



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

GABRIELA HELENA GERALDO ISSA MENDES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO
EPISTEMOLÓGICA DE MODELOS CIENTÍFICOS:
UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FÍSICA**

Londrina
2018

GABRIELA HELENA GERALDO ISSA MENDES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO
EPISTEMOLÓGICA DE MODELOS CIENTÍFICOS:
UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FÍSICA**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutorado no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Prof^a Dr^a Irinéa de Lourdes Batista

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Issa-Mendes, Gabriela Helena Geraldo.

MODELAGEM MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO EPISTEMOLÓGICA DE MODELOS CIENTÍFICOS : UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FÍSICA / Gabriela Helena Geraldo Issa-Mendes. - Londrina, 2018.
239 f. : il.

Orientador: Irinéa de Lourdes Batista.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Ensino de Física - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Modelos Científicos - Tese. 4. Matematização - Tese. I. Batista, Irinéa de Lourdes . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

GABRIELA HELENA GERALDO ISSA MENDES

**MODELAGEM MATEMÁTICA E CONSTRUÇÃO EPISTEMOLÓGICA
DE MODELOS CIENTÍFICOS:
UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FÍSICA**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutorado no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora Prof^a. Dr^a. Irinéa de Lourdes
Batista
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^a. Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^a. Dr^a. Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -
UTFPR

Prof. Dr. Agustín Adúriz-Bravo
Universidad de Buenos Aires - UBA

Prof. Dr. Leandro Londero da Silva
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho - UNESP

Londrina, 27 de abril de 2018.

Dedico este trabalho aos meus dois grandes amores, meu marido e meu filho, Mauro e Calebe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado sua graça e misericórdia, por ter me dado saúde e por ter guardado minha vida durante toda esta trajetória.

À minha orientadora, Dra. Irinéa de Lourdes Batista, pelos oito anos de parceria na pós graduação, por ter acreditado no meu potencial e compartilhado seus ensinamentos e experiências.

Aos membros da banca, Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman, Dr. Agustín Adúriz-Bravo e Dr. Leandro Londero da Silva, pela generosidade e serenidade com que avaliaram este trabalho, e pelas sugestões e críticas que contribuíram para o aprimoramento do mesmo.

Aos colegas do grupo de pesquisa IFHIECEM, que contribuíram com esta pesquisa por meios de leituras, sugestões, decodificações e principalmente com apoio e amizade. Meu agradecimento especial ao meu amigo Walter Rammazzina, por compartilhar comigo as angústias, alegrias, sonhos, jogos de vôlei e *realits*, sua amizade e companheirismo foram essenciais nesses quatro anos, muito obrigada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Sueli e Roberto, que sem medir esforços, sempre me deram o melhor que podiam, nunca me faltou amor, instrução e exemplo. Obrigada por sempre acreditarem em mim e por serem suportes na minha vida, eu amo vocês. Ao meu irmão Elias, pela parceria e amizade, pelas idas e vindas da rodviária à UEL, pelas risadas, cuidado e carinho sem fim, eu amo você.

Ao meu marido Mauro, que me incentivou desde o primeiro dia até hoje, por ouvir meus lamentos e reclamações, por ficar dias e noites sozinho sem reclamar, por ler meus trabalhos, por não me deixar desistir, por ser meu melhor amigo e um companheiro incrível, por cuidar de mim e me amar sem medidas, e por ter me dado minha maior alegria, meu filho Calebe. Mauro, você me faz feliz todos os dias, eu te amo.

Ao meu filho Calebe, que me acompanhou nesta reta final e trouxe alegria para nossas vidas e um amor que não se explica. Eu te amo com todas as minhas forças e sou grata a Deus pelo privilégio de ser sua mãe.

Aos meus familiares que me apoiaram nesses anos todos, aos meus avós que perdi durante o doutorado, Amador e Ilza, que constantemente me perguntavam a respeito do andamento da pesquisa e se orgulhavam da neta que ia ser doutora, essa conquista é de vocês também. Aos meus sogros Vera e Mauro pelo amor e cuidado, à minha cunhadinha Isabela pelo carinho e aos amigos João e Daniela por serem sempre presentes.

Sou grata a tantas outras pessoas que estiveram comigo neste processo, que seria impossível nomear todos aqui. Mas sintam meu abraço de gratidão e tenham certeza de que o apoio de vocês é sempre muito importante para mim. Vocês todos fazem parte da minha vida e das minhas conquistas!

“E não somente isto, mas também nos gloriamos nas tribulações; sabendo que a tribulação produz a paciência, e a paciência a experiência, e a experiência a esperança”. Romanos 5: 3, 4

ISSA-MENDES, Gabriela H. G. **Modelagem Matemática e Construção Epistemológica de Modelos Científicos: Uma Abordagem para o Ensino de Física.** 2018. 239 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

A presente pesquisa teve como questão norteadora investigar se uma situação de ensino envolvendo a Modelagem Matemática e discussões epistemológicas, proporciona a estudantes graduandos de Física e Matemática, um entendimento a respeito da 2ª Lei de Newton, bem como a formulação de seu modelo científico. Para tanto, elaborou-se uma proposta didática, que foi ofertada em forma de minicurso para graduandos dos 1º e 2º anos de Física e Matemática, nas modalidades licenciatura e bacharelado, da Universidade Estadual de Londrina no ano de 2017. O minicurso foi composto por discussões epistemológicas a respeito da Modelagem Matemática, Matematização e Modelos Científicos e a resolução de seis atividades de Modelagem Matemática. Das atividades propostas, três delas foram construídas exclusivamente para atenderem os objetivos desta tese, abordando conteúdos físicos. Utilizou-se a abordagem qualitativa na busca de interpretar e compreender as noções dos(as) participantes do minicurso ofertado. Na abordagem metodológica, os resultados da aplicação de questionários prévios e posteriores foram analisados à luz da Análise de Conteúdo. Desta maneira foi possível abordar conceitos físicos e articular a Modelagem Matemática, os modelos científicos na Física e o processo de matematização. A partir da análise dos resultados obtidos, pode-se inferir que a proposta desenvolvida proporcionou, aos envolvidos, reflexões relacionadas à construção do conhecimento, a aspectos da Natureza da Ciência e ao papel da Matemática na Física, questões pertinentes na formação de futuros docentes. Constatou-se que a Modelagem Matemática não é, isoladamente, suficiente para ensinar Física, mas é uma metodologia que explicita o processo de construção de modelos, e feitas as devidas adaptações epistemológicas, a Modelagem Matemática pode contribuir com o Ensino de Física. Outra inferência desta tese é que a matematização na Física, diferentemente da matematização na Modelagem Matemática, corresponde a todo o processo de Modelagem Matemática acrescido de uma etapa adicional, que seria, por meio de uma discussão teórico-conceitual, atribuir significado físico ao modelo matemático encontrado.

Palavras-chave: Ensino de Física. Modelagem Matemática. Modelos Científicos. Matematização. Epistemologia.

ISSA-MENDES, Gabriela H. G. **Mathematical Modeling and Epistemological Construction of Scientific Models: An Approach to Teaching Physics.** 218. 239 f. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

The present research had as a guiding question to investigate if a teaching situation involving the Mathematical Modeling and epistemological discussions, provides to undergraduate students of Physics and Mathematics, an understanding about Newton's 2nd Law, as well as the formulation of its scientific model. Therefore, a didactic proposal was elaborated, which was offered in the form of mini-course for undergraduates of the 1st and 2nd years of Physics and Mathematics, in the licenciatura and baccalaureate modalities, of the State University of Londrina in the year 2017. The mini-course was composed by epistemological discussions about Mathematical Modeling, Mathematization and Scientific Models and the resolution of six Mathematical Modeling activities. Of the proposed activities, three of them were built exclusively to meet the objectives of this thesis, addressing physical contents. The qualitative approach was used to interpret and understand the notions of the participants of the mini-course offered. In the methodological approach, the results of the application of previous and later questionnaires were analyzed in light of Content Analysis. In this way it was possible to approach physical concepts and to articulate Mathematical Modeling, the scientific models in Physics and the process of mathematization. From the analysis of the obtained results, it can be inferred that the developed proposal provided, to those involved, reflections related to the construction of knowledge, aspects of the Nature of Science and the role of Mathematics in Physics, pertinent questions in the training of future teachers. It was verified that Mathematical Modeling is not alone enough to teach Physics, but it is a methodology that explicitly explains the process of constructing models, and made the necessary epistemological adaptations, Mathematical Modeling can contribute with the Teaching of Physics. Another inference of this thesis is that mathematization in Physics, unlike mathematization in Mathematical Modeling, corresponds to the whole process of Mathematical Modeling plus an additional step, which would be, through a theoretical-conceptual discussion, assign physical meaning to the mathematical model found.

Key Words: Teaching Physics. Mathematical Modeling. Scientific Models. Mathematization. Epistemology.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Processo de construção dos saberes docentes.....	29
Figura 2 – Exemplificação: Proposta de Teoria de Fermi.....	54
Figura 3 – Exemplificação: Teoria da Relatividade Geral.....	55
Figura 4 – Processo de Modelagem Matemática.....	63
Figura 5 - O "Plano de Solução" para tarefas de modelagem.	64
Figura 6 – Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula.	67
Figura 7 – Fases da Modelagem Matemática.....	73
Figura 8 – Ciclo de Modelagem.	74
Figura 9 - Um esquema idealizado do processo de modelagem (de acordo com Blum & Leiss, 2005).....	75
Figura 10 – Processo de Modelagem.	76
Figura 11 – Fatores que afetam a escolha das atividades.....	85
Figura 12 – Objetivos educacionais das atividades de ensino.	86
Figura 13 - Gráfico: Formação dos participantes.	98
Figura 14 - Gráfico: Idade dos participantes.	98
Figura 15 – Esquema de uma modelagem.	134
Figura 16 – Maça no tronco de cone.....	136
Figura 17 - Resolução da Atividade 1 – Parte do Grupo II.....	137
Figura 18 – Digitação da Figura 17.	137
Figura 19 - Cunhas esféricas.....	138
Figura 20 - Resolução da Atividade 1 – Grupo IV.....	139
Figura 21 – Maça em formato de cubo.	140
Figura 22 - Resolução da Atividade 1 – Grupo I.	141
Figura 23 - Resolução da Atividade 1 – Grupo III.....	142
Figura 24 - Resolução da Atividade 2 – Grupo II.	144
Figura 25 - Resolução da Atividade 2 – Grupo IV.....	145
Figura 26 - Descrição da Atividade 2 – Grupo I.....	146
Figura 27 - Resolução da Atividade 2 – Grupo III.....	147
Figura 28 – Digitação da Figura 27.	147
Figura 29 - Resolução da Atividade 2 – Grupo V.....	148
Figura 30 – Digitação da Figura 29.	148
Figura 31 - Resolução da Atividade 3 – Grupo II.....	151
Figura 32 – Digitação da Figura 31.	151
Figura 33 - Resolução da Atividade 3 – Grupo IV.....	153
Figura 34 - Resolução da Atividade 3 – Grupo III.....	155
Figura 35 – Digitação da Figura 34.	155
Figura 36 - Resolução da Atividade 3 – Grupo V.....	156
Figura 37 – Digitação da Figura 36.	156
Figura 38 - Resolução da Atividade 3 – Grupo I.	157
Figura 39 – Digitação da Figura 38.	157
Figura 40 - Resolução da Atividade 4 – Grupo II.....	160
Figura 41 - Resolução da Atividade 4 – Grupo IV.....	162
Figura 42 - Resolução da Atividade 4 – Grupo III.....	164
Figura 43 – Digitação da Figura 42.	164
Figura 44 - Resolução da Atividade 4 – Grupo V.....	165
Figura 45 – Digitação da Figura 44.	165
Figura 46 – Gráfico (raio x velocidade) da Atividade 5.....	167

Figura 47 - Resolução da Atividade 5 – Grupo II.	169
Figura 48 - Resolução da Atividade 5 – Grupo IV.....	171
Figura 49 - Resolução da Atividade 5 – Grupo III.....	173
Figura 50 – Digitação da Figura 49.	173
Figura 51 - Resolução da Atividade 5 – Grupo I.	174
Figura 52 – Digitação da Figura 51.	174
Figura 53 - Resolução da Atividade 5 – Grupo V.....	175
Figura 54 – Digitação da Figura 53.	175
Figura 55 - Resolução da Atividade 6 – Grupo II.	180
Figura 56 - Resolução da Atividade 6 – Grupo IV.....	182
Figura 57 - Resolução da Atividade 6 – Grupo III.	183
Figura 58 – Digitação da Figura 57.	184
Figura 59 - Resolução da Atividade 6 – Grupo I.	184
Figura 60 - Resolução da Atividade 6 – Grupo V.....	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Média da proficiência de todos os participantes segundo a área de conhecimento avaliada.	18
Tabela 2 - Notas PISA 2015	19
Tabela 3 - Diferença entre modelo científico e modelo didático.....	58
Tabela 4 - Resolução de atividade.	149

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Os saberes dos professores.....	26
Quadro 2– O repertório de saberes.....	28
Quadro 3 - Noções de autores a respeito da Epistemologia.....	36
Quadro 4 – Classificação dos modelos.....	52
Quadro 5 – Levantamento Bibliográfico.....	69
Quadro 6 – Questões do questionário prévio.....	107
Quadro 7 – Questões do questionário posterior.....	108
Quadro 8 - Questões dos questionários prévio e posterior.....	108
Quadro 9 – Unidades Temáticas de Registros da UC1.....	109
Quadro 10 – Unidades Temáticas de Registros da UC2.....	110
Quadro 11 – Unidades Temáticas de Registros da UC3.....	111
Quadro 12 – Unidades Temáticas de Registros da UC4.....	111
Quadro 13 – Unidades Temáticas de Registros da UC5.....	112
Quadro 14 – Unidades Temáticas de Registros da UC6.....	112
Quadro 15 – Unidades Temáticas de Registros da UC7.....	113
Quadro 16 – Unidades Temáticas de Registros da UC8.....	114
Quadro 17 – Unidades Temáticas de Registros da UC9.....	115
Quadro 18 – Unidades Temáticas de Registros da UC10.....	116
Quadro 19 - Frequências absolutas das UR da UC1.....	118
Quadro 20 - Frequências absolutas das UR da UC2.....	119
Quadro 21 - Frequências absolutas das UR da UC3.....	121
Quadro 22 - Frequências absolutas das UR da UC4.....	121
Quadro 23 - Frequências absolutas das UR da UC5.....	123
Quadro 24 - Frequências absolutas das UR da UC6.....	124
Quadro 25 - Frequências absolutas das UR da UC7.....	126
Quadro 26 - Frequências absolutas das UR da UC8.....	128
Quadro 27 - Frequências absolutas das UR da UC9.....	130
Quadro 28 - Frequências absolutas das UR da UC10.....	131

SUMÁRIO

MINHA TRAJETÓRIA ACADÊMICA	15
INTRODUÇÃO	17
1 FORMAÇÃO DE PROFESSORES	25
1.1 SABERES DOCENTES.....	25
1.2 SABERES DOCENTES E O ENSINO DE FÍSICA.....	30
2 NATUREZA DO CONHECIMENTO CIENTÍFICO	36
2.1 EPISTEMOLOGIA DA CIÊNCIA.....	36
2.2 NATUREZA DA CIÊNCIA.....	38
2.2.1 Formação de Professores e Natureza da Ciência.....	40
2.3 NATUREZA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO.....	42
2.4 NATUREZA DO CONHECIMENTO FÍSICO.....	45
2.5 NATUREZA DO CONHECIMENTO FÍSICO-MATEMÁTICO.....	47
3 MODELOS E MODELAGEM MATEMÁTICA	49
3.1 TIPOS DE MODELOS.....	49
3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	61
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA.....	64
3.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FÍSICA.....	68
4 MATEMATIZAÇÃO	71
4.1 VISÃO GERAL.....	71
4.2 MATEMATIZAÇÃO NA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	73
4.3 MATEMATIZAÇÃO NA FÍSICA.....	77
4.3.1 Discussão da 2ª Lei de Newton.....	80
5 A CONSTRUÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA ABORDAGEM DIDÁTICA PROPOSTA	85
5.1 FUNDAMENTOS E PROBLEMATIZAÇÃO.....	87
5.1.1 A Construção das Atividades.....	93
5.2 APRESENTAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DA ABORDAGEM DIDÁTICA PROPOSTA.....	96
6 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO DO ESTUDO EMPÍRICO	103
6.1 ANÁLISE DE CONTEÚDO.....	104
6.1.1 Questionário e Unidades de Contexto e Registro Prévios.....	106
7 APRESENTAÇÃO e Análise dos dados	118
7.1 UNITARIZAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS.....	118
7.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES.....	133

7.3 PARTICIPAÇÃO DOS(AS) ESTUDANTES NA PESQUISA	187
METATEXTO	190
CONCLUSÃO	210
REFERÊNCIAS	213
APÊNDICES	222
APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	223
APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO PRÉVIO	224
APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO POSTERIOR	226
APÊNDICE D - ATIVIDADE 1 – VOLUME DA MAÇÃ	228
APÊNDICE E - ATIVIDADE 2 – O PROBLEMA DO CÉSIO EM GOIÂNIA	230
APÊNDICE F - ATIVIDADE 3 – FROTA DE VEÍCULOS NA CIDADE DE LONDRINA	231
APÊNDICE G - ATIVIDADE 4 – GRAVIDADE VARIÁVEL	233
APÊNDICE H - ATIVIDADE 5 – ROTATÓRIA COMO REDUTOR DE VELOCIDADE	235
APÊNDICE I - ATIVIDADE 6 – EFICIÊNCIA DOS AIRBAGS	237
APÊNDICE J - UNITARIZAÇÃO DAS UNIDADES DE CONTEXTO	239

MINHA TRAJETÓRIA ACADÊMICA

Este trabalho vem fechar meus sete anos de pós-graduação, entre especialização, mestrado e doutorado. Anos dedicados ao Ensino de Ciências e Matemática, sendo que hoje tenho ainda mais perguntas do que respostas.

Sou licenciada em Matemática com habilitação em Física pela Fundação Educacional do Município de Assis (FEMA). Fui monitora de Cálculo no curso de Matemática e monitora de Matemática Básica no curso de Administração nos dois primeiros anos. Nos anos seguintes, fiz duas iniciações científicas, com bolsa, e trabalhei com conceitos de geometria e softwares. As iniciações científicas despertaram em mim o desejo pela pesquisa. Sou muito grata à minha primeira orientadora, Ma. Leonor Farci Fic Menk, por ter me ensinado os primeiros passos na vida científica.

Durante a faculdade, fui estagiária no KUMON, professora plantonista de dúvidas e professora substituta em uma escola particular da cidade. Sempre lecionei Matemática, mas lecionava Física também. Ao me formar, no final de 2009, me deparei com um cenário inusitado, a esmagadora maioria das propostas de trabalho que tive foram para lecionar disciplinas de Física no Ensino Médio, e por mais que eu tivesse estudado 3 anos de Física na faculdade, senti que faltava algo: então, fui em busca da pós-graduação.

Ingressei no curso de Especialização em Física para o Novo Ensino Médio, na Universidade Estadual de Londrina (UEL) no início de 2011, quando conheci minha orientadora, Dra. Irinéa de Lourdes Batista, que me havia orientado na especialização, mestrado e doutorado, uma parceria frutífera. Quando fui pedir para que ela me orientasse na especialização, sem nenhum tema em mente, ela olhou pra

mim e fez a seguinte pergunta: - “Você quer apenas um tema para fazer uma especialização e ter seu diploma ou você quer um tema para ir para o mestrado?”. Sem pensar muito respondi: - “Para o mestrado”. Foi então que ela me propôs estudar a respeito da matematização da Física, tendo em vista minha formação “dupla”.

Na monografia intitulada “Matematização da Física: uma discussão de episódios históricos”, abordamos os conceitos de matematização e geometrização, fizemos uma revisão de episódios históricos da matematização da Física desde Pitágoras até Galileu, e apresentamos um exemplar de matematização: “Galileu e o movimento uniformemente acelerado”.

Passei na seleção para o mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática no segundo semestre de 2011, na UEL, e tive a oportunidade de aprofundar o estudo que iniciei na especialização. O título da dissertação, defendida no dia 10/02/2014, é “Matematização e Ensino de Física: uma discussão de noções docentes”. O conceito de matematização foi aprofundado, e acrescentamos noções de Natureza da Ciência, História da Ciência e uma discussão a respeito do Ensino de Física no Brasil. Foi feita uma entrevista com 10 professores a respeito da matematização, Ensino de Física e o papel da Matemática no Ensino de Física. A partir da dissertação, muitas questões surgiram e um leque de opções se abriu para dar continuidade à pesquisa.

No início de 2014, passei na seleção do doutorado no mesmo programa na UEL e então pude me aprofundar mais no que diz respeito à matematização. Pensamos em uma estratégia de aliar a Modelagem Matemática e o Ensino de Física, tendo em vista a Epistemologia da Ciência; foi então que, com muitas idas e vindas, risos e lágrimas, certezas e inseguranças, que esta tese “nasceu”, e com muito prazer apresentamos a todos(as).

INTRODUÇÃO

Há tempos temos vivenciado uma crise no Ensino de Ciências e Matemática no Brasil. Não é preciso levantamentos estatísticos para corroborar que o desempenho dos alunos brasileiros nestas disciplinas é insatisfatório. Porém, vamos apresentar alguns dados do desempenho dos alunos brasileiros na maior avaliação educacional do país e em uma avaliação internacional em que o Brasil participa.

Existem muitos tipos de avaliação da Educação Básica, no Brasil, a maior e mais importante delas é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Criado em 1998, tem por objetivo “avaliar o desempenho de estudantes ao fim da Educação Básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade”, segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), órgão do Ministério da Educação responsável pelo mesmo.

A partir de 2009, o ENEM passou a ser utilizado como mecanismo de seleção para o ingresso no Ensino Superior. Os resultados de cada estudante também são utilizados para um possível acesso a programas oferecidos pelo Governo Federal, como o Programa Universidade para Todos (PROUNI) e o Fundo de Financiamento Estudantil (FIES).

O ENEM é a segunda maior prova de acesso ao Ensino Superior do mundo, atrás somente do exame *Gaokao*, realizado na China. Segundo o INEP¹, em 2016, 5848619 candidatos fizeram as provas nos dois dias de exame em 1607 locais espalhados pelo país.

A prova do ENEM é dividida em quatro áreas do conhecimento, sendo elas:

- **Ciências Humanas e suas tecnologias:** que abrange os conteúdos de Geografia, História, Filosofia, Sociologia e conhecimentos gerais.

- **Ciências da Natureza e suas tecnologias:** que abrange os conteúdos de Química, Física e Biologia.

- **Linguagens, códigos e suas tecnologias:** que abrange o conteúdo de Língua Portuguesa (Gramática e Interpretação de Texto), Língua Estrangeira Moderna, Literatura, Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação.

¹ Disponível em: < <http://portal.inep.gov.br/web/guest/editais-e-portarias> >.

- Matemática e suas tecnologias

A média da avaliação dos participantes por área de conhecimento dos anos de 2011 a 2016, estão representadas na tabela a seguir (as notas valem no máximo 1000).

Tabela 1 - Média da proficiência de todos os participantes segundo a área de conhecimento avaliada.

	2011	2012	2014	2015	2016
Ciências Humanas e suas tecnologias	478,0	523,7	546,5	558,1	533,5
Ciências da Natureza e suas tecnologias	466,5	473,2	482,2	478,8	477,1
Linguagens, códigos e suas tecnologias	520,9	494,2	507,9	505,3	520,5
Matemática e suas tecnologias	517,2	509,0	473,5	467,9	489,5

Fonte: INEP (2017).

Como se pode observar na tabela acima, nos anos de 2011, 2012 e 2016, as menores médias foram na área de Ciências da Natureza e suas tecnologias, já em 2014 e 2015 as menores médias foram em Matemática e suas tecnologias seguidas das notas de Ciências da Natureza e suas tecnologias.

Tendo em vista que a nota máxima em cada área é 1000, pode-se constatar que nas últimas edições as notas médias da área Ciência da Natureza e suas tecnologias não atingiram sequer a metade, ou seja, 500 pontos. Já em Matemática e suas tecnologias, as notas são decrescentes até 2015 e teve uma leve alta em 2016, sendo que as últimas três médias estão abaixo dos 500 pontos.

Outra avaliação da Educação Básica de expressão que o Brasil participa é o PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – trata de uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 8º ano do Ensino Fundamental na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O PISA é coordenado pela Organização para Cooperação e

Desenvolvimento Econômico (OCDE), havendo uma coordenação nacional em cada país participante. No Brasil, a coordenação do Pisa é responsabilidade do INEP.

Segundo o INEP, o objetivo do PISA é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do Ensino Básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante, estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea.

As avaliações do PISA, diferentemente do ENEM que é anual, acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento – Leitura, Matemática e Ciências – havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas áreas. Em 2000, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; e em 2006, Ciências. O PISA, em 2009, iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de Leitura; em 2012, novamente Matemática; e em 2015, Ciências. Em 2015 também foram inclusas as áreas de Competência Financeira e Resolução Colaborativa de Problemas.

Na avaliação de 2015, aproximadamente 540000 estudantes realizaram a prova em 72 países participantes, segundo a OCDE². Dos dados divulgados, o desempenho dos alunos brasileiros está abaixo da média dos alunos em países da OCDE, como pode-se observar na tabela a seguir.

Tabela 2 - Notas PISA 2015

	Ciências	Leitura	Matemática
Média OCDE	493	493	490
1º colocado: Singapura	556	535	564
63º colocado: Brasil	401	407	377
Último colocado: República Dominicana	332	358	328

Fonte: OCDE (2016b).

A média do Brasil na área de Ciências se manteve estável desde 2006, o último ciclo do PISA com foco em Ciências (uma elevação aproximada de 10 pontos nas notas - que passaram de 390 pontos em 2006 para 401 pontos em 2015

² <http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf>

– o que não representa uma mudança estatisticamente significativa). Já na área de Matemática, houve um aumento significativo de 21 pontos na média dos alunos entre 2003 a 2015. Ao mesmo tempo, houve um declínio de 11 pontos se compararmos a média de 2012 à média de 2015 (OCDE, 2016).

Algumas considerações significativas foram feitas no relatório de 2016 da OCDE, referentes à análise do desempenho dos estudantes brasileiros no PISA 2015, sendo elas:

- No Brasil, menos de 1% dos jovens do sexo masculino estão entre os alunos com rendimento mais elevado no PISA em Ciências (aqueles com pontuação no nível de proficiência 5 ou superior). Entre os países da OCDE, esta proporção corresponde a 8.9% dos jovens do sexo masculino. Apenas 0.5% do grupo feminino no Brasil alcançou este mesmo nível de desempenho. Entre os países da OCDE, 6.5% das meninas se destacaram neste nível elevado de proficiência. No Brasil, entre alunos de baixo rendimento em ciências (aqueles com pontuação inferior ao nível básico de proficiência, o nível 2), uma proporção maior entre o grupo feminino espera seguir uma carreira na área de ciências.

- O Brasil tem um alto percentual de alunos em camadas desfavorecidas: 43% dos alunos se situam entre os 20% mais desfavorecidos na escala internacional de níveis socioeconômicos do PISA, uma parcela muito superior à média de 12% de alunos nesta faixa entre os países da OCDE. Esta proporção, no entanto, é semelhante àquela observada na Colômbia. Apenas dois outros países latino-americanos possuem uma proporção ainda maior de alunos neste nível socioeconômico, o México e o Peru.

- Uma parcela muito reduzida de pais de alunos alcançou o nível superior de ensino no Brasil. Menos de 15% dos adultos na faixa etária de 35 a 44 anos de idade possuem um diploma universitário, uma taxa bem menor que a média de 37% observada entre os países da OCDE. Entre os países que participaram do PISA 2015, o Brasil está entre os dois países com a menor proporção de adultos com nível superior, ficando atrás apenas da Indonésia onde menos de 9% dos adultos nesta faixa etária alcançaram este nível de escolaridade. A faixa etária entre 35 e 44 anos corresponde aproximadamente à idade dos pais de alunos que participaram do PISA 2015.

