e ao estrangulamento do cordão.

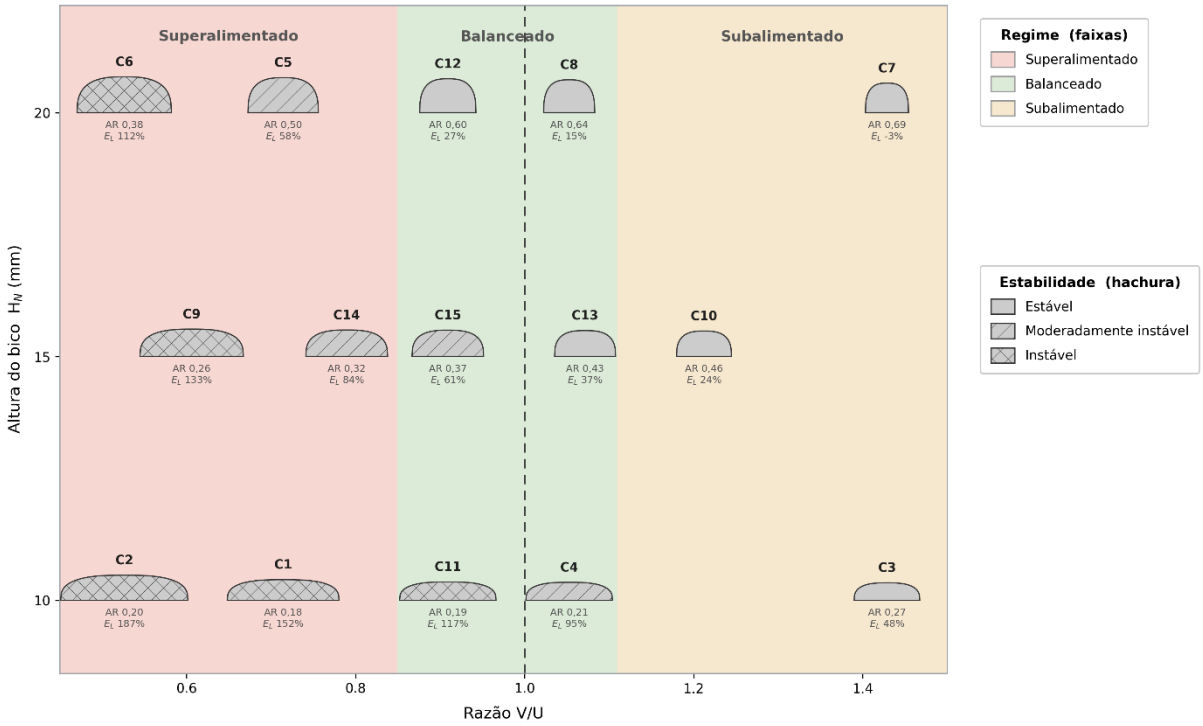
Considerados em conjunto, os dois descritores estratificam a classificação de forma consistente. O espalhamento mostra-se o discriminador mais direto da estabilidade: os casos estáveis concentram-se em $E_L \lesssim 48$ % (de −3,04 % em C7 a 47,84 % em C3), os moderadamente instáveis situam-se na faixa intermediária (≈ 58 % a 95 %) e os instáveis ultrapassam $E_L \approx 112$ %. O AR, por sua vez, descreve a qualidade geométrica do filete e acompanha essa tendência, ainda que de modo não perfeitamente monotônico — o menor AR (C1) e o maior espalhamento (C2) não coincidem no mesmo caso, pois o filete de C2, embora mais largo, é também mais alto, o que eleva ligeiramente a sua razão de aspecto. Essa complementaridade

reforça o valor de empregar as duas respostas em conjunto. Da superposição das três figuras delimita-se, por fim, a janela operacional recomendada, na qual V/U e H_N atuam de forma interdependente: para H_N = 20 mm, a estabilidade é alcançada já a partir de V/U ≈ 0,9 (C12, V/U = 0,909); para H_N = 15 mm, é necessário deslocar-se para V/U ≳ 1,07, como em C13 (V/U = 1,071) e C10 (V/U = 1,212), pois C15, com V/U = 0,909, permanece moderadamente instável; e, por todo o regime subalimentado ensaiado (V/U > 1,1), os casos são estáveis, inclusive em H_N = 10 mm (C3). É nessa região que se situam os casos estáveis C7, C8, C10, C12 e C13. Dessa forma, o ábaco indica onde operar, ao passo que a superfície de espalhamento e o mapa de razão de aspecto explicam, geometricamente, por quê.

7.4.3 Perfis transversais dos filetes simulados

As seções transversais dos quinze casos (Figura 73) constituem a verificação direta e visual dos padrões quantificados nas seções anteriores.

Figura 73 – Seções transversais dos filetes extrudados para os quinze casos simulados



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

No regime superalimentado, a comparação entre os pares C2–C6 (V/U = 0,53) e C1–C5 (V/U = 0,71), que diferem exclusivamente em H_N (10 mm versus 20 mm), ilustra

com precisão a ação moduladora da altura do bico. C2 apresenta a maior largura absoluta do conjunto (71,66 mm) e o maior espalhamento lateral (E_L = 186,64%), com acréscimo de altura de 41,00% em relação à altura do bico; C6, sob idêntica razão V/U, exibe geometria menos distorcida, largura de 53,08 mm, altura preservada em 20,20 mm e razão de aspecto AR = 0,381 frente a AR = 0,197 de C2, embora ainda classificado como instável. Vale notar que a menor razão de aspecto do conjunto não pertence a C2, mas a C1 (AR = 0,184), cujo perfil é o mais desfavorável em termos de proporção altura/largura, distinção relevante porque C2 tem maior espalhamento absoluto, enquanto C1 tem maior achatamento relativo. A mesma gradação é observada entre C1 e C5: o incremento de H_N de 10 para 20 mm reduz a largura de 62,94 para 39,60 mm e eleva a altura de 11,60 para 19,70 mm (AR de 0,184 para 0,498), atenuando as deformações sem suprimir o regime desfavorável quando V/U é substancialmente inferior à unidade.

No regime balanceado, o contraste entre C11 e C12, velocidades absolutas idênticas (V = 30 mm/s; U = 33 mm/s; V/U = 0,909), diferindo apenas em HN (10 mm e 20 mm) constitui a demonstração mais direta do papel determinante da altura do bico no regime balanceado, evidenciando que a instabilidade não é cinética, mas sim por confinamento espacial. A seção de C11 é achatada e alargada (largura = 54,36 mm; altura = 10,31 mm; AR = 0,190), compatível com deposição instável; a de C12 exibe forma regular (largura = 31,66 mm; altura = 19,09 mm; AR = 0,603), classificada como estável. A comparação adicional entre C15 (HN = 15 mm; Mod. instável; V/U = 0,909) e C13 (HN = 15 mm; Estável; V/U = 1,071) revela que, mesmo dentro do regime balanceado, o deslocamento de V/U em direção ao limite superior do intervalo favorece adicionalmente a qualidade geométrica, a largura reduz de 40,26 para 34,30 mm e o AR aumenta de 0,368 para 0,426, efeito de segunda ordem que atua sobre a tendência primária estabelecida por HN. É importante ressaltar que C13 permanece formalmente dentro do regime balanceado (V/U = 1,071 ≤ 1,1), não sendo classificado como subalimentado pelo critério adotado na metodologia.

No regime subalimentado, C3, C7 e C10 apresentam os perfis mais estreitos e esbeltos do conjunto, com menor base de contato e maiores razões de aspecto entre os casos de mesmo nível de HN, confirmando a estabilidade universal desse regime no intervalo de HN investigado. A comparação entre C3 (HN = 10 mm; AR = 0,265; EL = 47,84%) e C7 (HN = 20 mm; AR = 0,687; EL = −3,04%), ambos com V/U = 1,43, ilustra que alturas de bico maiores produzem geometrias adicionalmente melhores

mesmo nesse regime, com C7 exibindo filete mais estreito do que o próprio perfil de referência (EL negativo), embora a variação de HN não altere a classificação de estabilidade, permanecendo ambos como estáveis. Cabe ponderar, contudo, que a contenção do espalhamento no regime subalimentado é acompanhada de menor volume depositado por camada, o que pode comprometer a continuidade estrutural em aplicações de impressão multicamada.

7.4.4 Índice de Qualidade

A avaliação do índice de qualidade geométrica é apresentada em duas etapas. Inicialmente, verifica-se a robustez da ponderação adotada na formulação do índice por meio de uma análise de sensibilidade dos pesos (Seção 7.4.4.1), de modo a assegurar que o ordenamento de qualidade dos casos não depende de forma crítica dos valores específicos atribuídos a cada termo. Em seguida, o índice é aplicado aos quinze casos do estudo paramétrico (Seção 7.4.4.2) e avaliado segundo três critérios complementares: (i) coerência com a classificação qualitativa de estabilidade; (ii) tendência em função dos parâmetros operacionais; e (iii) capacidade de generalização para dados numéricos independentes.

7.4.4.1 Análise de sensibilidade dos pesos

A robustez do índice de qualidade frente à ponderação adotada foi confirmada pela análise de sensibilidade. O ordenamento de qualidade dos quinze casos manteve-se altamente estável entre as cinco configurações de pesos avaliadas, avaliado pelos coeficientes de correlação de postos de Spearman (1904) e de Kendall (1938), conforme sistematizado por Conover (1999): a correlação entre a configuração adotada e as demais permaneceu elevada, com ρ entre 0,936 e 0,986 e τ entre 0,810 e 0,924 (Tabela 27).

Tabela 27 – Correlação de postos entre a configuração de pesos adotada (0,40/0,30/0,30) e as configurações alternativas

Configuração de pesos ($w_1/w_2/w_3$)	**Spearman (ρ)**	**Kendall (τ)**	**Deslocamento máx. (posições)**
Adotada (0,40/0,30/0,30) — referência	1,000	1,000	0
Equitativa (1/3 / 1/3 / 1/3)	0,975	0,886	2
Conservação moderada^{+} (0,50/0,25/0,25)	0,986	0,924	1

Conservação dominante (0,60/0,20/0,20)	0,979	0,905	2
Menor conservação (0,20/0,40/0,40)	0,936	0,810	3

Nota: os coeficientes de Spearman (ρ) e de Kendall (τ) medem a concordância entre o ordenamento de qualidade produzido pela configuração adotada e o obtido por cada configuração alternativa; valores próximos de 1 indicam ordenamentos praticamente idênticos. A configuração adotada corresponde à referência (ρ = τ = 1,000). O índice normalizado (IQ_n) de cada caso sob as cinco configurações é detalhado na Tabela 28.

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

O deslocamento máximo observado no ranking foi de apenas uma a três posições, mesmo nas configurações extremas. O caso de pior desempenho geométrico (C2) manteve-se invariante em todas as ponderações. Os casos C12, C13 e C15 ocuparam as três primeiras posições em quatro das cinco configurações (com C15 em primeiro lugar nas configurações de maior ênfase à conservação volumétrica, 0,50/0,25/0,25 e 0,60/0,20/0,20); apenas na configuração de menor ênfase à conservação volumétrica (0,20/0,40/0,40) C8 ocupou a terceira posição.

Tabela 28 - Índice de qualidade normalizado (IQ_n) dos quinze casos sob as cinco configurações de pesos avaliadas

Caso	**Adotada (0,40/0,30/0,30)**	**Equitativa (1/3)**	**Conserv. mod.⁺ (0,50/0,25/0,25)**	**Conserv. dom. (0,60/0,20/0,20)**	**Menor conserv. (0,20/0,40/0,40)**
C1	0,549	0,524	0,587	0,624	0,474
C2	0,144	0,120	0,180	0,217	0,072
C3	0,712	0,735	0,679	0,645	0,780
C4	0,804	0,792	0,822	0,840	0,769
C5	0,859	0,853	0,867	0,876	0,842
C6	0,510	0,539	0,465	0,421	0,598
C7	0,735	0,743	0,721	0,708	0,761
C8	0,859	0,861	0,857	0,854	0,865
C9	0,498	0,517	0,469	0,441	0,555
C10	0,782	0,798	0,757	0,732	0,832
C11	0,723	0,710	0,742	0,761	0,685
C12	0,891	0,888	0,896	0,901	0,882
C13	0,883	0,881	0,887	0,891	0,875
C14	0,798	0,793	0,805	0,813	0,782
C15	0,883	0,873	0,899	0,915	0,852

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Esses resultados demonstram que as conclusões extraídas do índice são pouco sensíveis à escolha específica dos pesos, desde que preservada a hierarquia

física entre os mecanismos de degradação, o que reforça a validade metodológica da ponderação adotada.

7.4.4.2 Aplicação do índice de qualidade aos casos simulados

A Tabela 29 apresenta a aplicação do índice de qualidade geométrica aos quinze casos simulados. Para cada condição paramétrica, são reportados os parâmetros operacionais H_N e V/U, as três respostas geométricas utilizadas na formulação do índice, $area_{norm}$, E_Le P_H, o erro composto IQ, o índice normalizado IQ_ne a classificação qualitativa de estabilidade, em ordem decrescente. Essa organização permite avaliar não apenas o valor final do índice, mas também sua coerência com os mecanismos físicos considerados na formulação.

O índice de qualidade (IQ) foi avaliado segundo três critérios estabelecidos: (i) coerência com a classificação qualitativa de estabilidade; (ii) tendência em função dos parâmetros operacionais; e (iii) capacidade de generalização para dados numéricos independentes. A avaliação dos dois primeiros critérios foi realizada sobre os quinze casos numéricos. O terceiro critério foi verificado pela aplicação do índice ao conjunto ampliado de vinte e sete casos, que incorpora os doze casos numéricos de Comminal et al. (2020). Para essa etapa, os parâmetros de normalização foram recalibrados para os valores máximos do conjunto ampliado — procedimento necessário dado que os novos casos apresentam respostas geométricas que superam os máximos observados nos quinze casos originais, o que tornaria a escala original inadequada para o conjunto expandido. O que se verifica nessa etapa, portanto, não é a invariância dos valores absolutos de *IQ_n* que se alteram com a recalibração, mas a preservação das tendências e da coerência ordinal do índice quando aplicado a dados independentes em escala compatível com o conjunto avaliado.

Seguindo a formulação definida na metodologia, o erro geométrico composto IQ foi calculado a partir dos pesos $w_1 = 0{,}4$, $w_2 = 0{,}3$ e $w_3 = 0{,}3$, adotando-se $E_{ref} = 186{,}64\%$ e $H_{ref} = 41{,}00\%$ como valores de referência para normalização. Em seguida, o índice normalizado de qualidade foi obtido por $IQ_n = 1 - IQ$. Os resultados dos casos analisados são apresentados na Tabela 29, em ordem decrescente de desempenho geométrico das condições de deposição.

Tabela 29 – Parâmetros operacionais, respostas geométricas e Índice de Qualidade geométrica dos quinze casos simulados

Caso	H_N (mm)	V/U	Classificação qualitativa	$área_{norm}$	E_L (%)	P_H (%)	IQ	IQ_n
C12	20	0,909	Estável	0,919	26,64	4,55	0,109	0,891
C15	15	0,909	Moderadamente instável	0,978	61,04	1,33	0,117	0,883
C13	15	1,071	Estável	0,906	37,20	2,667	0,117	0,883
C8	20	1,053	Estável	0,843	14,96	7,35	0,140	0,860
C5	20	0,714	Moderadamente instável	0,909	58,40	1,50	0,141	0,859
C4	10	1,053	Moderadamente instável	0,911	95,04	−1,00	0,196	0,804
C14	15	0,789	Moderadamente instável	1,156	84,00	0,667	0,202	0,798
C10	15	1,212	Estável	0,632	23,60	4,533	0,218	0,782
C7*	20	1,429	Estável	0,656	−3,04	16,80	0,266	0,734
C11	10	0,909	Instável	0,836	117,44	−3,10	0,277	0,723
C3	10	1,429	Estável	0,510	47,84	2,00	0,287	0,713
C1	10	0,714	Instável	1,225	151,76	−16,00	0,451	0,549
C6	20	0,526	Instável	1,756	112,32	−1,00	0,490	0,510
C9	15	0,606	Instável	1,673	132,88	−2,667	0,502	0,498
C2	10	0,526	Instável	1,639	186,64	−41,00	0,856	0,144

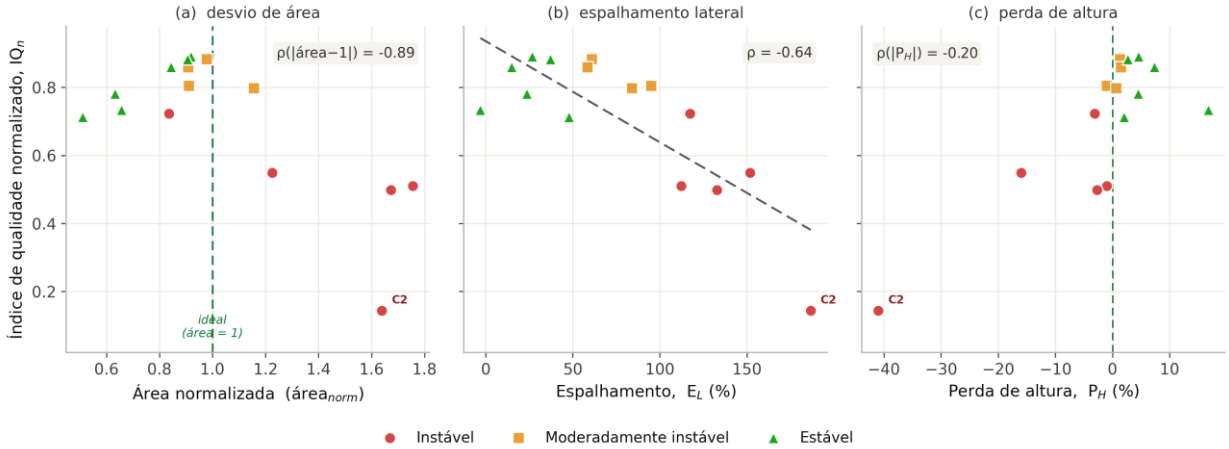
Fonte: Elaborada pela autora (2026).

* C7: $|P_H|$ = 16,8 % situaria o caso, isoladamente, na faixa moderadamente instável. Mantido como estável (redução de altura esperada e benigna no regime subalimentado, com E_L = −3,04 % governando a geometria). Classificação conforme o critério adotado para o regime subalimentado (Seção 6.5.3.1).

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A Figura 74 confronta o IQ_n com as três respostas geométricas que compõem o índice, evidenciando a coerência com os mecanismos físicos considerados na formulação. Nos quinze casos numéricos, o desvio da área normalizada em relação ao valor ideal ($área_{norm}$ = 1) é o fator que mais deprime o índice (correlação de postos $\rho \approx -0{,}89$), seguido do espalhamento lateral (E_L; $\rho \approx -0{,}64$); a perda de altura (P_H) exerce influência mais fraca ($\rho \approx -0{,}20$). A distribuição das cores confirma o comportamento físico esperado: os casos instáveis concentram-se sistematicamente na extremidade desfavorável de cada resposta, com destaque para C2, o pior caso do conjunto.

Figura 74 – Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função das três respostas geométricas que compõem o índice: (a) área normalizada; (b) espalhamento lateral EL; (c) perda de altura PH.



Nota: Pontos coloridos por classe de estabilidade (quinze casos numéricos).
Fonte: Elaborada pela autora (2026)

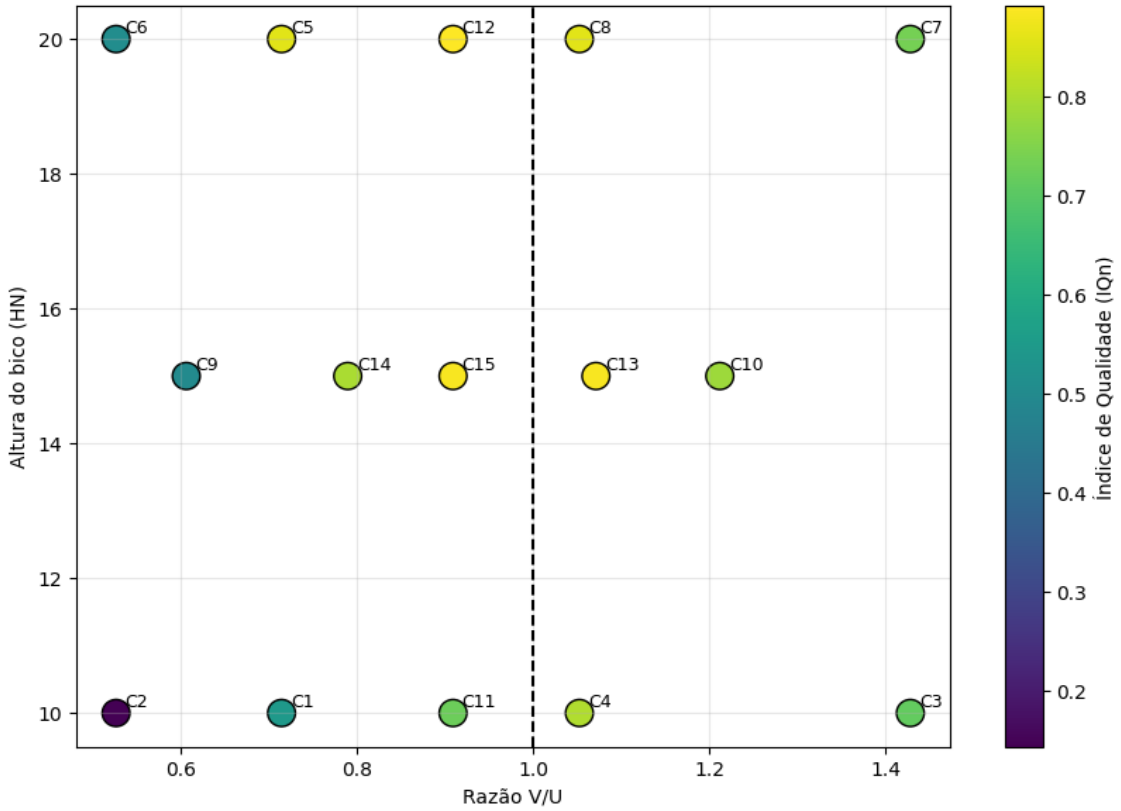
7.4.4.3 Coerência com a classificação qualitativa de estabilidade

O mapa do índice de qualidade (Apêndice E) para os quinze casos numéricos (Figura 75) apresenta gradiente espacial compatível com a tendência geral da classificação de estabilidade obtida pelo ábaco operacional (Figura 70), com correlação de postos de Spearman $\rho = 0{,}65$ e de Kendall $\tau = 0{,}51$ ($p < 0{,}02$) entre a classe ordinal de estabilidade e o IQ_n — coeficientes adequados à natureza ordinal da classificação e coerentes com o procedimento de correlação de postos adotado na análise de sensibilidade. O índice é mínimo na região instável, baixo V/U e baixa H_N, e máximo na faixa balanceada de maior altura de bico: o menor valor é observado em C2 (V/U = 0,53; H_N = 10 mm; IQ_n = 0,144), o caso mais instável do conjunto, e o maior em C12 (V/U = 0,91; H_N = 20 mm; IQ_n = 0,891).

A correspondência, contudo, não é estritamente monotônica. Por ser unimodal em V/U, o IQ_n atribui valores intermediários a casos classificados como estáveis na zona subalimentada notadamente C7, que registra IQ_n = 0,734 apesar de combinar o maior V/U com o maior H_N do conjunto, além de C10 e C3 e, inversamente, valores elevados a casos moderadamente instáveis, como C5 e C15. Esse comportamento reflete a diferença de forma entre as duas escalas: a classificação de estabilidade é monótona e saturante em relação a V/U, enquanto o IQ_n penaliza tanto o excesso

(subalimentação) quanto a deficiência (superalimentação) de avanço, atingindo seu máximo próximo ao equilíbrio.