- No Brasil, 36% dos jovens de 15 anos afirmam ter repetido uma série escolar ao menos uma vez, uma proporção semelhante à do Uruguai. Entre os países latino-americanos que participaram do PISA 2015, apenas a Colômbia possui uma taxa de repetência escolar (43%) superior à do Brasil. Esta prática é mais comum entre países com um baixo desempenho no PISA e está associada a níveis mais elevados de desigualdade social na escola. No Brasil, altos índices de repetência escolar estão ligados a níveis elevados de abandono da escola. Entre 2009 e 2015, houve um declínio de 6% na taxa de repetência escolar no Brasil, observado principalmente entre os alunos do ensino médio (OCDE, 2016a, p. 1-2).

Estes dados corroboram o que foi citado no início, de que há uma crise no Ensino de Ciências e Matemática no Brasil.

No que diz respeito à disciplina de Física, a situação não é muito diferente. No dia 30 de Abril de 2016, aconteceu o 1º simulado *online* por meio da Plataforma de Estudo do Hora do Enem, do Ministério da Educação. A prova foi elaborada seguindo a mesma metodologia utilizada nas questões do INEP e contou com 20 questões por área do conhecimento (80 no total). De acordo com o Ministério da Educação, 711746 estudantes fizeram o exame *online* e as matérias de Química e Física foram as áreas em que os estudantes apresentaram maior dificuldade. O menor índice de acertos foi em Química, em média 29% acertaram as questões da prova, já em Física, a média foi 31,9%.

Muitos professores atribuem o insucesso do desempenho dos alunos em Física à falta de domínio de conteúdos matemáticos. Esse atributo de vilã, conferido à Matemática, é reflexo de um ensino de Física puramente matemático, cheio de fórmulas prontas e, muitas vezes, sem a discussão do porquê de utilizá-las. Matthews (1995, p.165), afirma que um “mar de falta de significação” tem “inundado as salas de aula de Ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam”.

Outro problema, é ensinar a Física como se estivesse lecionando para futuros físicos, sem levar em consideração a heterogeneidade da sala de aula, expondo conteúdos sem contextualização e desconexos com a realidade do aluno. Como ressalta Moreira (2000), ao afirmar que,

a maioria dos alunos do ensino médio não vai estudar Física mais tarde. Por isso, não tem sentido ensinar-lhes Física como se fossem físicos em potencial. [...] Eles serão, sobretudo, cidadãos e, como tal, a Física que lhes for ensinada deve servir para a vida, possibilitando-lhes melhor compreensão do mundo e da tecnologia (MOREIRA, 2000, p. 98).

Há que se ter equilíbrio e coerência no que se ensina e como se ensina Física, como salienta Batista (2004).

A redução da Física à pura técnica, em certos casos; à técnica experimental e, em outros, à técnica matemática para a dedução lógica de consequências dos axiomas da teoria, evita

questionamentos conceituais no seu ensino e gera uma formação limitada, estreita e acrítica (BATISTA, 2004, p. 463).

Moreira (2000, p. 98), diz que o ensino de Física no Ensino Médio deve passar por uma mudança radical e abordar uma “Física não dogmática, construtivista, para a cidadania, com ênfase em modelos, situações reais, elementos próximos, práticos e vivenciais do aluno, do concreto para o abstrato [...]” entre outros.

Porém, para que haja essa mudança é preciso que o professor saiba mais do que o conteúdo e o currículo, deve também se apropriar da Natureza da Ciência, o que significa conhecimento científico, e estar ciente quanto aos saberes presentes no exercício da profissão docente.

Diante do que foi exposto até aqui, pensou-se em propor uma abordagem de ensino, com conceitos epistemológicos, que fosse investigativa e contextualizada, a fim de contribuir com a mudança desse cenário em que se encontra o Ensino de Física, com fórmulas vazias e descontextualizadas. Para tanto, elaborou-se a seguinte questão norteadora para a pesquisa: *uma situação de ensino envolvendo a Modelagem Matemática e discussões epistemológicas, proporciona a estudantes graduandos de Física e Matemática, um entendimento a respeito da 2ª Lei de Newton, bem como a formulação de seu modelo científico?*

A fim de responder à questão norteadora, elaborou-se uma abordagem didática por meio da Modelagem Matemática, como estratégia didática no Ensino de Física, com o objetivo de construir modelos científicos na Física, sendo estes com objetivos epistemológicos de naturezas diferentes, inicialmente lógico-matemático-fenomenológicos e após uma discussão epistemológica, chegar a definir o modelo lógico-matemático tipo-essência (BATISTA, 2004). Para a aplicação da abordagem didática proposta, foi ofertado um Minicurso intitulado “Modelagem Matemática no Ensino de Física”, com carga horária de 20 horas. O Minicurso ocorreu na Universidade Estadual de Londrina, e tinha como público alvo alunos do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Física e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, período noturno, do ano de 2017.

Na direção de responder a questão norteadora, formulou-se alguns objetivos específicos, tais como: investigar a elaboração de modelos em atividades de Modelagem Matemática; conhecer o processo de matematização utilizado para descrever um fenômeno fisicamente; identificar as correlações físicas que os

estudantes fazem a partir das correlações matemáticas.

Sendo assim, esta pesquisa está organizada em 7 capítulos. O Capítulo I, **Formação de professores**, apresenta perspectivas a respeito dos saberes docentes baseados em autores como Shulman (1986), Gauthier et al. (1998) e Tardif (2002). Apresenta também os saberes necessários para ser um professor de Física de acordo com documentos oficiais. No Capítulo II, **Natureza do Conhecimento Científico**, abordam-se conceitos da Filosofia da Ciência, bem como a Epistemologia e a Natureza da Ciência, e faz-se uma discussão a respeito da contribuição da Natureza da Ciência na formação de professores. Em seguida, apresentam-se discussões relacionadas à natureza do conhecimento Matemático, Físico e Físico-Matemático, buscando apresentar uma reflexão a respeito das características de cada um.

O Capítulo III, **Modelos e Modelagem Matemática**, apresenta os diversos tipos de modelos presentes na literatura e oferece um enfoque nos modelos científicos na Física. Apresenta também a Modelagem Matemática na Educação Matemática, seus objetivos e etapas segundo autores como Bassanezi (2002), Biembengut e Hein (2000; 2009), Almeida, Silva e Vertuan (2012), entre outros. Por fim, aborda a Modelagem Matemática no Ensino de Física e as pesquisas na área, e apresenta a Modelagem Matemática como uma estratégia didática .

Reservou-se o Capítulo IV, **Matematização**, para abordar os diferentes significados atribuídos ao conceito de Matematização, sendo este epistemologicamente diferente na Física e na Modelagem Matemática.

O Capítulo V, **A construção teórico-metodológica da Abordagem Didática proposta**, apresenta os procedimentos adotados para a elaboração, fundamentação e problematização da abordagem didática proposta. Em seguida, apresenta-se a discussão da 2ª Lei de Newton, tema escolhido para esta abordagem e a construção das atividades de Modelagem Matemática que foram elaboradas com o intuito de construir o modelo lógico matemático tipo-essência $F = \frac{dp}{dt}$. Por fim, apresenta o detalhamento de como se deu o desenvolvimento da abordagem e os sujeitos da pesquisa.

No Capítulo VI, **Desenvolvimento Metodológico do Estudo Empírico**, descrevem-se os procedimentos metodológicos da pesquisa empírica por meio da apresentação da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1979), que foi

escolhida para a análise dos questionários prévios e posteriores, bem como as Unidades de Contexto e de Registro prévios, elaboradas para a análise dos dados.

O Capítulo VII, **Apresentação e Análise dos dados**, apresenta a unitarização dos dados advindos dos questionários e a análise das atividades de Modelagem Matemática propostas na Abordagem Didática, culminando no **Metatexto**, elaborado com base nos referenciais teóricos desta pesquisa e os dados empíricos obtidos.

Por fim, apresentam-se as conclusões desta tese, sabendo que em todo trabalho científico não há um fim nem respostas completas, e sim o surgimento de novas perguntas e um início para novas pesquisas.

1 FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Pesquisadores têm estudado a respeito dos conhecimentos profissionais para ensinar desde os anos 1980, e buscam responder perguntas tais como: O que é preciso saber para ensinar? Qual a natureza dos saberes dos professores? Entre outras.

Segundo Tardif e Raymond (2000, p. 212), esses saberes advêm de diversas fontes, tais como: “formação inicial e contínua dos professores, currículo e socialização escolar, conhecimento das disciplinas a serem ensinadas, experiência na profissão, cultura pessoal e profissional, aprendizagem com os pares etc”.

Neste capítulo é feita uma reflexão a respeito dos saberes docentes e os conhecimentos que um professor deve ter para ensinar, são abordados também os saberes necessários para lecionar Física, segundo documentos oficiais e a contribuição desta pesquisa nesse cenário.

1.1 Saberes Docentes

A pesquisa a respeito dos saberes docentes tem ganhado destaque nas áreas de Ensino e Formação de professores, autores como Shulman (1986, 1987), Gauthier et al. (1998), Tardif (2002), entre outros, têm dedicado seus estudos à essa temática.

Há quem pense que para ser professor, o mesmo precisa apenas saber o conteúdo, ter talento, ter bom senso, seguir a sua intuição, ter experiência ou cultura (GAUTHIER et al., 1998). Mas existem outros conhecimentos ou saberes, utilizados por um professor do que apenas o conhecimento do conteúdo de sua disciplina e dom para lecionar.

A palavra ‘saber’, segundo Tardif e Raymond (2000, p. 212), tem “um sentido amplo que engloba os conhecimentos, as competências, as habilidades (ou aptidões) e as atitudes dos docentes”.

Shulman (2014), utiliza a palavra ‘conhecimento’ ao invés de ‘saber’, e organiza os conhecimentos do professor em categorias, sendo elas:

- conhecimento do conteúdo;
- conhecimento pedagógico geral, com especial referência aos

princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização de sala de aula, que parecem transcender a matéria;

- conhecimento do currículo, particularmente dos materiais e programas que servem como “ferramentas do ofício” para os professores;
- conhecimento pedagógico do conteúdo, esse amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é o terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional;
- conhecimento dos alunos e de suas características;
- conhecimento de contextos educacionais, desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e suas culturas; e
- conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica (SHULMAN, 2014, p. 206).

E de onde provêm todos esses conhecimentos? De acordo com Shulman (1987, p. 8), as grandes fontes para a base de conhecimento para o ensino são: a) a formação acadêmica, que são os conhecimentos aprendidos nas disciplinas e cursos de extensão durante a graduação; b) os materiais institucionalizados, que são os materiais didáticos e o currículo, por exemplo, o professor deve conhecer a estrutura do sistema educacional e seus deveres dentro do mesmo, deve conhecer a instituição de ensino e suas hierarquias; c) pesquisas a respeito dos fenômenos sociais e culturais, no que inclui a literatura específica, como: métodos de pesquisa, novas metodologias nas áreas de ensino e aprendizagem, noções filosóficas e éticas; d) a sabedoria da prática, que é a sabedoria adquirida com a prática em sala de aula.

Em consonância com Shulman, Tardif e Raymond (2000, p. 215), elaboraram um quadro no qual cinco saberes dos professores estão caracterizados quanto à fonte e ao modo de integração do trabalho docente, sendo eles:

Quadro 1 - Os saberes dos professores.

Saberes dos professores	Fontes sociais de aquisição	Modos de integração no trabalho docente
Saberes pessoais dos professores.	Família, ambiente de vida, a educação no sentido lato etc.	Pela história de vida e pela socialização primária.
Saberes provenientes da formação escolar anterior.	A escola primária e secundária, os estudos pós-secundários não especializados etc.	Pela formação e pela socialização pré-profissionais.
Saberes provenientes da formação profissional para o magistério.	Os estabelecimentos de formação de professores, os estágios, os cursos de reciclagem etc.	Pela formação e pela socialização profissionais nas instituições de formação de professores.

Saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho.	Na utilização de “ferramentas” dos professores: programas, livros didáticos, cadernos de exercícios, fichas etc.	Pela utilização das “ferramentas” de trabalho, sua adaptação às tarefas.
Saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola.	A prática do ofício na escola e na sala de aula, a experiência dos pares etc.	Pela prática do trabalho e pela socialização profissional

Fonte: Tardif e Raymond (2000, p. 215).

Mesmo sintetizando esses saberes em um quadro, Tardif e Raymond (2000, p. 213) salientam que os saberes dos professores são “plurais, compósitos, heterogêneos, pois trazem à tona, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e manifestações do saber-fazer e do saber-ser bastante diversificados, provenientes de fontes variadas [...]”.

Essa pluralidade e diversidade exigem que a prática docente requeira contínua reflexão, e a formação de professores deve promovê-la, não como forma prescritiva ou doutrinatória, mas levar os professores e futuros professores a refletirem a respeito de seu próprio ensino (FENSTERMACHER, 1978 apud SHULMAN, 1987).

Segundo Araman (2011, p. 28), “a formação profissional do professor requer conhecimentos e saberes que lhe permita uma ação reflexiva, que colaborem para o enfrentamento dos problemas da prática docente”, problemas esses que não são resolvidos apenas com técnicas e teorias.

Tardif (2002), destaca que a socialização é um dos processos de formação de um indivíduo, e na vida de um professor, esse processo de socialização desde sua experiência escolar, enquanto aluno, reflete em sua atuação como docente. O autor ressalta que o professor leva para sua prática docente suas experiências familiares e escolares, sejam elas do Ensino Básico e/ou do Ensino Superior, e o contato com esse universo educacional, que futuramente será seu ambiente de trabalho, tem um fator de peso na ação docente.

Gauthier et al. (1998), por sua vez, apresenta que o ensino é a mobilização de vários saberes o que denominam de “repertório de saberes”, apresentado no quadro a seguir.

Quadro 2– O repertório de saberes.

SABERES	SABERES	SABERES	SABERES	SABERES	SABERES
disciplinares	Curriculares	das ciências da educação	da tradição pedagógica	experienciais	da ação pedagógica
(A matéria)	(O programa)		(O uso)	(A jurisprudência particular)	(O repertório de conhecimentos do ensino ou a jurisprudência pública validada)

Fonte: Gauthier et al. (1998, p. 29).

Examinando cada um dos saberes necessários ao ensino estabelecidos por Gauthier et al. (1998), pode-se perceber em que sentido e de que maneira o professor mobiliza esses saberes, o que será discutido a seguir.

O **saber disciplinar** “se refere aos saberes produzidos pelos pesquisadores e cientistas nas diversas disciplinas científicas, ao conhecimento por eles produzidos a respeito do mundo” (GAUTHIER et al., 1998, p. 29). O saber disciplinar não é produzido pelo professor, que deve buscar conhecer as pesquisas feitas pelos cientistas. É fato que o professor deva ter conhecimento do conteúdo a ser ensinado, mas ciente de que este saber não é “O” saber docente.

O **saber curricular** também não é um saber produzido pelo professor, mas sim pelo Estado ou especialistas das diversas disciplinas, e cabe ao professor conhecer o programa de ensino que lhe servirá como guia para planejar sua aula (GAUTHIER et al., 1998, p. 30).

O **saber das ciências da educação** “é um saber profissional específico que não está diretamente relacionado com a ação pedagógica [...]” (GAUTHIER et al., 1998, p. 30), mas sim com as noções relativas ao sistema escolar, como por exemplo, saber o que é e como funciona um conselho de classe, um sindicato ou uma carga horária.

O **saber da tradição pedagógica** refere-se às nossas recordações de infância do que é escola e de como se ensina, uma representação individual que se tem do ofício de professor antes da formação na universidade. Essa representação prévia da profissão “serve de molde para guiar os comportamentos dos professores”, e será modificado e/ou adaptado pelo saber experiencial e pelo saber da ação pedagógica (GAUTHIER et al., 1998, p. 32).

O **saber experiencial** advém da experiência pessoal do professor, e ao ser repetida, assume a forma de uma atividade de rotina. “O que limita o saber

experiential é exatamente o fato de que ele é feito de pressupostos e de argumentos que não são verificados por meio de métodos científicos” (GAUTHIER et al., 1998, p. 33).

O **saber da ação pedagógica** “é o saber experiencial dos professores a partir do momento em que se torna público e que é testado através das pesquisas realizadas em sala de aula” (GAUTHIER et al., 1998, p. 33). Esses saberes, legitimados pelas pesquisas, são extremamente necessários à profissionalização do ensino, embora ainda pouco desenvolvido no repertório de saberes do professor.

Heerdt (2014, p. 30), ao abordar a Epistemologia da prática docente, ressalta que “o saber docente não é construído de maneira unidirecional, por meio da sistematização pelas pesquisas acadêmicas, depois transmitido no processo de formação e em seguida aplicado na prática pela/o docente”, mas sim um processo que se retroalimenta e se transforma. A autora apresenta uma sistematização de um repertório de conhecimentos baseados nos saberes da ação pedagógica.

Figura 1 – Processo de construção dos saberes docentes.



Fonte: Heerdt (2014, p. 30).

Esta sistematização sintetiza o processo do saber da ação pedagógica, que de uma forma não linear, ao contrário, cíclica, alia os saberes

necessários ao ensino. Baseados nesta perspectiva, deve-se pensar nas pesquisas do ensino como um processo centrado no estudo dos saberes docentes em seu contexto real de trabalho, em uma situação de ensino.

A articulação dos saberes docentes propostos pelos autores evidencia que a redução da complexidade do ensino prejudica o trabalho docente e corrobora a pertinência da pesquisa baseada nos saberes docentes.

A seguir, são apresentados alguns dos saberes docentes que um professor de Física deve ter.

1.2 Saberes Docentes e o Ensino de Física

Os cursos de Licenciatura em Física têm como objetivo principal a formação de professores para lecionar no Ensino Médio. De acordo com as Diretrizes Nacionais Curriculares para os Cursos de Graduação - Física, as competências essenciais para quem cursa Física, seja bacharelado ou licenciatura, são:

1. Dominar princípios gerais e fundamentos da Física, estando familiarizado com suas áreas clássicas e modernas;
2. Descrever e explicar fenômenos naturais, processos e equipamentos tecnológicos em termos de conceitos, teorias e princípios físicos gerais;
3. Diagnosticar, formular e encaminhar a solução de problemas físicos, experimentais ou teóricos, práticos ou abstratos, fazendo uso dos instrumentos laboratoriais ou matemáticos apropriados;
4. Manter atualizada sua cultura científica geral e sua cultura técnica profissional específica;
5. Desenvolver uma ética de atuação profissional e a consequente responsabilidade social, compreendendo a Ciência como conhecimento histórico, desenvolvido em diferentes contextos sócio-políticos, culturais e econômicos (BRASIL, 2001, p. 43)³.

Neste documento consta, também, as habilidades gerais que devem ser desenvolvidas pelos formandos em Física, tanto para a modalidade de licenciatura quanto bacharelado, sendo elas:

1. Utilizar a **matemática como uma linguagem** para a expressão dos fenômenos naturais;
2. **Resolver problemas experimentais**, desde seu reconhecimento e a realização de medições, até à análise de resultados;

³ Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1304.pdf> >.

3. Propor, elaborar e utilizar **modelos físicos**, reconhecendo seus domínios de validade;
4. Concentrar esforços e persistir na busca de soluções para problemas de solução elaborada e demorada;
5. Utilizar a linguagem científica na expressão de conceitos físicos, na descrição de procedimentos de trabalhos científicos e na divulgação de seus resultados;
6. Utilizar os diversos recursos da informática, dispondo de noções de linguagem computacional;
7. Conhecer e absorver novas técnicas, métodos ou uso de instrumentos, seja em medições, seja em análise de dados (teóricos ou experimentais);
8. Reconhecer as relações do **desenvolvimento da Física com outras áreas do saber**, tecnologias e instâncias sociais, especialmente contemporâneas;
9. Apresentar resultados científicos em distintas formas de expressão, tais como relatórios, trabalhos para publicação, seminários e palestras (BRASIL, 2001, p. 4 - grifo nosso).

No caso da licenciatura, são estabelecidas duas habilidades específicas, sendo elas:

1. O planejamento e o desenvolvimento de diferentes experiências didáticas em Física, reconhecendo os elementos relevantes às estratégias adequadas;
2. A elaboração ou adaptação de materiais didáticos de diferentes naturezas, identificando seus objetivos formativos, de aprendizagem e educacionais; (BRASIL, 2001, p. 5).

Tendo em vista essas competências e habilidades que o professor de Física deve possuir e baseado nos saberes necessários ao ensino proposto por Gauthier et al. (1998), pode-se pensar nos saberes disciplinar e curricular necessários para se lecionar Física. Como já apresentado no item 1.1, segundo Gauthier et al. (1998), tanto o saber disciplinar quanto o curricular não são produzidos pelo professor.

No caso da Física, este é produzido pelos cientistas das diversas áreas específicas, como Mecânica, Termologia, Ondulatória, Acústica, Óptica, Eletromagnetismo, Física Moderna, entre outros. Entre os saberes disciplinares também estão incluídos a História, Filosofia e Sociologia da Ciência (HFSC), pois esses conhecimentos possibilitam uma compreensão adequada da Natureza da Física e de suas relações com a tecnologia e a sociedade.

Gauthier et al. (1998, p. 30), enfatiza que as pesquisas mostram que “o tipo de conhecimento que o professor possui a respeito da matéria influi no seu ensino e na aprendizagem dos alunos”. Pensando nesta afirmação, tendo como foco o Ensino Médio, quais assuntos o professor de Física deve ter conhecimento e

domínio?

Para o Ensino Médio foram definidos, pelo Ministério da Educação, seis temas estruturadores com abrangência para organizar o Ensino de Física, sendo eles:

1. Movimentos: variações e conservações
2. Calor, ambiente e usos de energia
3. Som, imagem e informação
4. Equipamentos elétricos e telecomunicações
5. Matéria e radiação
6. Universo, Terra e vida (BRASIL, 2002-b, p. 70).

No tema “1. Movimentos: variações e conservações”, estão contemplados os assuntos que correspondem à Mecânica, como o estudo dos movimentos, força e suas aplicações e o estudo estático, entre outros. Já o tema “2. Calor, ambiente e usos de energia”, aborda os diferentes processos de troca de calor e seus respectivos modelos explicativos e ainda as máquinas térmicas para o entendimento do uso da Ciência e Tecnologia.

O tema “3. Som, imagem e informação”, tem como objetivo abordar as ondas mecânicas e eletromagnéticas e mostrar as suas aplicações na música e comunicação, como em instrumentos musicais, as emissões de rádio, as telefonia fixa e móvel e a propagação de informações por cabos ópticos. No tema “4. Equipamentos elétricos e telecomunicações”, é proposto o estudo dos fenômenos elétricos e magnéticos.

Por fim, o tema “5. Matéria e radiação” tem por objetivo apresentar a organização microscópica da matéria, assim como sua relação com as propriedades macroscópicas. E o tema “6. Universo, Terra e vida”, visa o estudo dos movimentos de objetos na superfície da Terra, dos movimentos balísticos, dos satélites artificiais, da Lua em torno da Terra ou dos planetas em torno do Sol, entre outros.

Sendo assim, o professor de Física, para estar apto para lecionar, deve dominar esses conteúdos. Mas além desses conteúdos, o professor deve conhecer também os aspectos históricos e epistemológicos dos mesmos. Matthews (1995, p. 188) afirma que “[...] pode-se argumentar a favor de um professor que tenha conhecimento crítico (conhecimento histórico e filosófico) de sua disciplina” mesmo que esse conhecimento não seja diretamente usado em aula, e ressaltou que “[...] há mais em um professor do que apenas aquilo que se pode ver em sala de aula”.

Para que os saberes docentes sejam mobilizados de forma

satisfatória nos futuros professores de Física, há que se investir na formação inicial dos mesmo.

De acordo com Moreira, Massoni e Ostermann (2007), tanto os cursos de formação de professores de Física quanto os livros didáticos adotam uma formação acadêmica com enfoque empirista-indutivista, ou seja,

[...] é um enfoque no qual o conhecimento advém da generalização indutiva a partir da observação, sem qualquer influência teórica ou subjetiva, e dessa forma capaz de assegurar a verdade absoluta às afirmações científicas. Nosso pressuposto básico, e frequentemente defendido na literatura, é que essas visões superadas (empiristas-indutivistas) da Natureza da Ciência sustentadas por futuros professores de física acabam resultando em práticas docentes inadequadas (MOREIRA; MASSONI; OSTERMANN, 2007, p. 128).

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+),

o ensino de Física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas (PCN, BRASIL, 2002-a, p. 22).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, há um alerta de que “é comum a resolução de problemas utilizando expressões matemáticas dos princípios físicos, sem argumentos que as relacionem aos fenômenos físicos e ao modelo utilizado”, o que torna o ensino descontextualizado e acritico, visto que não contribui para a construção do conhecimento, e “dessa forma ensina-se mal e aprende-se pior” (BRASIL, 2006, p. 54).

Tendo em vista essa prática docente inadequada devido à falta de noções da Natureza da Ciência citada por Moreira, Massoni e Ostermann (2007), e o quadro do Ensino de Física apresentado pelo PCN (BRASIL, 2002-a), bem como o alerta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), esta pesquisa vem ao encontro das necessidades e desafios já apresentados para o Ensino de Física,

com a proposta de uma abordagem com ênfase nos grifos das habilidades gerais que devem ser desenvolvidas pelos formandos em Física, a saber: utilizar a Matemática como uma linguagem para a expressão dos fenômenos naturais; resolver problemas experimentais; elaborar e utilizar modelos físicos; reconhecer as relações do desenvolvimento da Física com outras áreas do saber. Tal abordagem contempla um dos seis temas estruturadores propostos para o Ensino Médio, sendo ele, “1. Movimentos: variações e conservações”.

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, há a proposta para o Ensino de Física por meio de modelos.

Assim, propomos que o ensino de Física seja pensado a partir do processo: situação – problema – modelo, entendendo-se “situação” nesse caso como a referência de uma idéia física. Essa é uma característica da Física: fazer modelos da realidade para entendê-la; obter meios para encarar um problema (BRASIL, 2006, p. 53).

O processo apresentado acima (situação – problema - modelo), se aproxima do processo de Modelagem Matemática, em que de uma situação real surgem diversas perguntas, que selecionadas, podem ser formuladas em função de um problema que visa, como solução, a elaboração de um modelo matemático desta situação real.

Em consonância com a proposta apresentada acima, para o ensino de Física, elaborou-se uma abordagem didática com o uso da Modelagem Matemática, a fim de alcançar modelos científicos na Física. A abordagem didática proposta tem um caráter construtivista, a partir da qual, por meio de discussões em grupos, os(as) discentes resolverão atividades que lhes proporcionem reflexão a respeito de suas ações, por meio de escolhas e refutações, ou seja, farão Ciência.

De acordo com Moreira, Massoni e Ostermann (2007), uma abordagem construtivista pressupõe que

[...] o conhecimento é uma construção humana, na qual a criatividade e a imaginação desempenham importante papel, em que a visão empirista-indutivista se mostra superada, e aonde, contrariamente à visão positivista, não há regras infalíveis que garantam o descobrimento de novos fatos e a invenção de novas teorias (MOREIRA; MASSONI; OSTERMANN, 2007, p. 128).

Sendo assim, propõe-se mostrar aos(as) futuros(as) docentes, que há, entre muitas possibilidades para se ensinar Física, metodologias e estratégias

didáticas que fogem do ensino tradicional: uma dessas possibilidades, apresenta-se por meio da Modelagem Matemática.

No capítulo que se segue é apresentada uma reflexão a respeito de elementos da Epistemologia da Ciência e da Natureza dos conhecimentos Matemático, Físico e Físico-Matemático.

2 NATUREZA DO CONHECIMENTO CIENTÍFICO

Neste capítulo, são discutidos assuntos relacionados à Filosofia da Ciência, sendo eles a Epistemologia e a Natureza da Ciência. Ainda, apresenta-se uma caracterização da natureza do conhecimento matemático, físico e físico-matemático. Por fim, é apresentada, também, uma discussão a respeito da Natureza da Ciência e sua relação com a formação de professores.

2.1 Epistemologia da Ciência

Há diversos estudos a respeito do significado de Epistemologia na literatura filosófico-científica. Apresenta-se, a seguir, as definições selecionadas para esta pesquisa de forma a dimensionar o enfoque aqui adotado.

Bernadelli (2014, p. 34), sintetiza que “Epistemologia é a área da Filosofia que investiga e questiona os objetivos e processos da Ciência” e elabora um quadro resumo com as noções de alguns autores da área de Ensino de Ciências a respeito da Epistemologia.

Quadro 3 - Noções de autores a respeito da Epistemologia.

AUTORES	NOÇÕES A RESPEITO DA EPISTEMOLOGIA
Bachelard (1978)	Uma só filosofia é, pois, insuficiente para dar conta de um conhecimento preciso. (p.29).
Astolfi e Develay (1995)	A reflexão epistemológica propõe-se um exame da estrutura do saber ensinado: quais são os principais conceitos que funcionam na disciplina, quais relações unem esses conceitos... [...] Esta reflexão epistemológica se interessa pelos métodos, princípios e conclusões de uma ciência. (p. 15 e 27).
Adúriz-Bravo (2001)	A epistemologia ajuda no cumprimento dos objetivos programados para a educação científica. (p. 64).
Paruelo (2003)	A epistemologia é uma das ferramentas necessárias para o desenvolvimento de novas estratégias para a facilitação da aprendizagem das ciências. (p. 329).
Cachapuz et al. (2005)	A epistemologia está necessariamente implícita em qualquer currículo de ciências. É dela em boa parte a concepção de ciência

	que é ensinada. É nossa convicção, pois, que o conhecimento de epistemologia torna os professores capazes de melhor compreender que ciência estão a ensinar, ajuda-os na preparação e na orientação a dar às suas aulas e dá um significado mais claro e credível às suas propostas. (p. 73).
Gamboa (2007)	Epistemologia é uma palavra que designa a filosofia das ciências, porém com um sentido mais preciso. (p. 27).
Esteban (2010)	A epistemologia, ou teoria do conhecimento, é aquele conjunto de saberes que é objeto de estudo da ciência (sua natureza, sua estrutura, seus métodos). (p. 49).
Leal (2001)	A epistemologia é uma ramo da Filosofia. Ela e a História da Ciência, (no caso a Química) são duas ferramentas poderosas para ajudar-nos a construir uma prática docente melhor fundamentada. (p. 18)

Fonte: Bernadelli (2014, p. 34).

De acordo com as definições apresentadas pelos autores da área de Ensino de Ciências, no quadro anterior, pode-se perceber a relação entre a Epistemologia e o Ensino, em que aspectos epistemológicos estão presentes em cada etapa do ensino, sendo fundamental para a prática docente.

Segundo Lima (2010, p. 117), a etimologia da palavra Epistemologia, “do grego *episteme* (conhecimento, Ciência) + *logos* (discurso, teoria, tratado, estudo de)”, assim a Epistemologia consiste “na teoria ou tratado sobre a Ciência ou teoria do conhecimento”. Ainda de acordo com Lima (2010), por meio de uma visão epistemológica, é possível promover reflexões e compreender o que se produz, como se produz, por que e para que se produz, tanto no que diz respeito ao conhecimento quanto à própria Ciência.

De acordo com a Enciclopédia de Filosofia de Stanford, de forma ampla, a Epistemologia estuda questões relacionadas à criação e divulgação do conhecimento. Segundo Steup (2005), autor do artigo a respeito da epistemologia no site da Enciclopédia,

como estudo do conhecimento, a epistemologia está preocupada com as seguintes questões: Quais são as condições necessárias e suficientes para o conhecimento? Quais são as suas fontes? Qual é a sua estrutura e quais são os limites? (STEUP, 2005, tradução nossa).

Com relação à Epistemologia e à formação de professores, Adúriz-Bravo et al. (2006) afirmam que para muitos autores da Didática das Ciências, a reflexão epistemológica é um componente indispensável na formação de cientistas e professores de Ciências. E ressaltam que “diversos autores reconhecem a importância do meta-conhecimento a respeito do próprio conteúdo a ensinar quando se trata de melhorar a prática de professores de Ciências Naturais” (ADÚRIZ-BRAVO et al., 2006, p. 11, tradução nossa).

Na tarefa de ensinar Ciência, os conteúdos epistemológicos podem fundamentar e dar estrutura às imagens de Ciência que são consideradas atualmente conteúdos valiosos para a educação do “cidadão cientificamente alfabetizado”.

Por outro lado, o uso instrumental deste meta-conhecimento na prática profissional de professores de ciências naturais é capaz de aumentar a aprendizagem significativa de conteúdo científico em estudantes. (ADÚRIZ-BRAVO et al., 2006, p. 11, tradução nossa).

Diante do exposto, pode-se perceber a relação entre a Epistemologia, o Ensino e a formação de professores. Assim, esta pesquisa busca promover reflexões epistemológicas e ressaltar sua relevância na formação de professores de Ciências. A seguir, é feita uma breve discussão a respeito da Natureza da Ciência e sua relevância na formação de professores de Ciências.

2.2 Natureza da Ciência

Não há um consenso quanto à uma definição específica para Natureza da Ciência (NdC) entre filósofos da Ciência, historiadores de Ciência e educadores de Ciências, porém essa falta de consenso não é surpreendente dada sua natureza multifacetada e complexa (ABD-EL-KHALICK, 1998). Em linhas gerais, alguns aspectos da Ndc são: o conhecimento científico é provisório; empírico; carregado de teorias; produto da inferência humana, imaginação e criatividade; social e culturalmente incorporado (ABD-EL-KHALICK, 1998; LEDERMAN *et al.*, 2002).

Segundo Lederman (1992 *apud* LEDERMAN *et al.*, 2002, p. 498, tradução nossa), “NdC refere-se à Epistemologia e Sociologia da Ciência, a Ciência como uma forma de saber, ou os valores e as crenças inerentes ao conhecimento científico e seu desenvolvimento”.

Mas o que é o conhecimento científico? O Centro de Educação em Ciências Unificadas da Universidade Estadual de Ohio em 1974, caracterizou o conhecimento científico como sendo:

- Provisório (sujeito a mudanças);
- Público (compartilhado);
- Replicável;
- Probabilísticos (as previsões baseadas no conhecimento científico nunca são absolutas);
- Humanista (reflete as tentativas humanas de impor uma ordem à natureza);
- Histórico (o conhecimento passado deve ser julgado em seu contexto histórico e não deve ser comparado com as concepções contemporâneas);
- Único (tem seu próprio conjunto de regras e valores);
- Holístico (internamente consistente);
- E empírico (baseado e/ou derivado de observações do mundo natural) (ABD-EL-KHALICK, 1998, p. 20, tradução nossa).

Adúriz-Bravo (2005, p. 25), entende “a Natureza da Ciência como um conjunto de conteúdos metacientíficos com valor para a educação científica”. Alonso *et al.* (2007) apresentam questões que fazem referência à NdC, tais como:

Que é Ciência? Qual o seu funcionamento interno e externo? Como se constrói e desenvolve o conhecimento produzido pela Ciência? Que métodos são usados para validar este conhecimento? Quais os valores implícitos nas atividades científicas? Qual é a natureza da comunidade científica? Quais foram e são as relações da Ciência com a tecnologia até se constituir o atual sistema tecnocientífico? Quais são as relações da sociedade com este sistema? Quais são as contribuições para a cultura e progresso da sociedade? (ALONSO *et al.*, 2007, p. 128).

Questões tais como as citadas por Alonso *et al.* (2007), aparecem com frequência em sala de aula. Alguns alunos sentem a necessidade de conhecer e entender essas questões; porém, muitos docentes não estão preparados para promover discussões a respeito da NdC por consequência de uma formação com ausência ou pobres discussões histórico-filosóficas da Ciência.

Segundo autores das Ciências, a NdC se baseia nos seguintes princípios:

- 1) as teorias científicas são tentativas; 2) as teorias não se convertem em leis ainda com evidência empírica adicional; 3) não há um método científico universal que indique os passos a seguir; 4) as observações são carregadas de teorias; 5) o conhecimento científico implica na

observação, argumentos racionais, criatividade e ceticismo; 6) o progresso científico é caracterizado pela competição entre teorias rivais; 7) os cientistas podem interpretar os mesmos dados experimentais de forma diferente; 8) o desenvolvimento das teorias científicas, às vezes, está baseado em fundamentos inconsistentes; 9) as ideias científicas são afetadas pelo meio social e histórico. (ALMEIDA; FARIAS, 2011, p. 482).

A falta de discussões a respeito da NdC e dos princípios apresentados por Almeida e Farias (2011), acarreta uma série de noções equivocadas do conhecimento científico. A reflexão a respeito desses princípios, humaniza a Ciência e os cientistas, suprimindo a ideia de descoberta, de Ciência neutra e de um método infalível.

A verdade é que os cientistas observam, comparam, medem, testam, especulam, deduzem hipóteses, criam ideias e instrumentos conceituais, e constroem teorias e explicações. No entanto, não existe uma única sequência de atividades (prescritas ou não) que infalivelmente levará a soluções ou respostas funcionais ou válidas, muito menos a certeza ou ao conhecimento verdadeiro (LEDERMAN *et al.*, 2002, p. 501-502, tradução nossa).

Assim, entende-se que a chave para desmistificar essa falsa visão da Ciência e dos cientistas, está na formação de professores. O que é discutido a seguir.

2.2.1 Formação de Professores e Natureza da Ciência

Diversos estudos corroboram a pertinência de discussões a respeito da Natureza da Ciência na formação de professores, porém, mesmo com o aumento de tais discussões nos cursos de graduação, estudos demonstram que muitos professores saem despreparados para promoverem reflexões acerca da NdC em sala de aula (LEDERMAN *et al.* 2002; MOREIRA; MASSONI; OSTERMANN, 2007; ADÚRIZ-BRAVO, 2002, 2005; MATTHEWS, 1998; OSBORNE *et al.*, 2001).

Osborne *et al.* (2001, p.5, tradução nossa), ressaltam que há uma excessiva ênfase na quantidade do que se sabe, ou seja, "o que sabemos" à custa da qualidade, ou seja, "como sabemos", segundo os autores, esta visão da Ciência "resulta em uma educação científica que muitas vezes deixa estudantes apenas capazes de justificar suas crenças por referência de um professor autoritário".

O objetivo da inserção de discussões acerca da NdC na formação de

professores é para que eles possam, por sua vez, promovê-la entre seus alunos, formando pessoas reflexivas e críticas, o que se opõe ao ensino doutrinante (MATTHEWS, 1998). Neste sentido, espera-se que os estudantes,

a partir de uma educação científica de qualidade, construam uma imagem da Ciência contemporânea que inclua idéias a respeito de: sua provisionalidade, seu caráter social e comunitário, a justificativa de seus sucessos intelectuais e materiais, as estratégias comunicativas das quais é utilizada, as relações que ela mantém com a cultura e a religião, os perigos inerentes às suas tecnologias quando aplicadas de maneira inadequada, a existência - durante sua evolução histórica - de comportamentos em desacordo com os valores epistêmicos clássicos, entre outras questões (ADÚRIZ-BRAVO et al. 2006, p. 11).

Não se pretende com isso formar historiadores, sociólogos ou filósofos da Ciência, propõe-se que o professor de Ciências tenha uma compreensão mais complexa da Ciência e não uma compreensão total ou mesmo muito complexa. Matthews (1998, p. 168), argumenta que nas aulas de Ciências, temas a respeito da NdC são recorrentes, segundo o autor “qualquer texto ou discussão científica conterá termos como lei, teoria, modelo, explicação, causa, verdade, conhecimento, hipótese, confirmação, observação, evidência, idealização, tempo, espaço, campos e espécies”, e que o professor deve ser capaz de argumentar, promover reflexões e exemplificar com clareza científica cada um destes termos.

O autor argumenta que a Filosofia começa quando os alunos começam a perguntar a respeito desses termos e seus significados.

Todos esses conceitos contribuem para, e em parte, a deliberação filosófica a respeito de questões de Epistemologia e Metafísica: questões sobre o que as coisas podem ser conhecidas e como podemos conhecê-las, e sobre o que as coisas realmente existem no mundo e as possíveis relações entre eles. Estudantes e professores podem ser encorajados a perguntar as perguntas padrão do filósofo: o que você quer dizer com . . . ? e como você sabe . . . ? de todos esses conceitos (MATTHEWS, 1998, p. 169, tradução nossa).

De acordo com Adúriz-Bravo (2005), a NdC mais adequada para a prática profissional de professores de Ciências deve satisfazer os seguintes requisitos:

1. Ser principalmente uma reflexão do tipo epistemológica, ambientada na História da Ciência e "advertida" pela Sociologia da Ciência contra o dogmatismo e o triunfalismo do positivismo tradicional.
2. Construir uma imagem de Ciência realista e racionalista moderada

(Izquierdo, 2000; Izquierdo e Adúriz-Bravo, 2003; Izquierdo e Aliberas, 2004), para enfatizar as notáveis conquistas intelectuais e materiais das Ciências Naturais sem se esquivar das discussões de suas limitações e seus aspectos éticos ou "humanos".

3. Sintonizar com os conteúdos disciplinares, pedagógicos e didáticos que os professores recebem durante sua formação e sua atividade. (ADÚRIZ-BRAVO, 2005, p. 4, tradução nossa).

Nesta pesquisa, as discussões a respeito de NdC serão realizadas por meio de modelos científicos em atividades de Modelagem Matemática. De acordo com Moreira, Massoni e Ostermann (2007, p. 128), "o entendimento da natureza dos modelos físicos e do processo de construção das leis e teorias é um componente fundamental na tentativa de superação de dificuldades de aprendizagem da Física, tanto na universidade quanto no ensino fundamental e médio".

Assim, acredita-se que discussões a respeito de modelos científicos, e o processo de construção dos mesmos, são discussões a respeito da NdC, podendo proporcionar a reflexão dos 'comos', 'por quês' e 'para quês' de conteúdos físicos.

Nos tópicos que se seguem, é feita uma breve reflexão a respeito da natureza dos conhecimentos matemático, físico e físico-matemático.

2.3 Natureza do Conhecimento Matemático

Algumas questões que se referem à natureza do conhecimento matemático têm sido discutidas desde as primeiras civilizações por diversos filósofos da Ciência ao longo da história, sendo algumas delas tais como: qual a natureza dos entes matemáticos? A Matemática é uma Ciência de verdades absolutas e imutáveis? A Matemática e as Ciências Naturais são totalmente diferentes? Esta pesquisa não tem a pretensão de responder estas questões, mas sim, apresentar o que alguns filósofos como Lakatos (1978, 1980), Goodman (1991), Kant (1995), Ernest (2007), entre outros, pensam a respeito delas.

Quando se estuda uma Ciência, há que se refletir a respeito de sua natureza e seus processos de construção de conhecimento. Segundo Ernest (2007), a Filosofia da Matemática deve ser composta por diversos aspectos da Matemática, incluindo:

1. Epistemologia: o conhecimento matemático; seu caráter, gênese e justificação, com especial atenção para o papel da prova.

2. Teorias: teorias matemáticas, construtivas e estruturais: o seu carácter e desenvolvimento, e questões de apreciação e avaliação.
3. Ontologia: os objetos da matemática: seu carácter, origens e relação com a linguagem da matemática, a questão do platonismo.
4. Metodologia e História: a prática matemática: o seu carácter, e as atividades matemáticas dos matemáticos, no presente e no passado.
5. Aplicações e Valores: aplicações da Matemática; sua relação com a Ciência, a tecnologia, e seus valores, e outras áreas do conhecimento.
6. Conhecimento e Aprendizagem Individual: a aprendizagem da Matemática: o seu carácter e papel na transmissão do conhecimento matemático, e na criatividade dos matemáticos individuais (ERNEST 1998, p. 176, tradução nossa).

De acordo com Goodman (1991, p. 119, tradução nossa), a visão tradicional da Filosofia da Matemática, que vem desde Platão até os dias de hoje, e está presente ainda em muitos departamentos de Matemática, é que “a Matemática é o estudo puramente racional de formas imateriais” e que se preocupa exclusivamente com “objetos como números, formas e funções que não ocorrem no mundo físico”. Segundo essa visão tradicional, “o conhecimento matemático é certo, mas desprovido de conteúdo sobre o mundo físico”, sendo que quando a Matemática fornece informações a respeito de fenômenos físicos, esta não seria considerada verdadeiramente como Matemática (GOODMAN, 1991, p. 119- 120, tradução nossa).

Filósofos como Popper (1902 - 1994), Hilbert (1862 - 1943), Carnap (1891 - 1970) e os empiristas lógicos, acreditavam que “os enunciados matemáticos são verdades indubitáveis que não estão sujeitos a refutações” (MOLINA, 2001, p. 134). Na contramão desse pensamento, Lakatos (1922 - 1974) tinha uma outra visão a respeito da Matemática e de sua aproximação com as Ciências Naturais, de acordo com Molina (2001), Lakatos,

[...] considerou a Matemática como uma Ciência quase-empírica, apagando assim as fronteiras entre Matemática e Ciência Natural. No final, para Lakatos, não pode existir uma epistemologia própria da Matemática, fora da epistemologia geral das Ciências empíricas (MOLINA, 2001, p. 135).

Segundo Goodman (1991, p. 125), a Matemática é a Ciência mais rica e profunda da natureza, mas os resultados da Matemática não são mais seguros do que de outras Ciências; ainda segundo o autor “[...] uma vez que aplicamos as ideias da filosofia analítica moderna às matemáticas, veremos que a Matemática não é mais diferente da Física do que a Física é da Biologia”.

A respeito do conhecimento matemático, Kant (1995) sustenta que,

O conhecimento é um juízo do qual brota um conceito que tem realidade objetiva, isto é, ao qual se pode dar um objeto correspondente na experiência. Toda a experiência, porém, consta da intuição de um objeto, isto é, de uma representação imediata e única, pela qual o objeto é dado como que ao conhecimento, e de um conceito, isto é, de uma representação mediata numa característica que é comum a vários objetos, podendo ele assim ser pensado (KANT, 1995, p. 24).

Kant (1995), faz uma diferenciação a respeito do conhecimento *a priori* e *a posteriori*, sendo o conhecimento *a priori* um conhecimento universal fundamentado na razão e não na experimentação, já o conhecimento *a posteriori*, seria o conhecimento empírico, baseado nas observações do mundo físico. Segundo o autor, “a Matemática evolui no terreno do sensível em que a própria razão pode construir os seus conceitos, isto é, apresentá-los *a priori* na intuição e assim conhecer *a priori* os objetos [...]” (KANT, 1995, p. 16).

Já Frege (1983, p. 205), diferencia uma verdade *a posteriori* como sendo “verdades indemonstráveis e sem generalidade, implicando enunciados acerca de objetos determinados”, e uma verdade seria *a priori* quando “é possível conduzir a demonstração apenas a partir de leis gerais que não admitem nem exigem demonstração”.

A respeito da ‘demonstração’, Frege (1983, p. 204) destaca que esta não tem “apenas a finalidade de colocar a verdade de uma proposição acima de qualquer dúvida, mas também a de propiciar a compreensão da dependência das verdades umas em relação às outras”.

Frege, na maior parte de sua obra, se contrapôs à filosofia kantiana. Para Frege, a aritmética era totalmente independente da intuição, como se pode observar na frase a seguir, quando o autor afirma que “a aritmética seria portanto apenas uma lógica mais desenvolvida, cada proposição aritmética uma lei lógica, embora derivada. As aplicações da aritmética à explicação da natureza seriam elaborações lógicas de fatos observados” (FREGE, 1983, p. 265). Já para Kant (1995), todo o conhecimento era constituído de dois elementos básicos: intuição e conceito.

Em relação ao símbolo de uma ideia ou de um conceito, Kant (1995) afirma que o mesmo é “uma representação do objeto segundo a analogia, isto é, segundo a relação a certas consequências idênticas àquela que o objeto tem em si

mesmo com as suas próprias consequências [...]”. (KANT, 1995, p. 45). Ou seja, descrever matematicamente um conceito nada mais é do que fazer analogias entre o real e os entes matemáticos, assim como não há círculos perfeitos na natureza, mas que, por analogia, podemos descrevê-los.

2.4 Natureza do Conhecimento Físico

Filósofos da Física argumentam que a Física descreve a "realidade" e que a filosofia da Física, não é Física. A partir dessas duas argumentações, surgem diversas perguntas a respeito da natureza do conhecimento físico, entre elas: o que é a Física? Qual a filosofia da Física? Como se dá a construção do conhecimento físico? Certamente, esta pesquisa não tem a pretensão de responder estas questões, mas sim, promover uma reflexão em torno do assunto e apresentar o que alguns epistemólogos e cientistas, como Einstein (2006), Casado (2008), Rioja (1996), Drake (1981), entre outros, pensam a respeito delas.

Ao longo da história, podem-se observar os diferentes pensamentos e atitudes no que se refere à Ciência da Natureza, do que entendemos como a Física nos dias de hoje. De acordo com Rioja (1996, p. 145, tradução nossa), “a Ciência Física surge como resultado da tarefa de racionalização da natureza”, iniciada pelos gregos e concretizada na Idade Moderna na forma de saber matemático-experimental. Segundo Drake (1981, p. 25), “a Ciência Física, em geral, constituía a ‘filosofia da natureza’; isto é, o conhecimento da natureza, que era *physis* em grego”, e argumenta que os princípios da Ciência Física foram determinados na Metafísica de Aristóteles.

Aristóteles (384 a.C – 322 a.C) propunha uma Ciência do universo e baseava-se na lógica, que era radicalmente teórica, formulando verdades universais por meio de experiências comuns, ou seja, que não passavam de observações. Aristóteles rejeitava a Matemática e fazia uso de uma linguagem qualitativa para descrever a natureza (KOYRÉ, 1986).

Contrapondo o pensamento aristotélico, que obteve grande hegemonia intelectual para pensar a natureza até a sua época, Galileu Galilei (1564 - 1642) utilizou da experimentação para obtenção do conhecimento, e fez grande uso da Matemática, fazendo do que é matemático a própria Física ao matematizar a natureza (KOYRÉ, 1982).

Com estes breves parágrafos, podem-se observar diferentes formas de se fazer Ciência, porém um único objetivo: compreender a natureza. A física aristotélica foi abandonada, mas foi fundamental para a construção do conhecimento físico e foi base científica por anos. A física galileana mostrou a natureza com olhos matemáticos enquanto a física newtoniana buscou descrever a harmonia do mundo. Qual física é melhor? Existe uma única Filosofia da Física? Casado (2008, p. 70), afirma que “não existe filosofia senão filosofias da Física. É um fato. Não é algo discutível”. E por esta razão “é necessário classificá-las antes de julgá-las e tomar partido.”

Einstein (2006, p. 9), alerta que o físico não deve se restringir apenas à sua Ciência, pois “toda ciência não é senão um refinamento do senso comum”, sendo assim, há que se promover uma reflexão crítica, ou seja, o cientista deve conhecer a filosofia de sua Ciência.

A respeito do objetivo da Ciência, Einstein (2006) afirma que,

[...] é, em primeiro lugar, a mais completa compreensão conceitual de experiências sensíveis em toda sua variedade e sua interconexão lógica. Em segundo lugar porém, atingir este objetivo através do uso de um mínimo de conceitos e relações primárias (aspiração por uma visão de mundo unificada mais lógica possível ou simplicidade lógica de seus fundamentos) (EINSTEIN, 2006, p. 10).

Para Einstein (2006, p. 21-22), “a Física é um sistema de pensamento lógico em desenvolvimento, cuja base não pode ser destilada das experiências por um método indutivo mas só pode ser obtida através da livre invenção”.

Robilotta (1988), cita um mito persistente a respeito da Física. Segundo este mito,

a Física seria um corpo de conhecimentos independente de opiniões pessoais ou preconceitos, neutro, apolítico, que descreve o mundo natural como ele realmente é. Todos esses preconceitos têm, em geral, como justificativa o fato de o conhecimento físico ser baseado em experimentos, tomados como observações diretas da natureza (ROBILOTTA, 1988, p.13).

Entretanto, essa visão é impossível de ser sustentada, visto que os conhecimentos da Física “englobam fenômenos e teorias, sendo estas últimas baseadas em conceitos e leis, e estruturadas por meio da matemática” (ROBILOTTA, 1988, p. 13).

Discussões como estas devem ser inseridas nas aulas de Física e na formação de professores a fim de contribuir para uma noção adequada do que é a Ciência.

2.5 Natureza do Conhecimento Físico-Matemático

Ao discutir a natureza do conhecimento físico-matemático é possível perceber o papel da Matemática na Física.

De acordo com Koyré (1986, p. 345), é na obra de Galileu que se realiza, pela primeira vez na história do pensamento humano, a ideia da Física-Matemática, e ressalta que “descobrir as leis matemáticas do movimento, descobrir que o movimento de queda segue a lei do número: havia aí verdadeiramente de que se orgulhar” (KOYRÉ, 1986, p. 310). De acordo com o autor, Galileu se dirigia à natureza para dela receber respostas “através de curvas, círculos e triângulos, em linguagem matemática ou, mais precisamente, em linguagem geométrica – não na linguagem do senso comum ou através de puros símbolos” (KOYRÉ, 1982, p. 154).

Segundo Poincaré (1995, p.94), o objetivo desta Física-Matemática não é apenas de facilitar ao físico o cálculo de determinadas constantes, “mas, ainda, ele é sobretudo o de facultar ao físico o conhecimento da harmonia oculta das coisas, fazendo com que as veja sob uma nova perspectiva”.

Um problema físico-matemático, não deve pretender separar o que é Física e o que é Matemática, segundo Roque (2005),

uma análise que considere separadamente os aspectos físico e matemático de um problema pressupõe, mesmo que implicitamente, que a Física trabalha com a realidade, ao passo que a Matemática deve fornecer as condições formais para a descrição física desta realidade. O preço dessa suposição é o de relegar, ao mesmo tempo, a Física a um saber incapaz de se legitimar a si mesmo e a Matemática a uma abstração, a uma mera formalização sem mundo. Este preço é alto, pois tem por consequência um enfraquecimento de ambas, tanto da Matemática como da Física (apud KARAM; PIETROCOLA, 2009, p. 189).

Problemas da realidade, ou fenômenos físicos, não podem ser descritos ou modelados sem a Matemática, logo há uma relação de dependência, de

imbricamento entre os domínios. Koyré (1986, p. 350) adverte que “[...] querer tratar questões naturais sem geometria é tentar fazer algo que não pode ser feito”.

Para descrever uma lei a partir de um fenômeno, é preciso generalizar, “[...] a lei provém da experiência, mas não imediatamente. A experiência é individual, e a lei que dela se tira é geral; a experiência é apenas aproximada e a lei é precisa, ou ao menos pretende sê-lo” (POINCARÉ, 1995, p. 91). E para generalizar e ser capaz de fazer previsões, a Matemática é indispensável, “assim, as analogias matemáticas não só podem nos fazer pressentir as analogias físicas, mas também são constantemente úteis quando faltam estas últimas” (POINCARÉ, 1995, p. 94).

Todas as leis, pois, provêm da experiência, mas para enunciá-las é preciso uma língua especial; a linguagem corrente é demasiado pobre, e aliás muito vaga para exprimir relações tão delicadas, tão ricas e tão preciosas. Eis portanto uma primeira razão pela qual o físico não pode prescindir da matemática; ela lhe fornece a única língua que ele pode falar (POINCARÉ, 1995, p. 91).

Na Física-Matemática, a experimentação, a teoria e suas fórmulas são uma coisa só, e conjuntamente descrevem um fenômeno. Encerra-se este capítulo com uma síntese do que é o conhecimento físico-matemático em uma narrativa de Koyré a respeito de Galileu e Descartes.