Figura 75 – Mapa do índice de qualidade (IQn) para os quinze casos numéricos



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A separação entre as classes é apenas parcial: os cinco casos instáveis apresentam IQ_n no intervalo 0,144–0,723 (média 0,485), enquanto todos os casos moderadamente instáveis situam-se no intervalo 0,798–0,883 (média 0,836) e os casos estáveis no intervalo 0,713–0,891 (média 0,810). O limiar entre Instável e Moderadamente instável é bem definido, o máximo dos instáveis (C11; IQ_n = 0,723) fica abaixo do mínimo dos moderadamente instáveis (C14; IQ_n = 0,798), o que confirma que o índice discrimina corretamente esses dois grupos. A separação entre Moderadamente instável e Estável, contudo, não é estrita: as médias das duas classes são próximas (0,836 vs. 0,810) e seus intervalos se sobrepõem. O caso C15 (Moderadamente instável, IQ_n = 0,883) supera inclusive a média dos casos Estáveis, evidenciando que estabilidade dinâmica do regime e qualidade geométrica do depósito são grandezas relacionadas, porém não equivalentes. Para C15, a geometria

do cordão resultante mostrou-se bem preservada mesmo sob condições dinamicamente menos estáveis, o que o IQ_n captura corretamente ao avaliar o produto final da deposição, independentemente do mecanismo que o originou.

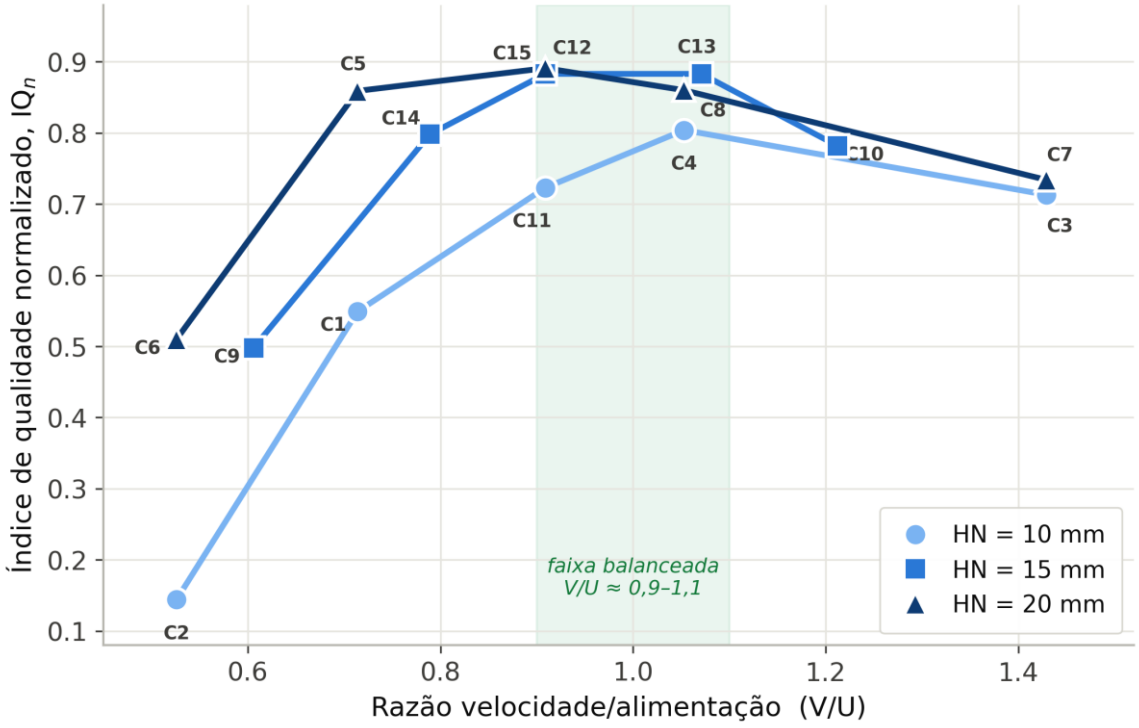
Um resultado de particular interesse é a comparação entre C11 (regime balanceado, instável, H_N = 10 mm; IQ_n = 0,723) e C1 (regime superalimentado, instável, H_N = 10 mm; IQ_n = 0,549). Embora pertençam a regimes cinéticos distintos, a diferença entre seus índices é de apenas 0,174, substancialmente menor do que os saltos associados à variação de H_N descritos na seção seguinte. Essa proximidade reflete que ambos compartilham a mesma altura de bico reduzida e, portanto, o mesmo nível de compressão geométrica, demonstrando que o IQ_n captura a natureza física da degradação independentemente do mecanismo que a originou.

7.4.4.4 Tendência em função dos parâmetros operacionais

O IQ_n apresenta gradiente crescente com ambos os parâmetros operacionais. No eixo de HN, a progressão é clara: os cinco casos com H_N = 10 mm apresentam IQ_n médio de 0,587 (intervalo 0,144–0,804), os cinco casos com H_N = 15 mm alcançam média de 0,769 (0,498–0,883) e os cinco casos com H_N = 20 mm atingem 0,771 (0,510–0,891). O salto mais expressivo ocorre entre H_N = 10 mm e H_N = 15 mm (+0,182 na média), ao passo que a diferença entre H_N = 15 mm e H_N = 20 mm é marginal (+0,002), sugerindo que os benefícios geométricos do aumento de H_N se concentram na transição do nível mais baixo.

No eixo de V/U, a tendência geral é também crescente dentro de cada nível de H_N, porém não monotônica, conforme evidencia a Figura 76. Em todos os três níveis de H_N, o IQn cresce a partir dos valores baixos de V/U, atinge um patamar na faixa V/U ≈ 0,9–1,1 — a região balanceada do ábaco — e recua nos extremos, tanto abaixo de 0,6 quanto acima de 1,3. O ganho ao longo dessa faixa é expressivo (por exemplo, +0,381 entre C6 e C12, em H_N = 20 mm), e o formato unimodal, comum aos três níveis, indica a existência de uma janela ótima de V/U independente da altura de bico.

Figura 76 - Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função da razão velocidade/alimentação (V/U), por nível de altura de bico (H_N), para os quinze casos numéricos



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A comparação direta entre os efeitos dos dois parâmetros sugere maior influência de H_N, de forma apenas indicativa. Mantendo V/U constante em 0,714, a elevação de H_N de 10 para 20 mm (C1 → C5) produz uma variação de IQ_n de +0,310. Para referência, a variação de V/U de 0,61 a 1,21 dentro de H_N = 15 mm (C9 → C10), uma amplitude de 0,606 em V/U, produz uma variação de IQ_n de +0,284, efeito comparável, mas obtido com uma excursão paramétrica muito maior. As correlações de postos calculadas individualmente para o conjunto de quinze casos — $\rho = 0,42$ ($\tau = 0,33$) para H_N e $\rho = 0,43$ ($\tau = 0,29$) para V/U — têm magnitude semelhante e, com $n = 15$, não são estatisticamente significativas ($p \approx 0,12$ e $p \approx 0,11$, respectivamente, para ρ); portanto, não sustentam, por si sós, a predominância de um parâmetro sobre o outro. Além disso, por medirem apenas associação monotônica, esses coeficientes não resumem adequadamente o efeito de V/U, que é unimodal (Figura 76), ao passo que o efeito de H_N se manifesta de forma mais abrupta na transição entre níveis discretos. A indicação de maior influência de H_N apoia-se, assim, principalmente na comparação direta dos casos pareados, e não nos coeficientes de correlação.

7.4.4.5 Capacidade de generalização: validação com dados da literatura

A aplicação do IQ aos vinte e sete casos (Tabela 30; Figura 77) com os parâmetros de normalização recalibrados para os máximos do conjunto ampliado (E_L = 216,16%; P_H = 73,867%) revela que os casos de Comminal et al. (2020) seguem o mesmo padrão espacial observado nos dados numéricos originais: IQ_n crescente com H_N e com V/U, com os menores valores concentrados na região de H_N reduzido e V/U baixo. A correlação de postos entre a classe ordinal de estabilidade e o IQ_n para o conjunto ampliado é $\rho = 0,74$ ($\tau = 0,60$; $p < 0,001$), valor consistente com o $\rho = 0,65$ ($\tau = 0,51$) obtido para os quinze casos originais. A comparação direta entre os dois coeficientes deve ser interpretada com cautela, dado que as normalizações diferem entre os dois conjuntos, mas a proximidade dos valores indica que o índice mantém capacidade discriminatória semelhante na escala ampliada, sem degradação perceptível da relação com a classificação qualitativa de estabilidade. As médias por classe; Instável: 0,514 (intervalo 0,084–0,771); Moderadamente instável: 0,763 (0,555–0,901); Estável: 0,847 (0,730–0,919) apresentam separação monotônica entre as médias, embora os intervalos das três classes se sobreponham parcialmente, fenômeno já observado nos 15 casos e discutido na seção anterior.

Tabela 30 – Parâmetros operacionais, respostas geométricas e Índice de Qualidade geométrica dos vinte e sete casos (quinze próprios e doze de Comminal et al., 2020)

Caso	H_N	V/U	Classificação qualitativa	área_norm	E_L (%)	P_H (%)	IQ	IQ_n
*C25 **	17,5	1,124	Estável	0,912	12,36	-7,03	0,081	0,919
C12	20	0,909	Estável	0,919	26,64	4,55	0,088	0,912
C15	15	0,909	Moderadamente instável	0,978	61,04	1,33	0,099	0,901
C13	15	1,071	Estável	0,906	37,20	2,67	0,100	0,900
C8	20	1,053	Estável	0,843	14,96	7,35	0,113	0,887
C5	20	0,714	Moderadamente instável	0,909	58,40	1,50	0,124	0,876
*C27 **	17,5	1,355	Estável	0,716	-4,68	0,97	0,124	0,876
*C26 **	17,5	0,868	Estável	1,139	34,88	-9,20	0,141	0,859
*C22 **	12,5	1,266	Estável	0,783	28,20	-10,00	0,167	0,833
C4	10	1,053	Moderadamente instável	0,911	95,04	-1,00	0,171	0,829
C14	15	0,789	Moderadamente instável	1,156	84,00	0,67	0,182	0,818
*C23 **	12,5	1,497	Estável	0,672	10,76	-10,24	0,188	0,812
C10	15	1,212	Estável	0,632	23,60	4,53	0,199	0,801
C7	20	1,429	Estável	0,656	-3,04	16,80	0,210	0,790
*C21 **	12,5	0,893	Instável	1,127	102,04	-8,96	0,229	0,771
C11	10	0,909	Instável	0,836	117,44	-3,10	0,241	0,759
C3	10	1,429	Estável	0,510	47,84	2,00	0,270	0,730
*C19 **	7,5	1,235	Moderadamente instável	0,794	83,80	-27,60	0,311	0,689
*C18 **	7,5	1,140	Moderadamente instável	0,885	83,00	-41,73	0,331	0,669
C1	10	0,714	Instável	1,225	151,76	-16,00	0,366	0,634

Caso	H_N	V/U	Classificação qualitativa	área_norm	E_L (%)	P_H (%)	IQ	IQ_n
*C24 **	17,5	0,595	Moderadamente instável	1,674	87,60	-13,26	0,445	0,555
C6	20	0,526	Instável	1,756	112,32	-1,00	0,462	0,538
C9	15	0,606	Instável	1,673	132,88	-2,67	0,464	0,536
*C20 **	12,5	0,649	Instável	1,567	152,96	-13,20	0,493	0,507
*C17 **	7,5	0,785	Instável	1,242	161,16	-48,93	0,519	0,481
C2	10	0,526	Instável	1,639	186,64	-41,00	0,681	0,319
*C16 **	7,5	0,551	Instável	1,791	216,16	-73,87	0,916	0,084

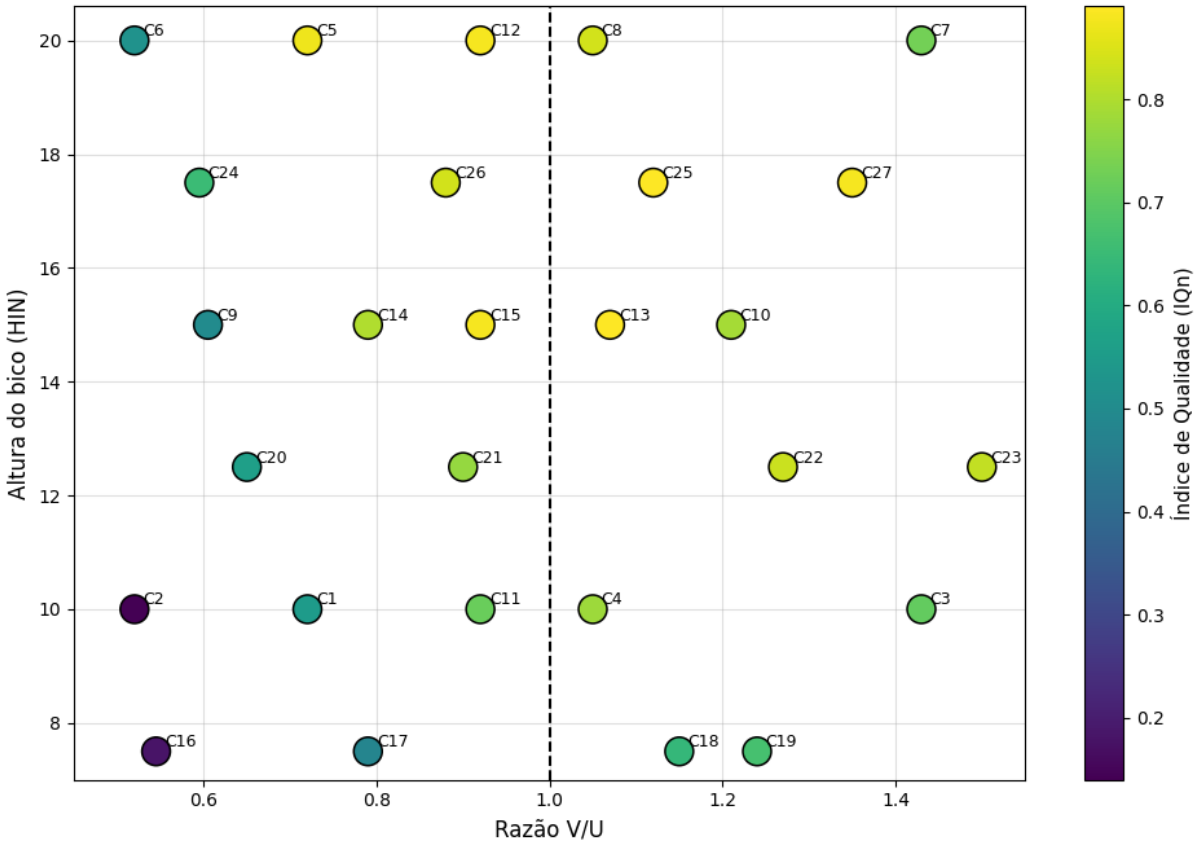
Nota: casos ordenados em ordem decrescente de IQ_n. Valores de IQ_n próximos de 1 indicam melhor desempenho geométrico.

* Casos C16–C27: dados independentes de Comminal et al. (2020), não utilizados na formulação do índice.

Parâmetros de normalização recalibrados para os máximos do conjunto ampliado ($E_{L,ref}$ = 216,16 %; $P_{H,ref}$ = 73,87 %); pesos mantidos invariantes (0,4 para área_norm; 0,3 para E_L; 0,3 para P_H). $IQ = 0{,}4\cdot|área_{norm} - 1| + 0{,}3\cdot|E_L|/E_{L,ref} + 0{,}3\cdot|P_H|/P_{H,ref}$; $IQ_n = 1 - IQ$.

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 77 — Mapa do índice de qualidade (IQ_n) para os vinte e sete casos (quinze numéricos próprios e doze de Comminal et al., 2020)



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

A coerência com os dados numéricos é confirmada pelos casos extremos (Tabela 30). C16 (H_N = 7,5 mm; V/U = 0,551; IQ_n = 0,084) torna-se o caso de pior desempenho geométrico de todo o conjunto, superando C2 (IQ_n = 0,319) e C17 (IQ_n = 0,481) na

extremidade inferior do índice, todos pertencentes ao regime superalimentado e com H_N reduzido. No extremo oposto, C25 (H_N = 17,5 mm; V/U = 1,124; IQ_n = 0,919) passa a ser o caso de melhor desempenho geométrico do conjunto ampliado, deslocando C12 (IQ_n = 0,912) para a segunda posição. Os casos C24, C25, C26 e C27 (H_N = 17,5 mm) apresentam IQ_n no intervalo 0,555–0,919, com três dos quatro classificados como estáveis, resultado coerente com o papel dominante de H_N identificado nos dados numéricos. A exceção, C24 (V/U = 0,595; IQ_n = 0,555; moderadamente instável), ilustra que a penalização pelo regime superalimentado se mantém mesmo em H_N elevado.

O conjunto ampliado trouxe, adicionalmente, um achado que não pôde ser observado nos quinze casos numéricos. Os casos C18 e C19, pertencentes ao regime subalimentado (V/U = 1,14 e V/U = 1,23, respectivamente), apresentaram IQ_n de 0,669 e 0,689, valores situados abaixo de toda a faixa dos subalimentados com HN ≥ 10 mm, cujo mínimo é 0,730 (C3; H_N = 10 mm), e foram classificados como moderadamente instáveis (EL ≈ 83%; critério do regime subalimentado, Seção 6.5.3.1). Nos 15 casos numéricos originais, todos os subalimentados eram estáveis; C18 e C19 contradizem essa generalização. A diferença reside exclusivamente em H_N: esses casos operam com altura de bico de apenas 7,5 mm — inferior ao mínimo de 10 mm investigado numericamente. Por comparação direta, os subalimentados com H_N ≥ 10 mm apresentam IQ_n médio de 0,823 (intervalo 0,730–0,919), enquanto C18 e C19 ficam em 0,679, uma diferença de 0,144 que não pode ser atribuída ao regime cinético, idêntico nos dois grupos, mas apenas ao efeito de compressão geométrica imposto pela altura de bico reduzida.

Esse resultado indica que a estabilidade do regime subalimentado possui um limite inferior de H_N: abaixo de um valor crítico de altura de bico, a compressão mecânica exercida pelo bico sobre o material extrudado compromete a integridade geométrica do filete mesmo quando o balanço cinético de alimentação é favorável. Fisicamente, quando H_N é muito reduzido, a distância entre o bico e o substrato força o espalhamento lateral do cordão independentemente da razão V/U, anulando o benefício geométrico da subalimentação. Esse achado, revelado exclusivamente pela ampliação da população amostral com dados numéricos independentes, evidencia que V/U e H_N não devem ser analisados como variáveis independentes, mas sim como parâmetros interdependentes que definem a janela de operabilidade estável do processo. Em particular, distinguem-se dois mecanismos de instabilidade

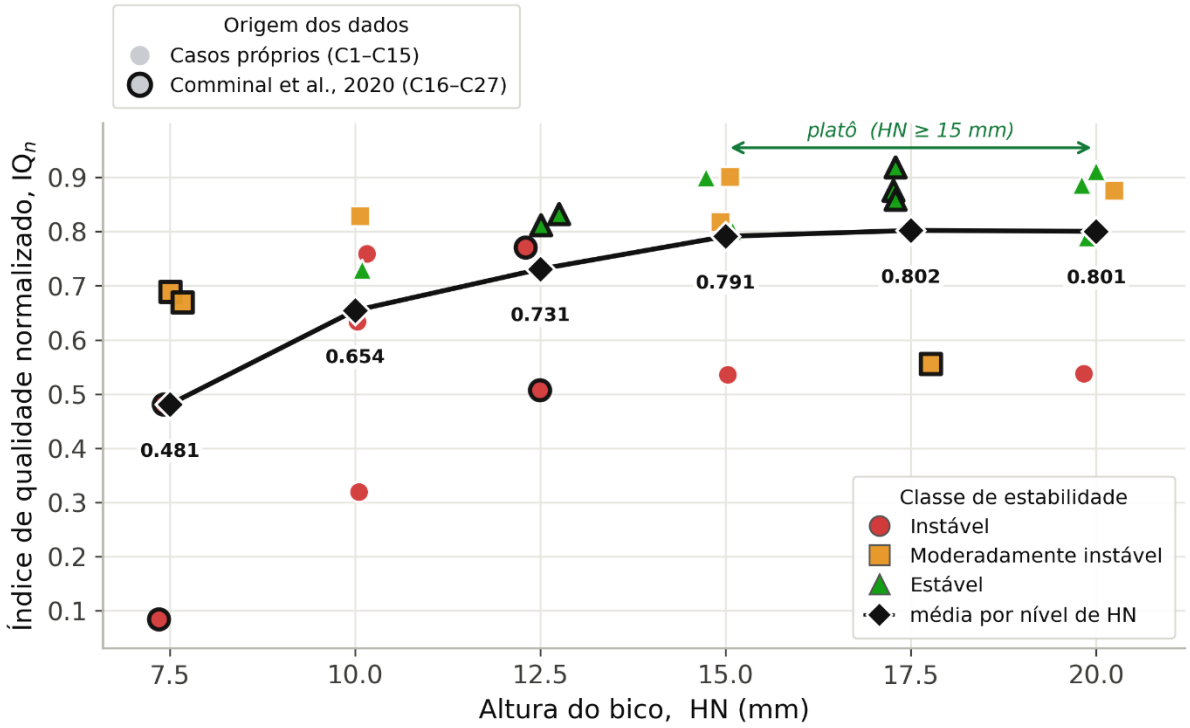
geometricamente distintos:

1. Instabilidade cinética, causada pelo desequilíbrio na alimentação de material (superalimentação), predominante em V/U < 0,9 independentemente de HN presente em C1, C2, C6, C9, C16, C17, C20 e C21.
2. Instabilidade por restrição geométrica, que ocorre quando HN é suficientemente baixo para impor compressão mecânica excessiva sobre o material extrudado, comprometendo a qualidade geométrica mesmo quando o regime cinético é favorável, identificada em C18 e C19, únicos casos subalimentados com IQ_n < 0,70 em todo o conjunto de 27.

Em conjunto, os três critérios de avaliação estabelecidos na metodologia foram atendidos pelo conjunto ampliado: o IQ_n é coerente com a classificação qualitativa de estabilidade ($\rho = 0,74$; $\tau = 0,60$), segue tendência fisicamente interpretável em função de V/U e H_N, com médias por nível de H_N crescentes de 0,481 (H_N = 7,5 mm) até estabilizarem em torno de 0,80 para $H_N \geq 15$ mm (0,791; 0,802; 0,801 em 15; 17,5 e 20 mm) e mantém as mesmas tendências quando aplicado a dados numéricos independentes, desde que os parâmetros de referência sejam corretamente recalibrados para os máximos do conjunto avaliado.

A Figura 78 sintetiza graficamente essa tendência: o IQn médio cresce de forma acentuada até H_N = 15 mm e, a partir daí, estabiliza-se num platô em torno de 0,80, confirmando que os ganhos geométricos do aumento da altura de bico se esgotam nos níveis intermediários. A coloração por classe reforça a coerência do índice: os casos instáveis predominam em H_N reduzido e os estáveis, em HN elevado.

Figura 78 – Índice de qualidade normalizado (IQ_n) em função da altura de bico HN (conjunto ampliado de 27 casos).



Nota: Losangos pretos: média por nível de HN; pontos coloridos por classe de estabilidade. A média cresce até H_N = 15 mm e estabiliza num platô em torno de 0,80.

Fonte: Elaborada pela autora (2026)

7.4.5 Fronteira de Estabilidade

A fronteira crítica de estabilidade foi construída em duas etapas, conforme previsto na metodologia. Na primeira, ajustou-se um modelo logístico binário multivariado aos quinze casos do estudo paramétrico numérico; na segunda, o mesmo modelo foi reaplicado ao conjunto ampliado de vinte e sete casos, que incorpora os doze casos numéricos de Comminal et al. (2020). As duas etapas respondem a perguntas complementares: a primeira estabelece a fronteira a partir dos dados próprios, e a segunda verifica se ela se sustenta diante de dados de origem independente e, sobretudo, de alturas de bico (H_N) fora do domínio numérico original. Os coeficientes e as equações dos dois ajustes estão reunidos na Tabela 31.