O pensamento, ou, se preferir, a atitude mental de Galileu difere sensivelmente da de Descartes. Não é puramente matemática; é físico-matemática. Galileu não avança hipóteses sobre os modos possíveis do movimento acelerado: o que ele procura é o modo real, o modo de que a natureza faz uso. Galileu não parte, como Descartes, de um mecanismo causal, a fim de o traduzir em seguida numa relação puramente geométrica; ou até de o substituir por uma tal relação. Parte da ideia – pré concebida, sem dúvida, mas que constitui a base da sua filosofia da natureza – de que as leis da natureza são leis matemáticas. *O real encarna o matemático*. Por conseguinte, não há, em Galileu, afastamento entre a experiência e a teoria; a teoria, a fórmula, não se aplica aos fenômenos por fora, não ‘salva’ esses fenômenos, exprime a sua essência (KOYRÉ, 1986, p. 193 - 194).

No capítulo a seguir, são apresentados e discutidos os modelos na Ciência e a Modelagem Matemática, temas centrais desta pesquisa.

3 MODELOS E MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo é abordado o cerne epistemológico desta pesquisa, Modelos Científicos e Modelagem Matemática. Entende-se que abordar modelos científicos na Ciência é estudar aspectos da Epistemologia da Ciência, assim como a Modelagem Matemática, que em seu processo de construção e validação de um modelo também pode ser caracterizada como um processo epistemológico.

As primeiras perguntas que se procura responder neste capítulo são: O que são modelos? E, quais os tipos de modelos? De acordo com Justi (2006, p. 175, tradução nossa), o conceito mais aceito, é que “um modelo é uma representação de uma ideia, objeto, acontecimento, processo ou sistema, criado com um objetivo específico”.

Assim, neste capítulo são abordados os diferentes tipos de modelos e especificamente os modelos científicos na Física. Em seguida, apresenta-se a Modelagem Matemática na Educação Matemática e sua aplicação no Ensino de Física. Por fim, é abordada a Modelagem Matemática como uma estratégia Didática, estratégia esta que será empregada nesta pesquisa na parte empírica.

3.1 Tipos de Modelos

Na busca de novos conhecimentos, o ser humano recorre à formulação de hipóteses e à formulação de modelos da realidade estudada. Para tanto, “constroem-se, assim, esquemas abstratos da realidade, nos quais as coisas são reduzidas a seus perfis mais convenientes” (SAYÃO, 2001, p. 82).

De acordo com Bunge (1974, p. 14), “a formação de cada modelo começa por simplificações, mas a sucessão histórica dos modelos é um progresso de complexidade”, ou seja, não é uma definição simples e/ou unânime. Bassanezi (2002), define, a grosso modo, que:

[...] quando procuramos agir/refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, compreender ou modificá-la, o processo usual é selecionar, no sistema em estudo, argumentos ou parâmetros considerados essenciais, formalizando-os por meio de um processo artificial denominado modelo (BASSANEZI, 2002, p. 173).

Há muitos tipos de modelos na Ciência e no Ensino de Ciências. São apresentados aqui alguns tipos de modelos presentes na literatura do Ensino de Ciências, sendo eles: Modelo Científico na Física, Modelo Mental, Modelo Didático, Modelo Computacional e Modelo Matemático na Educação Matemática.

- **Modelo Científico na Física**

De acordo com Morrison e Morgan (1999), os modelos são um dos instrumentos críticos da Ciência moderna. Epistemologicamente, os modelos científicos estão estreitamente ligados às teorias científicas, servem primordialmente para “comunicar alguma coisa sobre o objeto da modelagem de forma a gerar um entendimento mais completo sobre a realidade” (SAYÃO, 2001, p. 83).

A seguir, serão apresentadas as definições de modelo científico de autores da Física e do Ensino de Ciências escolhidos para esta pesquisa.

Para Bunge (1974, p. 16), os modelos científicos, por ele denominado de modelos teóricos, são “[...] um sistema hipotético-dedutivo que concerne a um objeto-modelo, que é, por sua vez, uma representação conceitual esquemática de uma coisa ou de uma situação real ou suposta como tal”. Por sua vez, o autor define a expressão objeto-modelo como sendo,

qualquer representação esquemática de um objeto pode ser denominada *objeto-modelo*. [...] A representação pode ser pictórica, como é no caso de um desenho, ou conceitual, como no caso de uma fórmula matemática. Pode ser figurativa como um modelo radial com esferas de uma molécula, ou semi-simbólica, como no caso do mapa das curvas de nível da mesma molécula, ou simbólica, como o operador hamiltoniano para este objeto. E o objeto-modelo pode ser intrateórico, como no caso do modelo em rede casual do cérebro; ou extrateórico, como o modelo do Pseudo-Areopagita da hierarquia celeste (BUNGE, 1974, p. 32).

Para Sayão (2001, p. 83), “um modelo é uma criação cultural, um “mentefato”, destinada a representar uma realidade, ou alguns dos seus aspectos, a fim de torná-los descritíveis qualitativamente e quantitativamente e, algumas vezes, observáveis”.

Batista (2004), define modelo científico como sendo:

[...] uma entidade natural ou artificial, relacionada, de alguma forma, à entidade sob estudo ou a alguns dos seus aspectos. Esse modelo é capaz de substituir o objeto (entidade) em estudo (isto é, de servir como uma “quasi-entidade” relativamente independente), e de

produzir (sobre essa investigação) certos conhecimentos mediados concernentes à entidade sob estudo (BATISTA, 2004, p. 466).

Morrison e Morgan (1999), apresentam quatro elementos básicos a respeito dos modelos científicos, a saber: como eles são construídos, como eles funcionam, o que eles representam e como aprendemos com eles.

Construção dos modelos - os modelos não são necessariamente derivados inteiramente da teoria ou dos dados, eles possuem uma certa autonomia e independência. “É porque eles não são nem uma coisa nem outra, nem apenas a teoria nem os dados, mas tipicamente envolvem alguns dos elementos (e muitas vezes adicionais "externos"), que podem mediar entre a teoria e o mundo” (MORRISON; MORGAN, 1999, p. 10 – 11, tradução nossa).

Função dos modelos – o modelo funciona como um instrumento e um instrumento funciona independente da coisa em que opera, mas conecta-se a ela de alguma forma. “Funcionam como ferramentas ou instrumentos e são independentes, mas mediam entre coisas; e como ferramentas, muitas vezes podem ser usadas para muitas tarefas diferentes” (MORRISON; MORGAN, 1999, p. 11, tradução nossa).

Poder de representação dos modelos – existem instrumentos que servem apenas para operacionalizar algo e os que podem ser usados como investigações, dispositivos para aprender algo.

Os modelos geralmente representam algum aspecto do mundo, ou algum aspecto de nossas teorias sobre o mundo, ou ambos ao mesmo tempo. Daí o poder representativo do modelo permite que ele funcione não apenas de forma instrumental, mas para nos ensinar algo sobre o que representa (MORRISON; MORGAN, 1999, p. 11, tradução nossa).

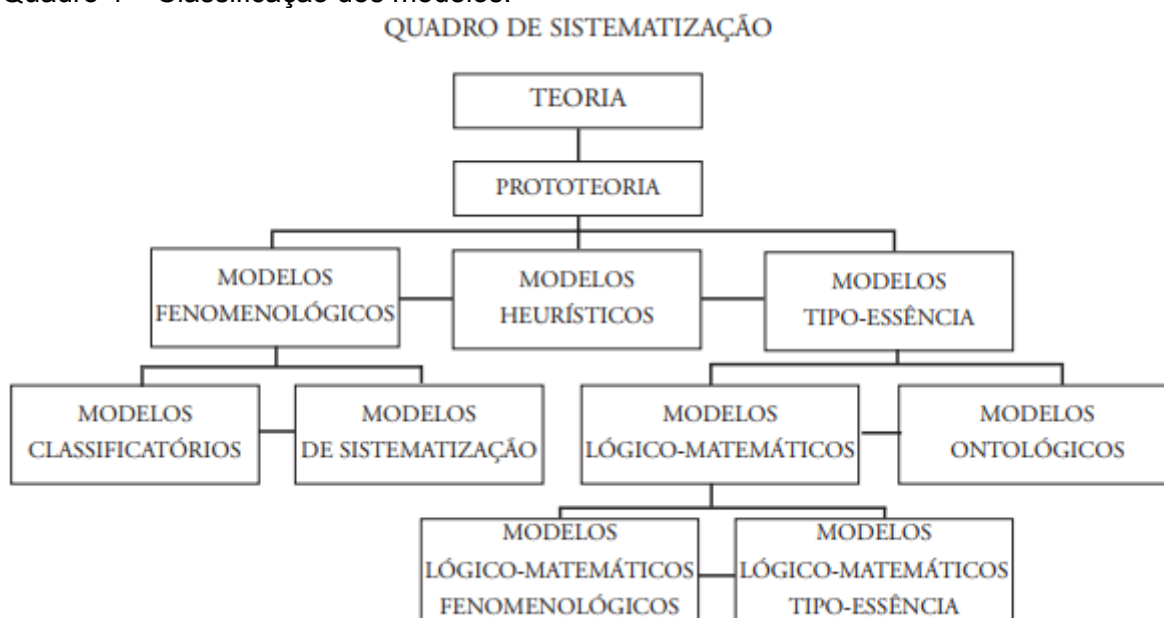
Aprendizagem - em uma abordagem com modelos científicos pode ocorrer aprendizagem e o modelo funciona como um instrumento mediador. A aprendizagem não ocorre pelo simples fato de olhar um modelo, mas sim por meio de sua construção e manipulação.

[...] o poder do modelo só se torna aparente no contexto de sua utilização. Os modelos funcionam não apenas como meio de intervenção, mas também como meio de representação. É quando manipulamos o modelo que esses recursos combinados nos permitem aprender como e por que nossas intervenções funcionam. (MORRISON; MORGAN, 1999, p. 12, tradução nossa).

Há uma diferenciação entre modelos científicos e teorias científicas. As teorias científicas são capazes de oferecer explicações de fenômenos, como regularidades e exceções, prever resultados e identificar propriedades inerentes ao objeto de estudo. Já os modelos científicos, são estruturas mais circunscritas que podem aplicar princípios gerais das teorias em diferentes casos (BATISTA; SALVI; LUCAS, 2011). Segundo Batista (2004), as teorias científicas são entendidas como “coleção de modelos”, uma vez que os modelos são utilizados na construção de teorias.

Batista (2004), propõe uma sistematização entre teoria e modelos científicos na Física, apresentada no quadro a seguir.

Quadro 4 – Classificação dos modelos.



Fonte: Batista (2004, p. 471).

Para melhor entendimento do Quadro 4, este será apresentado a partir dos Modelos Heurísticos, que são modelos preliminares síntese, ponto de partida para uma explicação. Os Modelos Heurísticos se articulam com Modelos Fenomenológicos, que “descrevem certos aspectos que caracterizam o modo como um processo físico se desenvolve, mas não explicam por que ele ocorre precisamente daquela maneira” e Modelos Tipo-Essência, que “fornecem certas interpretações preliminares das essências e causas do processo físico” (BATISTA, 2004, p. 468).

Os Modelos Fenomenológicos incluem os Modelos Classificatórios e os Modelos de Sistematização, sendo que os

[...] modelos classificatórios percebem regularidades específicas nas relações das entidades físicas, mas não são capazes de explicar suas essências. Eles têm seu papel, têm largo uso [...], mas têm valor limitado na elaboração da teoria das partículas elementares, pois não são tão heurísticos como os modelos de sistematização (BATISTA, 2004, p. 468).

Já os Modelos Tipo-Essência, capazes de fornecer interpretações preliminares das essências e causas do processo científico em questão, são divididos em lógico-matemáticos e ontológicos.

Os modelos lógico-matemáticos são sistemas de elementos lógico-matemáticos, cuja estrutura é análoga à estrutura das entidades físicas; se eles possuem tal estrutura em um grau inferior, chamamos de modelos lógico-matemáticos fenomenológicos e, se eles a possuem em um grau superior, chamamos de modelos lógico-matemáticos tipo-essência (BATISTA, 2004, p. 468).

Os modelos ontológicos servem como suposições iniciais concernentes às peculiaridades essenciais (do que existe) de certos domínios da realidade física. O reconhecimento dessas peculiaridades de existência real permite obter resultados teóricos importantes (BATISTA, 2004, p. 468).

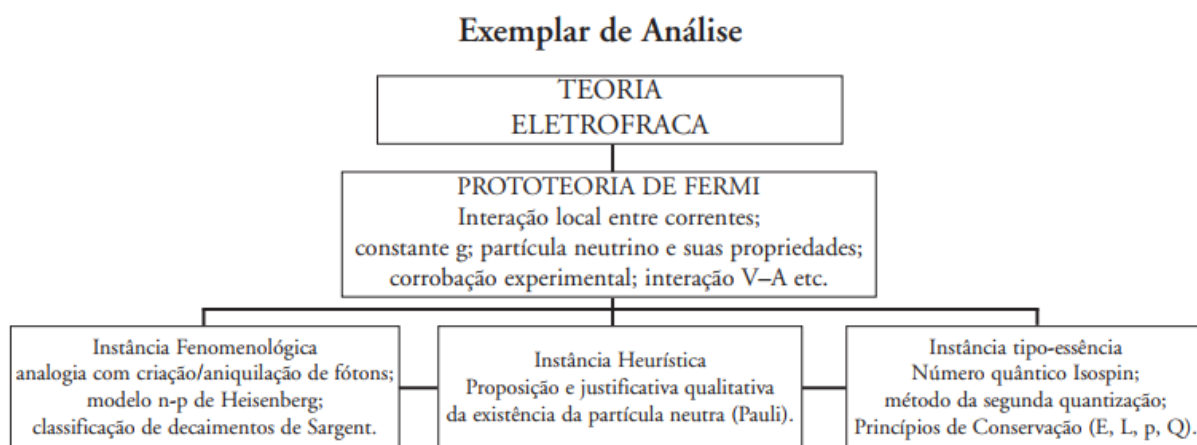
A outra instância apresentada no Quadro 4 é a Prototeoria, de acordo com Batista (2004, p. 468), a prototeoria é uma etapa intermediária entre o modelo e a teoria. A autora define prototeoria como “a concepção que nasce de modelos heurísticos, que têm primeiro uma instância fenomenológica e depois uma instância tipo-essência, e que deve amadurecer para se tornar uma teoria”. Em relação à definição de teoria física, Batista (2004) define como:

[...] elaboração que seja coerente com os aspectos empíricos com os quais ela se relaciona, com o maior grau de abrangência – no sentido de explicar os dados experimentais já conhecidos e quaisquer outros novos que vierem a existir – e que seja coerente segundo uma lógica escolhida, seja ela clássica ou heterodoxa, na sua estrutura matemática, no seu domínio de aplicabilidade e com um conjunto de regras que permitam conectar a teoria com uma estrutura lógico-matemática e com o domínio empírico estabelecido (BATISTA 2004, p. 470).

Segundo Batista (2004, p. 470), a diferença entre Prototeoria e Modelos Heurísticos é que, diferentemente dos modelos heurísticos “[...] que são uma aquisição intelectual mediada do desconhecido em termos do conhecido, a prototeoria propõe elementos conceituais novos (nova ontologia) que deverão ser confirmados, tendo como consequência uma nova teoria propriamente dita”.

Para exemplificar a classificação de uma elaboração teórica, Batista (2004) apresenta um quadro sistematizado da chamada Teoria de Fermi para o decaimento β .

Figura 2 – Exemplificação: Proposta de Teoria de Fermi.



Fonte: Batista (2004, p. 472).

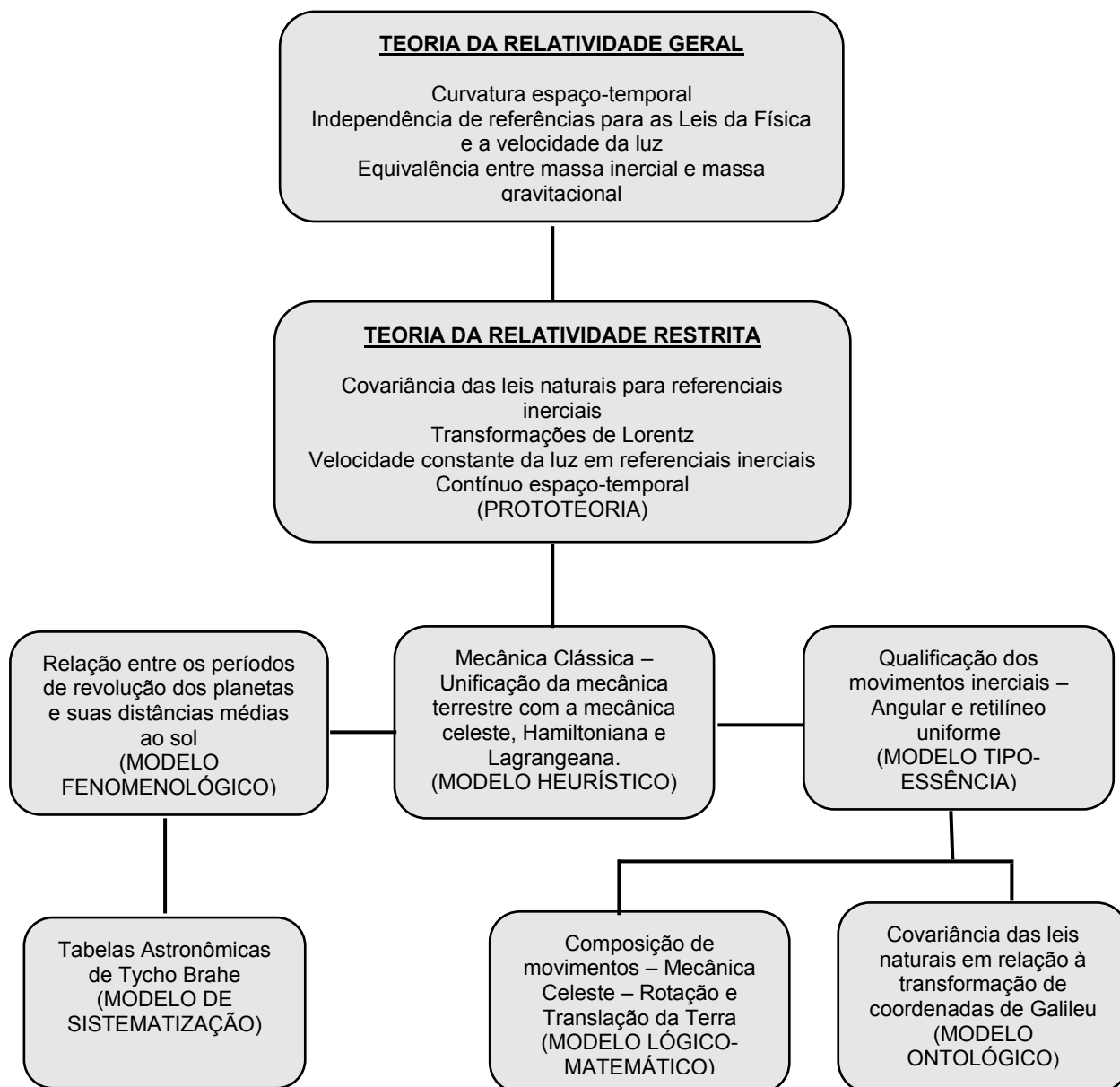
Assim como o exemplo apresentado por Batista (2004), é possível apresentar outras classificações de teorias segundo o quadro de sistematização proposto pela autora. O grupo de pesquisa Investigações em Filosofia e História da Ciência, e Educação em Ciências e Matemática (IFHIECEM) em um curso de extensão intitulado “A Contribuição dos Modelos Científicos para a Compreensão da Ciência a partir de uma abordagem interdisciplinar”, apresentou alguns exemplares deste quadro.

O curso foi ofertado diversas vezes em Londrina e também em diferentes estados do Brasil e foi ministrado pela coordenadora do grupo, a Dra. Irinéa de Lourdes Batista, e por seus integrantes, alunos de mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Tal curso foi destinado a professores de Biologia, Filosofia, Física, História, Matemática e Química da rede pública e privada de ensino;

professores universitários em geral; acadêmicos dos cursos de Biologia, Filosofia, Física, História, Matemática e Química e áreas afins; profissionais interessados na discussão da inserção dos Modelos Científicos no ensino.

A seguir tem-se um quadro de sistematização completo, apresentado no curso, com a temática “Teoria da Relatividade Geral”.

Figura 3 – Exemplificação: Teoria da Relatividade Geral.



Fonte: IFHIECEM.

- **Modelo Mental**

Segundo Bunge (1974), o processo de construção de um modelo científico, ou modelo teórico como é definido pelo autor, passa pelo processo de construção de modelos mentais.

Converter coisas concretas em imagens conceituais (objetos-modelo) cada vez mais ricas e expandi-las em modelos teóricos progressivamente complexos e cada vez mais fiéis aos fatos, é o único método efetivo para apreender a realidade pelo pensamento. (BUNGE, 1974, p. 30).

De acordo com Moreira (2014, p. 3), “um modelo mental é uma representação interna de informações que corresponde analogamente com aquilo que está sendo representado”. Os modelos mentais são compostos por elementos e relações que representam algo, não são únicos, pelo contrário, é possível criar diversos modelos mentais de uma mesma coisa. “Os modelos mentais são, portanto, uma forma de representação analógica do conhecimento: existe uma correspondência direta entre entidades e relações presentes na estrutura dessa representação e as entidades e relações que se busca representar” (MOREIRA, 2014, p. 5).

Moreira (2014, p. 5) exemplifica relacionando o modelo mental de um avião, em que cada indivíduo construiria seu modelo segundo diversos fatores como, idade, cultura e seus diferentes usos, como pilotá-lo ou embarcá-lo, “cada versão, no entanto, deveria incluir o núcleo central que identificaria o modelo como sendo de avião”. Moreira (2014, p. 5), cita uma definição de Norman (1983) que afirma que “modelos mentais são o que as pessoas realmente têm em suas cabeças e o que guia o uso que fazem das coisas”.

A função principal dos modelos mentais é permitir que seu elaborador faça explicações e previsões a respeito de algo. Norman (1983) cita as principais características dos modelos mentais, sendo elas:

1. Modelos mentais são incompletos;
2. A habilidade das pessoas em “rodar” seus modelos mentais é muito limitada;
3. Modelos mentais são instáveis: as pessoas esquecem detalhes do sistema modelado, particularmente quando esses detalhes (ou todo o sistema) não é utilizado por um certo período de tempo;
4. Modelos mentais não têm fronteiras bem definidas: dispositivos e operações similares são confundidos uns com os outros;
5. Modelos mentais são “não-científicos”: as pessoas mantêm padrões de comportamento “supersticiosos”, mesmo quando sabem que não

são necessários (por exemplo, apertar a tecla CLEAR, ou a tecla ENTER, de uma calculadora várias vezes, desnecessariamente, “só para ter certeza”); os modelos mentais de uma pessoa refletem suas crenças sobre o sistema físico;

6. Modelos mentais são parcimoniosos: frequentemente as pessoas optam por operações físicas adicionais ao invés de um planejamento mental que evitaria tais operações; as pessoas preferem gastar mais energia física em troca de menor complexidade mental (NORMAN, 1983, p. 8, tradução nossa).

Norman (1983, p. 12), apresenta três fatores funcionais aplicáveis tanto aos modelos científicos quanto aos modelos mentais, sendo eles: *o sistema de crenças*, em que os modelos mentais de uma pessoa refletem seu sistema de crenças; *observabilidade*, há uma correspondência entre o modelo mental e o que a pessoa observa e *potência preditiva*, o modelo mental deve ser capaz de entender e antecipar um fenômeno.

- **Modelo Didático**

De acordo com García Pérez (2000, p. 4) “modelo didático é um instrumento que facilita a análise da realidade escolar com vista à sua transformação”. Ou seja, os modelos didáticos são modelos criados especialmente para ensinar os alunos a respeito dos modelos científicos. São considerados como mediadores entre os modelos mentais e os modelos científicos. Ainda de acordo com o autor,

a ideia de modelo didático permite abordar (de maneira simplificada, como qualquer modelo) a complexidade da realidade escolar, ao mesmo tempo em que ajuda a propor procedimentos de intervenção na mesma e a fundamentar, portanto, linhas de investigação educativa e de formação dos professores (GARCÍA PÉREZ, 2000, p. 4, tradução nossa).

Galagovsky e Adúriz-Bravo (2001, p. 235) argumentam que “alguns modelos didáticos usados resultam da combinação, sem hierarquia e desordenadamente, de modelos, instrumentos, representações e recursos sintáticos e semânticos provenientes da Ciência erudita”.

Os autores fazem uma tabela resumo mostrando a diferença entre modelos científicos e modelos didáticos.

Tabela 3 - Diferença entre modelo científico e modelo didático.

Modelo científico	Modelo Didático
É uma construção provisória, altamente convencional, perfectível e contextualizada historicamente.	Em geral, vem de um modelo científico perimetrado e simplificado, descontextualizado de qualquer momento histórico, com a aparência de "verdade imperecível".
Dois modelos científicos alternativos sobre o mesmo assunto podem ser simultaneamente incompatíveis se forem propostos por diferentes escolas teóricas.	Os modelos didáticos alternativos sobre o mesmo assunto sempre aparecem simultaneamente compatível no mesmo curso, livro ou ciclo escolar.
Dois modelos científicos alternativos sobre o mesmo assunto podem ser sucessivamente incompatíveis se houver uma mudança nos conceitos teóricos envolvidos.	Modelos didáticos alternativos sobre o mesmo assunto sempre parecem ser compatíveis; não há menção à sua evolução histórica ou conceitual.
Eles surgem do consenso de cientistas que discutem em comunidade.	Eles são impostos a partir do texto ou no discurso escolar, sua natureza convencional não é explícita.
São utilizados para explicar os fenômenos que a experimentação de um determinado momento histórico evidencia.	Eles são ensinados como verdades intrínsecas, não para explicar fenômenos; se considera necessário ensinar "o último modelo", portanto, não há contradições entre fatos experimentais e modelos anteriores.

Fonte: Galagovsky e Adúriz-Bravo (2001, p. 235, tradução nossa).

Os autores apresentam o conceito de “modelo didático analógico”, que segundo eles,

A ideia básica de construir um modelo didático analógico é conhecer profundamente o assunto que é desejado ensinar, abstrair seus conceitos nucleares e as relações funcionais entre esses conceitos e traduzir tudo para uma situação, tão inteligível quanto possível para estudantes, desde a vida cotidiana, da ficção científica ou bom senso (GALAGOVSKY; ADÚRIZ-BRAVO, 2001, p. 237, tradução nossa).

A estratégia didática para trabalhar com os Modelos Didáticos Analógicos (MDA), segundo os autores, requer três momentos, sendo eles: a) O

MDA geralmente é abordado antes que a questão específica, seu referente científico, tenha sido abordado; b) após ter trabalhado a situação analógica, se apresenta a informação proveniente da Ciência erudita; c) Finalmente, o momento da metacognição constitui o objetivo didático da última etapa do MDA (GALAGOVSKY; ADÚRIZ-BRAVO, 2001). Os autores concluem dizendo que o uso de diferentes tipos de representação do conhecimento tende a favorecer a visualização de conceitos abstratos.

- **Modelo Computacional**

De forma sucinta, num processo de modelagem computacional, também chamado de modelação, chega-se a um modelo computacional, ou seja, um modelo criado com o uso do computador. De acordo com Veit e Araújo (2010 apud MOREIRA, 2014, p. 10), “a modelagem computacional é um dos pilares fundamentais do desenvolvimento científico atual”. Segundo Moreira (2014, p. 10), “o termo modelagem computacional, em geral, está associado à computação voltada para a elaboração de sistemas computacionais de problemas complexos oriundo das mais diversas áreas do conhecimento”.