Tabela 31 — Coeficientes do modelo logístico (β_0, β_1, β_2) e equação da fronteira crítica para os dois ajustes

Parâmetro	β_0	β_1 (V/U)	β_2 (HN)	Equação da fronteira
Modelo 1 (15 casos)	−4,3303	1,2584	0,1801	(V/U)crit = 3,441 − 0,1431·HN
Modelo 2 (27 casos)	−5,8514	1,9019	0,2542	(V/U)crit = 3,077 − 0,1336·HN

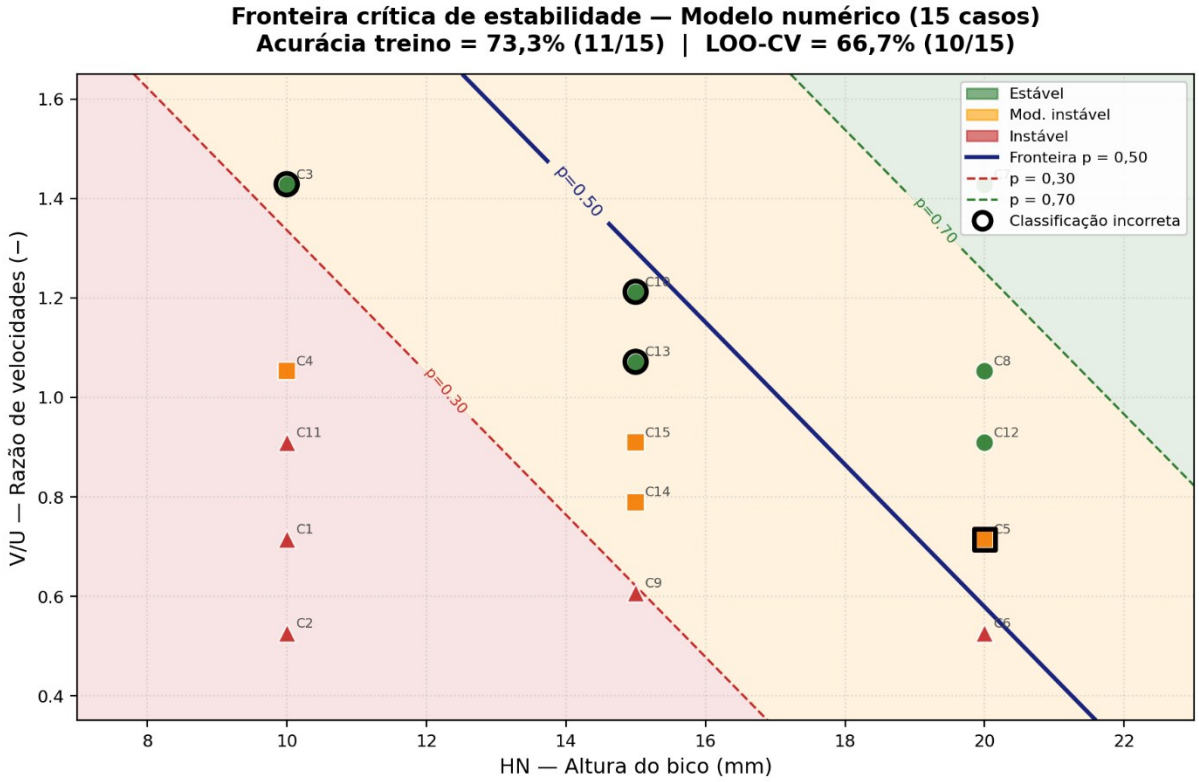
**Ajuste realizado com LogisticRegression (scikit-learn), C = 1,0, regularização L2.*
Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Em ambos os modelos, a fronteira assume a forma de uma reta no plano (V/U, H_N), consequência direta da formulação logística com dois preditores lineares, na qual o contorno de probabilidade p = 0,5 é necessariamente linear. A razão β_2/β_1 quantifica o efeito estabilizador da altura de bico: cada milímetro adicional de H_N desloca a fronteira em cerca de 0,14 unidade de V/U no modelo numérico e 0,13 unidade no modelo estendido, ampliando a janela de operação estável.

7.4.5.1 Etapa 1 — Modelo numérico (15 casos)

O ajuste aos quinze casos numéricos resultou na fronteira (V/U)crit = 3,441 − 0,1431·HN, válida para HN entre 10 e 20 mm. O modelo classificou corretamente 11 dos 15 casos (acurácia de 73,3% no treino). Os quatro erros (C3, C5, C10 e C13) concentram-se em casos limítrofes, com probabilidades estimadas entre 0,32 e 0,54, na região em que o processo transita entre estável e instável. A faixa delimitada pelas curvas p = 0,3 e p = 0,7 (Figura 79) acomoda justamente esses casos, refletindo a natureza contínua do fenômeno.

Figura 79 — Fronteira crítica de estabilidade ajustada aos quinze casos numéricos (p = 0,3; p = 0,5 e p = 0,7). Acurácia de classificação = 73,3% (11/15) no conjunto de treinamento; 66,7% (10/15) na LOO-CV



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Como avaliar o modelo nos mesmos dados usados no ajuste tende a superestimar o desempenho, sobretudo em amostras pequenas, aplicou-se a validação cruzada *leave-one-out* (LOO-CV): em cada rodada retira-se um caso, reajusta-se o modelo com os quatorze restantes e prevê-se o caso retirado. A acurácia caiu para 66,7% (10/15), com cinco erros (C3, C5, C6, C10 e C13), novamente próximos da fronteira. Essa diferença em relação ao treino revela a sensibilidade do modelo a pequenas amostras: retirar um caso limítrofe desloca a fronteira o suficiente para alterar sua classificação. A Tabela 32 reúne, para cada caso, as probabilidades estimadas no treino e na LOO-CV.

Tabela 32 — Probabilidade estimada e acerto no treino e na LOO-CV para os quinze casos numéricos (Modelo 1)

Caso	HN (mm)	V/U	Classif. real	p̂ (treino)	p̂ (LOO-CV)
C1	10	0,71	Instável	0,164 ✓	0,191 ✓
C2	10	0,53	Instável	0,134 ✓	0,155 ✓
C3	10	1,43	Estável	0,325 ✗	0,127 ✗
C4	10	1,05	Mod. inst.	0,231 ✓	0,278 ✓

Caso	HN (mm)	V/U	Classif. real	p̂ (treino)	p̂ (LOO-CV)
C5	20	0,71	Mod. inst.	0,543 ✗	0,667 ✗
C6	20	0,53	Instável	0,484 ✓	0,613 ✗
C7	20	1,43	Estável	0,745 ✓	0,685 ✓
C8	20	1,05	Estável	0,645 ✓	0,571 ✓
C9	15	0,61	Instável	0,296 ✓	0,325 ✓
C10	15	1,21	Estável	0,474 ✗	0,418 ✗
C11	10	0,91	Instável	0,200 ✓	0,237 ✓
C12	20	0,91	Estável	0,603 ✓	0,519 ✓
C13	15	1,07	Estável	0,430 ✗	0,378 ✗
C14	15	0,79	Mod. inst.	0,346 ✓	0,376 ✓
C15	15	0,91	Mod. inst.	0,381 ✓	0,413 ✓

Nota: ✓ = acerto; ✗ = erro. Acurácia: 73,3% (treino) e 66,7% (LOO-CV).

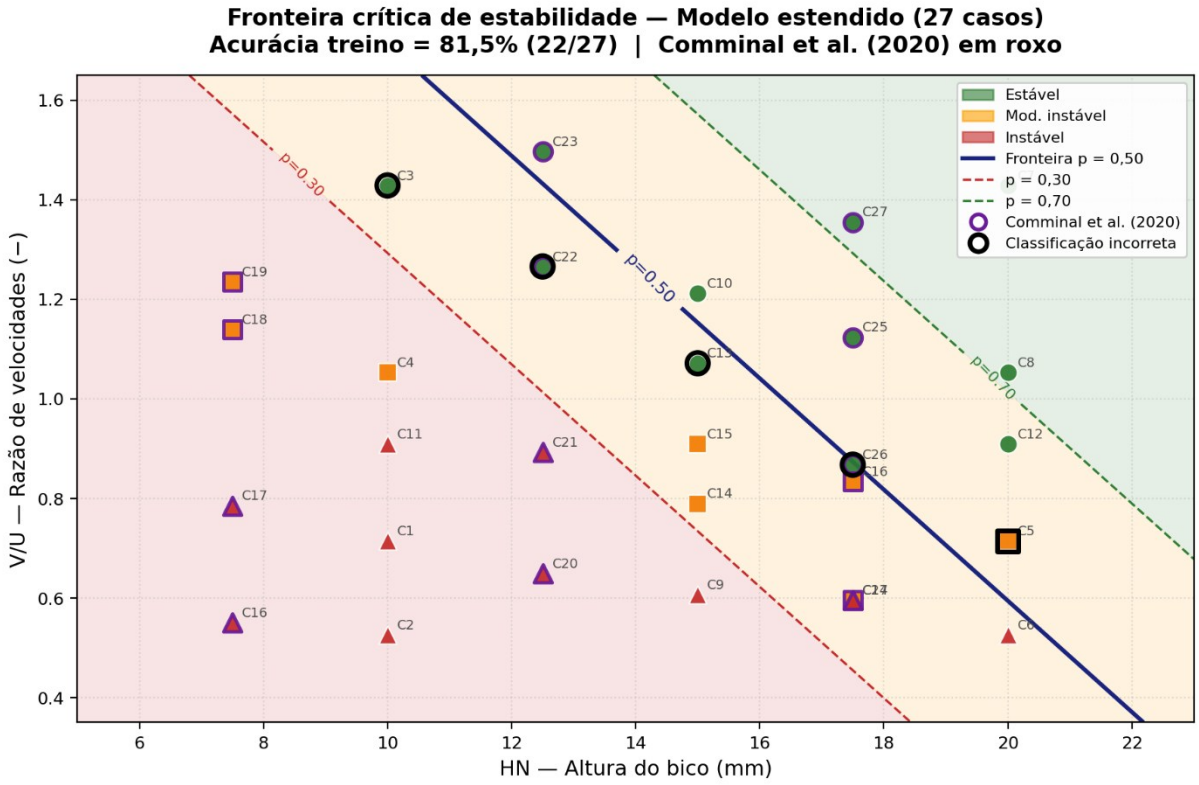
Fonte: Elaborada pela autora (2026)

7.4.5.2 Etapa 2 — Modelo estendido com dados da literatura (27 casos)

A inclusão dos doze casos de Comminal et al. (2020) cumpriu duas funções: ampliar a amostra e estender a faixa de H_N. Enquanto o estudo numérico cobre apenas H_N = 10, 15 e 20 mm, os dados da literatura acrescentam três novas alturas — 7,5 mm (C16–C19), 12,5 mm (C20–C23) e 17,5 mm (C24–C27) —, o que permite ajustar a fronteira sobre uma faixa mais ampla de alturas de bico. Esses doze casos foram incorporados ao ajuste do Modelo 2 e, portanto, não constituem um teste independente; o desempenho fora da amostra é avaliado apenas pela LOO-CV.

O modelo estendido acertou 22 dos 27 casos (81,5 % no treino) e 21 dos 27 na LOO-CV (77,8 %). Como os casos de Comminal et al. (2020) participam do ajuste, a acurácia de treino não os avalia de forma independente; o desempenho fora da amostra é indicado pela LOO-CV, na qual cada caso é previsto por um modelo reajustado sem ele. A queda de apenas um acerto entre treino e LOO-CV sugere ausência de sobreajuste relevante, ainda que, com 27 casos, essa leitura deva ser tomada com cautela. Os erros — C3, C5, C6, C13, C22 e, na LOO-CV, também C23 — permanecem confinados à zona de transição (p entre 0,3 e 0,7). Entre os casos da literatura, apenas C22 e C23 (H_N = 12,5 mm, junto à fronteira) foram classificados incorretamente na LOO-CV (10 acertos em 12), indicando que a fronteira ajustada também descreve bem esses casos quando deixados de fora, em especial os situados longe da zona de transição. A Tabela 33 detalha as probabilidades de treino e LOO-CV para os vinte e sete casos, e a Figura 80 mostra a fronteira ajustada.

Figura 80 - Fronteira crítica de estabilidade ajustada aos vinte e sete casos numéricos



Fonte: Elaborada pela autora (2026)

Tabela 33 — Probabilidade estimada e acerto no treino e na LOO-CV para os vinte e sete casos (Modelo 2)

Caso	HN (mm)	V/U	Origem	Classif. real	p̂ (treino)	p̂ (LOO-CV)
C1	10	0,71	Num.	Instável	0,124 ✓	0,133 ✓
C2	10	0,53	Num.	Instável	0,090 ✓	0,096 ✓
C3	10	1,43	Num.	Estável	0,356 ✗	0,256 ✗
C4	10	1,05	Num.	Mod. inst.	0,213 ✓	0,232 ✓
C5	20	0,71	Num.	Mod. inst.	0,644 ✗	0,743 ✗
C6	20	0,53	Num.	Instável	0,558 ✗	0,668 ✗
C7	20	1,43	Num.	Estável	0,875 ✓	0,863 ✓
C8	20	1,05	Num.	Estável	0,775 ✓	0,748 ✓
C9	15	0,61	Num.	Instável	0,292 ✓	0,311 ✓
C10	15	1,21	Num.	Estável	0,566 ✓	0,539 ✓
C11	10	0,91	Num.	Instável	0,171 ✓	0,184 ✓
C12	20	0,91	Num.	Estável	0,723 ✓	0,687 ✓
C13	15	1,07	Num.	Estável	0,500 ✗	0,472 ✗
C14	15	0,79	Num.	Mod. inst.	0,369 ✓	0,389 ✓
C15	15	0,91	Num.	Mod. inst.	0,423 ✓	0,446 ✓
C16	7,5	0,55	Comm.	Instável	0,052 ✓	0,055 ✓

Caso	HN (mm)	V/U	Origem	Classif. real	p̂ (treino)	p̂ (LOO-CV)
C17	7,5	0,79	Comm.	Instável	0,079 ✓	0,085 ✓
C18	7,5	1,14	Comm.	Mod. inst.	0,145 ✓	0,163 ✓
C19	7,5	1,23	Comm.	Mod. inst.	0,168 ✓	0,193 ✓
C20	12,5	0,65	Comm.	Instável	0,192 ✓	0,203 ✓
C21	12,5	0,89	Comm.	Instável	0,274 ✓	0,289 ✓
C22	12,5	1,27	Comm.	Estável	0,434 ✗	0,386 ✗
C23	12,5	1,50	Comm.	Estável	0,543 ✓	0,487 ✗
C24	17,5	0,60	Comm.	Mod. inst.	0,433 ✓	0,479 ✓
C25	17,5	1,12	Comm.	Estável	0,676 ✓	0,650 ✓
C26	17,5	0,87	Comm.	Estável	0,562 ✓	0,526 ✓
C27	17,5	1,36	Comm.	Estável	0,764 ✓	0,743 ✓

✓ = acerto; ✗ = erro. Acurácia: 81,5% (treino) e 77,8% (LOO-CV).
Fonte: elaborada pela autora (2026).

O desempenho dos dois modelos está consolidado na Tabela 34, que substitui as matrizes de confusão individuais por um quadro comparativo de indicadores no treino e na LOO-CV. A leitura conjunta evidencia o ganho da segunda etapa: na validação cruzada, a acurácia passou de 66,7% para 77,8%. Parte desse ganho provém dos casos de Comminal et al. (2020), em geral afastados da fronteira e de classificação menos incerta (10 acertos em 12); ainda assim, o resultado apoia a estratégia em duas etapas, pois os dados da literatura, incorporados ao ajuste, ampliam a amostra e melhoram o desempenho na LOO-CV, o que apoia a estratégia em duas etapas, embora não constitua validação independente. Vale notar que, no modelo estendido, a sensibilidade (63,6% na LOO-CV) é inferior à especificidade (87,5%): o modelo é mais cauteloso ao declarar um caso estável — comportamento desejável na prática, já que classificar um regime instável como estável (falso positivo) costuma custar mais caro do que o erro oposto.

Tabela 34 — Desempenho dos dois modelos no treino e na validação cruzada (LOO-CV)

Indicador	M1 — treino	M1 — LOO	M2 — treino	M2 — LOO
Acurácia	73,3% (11/15)	66,7% (10/15)	81,5% (22/27)	77,8% (21/27)
Sensibilidade (estável)	50,0% (3/6)	50,0% (3/6)	72,7% (8/11)	63,6% (7/11)
Especificidade	88,9% (8/9)	77,8% (7/9)	87,5% (14/16)	87,5% (14/16)
Verdadeiros negativos	8	7	14	14
Falsos positivos	1	2	2	2
Falsos negativos	3	3	3	4
Verdadeiros positivos	3	3	8	7

Classe positiva = "Estável".
Fonte: elaborada pela autora (2026).

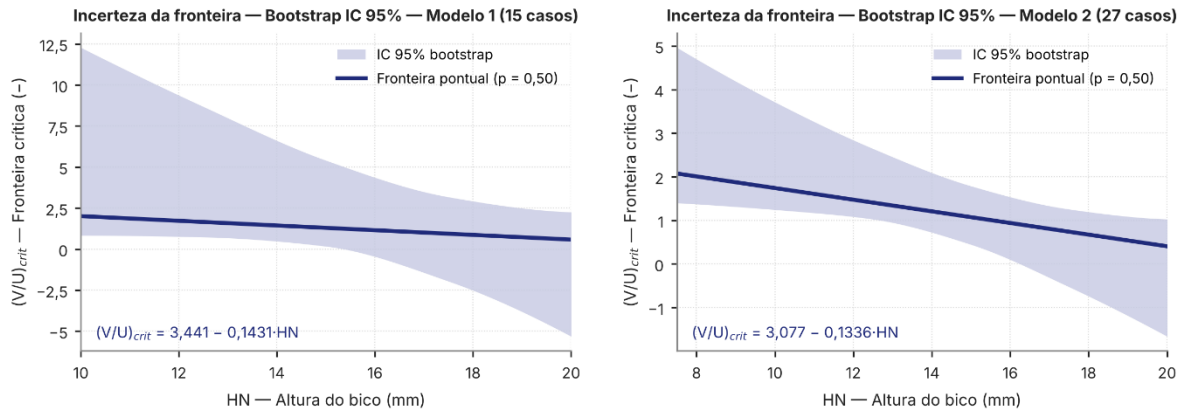
7.4.5.3 Incerteza da fronteira — Intervalos de confiança por bootstrap

Por ser estimada a partir de um único ajuste, a posição da fronteira depende da amostra disponível. Para quantificar essa incerteza, calcularam-se intervalos de confiança (IC) de 95% para o intercepto e a inclinação por bootstrap não paramétrico, com 5.000 reamostragens com reposição e reajuste do modelo em cada uma. Em termos práticos, o procedimento mede o quanto a fronteira se deslocaria caso os dados fossem ligeiramente diferentes.

No modelo numérico (15 casos), os intervalos são muito largos, intercepto [0,42; 28,97] e inclinação [−1,60; 0,05], comportamento esperado para n = 15: em parte das reamostras as classes ficam quase separadas, e a regressão logística produz coeficientes grandes e instáveis. Como o intervalo da inclinação contém o zero, não é possível afirmar, a 95% de confiança, que o efeito de HN seja diferente de zero. A largura da banda da fronteira varia de cerca de 5,1 (H_N = 17,5 mm) a 11,4 unidades de V/U (H_N = 10 mm).

No modelo estendido (27 casos), a incerteza cai expressivamente: os intervalos estreitam para intercepto [1,78; 8,62] e inclinação [−0,50; −0,05], que deixa de conter o zero, ou seja, o efeito estabilizador de H_N torna-se estatisticamente significativo. A largura da banda reduz-se para 1,3 a 3,6 unidades de V/U. A Tabela 35 e a Figura 81 detalham os intervalos em função de H_N. Ampliar o conjunto de dados, portanto, não apenas verifica a fronteira como a torna estatisticamente mais estável.

Figura 81 – Incerteza da Fronteira: bandas de confiança de 95% (bootstrap) para os dois modelos



Fonte: elaborada pela autora (2026)

Tabela 35 — Intervalos de confiança de 95% (bootstrap, 5.000 reamostras) para a fronteira crítica em função de H_N

HN (mm)	(V/U)crit — M1 (ajuste)	IC 95% — M1	(V/U)crit — M2 (ajuste)	IC 95% — M2
7,5	—	—	2,075	[1,399; 4,964]
10,0	2,010	[0,833; 12,276]	1,741	[1,244; 3,712]
12,5	1,652	[0,730; 8,673]	1,407	[1,026; 2,644]
15,0	1,295	[0,170; 5,399]	1,073	[0,445; 1,786]
17,5	0,937	[−1,960; 3,170]	0,739	[−0,527; 1,254]
20,0	0,579	[−5,316; 2,253]	0,405	[−1,662; 1,027]

Nota: M1 = modelo numérico (15 casos); M2 = modelo estendido (27 casos). "—" indica HN fora do domínio de M1. (V/U)crit calculado pelas equações da Tabela 31; IC de 95% pelos percentis de 2,5% e 97,5% do bootstrap.

Fonte: elaborada pela autora (2026)

Apesar da entrada de dados externos e de uma faixa maior de H_N, os coeficientes mudaram pouco entre os dois modelos: o intercepto caiu de 3,441 para 3,077 (−10,6%) e a inclinação, de −0,1431 para −0,1336 (−6,6%). A fronteira praticamente manteve sua forma, sinal de que o modelo numérico extrapolou corretamente as tendências físicas para alturas de bico não simuladas. O leve deslocamento para a esquerda sugere que os dados externos tendem, em média, um pouco mais à estabilidade, o que pode decorrer de diferenças nas condições de contorno ou em parâmetros não controlados entre as duas fontes.

A posição dos casos da literatura confirma a robustez da fronteira. Os casos de H_N = 7,5 mm (C16–C19) caem claramente na região instável, incluindo os casos subalimentados C18 e C19 (p̂ entre 0,14 e 0,17), sendo este um resultado relevante, por se tratar de casos subalimentados cuja instabilidade decorre da baixa altura de bico. Os casos de HN = 12,5 mm distribuem-se entre a região instável (C20, C21) e a faixa de transição (C22, C23), e os de H_N = 17,5 mm (C24–C27), entre a transição e a região estável. Apenas os casos externos C22 e C23, situados junto à fronteira, foram classificados incorretamente, o que sustenta a capacidade preditiva do modelo.

A fronteira crítica é uma contribuição prática para o controle da impressão 3D em concreto (3DCP): resume, em uma única equação de dois parâmetros, o comportamento de vinte e sete casos simulados. No canteiro, onde as decisões precisam ser rápidas e não há simulação disponível, a equação $(V/U)_{crit} = 3{,}077 - 0{,}1336 \cdot H_N$ permite verificar, antes de iniciar a impressão, se a combinação de altura de bico e razão de velocidades está dentro da janela operacional segura. Em

laboratório, a fronteira e as curvas p = 0,3 e p = 0,7 funcionam como um mapa de projeto, indicando quais regiões do espaço de parâmetros merecem mais ensaios e quais já apresentam comportamento previsível.

As limitações, contudo, precisam ser reconhecidas. O modelo foi ajustado com poucos dados, quinze casos numéricos e doze de uma única fonte externa, o que restringe sua aplicação a materiais, bicos e condições reológicas distintos dos investigados. As acurácias (73,3% e 81,5%), os intervalos largos do bootstrap no Modelo 1 e a inclinação não significativa nesse modelo mostram que a posição exata da fronteira ainda carrega incerteza. Por ser linear e ter apenas dois preditores, a fronteira tampouco captura interações entre H_N e V/U ou o efeito de variáveis reológicas como tensão de escoamento, viscosidade plástica, tempo aberto que, em obra, variam com temperatura, umidade e lote de material. A ferramenta deve, assim, ser entendida como um metamodelo probabilístico exploratório: útil para orientar decisões, priorizar experimentos e comunicar tendências físicas de forma quantitativa, mas não como uma lei universal de estabilidade. Sua confiabilidade tende a crescer à medida que novos dados de outros materiais, equipamentos e condições forem incorporados ao ajuste, o que aponta uma direção natural para trabalhos futuros.

7.5 MODELAGEM E ANÁLISE POR METAMODELOS (15 CASOS)

Esta seção apresenta o ajuste, a validação e a comparação de dois metamodelos, a superfície de resposta de segunda ordem (RSM) e a Krigagem com kernel Matérn 5/2 (GPR), ajustados aos quinze casos paramétricos próprios (C1–C15). As duas variáveis geométricas do cordão extrudado, largura (w) e altura (h), são tratadas em paralelo: para cada etapa da análise, ajuste e equações, validação cruzada LOOCV, ponto crítico da superfície RSM, análise local no ponto P* (H_n = 16,0 mm; r_1 = 0,950 V/U) e superfícies de resposta, os resultados das duas respostas são apresentados lado a lado e interpretados conjuntamente. Essa leitura paralela revela tanto as semelhanças de comportamento físico quanto as diferenças de complexidade entre as duas dimensões.