Camiletti e Ferraciolo (2002), denominam o processo de elaboração de um modelo computacional, e sua representação em um Ambiente de Modelagem Computacional, como sendo um Processo de Construção do Modelo. Para tanto, propuseram sete passos básicos para o desenvolvimento deste processo:

- A definição do sistema a ser estudado;
- Escolha do fenômeno de interesse a ser estudado no sistema escolhido;
- Listagem das variáveis relevantes para a construção do modelo;
- Construção do modelo através de Diagramas Causais;
- Representação do modelo no ambiente de modelagem computacional escolhido;
- Simulação do modelo construído;
- Validação do modelo a partir da análise de seu comportamento em relação ao comportamento esperado do fenômeno em estudo. (CAMILETTI; FERRACIOLO, 2002. p. 114).

De acordo com os autores, um ambiente de Modelagem Computacional pode possibilitar ao aluno a ampliação de sua capacidade em formular

perguntas e não simplesmente em encontrar respostas (CAMILETTI; FERRACIOLO, 2002. p. 111).

- **Modelo Científico na Matemática – Modelo Matemático**

Assim como na Modelagem Computacional se obtém um modelo computacional “o processo que leva de uma situação problema a um modelo matemático é chamado modelagem matemática” (CURY, 2003, p. 5). A seguir, são apresentadas as definições de modelo matemático segundo alguns teóricos da área.

Bean (2012), entende modelo matemático como sendo,

[...] uma construção simbólica expressa principalmente na linguagem matemática, que se refere a algumas relações consideradas pertinentes a uma situação, de modo que o modelo auxilie na interpretação, compreensão e / ou tomada de decisão concernente a tal situação ou em outras situações, nas quais se considere adequado aplicar o modelo (BEAN, 2012, p. 5).

Almeida, Silva e Vertuan (2012), afirmam que um modelo matemático é uma representação simplificada da realidade e sua formulação visa a solução de problemas.

[...] um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

Bassanezi (1999, p.12), relaciona o modelo matemático a diversas áreas do saber, e ressalta que “um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno - este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceitual ou até mesmo um outro modelo matemático”.

Tendo em vista essas definições, vale ressaltar que um modelo matemático de um fenômeno não é o modelo do fenômeno, e sim uma interpretação específica dele, por meio de abstrações e delimitações. De acordo com Bassanezi (1999, p.13), “o modelo nunca encerra uma verdade definitiva, pois é sempre uma aproximação conveniente da realidade analisada e, portanto, sujeito a mudanças [...]”.

Outro ponto a ser destacado, é que o modelo matemático deve ser interpretado no domínio que se pretende estudar, ou seja, o modelo matemático de

um fenômeno físico deve ser interpretado fisicamente, e assim em outras áreas do conhecimento.

Após essa discussão a respeito de modelos, são apresentadas, a seguir, a Modelagem Matemática na Educação Matemática, no Ensino de Física e a Modelagem Matemática como uma estratégia didática.

3.2 Modelagem Matemática na Educação Matemática

De modo geral, a Modelagem Matemática tem por objetivo construir uma solução para um problema não matemático por meio da Matemática (BASSANEZI, 2004).

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), consideram que uma atividade de Modelagem Matemática se inicia a partir de uma situação problemática e tem como característica a possibilidade de abordar assuntos do cotidiano, “caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”.

Biembengut (2009, p. 7), define “o termo ‘modelagem matemática’ como processo para descrever, formular, modelar e resolver uma situação-problema de alguma área do conhecimento” e destaca que tal definição encontra-se, já no início do século XX, na literatura de Engenharia e Ciências Econômicas, por exemplo.

Segundo Bassanezi (2004, p.16), “a Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Chaves (2010), afirma que a Modelagem Matemática pode ser entendida como:

Um processo que consiste na tradução/organização de situações/problemas, provenientes do cotidiano ou de outras áreas do conhecimento, segundo a linguagem simbólica da Matemática, fazendo aparecer um conjunto de símbolos ou relações matemáticas – Modelo Matemático – que procura representar ou organizar a situação/problema proposta, com vistas a compreendê-la ou solucioná-la (CHAVES, 2010, p. 2).

Almeida e Brito (2005, p. 487), entendem a Modelagem Matemática como “uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático” e ressaltam que ela “pode criar condições para discutir

e questionar este poder de formatação da matemática, tornando visível a importância que a Matemática tem para a sociedade” (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 488).

A Modelagem Matemática é entendida como um processo. Autores que trabalham com a Modelagem Matemática formularam diversas etapas que compreendem o processo de modelagem. Em geral, são compostos por uma etapa de conhecimento do problema e seus dados, uma etapa referente à matematização, ou à construção do modelo matemático, e finalmente à validação do modelo final. De acordo com Ferri (2006, p. 86, tradução nossa), essas etapas ou ciclos são diferentes, “porque eles são dependentes de várias direções e abordagens de como a modelagem é compreendida e, em alguns casos, se tarefas complexas ou não complexas são usadas”. Apresenta-se, a seguir, algumas dessas diferentes etapas.

Segundo Biembengut e Hein (2000), a Modelagem Matemática consiste em um processo composto por três etapas, sendo essas: interação, matematização e modelo.

Etapa 1: Interação

Num primeiro momento é importante que se reconheça a situação-problema, bem como se levante o referencial teórico relativo ao assunto que será modelado. Esta etapa não termina com o início da próxima, visto que a situação-problema torna-se mais clara à medida que se interage com os dados.

Etapa 2: Matematização

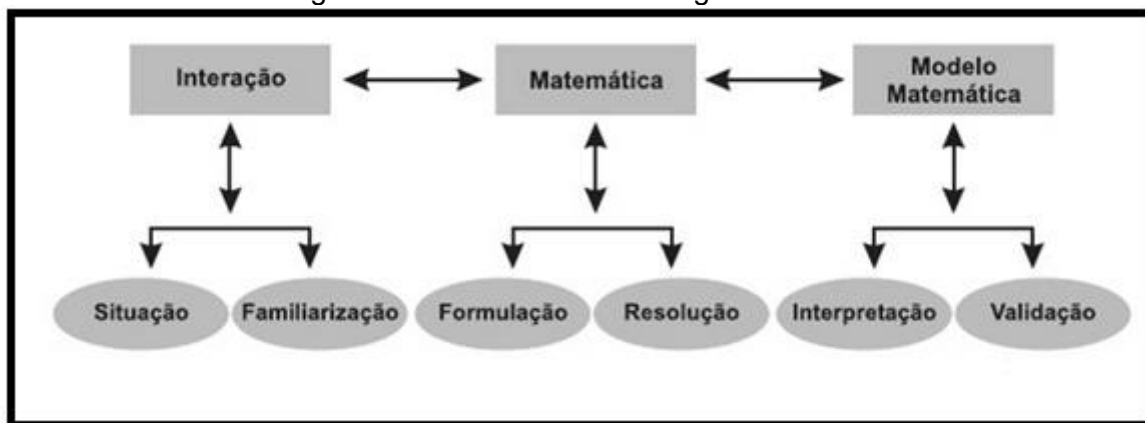
É uma etapa desafiante e complexa, pois é nela que se expressa o problema em linguagem matemática. Nesta etapa identificamos os fatos envolvidos, classificando as informações como relevantes ou não. Levantamos as hipóteses, selecionamos variáveis e constantes envolvidas e descrevemos as relações em termos matemáticos. Após a formulação do problema, passamos à resolução ou à análise com as ferramentas matemáticas disponíveis. Esta etapa exige um conhecimento considerável dos objetos matemáticos e muitas vezes o uso do computador pode-se tornar imprescindível.

Etapa 3: Modelo Matemático

Para concluir e validar o modelo é necessário avaliar e definir o quanto ele se aproxima da situação-problema representada, bem como o grau de confiabilidade de sua utilização (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 13-15).

A figura que se segue sintetiza o processo de Modelagem Matemática, proposto por Biembengut e Hein (2000).

Figura 4 – Processo de Modelagem Matemática.



Fonte: Biembengut e Hein (2000, p. 15).

Bassanezi (2002), propõe um esquema simplificado chamado de “atividades intelectuais da Modelagem Matemática”, sendo composto por cinco etapas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

1- **Experimentação** – É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados.

2- **Abstração** – É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer:

a) Seleção das variáveis.

b) Problematização ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando.

c) Formulação de hipóteses.

d) Simplificação.

3- **Resolução** – O modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente.

4- **Validação** – É o processo de aceitação ou não do modelo proposto.

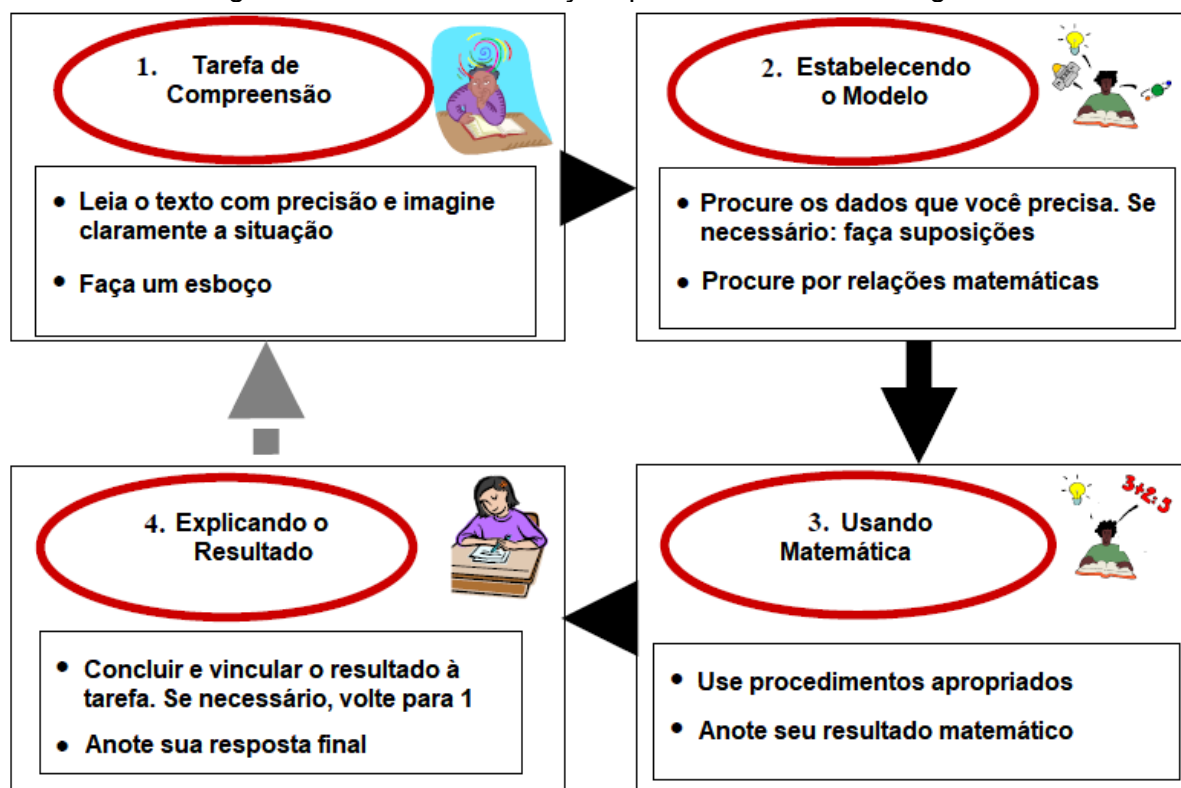
5- **Modificação** – Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos (BASSANEZI, 2002, p. 26 - 30).

Etapas semelhantes, no processo de Modelagem Matemática, são propostas por Chaves (2010, p.3), sendo elas: “interação, levantamento de hipóteses/conjecturas, seleção de variáveis, ‘tradução’ da situação-problema para a linguagem matemática e validação – testagem do Modelo ou da solução obtida”.

Blum e Ferri (2009, 46-47, tradução nossa) sintetizam o processo de Modelagem Matemática afirmando que inicialmente a situação problema, ou atividade em questão, deve ser entendida pelo modelador “[...] isto é, um modelo de situação tem que ser construído. Então, a situação deve ser simplificada, estruturada e mais precisa, levando a um modelo real da situação”. Segundo os autores, para

estudantes, o esquema, a seguir, de quatro passos parece ser mais apropriado.

Figura 5 - O "Plano de Solução" para tarefas de modelagem.



Fonte: Blum e Ferri (2009, p. 54, tradução nossa).

Tendo em vista o conceito e a definição de Modelagem Matemática na Educação Matemática, no item a seguir é feita uma reflexão a respeito da Modelagem Matemática como estratégia didática.

3.3 Modelagem Matemática como Estratégia Didática

Cury (2003) caracteriza a Modelagem Matemática como uma estratégia didática que por meio de um ensino contextualizado e interdisciplinar, em que problemas da realidade são transformados em modelos matemáticos, favorece o ensino e a aprendizagem. Tal abordagem pode ser utilizada tanto com alunos como para a formação de professores.

Para Bassanezi (1999, p.13) “o desafio do professor, que toma o caminho da modelagem como método de ensino, é ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas, cada etapa do processo”.

Segundo Gazzetta (1989, p.29), “a estratégia da Modelagem, ou seja, o caminho da criação do modelo, é o processo mediante o qual se definem as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade”.

Bassanezi (2002, p. 17), ressalta que a Modelagem Matemática motiva seu usuário tanto à medida que ele procura entender a realidade quanto na busca de meios para agir e transformar esta realidade, “nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão”.

Almeida, Silva e Vertuan (2012), apresentam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação problema. Segundo os autores, atividades conduzidas de acordo com esta alternativa apresentam as seguintes características fundamentais:

- a) Envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo;
- b) Envolve a representação e manipulação de objetos matemáticos;
- c) É direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.17).

Para os autores supracitados, atividades de Modelagem Matemática com tais características, constituem-se em atividades investigativas em que o “aluno modelador” se envolve em ações cognitivas.

De acordo com Bassanezi (2002, p. 32 - 33), a Modelagem Matemática, enquanto estratégia didática, tem as seguintes características:

- *Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais*: o aluno é estimulado a pensar em novos caminhos e estratégias para experimentar o fenômeno estudado.

- *Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos*: quando deparados com um certo problema, são levantadas hipóteses prévias a respeito do mesmo, por meio da Modelagem Matemática podem-se obter diferentes informações ou hipótese, levando o aluno a, muitas vezes, percorrer caminhos não previstos pelo professor.

- *Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões*: há a liberdade de se fazer aproximações, como interpolações lineares de um certo problema a ser modelado, ou mesmo fazer extrapolações prevendo comportamentos futuros.

- *Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão*: em um dado problema da realidade, é possível, por meio de planejamento dos passos a serem dados, elencar prioridades e propor decisões e/ou soluções para o problema.

- *Pode preencher lacunas onde existam falta de dados experimentais*: por meio da criatividade, interpolação, extrapolação e analogias.

- *Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade*: por meio da contextualização e do caráter investigativo, o aluno entende melhor a realidade que o cerca e consegue fazer maior conexão com os conceitos vistos na teoria.

- *Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento*: pesquisadores das diversas áreas são capazes de entender o processo de construção do conhecimento e podem, a partir de um mesmo problema, abordar as diferentes áreas de conhecimento envolvidas.

Blum e Ferri (2009) discutem a importância da Modelagem Matemática para os alunos, segundo os autores modelos matemáticos estão em toda a parte e a Modelagem Matemática pode:

- Ajudar os alunos a entender melhor o mundo,
- Apoiar a aprendizagem de Matemática (motivação, formação de conceitos, compreensão e retenção);
- Contribuir para desenvolver várias competências matemáticas e atitudes apropriadas,
- Contribuir para uma imagem adequada da Matemática (BLUM; FERRI, 2009, p. 47, tradução nossa).

Esses dados corroboram com os autores que defendem a Modelagem Matemática como estratégia didática, visto que a mesma proporciona discussão dos problemas a serem modelados e a ação dos indivíduos no processo de modelagem.

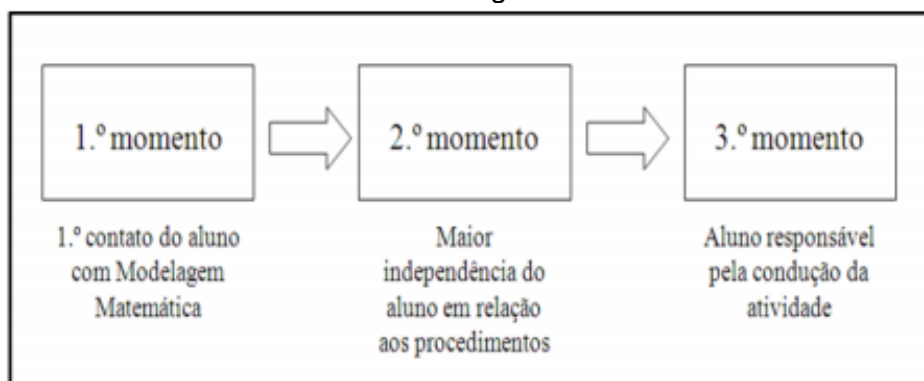
Uma questão relevante é: como inserir os estudantes na Modelagem Matemática? Almeida e Vertuan (2011, p. 27), ressaltam que o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica requer a articulação entre “definição, investigação e resolução”, sendo que a familiarização do aluno com a Modelagem pode ser feita de forma gradativa, caracterizada em três diferentes “momentos”.

1º Momento - Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que as ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.

2º Momento - Posteriormente, em um segundo momento, uma situação é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

3º Momento - Finalmente, no terceiro momento, os alunos divididos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; VERTUAN, 2011, p. 27-28).

Figura 6 – Diferentes momentos da Modelagem Matemática na sala de aula.



Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p.28).

Segundo Almeida e Vertuan (2011), essa familiarização gradativa não é uma prescrição rigorosa, mas tem se mostrado adequada em diversos estudos realizados.

No que diz respeito à escolha das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, Kaiser e Sriraman (2006, p. 304) elaboraram seis perspectivas para

a Modelagem Matemática cujo objetivo é promover atividades na sala de aula, sendo elas: realística, contextual, educacional, sócio-crítica, epistemológica e cognitivista.

A perspectiva realística ou aplicada, possui objetivos pragmáticos e utilitários, ou seja, resolver problemas do mundo real; já a Modelagem contextual tem objetivos psicológicos e relacionados ao assunto, ou seja, com a finalidade de contextualizar.

A modelagem na perspectiva educacional possui objetivos pedagógicos e é dividida entre a) modelagem didática, que visa a estruturação dos processos de aprendizagem e sua promoção, e b) modelagem conceitual, que tem por objetivo a introdução e desenvolvimento do conceito.

Na perspectiva sócio-crítica, os objetivos pedagógicos são voltados para a compreensão crítica do entorno e as atividades de modelagem contribuem para o exercício da cidadania. Na outra perspectiva, a epistemológica, os objetivos são orientados para a teoria, ou seja, para a promoção do desenvolvimento teórico.

Por fim, a perspectiva cognitivista tem objetivos de pesquisa que visam a análise e compreensão dos processos cognitivos ocorrendo durante a modelagem e possui também objetivos psicológicos, que visam a promoção de processos de pensamento matemático usando modelos como imagens mentais ou até imagens físicas ou enfatizando a modelagem como processo mental, como abstração ou generalização.

Diante das definições dessas perspectivas, pode-se considerar que em uma atividade de Modelagem Matemática diferentes perspectivas estão presentes, e não necessariamente apenas uma.

3.4 Modelagem Matemática no Ensino de Física

A Modelagem Matemática, por ter um caráter abrangente e poder de síntese, pode ser utilizada em outras Ciências, como Física, Química ou Biologia por exemplo (BASSANEZI, 2002).

Como já discutido anteriormente, muitos estudantes têm dificuldade em disciplinas de Física, por acharem muito difícil, por ter muitas fórmulas e por não conseguirem correlacionar os conceitos científicos ensinados com elementos do seu

cotidiano. Atividades de Modelagem Matemática são uma alternativa para mudar este cenário.

A introdução de modelagem no processo ensino/aprendizagem tende a desmitificar esta imagem da Física, possibilitando uma melhor compreensão do seu conteúdo e contribuindo para o desenvolvimento cognitivo em geral, pois modelagem facilita a construção de relações e significados, favorecendo a aprendizagem construtivista [...] (VEIT; TEODORO, 2002, p. 88).

Há algumas pesquisas que abordam conceitos físicos por meio da Modelagem Matemática. Após um levantamento bibliográfico em revistas da área de ensino, em que buscou artigos brasileiros que continham em seu título ou palavras-chaves, as palavras Modelagem Matemática e Física (ou Ensino de Física, ou qualquer conteúdo físico), foram encontrados alguns artigos, dentre eles destacamos seis no quadro a seguir.

Quadro 5 – Levantamento Bibliográfico.

<p>Artigo: A Modelagem Matemática Aplicada ao Ensino de Física no Ensino Médio Autor: Cláudia de Oliveira Lozada; Mauro Sérgio Teixeira de Araújo; Wagner Morrone; Luiz Henrique Amaral Revista: LOGOS, n. 14 Ano de publicação: 2006 Palavras-Chave: Matemática, Educação Matemática, Modelos Matemáticos, Ensino de Física.</p>
<p>Artigo: A Modelagem Matemática Através de Conceitos Científicos Autor: Helisângela Ramos da Costa Revista: Ciências & Cognição; Vol. 14 (3): 114-133 Ano de publicação: 2009 Palavras-Chave: modelagem matemática; aprendizagem significativa; conceitos científicos.</p>
<p>Artigo: A Modelagem Matemática e a Experimentação Aplicadas ao Ensino de Física Autor: Luís da Silva Campos e Mauro Sérgio Teixeira de Araújo Evento: ENPEC – Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ISSN: 21766940) Ano de publicação: 2009 Palavras-Chave: Modelagem Matemática, Ensino de Física, atividades experimentais, Métodos Científicos.</p>
<p>Artigo: Uma Experiência com Modelagem Matemática para a Abordagem de Conceitos de Física Autor: Ednilson Sergio Ramalho de Souza Revista: Acta Scientiae, Canoas, v. 14, n.2, p.309-325 Ano de publicação: 2012 Palavras-Chave: Modelagem Matemática. Possibilidades. Ensino de Física.</p>
<p>Artigo: Unificando Modelos de Dinâmica Populacional por Primeiros Princípios.</p>

Autor: Fabiano L RIBEIRO.

Revista: Rev. Bras. Ensino Fís. [online]. vol.39, n.1, e1311

Ano de publicação: 2017

Palavras-Chave: Crescimento Populacional; Sistemas Complexos; Modelagem Matemática.

Artigo: Estudo da Relação entre o Movimento Circular Uniforme e o Movimento Harmônico Simples Utilizando a Videoanálise de uma Roda de Bicicleta

Autor: E. S. Silva

Revista: Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 2, e2301

Ano de publicação: 2018

Palavras-Chave: MCU; MHS; Videoanálise; Modelagem matemática.

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 5, pode-se destacar que dentre os seis artigos relacionados, um deles foi aplicado no Ensino Médio, outro apresenta uma proposta que pode ser utilizada tanto no 3º ano do Ensino Médio quanto em cursos de nível superior, dois foram aplicados no Nível Superior, em cursos de Matemática e dois são artigos teóricos. Dentre os assuntos abordados tem-se: modelos matemáticos, limite e continuidade, Cinemática, Termodinâmica, Dinâmica e modelos fenomenológicos de crescimento populacional. As metodologias utilizadas pelos artigos que apresentavam uma abordagem foram: Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a Teoria dos Modelos Mentais, Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel e pesquisa-ação.

Esta pesquisa se insere neste cenário, e visa contribuir com o Ensino de Física, tanto para o Ensino Médio, por meio das atividades elaboradas, quanto para o Ensino Superior, na formação de professores.

No próximo capítulo, é discutido especificamente a respeito do conceito de matematização, sendo que em diferentes domínios o termo possui diferentes conceituações.

4 MATEMATIZAÇÃO

A matematização é um conceito importante a ser discutido na formação inicial e pouco explorado no Ensino de Ciências. Há quem entenda a matematização como um processo de tradução ou transcrição de linguagens, e há quem compreenda a matematização como parte fundamental no processo de construção do conhecimento.

Neste capítulo, é apresentada uma visão geral a respeito da matematização e seus diferentes significados na Modelagem Matemática e na Física.

4.1 Visão Geral

Durante a revisão bibliográfica, identificou-se que não há muitos trabalhos que abordem especificamente o tema “matematização”. Dentre os artigos e livros encontrados, apresentam-se as definições de matematização segundo alguns autores.

Treffers e Goffree (1985, p. 100), conceituam a matematização como “uma atividade de organização e estruturação por meio da qual se adquire conhecimentos e habilidades para descobrir regularidades, conexões, e estruturas ainda desconhecidas”.

Para Luccas e Batista (2011, p. 456), matematização consiste na “atividade matemática que possibilita a organização e a estruturação dos fenômenos naturais pertencentes à realidade complexa, por meio de uma identificação de regularidades, padrões, relações e, posteriormente, estruturas matemáticas”.

Segundo Roux (2001, p. 3, tradução nossa), “[...], a ‘matematização’ refere-se à aplicação de conceitos, procedimentos e métodos desenvolvidos em matemática para os objetos de outras disciplinas ou, pelo menos, de outros campos do conhecimento”.

Pietrocola (2002, p. 93), ao discutir o papel da Matemática na Física, diz que a matematização “se configura como uma ‘tradução matemática’, onde o cientista seria o tradutor pela sua capacidade de transitar entre os dois ‘idiomas’: da natureza e da Matemática”. Pietrocola e Silva (2003), referem-se à geometria como sendo a linguagem preferencial do mundo, ao ressaltarem que:

[...] a escolha da Matemática enquanto veículo estruturador da ciência reside, entre outras coisas, nas suas características de precisão, universalidade e principalmente lógica dedutiva (possibilidade de previsibilidade). Bachelard já afirmava que a força da Matemática reside no fato dela ser “um pensamento seguro de sua linguagem” (PIETROCOLA; SILVA, 2003, p. 3).

O movimento conhecido como Educação Matemática Realística (RME, do inglês *Realistic Mathematics Education*), que tem como precursor o matemático Hans Freudenthal(1905-1990), originou na Holanda no final da década de 1960 (TREVISAN; BURIASCO, 2015). A Educação Matemática Realística entende “matemática como uma atividade natural e social cuja evolução acompanha a do indivíduo e a das necessidades de um mundo em expansão” (TREVISAN; BURIASCO, 2015, p.167). Hans Freudenthal, define matematização como sendo a “organização da realidade com significado matemático” (1973 *apud* LUCAS; BATISTA, 2011 p. 455).

Na RME, a matematização é sistematizada em duas componentes: a horizontal e a vertical.

Segundo Silva e Almeida (2014, p. 24), “a matematização horizontal diz respeito ao processo de descrever uma situação matemática utilizando ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema”. De acordo com Rico (2007) a matematização horizontal envolve atividades como:

- identificar a matemática relevante num contexto geral
- levantar questões
- enunciar problemas
- representar o problema de uma maneira diferente
- compreender a relação entre a linguagem natural, a linguagem simbólica e formal
- encontrar regularidades, relações e padrões
- reconhecer isomorfismos com problemas conhecidos
- traduzir o problema em um modelo matemático
- utilizar ferramentas e recursos adequados (RICO, 2007, p. 51).

Já a matematização vertical “consiste em procedimentos relativos à própria matemática e, neste caso, é que se estabelecem as relações entre conceitos, as estratégias e ocorre a elaboração e/ou a reconstrução de representações matemáticas para situações não matemáticas” (SILVA; ALMEIDA, 2014, p. 25). A matematização vertical é composta por etapas, tais como:

- usar diferentes representações;
- usar a linguagem simbólica, formal, técnica e suas operações;
- refinar e ajustar os modelos matemáticos; combinar e integrar modelos;
- argumentar e generalizar (RICO, 2007, p. 51).

Rico (2007) ressalta que a última etapa do processo de matematização implica em uma reflexão a respeito do processo de construção do modelo matemático e da validação do mesmo.