7.5.1 Ajuste dos modelos e equações RSM

Seguem os resultados obtidos para a variável geométrica: largura (w) e altura (h). Os dois metamodelos foram ajustados aos quinze casos próprios. As métricas completas de treino e de validação cruzada estão reunidas na Tabela 36 (largura) e na Tabela 37 (altura). Na fase de treino, a RSM alcançou $R^2 = 0{,}9885$ (RMSE = 1,428 mm) para a largura e $R^2 = 0{,}9745$ (RMSE = 0,533 mm) para a altura, capturando mais de 97% da variância de ambas as respostas no domínio amostrado. O GPR, por incluir o termo WhiteKernel, não é um interpolador exato por construção; contudo, como os dados provêm de simulações determinísticas, o nível de ruído estimado é muito baixo e o modelo reproduz praticamente todos os pontos de treino ($R^2 \approx 1{,}000$; RMSE = 0,0078 mm para a largura e 0,00004 mm para a altura). Por esse motivo, suas métricas de treino têm pouco valor diagnóstico e devem ser lidas à luz da LOOCV.

Tabela 36 – Métricas de desempenho dos metamodelos: largura (w), 15 casos

Modelo / Fase	R^2	RMSE	MAE	MAPE%	Bias	EA máx	PRESS	Q^2	AIC	BIC
RSM — Treino	0,9885	1,4284	1,2377	2,872	0,000	2,5987	30,603	0,9885	22,70	26,94
RSM — LOOCV	0,9204	3,7619	2,8399	7,173	0,003	7,9216	212,28	0,9204	51,75	56,00
Kriging — Treino	1,0000	0,0078	0,0055	0,013	0,000	0,0182	0,0009	1,0000	—	—
Kriging — LOOCV	0,9934	1,0800	0,8073	2,028	−0,126	2,1117	17,497	0,9934	—	—

Bias ≈ 0 em ambos os modelos (GPR: −0,126 mm na LOOCV).
AIC e BIC não se aplicam ao GPR (—).
Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Tabela 37 – Métricas de desempenho dos metamodelos: altura (h), 15 casos

Fase	R^2	RMSE	MAE	MAPE %	EA máx	Q^2	AIC	BIC
RSM — Treino	0,9745	0,5332	0,4668	3,342	1,1197	0,9745	−6,863	−2,615
RSM — LOOCV	0,8048	1,4752	1,0556	7,534	3,9932	0,8048	23,663	27,911
Kriging — Treino	1,0000	0,00004	0,00003	0,00023	0,00007	1,0000	—	—
Kriging — LOOCV	0,9924	0,2918	0,1705	1,347	0,7523	0,9924	—	—

AIC e BIC não se aplicam ao GPR (—).
Fonte: Elaborada pela autora (2026).

As equações RSM de segunda ordem ajustadas às duas respostas são:

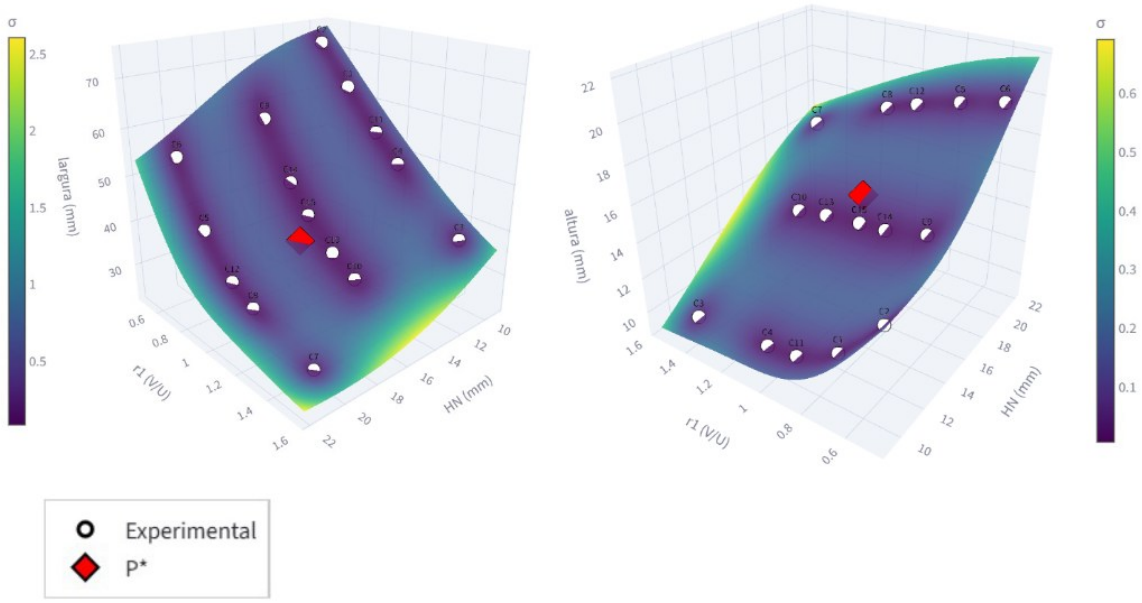
$$w(H_n, r_1) = 162{,}199 - 5{,}130 \cdot H_n - 109{,}740 \cdot r_1 + 0{,}811 \cdot H_n \cdot r_1 + 0{,}081 \cdot H_n^2 + 31{,}554 \cdot r_1^2$$

$$h(H_n, r_1) = 10{,}483 + 0{,}586 \cdot H_n - 8{,}951 \cdot r_1 + 0{,}042 \cdot H_n \cdot r_1 + 0{,}005 \cdot H_n^2 + 2{,}390 \cdot r_1^2$$

A comparação dos coeficientes é fisicamente reveladora. O termo linear de H_n inverte de sinal entre as respostas, negativo para a largura (−5,130) e positivo para a altura (+0,586), traduzindo o mesmo mecanismo: com o bico mais distante da plataforma, o material sofre menor compressão e, portanto, espalha-se menos lateralmente (largura cai) e preserva mais a dimensão vertical (altura sobe). Já o termo linear de r_1 é fortemente negativo em ambas (−109,740 para w; −8,951 para h), pois o aumento da velocidade relativa de impressão reduz o volume depositado por unidade de comprimento e, com ele, as duas dimensões. A diferença mais marcante está na curvatura: o coeficiente de r_1^2 é grande para a largura (+31,554) e modesto para a altura (+2,390), indicando uma superfície de largura bem mais encurvada — e, portanto, mais difícil de representar por um polinômio de segunda ordem — do que a superfície de altura, comparativamente suave.

O GPR quantifica formalmente a incerteza de interpolação. O desvio padrão preditivo médio é σ = 0,679 mm para a largura e σ = 0,181 mm para a altura — em ambos os casos abaixo de 2% da média da respectiva resposta. As superfícies de σ (Figura 82) exibem o padrão característico do GPR: a incerteza cai a mínimos locais sobre os pontos experimentais (depressões em roxo escuro sob cada marcador) e cresce nas regiões de menor densidade amostral, distantes dos dados de treino. Para a largura, os maiores valores concentram-se ao longo da borda de r_1 elevado; para a altura, no canto de baixo H_n e r_1 elevado, com cristas secundárias entre os pontos no interior do domínio.

Figura 82 — Superfícies de incerteza preditiva σ do GPR para a largura e a altura (15 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.5.2 Validação cruzada (LOOCV) e comparação RSM vs. GPR

A LOOCV remove sucessivamente cada um dos quinze casos, reajusta o modelo com os quatorze restantes e mede o erro no ponto excluído, fornecendo a estimativa realista da capacidade preditiva. Os resultados, sintetizados na Tabela 38, mostram superioridade consistente do GPR sobre a RSM para as duas respostas — e uma diferença de comportamento entre largura e altura.

Tabela 38 — Comparação sintética RSM vs. GPR no treino e na LOOCV: largura (w) e altura (h), 15 casos

Variável	Modelo	R^2 treino	RMSE treino	R^2 LOOCV	RMSE LOOCV	ΔR^2 / risco
Largura (w)	RSM	0,9885	1,4284	0,9204	3,7619	0,068 / Moderado
Largura (w)	Kriging	1,0000	0,0078	0,9934	1,0800	0,007 / Baixo
Altura (h)	RSM	0,9745	0,5332	0,8048	1,4752	0,170 / Alto
Altura (h)	Kriging	1,0000	0,00004	0,9924	0,2918	0,008 / Baixo

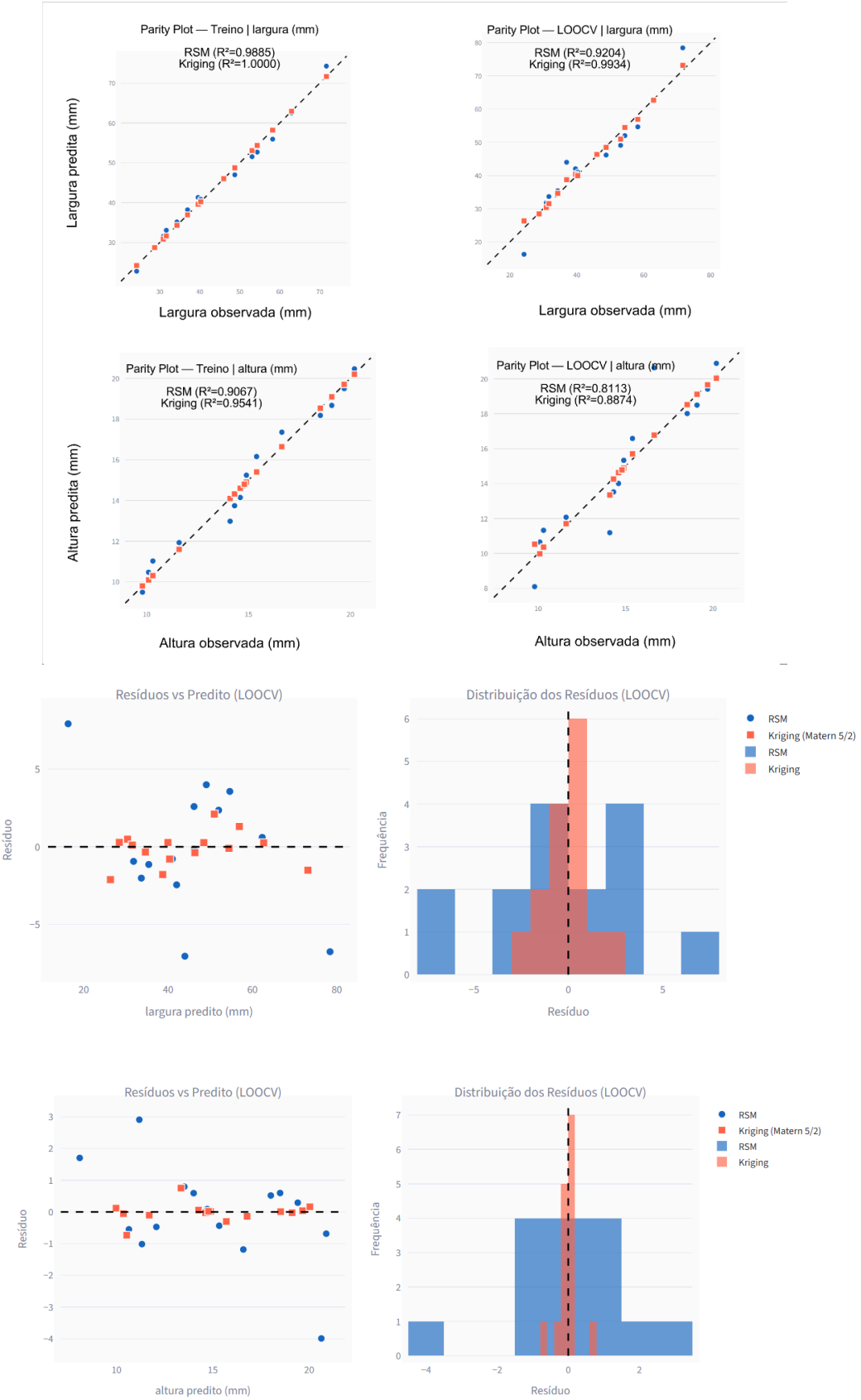
Nota: risco de sobreajuste conforme a Seção 6.7.3 — Baixo ($\Delta R^2 < 0,05$ e ΔRMSE < 1,5 mm); Moderado ($\Delta R^2 < 0,15$ e ΔRMSE < 4 mm); Alto (demais casos).

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Para a largura, a RSM degrada de forma perceptível na validação, o R^2 cai de

0,9885 para 0,9204 e o RMSE quase triplica (1,43 → 3,76 mm), configurando risco moderado de sobreajuste, enquanto o GPR mantém R^2 = 0,9934 e RMSE = 1,08 mm, uma redução de 71% no erro preditivo. Para a altura o contraste é ainda mais nítido: a RSM exibe risco alto (ΔR^2 = 0,170, acima do limiar de 0,15) e RMSE de validação cinco vezes maior que o do GPR (1,475 contra 0,292 mm). Em ambas as respostas, os parity plots (Figura 83) mostram os pontos do GPR colados à diagonal, ao passo que os da RSM se afastam nos extremos; os gráficos de resíduos (Figura 83) confirmam, para a RSM, desvios expressivos nos casos de menor H_n e menor r_1, condição de máximo espalhamento, onde a curvatura da superfície é mais acentuada (resíduo de ≈ 7,9 mm na largura e de ≈ −4 mm na altura). A maior dificuldade da RSM com a altura indica que essa superfície possui estrutura local mais complexa, embora globalmente mais suave.

Figura 83 – Parity plots de treino e resíduos (largura/altura) LOOCV



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.5.3 Ponto crítico da superfície RSM

A anulação do gradiente e a avaliação da Hessiana localizam um ponto crítico em cada superfície RSM (Tabela 39). Em ambos os casos a Hessiana tem determinante e autovalores positivos, classificando o ponto como mínimo local — mas o significado prático difere radicalmente entre as respostas.

Tabela 39 — Ponto crítico das superfícies RSM: largura (w) e altura (h), 15 casos

Parâmetro	Largura (w)	Altura (h)
H_n* (mm)	24,52 (fora do domínio)	−73,61 (impossível)
r_1* (V/U)	1,42 (no domínio)	2,51 (fora do domínio)
Resposta no ponto (mm)	21,18 (mínimo plausível)	−22,32 (sem sentido físico)
Det(H)	9,57	0,043
Autovalores (λ_1; λ_2)	0,15; 63,12	0,009; 4,781
Classificação	Mínimo local (extrapolado)	Mínimo local (inválido)
Validade no domínio	Parcial — H_n* fora	Nula — extrapolação severa

Domínio (15 casos): $H_n \in [10; 20]$ mm; $r_1 \in [0,526; 1,429]$ V/U.

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Para a largura, o mínimo situa-se em H_n* = 24,52 mm (logo além do limite superior) e r_1* = 1,42 V/U (dentro do domínio), com valor previsto de 21,18 mm, fisicamente razoável — uma extrapolação moderada que sinaliza a tendência de decrescimento da largura, mas cuja localização exata não pode ser confirmada sem novas simulações. Para a altura, o ponto crítico é absurdo: H_n* = −73,61 mm (negativo) e altura prevista de −22,32 mm. Dentro do domínio estudado a altura comporta-se de forma praticamente monotônica — cresce com H_n e decresce com r_1, sem mínimo interno —, de modo que o ponto crítico da altura deve ser explicitamente descartado para fins de otimização.

7.5.4 Análise local no ponto P* (H_n = 16,0 mm; r_1 = 0,950 V/U)

O ponto P*, interior ao domínio e ausente do conjunto de treino, permite confrontar as duas predições onde a densidade amostral é menor (Tabela 40).

Tabela 40 — Análise local comparativa RSM vs. GPR no ponto P*: largura (w) e altura (h), 15 casos

Parâmetro	Largura (w)	Altura (h)
Predição RSM (mm)	37,425	15,343

Parâmetro	Largura (w)	Altura (h)
Predição GPR (mm)	36,275	15,710
σ GPR (mm)	0,372	0,099
IC 95% GPR (mm)	[35,55; 37,00]	[15,52; 15,90]
Diferença absoluta (mm)	1,151	0,368
Diferença relativa (%)	3,17	2,34
Razão dif/σ	3,096	3,726
Classificação	Moderada	Moderada

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Nas duas respostas a predição da RSM cai fora do intervalo de predição a 95% do GPR. Embora a razão discrepância/σ seja igual ou superior a 3 nos dois casos (3,096 e 3,726), a diferença corresponde a apenas 2,4% (largura) e 3,5% (altura) da faixa de variação da respectiva resposta nos quinze casos (47,42 mm e 10,40 mm), abaixo de 12%; pelo critério da Seção 6.7.4, ambos os pontos são classificados como concordância moderada. A maior razão é a da altura (3,726), apesar de sua menor diferença absoluta (0,368 mm) — consequência do σ muito reduzido do GPR nesse ponto (0,099 mm), sinal de que o interpolador está bastante confiante e a RSM diverge dessa estimativa. Fisicamente, H_n = 16,0 mm cai numa região de transição entre os níveis 15 e 20 mm, onde o gradiente ainda é significativo e o polinômio de segunda ordem diverge da interpolação (superestimando a largura e subestimando a altura). Para esse ponto, a predição do GPR é a mais confiável, em coerência com seu desempenho superior na LOOCV.

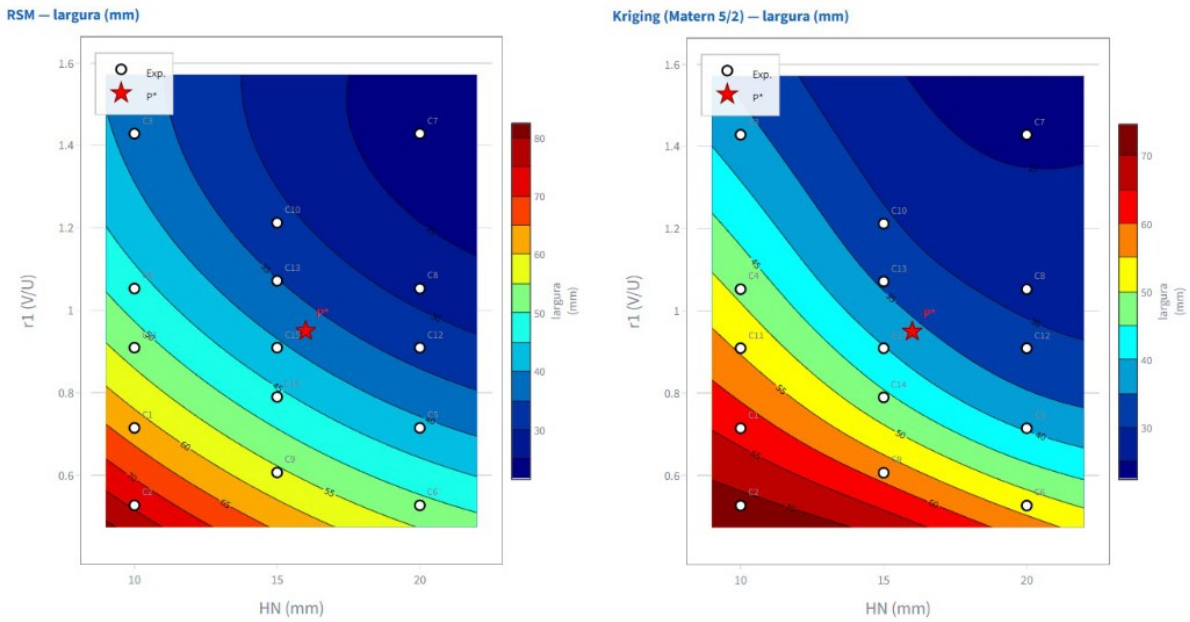
7.5.5 Superfícies de resposta

Os mapas de contorno das superfícies de resposta dos dois metamodelos (Figuras 84 e 85) são morfologicamente concordantes entre si em cada resposta — RSM e GPR reproduzem a mesma topologia de curvas de nível —, mas largura e altura exibem dependências opostas em relação à altura de bico. A largura decresce com o aumento simultâneo de H_n e r_1, atingindo os maiores valores na região de baixa altura de bico e baixa razão velocidade/extrusão, condição de máximo confinamento e máxima deposição volumétrica por unidade de comprimento; os menores valores ocorrem no canto oposto, de H_n alto e r_1 alto. A altura, ao contrário, cresce com H_n e decresce com r_1, com os maiores valores no canto de alta altura de bico e baixo r_1: com o bico mais afastado do substrato, o menor confinamento faz o filete tender a

uma seção mais estreita e alta, ao passo que o aumento de r_1 reduz o volume depositado por comprimento. Esse comportamento inverso entre as duas dimensões ao longo de H_n é fisicamente consistente com a dinâmica da deposição.

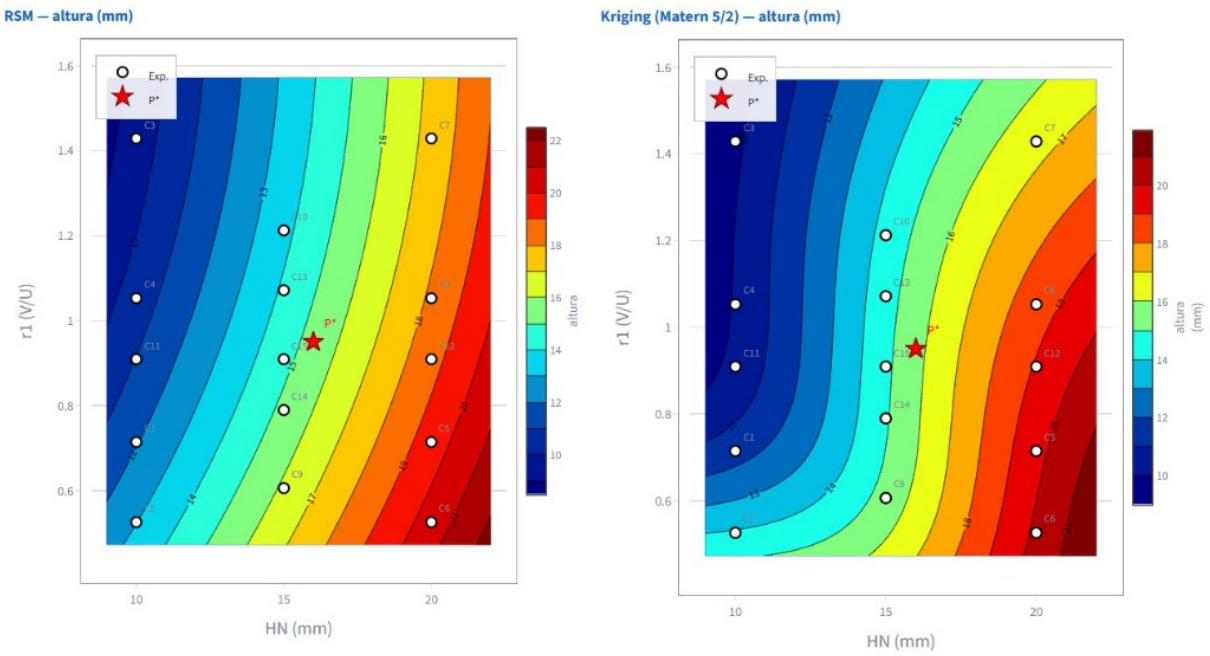
A diferença entre os metamodelos está na intensidade da curvatura, não na forma. Para a largura, no canto de H_n baixo e r_1 baixo, a RSM projeta valores acima de 80 mm enquanto o GPR é mais conservador (≈ 70 mm), refletindo a dificuldade do polinômio de segunda ordem em representar a forte curvatura local com apenas quinze pontos — a mesma origem dos maiores resíduos de LOOCV. Para a altura, as curvas de nível são mais regulares e suaves, com espaçamento quase uniforme, o que explica o elevado R^2 de treino da RSM apesar do seu alto risco de sobreajuste. Os mapas de σ (Figura 82) reforçam que a maior incerteza preditiva se concentra justamente nas regiões de menor densidade amostral, justificando diretamente a expansão amostral com os dados de Comminal et al. (2020) descrita na Seção 7.6.

Figura 84 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a largura (15 casos)



Fonte: elaborada pela autora (2026).

Figura 85 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a altura (15 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.5.6 Síntese comparativa — largura *vs.* altura (15 casos)

O GPR é superior à RSM para as duas variáveis (Tabela 41), mas os riscos do uso da RSM são maiores para a altura (risco alto) do que para a largura (risco moderado), e seu ponto crítico é operacionalmente inválido para a altura. A recomendação geral é adotar o GPR como modelo primário de predição e reservar a RSM à interpretação qualitativa das tendências e dos efeitos físicos dos parâmetros.