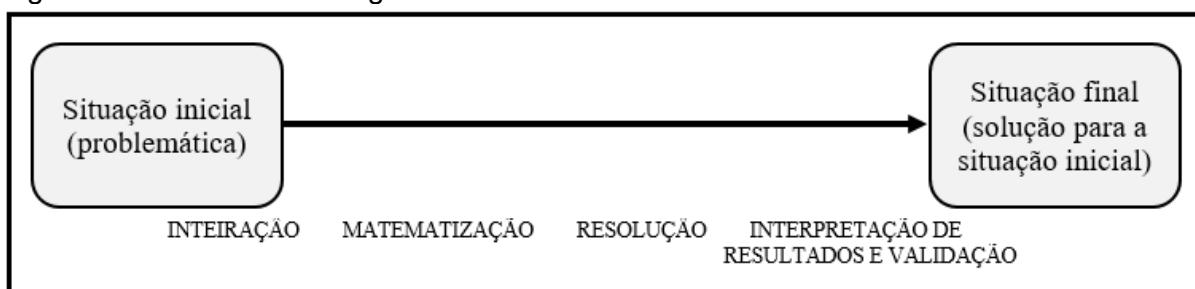
Dekker e Querelle (2002, p. 19), afirmam que para resolver um problema, primeiro, na matematização horizontal, os alunos devem encontrar a matemática específica em um contexto geral. Após a construção do modelo, na matematização vertical, o aluno deverá refinar seu modelo.

4.2 Matematização na Modelagem Matemática

Como já apresentado no capítulo anterior (item 3.2), a matematização é uma das etapas da Modelagem Matemática. A maioria dos autores referem-se especificamente ao termo “matematização”, porém, alguns indicam o mesmo procedimento, mas nomeiam esta etapa de maneiras diferentes. Nesta seção, são apresentadas as definições de matematização oferecidas por autores da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), argumentam que uma atividade de Modelagem Matemática é composta por cinco fases relativas ao “conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação problema”. Tais fases estão apresentadas na figura a seguir.

Figura 7 – Fases da Modelagem Matemática

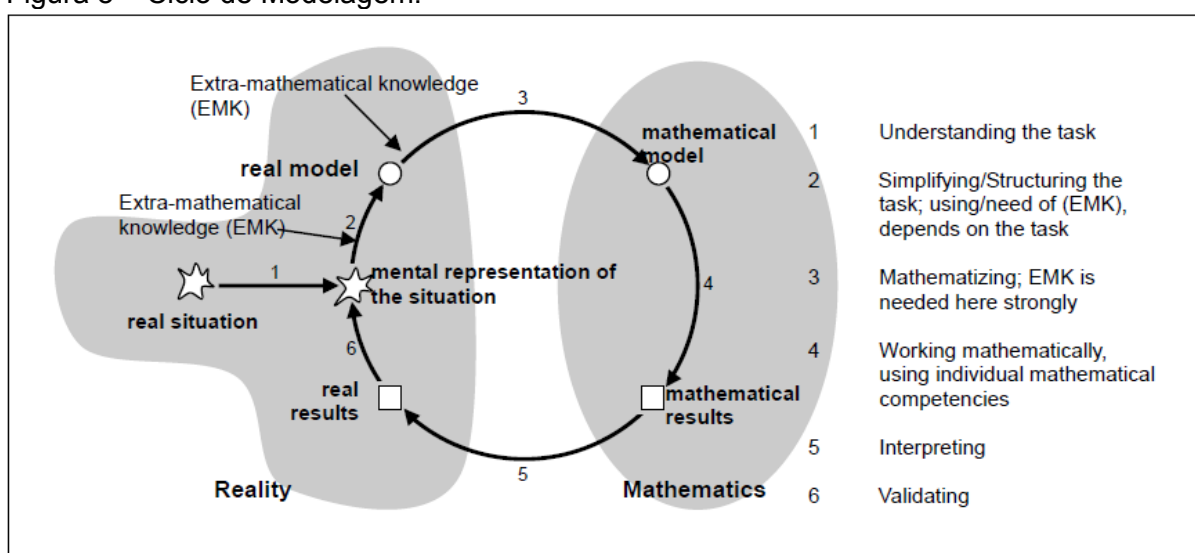


Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15).

De acordo com os autores, a situação problemática apresenta uma linguagem natural o que gera a necessidade de transformação em uma linguagem matemática, sendo assim, a fase “Matematização” é caracterizada como um “processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Ferri (2006, p. 92, tradução nossa), apresenta um ciclo de Modelagem Matemática composto por seis etapas, sendo elas: 1) compreensão da tarefa; 2) simplificação/ estruturação da tarefa; 3) matematização; 4) trabalho matemático; 5) interpretação e 6) validação.

Figura 8 – Ciclo de Modelagem.



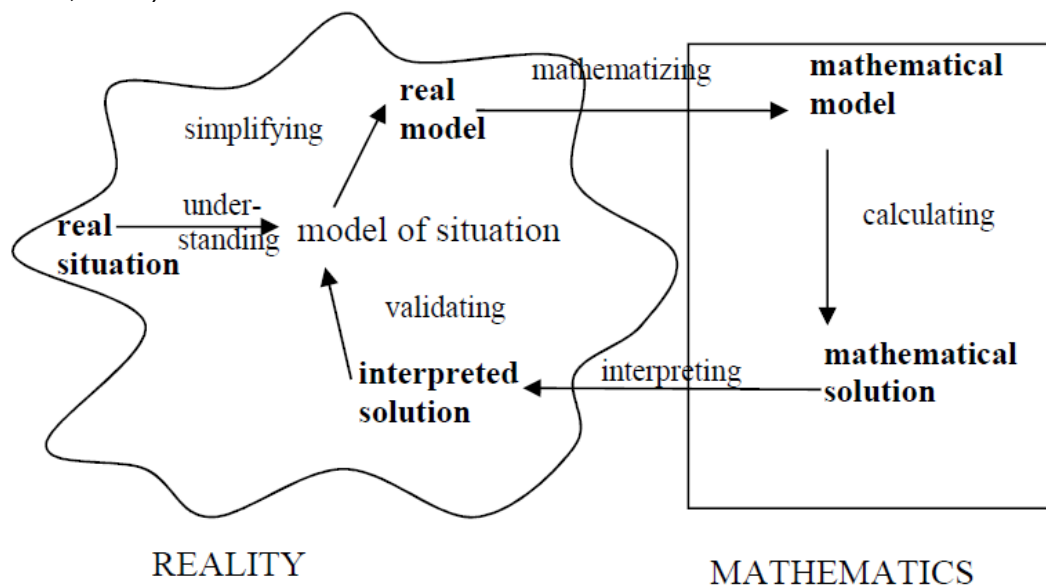
Fonte: Ferri (2006, p. 92).

Para a autora, a etapa “Matematização” é caracterizada como sendo a transição do modelo real para o modelo matemático, e se faz de forma progressiva, ou seja, vai se aperfeiçoando durante o desenvolvimento da atividade (FERRI, 2006, p.92).

Em consonância com Ferri (2006), Micho e Maaß (2012, p. 4, tradução nossa), definem as seguintes etapas do processo de Modelagem Matemática: 1) compreensão das instruções e da situação real (modelo de situação); 2) fazer suposições e simplificar o modelo da situação (modelo real); 3) matematização do modelo real (construção de um modelo matemático); 4) trabalhando o modelo matemático (solução matemática); 5) interpretando a

solução; 6) validando a solução interpretada. Essas etapas estão apresentadas na figura que se segue.

Figura 9 - Um esquema idealizado do processo de modelagem (de acordo com Blum & Leiss, 2005).

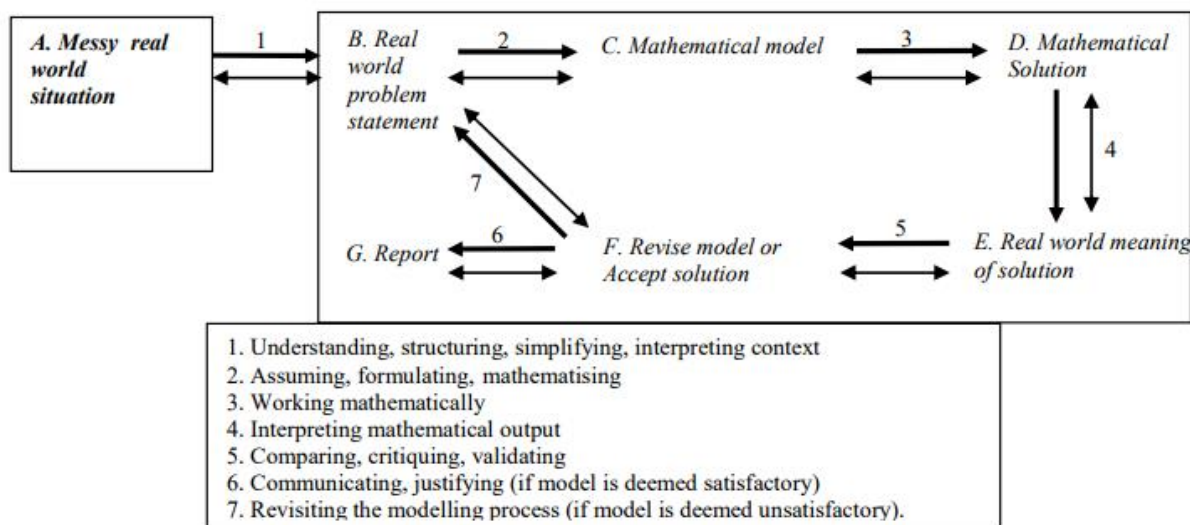


Fonte: Micho e Maaß (2012, p. 4)

Para Micho e Maaß (2012, p. 8), na etapa “Matematização” o modelo real deve ser transformado em um modelo matemático que consiste em variáveis matemáticas e relações numéricas. Por essa razão, requer do aluno competência matemática, no sentido da capacidade de resolver tarefas de cálculo, ou seja, os conceitos matemáticos envolvidos na atividade devem estar adequados aos alunos.

Galbraith e Stillman (2006, p. 144, tradução nossa), também apresenta um ciclo de Modelagem Matemática, composto por sete etapas, sendo elas: 1) entendendo, estruturando, simplificando, interpretando o contexto; 2) assumindo, formulando, matematizando; 3) trabalhando matematicamente; 4) interpretando a saída matemática; 5) comparando, criticando, validando; 6) comunicando, justificando (se o modelo for considerado satisfatório) e 7) revisitando o processo de modelagem (se o modelo for considerado insatisfatório).

Figura 10 – Processo de Modelagem.



Fonte: Galbraith (2012, p 10).

Segundo os autores, a “Matematização” refere-se à etapa 2, em que um problema do mundo real é transformado em um modelo matemático. Um ponto a ser destacado é o fato de os autores apresentarem este processo de forma não linear, e justifica que a “referência de ida e volta para a declaração do problema do mundo real é essencial na concepção de um modelo matemático que capture as características necessárias; dentro da transição” (GALBRAITH; STILLMAN, 2006, p. 144).

Bassanezi (2002), ao apresentar sua sequência de etapas para a Modelagem Matemática, não faz menção ao termo “Matematização”, sendo elas: 1) experimentação; 2) abstração; 3) resolução; 4) validação e 5) modificação. Mas, por meio das definições apresentadas pelo autor, pode-se compreender que a etapa “abstração” corresponda à matematização. Bassanezi (2002, p. 27) define a etapa abstração como sendo “o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos”, em que, neste procedimento, é preciso selecionar as variáveis; problematizar, ou seja, indicar o que exatamente se pretende resolver; formular hipóteses e fazer simplificações, recortes da situação problema, a fim de minimizar a complexidade que por vezes impede o estudo.

Tendo em vista as diversas definições de matematização, na Modelagem Matemática, Almeida e Silva (2015, p. 216), sintetizam ao afirmarem que “se por um lado, matematizar significa, na Modelagem Matemática, transitar do mundo da vida para o mundo dos símbolos matemáticos, por outro lado o uso destes

símbolos se dá mediado pelo conhecimento matemático e extramatemáticos” e que a matematização “define como a relação entre o fenômeno e a matemática vai ser realizada na atividade (ALMEIDA; SILVA, 2015, p. 224- 225).

Assim, conclui-se que, na Modelagem Matemática, a transição do modelo real para o modelo matemático se dá por meio da matematização, em um processo em que seus dados, conceitos, relações, condições e premissas devem ser traduzidos em linguagem matemática (BLUM; NISS, 1991).

4.3 Matematização na Física

A discussão a respeito do uso da Matemática nas Ciências Naturais é bem antiga, Platão e Aristóteles já discutiam acerca desta temática, Platão defendia o uso da Matemática, já Aristóteles rejeitava a ideia de se utilizar Matemática em fenômenos naturais.

Se alguém reivindica para as matemáticas uma posição superior, se lhes atribui um real valor e uma posição decisiva na física, trata-se de um platônico. Pelo contrário, se alguém vê nas matemáticas uma ciência abstrata e, portanto, de menor valor do que aquelas – físicas e metafísicas – que tratam do ser real; se, em particular, alguém sustenta que a física não precisa de nenhuma outra base senão da experiência e deve edificar-se diretamente sobre a percepção, que as matemáticas devem contentar-se com o papel secundário e subsidiário de simples auxiliar, trata-se de um aristotélico (KOYRÉ, 1982, p. 167).

Segundo Koyré (1982, p. 54), “Galileu talvez seja o primeiro espírito a acreditar que as formas matemáticas eram efetivamente realizadas no mundo”. Galileu utilizava a geometria para representar fenômenos físicos. Desde seus primeiros trabalhos, em Pisa, Galileu tinha um objetivo determinado: “o de matematizar a Física” (KOYRÉ, 1986, p. 122). Para mostrar quantitativamente o Movimento Uniformemente Acelerado, por exemplo, Galileu utilizou a seguinte metodologia:

Escolhe a precisão como princípio, afirma que o real é geométrico por essência e, portanto, submetido à determinação e à medida rigorosas [...]; descobre e formula (matematicamente) leis que permitem deduzir e calcular a posição e a velocidade de um corpo em cada ponto de sua trajetória e em cada instante de seu movimento (KOYRÉ, 1982, p. 276).

Segundo Geymonat (1997), Galileu iniciou seus próprios estudos matemáticos ao investigar o isocronismo das oscilações pendulares, em que o período de oscilação de um pêndulo é independente da sua amplitude (para pequenas oscilações apenas); o autor também ressalta a relação entre Galileu e a Matemática e expressa o processo de matematização utilizado por ele em sua obra.

Também em Galileu a paixão pela Matemática não será jamais separada do interesse pela observação, a medida e o desenho: a matemática já lhe parecia, desde o início, um instrumento poderosíssimo para conhecer a natureza, para captar seus segredos mais íntimos, para traduzir os processos naturais em discursos precisos, coerentes, rigorosamente verificáveis (GEYMONAT, 1997, p. 8).

De acordo com Paty (1995, p. 234), para os antigos a relação entre a Matemática e a Física era essencialmente uma relação analógica, e que esta visão mudou com Galileu “no sentido que a Matemática intervém, não por intermédio de um simples revestimento de uma forma ideal sobre os fatos de observação, mas é retomada pelo próprio pensamento da física na construção de uma forma teórica.”

A matematização na Física não é uma simples tradução de linguagens. Batista (2004) comenta, que entendido como processo epistemológico na Ciência, a matematização fica bem caracterizada como uma etapa imbricada em métodos hipotético-dedutivos, em que ela atua como forma de expressão, linguagem e raciocínio interpretativos de fenômenos naturais.

De acordo com Paty (1995, p. 236), “em sua utilização na Física, a Matemática pode ser concebida como um instrumento que constrói, ou que isola estruturas – não como uma linguagem que traduz”, e que “a Matemática e a Física têm uma ligação de constituição, aliás recíproca”.

A constituição progressiva da física matemática substitui essa “tradução matemática” da natureza por uma mediação física propriamente dita, isto é, a elaboração explícita de conceitos físicos pensados matematicamente: **sendo a matematização concebida como inerente aos conceitos**, constitutiva desses, que serve para construí-los. (PATY, 1995, p. 234 – grifo nosso).

Em um processo de matematização, não se pode ter uma visão ingênua de que existe uma relação biunívoca entre os entes matemáticos e a realidade.

Pensar que, no raciocínio intermediário de tipo matemático, cada termo e cada relação tenha necessariamente uma transcrição física, significaria colocar em princípio que as entidades matemáticas são mais reais que a própria realidade física – o que nos levaria a uma ontologia pitagórica -, e considerar que a lógica tem, por si mesma, esse poder de engendrar novas propriedades, dos objetos físicos. (PATY, 1995, p. 255).

Outra importância da Matemática na Física é a precisão, e “essa precisão aparece justamente como a marca da implicação matemática na construção das teorias físicas” (PATY, 1995, p. 235). Porém, por si só, a Matemática não informa nada a respeito dos fenômenos físicos. Einstein (1928), ressaltou que “por mais que as proposições matemáticas se refiram à realidade, não são certas, e por mais que sejam certas, não se referem à realidade” (*apud* PATY, 1995, p. 236).

Mas, como a Matemática pode então descrever um fenômeno natural? Goodman (1991) explica tal indagação.

É característico da linguagem matemática que tenta ser completamente transparente e, assim, possibilitar grandes cadeias de raciocínio. Quando descrevemos uma situação física matematicamente, então, para onde a imprecisão vai? Não pode simplesmente desaparecer, pois isso envolveria dar uma descrição exata de uma situação real, o que quase nunca é possível. A resposta é que a imprecisão entra na palavra “aproximadamente”. Dizemos que a equação diferencial que escrevemos “aproximadamente descreve” ou “aproximadamente modela” o processo físico que estamos discutindo. Nós não dizemos, porque não podemos dizer, exatamente de que forma ou exatamente até que ponto a equação diferencial não descreve o processo físico (GOODMAN, 1991, p. 123, tradução nossa).

Assim, a Matemática, e por sua vez a matematização, estão presentes na construção das teorias físicas.

A teoria física, com efeito, funda-se, não só numa matematização de seus conceitos, mas, de uma maneira mais global, numa substituição: substitui as determinações complexas e ainda desconhecidas do real, que se oferece na observação experimental por um conjunto de princípios; sobre os alicerces destes, a teoria desenrolará seus encadeamentos: eles lhe servirão de quadro formal e de protocolo metodológico (PATY, 1995, p. 248).

Batista (2004, p. 468), ao discutir os modelos na investigação Física, ressalta que “a matematização da Física exerce um papel inquestionável para o

alcance e a estabilidade de suas teorias, contribuindo para a sua cognoscibilidade, intersubjetividade e universalização”. E acrescenta:

O formalismo matemático, desse modo, é capaz de dar não somente um esquema de cálculo para estudos quantitativos de um fenômeno de natureza qualitativa desconhecida, como também de descrever essa própria natureza qualitativa para a qual nenhum método consistente de solução quantitativa da equação apropriada ainda existe (BATISTA, 2004, p. 469).

Diante do exposto, entende-se que a matematização é um processo na construção de um conhecimento científico, ou seja, um processo de tradução entre linguagens, adaptação e transformação para que haja um permeamento entre diferentes domínios do conhecimento. Sendo assim, falar a respeito da matematização é falar acerca da epistemologia (MENDES; BATISTA, 2016). E conclui-se que a Matemática tem um papel estruturante e organizador, que possibilita identificar regularidades a fim de prever fenômenos.

A seguir, apresenta-se uma discussão a respeito do tema escolhido para a abordagem didática proposta.

4.3.1 Discussão da 2ª Lei de Newton

Dentre inúmeros assuntos relevantes na Física, optou-se em abordar o conceito da 2ª Lei de Newton por ser um modelo científico, por ser um assunto abordado no Ensino Médio e pelo fato de ser um assunto pouco explorado em atividades de Modelagem Matemática. A justificativa de ser um assunto estudado no Ensino Médio, refere-se ao fato de a escolha do público alvo desta pesquisa, serem alunos(as) do 1º ou 2º ano da graduação – Licenciatura ou Bacharelado em Física ou Matemática - ou seja, muitos ainda não terão tido contato com conceitos abordados no Ensino Superior, como derivadas e integrais.

Como material de apoio para esta discussão, escolheu-se o “*Projeto Física*”, tradução do “*Project Physics Course*”, também conhecido como “Projeto Harvard”, organizado por Gerald Holton, James Rutherford (professores de física) e Fletcher Watson (educador), que apresenta uma abordagem histórica e epistemológica. Utilizou-se a Unidade 1 – “Conceitos de Movimento” e a Unidade 3 – “O Triunfo da Mecânica”.

O “*Project Physics Course*” foi baseado em ideias e resultados experimentais de um projeto curricular nacional dos Estados Unidos entre os anos de 1962 e 1970 intitulado, inicialmente, de “*Harvard Project Physics*”. Um número elevado de colaboradores, dentre eles físicos, astrônomos, químicos, historiadores, filósofos da Ciência, docentes, educadores de Ciências, psicólogos, especialistas em avaliação, engenheiros, artistas e projetistas, trabalharam durante mais de quatro anos na Universidade de Harvard em Cambridge – Massachusetts. Segundo os organizadores, o “*Harvard Project Physics*” teve três grandes objetivos: organizar um curso de Física com enfoque humanístico, atrair um maior número de alunos para o estudo da Física e conhecer mais a respeito dos fatores que influenciam a aprendizagem da Ciência. De acordo com o “*Harvard Project Physics*”, um curso de Física deveria:

- 1- Ajudar os alunos a aumentarem o seu conhecimento do mundo físico concentrando-o nas ideias que melhor caracterizam a física enquanto Ciência, em vez de os centrar em pedaços isolados de informação.
- 2- Ajudar os alunos a verem a Física como uma maravilhosa atividade com muitas facetas humanas.
- 3- Aumentar a oportunidade de cada aluno na participação em experiências de Ciência [...].
- 4- Tornar possível aos professores a adaptação do curso aos interesses e capacidades variados dos seus alunos.
- 5- Ter em conta a importância do professor no processo educativo no vasto espectro de situações de ensino. (HOLTON; RUTHERFORD; WATSON, 1985a, p. X).

Em consonância com os objetivos e ideais do “*Harvard Project Physics*”, e por se tratar de um material de Ciências fundamentado em princípios históricos e preocupado com as dimensões cultural e filosófica da Ciência, é que se escolheu o mesmo para este trabalho.

Antes de enunciar suas leis, Isaac Newton (1643 – 1727) em seu livro “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), publicado em 1687, enunciou definições, sendo algumas pertinentes ao entendimento da segunda lei, entre elas:

Definição I - “A quantidade de matéria é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume” (NEWTON, 2002, p. 39). A quantidade de matéria diz respeito à massa (m), que pode ser escrita atualmente como:

$$massa = densidade \times volume \rightarrow m = \rho \cdot V$$

Definição II - “A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria” (NEWTON, 2002, p. 40). A quantidade de movimento, também conhecida como momento linear pode ser escrita atualmente como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Para a variação de momento linear do corpo, tem-se atualmente:

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_i$$

Para massa constante, pode-se atualmente escrever:

$$\Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v}$$

Definição IV - “Uma força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo a fim de alterar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em uma linha reta” (NEWTON, 2002, p. 41).

Tendo em vistas estas definições, a Segunda Lei de Newton foi enunciada da seguinte maneira:

Lei II - “A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção na linha reta na qual aquela força é imprimida” (NEWTON, 2002, p. 54).

A equação da Segunda Lei de Newton, como apresentada nos livros didáticos, (força igual a massa vezes aceleração), foi introduzida apenas em 1736 pelo matemático Leonhard Euler. De acordo com Holton, Rutherford e Watson (1985a, p. 84), a Segunda Lei de Newton pode ser apresentada com a seguinte proposição: “A aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força não contrabalançada atuante sobre ele e tem a mesma direção que esta, e é inversamente proporcional à massa do objeto”.

As ideias expressas nesta proposição podem ser escritas na equação:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m}$$

Ou ainda:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$$

Pode-se também escrever esta lei em função da variação de momento linear do corpo. Sabendo que a aceleração é a taxa de variação da velocidade, em que:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Tem-se:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{res} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{res} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$$

Se a massa do corpo for constante, pode-se afirmar que “o produto da força resultante exterior aplicada a um corpo pelo intervalo de tempo durante o qual esta força atua é igual à variação do momento linear do corpo” (HOLTON; RUTHERFORD; WATSON, 1985b, p. 18). De forma simbólica, tem-se

$$\vec{F}_{res} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Expressando em terminologia moderna:

$$\vec{F}_{res} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A partir do exposto, pode-se fazer as seguintes considerações:

a) Quando a massa de um corpo é constante, a Segunda Lei de Newton pode ser representada sob a forma: $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$. Assim, segundo a sistematização de modelos de Batista (2004), pode-se classificar esta representação como sendo um modelo lógico-matemático-fenomenológico.

b) Entretanto, se estiver lidando com um corpo cuja massa varia com o tempo, então será preciso um modelo que não dependa da massa. Como $\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a}$ pode ser escrita em função da quantidade de movimento, então, segundo a

sistematização de modelos proposta por Batista (2004), $\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ pode ser classificada como sendo um modelo lógico-matemático tipo-essência.

De acordo com as definições aqui apresentadas, objetivando a construção do modelo lógico-matemático tipo-essência da Segunda Lei de Newton, elaboraram-se as três atividades com conteúdo físico, apresentada no capítulo que se segue.

Baseado no referencial teórico exposto até aqui, no capítulo a seguir, é apresentada a abordagem didática proposta, construída com os pressupostos e conceitos dos autores da fundamentação teórica.

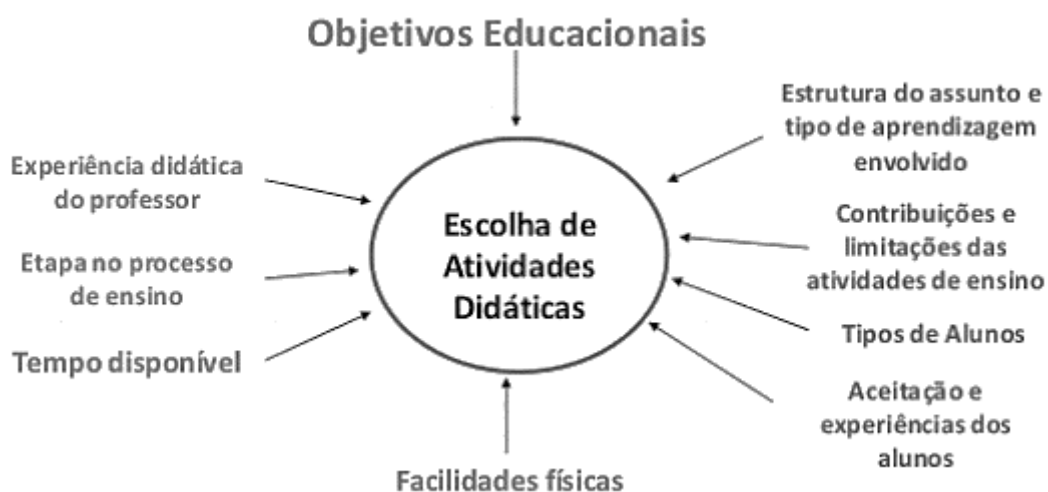
5 A CONSTRUÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA DA ABORDAGEM DIDÁTICA PROPOSTA

A Modelagem Matemática, como já exposto anteriormente, se apresenta como uma estratégia didática para desenvolver ambientes de investigação em sala de aula que privilegiem a construção e aplicação de conceitos científicos. Assim, esta pesquisa apresenta uma proposta baseada na Modelagem Matemática, a fim de promover uma discussão epistemológica a respeito de modelos científicos a partir do tema: 2ª Lei de Newton.

Para elaborar a abordagem didática, foi necessário conhecer as características, potencialidades, limitações e etapas da Modelagem Matemática, bem como conhecer metodologias para a elaboração de atividades que favoreçam o ensino e assim estudar um modo para analisar as atividades de Modelagem Matemática que subsidiarão as análises dos dados juntamente com a Análise de Conteúdo.

Bordenave e Pereira (2015), ao explanarem a respeito de como escolher e organizar atividades de ensino, citam fatores que afetam a escolha das mesmas, como se pode observar na figura a seguir.

Figura 11 – Fatores que afetam a escolha das atividades.