Tabela 41 — Síntese comparativa: largura (w) vs. altura (h), 15 casos

Aspecto	Largura (w)	Altura (h)
Melhor modelo	GPR	GPR
Risco da RSM	Moderado (ΔR^2 = 0,068)	Alto (ΔR^2 = 0,170)
Ponto crítico RSM	Parcialmente extrapolado	Severamente inválido
Ponto P*	RSM fora do IC 95% do GPR	RSM fora do IC 95% do GPR
Superfície	Maior curvatura nos extremos	Mais regular, complexidade local
Recomendação	GPR primário, RSM auxiliar	GPR primário, RSM só qualitativa

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.6 EXPANSÃO DO BANCO DE DADOS E REAJUSTE DOS METAMODELOS

Os dois metamodelos foram reajustados ao conjunto consolidado de vinte e sete casos (C1–C27), obtido pela incorporação dos doze casos numéricos de Comminal et al. (2020) (C16–C27) ao banco próprio (C1–C15). A expansão estendeu o domínio de H_n de [10; 20] mm para [7,5; 20] mm, mantendo $r_1 \in$ [0,526; 1,497] V/U. A análise segue a mesma estrutura paralela da Seção 7.5, com largura e altura interpretadas em conjunto.

7.6.1 Ajuste dos modelos e equações RSM

As métricas reajustadas constam da Tabela 42 (largura) e da Tabela 43 (altura). No treino, a RSM apresenta ajuste ligeiramente inferior ao dos quinze casos (largura: R^2 0,9885 → 0,9780; altura: 0,9745 → 0,9067). Essa leve redução se justifica pela maior variabilidade introduzida pelo conjunto ampliado de dados: como o polinômio possui curvatura fixa (quadrática), sua flexibilidade permanece constante enquanto a dispersão e a faixa de valores aumentam, o que tende a reduzir marginalmente a qualidade do ajuste

Tabela 42 — Métricas de desempenho dos metamodelos: largura (w), 27 casos

Fase	R^2	RMSE	MAE	MAPE %	EA máx	Q^2	AIC	BIC
RSM — Treino	0,9780	2,2010	1,8043	4,337	4,197	0,9780	54,60	62,38
RSM — LOOCV	0,9573	3,0640	2,4578	6,039	6,307	0,9573	72,46	80,24
Kriging — Treino	0,9888	1,5684	1,2641	2,882	3,478	0,9888	—	—
Kriging — LOOCV	0,9592	2,9958	2,3300	5,294	7,197	0,9592	—	—

AIC e BIC não se aplicam ao GPR (—). Fonte: elaborada pela autora (2026).

Tabela 43 — Métricas de desempenho dos metamodelos: altura (h), 27 casos

Fase	R^2	RMSE	MAE	MAPE %	EA máx	Q^2	AIC	BIC
RSM — Treino	0,9067	1,0151	0,8370	5,950	2,096	0,9067	12,81	20,59
RSM — LOOCV	0,8113	1,4432	1,1364	8,026	4,158	0,8113	31,81	39,59
Kriging — Treino	0,9541	0,7121	0,6153	4,379	1,317	0,9541	—	—
Kriging — LOOCV	0,8874	1,1149	0,9657	6,870	2,244	0,8874	—	—

AIC e BIC não se aplicam ao GPR (—). Fonte: elaborada pela autora (2026).

As equações RSM reajustadas são:

$$w(H_N, r_1) = 159{,}334 - 4{,}656 \cdot H_n - 109{,}521 \cdot r_1 + 1{,}201 \cdot H_n \cdot r_1 + 0{,}052 \cdot H_n^2 + 27{,}613 \cdot r_1^2$$

$$h(H_N, r_1) = 12{,}630 + 0{,}412 \cdot H_n - 9{,}956 \cdot r_1 + 0{,}033 \cdot H_n \cdot r_1 + 0{,}010 \cdot H_n^2 + 3{,}442 \cdot r_1^2$$

As mudanças nos coeficientes são moderadas e fisicamente coerentes. Para a largura, o termo linear de H_n atenua-se (−5,130 → −4,656) e a curvatura em r_1 suaviza (r_1^2: 31,554 → 27,613), pois os casos de H_N = 7,5 mm preenchem uma região antes extrapolada. Para a altura, o intercepto sobe (10,483 → 12,630) para acomodar os cordões mais baixos do novo extremo, o efeito de r_1 torna-se mais negativo (−8,951 → −9,956) e a curvatura em H_n dobra (H_n^2: 0,005 → 0,010), sinal de maior encurvamento nessa direção. Em ambas as respostas os sinais e a leitura física se mantêm.

A mudança mais importante, porém, é de natureza: com vinte e sete casos de duas fontes distintas, o GPR deixa de interpolar exatamente (largura: R^2 = 0,9888; altura: R^2 = 0,9541). O otimizador ativou o termo WhiteKernel para absorver a variabilidade residual — em parte heterogeneidade estrutural entre os dois conjuntos —, regularizando o ajuste. Como consequência, as métricas de treino do GPR passam a ter valor diagnóstico, e o desvio padrão preditivo médio cresce (largura: 0,679 → 2,499 mm; altura: 0,181 → 1,080 mm), refletindo o domínio mais amplo e a incerteza epistêmica adicional.

7.6.2 Validação cruzada (LOOCV) e comparação RSM vs. GPR

Os resultados da LOOCV (Tabela 44) revelam o efeito mais notável da expansão: para a largura, RSM e GPR convergem; para a altura, o GPR mantém vantagem clara.

Tabela 44 — Comparação sintética RSM vs. GPR na LOOCV: largura (w) e altura (h), 27 casos

Variável	Modelo	R^2 treino	RMSE treino	R^2 LOOCV	RMSE LOOCV	ΔR^2 / risco
Largura (w)	RSM	0,9780	2,201	0,9573	3,064	0,021 / Baixo
Largura (w)	Kriging	0,9888	1,568	0,9592	2,996	0,030 / Baixo

Variável	Modelo	R^2 treino	RMSE treino	R^2 LOOCV	RMSE LOOCV	ΔR^2 / risco
Altura (h)	RSM	0,9067	1,015	0,8113	1,443	0,095 / Moderado
Altura (h)	Kriging	0,9541	0,712	0,8874	1,115	0,067 / Moderado

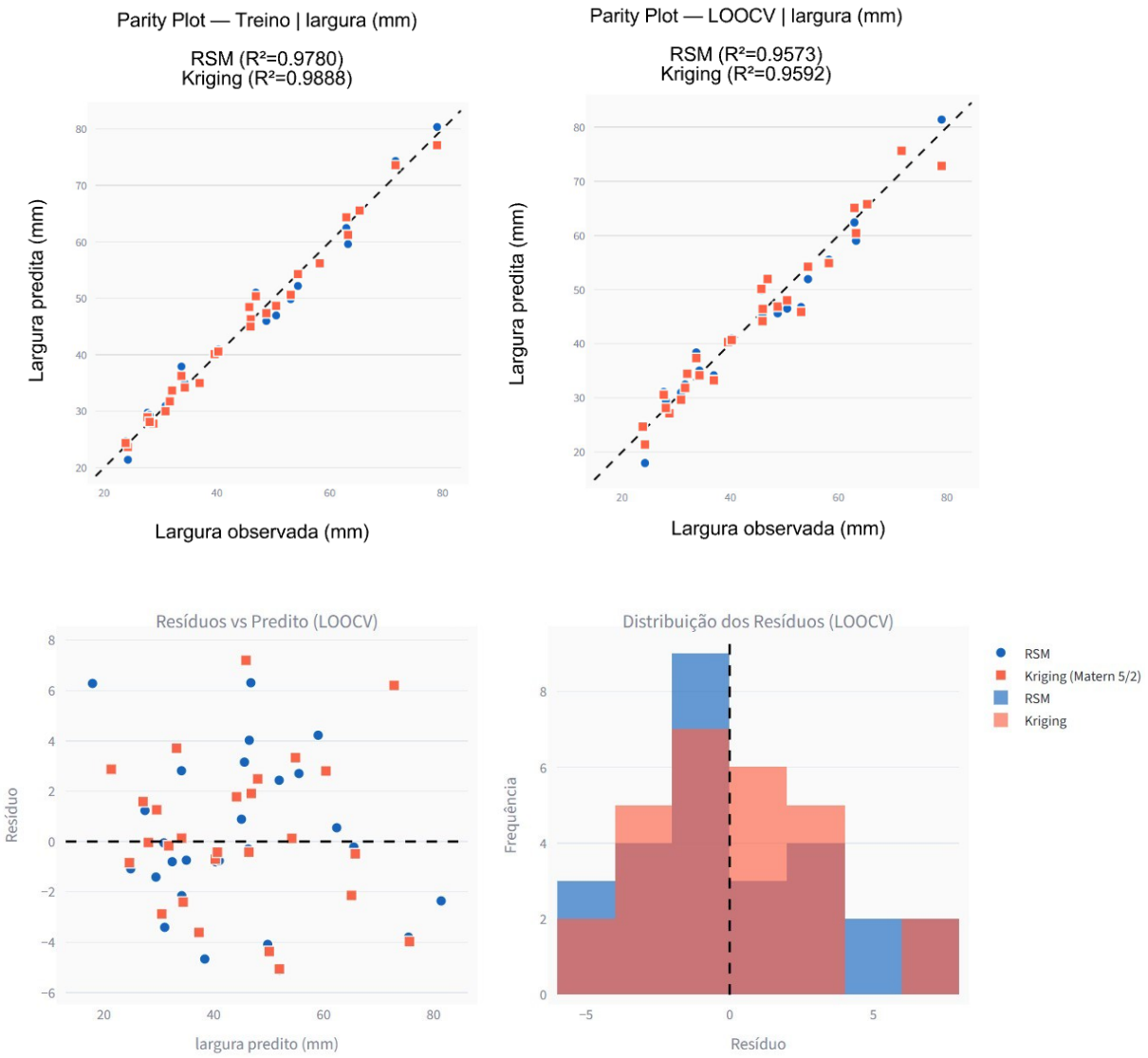
Nota: risco de sobreajuste conforme a Seção 6.7.3 — Baixo ($\Delta R^2 < 0,05$ e ΔRMSE < 1,5 mm); Moderado ($\Delta R^2 < 0,15$ e ΔRMSE < 4 mm); Alto (demais casos).

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

No caso da largura, o aumento de quinze para vinte e sete observações beneficiou a RSM, o risco caiu de moderado para baixo e o RMSE de validação melhorou de 3,76 para 3,06 mm, ao mesmo tempo em que penalizou o GPR, cujo RMSE de LOOCV subiu de 1,08 para 3,00 mm (+177%). O resultado é uma convergência quase total: 3,064 mm (RSM) contra 2,996 mm (GPR), diferença de apenas 2,2%. A vantagem expressiva do GPR observada com quinze casos desaparece para a largura, porque os casos de Comminal et al. com H_n = 7,5 mm produzem larguras muito superiores (acima de 65 mm) às dos casos próprios na mesma faixa de r_1, introduzindo heterogeneidade que o kernel suaviza às custas de precisão local.

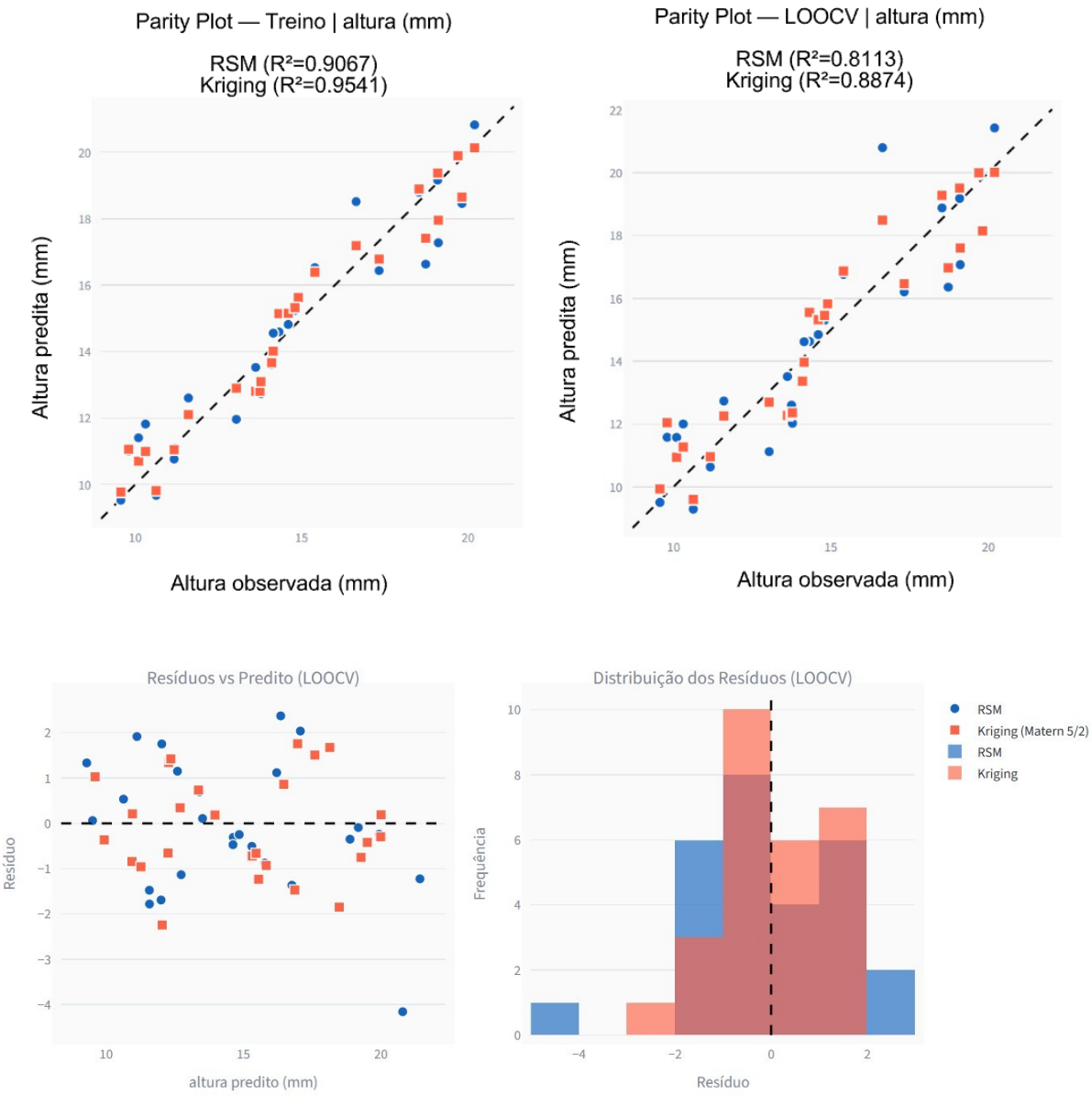
Para a altura, a história é outra: o GPR preserva clara superioridade RMSE de 1,115 mm contra 1,443 mm da RSM (23% menor) e R^2 de 0,887 contra 0,811, ainda que ambos passem a risco moderado. Essa persistência indica que a superfície de altura tem estrutura de correlação espacial mais rica, que o polinômio de segunda ordem não reproduz mesmo com vinte e sete pontos. Os parity plots e histogramas de resíduos (Figuras 86 e 87) confirmam o quadro: para a largura, RSM e GPR exibem dispersões comparáveis, ambos subestimando levemente os cordões mais largos; para a altura, o GPR permanece mais próximo da diagonal e com resíduos mais estreitos, enquanto a RSM apresenta cauda negativa até ≈ −4 mm nos casos de H_n elevado e r_1 baixo.

Figura 86 — Parity plots e resíduos de LOOCV para a largura (27 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 87 — Parity plots e resíduos de LOOCV para a altura (27 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Por fim, para a largura, RSM e GPR tornam-se equivalentes na LOOCV (RMSE ≈ 3,0 mm): a expansão favoreceu a RSM e custou ao GPR o caráter de interpolador exato; para a altura, o GPR segue como único metamodelo adequado a predições quantitativas confiáveis.

7.6.3 Ponto crítico da superfície RSM

Os pontos críticos reajustados (Tabela 45) mantêm a leitura dos quinze casos, com deslocamentos coerentes. Para a largura, o mínimo afasta-se ainda mais do domínio (H_n* = 28,84 mm, 44% além do limite superior), mas com r_1* = 1,356 dentro da faixa e valor previsto plausível (17,93 mm): a adição dos casos de H_n = 7,5 mm reforça — e não inverte — a tendência de decrescimento da largura com H_n. Para a altura, o ponto crítico continua inválido (H_n* = −23,79 mm; altura ≈ −0,04 mm), embora menos absurdo que nos quinze casos (era −73,61 mm), efeito da nova informação em alturas de bico mais baixas. Em ambos os casos, não há ponto crítico operacionalmente acessível no domínio; a otimização deve ser restrita à faixa experimental, com o GPR como referência.

Tabela 45 — Ponto crítico das superfícies RSM: largura (w) e altura (h), 27 casos

Parâmetro	Largura (w)	Altura (h)
H_n* (mm)	28,839 (fora do domínio)	−23,785 (impossível)
r_1* (V/U)	1,356 (no domínio)	1,561 (fora do domínio)
Resposta no ponto (mm)	17,927 (mínimo plausível)	−0,039 (sem sentido físico)
Det(H)	4,357	0,133
Autovalores (λ_1; λ_2)	0,079; 55,252	0,019; 6,885
Classificação	Mínimo local (extrapolado)	Mínimo local (inválido)

Domínio (27 casos): $H_n \in [7,5; 20]$ mm; $r_1 \in [0,526; 1,497]$ V/U.
Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.6.4 Análise local no ponto P* (H_n = 16,0 mm; r_1 = 0,950 V/U)

No mesmo ponto P*, as predições praticamente não mudam em relação aos quinze casos (Tabela 46), confirmando a estabilidade da estimativa local nessa região central.. Na Tabela 46, o σ do GPR é o desvio padrão preditivo médio sobre o domínio (largura: 2,499 mm; altura: 1,080 mm), ao passo que na Tabela 40 foi usado o σ local em P* (0,372 e 0,099 mm). Por isso, as razões discrepância/σ das duas tabelas (≈ 0,47 e ≈ 0,43 contra 3,096 e 3,726) não são diretamente comparáveis, e a mudança de classificação não deve ser atribuída apenas ao aumento da incerteza do modelo. Pelo critério da Seção 6.7.4, a largura enquadra-se como concordância excelente (rσ < 1 e diferença de 2,1% da faixa da resposta, de 55,21 mm), e a altura, como boa (diferença de 4,4% da faixa, de 10,63 mm, acima do limite de 3% da categoria excelente). Em termos qualitativos, o aumento da incerteza do GPR no banco expandido é coerente com a heterogeneidade introduzida pelos dados de fontes

distintas — comportamento metodologicamente desejável, pois intervalos mais largos sinalizam onde a validação experimental é mais necessária. Recomenda-se, como refinamento, repetir a classificação com o σ local em P* para o modelo de 27 casos.

Tabela 46 — Análise local comparativa RSM vs. GPR no ponto P*: largura (w) e altura (h), 27 casos

Parâmetro	Largura (w)	Altura (h)
Predição RSM (mm)	37,398	15,867
Predição GPR (mm)	36,220	16,334
σ GPR (mm)	2,499	1,080
Diferença absoluta (mm)	1,179	0,467
Diferença relativa (%)	3,25	2,86
Razão dif/σ	≈ 0,47	≈ 0,43
Classificação	Excelente	Boa

Nota: σ refere-se ao desvio padrão preditivo médio sobre o domínio. Por isso, a razão dif/σ não é diretamente comparável à da Tabela 40, que usa o σ local em P. Classificação conforme o critério da Seção 6.7.4 (rσ e fração da faixa).*

Fonte: elaborada pela autora (2026).

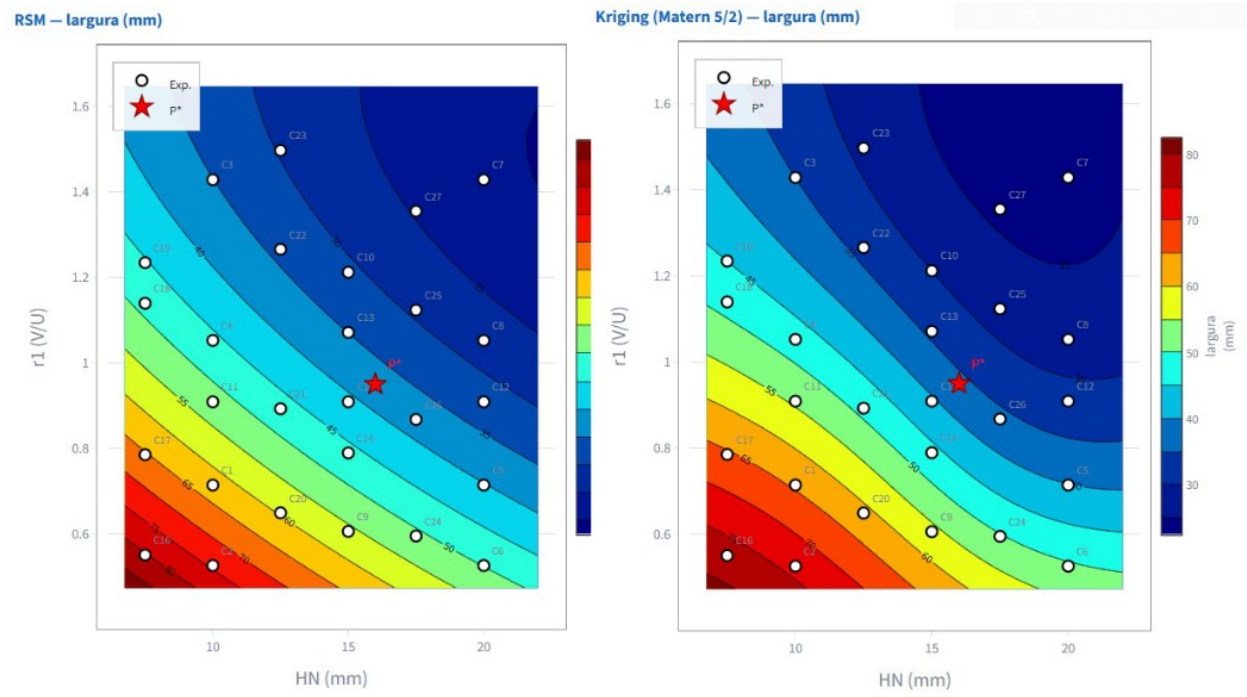
7.6.5 Superfícies de resposta

Com a extensão para H_n = 7,5 mm, os mapas de contorno das superfícies de resposta da largura (Figura 88) incorporam uma região de cordões largos (> 70 mm) ausente nos quinze casos originais, no canto de baixa altura de bico e baixo r_1. RSM e GPR concordam na região central (H_n = 10–18 mm; r_1 = 0,7–1,3 V/U) e divergem nos extremos de H_n baixo: a RSM projeta um platô de transição gradual, enquanto o GPR descreve um gradiente mais acentuado, mais fiel aos pontos vizinhos de Comminal et al. (2020).

Os mapas de contorno da altura (Figura 89) são mais reveladores. A altura cresce com H_n e decresce com r_1, com os maiores valores no canto de H_n alto e r_1 baixo. Nessa região, o GPR exibe um pico localizado de altura elevada que a RSM acomoda apenas parcialmente — origem direta da superestimação sistemática e dos *outliers* da RSM na LOOCV.