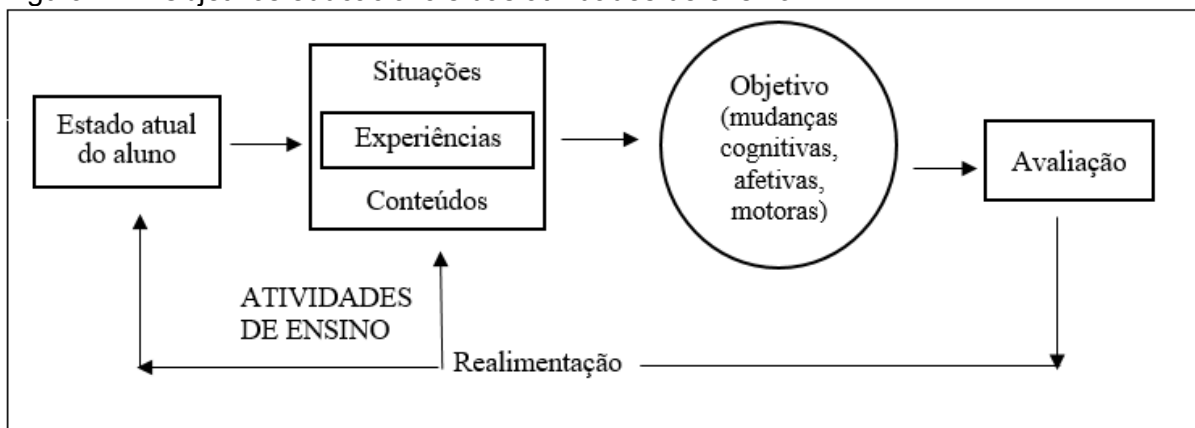


Fonte: Bordenave e Pereira (2015, p. 135).

De acordo com a figura, a escolha de atividades está ligada a diversos fatores que devem ser levados em consideração, sendo todos eles pedagogicamente relevantes. Os autores ressaltam que os objetivos educacionais determinam os tipos

de atividades e elaboram uma figura que indica a dependência entre as experiências que o aluno deverá viver e os objetivos educacionais, como se pode observar a seguir.

Figura 12 – Objetivos educacionais das atividades de ensino.



Fonte: Bordenave e Pereira (2015, p. 136).

Bordenave e Pereira (2017, p. 135), ressaltam que “as atividades são os veículos usados pelos professores para criar situações e abordar conteúdos que permitam ao aluno viver as experiências necessárias para sua própria transformação”.

Segundo os autores (BORDENAVE; PEREIRA, 2015, p. 140 - 144), as atividades de ensino devem ser usadas para desenvolver “capacidades” desejáveis nos alunos, sendo elas:

1. *Capacidade de observar*: o aluno deve perceber a realidade e ser capaz de descrever as situações.

2. *Capacidade de analisar*: o aluno deve ser capaz de decompor sistemas, enumerar propriedades, distinguir postos-chaves, discriminar elementos e aprender tipologias.

3. *Capacidade de teorizar*: o aluno deve generalizar, inferir, deduzir, construir modelos, formular hipóteses, entre outros.

4. *Capacidade de sintetizar*: o aluno deve julgar, avaliar, discutir, tomar decisões, resolver problemas.

5. *Capacidade de aplicar e transferir o aprendido*: o aluno deve planejar, organizar, executar, produzir.

A partir desses pressupostos, e com o intuito de despertar as “capacidades” acima citadas, foi elaborada uma abordagem didática, apresentada no

item a seguir, bem como sua fundamentação, problematização, atividades e o desenvolvimento da mesma.

5.1 Fundamentos e Problematização

O objetivo da abordagem didática proposta, foi investigar se a Modelagem Matemática, no Ensino de Física, aliada a um referencial epistemológico, propicia a construção de modelos científicos pelos estudantes. Para tanto, o primeiro passo foi a elaboração de um questionário prévio (Apêndice B), com questões abertas, para identificar os conhecimentos prévios dos(as) alunos(as) a respeito dos temas que seriam trabalhados na abordagem didática. Concomitantemente, elaborou-se o questionário posterior (Apêndice C), para compreender as noções posteriores que os(as) participantes possuíam após a abordagem, o qual é constituído das mesmas questões do questionário prévio e de questões adicionais relacionadas à visão dos(as) alunos(as) em relação ao minicurso ofertado.

Os temas centrais e norteadores para a abordagem didática proposta são:

- ✓ Modelagem Matemática
- ✓ Matematização
- ✓ Modelos Científicos

Logo, a primeira pergunta tem o intuito de conhecer se os(as) estudantes conhecem a Modelagem Matemática. De acordo com Biembengut (2009, p. 8), diversos pesquisadores como Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrósio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineusa Gazzetta e Eduardo Sebastiani, introduziram estudos relacionados à Modelagem Matemática no Brasil no final dos anos 1970 e início dos anos 1980. E desde então, as pesquisas que abordam a Modelagem Matemática, na Educação Matemática, foram aumentando de forma significativa ao longo dos anos. Tendo em vista que são quase 40 anos de pesquisa na área. No Brasil, existe a possibilidade de algum(a) participante ter tido contato com a Modelagem Matemática seja no Ensino Fundamental e/ou Médio, seja no Ensino Superior, ou em qualquer evento ou palestra assistida.

Sendo assim, a questão, “Você conhece ou já estudou algo a respeito da Modelagem Matemática? Se sim, em que momento da sua formação?”, admite apenas duas respostas, sendo elas “sim” e o(a) respondente descreverá em qual momento da sua formação, ou “não”.

A pergunta seguinte, e que compôs os dois questionários, foi elaborada a fim de conhecer o que cada discente entendia por Modelagem Matemática. Se o(a) participante responder que teve contato com a Modelagem Matemática na questão anterior, certamente terá um entendimento mais formado a respeito da mesma, mas mesmo eles(as) não tendo tido contato com a Modelagem Matemática, provavelmente irão ter noções a respeito da mesma. Essa mesma questão, no questionário posterior, tem como objetivo, observar se os(as) alunos(as) entenderam que a Modelagem Matemática consiste em um processo didático para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema (BIEMBENGUT, 2009), ao passo que também é uma estratégia de ensino que consiste em transformar problemas reais em problemas matemáticos (BASSANEZI, 2002).

A questão, “O que você entende por Modelagem Matemática?”, admite ao menos três respostas, sendo elas: o desconhecimento da metodologia, respostas divergentes, em que o(a) discente descreve erroneamente, ou de forma polissêmica, o que é Modelagem Matemática, e por fim, fragmentos em que a resposta esteja de acordo com o consenso científico atual, ou seja, de acordo com as definições dos autores do referencial teórico desta pesquisa, como Bassanezi (1999; 2002), Almeida e Brito (2005), Biembengut (2009), entre outros.

Com relação à Modelagem Matemática, também elaboraram-se outras questões para serem apresentadas apenas no questionário posterior, após a experiência dos(as) participantes com a abordagem didática proposta. A primeira delas, tem por objetivo conhecer se os(as) discentes entendem que a Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico. De acordo com Moreira (2014),

O conhecimento científico se caracteriza por buscar explicações sobre eventos e objetos físicos, químicos, biológicos e afins, de acordo com determinados critérios de aceitação sobre o que pode ser uma explicação, uma boa explicação ou uma melhor explicação. Neste processo, observações, conjecturas, experimentos, verificações, refutações, conceitos, modelos, teorias, estão na essência da construção do conhecimento científico. Ou seja, este conhecimento é

construído, depende das perguntas feitas, das definições, das metáforas, dos modelos utilizados (MOREIRA, 2014, p. 2).

Moreira (2014, p. 2), ressalta que no Ensino de Ciências, de modo geral, essa construção do conhecimento não é apresentada ao aluno, sendo, normalmente, ignorada pelo professor, que ensina que “as teorias e modelos científicos são ensinados como verdades, como ‘descobertas geniais’, como definitivos, acabados”. Atividades de Modelagem Matemática são alternativas para desfazer essa imagem distorcida da Ciência, mostrando ao estudante que ele também pode fazer Ciência.

Sendo assim, para a questão “A Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico? Justifique sua resposta”, pensou-se em sete possíveis respostas, com base nos referenciais teóricos desta pesquisa, tais como Adúriz-Bravo (2002; 2005), Cury (2003), Batista (2004), Moreira (2014), entre outros, sendo elas, a apresentação da Modelagem Matemática: como recurso gnosiológico, como instrumento para representar fenômenos, para análise de teorias aplicadas em situações empíricas, na compreensão e aprimoramento de teorias, e também respostas que apresentem o desconhecimento da contribuição da Modelagem Matemática na construção do conhecimento, respostas que não contemplem a pergunta e respostas sem explicitação do tipo de contribuição.

Elaborou-se a última questão a respeito da Modelagem Matemática com o objetivo de conhecer se os(as) participantes da pesquisa consideram pertinente incluir atividades de Modelagem Matemática em disciplinas de Física no Ensino Médio, e baseados em suas experiências no minicurso ofertado, justificar a sua resposta. De acordo com Moreira (2014, p. 10), a Modelagem Matemática “está presente na construção de teorias científicas, em particular de teorias físicas. Em decorrência, a Modelagem Matemática deveria também estar presente no Ensino de Ciências, particularmente da Física”. Ainda, segundo Cury (2003),

[...] o uso da Modelagem Matemática no Ensino de Ciências, em qualquer nível, pode ser uma forma de trazer questionamentos a alunos e professores, despertando a reflexão e o espírito crítico tão necessários para ter educação científica ao invés de treinamento para resolução de problemas padronizados (CURY, 2003, p.14).

Sendo assim, a questão “Na sua opinião, atividades de Modelagem Matemática deveriam estar presentes em aulas de Física no Ensino Médio? Justifique sua resposta”, tem oito possíveis respostas, baseadas nos referenciais desta pesquisa, tais como Bassanezi (2002), Cury (2003), Batista (2004), Moreira (2014), entre outros, sendo elas: a não pertinência da inserção de atividade de Modelagem Matemática nas aulas de Física com e sem justificativa, a pertinência da inserção da mesma sem justificativa, a pertinência da inserção com justificativas de caráter gnosiológico, epistemológico, empírico ou contextualizador, e respostas que não contemplem a pergunta.

Com relação ao tema Matemática, elaboraram--se duas questões. A primeira tem por objetivo conhecer se os(as) discentes estudaram algo a respeito da temática. E a segunda, objetiva conhecer o que os(as) participantes entendem por matemática. Como já discutido nesta pesquisa, há diferentes significados para o conceito de matemática, sendo que na Física, tal conceito é mais amplo do que na Modelagem Matemática na Educação Matemática. De acordo com Silva e Almeida (2014), a matemática na Matemática Realística é compreendida como um processo, enquanto que na Modelagem Matemática, a matemática é entendida como uma ação do modelador.

[...] a matemática na Modelagem Matemática diz respeito à tradução de um problema da realidade para um problema matemático, cujo estudo se dá por meio de um modelo matemático, exigindo conhecimentos extramatemáticos vinculados à situação em estudo e sendo necessária a definição e julgamento de hipóteses que guiam a elaboração desse modelo matemático (SILVA; ALMEIDA, 2014, p.30).

Ao discutir a matemática a partir de processos físico-matemáticos, Arevalo (2013), define que a matemática,

organiza os sistemas físicos por meio da lógica de processos matemáticos, trabalhando sobre modos de raciocinar do aluno para a construção do conhecimento físico, esquematizando situações físicas por meio de processos orientados pelo raciocínio matemático e assim privilegiando a formulação de hipóteses no ponto de partida (AREVALO, 2013, p. 79).

Diante das diferentes definições do termo matemática, pretende-se conhecer as noções prévias e posteriores dos(as) participantes a respeito da temática. Sendo assim, para a questão “O que você entende por Matemática?”,

elaboraram-se cinco possíveis respostas, sendo elas o desconhecimento do termo, a definição segundo o consenso científico atual, que conciliam como o termo é compreendido pelos autores da literatura, tais como Bassanezi (2002), Karam e Pietrocola (2009), Arevalo (2013), Silva e Almeida (2014), entre outros, divergência semântica, polissemia e respostas que não contemplam a pergunta.

Para a temática Modelos Científicos, elaboraram-se duas questões. A primeira, tem por objetivo conhecer o que os(as) discentes entendem por modelos científicos, e a segunda visa investigar se os(as) participantes conhecem exemplos de modelos científicos, em suas áreas de conhecimento, legitimando suas explicações a respeito do tema. Segundo Justi (2006, p. 175, tradução nossa), o conceito mais aceito, é que “um modelo é uma representação de uma ideia, objeto, acontecimento, processo ou sistema, criado com um objetivo específico”.

De acordo com Batista (2004, p. 473), “a importância da discussão sobre modelos para a dimensão cognitiva já é consensual para a comunidade científica envolvida na pesquisa dos processos de ensino e de aprendizagem”, e tal discussão colabora para a ocorrência de aprendizagem. Justi e Gilbert (2002), elaboraram argumentos justificando o papel que os modelos devem desempenhar no Ensino de Ciências, tendo por finalidade:

- Aprender Ciência, os alunos devem ter conhecimentos a respeito da natureza, âmbito de aplicação e limitações dos principais modelos científicos.
- Aprender a respeito da Ciência, os alunos devem compreender adequadamente a natureza dos modelos e ser capazes de avaliar o papel dos mesmos no desenvolvimento e difusão dos resultados da investigação científica.
- Aprender a fazer Ciência, os alunos devem ser capazes de criar, expressar e comprovar seus próprios modelos (JUSTI; GILBERT, 2002 apud JUSTI, 2006, p. 176, tradução nossa).

Dada a importância dos modelos científicos no Ensino de Ciências, espera-se que os(as) discentes saibam definir e exemplificar modelos científicos de suas áreas. Para tanto, elaboraram-se cinco possíveis respostas para a questão “O que você entende por Modelo Científico?”, sendo elas o desconhecimento do termo, a definição segundo o consenso científico atual, baseados nos referenciais teóricos desta pesquisa, dentre eles Sayão (2001), Batista (2004), Justi (2006), Moreira (2014), entre outros, divergência semântica, polissemia e respostas que não contemplam a pergunta. E elaboraram-se seis possíveis respostas para a questão “Cite exemplos

de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento”, sendo elas exemplificação apresentada no minicurso ofertado, exemplificação segundo o consenso científico atual, divergência semântica entre definições, exemplificação polissêmica, ausência de exemplos e repostas que não condizem com a pergunta.

Além das questões relacionadas aos temas norteadores propostos, optou-se em elaborar três questões adicionais, sendo uma a respeito do papel da Matemática na Física e duas referentes ao minicurso ofertado.

O objetivo da primeira questão adicional é investigar como os(as) participantes entendem e definem o papel que a Matemática exerce na Física e na construção de conceitos físicos, antes e depois da abordagem didática proposta.

Como já abordado nesta pesquisa, há diferentes opiniões no que diz respeito a este assunto, há quem afirme, ingenuamente, que a Matemática é uma ferramenta/instrumento para a Física havendo até um papel de subserviência, e há os que defendem que a Matemática é uma linguagem da Física (PIETROCOLA, 2002, p. 92). Porém, ao caracterizar a Matemática como linguagem, há que se compreender que “a linguagem humana vai além da comunicação direta e da descrição de coisas” (PIETROCOLA, 2002, p. 99), segundo o autor, “ao dizer que a Matemática se constitui na linguagem da Ciência, devemos analisá-la como expressão de nosso próprio pensamento, e não apenas como instrumento de comunicação” sendo que “a linguagem deve ser entendida como a forma que temos de estruturar nosso pensamento” (PIETROCOLA, 2002, p. 101). Desse modo, a Matemática assume um papel estruturante na Física.

Sendo assim, “Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta”, foram elaboradas seis possíveis respostas, segundo os referenciais adotados, entre eles Paty (1995), Pietrocola (2002), Batista (2004), entre outros, sendo elas a apresentação da Matemática como: recurso gnosiológico, instrumento para descrever fenômenos, participante da compreensão e aprimoramento de teorias, contribuinte na Epistemologia, um obstáculo no Ensino de Física e repostas que não contemplam a pergunta.

As duas últimas questões extras estão presentes apenas no questionário posterior, e dizem respeito ao Minicurso ofertado. Tanto a primeira questão, “Que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades propostas neste minicurso? Comente”, quanto à segunda “Relate pontos positivos e destaque

aspectos desfavoráveis a respeito da aplicação desse minicurso, e comente como foi participar do mesmo”, tem por objetivo identificar possíveis empecilhos e/ou dificuldades enfrentados pelos(as) participantes no decorrer da abordagem que podem influenciar nos resultados, tais como dificuldade com a Modelagem Matemática, na interpretação dos enunciados, na construção de modelos científicos ou na matematização. E também identificar pontos a serem melhorados e/ou modificados em abordagens futuras.

Todas possíveis respostas elaboradas para estes questionários, ou seja, as Unidades Temáticas de Contexto e Registro prévios, estão detalhadas no item 6.1.1, no capítulo 6.

5.1.1 A Construção das Atividades

Após a elaboração dos questionários, prévio e posterior, e das Unidades de Contexto e Registro prévios (detalhados no item 6.1.1), iniciou-se o processo de adaptação e construção de seis atividades de Modelagem Matemática.

De acordo com Bassanezi (2004, p. 45), a primeira etapa na elaboração de um problema de Modelagem Matemática é a escolha do tema, “faz-se um levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções”.

Para esta pesquisa, pelo fato de ser um minicurso de 20 horas, e o objetivo das atividades ser investigar os modelos elaborados pelos(as) estudantes, optou-se em basear todas as atividades de Modelagem Matemática somente no “1º momento de familiarização” proposto por Almeida e Vertuan (2011, p. 27), em que “o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias”. Sendo assim, o tema escolhido pela pesquisadora para ser abordado no minicurso foi a 2ª Lei de Newton, apresentado no item anterior.

Após a escolha do tema, a próxima etapa consiste na obtenção dos dados. De acordo com Bassanezi (2002, p. 46), “uma vez escolhido o tema, o próximo passo é buscar informações relacionadas com o assunto. A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas.” Dentre essas várias

formas em que os dados podem ser obtidos, o autor destaca: entrevistas, pesquisa bibliográfica e até experiências feitas pelos(as) próprios(as) estudantes.

Para a abordagem didática proposta, foi decidido apresentar, inicialmente, três atividades para que os(as) participantes da pesquisa pudessem conhecer a Modelagem Matemática. Para tanto, escolheram-se duas atividades propostas e já exploradas por outros autores e também a adaptação de uma atividade. As outras três atividades da abordagem, tem como foco principal o tema escolhido, a 2ª Lei de Newton. Em todas as atividades, os dados e informações necessárias constam nas mesmas.

Inicialmente, pesquisou-se em livros didáticos, artigos, dissertações e teses, atividades prontas que atendessem aos objetivos desta pesquisa. Porém, não foram encontradas tais atividades. Logo, a pesquisadora, por meio de pesquisas, documentos oficiais e artigos científicos, construiu as atividades com assuntos de Física para serem resolvidas por meio da Modelagem Matemática.

A seguir, são apresentadas as três atividades escolhidas para apresentar e familiarizar a Modelagem Matemática aos(as) participantes.

✓ **Atividade 1 – Volume da Maçã**

A primeira atividade escolhida, “Volume da Maçã”, foi adaptada de Bassanezi (2002, p. 234 - 238), e tem por objetivo construir um modelo matemático para definir o volume de uma maçã. Para tanto, elaborou-se um texto fruto da compilação de alguns textos selecionados. O primeiro deles, refere-se à produção mundial de maçãs do Ministério da Agricultura do Brasil⁴, o segundo, de Silva et. al. (2007)⁵, traz um pouco da história do cultivo de maçãs no Brasil e algumas curiosidades, o terceiro e último texto foi retirado de Ramos (2016, p. 59), que apresenta informações específicas a respeito das maçãs.

No Apêndice D, apresenta-se a atividade que foi entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

⁴ Disponível em: < http://www.agricultura.gov.br/assuntos/politica-agricola/arquivos-de-estatisticas/informativo_-_maca_2013_-2-1.pdf>. Acesso em: 19/09/2017.

⁵ Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_09_sala_05.pdf>. Acesso em: 19/09/2017.

✓ **Atividade 2 – O problema do Césio em Goiânia.**

A atividade a respeito do decaimento radioativo do césio-137, foi retirado de Santos; Silva e Almeida (2007, p. 13 - 15)⁶, o texto foi apresentado na íntegra e apenas a pergunta foi adaptada. No Apêndice E, apresenta-se a atividade entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

✓ **Atividade 3 – Frota de veículos na cidade de Londrina.**

A terceira atividade foi inspirada em Vertuan (2013), que elaborou uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo a frota de veículos de Apucarana, e tinha como problema responder à questão: “Qual o número de veículos que Apucarana terá em 2013?” (VERTUAN, 2013, p. 21).

Assim, a pesquisadora buscou informações relacionadas à frota de veículos da cidade de Londrina-PR em uma matéria de jornal, que faz uma reflexão a respeito do crescimento desordenado da frota de veículos em Londrina e também buscou dados do DETRAN-PR (Departamento Estadual de Trânsito do Paraná) com o número de veículos na cidade de Londrina nos últimos seis anos. No Apêndice F, apresenta-se a atividade entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

As outras três atividades elaboradas para o minicurso proposto, tem como objetivo construir o modelo lógico-matemático tipo-essência da 2ª Lei de Newton, como descrito no item 5.1.1. Sendo assim, são apresentadas, a seguir, as atividades construídas.

✓ **Atividade 4 – Gravidade Variável.**

A quarta atividade, tem como objetivo encontrar o modelo lógico-matemático-fenomenológico $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, ou seja, força peso é igual ao produto da massa pela aceleração da gravidade. O texto escolhido, extraído de Lopes (2008), traz uma discussão a respeito da aceleração da gravidade não ser constante, ao contrário, ser variável de acordo com a latitude e altitude, uma discussão relevante visto que é pouco abordada no Ensino Médio em que a aceleração da gravidade é apresentada como

⁶ Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html>. Acesso em: 14/09/2017.

10m/s². No Apêndice G, apresenta-se a atividade entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

✓ **Atividade 5 – Rotatória como redutor de velocidade.**

Esta atividade foi elaborada com o objetivo de os(as) participantes construírem o modelo lógico-matemático-fenomenológico $F = m \cdot \frac{v^2}{r}$. Foi escolhido um texto do DENIT (Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes) a respeito das rótulas, também chamadas de rotatórias. O texto traz informações técnicas, curiosidades e dados estatísticos que mostram a redução do número de acidentes em lugares em que rótulas foram construídas.

Na primeira parte da atividade, os(as) alunos(as) devem encontrar o modelo que relaciona a velocidade com o raio da curva. Em seguida, por meio do resultado da atividade 4, objetiva-se que os(as) discentes percebam a relação entre força, massa e aceleração e formulem o modelo lógico-matemático da força centrípeta. No Apêndice H, apresenta-se a atividade entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

✓ **Atividade 6 – Eficiência dos airbags.**

A última atividade foi construída com o objetivo de os(as) participantes construírem o modelo lógico-matemático-fenomenológico conhecido como teorema do impulso, $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta \vec{v}$. Para tanto, escolheu-se um texto a respeito de como funciona os airbags e sua eficiência em casos de colisão. Inseriu-se também uma explicação a respeito do impulso e apresentou-se um experimento de *crash test*. No Apêndice I, apresenta-se a atividade entregue aos(as) participantes no minicurso proposto.

Expostas as atividades elaboradas para a abordagem didática proposta, apresenta-se, a seguir, o público alvo e a descrição detalhada das etapas da aplicação do minicurso proposto.

5.2 Apresentação e Desenvolvimento da Abordagem Didática Proposta

Para a aplicação da abordagem didática proposta e obtenção de dados, foi ofertado um Minicurso intitulado “Modelagem Matemática no Ensino de Física”, que dava direito a um certificado com carga horária de 20 horas, sendo elas 15 horas presenciais e 5 horas de leitura complementar. O Minicurso ocorreu na Universidade Estadual de Londrina, sob a coordenação da orientadora Dr^a. Irinéa de Lourdes Batista e foi ministrado pela pesquisadora deste trabalho.

Foram convidados alunos do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física, Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Física e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, período noturno, do ano de 2017. O convite para estudantes do curso de Matemática se deu pelo fato de que muitos matemáticos lecionam disciplinas de Física, seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior, como é o caso da pesquisadora deste trabalho. Optou-se em convidar alunos do bacharelado também pelo fato de muitos bacharéis cursarem, futuramente, a licenciatura, ou ainda cursarem o mestrado e doutorado para lecionar.

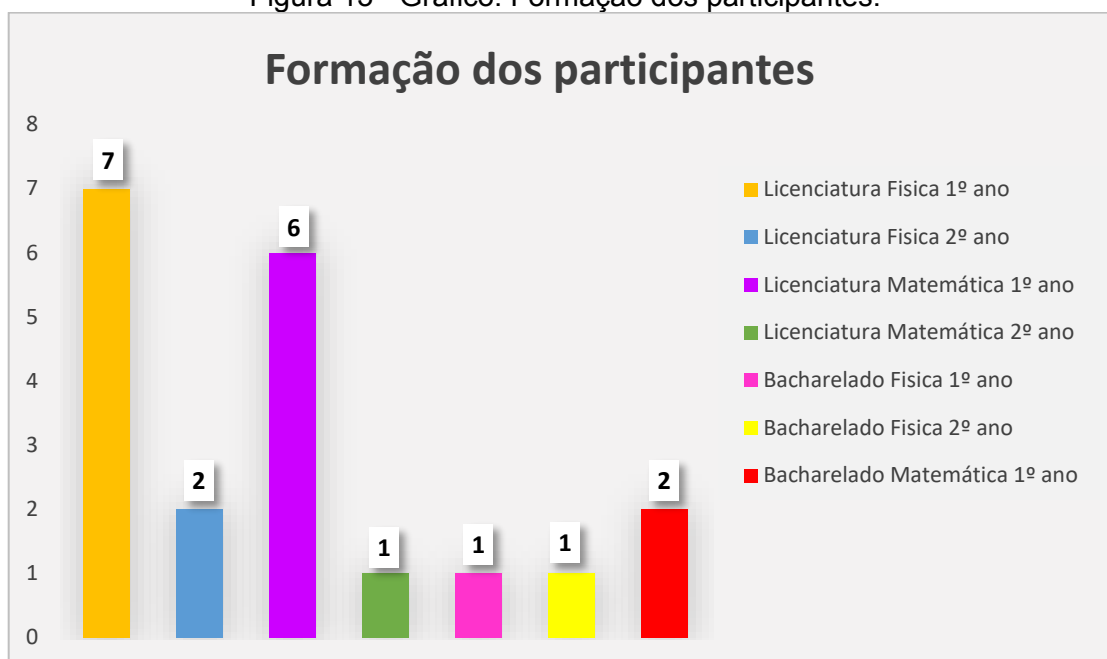
A escolha de alunos(as) dos anos iniciais deu-se pelo motivo de que esses discentes teriam mais conhecimentos advindos do Ensino Médio do que do Ensino Superior. As atividades elaboradas foram construídas com conceitos abordados no Ensino Médio, logo, não precisaria de conceitos dos anos seguintes na graduação. A maior preocupação desta pesquisadora foi que quanto mais semestres eles(as) tivessem estudado no Ensino Superior, mais arraigados estariam os conceitos e os equacionamentos da Física, sendo um fator que interferiria diretamente na resolução das atividades de Modelagem Matemática, pois certamente muitos(as) estudantes iriam automaticamente colocar fórmulas prontas, o que foge totalmente da proposta.

Inicialmente tivemos 22 participantes, porém, dois não compareceram no segundo dia, sendo assim, serão apresentados os 20 sujeitos que concluíram o curso.

Dos 20 participantes, 11 eram estudantes de Física, sendo nove de licenciatura e dois de bacharelado, e nove eram estudantes de Matemática, sendo sete de licenciatura e dois de bacharelado.

No gráfico a seguir, para melhor visualização, estão representados o número de participantes por modalidade de ensino e ano em que estavam cursando.