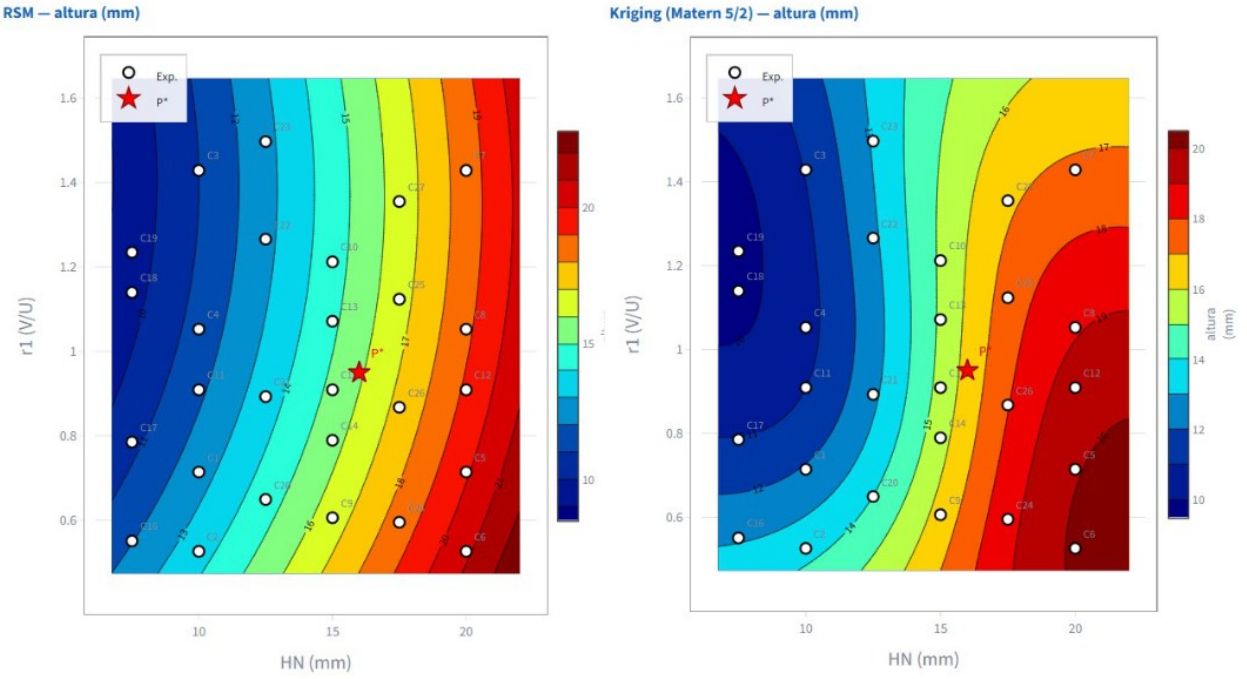
As superfícies de incerteza σ do GPR (Figura 90) distribuem a maior incerteza preditiva nos extremos de H_n = 7,5–9 mm e nas bordas de r_1 elevado, em ambas as respostas, justamente as regiões de menor densidade amostral, mesmo após o enriquecimento com os dados de Comminal et al. (2020). Esse padrão orienta a expansão amostral futura, sugerindo novas simulações na faixa H_n = 8–10 mm.

Figura 88 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a largura (27 casos)



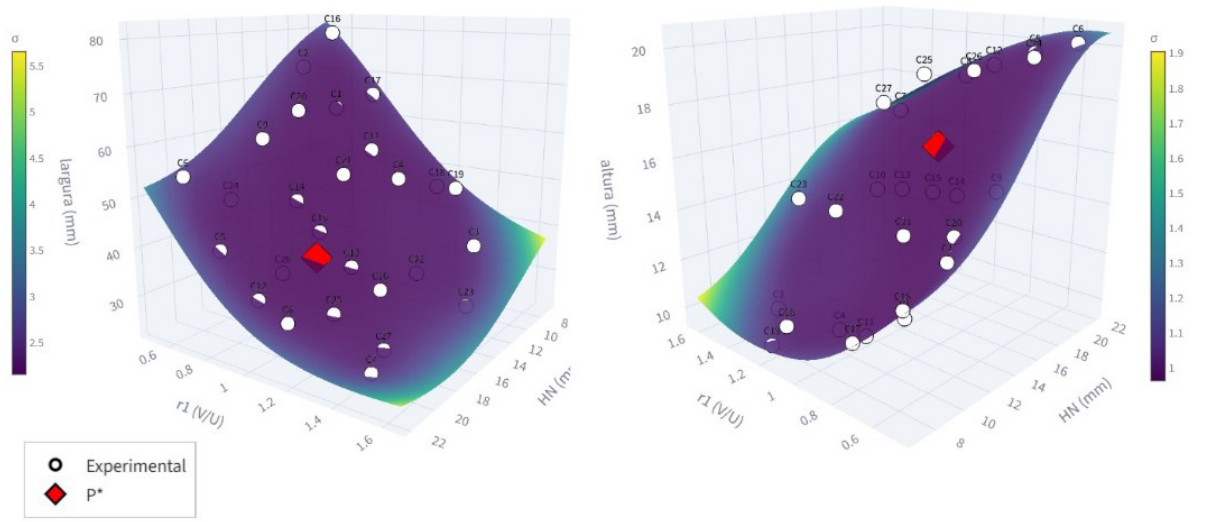
Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 89 — Mapas de contorno (RSM e GPR) para a altura (27 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 90 — Superfícies de incerteza preditiva σ do GPR para a largura e a altura (27 casos)



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.7 Validação Externa por Simulação Numérica Independente — Largura e Altura

A validação externa confronta as predições de RSM e GPR com valores de largura e altura obtidos por simulação CFD independente (ANSYS CFX) em dois pontos operacionais inéditos VP1 e VP2, verificando se os metamodelos estimam as dimensões do cordão sem nova simulação e com precisão aceitável dentro do domínio. As coordenadas e as predições estão na Tabela 47; as métricas de erro, na Tabela 48.

Tabela 47 — Pontos de validação externa: coordenadas e predições de largura e altura

Ponto	H_n (mm)	r_1 (V/U)	w CFD	w RSM	w Krig	h CFD	h RSM	h Krig
VP1	17,5	1,01	31,71	32,70	31,11	16,80	16,86	17,65
VP2	12,5	1,11	39,08	38,45	38,96	12,50	12,95	12,62

Nota: Valores em mm.

Fonte: elaborada pela autora (2026).

Tabela 48 — Métricas de validação externa: RSM e Kriging vs. CFD

Variável	Ponto	EA RSM	ER% RSM	EA Krig	ER% Krig	IC 95% Krig	CFD∈IC	|e|/σ
Largura	VP1	0,990	3,12%	0,605	1,91%	[26,21; 36,00]	Sim	0,242
Largura	VP2	0,634	1,62%	0,120	0,31%	[34,06; 43,86]	Sim	0,048
Altura	VP1	0,064	0,38%	0,847	5,04%	[15,74; 19,55]	Sim	0,872
Altura	VP2	0,451	3,61%	0,117	0,94%	[10,68; 14,56]	Sim	0,118

Nota: EA em mm; limite de aceitação ER% < 10% e |e|/σ < 2,0.
Fonte: elaborada pela autora (2026).

Todos os oito erros relativos ficam abaixo do limiar de 10%, com máximo de 5,04% (GPR na altura em VP1). Para a largura, o GPR supera a RSM nos dois pontos (1,91% e 0,31% contra 3,12% e 1,62%); para a altura, o desempenho se alterna — a RSM acerta VP1 com 0,38% e o GPR apresenta vantagem em VP2 (0,94% contra 3,61%), reflexo da curvatura local da superfície. Em todos os quatro casos o valor CFD está contido no intervalo de credibilidade a 95% do GPR, e as razões |e|/σ (0,048 a 0,872) permanecem bem abaixo de 2,0 — o modelo probabilístico não apenas acerta o valor central como calibra corretamente sua incerteza. Confirma-se, assim, o uso dos metamodelos como substitutos eficientes da simulação CFD para a determinação das dimensões do cordão dentro do domínio estudado.

7.7.1 Classificação dos pontos de validação pelo IQn e pela fronteira de estabilidade

A etapa final aplica a VP1 e VP2 as duas ferramentas classificatórias desenvolvidas na tese — o Índice de Qualidade Geométrica (IQ_n) e a fronteira crítica de estabilidade —, fechando o ciclo entre simulação, metamodelagem e classificação do processo. O IQ_n foi calculado a partir das respostas geométricas obtidas por CFD, com os parâmetros de normalização do conjunto ampliado ($E_{L,re}$ = 216,16%; $P_{H,ref}$ = 73,867%) e os pesos w_1 = 0,4, w_2 = 0,3 e w_3 = 0,3 (Tabela 49). VP1 atingiu IQ_n = 0,927 — o valor mais alto de todo o conjunto de vinte e nove casos analisados, superando o máximo anterior de C25 (0,919) —, resultado coerente com a combinação de H_n = 17,5 mm, regime balanceado e baixo espalhamento lateral (E_L = 26,84%). VP2 obteve

IQ_n = 0,850, na faixa de instabilidade moderada, penalizado pelo maior espalhamento lateral (E_L = 56,32%), típico do regime subalimentado com H_n reduzido.

Tabela 49 — Índice de Qualidade Geométrica nos pontos de validação externa

Parâmetro	VP1	VP2
H_n (mm)	17,5	12,5
V/U	1,01	1,11
area_norm	0,95	0,82
EL (%)	26,84	56,32
PH (%)	4,00	0,00
IQ	0,074	0,150
IQn	0,927	0,850
Classificação	Estável	Mod. instável

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

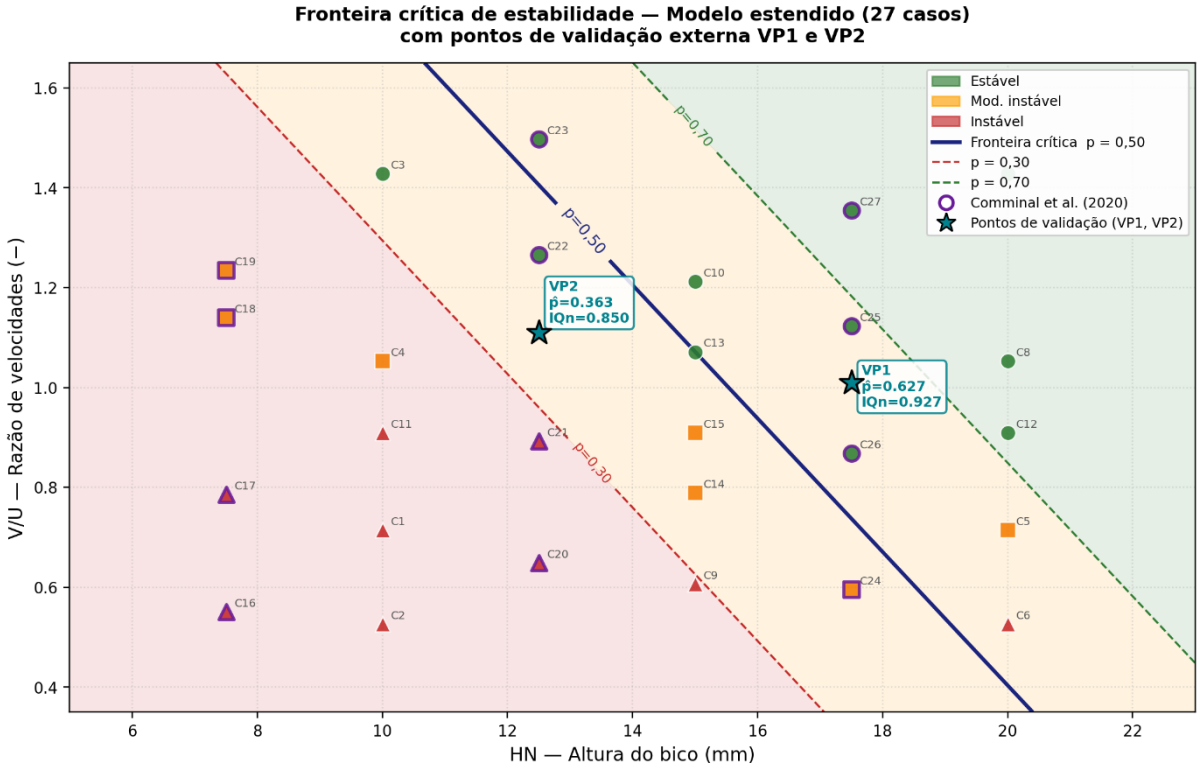
A posição dos dois pontos foi então avaliada pela fronteira crítica ajustada aos vinte e sete casos, $(V/U)_{crit} = 3{,}077 - 0{,}1336 \cdot H_n$ (Tabela 50). VP1 opera com V/U = 1,01, 37% acima da fronteira crítica de 0,739 (H_n = 17,5 mm), recebendo $\hat{p}$ = 0,627: estável, porém na zona de transição entre p = 0,50 e p = 0,70 — estabilidade real, mas moderada, sem o excesso de confiança de casos como C7 ($\hat{p}$ = 0,875). VP2 opera com V/U = 1,11, abaixo da fronteira crítica de 1,407 (H_n = 12,5 mm), com $\hat{p}$ = 0,363: não estável pela fronteira logística ($\hat{p}$ < 0,50) e moderadamente instável pelo critério geométrico (EL = 56,32%), também na zona de transição. Ambos os pontos aparecem no ábaco operacional da Figura 91.

Tabela 50 — Posicionamento dos pontos de validação na fronteira crítica de estabilidade

Parâmetro	VP1	VP2
H_n (mm)	17,5	12,5
V/U	1,01	1,11
$(V/U)_{crit}$	0,739	1,407
V/U vs. $(V/U)_{crit}$	> crítico	< crítico
$\hat{p}$	0,627	0,363
Zona de probabilidade	Transição (0,5–0,7)	Transição (0,3–0,5)
Classificação	Estável	Moderadamente instável

Fonte: Elaborada pela autora (2026).

Figura 91 — Ábaco operacional com a fronteira crítica e a localização dos pontos VP1 e VP2



Fonte: Elaborada pela autora (2026).

7.7.2 Convergência do protocolo e recomendações operacionais

Os dois pontos de validação evidenciam a convergência das três camadas metodológicas da tese. A simulação CFD forneceu as dimensões de referência (VP1: 31,71 mm de largura e 16,80 mm de altura; VP2: 39,08 e 12,50 mm), reproduzidas pelos metamodelos com erro máximo de 5,04% e com o valor CFD sempre dentro do intervalo a 95% do GPR. Essas mesmas dimensões alimentaram o IQn, que apontou VP1 como a melhor condição geométrica de todo o conjunto (0,927) e VP2 como moderadamente instável (0,850); e a fronteira de estabilidade confirmou a separação entre os pontos VP1 acima do limiar ($\hat{p}$ = 0,627) e VP2 abaixo ($\hat{p}$ = 0,363), ambos na zona de transição, em fidelidade à natureza contínua do fenômeno.

A aplicação conjunta das ferramentas permite, ainda, recomendações concretas sem novas simulações. VP1 já está próximo do ótimo no domínio investigado: com o maior IQn do conjunto e baixo espalhamento lateral, há pouco a

ganhar, elevar V/U para cerca de 1,18 levaria $\hat{p}$ acima de 0,70, mas o ganho seria marginal e penalizaria a conservação volumétrica (termo de maior peso do IQ_n); recomenda-se manter os parâmetros atuais. VP2 tem margem de melhora com vetor de ação claro: o fator limitante não é a razão V/U, e sim a baixa altura de bico, que eleva a fronteira crítica a 1,407. Aumentar V/U cruzaria a fronteira, mas agravaria o déficit volumétrico já presente ($area_{norm}$ = 0,82), degradando o IQ_n. A estratégia fisicamente coerente é elevar H_n de 12,5 para 15,0 mm mantendo V/U ≈ 1,11, o que reduz a fronteira crítica para 1,073 e leva o ponto ao domínio estável com margem de 3,5% — sem alterar a alimentação; a H_n = 17,5 mm a margem cresceria para cerca de 50%, condição análoga à de VP1.

A utilidade das ferramentas desenvolvidas transcende a análise retrospectiva dos casos simulados. A fronteira crítica de estabilidade opera como instrumento de triagem paramétrica prospectiva: para qualquer par (H_n, V/U) dentro do domínio, a equação $(V/U)crit = 3{,}077 - 0{,}1336 \cdot H_n$ fornece imediatamente o limiar entre regimes, e a probabilidade $\hat{p}$ quantifica a margem de segurança. O programa de controle da impressora 3D que identifique $\hat{p} < 0{,}50$ sabe, sem simular, que precisa reposicionar os parâmetros, como aumentar V/U, elevar H_n, ou ambos, para migrar ao lado estável; e a zona de transição ($0{,}3 < \hat{p} < 0{,}7$) sinaliza condições de risco moderado, úteis para definir margens de segurança. A equação é simples o bastante para ser implementada numa planilha ou no painel da impressora, sem custo computacional.

O Índice de Qualidade Geométrica atua numa camada complementar e mais refinada. Enquanto a fronteira classifica de forma binária, o IQn quantifica continuamente o desempenho, combinando os três modos de degradação do filete, a perda volumétrica, espalhamento lateral e colapso de altura. Dois pontos igualmente estáveis pela fronteira podem ter IQn bem distintos, diferença que o critério binário não capta. Isso habilita o índice como critério objetivo de otimização: com as dimensões estimadas pelos metamodelos, é possível varrer o espaço paramétrico e identificar a condição que maximiza o IQn dentro da região estável — tarefa inviável se dependente apenas de simulações CFD.

As duas ferramentas formam, assim, um protocolo de decisão em duas etapas: a fronteira filtra, eliminando combinações inviáveis; o IQn ranqueia, identificando a melhor condição entre as viáveis. Associado aos metamodelos que predizem largura e altura com erro máximo de cerca de 5% sem recorrer ao CFD, o protocolo pode ser

executado para um número arbitrário de combinações em tempo desprezível, convertendo uma investigação de alto custo computacional em uma ferramenta de apoio à decisão acessível e reprodutível. Essa integração entre simulação, metamodelagem e classificação constitui a síntese metodológica do trabalho e sua principal contribuição para o campo da impressão 3D de concreto.

8 CONCLUSÃO

Esta tese desenvolveu, validou e aplicou uma metodologia integrada de dinâmica dos fluidos computacional multifásica, estudos paramétricos e metamodelagem preditiva para analisar e predizer a morfologia do filete na impressão 3D de concreto, estabelecendo relações quantitativas entre os parâmetros operacionais e a estabilidade geométrica da deposição. Os resultados obtidos confirmam a hipótese formulada na Introdução: a abordagem numérica multifásica representou o processo de extrusão com fidelidade físico-computacional e estabilidade numérica, e os metamodelos dela derivados estimaram a largura e a altura do filete sem novas simulações. Os principais achados e contribuições são sintetizados a seguir.

Para isso, o trabalho combinou a simulação numérica do escoamento bifásico concreto–ar pelo Método dos Volumes Finitos (FVM), com modelo multifásico homogêneo, estudos paramétricos estruturados em um planejamento fatorial (CCP) de quinze casos e a construção de metamodelos preditivos (RSM e GPR). O alcance da pesquisa compreendeu a verificação e a calibração de um modelo bidimensional, a comparação entre solvers (ANSYS Fluent e ANSYS CFX), a validação tridimensional frente a dados experimentais da literatura, a análise da influência da altura do bico (H_n) e da razão entre velocidades (V/U) sobre a geometria do filete, a generalização do índice de qualidade com doze casos adicionais da literatura e a validação externa dos metamodelos em pontos operacionais inéditos. As principais conclusões são apresentadas a seguir.

- Modelo bidimensional (FVM). O modelo bidimensional de extrusão, verificado e calibrado com o Método dos Volumes Finitos (FVM), reproduziu qualitativamente o perfil do filamento e os padrões de deposição do regime superalimentado. A superestimação da altura absoluta, da ordem de 85% em relação ao valor tridimensional de referência, é consequência direta e prevista da formulação planar, que suprime o espalhamento lateral do material — e, longe de invalidar o setup, delimitou seu campo de aplicação e firmou uma configuração físico-numérica consistente para a etapa tridimensional.
- Escolha do solver. A escolha do solver revelou-se o achado metodológico determinante da pesquisa. O ANSYS Fluent apresentou incompatibilidade

física nos casos de referência, com erros de até 27% na altura e 62% na largura (Tao et al., 2024) e de 22% e 38% (Comminal et al., 2020), tendendo a subestimar a altura e a superestimar a largura por espalhamento lateral excessivo. Mantidas inalteradas a geometria e a reologia, a migração para o ANSYS CFX reduziu os desvios para 0,52% na altura e 1,87% na largura frente aos dados experimentais — abaixo, inclusive, do modelo numérico de referência da literatura (6,67% e 10,89%). Os estudos de sensibilidade confirmaram que a taxa mínima de cisalhamento e a tensão superficial alteram a geometria em menos de 0,5%, atribuindo o ganho às diferenças intrínsecas dos algoritmos, e não ao ajuste de parâmetros secundários.

- Modelo tridimensional. O modelo tridimensional, conduzido segundo o protocolo padrão de CFD: com geração prévia do perfil de velocidade no bico extrusor e teste de independência de malha, foi validado frente aos dados numéricos da literatura A estimativa do erro de discretização pelo Índice de Convergência de Malha (GCI) resultou em incerteza numérica baixa, da ordem de o que sustentou a adoção da malha de aproximadamente 140 mil nós como configuração de trabalho, pelo melhor equilíbrio entre precisão e custo computacional — ante as mais de 80 horas exigidas pela malha mais densa, sem ganho geométrico proporcional.
- Estudos paramétricos. Os estudos paramétricos, estruturados em um planejamento fatorial (CCP) de quinze casos, quantificaram o papel da altura do bico (H_n) e da razão entre velocidades (V/U). O regime subalimentado mostrou-se estável em todos os quinze casos ($H_n \geq 10$ mm), estabilidade que, no conjunto ampliado, não se manteve para H_n = 7,5 mm (C18 e C19, moderadamente instáveis); o superalimentado, crítico, com a instabilidade atenuada (mas não eliminada) pelo aumento de H_n. A altura do bico revelou-se o parâmetro dominante da razão de aspecto, que variou de 0,184 a 0,687 (cerca de 3,7 vezes) ao longo do domínio investigado, enquanto o espalhamento lateral foi de 186,64% a −3,04%. Um resultado central foi a constatação de que a instabilidade pode decorrer da restrição geométrica imposta por H_n reduzido, independentemente do equilíbrio de alimentação, evidenciando a necessidade de tratar os dois parâmetros como variáveis interdependentes.
- Índice de Qualidade geométrica (IQ). Dessas relações emergiu o Índice de

Qualidade geométrica (IQ), indicador normalizado que sintetiza, em um único valor, os três modos de degradação do filete: perda volumétrica, espalhamento lateral e colapso de altura. Coerente com a classificação qualitativa de estabilidade (correlação de postos $\rho = 0{,}65$ nos quinze casos próprios), o índice generalizou-se satisfatoriamente ao ser confrontado com doze casos adicionais da literatura, preservando o poder discriminatório na escala ampliada de vinte e sete casos ($\rho = 0{,}74$).

- Fronteira crítica de estabilidade. A partir de um modelo logístico multivariado, estabeleceu-se a fronteira crítica de estabilidade $(V/U)_{crit} = 3{,}077 - 0{,}1336 \cdot H_n$, na qual cada milímetro adicional de altura de bico amplia a janela de operação estável em cerca de 0,13 unidade de V/U. Por sua simplicidade, a fronteira opera como instrumento de triagem paramétrica prospectiva, implementável em planilha ou no painel da impressora, sem custo computacional.
- Metamodelos preditivos. No plano preditivo, foram implementados e comparados dois metamodelos da largura e da altura do filete: a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e a Krigagem/Processo Gaussiano (GPR) com kernel Matérn 5/2. A validação cruzada Leave-One-Out (LOOCV) indicou superioridade do GPR, sobretudo para a altura — cuja superfície de resposta apresenta variações locais que o polinômio de segunda ordem da RSM não consegue captar por completo. Recomendou-se, assim, o GPR como modelo primário de predição, reservando-se a RSM à interpretação qualitativa das tendências e à análise do ponto crítico das superfícies.
- Validação externa. A capacidade preditiva foi confirmada por validação externa em dois pontos operacionais inéditos, simulados de forma independente no CFX. Os oito erros relativos permaneceram abaixo do limiar de aceitação de 10%, com máximo de 5,04%, e o valor de referência situou-se sempre dentro do intervalo de credibilidade a 95% do GPR. A aplicação conjunta do Índice de Qualidade e da fronteira de estabilidade a esses pontos fechou o ciclo entre simulação, metamodelagem e classificação, com plena convergência entre as três camadas.

Em síntese, a combinação do Método dos Volumes Finitos com o modelo multifásico homogêneo do CFX representou o escoamento bifásico concreto–ar e reproduziu a geometria da seção transversal do cordão com erros compatíveis com

os limiares adotados na literatura. A pesquisa avançou da reprodução de casos de referência à proposição de ferramentas próprias: o Índice de Qualidade geométrica, a fronteira crítica de estabilidade e metamodelos preditivos validados por simulação independente, consolidando um protocolo integrado de análise, predição e apoio à decisão para o processo de extrusão.

As principais contribuições desta tese são: (i) um protocolo físico-numérico verificado e validado para a simulação da extrusão do concreto 3D, com tratamento consistente da interface concreto–ar e diagnóstico criterioso da escolha do solver; (ii) critérios quantitativos de classificação — o Índice de Qualidade geométrica e a fronteira crítica de estabilidade — que ordenam a adequação das condições operacionais e delimitam a região de deposição estável; e (iii) metamodelos preditivos validados externamente, capazes de estimar a largura e a altura do filete sem novas simulações. Em conjunto, essas ferramentas formam um protocolo de apoio à decisão para a seleção e o ajuste dos parâmetros operacionais no 3DCP, respondendo diretamente à lacuna identificada na revisão sistemática: a dificuldade de capturar numericamente a interface concreto–ar e de traduzir os resultados em critérios objetivos de qualidade e estabilidade.

8.1 LIMITAÇÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O estudo delimitou-se a propriedades reológicas fixas obtidas da literatura, a um conjunto específico de variáveis operacionais, com diâmetro do bico mantido constante, e a validação tridimensional em um único caso de referência. Para ampliar e consolidar os resultados, recomenda-se: incorporar a variabilidade reológica e o comportamento dependente do tempo do material; estender os estudos paramétricos a múltiplas camadas e a geometrias de deposição mais complexas; confrontar as predições com novos dados experimentais; ampliar o banco de dados dos metamodelos para reforçar sua capacidade de generalização e a robustez da fronteira de estabilidade; e implementar malha móvel para maior flexibilidade operacional.

REFERÊNCIAS

ABBAOUI, K. El et al. 3D concrete printing using computational fluid dynamics: modeling of material extrusion with slip boundaries. **Journal of Manufacturing Processes**, v. 118, p. 448-459, 2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmapro.2024.03.042.

ABBAOUI, K. El et al. Numerical modelling of planned corner deposition in 3D concrete printing. **Archives of Materials Science and Engineering**, v. 121, n. 2, p. 71-79, 1 jun. 2023. http://dx.doi.org/10.5604/01.3001.0053.8488.

AIAA — AMERICAN INSTITUTE OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS. **Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations**: AIAA G-077-1998. Reston, VA: AIAA, 1998.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974. http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1974.1100705.

ALHUSSAIN, A.; DUARTE, J. P.; BROWN, N. C. Developing a data-driven filament shape prediction model for 3D concrete printing. **Frontiers in Built Environment**, v. 10, art. 1363370, 2024. http://dx.doi.org/10.3389/fbuil.2024.1363370.

AN, D.; ZHANG, Y. X.; YANG, R. (Chunhui). Numerical modelling of 3D concrete printing: material models, boundary conditions and failure identification. **Engineering Structures**, v. 299, 15 jan. 2024.

ANSYS, Inc. **ANSYS CFX-Solver theory guide**. Canonsburg: ANSYS, Inc., 2023.

ARAUJO, Priscila Pires. **Simulação numérica do escoamento turbulento sobre um degrau descendente**. 2017. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2017.

BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. **An introduction to rheology**. Amsterdam: Elsevier, 1989.

BINGHAM, E. C. **Fluidity and plasticity**. New York: McGraw-Hill, 1922.

BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. **Dynamics of polymeric liquids, volume 1**: fluid mechanics. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1987.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Transport phenomena**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

BOX, G. E. P.; WILSON, K. B. On the experimental attainment of optimum conditions. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, v. 13, n. 1, p. 1-45, 1951. http://dx.doi.org/10.1111/j.2517-6161.1951.tb00067.x.

BRACKBILL, J. U.; KOTHE, D. B.; ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. **Journal of Computational Physics**, v. 100, n. 2, p. 335-354, 1992. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-Y.

BUSWELL, R. A. et al. 3D printing using concrete extrusion: a roadmap for research. **Cement and Concrete Research**, Elsevier Ltd, 1 out. 2018.

BYRD, R. H.; LU, P.; NOCEDAL, J.; ZHU, C. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. **SIAM Journal on Scientific Computing**, [S. l.], v. 16, n. 5, p. 1190-1208, 1995.

CELIK, I. B.; GHIA, U.; ROACHE, P. J.; FREITAS, C. J.; COLEMAN, H.; RAAD, P. E. Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications. **Journal of Fluids Engineering**, v. 130, n. 7, p. 078001, 2008. http://dx.doi.org/10.1115/1.2960953.

CHEN, Yu et al. Effect of printing parameters on interlayer bond strength of 3D printed limestone-calcined clay-based cementitious materials: an experimental and numerical study. **Construction and Building Materials**, v. 262, p. 120094, nov. 2020. http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.120094.

CHENG, Hanbin et al. Modeling concrete deposition via 3D printing using reproducing kernel particle method. **Cement and Concrete Research**, v. 181, p. 107526, jul. 2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2024.107526.

COMMINAL, R. et al. Modelling of 3D concrete printing based on computational fluid dynamics. **Cement and Concrete Research**, v. 138, p. 106256, dez. 2020.

CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

COUSSOT, P. **Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials**: applications in industry and environment. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005.

CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**, London, v. 29, n. 1, p. 47-65, 1979.

DONATO, H.; DONATO, M. Stages for undertaking a systematic review. **Acta Médica Portuguesa**, CELOM, 1 mar. 2019.

DREW, D. A. Mathematical modeling of two-phase flow. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 15, p. 261-291, 1983. http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.001401.

DREW, D. A.; LAHEY JUNIOR, R. T. Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 5, n. 4, p. 243-264, 1979. http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(79)90024-7.

DREW, D. A.; PASSMAN, S. L. **Theory of multicomponent fluids**. New York: Springer, 1999. (Applied Mathematical Sciences, v. 135).

DUARTE JUNIOR, Paulo Cesar. **Proposta de planejamento cirúrgico de Fontan baseado em estudos numéricos e hemodinâmicos tridimensionais**. 2023. 315 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

DÜZ, H. Numerical and experimental study to predict the entrance length in pipe flows. **Journal of Applied Fluid Mechanics**, v. 12, n. 1, p. 155-164, 2019. http://dx.doi.org/10.29252/jafm.75.253.29218.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. New York: Chapman & Hall, 1993.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

FILGUEIRAS, Monique B. **Avaliação das propriedades mecânicas de material cimentício produzido por impressão 3D com foco na aderência entre camadas**. 2023. 176 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

FORMIGA, C. V. E.; CARNEIRO, M. L.; JÚNIOR, E. L. F. Modelagem e otimização do sistema de extrusão de impressoras 3D para construção civil. **Brazilian Journal of Development**, v. 8, n. 1, p. 7713-7725, 28 jan. 2022.

FORRESTER, A. I. J.; SÓBESTER, A.; KEANE, A. J. **Engineering design via surrogate modelling**: a practical guide. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; McDONALD, A. T. **Introduction to fluid mechanics**. 9th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2015.

HASTIE, T.; TIBSHIRANI, R.; FRIEDMAN, J. **The elements of statistical learning**: data mining, inference, and prediction. 2nd ed. New York: Springer, 2009.

HERSCHEL, W. H.; BULKLEY, R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen. **Kolloid-Zeitschrift**, v. 39, n. 4, p. 291-300, 1926. http://dx.doi.org/10.1007/BF01432034.

HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. **Journal of Computational Physics**, v. 39, n. 1, p. 201-225, 1981. http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(81)90145-5.

HIRT, C. W.; SICILIAN, J. M. A porosity technique for the definition of obstacles in rectangular cell meshes. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL SHIP HYDRODYNAMICS, 4., 1985, Washington, D.C. **Proceedings [...]**. Washington, D.C.: National Academy Press, 1985. p. 1-19.

ISHII, M.; MISHIMA, K. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. **Nuclear Engineering and Design**, v. 82, n. 2-3, p. 107-126, 1984. http://dx.doi.org/10.1016/0029-5493(84)90207-3.

KENDALL, M. G. A new measure of rank correlation. **Biometrika**, [S. l.], v. 30, n. 1-2, p. 81-93, 1938.

KHAN, Shoukat Alim et al. Numerical modelling and simulation for extrusion-based 3D concrete printing: the underlying physics, potential, and challenges. **Results in Materials**, v. 16, p. 100337, dez. 2022. http://dx.doi.org/10.1016/j.rinma.2022.100337.

KRIGE, D. G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand. **Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa**, v. 52, n. 6, p. 119-139, 1951.

LAN, Xuli; ZENG, Xiaohui; ZHU, Huasheng; UMAR, Hussaini Abdullahi; LONG, Guangcheng; TANG, Zhuo; XIE, Youjun. Surface tension of cementitious pore

solutions at low atmospheric pressure: an experimental exploration. **Cement and Concrete Composites**, v. 145, p. 105309, 2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2023.105309.

LIM, S. G.; TAN, M. J. A rheological model for concrete additive manufacturing. **Construction and Building Materials**, v. 451, art. 138771, 2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.138771.

LONG, W. J. et al. Rheology and buildability of sustainable cement-based composites containing micro-crystalline cellulose for 3D-printing. **Journal of Cleaner Production**, v. 239, p. 118054, dez. 2019. http://dx.doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.118054.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MATHERON, G. Principles of geostatistics. **Economic Geology**, v. 58, n. 8, p. 1246-1266, 1963. http://dx.doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246.

MECHTCHERINE, V. et al. Extrusion-based additive manufacturing with cement-based materials – production steps, processes, and their underlying physics: a review. **Cement and Concrete Research**, v. 132, p. 106037, jun. 2020. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2020.106037.

MOLLAH, Md Tusher et al. Numerical predictions of bottom layer stability in material extrusion additive manufacturing. **JOM**, v. 74, n. 3, p. 1096-1101, 8 jan. 2022. http://dx.doi.org/10.1007/s11837-021-05035-9.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 10. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2019.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 9. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to linear regression analysis**. 5th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, C. M. **Response surface methodology**: process and product optimization using designed experiments. 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2016.

NEVES, E. E.; SHALOM DE FREITAS BEZERRA, Y. **Revista Cultura e Científica do UNIFACEX**, n. 11, 2013.

NGUYEN-VAN, V. et al. Modelling of 3D concrete printing process: a perspective on material and structural simulations. **Additive Manufacturing**, Elsevier B.V., 5 jan. 2023.

OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. **Verification and validation in scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

PAN, Tinghong et al. Flow and deformation behaviors of cementitious materials through nozzles with different geometric parameters: experimental and numerical approaches. **Construction and Building Materials**, v. 360, p. 129605, dez. 2022. http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.129605.

PAPANASTASIOU, T. C. Flows of materials with yield. **Journal of Rheology**, v. 31, n. 5, p. 385-404, 1987. http://dx.doi.org/10.1122/1.549926.

PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 15, n. 10, p. 1787-1806, 1972. http://dx.doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3.

PEDREGOSA, F. et al. Scikit-learn: machine learning in Python. **Journal of Machine Learning Research**, v. 12, p. 2825-2830, 2011.

PERROT, A. et al. From analytical methods to numerical simulations: a process engineering toolbox for 3D concrete printing. **Cement and Concrete Composites**, v. 122, p. 104164, set. 2021. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2021.104164.

QUEIPO, N. V.; HAFTKA, R. T.; SHYY, W.; GOEL, T.; VAIDYANATHAN, R.; TUCKER, P. K. Surrogate-based analysis and optimization. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 41, n. 1, p. 1-28, 2005. http://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.001.

RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. I. **Gaussian processes for machine learning**. Cambridge: MIT Press, 2006.

REINOLD, J. et al. Extrusion process simulation and layer shape prediction during 3D-concrete-printing using the Particle Finite Element Method. **Automation in Construction**, v. 136, p. 104173, abr. 2022.

REZENDE, Ricardo Vicente de Paula. **Modelagem matemática e desenvolvimento de metodologia computacional para a simulação numérica do escoamento bifásico de ar e ferro-gusa em canal de corrida de alto-forno**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

REZENDE, Ricardo Vicente de Paula. **Modelo de fechamento para o tensor de interface no modelo de dois fluidos**: modelagem matemática e simulação numérica. 2014. Tese (Doutorado em Engenharia Química) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/123256.

RICHARDSON, L. F. The deferred approach to the limit. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A**, v. 226, p. 299-361, 1927. http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1927.0008.

RIZZIERI, G.; LANTERI, F.; FERRARA, L.; CREMONESI, M. ShapeGen3DCP: a deep learning framework for layer shape prediction in 3D concrete printing. **Computers & Structures**, 2026. No prelo.

ROACHE, P. J. **Verification and validation in computational science and engineering**. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998.

ROSA, Eugênio Spanó. **Forma diferencial das equações de transporte**. Campinas: FEM/DE Unicamp, 2019. 31 p.

ROUSSEL, N. (Ed.). **Understanding the rheology of concrete**. Cambridge: Woodhead Publishing, 2012.

ROUSSEL, N. A thixotropy model for fresh fluid concretes: theory, validation and applications. **Cement and Concrete Research**, v. 36, n. 10, p. 1797-1806, 2006. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2006.05.025.

ROUSSEL, N. Rheological requirements for printable concretes. **Cement and Concrete Research**, Elsevier Ltd, 1 out. 2018.

RUBIN, Ariane Prevedello. **Influência da taxa de estruturação nas propriedades reológicas, físicas e mecânicas de concretos para impressão 3D (3DCP)**. 2021. 266 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461-464, 1978. http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344136.

SÉRGIO FILHO, João et al. Estudo da reologia de pastas cimentícias contendo resíduo de tijolo cerâmico moído e metacaulim. **Matéria (Rio de Janeiro)**, v. 25, n. 1, p. 1-12, 2020. http://dx.doi.org/10.1590/s1517-707620200001.0879.

SILVA, Lívia Fernanda. **Materiais cimentícios suplementares desenvolvidos com metacaulim e HPMC para impressão 3D**: influência nos aspectos de extrudabilidade e construtibilidade. 2023. 243 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

SILVA, M. D. L. da. **Desenvolvimento e validação de um protótipo de impressora 3D em escala de bancada visando aplicação na construção civil**. 2022. 92 f. Dissertação (Mestrado) – Unicesumar, Maringá, 2022.

SPANGENBERG, Jon et al. Numerical simulation of multi-layer 3D concrete printing. **RILEM Technical Letters**, v. 6, p. 119-123, 8 out. 2021. http://dx.doi.org/10.21809/rilemtechlett.2021.142.

SPEARMAN, C. The proof and measurement of association between two things. **The American Journal of Psychology**, [S. l.], v. 15, n. 1, p. 72-101, 1904.

STEIN, M. L. **Interpolation of spatial data**: some theory for kriging. New York: Springer-Verlag, 1999.

TAO, Yaxin et al. Numerical assessment of plastic yielding in extrusion-based 3D concrete printing. **Materials and Structures**, v. 57, n. 4, p. 1-15, 16 abr. 2024. http://dx.doi.org/10.1617/s11527-024-02325-x.

TU, H. et al. Recent advancements and future trends in 3D concrete printing using waste materials. **Developments in the Built Environment**, Elsevier Ltd, 1 dez. 2023.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics**: the finite volume method. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1995.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics**: the finite volume method. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2007.

VESPALEC, Arnošt et al. Experimental study on time dependent behaviour of coarse aggregate concrete mixture for 3D construction printing. **Construction and Building Materials**, v. 376, p. 130999, maio 2023. http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.130999.

WALLEVIK, J. E. **Rheology of particle suspensions**: fresh concrete, mortar and cement paste with various types of lignosulfonates. 2003. Tese (Doutorado) – Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2003.

WEI, Ying et al. Numerical simulation of 3D concrete printing derived from printer head and printing process. **Journal of Building Engineering**, v. 88, p. 109241, jul. 2024. http://dx.doi.org/10.1016/j.jobe.2024.109241.

WHITE, F. M. **Viscous fluid flow**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

WOLFS, R. J. M. et al. Early age mechanical behaviour of 3D printed concrete: numerical modelling and experimental testing. **Cement and Concrete Research**, v. 106, p. 103-116, abr. 2018. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2018.02.001.

WOLFS, R. J. M.; SALET, T. A. M.; ROUSSEL, N. Filament geometry control in extrusion-based additive manufacturing of concrete: the good, the bad and the ugly. **Cement and Concrete Research**, v. 150, p. 106615, 2021. http://dx.doi.org/10.1016/j.cemconres.2021.106615.

XIAO, J.; LIU, H.; DING, T. Finite element analysis on the anisotropic behavior of 3D printed concrete under compression and flexure. **Additive Manufacturing**, v. 39, 1 mar. 2021.

APÊNDICE A - SIMULAÇÃO AUXILIAR PARA OBTENÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE NO BICO DE EXTRUSÃO

1. Configurações gerais

Solver e domínio:

- Solver: *Pressure-Based*
- Tempo: *Steady*
- Tipo de escoamento: *Laminar*
- Gravidade: desativada (não afeta o desenvolvimento axial do perfil)
- Formulação de velocidade: *Absolute*

2. Propriedades do material

Material: *Concrete*

Propriedades	**Estudo 1**	**Estudo 2**
Modelo reológico	Herschel–Bulkley	Bingham
Densidade	2150 kg/m³	2100 kg/m³
Consistency index (*k*):	74,07 Pa·sⁿ	7,5 Pa·sⁿ
Power-law index (*n*):	0,81	-
Yield stress (τ_0):	405,7 Pa	630 Pa
Critical shear rate:	1 s^{-1}	0,01 s^{-1}

3. Condições de contorno

Janela: *Boundary Conditions*

- **Inlet:**
  - Tipo: *Velocity Inlet*
  - Método de especificação: *Magnitude, Normal to Boundary*
  - Velocidade: 0,03093 m/s (Estudo 1); 0,0336 m/s (Estudo 2)
  - Referência: *Absolute Frame*
  - Pressão gauge: 0 Pa
- **Outlet:**
  - Tipo: *Pressure Outlet*
  - Pressão gauge: 0 Pa

- **Wall:**
    - Condição de não deslizamento (*no-slip*)

4. Métodos numéricos

Janela: *Solution Methods*

- Pressure-Velocity Coupling: *Coupled*
- Flux Type: *Rhie-Chow momentum based*
- Spatial Discretization:
    - Gradient: *Least Squares Cell Based*
    - Pressure: *Second Order*
    - Momentum: *Second Order Upwind*
- High Order Term Relaxation: ativado
- Transient Formulation: *Global Time Step* (para estabilidade interna mesmo em regime steady).

5. Controles de solução

Janela: *Solution Controls*

- Under-Relaxation Factors:
    - Pressure = 0,3
    - Momentum = 0,7
    - Density = 1
    - Body Forces = 0,8

6. Inicialização e processamento

- **Método:** *Hybrid Initialization*
- Critério de convergência: residuals ≤ 10^{-4}
- Número de iterações: 2000

7. Geração de plano de extração

Após a convergência, foi criada uma superfície plana de corte (Plane Surface) perpendicular ao eixo do tubo:

- Plano: ZX Plane
- Coordenada Y: 0,02 m (próxima à saída do bico)

Essa superfície foi utilizada para extrair o perfil de velocidade

desenvolvido, o qual serviu de entrada na simulação tridimensional (via *profile file* ou *UDF inlet*).

8. Execução e resultados

Janela: *Run Calculation*

- Pseudo Time Step Size: 0,0001 s
- Profile Update Interval: 1
- Número de iterações: 2000

APÊNDICE B - SIMULAÇÃO PRINCIPAL DA REGIÃO DE DEPOSIÇÃO DO MATERIAL

1. Seleção do Solver e Configurações Gerais

Janela: *General → Solver Settings*

- Tipo de solver: *Pressure-Based*
- Formulação de velocidade: *Absolute*
- Domínio: *3D*
- Tempo: *Transient*
- Gravidade: Ativada, com Y = -9,81 m/s²

2. Ativação do Modelo Multifásico (VOF)

Janela: *Multiphase Model → Models*

- Modelo selecionado: *Volume of Fluid (VOF)*
- Número de fases eulerianas: 2
- Tipo de formulação: *Implicit*
- Interface Modeling: *Sharp*
- Body Force Formulation: *Implicit Body Force*

3. Definição das Fases

Janela: *Multiphase Model → Phases*

- Primary Phase: *Concrete*
- Secondary Phase: *Air*

  O concreto é definido como fase primária (fluido mais denso e contínuo) e o ar como secundária (fluido ambiente), refletindo o processo real de deposição.

4. Interação Entre Fases

Janela: *Phase Interaction → Forces*

- Par de fases: *concrete : air*
- Modelos ativados:
  - *Surface Tension Force Modeling*
  - *Continuum Surface Force*
- Coeficiente de tensão superficial: *0,0035 N/m*.

5. Propriedades do Material – Concreto

Janela: *Create/Edit Materials → concrete*

- Tipo de material: *Fluid*
- Densidade: 2150 kg/m³
- Modelo de viscosidade: *Herschel–Bulkley*
    - k (Pa·sⁿ): 74,07
    - n: 0,81
    - Tensão de escoamento: 405,7 Pa
    - Taxa crítica de cisalhamento: 1 s^{-1}.

6. Modelo de Escoamento (Viscoso)

Janela: *Viscous Model*

- Modelo: *Laminar*

7. Métodos Numéricos

Janela: *Solution Methods*

- Pressure-Velocity Coupling: *SIMPLE*
- Spatial Discretization:
    - *Gradient:* Least Squares Cell Based
    - *Pressure:* PRESTO!
    - *Momentum:* First Order Upwind
    - *Volume Fraction:* Compressive
- Transient Formulation: *First Order Implicit*
- High Order Term Relaxation: ativado

8. Controles de Solução

Janela: *Solution Controls*

- Under-Relaxation Factors:
    - Pressure = 0,3
    - Density = 1
    - Body Forces = 0,8
    - Momentum = 0,7
    - Volume Fraction = 0,7.

9. Inicialização da Solução

Janela: *Initialization → Standard Initialization*

- Gauge Pressure: 0 Pa
- Velocidades (X, Y): 0 m/s
- air Volume Fraction: 1
- A simulação é inicializada com o domínio preenchido por ar, permitindo a entrada do concreto pela condição de contorno de entrada (inlet) durante o processo transiente.

10. Controle Temporal e Passo de Tempo Adaptativo

Janela: *Run Calculation → Time Advancement → Adaptive*

- Tipo: *Adaptive Time Stepping (Physics Based Constraint)*
- Tempo total: 30 s
- Time Step inicial: 0,001 s
- Time Step máximo: 0,01 s
- Fator de variação mínimo: 0,8
- Fator de variação máximo: 1,2
- Courant Number Global: 2
- Iterações por Time Step: 40
- Profile Update Interval: 1

  O controle adaptativo ajusta o tamanho do passo de tempo automaticamente conforme as condições físicas, mantendo a estabilidade do escoamento.

APÊNDICE C - SETUP NUMÉRICO DA SIMULAÇÃO NO ANSYS CFX

1. Configurações gerais

Janela: *Analysis Type* e *Solution Units*

- Software: ANSYS CFX
- Tipo de análise: *Transient*
- Domínio: 3D, com plano de simetria longitudinal (*symmetry*) para redução do custo computacional
- Unidades de solução: kg, m, s, K, rad, sr

2. Configuração do domínio

Janela: *Default Domain → Basic Settings*

- Tipo de domínio: *Fluid Domain*
- Fluidos definidos: *Air at 25 °C* (biblioteca de materiais) e *Concrete* (material criado pelo usuário)
    - Morfologia: *Continuous Fluid* (ambas as fases)
    - *Minimum Volume Fraction*: 10^{-10}
- Pressão de referência: 1 atm
- Modelo de empuxo (*Buoyancy Model*): *Buoyant*, com gravidade Y = -9,81 m/s²
    - Densidade de referência (*Buoy. Ref. Density*): 1,185 kg/m³ (ar)
- Movimento do domínio: *Stationary*, sem deformação de malha

3. Modelos de fluido

Janela: *Default Domain → Fluid Models*

- Multifásico: *Homogeneous Model* ativado
    - *Free Surface Model*: *Standard*
    - *Interface Compression Level*: 2
- Transferência de calor: *Isothermal*, a 25 °C
- Turbulência: *None (Laminar)*

- Modelos específicos por fluido (*Fluid Specific Models*): *Fluid Buoyancy Model* do tipo *Density Difference* para ambas as fases

4. Interação entre fases

Janela: *Default Domain → Fluid Pair Models*

- Par de fases: *Air* | *Concrete*
- Tensão superficial (*Surface Tension Model*): *None*
- Transferência interfacial (*Interphase Transfer*): *None*
- Transferência de massa (*Mass Transfer*): *None*

5. Propriedades do material - Concreto

Janela: *Materials → concrete*

- Tipo: *General Material* (fluido)
- Densidade: 2100 kg/m³
- Calor específico: 1 J/(kg·K) (valor nominal, sem efeito na análise isotérmica)
- Viscosidade dinâmica: *Non-Newtonian Model* - modelo de Bingham
    - Tensão de escoamento (*Yield Stress*): 630 Pa
    - *Viscosity Consistency*: 7,5 Pa·s
    - Taxa de cisalhamento mínima: 10^{-3} s^{-1}
    - Taxa de cisalhamento máxima: 10^{3} s^{-1}

Os parâmetros reológicos adotados correspondem ao concreto imprimível caracterizado por Comminal et al. (2020), o mesmo utilizado no Estudo 2 (Apêndice A).

6. Condições de contorno

Janela: *Default Domain → Boundary Conditions*

- **Inlet** (saída do bico de extrusão):
    - Tipo: *Inlet*, regime *Subsonic*
    - Velocidade: *Normal Speed* [mm/s]
    - Frações volumétricas: concreto = 1; ar = 0

- **Opening** (faces abertas do domínio - frontal, superior, lateral direita e extremidade):
    - Tipo: *Opening*, regime *Subsonic*
    - Opção: *Opening Pressure and Direction*, com pressão relativa de 0 Pa
    - Direção do escoamento: *Normal to Boundary Condition*
    - Frações volumétricas: ar = 1; concreto = 10^{-20}
- **Symmetry**: plano de simetria longitudinal do filamento
- **Wall_deposition** (superfície de impressão):
    - Tipo: *No Slip Wall* (parede com aderência)
    - Velocidade da parede (*Wall Velocity*): componentes cartesianas U = 0, V = 0 e W = [mm/s], reproduzindo o movimento relativo entre o bico e a base de impressão
- **Wall_nozzle** (parede externa do bico):
    - Tipo: *Free Slip Wall* (parede sem cisalhamento)

7. Inicialização da solução

Janela: *Initialization → Global Settings*

- Velocidade: cartesiana, com U = V = W = 0 m/s (*Automatic with Value*)
- Pressão relativa: 0 Pa
- Frações volumétricas iniciais (*Fluid Settings*): ar = 1; concreto = 0

A simulação é inicializada com o domínio completamente preenchido por ar, e o concreto é introduzido pela condição de entrada (inlet) ao longo do processo transiente.

8. Controle do solver

Janela: *Solver → Solver Control*

- Esquema de advecção: *High Resolution*
- Esquema transiente: *Second Order Backward Euler*, com inicialização automática do passo de tempo
- Controle de convergência:

    - Mínimo de 2 e máximo de 10 *coefficient loops* por passo de tempo
    - *Fluid Timescale Control*: *Coefficient Loops*
- Critério de convergência: resíduos RMS ≤ 10^{-4} (continuidade, momento e fração volumétrica)
- Opções avançadas: *Body Forces* com *Averaging Type* do tipo *Harmonic*

9. Controle de saída de resultados

Janela: *Solver → Output Control*

- Resultados finais (*Results*): formato *Standard*
- Resultados transientes (*Trn Results*): gravação em intervalos de tempo de 0,02 s
- Backup: a cada passo de tempo, com retenção do tipo *Delete Old Files.*

APÊNDICE D - FRONTEIRA CRÍTICA DE ESTABILIDADE (3DCP) — REGRESSÃO LOGÍSTICA BINÁRIA PARA CLASSIFICAÇÃO DE REGIMES DE DEPOSIÇÃO

```
# ENTRADA : planilha com casos simulados/experimentais
#           (caso, V, U, HN, classificação de estabilidade)
# SAÍDA   : equação da fronteira (V/U)_crit = f(HN), métricas de desempenho
#           (acurácia, matriz de confusão, LOO-CV), intervalos de confiança
#           por bootstrap e figuras

# PARÂMETROS GLOBAIS:
SEMENTE      ← 42          # reprodutibilidade
N_BOOTSTRAP  ← 5000        # reamostragens
C_REG        ← 1.0         # regularização L2 (padrão scikit-learn)
```

1. Carregamento e preparação dos dados

```
FUNÇÃO carregar_dados(arquivo, aba):
df ← ler_planilha(arquivo, aba)
remover linhas vazias e valores não numéricos de V, U, HN
df["VU"] ← df["V"] / df["U"]                  # variável adimensional
df["y"]  ← 1 SE estabilidade = "Estável" SENÃO 0     # alvo binário
RETORNAR df

FUNÇÃO separar_conjuntos(df):
df15 ← casos C1–C15                # modelo numérico próprio
df27 ← todos os casos (C1–C27)     # + 12 casos de Comminal et al. (2020)
RETORNAR df15, df27
```

2. Ajuste do modelo logístico

```
# Modelo: p(estável) = 1 / (1 + exp(−(β0 + β1·(V/U) + β2·HN)))

FUNÇÃO ajustar_modelo(X, y):
modelo ← RegressãoLogística(penalização L2, C = C_REG,
solver = "lbfgs", semente = SEMENTE)
```

modelo.ajustar(X, y) # X = [V/U, HN]
RETORNAR modelo

FUNÇÃO fronteira_vu(modelo, HN):
Fronteira de decisão: p = 0,5 ⇔ β0 + β1·(V/U) + β2·HN = 0
RETORNAR −(β0 + β2·HN) / β1
Forma reportada: (V/U)_crit = (−β0/β1) + (−β2/β1)·HN

3. Avaliação do modelo

FUNÇÃO avaliar_treino(modelo, X, y):
pred ← modelo.predizer(X)
calcular acurácia, sensibilidade, especificidade
montar matriz de confusão (TN, FP, FN, TP)
RETORNAR métricas

FUNÇÃO validacao_cruzada_LOO(X, y):
Leave-One-Out: n ajustes; cada caso é predito sem participar do treino
PARA cada caso i EM 1..n:
ajustar modelo com todos os casos EXCETO i
predizer o caso i
calcular acurácia LOO e matriz de confusão
identificar casos classificados incorretamente
RETORNAR métricas

4. Quantificação de incerteza (bootstrap não paramétrico)

FUNÇÃO bootstrap_fronteira(X, y, n_boot = N_BOOTSTRAP):
PARA b EM 1..n_boot:
reamostrar n casos COM reposição
SE a reamostra contém apenas uma classe: PULAR
ajustar regressão logística na reamostra
armazenar intercepto (−β0/β1) e inclinação (−β2/β1) da fronteira
IC 95% ← percentis 2,5% e 97,5% das distribuições bootstrap
RETORNAR interceptos, inclinações

FUNÇÃO banda_bootstrap(interceptos, inclinações, valores_HN):
PARA cada HN:
(V/U)_boot ← interceptos + inclinações·HN
banda ← [percentil 2,5% ; percentil 97,5%]
RETORNAR média e limites da banda de confiança

5. Visualizações

FUNÇÃO plotar_fronteira(df, modelo):
gerar grade (HN × V/U) e calcular p̂ em cada ponto
colorir zonas: instável (p < 0,3), transição (0,3–0,7), estável (p > 0,7)
traçar curvas de nível p = 0,30 / 0,50 / 0,70
sobrepor casos observados (símbolo por classe; destaque para erros)

FUNÇÃO plotar_bootstrap(interceptos, inclinações, modelo):
traçar fronteira pontual (p = 0,50) e banda de IC 95%

FUNÇÃO plotar_corte_transversal(modelo1, modelo2, HN_fixo):
traçar p̂ × (V/U) para HN fixo, comparando os dois modelos
marcar (V/U)_crit de cada modelo e zona de transição

6. Pipeline principal

INÍCIO:
df ← carregar_dados(arquivo, aba)
df15, df27 ← separar_conjuntos(df)

Etapa 1 — Modelo numérico (15 casos)
m15 ← ajustar_modelo(X15, y15)
reportar coeficientes e equação da fronteira
avaliar_treino(m15); validacao_cruzada_LOO(X15, y15)
bootstrap_fronteira(X15, y15) → IC 95% da fronteira

Etapa 2 — Modelo estendido (27 casos)
m27 ← ajustar_modelo(X27, y27)
reportar coeficientes e equação da fronteira

avaliar_treino(m27); validacao_cruzada_LOO(X27, y27)
bootstrap_fronteira(X27, y27) → IC 95% da fronteira

comparar variação de intercepto e inclinação entre os modelos
gerar figuras: mapas de fronteira, bandas bootstrap,
matrizes de confusão, cortes transversais

APÊNDICE E - ÍNDICE DE QUALIDADE GEOMÉTRICA DA DEPOSIÇÃO (IQn)

```
# ENTRADA : planilha com casos simulados
#           (caso, HN, V/U, área normalizada, espalhamento lateral,
#            perda de altura)
# SAÍDA   : IQ e IQn por caso, ranking de qualidade, tabela em Excel
#           e mapa HN × V/U colorido por IQn

# FORMULAÇÃO:
#   IQ  = w1·|A_norm − 1| + w2·|E_L|/E_ref + w3·|P_H|/H_ref
#   IQn = 1 − IQ

#   A_norm : área final / área de referência (conservação volumétrica)
#   E_L    : espalhamento lateral
#   P_H    : perda de altura
#   E_ref  : máx(|E_L|) no conjunto de referência
#   H_ref  : máx(|P_H|) no conjunto de referência

# PESOS:
w1 ← 0,4   # conservação volumétrica
w2 ← 0,3   # espalhamento lateral
w3 ← 0,3   # perda de altura
# (w1 + w2 + w3 = 1)
```

1. Carregamento dos dados

```
df ← ler_planilha("15 casos.xlsx")
padronizar nomes de colunas (minúsculas, sem espaços)
```

2. Valores de referência

```
# Definidos a partir dos máximos observados no próprio conjunto
# (normalização relativa ao conjunto de dados)
E_ref ← máx(|espalhamento|)
H_ref ← máx(|perda_alt|)
```

3. Termos individuais de erro

PARA cada caso:

erro_área ← |A_norm − 1|

erro_espalhamento ← |E_L| / E_ref # ∈ [0, 1]

erro_altura ← |P_H| / H_ref # ∈ [0, 1]

4. Índice composto e índice normalizado

PARA cada caso:

IQ ← w1·erro_área + w2·erro_espalhamento + w3·erro_altura

IQn ← 1 − IQ # quanto maior, melhor a qualidade geométrica

5. Ranking e saídas

---

ordenar casos por IQn (decrescente) # melhor → pior

imprimir valores de referência (E_ref, H_ref)

imprimir tabela caso a caso (erros individuais, IQ, IQn)

salvar tabela de resultados em Excel

6. Visualização

---

plotar dispersão HN × V/U:

cor de cada ponto ← IQn (escala contínua com barra de cores)

marcar linha de referência V/U = 1

rotular cada ponto com o identificador do caso

salvar figura "mapa_indice_qualidade.png"

Parte 2 — Análise de sensibilidade dos pesos (robustez do ordenamento)

ENTRADA : IQn dos 15 casos calculados na Parte 1

(caso, A_norm, E_L, P_H) e a configuração de pesos adotada

SAÍDA : coeficientes de Spearman (ρ) e Kendall (τ-b) entre o ranking

adotado e cada configuração alternativa; deslocamento máximo

de posição; tabela-resumo da sensibilidade

CONFIGURAÇÕES DE PESOS AVALIADAS (w1 = conservação volumétrica):

CONFIGS ← [

```
  (1/3, 1/3, 1/3),   # equitativa
  (0,40, 0,30, 0,30),# adotada (referência)
  (0,50, 0,25, 0,25),# maior ênfase na conservação volumétrica
  (0,60, 0,20, 0,20),# ênfase acentuada
  (0,20, 0,40, 0,40)# menor ênfase na conservação volumétrica
]
CONFIG_REF ← (0,40, 0,30, 0,30)

1. Ranking de referência
ranking_ref ← ordenar casos por IQn(CONFIG_REF), decrescente

2. Comparação de cada configuração com a de referência
PARA cada (w1, w2, w3) EM CONFIGS:
    IQn_alt   ← recalcular IQn dos 15 casos com (w1, w2, w3)
    ranking_alt ← ordenar casos por IQn_alt, decrescente
    ρ    ← spearmanr(IQn_ref, IQn_alt)          # correlação de postos
    τ_b  ← kendalltau(IQn_ref, IQn_alt,          # variante corrigida
                      variant = "b")            # para empates
    desloc_max ← máx(|posição_ref(caso) − posição_alt(caso)|)
    registrar (config, ρ, τ_b, desloc_max)

3. Saída
imprimir tabela: config | ρ | τ_b | deslocamento máximo de posição
# ρ e τ_b próximos de +1  → ordenamento estável → baixa sensibilidade

# Implementação: funções spearmanr e kendalltau (SciPy).
# Referências: Spearman (1904); Kendall (1938); Conover (1999).
```

APÊNDICE F — METAMODELOS: SUPERFÍCIES DE RESPOSTA (RSM) E KRIGING (GAUSSIAN PROCESS REGRESSION)

Este apêndice descreve, em pseudocódigo independente de linguagem, os algoritmos que compõem a plataforma de metamodelagem empregada nesta tese (RSM–KRIGING ANALYSIS SUITE). O conjunto contempla o ajuste de dois metamodelos — uma superfície de resposta quadrática completa (RSM) e um modelo de Kriging baseado em regressão por processo gaussiano (GPR) —, a validação cruzada Leave-One-Out (LOOCV), o cálculo de métricas de desempenho, a análise diferencial das superfícies (gradiente, Hessiana, ponto crítico), a análise local comparativa em um ponto de interesse e o veredicto automático de seleção do metamodelo mais confiável.

Nomenclatura

hn, r1 — fatores de entrada do DOE (variáveis independentes)

y — variável-resposta observada (experimental ou numérica)

$\beta = (\beta_0,\ldots,\beta_5)$ — coeficientes do metamodelo RSM quadrático

$\hat{y}$ — valores preditos por um metamodelo

κ — kernel (função de covariância) do Kriging

s — desvio-padrão preditivo do Kriging (incerteza local)

μ, σ — média e desvio usados na padronização das entradas

n — número de observações (casos do DOE; n = 27)

Algoritmo 1 — Comparação de metamodelos RSM vs. Kriging (rotina principal)

Entrada: *base de dados D (DOE); resposta r; fatores (hn, r1); kernel κ; ponto local (hn*, r1*); flags de exportação.*

Saída: *métricas comparativas, equação RSM, mapas/superfícies, ponto crítico, análise local e veredicto.*

1: ler D; remover espaços dos nomes das colunas

2: se r ∉ colunas(D) então erro(“resposta inexistente”)

3: extrair vetores HN, R1, y das colunas (hn, r1, r)
4: X_RSM ← [1, HN, R1, HN·R1, HN², R1²] // base quadrática
5: X_K ← [HN, R1]; Z ← (X_K − μ)/σ // padronização
6: (β, ŷ_RSM) ← AjustarRSM(X_RSM, y) // Alg. 2
7: ŷ_RSM,LOO ← LOOCV(AjustarRSM, X_RSM, y) // Alg. 5
8: (gpr, ŷ_K, s) ← AjustarKriging(Z, y, κ) // Alg. 4
9: ŷ_K,LOO ← LOOCV(AjustarKriging, Z, y, κ) // Alg. 5
10: para cada m ∈ {RSM-treino, RSM-LOO, K-treino, K-LOO}:
11: M[m] ← CalcularMétricas(y, ŷ_m) // Alg. 6
12: montar equação analítica da RSM a partir de β
13: gerar malha do domínio; avaliar superfícies RSM e Kriging;
14: Δ ← ŷ_K − ŷ_RSM; s ← incerteza do Kriging na malha
15: pc ← PontoCríticoRSM(β) // Alg. 7
16: al ← AnáliseLocal(hn*, r1*, β, gpr, μ, σ, X_K, y) // Alg. 8
17: v ← VeredictoOverfitting(M) // Alg. 9
18: produzir gráficos (contornos, superfícies 3D, parity, resíduos)
19: se exportar então salvar tabelas (.xlsx) e/ou relatório (.pdf)
20: retorne (M, β, pc, al, v)

Algoritmo 2 — Ajuste do metamodelo RSM (superfície de resposta quadrática)

Entrada: *matriz de regressão X (n×6); vetor resposta y (n).*
Saída: *coeficientes β; predição ŷ.*

modelo: $y \approx \beta_0 + \beta_1 \cdot hn + \beta_2 \cdot r1 + \beta_3 \cdot hn \cdot r1 + \beta_4 \cdot hn^2 + \beta_5 \cdot r1^2$

1: // mínimos quadrados ordinários (intercepto na coluna de 1's)
2: $\beta \leftarrow \text{argmin}(\beta)\ \|X\beta - y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta \leftarrow (X^T X)^{-1} X^T y$
3: $\hat{y} \leftarrow X \cdot \beta$
4: retorne (β, ŷ)

Algoritmo 3 — Construção do kernel do Kriging (GPR)

Entrada: *nome do kernel κ.*

Saída: *função de covariância k.*

1: base ← C(1.0) · k_corr, com k_corr conforme κ:
κ = “Matern 3/2” : k_corr ← Matern(ℓ=[1,1], v=3/2)
κ = “Matern 5/2” : k_corr ← Matern(ℓ=[1,1], v=5/2)
κ = “RBF” : k_corr ← RBF(ℓ=[1,1])
κ = “Rational Quadratic” : k_corr ← RatQuad(ℓ=1, α=1)
senão : erro(“kernel não reconhecido”)
2: k ← base + RuídoBranco(σ²_n) // efeito pepita (nugget)
3: retorne k

// C: fator de escala constante; ℓ: comprimentos característicos
// hiperparâmetros otimizados nos limites [10^{-2}, 10^{2}]

Algoritmo 4 — Ajuste do metamodelo Kriging (Gaussian Process Regression)

Entrada: *entradas padronizadas Z (n×2); resposta y; kernel κ.*

Saída: *modelo gpr; predição ŷ; desvio-padrão s.*

1: k ← ConstruirKernel(κ) // Alg. 3
2: inicializar GPR com kernel k, normalize_y = verdadeiro,
R reinicializações do otimizador
3: // otimização dos hiperparâmetros por máxima verossimilhança
$\hat{\theta} \leftarrow \arg\max_{\theta} \log p(y \mid Z, \theta)$ (R reinícios aleatórios)
4: ajustar gpr aos dados (Z, y)

5: (ŷ, s) ← gpr.prever(Z) // média preditiva e incerteza
6: retorne (gpr, ŷ, s)

Algoritmo 5 — Validação cruzada Leave-One-Out (LOOCV)

Entrada: *procedimento de ajuste Ajustar(·); dados (X, y) com n observações.*

Saída: *predições fora-da-amostra ŷ_LOO.*

1: para i ← 1 até n faça
2: (X_tr, y_tr) ← (X, y) sem a i-ésima observação
3: modelo_i ← Ajustar(X_tr, y_tr)
4: ŷ_LOO[i] ← modelo_i.prever(X[i])
5: fim para
6: retorne ŷ_LOO

Algoritmo 6 — Cálculo de métricas de desempenho

Entrada: *y observado; ŷ predito; nº de parâmetros p (opcional).*

Saída: *conjunto de métricas de ajuste, erro e informação.*

1: e ← y − ŷ ; n ← |y|
2: RMSE ← √(média(e²)) ; MAE ← média(|e|)
3: Bias ← média(e) ; ErroMáx ← máx(|e|)
4: MAPE ← 100 · média(|e| / máx(|y|, ε))
5: SSE ← Σ e² ; SST ← Σ (y − ȳ)²
6: R² ← 1 − SSE/SST
7: PRESS ← SSE ; Q² ← 1 − PRESS/SST
8: se (p dado) e (n > p+1) e (SSE > 0) então
9: AIC ← n·ln(SSE/n) + 2p
10: BIC ← n·ln(SSE/n) + p·ln(n)

11: senão AIC ← BIC ← indefinido

12: retorne {R², RMSE, MAE, MAPE, Bias, ErroMáx, PRESS, Q², AIC, BIC}

// em LOOCV, e são os resíduos fora-da-amostra (PRESS ≡ SSE_LOO)

Algoritmo 7 — Ponto crítico e curvatura da superfície RSM

Entrada: *coeficientes β.*

Saída: *ponto estacionário (hn*, r1*); classificação de curvatura.*

// gradiente nulo ⇒ sistema linear:

// [$2\beta_4$ β_3] [hn*] [$-\beta_1$]

// [β_3 $2\beta_5$] [r1*] = [$-\beta_2$]

1: resolver o sistema → (hn*, r1*)

2: y* ← avaliar RSM(β) em (hn*, r1*)

3: H ← [[$2\beta_4$, β_3], [β_3, $2\beta_5$]] // Hessiana

4: (λ_1, λ_2) ← autovalores(H) ; det(H)

5: se λ_1,λ_2 > 0 então classe ← “mínimo local”

6: senão se λ_1,λ_2 < 0 então classe ← “máximo local”

7: senão classe ← “ponto de sela”

8: verificar se (hn*, r1*) ∈ domínio amostrado

9: retorne (hn*, r1*, y*, λ_1, λ_2, classe)

Algoritmo 8 — Análise local comparativa em um ponto

Entrada: *ponto (hn*, r1*); β; gpr; (μ, σ); pontos experimentais (HN, R1); y.*

Saída: *predições, incerteza, gradiente, curvatura e grau de concordância.*

1: y_RSM ← avaliar RSM(β) em (hn*, r1*)

2: $\nabla \leftarrow (\beta_1 + \beta_3 \cdot r1^* + 2\beta_4 \cdot hn^*,\ \beta_2 + \beta_3 \cdot hn^* + 2\beta_5 \cdot r1^*)$

3: $H \leftarrow$ Hessiana(β) ; $(\lambda_1, \lambda_2) \leftarrow$ autovalores(H)

4: $z^* \leftarrow ((hn^*, r1^*) - \mu)/\sigma$; (y_K, s) ← gpr.prever(z^*)

5: IC95 ← [y_K − 1.96·s , y_K + 1.96·s]

6: d_min ← menor distância euclidiana de (hn*,r1*) aos casos

7: $\Delta \leftarrow |y_K - y_RSM|$; razão ← Δ/s ; frac ← Δ/(máx(y)−mín(y))

8: concordância ← classificar(razão, frac):

Δ/s < 1 e frac < 0.03 → “Excelente”

Δ/s < 2 e frac < 0.07 → “Boa”

Δ/s < 3 ou frac < 0.12 → “Moderada / atenção”

senão → “Conflito relevante”

9: retorne (y_RSM, y_K, s, IC95, ∇, λ_1, λ_2, d_min, Δ, concordância)

Algoritmo 9 — Diagnóstico de overfitting e veredicto automático

---

Entrada: *métricas de treino e LOOCV de RSM e Kriging.*

Saída: *risco de overfitting de cada modelo; modelo vencedor.*

1: para cada m ∈ {RSM, Kriging}:

2: $\Delta R^2_m \leftarrow R^2_treino - R^2_LOO$

3: ΔRMSE_m ← RMSE_LOO − RMSE_treino

4: risco_m ← classificar:

$\Delta R^2 < 0.05$ e ΔRMSE<1.5 → “Baixo”

$\Delta R^2 < 0.15$ e ΔRMSE<4 → “Moderado”

senão → “Alto”

5: // pontuação prioriza a generalização (LOOCV)

6: score_RSM ← 0 ; score_K ← 0

7: se RMSE_LOO(RSM) < RMSE_LOO(K) então score_RSM += 2

senão score_K += 2

8: se $R^2_LOO(RSM) > R^2_LOO(K)$ então score_RSM += 1

senão score_K += 1

```
 9: se risco_RSM = “Alto” então score_RSM −= 1
10: se risco_K   = “Alto” então score_K   −= 1
11: vencedor ← (score_RSM > score_K) ? “RSM” : “Kriging”
12: retorne (risco_RSM, risco_K, vencedor)
```

Nota: o pseudocódigo acima reproduz a lógica implementada na plataforma RSM–KRIGING ANALYSIS SUITE (v3.0.0), desenvolvida em Python (numpy, pandas, scikit-learn). A notação ŷ denota valores preditos e s, o desvio-padrão preditivo do Kriging (incerteza local).