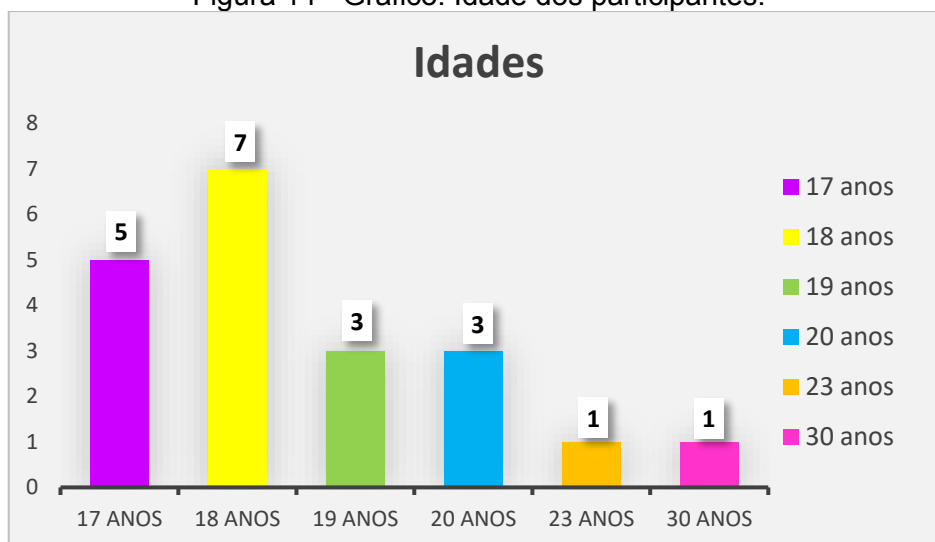
Figura 13 - Gráfico: Formação dos participantes.



Fonte: A autora.

Entre os participantes havia 13 homens e sete mulheres, e as idades variaram de 17 a 30 anos, como se pode observar no gráfico a seguir.

Figura 14 - Gráfico: Idade dos participantes.



Fonte: A autora.

Com relação ao Ensino Básico, 17 participantes estudaram, tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio, em escolas públicas e apenas um cursou todo o Ensino Básico em escola particular. Dois participantes cursaram o Ensino Fundamental em escola pública e o Ensino Médio em escola particular. Com relação

à universidade, dois estudantes participavam do PIBID.

Dentre as cidades de origem dos participantes, temos alunos oriundos do estado do Paraná das cidades de: Assai, Cambé, Ibiporã, Jacarezinho, Londrina, Rolândia e São Sebastião da Amoreira; e do estado de São Paulo, das cidades de: Assis, Campinas, Presidente Prudente e Sorocaba.

Optou-se em realizar o Minicurso em dois sábados, dias 27/05/2017 e 03/06/2017, nos períodos matutino e vespertino. Na parte da manhã, teve início às 8h30min e término às 12h para o almoço. No período da tarde, iniciou-se às 13h30min e terminou às 17h30min, sendo que em ambos os períodos foi feita uma pausa de 15 minutos para um pequeno lanche. O minicurso foi dividido em quatro encontros, sendo dois encontros no mesmo sábado, um no período da manhã e outro no da tarde, e da mesma forma no sábado seguinte.

Durante todo o minicurso, utilizou-se de uma câmera filmadora para registrar os discursos e as apresentações dos grupos, para que, juntamente com o diário de bordo, a pesquisadora pudesse revisitar as discussões para análises futuras.

O primeiro encontro iniciou com uma breve apresentação dos(as) participantes e a pesquisadora apresentou a pesquisa e seus objetivos. Em seguida, os(as) estudantes foram convidados a lerem e assinarem o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice A) e a responderem o questionário prévio (Apêndice B). Após esse momento, foi feita uma pausa para o lanche.

Após o intervalo, iniciou-se a apresentação da Modelagem Matemática, por meio da leitura e discussão de uma parte do capítulo 1 do livro *“Ensino - aprendizagem com Modelagem Matemática”* (páginas de 15 a 32) de Bassanezi (2002). Em seguida, foi discutido a respeito do conceito de matematização com um texto extraído da dissertação de mestrado da pesquisadora, intitulada *“Matematização e Ensino de Física: uma discussão de noções docentes”* de 2014. Nestes momentos iniciais, os(as) estudantes estavam mais quietos, mas com o decorrer do tempo e à medida em que eram indagados, participavam da discussão.

O segundo encontro, na parte da tarde do mesmo dia, foi destinado para a resolução das três atividades de Modelagem Matemática presentes na literatura, para que os(as) participantes se familiarizassem com o processo de modelagem. Cada atividade teve duração média de 1 hora. Para tanto, os(as)

estudantes se dividiram em cinco grupos, conforme a orientação dada pela pesquisadora.

O Grupo I foi composto por três alunos(as) que cursavam o 1º ano de Licenciatura em Física, e o Grupo II por quatro alunos do mesmo curso e ano. O Grupo III foi formado por dois estudantes que cursavam bacharelado em Física, e dois estudantes que cursavam o 2º ano de Licenciatura em Física. Os grupos IV e V foram formados por estudantes que cursavam Matemática, sendo o grupo IV com quatro participantes e o Grupo V com cinco participantes. Em todas as atividades os grupos permaneceram inalterados. A escolha dos grupos foi uma opção metodológica da pesquisadora.

Antes de iniciar as atividades, as etapas da Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2002), foram lembradas, sendo elas: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação. Em seguida foi entregue a atividade 1, “Volume da Maçã” e uma maçã para cada um dos grupos, também foi disponibilizado barbante, régua e faca. O objetivo era calcular o volume da maçã, cada grupo resolveu sua atividade e em seguida todos os grupos apresentaram suas hipóteses e respostas na lousa. Esta atividade teve duração de 1 hora.

A segunda atividade do segundo encontro foi “O problema do césio em Goiânia”, foi entregue o texto da atividade e os(as) estudantes, em grupos, resolveram o que foi proposto. Em seguida, novamente, apresentaram suas respostas e as hipóteses levantadas para chegarem à solução. Esta atividade também teve a duração de 1 hora.

Após um breve intervalo, foi entregue a última atividade do dia “Frota de veículos na cidade de Londrina”, e os(as) alunos(as) procederam da mesma forma. Nesta atividade os(as) estudantes tiveram maior facilidade em resolver, pois já estavam mais familiarizados com o processo de Modelagem Matemática. Após a resolução, cada grupo apresentou a solução e como chegaram à mesma.

Para finalizar o primeiro dia, foram dadas instruções de leitura para a semana, leituras essas que consolidariam os conceitos já abordados e introduziriam conceitos que seriam estudados no encontro seguinte. Os cinco textos selecionados foram enviados por *e-mail* para os(as) participantes, sendo eles:

- “A Matematização em Atividades de Modelagem Matemática”.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Heloísa Cristina da. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.8, n.3, p.207-227, novembro 2015.

- *“O Ensino de Teorias Físicas Mediante uma Estrutura Histórico-Filosófica”*. BATISTA, Irinéa de Lourdes. Ciência & Educação, v. 10, n. 3, p. 461-476, 2004.
- *“As Premissas e os Pressupostos na Construção Conceitual de Modelos”*. BEAN, Dale. V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 28 a 31 de outubro de 2012, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil.
- *“Os Modelos e a Pragmática da Investigação”*. DUTRA, Luiz Henrique De Araújo. Scientiae Studia, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 205-32, 2005.
- *“Bases Epistemológicas e Implicações para Práticas de Modelagem Matemática em Sala Aula”*. KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática Brasília – DF, 25 a 28 de Outubro de 2009.

No sábado seguinte, foi dada continuidade ao minicurso e iniciou-se o 3º encontro com o estudo a respeito de modelos científicos, com o auxílio de um texto produzido pelo grupo de pesquisa IFHIECEM⁷. Após esta discussão, mais uma vez foram retomadas as etapas da Modelagem Matemática.

Após um breve intervalo, iniciaram-se as atividades investigativas desta pesquisa, nas quais continham conteúdos físicos. Nos mesmos grupos separados no sábado anterior, os(as) estudantes receberam a primeira atividade do dia, “Gravidade Variável”. Ainda na parte da manhã, foi distribuída mais uma atividade “Rotatória como Redutor de Velocidade”. Em ambas atividades, após a resolução cada grupo apresentou suas hipóteses, os caminhos percorridos e as respostas.

No início da tarde, iniciou-se o 4º e último encontro e os grupos receberam a última atividade do minicurso, “Eficiência dos airbags”. Após a resolução e apresentação das respostas, a pesquisadora fez uma análise de todos os modelos matemáticos encontrados no decorrer das atividades, e relacionou-os aos seus

⁷ Investigações em Filosofia e História da Ciência, e Educação em Ciências e Matemática. Disponível em: < <http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/>>.

respectivos modelos fenomenológicos, levando-os, por conseguinte a vislumbrarem o modelo tipo-essência correspondente.

Por fim, os(as) estudantes foram convidados a responderem o questionário posterior (Apêndice C). Após este momento, foi feito um agradecimento a cada participante da pesquisa e encerrou-se o minicurso.

6 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO DO ESTUDO EMPÍRICO

Optou-se pelo desenvolvimento de uma pesquisa com abordagem qualitativa de cunho interpretativo. Para Bogdan e Biklen (1994), esse tipo de investigação apresenta uma natureza descritiva, na qual os pesquisadores têm um interesse maior no processo e nos seus significados do que nos resultados ou produtos. Segundo os mesmos autores, a investigação qualitativa possui cinco características:

1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural constituindo o investigador o instrumento principal.
2. A investigação qualitativa é descritiva.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-50).

Baseados em Bogdan e Biklen (1994), procurou-se descrever todos os passos da obtenção de dados e os mesmo foram analisados por meio de inferências dedutivas, sem procurar respostas certas ou erradas, a fim de entender, segundo os referenciais teóricos utilizados, os significados dos dados fornecidos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 49), é preciso examinar tudo como se nada fosse trivial, tendo em vista que “tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo”. Com essa ideia de que nada é trivial, o pesquisador tem uma árdua tarefa de investigar e analisar minuciosamente os dados.

Para a obtenção dos dados, foram elaborados os questionários prévios e posteriores e todos os encontros foram gravados por meio de uma filmadora. De acordo com Carvalho (2004, p. 8), a vantagem de gravar as aulas ou episódios de ensino, é que se pode vê-las e revê-las quantas vezes forem necessárias, em que “esse ver e rever traz às pesquisas em ensino uma coleção de dados novos, que não seriam registrados pelo melhor observador situado na sala de aula”. E ainda, a utilização do vídeo permite que o pesquisador possa passar do quanto se aprende para o como se aprende (GARCEZ, DUARTE E EISENBERG, 2011).

Há diversas possibilidades do uso de vídeo, entre elas, pode-se destacar a observação de contradições entre discurso e comportamento, possibilitar

outras interpretações do material e servir também como uma forma de feedback para o pesquisador (GARCEZ, DUARTE E EISENBERG, 2011; CARVALHO 2004). Nesta pesquisa, a revisitação às gravações teve por objetivo suprir informações que não estão claras nos registros das atividades elaboradas pelos grupos, a fim de observar e/ou identificar,

a participação dos alunos levantando hipóteses durante a resolução de um problema experimental, a argumentação que aparece em um debate entre professor e alunos, os tipos de perguntas que os professores fazem para seus alunos, as seqüências das explicações dos alunos durante uma experiência, a discussões dos alunos após a leitura de um texto de história das ciências, etc (CARVALHO, 2004, p.8).

Para tanto, há um rigor em relação à transcrição, em que “as transcrições devem ser totalmente fiéis às falas a que correspondem, sendo a substituição de termos por sinônimos terminantemente proibido” (CARVALHO, 2004, p. 9).

É com esse enfoque que se desenvolveu esta investigação. Nesse contexto, são apresentados, nos próximos itens, os passos metodológicos para a obtenção de dados, assim como para sua análise.

6.1 Análise de Conteúdo

Esta investigação situa-se em uma perspectiva qualitativa, e para a análise dos dados obtidos por meio dos questionários, elegeu-se como metodologia de análise de dados a Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1979, p.31), que diz que “a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações”

Compreende-se a Análise de Conteúdo de Bardin como:

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1979, p. 42).

A Análise do Conteúdo é composta por três fases: 1. a pré-análise; 2. a exploração do material; e, por fim, 3. o tratamento dos resultados: a inferência e a interpretação.

A *pré-análise* é a fase da organização, essa etapa configura-se pela exploração não estruturada e, ao mesmo tempo, sistemática dos documentos que pode envolver:

- a) A leitura flutuante – A primeira atividade consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações. [...] Pouco a pouco, a leitura vai-se tornando mais precisa, em função de hipóteses emergentes, da projeção de teorias adaptadas sobre o material e da possível aplicação de técnicas utilizadas sobre materiais análogos.
- b) A escolha do documento – O universo de documentos de análise pode ser determinado a priori. [...] Estando o universo demarcado (o gênero de documentos sobre os quais se pode efetuar a análise), é muitas vezes necessário proceder-se à constituição do corpus. O corpus é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos (BARDIN, 1979, p. 96).

Na *pré-análise* desta pesquisa, o universo de documentos foram os questionários aplicados. Optamos por não formular hipóteses, pois além de não ser uma obrigatoriedade da metodologia, o objetivo foi identificar as noções dos participantes manifestadas nos questionários.

A *exploração do material* constitui a segunda fase, em que é feita a administração sistemática das decisões tomadas. Nesta fase construíram-se as Unidades de Temáticas de Contexto (UC), com suas respectivas Unidades Temáticas de Registro (UR), que são unidades de significação, com base no referencial teórico adotado e nos objetivos desta pesquisa, bem como na análise empírica (unidades de registro emergentes).

Bardin (1979) define Unidade de Registro e Unidade de Contexto como:

- *Unidade de registro* – É a unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial (BARDIN, 1979, p. 104).
- *Unidade de contexto* – A unidade de contexto serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem cujas dimensões (superiores às unidade de registro) são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registro (BARDIN, 1979, p. 107).

Segundo Bardin (1979, p. 120), um bom conjunto de unidades deve possuir as seguintes qualidades:

- a) Exclusão mútua: as unidades não devem apresentar

ambiguidades, e devem ser elaboradas a fim de que um registro não possa ser unitarizado em duas ou mais unidades de registros.

b) Homogeneidade: a exclusão mútua depende da homogeneidade, em que um único princípio de organização deve reger a unitarização, ou seja, diferentes tipos de análises devem ser separadas em diferentes unidades de contexto.

c) Pertinência: uma unidade é pertinente quando pertence à fundamentação teórica adotada e quando está adaptada ao material de análise escolhido. O conjunto de unidades deve refletir as intenções da investigação.

d) Objetividade e fidelidade: o pesquisador deve definir claramente os critérios que determinam a entrada de um registro em uma unidade de registro.

e) Produtividade: uma unidade é produtiva quando fornece resultados férteis em inferências, hipóteses novas e dados exatos.

Assim, baseados nas características supracitadas, elaboraram-se as UC e UR prévias para cada uma das questões.

A terceira fase diz respeito ao *tratamento dos resultados, inferência e interpretação*, que é destinada ao tratamento dos resultados e ocorre nela a condensação e o destaque das informações para análise, culminando nas interpretações inferenciais. Esta fase será apresentada em dois momentos, primeiro uma análise descritiva no capítulo 7 e em seguida, inferências e interpretações no metatexto.

Optou-se por uma análise temática, que, segundo Bardin (1979, p. 77), refere-se à “contagem de um ou vários temas ou itens de significação numa unidade de codificação previamente determinada”.

No próximo item, apresentam-se os questionários e as Unidades de Contexto e Registros Prévios elaborados para análise dos dados desta pesquisa.

6.1.1 Questionário e Unidades de Contexto e Registro Prévios

Com o objetivo de conhecer as concepções iniciais dos(as) participantes da pesquisa, e posteriormente ter um instrumento de análise de indícios de aprendizagem após o minicurso ofertado, elaborou-se um questionário aberto, prévio e posterior (Apêndices B e C). A escolha de um questionário aberto ao invés de um questionário de múltipla escolha, se deu pelo fato de os(as) respondentes terem

oportunidade de esclarecerem seus próprios pontos de vista, ao comentarem e justificarem suas respostas. A elaboração do questionário foi realizada pela pesquisadora responsável e decodificada intersubjetivamente pela coordenadora e por membros do grupo de pesquisa IFHIECEM.

Enunciam-se, nos quadros que se seguem, as perguntas que compuseram esses questionários.

Quadro 6 – Questões do questionário prévio.

Questionário Prévio	
1- Você conhece ou já estudou algo a respeito de Modelagem Matemática?	
() Sim	() Não
Se sim, em que momento da sua formação?	
() Ensino Fundamental	
() Ensino Médio	
() Ensino Superior	
() Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc.	
() Outros. Comente: _____	
2- O que você entende por Modelagem Matemática?	
3- Você conhece ou já estudou algo a respeito de Matematização?	
() Sim	() Não
Se sim, em que momento da sua formação?	
() Ensino Fundamental	
() Ensino Médio	
() Ensino Superior	
() Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc.	
() Outros. Comente: _____	
4- O que você entende por Matematização?	
5- O que você entende por Modelo Científico?	
6- Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.	
7- Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta.	

Fonte: A autora.

Quadro 7 – Questões do questionário posterior.

Questionário posterior
1- O que você entende por Modelagem Matemática?
2- O que você entende por Matematização?
3- O que você entende por Modelo Científico?
4- Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.
5- Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta.
6- A Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico? Justifique sua resposta.
7- Que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades propostas neste minicurso? Comente.
8- Na sua opinião, atividades de Modelagem Matemática deveriam estar presentes em aulas de Física no Ensino Médio? Justifique sua resposta.
9- Relate pontos positivos e destaque aspectos desfavoráveis a respeito da aplicação desse minicurso, e comente como foi participar do mesmo.

Fonte: A autora.

Quadro 8 - Questões dos questionários prévio e posterior.

Questão	Prévio	Posterior
Você conhece ou já estudou algo a respeito de Modelagem Matemática? () Sim () Não Se sim, em que momento da sua formação? () Ensino Fundamental () Ensino Médio () Ensino Superior () Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc. () Outros. Comente.	X	
O que você entende por Modelagem Matemática?	X	X
Você conhece ou já estudou algo a respeito de Matematização? () Sim () Não Se sim, em que momento da sua formação? () Ensino Fundamental () Ensino Médio () Ensino Superior () Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc. () Outros. Comente.	X	
O que você entende por Matematização?	X	X
O que você entende por Modelo Científico?	X	X
Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.	X	X

Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta	X	X
A Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico? Justifique sua resposta.		X
Que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades propostas neste minicurso? Comente.		X
Na sua opinião, atividades de Modelagem Matemática deveriam estar presentes em aulas de Física no Ensino Médio? Justifique sua resposta.		X
Relate pontos positivos e destaque aspectos desfavoráveis a respeito da aplicação desse minicurso, e comente como foi participar do mesmo.		X

Fonte: A autora.

Assim como os questionários, as Unidades de Análise foram elaborados pela autora desta pesquisa com base no referencial teórico deste trabalho e decodificado intersubjetivamente por integrantes do grupo de estudos e pesquisa IFHIECEM. Tais Unidades são detalhadas a seguir.

Questão: Você conhece ou já estudou algo a respeito da Modelagem Matemática? Se sim, em que momento da sua formação?

Unidade Temática de Contexto 01 (UC1), **Noções a respeito de Modelagem Matemática**, foi elaborada para reunir fragmentos textuais que identificam se os/as estudantes receberam noções a respeito da Modelagem Matemática ao longo de sua formação.

Os dados analisados nessa Unidade foram organizados em sete Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis.

Quadro 9 – Unidades Temáticas de Registros da UC1.

UR	Descrição	Explicação para os registros
1.1	Noções de Modelagem Matemática no Ensino Fundamental	Para agrupar os registros que apresentam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Fundamental.
1.2	Noções de Modelagem Matemática no Ensino Médio	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Médio.
1.3	Noções de Modelagem Matemática no Ensino Superior	Para agrupar os registros que apresentam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Superior.
1.4	Noções de Modelagem Matemática em Congressos, Minicursos e/ou Curso de Extensão	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes receberam tais noções em formação complementar

1.5	Ausência de noções a respeito da Modelagem Matemática	Para agrupar os registros dos participantes que não receberam noções de Modelagem Matemática em sua formação.
1.6	Noções de Modelagem Matemática sem especificação	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes tiveram contato com a Modelagem Matemática durante sua formação, porém sem especificação.
1.7	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes não compreenderam a pergunta, sendo a resposta incoerente em relação à pergunta.

Fonte: A autora.

Questão: O que você entende por Modelagem Matemática?

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 02 (UC2), **Compreensão da metodologia Modelagem Matemática**, para agrupar os fragmentos textuais que apresentam definições da mesma.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas quatro Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis.

Quadro 10 – Unidades Temáticas de Registros da UC2.

UR	Descrição	Explicação para os registros
2.1	Desconhecimento da metodologia	Para agrupar registros que apresentam o desconhecimento da metodologia Modelagem Matemática
2.2	Definição segundo o consenso científico atual	Para agrupar registros que apresentam definições da metodologia segundo o consenso científico atual.
2.3	Divergência semântica	Para agrupar registros que apresentam divergência semântica na definição da metodologia.
2.4	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.

Fonte: A autora.

Questão: Você conhece ou já estudou algo a respeito de Matematização? Se sim, em que momento da sua formação?

Unidade Temática de Contexto 03 (UC3), **Noções a respeito do tema Matematização**, foi elaborada para reunir fragmentos textuais que identificam se os/as estudantes receberam noções a respeito do tema matematização ao longo de sua formação.

Os dados analisados nessa Unidade foram organizados em sete Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis.

Quadro 11 – Unidades Temáticas de Registros da UC3.

UR	Descrição	Explicação para os registros
3.1	Noções de Matematização no Ensino Fundamental	Para agrupar os registros que apresentam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Fundamental.
3.2	Noções de Matematização no Ensino Médio	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Médio
3.3	Noções de Matematização no Ensino Superior	Para agrupar os registros que apresentam que os/as estudantes receberam tais noções no Ensino Superior.
3.4	Noções de Matematização em Congressos, Minicursos e/ou Curso de Extensão	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes receberam tais noções na formação complementar.
3.5	Ausência de noções a respeito da Matematização	Para agrupar os registros dos participantes que não receberam noções de matematização.
3.6	Noções de Matematização sem especificação	Para agrupar os registros que indicam que os/as estudantes tiveram contato com a matematização durante sua formação, porém sem especificação.
3.7	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.

Fonte: A autora.

Questão: O que você entende por Matematização?

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 04 (UC4), **Compreensão semântica da terminologia Matematização**, a qual contém fragmentos textuais que apresentam definição do termo matematização.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas cinco Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis.

Quadro 12 – Unidades Temáticas de Registros da UC4.

UR	Descrição	Explicação para os registros
4.1	Desconhecimento do termo	Para agrupar registros que apresentam o desconhecimento do termo matematização.
4.2	Definição segundo o consenso científico atual	Para agrupar registros que apresentam definição do termo matematização segundo o consenso científico atual.
4.3	Divergência semântica	Para agrupar registros que apresentam divergência semântica a respeito do termo matematização.
4.4	Polissemia	Para agrupar registros que apresentam definição polissêmica a respeito do termo matematização
4.5	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.

Fonte: A autora.

Questão: O que você entende por Modelo Científico?

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 05 (UC5), **Compreensão semântica da terminologia Modelo Científico**, a qual contém fragmentos textuais que apresentam definição da mesma.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas cinco Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis. No decorrer da análise, foi necessário elaborar uma Unidade de Registro Emergente, a URE 5.6.

Quadro 13 – Unidades Temáticas de Registros da UC5.

UR	Descrição	Explicação para os registros
5.1	Desconhecimento do termo	Para agrupar registros que apresentam o desconhecimento do termo modelo científico.
5.2	Definição segundo o consenso científico atual	Para agrupar registros que apresentam definição do termo segundo o consenso científico atual.
5.3	Divergência semântica	Para agrupar registros que apresentam divergência semântica a respeito da terminologia modelo científico.
5.4	Polissemia	Para agrupar registros que apresentam definição polissêmica a respeito do termo.
5.5	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.
URE 5.6	Definição associada à Modelagem Matemática	Para agrupar os registros que relacionam Modelos Científicos e a Modelagem Matemática.

Fonte: A autora.

Questão: Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 6 (UC6) **Identificação de modelos científicos da área de formação**, a fim de reunir fragmentos textuais que identificam exemplos de modelos científicos válidos na área de formação do participante.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas seis Unidades de Registros (UR) prévias possíveis.

Quadro 14 – Unidades Temáticas de Registros da UC6.

UR	Descrição	Explicação para os registros
6.1	Exemplificação segundo o consenso científico atual relacionado à tipologia de	Para agrupar registros que apresentem exemplificações mencionadas durante o minicurso.

	modelos apresentada no minicurso	
6.2	Exemplificação segundo o consenso científico atual	Para agrupar registros que contemplam exemplos de modelos.
6.3	Divergências semânticas entre definições	Para agrupar registros que apresentam hipóteses, leis, teoremas, teorias, axiomas ao invés de modelos científicos.
6.4	Exemplificação polissêmica a respeito de modelos científicos	Para agrupar registros que apresentam modelos mentais, didáticos, entre outros, como modelos científicos.
6.5	Ausência de exemplos de modelos científicos da área de formação	Para agrupar registros que não apresentam exemplos de modelos científicos.
6.6	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.

Fonte: A autora.

Questão: Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta.

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 07 (UC7), **O papel da Matemática na Física**, a fim de reunir fragmentos textuais que explicitam o papel da Matemática na Física na visão dos/das estudantes.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas seis Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis. No decorrer da análise, foi necessário elaborar uma Unidade de Registro Emergente, a URE 7.7.

Quadro 15 – Unidades Temáticas de Registros da UC7.

UR	Descrição	Explicação para os registros
7.1	Apresenta a Matemática como recurso gnosiológico	Para agrupar registros que apresentam a Matemática voltada para uma reflexão em torno da origem, natureza e limites do ato cognitivo.
7.2	Apresenta a Matemática como instrumento/linguagem para descrever fenômenos físicos	Para agrupar registros que apresentam a Matemática exercendo a função de descrever fenômenos físicos.
7.3	Participação da Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e lógico formal de teorias	Para agrupar registros que apresentam a participação Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter abstrato e lógico formal de teorias.
7.4	Contribuição da Matemática na Epistemologia	Para agrupar registros que apresentam contribuições referentes à natureza do conhecimento científico.
7.5	Apresenta a Matemática como um obstáculo para o entendimento/desenvolvimento da Física	Para agrupar registros que possibilitam afirmar que os/as estudantes entendem que a Matemática, de alguma forma, dificulta a compreensão da Física.

7.6	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.
URE 7.7	Apresenta a Matemática como um recurso para resolver problemas	Para agrupar os registros que apresentam a Matemática como um recurso para resolver problemas ou questões que envolvam cálculo.

Fonte: A autora.

Questão: A Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico? Justifique sua resposta.

Foi elaborada a Unidade Temática de Contexto 8 (UC8) **Relação entre Modelagem Matemática e Epistemologia da Ciência**, a fim de reunir fragmentos textuais que explicitem as noções dos participantes a respeito da contribuição da Modelagem Matemática no desenvolvimento do conhecimento científico.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas sete Unidades de Registros (UR) prévias possíveis. No decorrer da análise, foi necessário elaborar uma Unidade de Registro Emergente, a URE 8.8.

Quadro 16 – Unidades Temáticas de Registros da UC8.

UR	Descrição	Explicação para os registros
8.1	Modelagem Matemática como recurso gnosiológico	Agrupa registros que apresentam a Modelagem Matemática como um recurso teórico-metodológico que auxilia na compreensão da teoria científica.
8.2	Modelagem Matemática para a representação de fenômenos	Agrupa registros que apresentam a Modelagem Matemática exercendo a função de representação de fenômenos.
8.3	Participação da Modelagem Matemática na análise de teorias e de testes de hipóteses teóricas aplicadas em situações empíricas	Agrupa registros que explicitam a participação da Modelagem Matemática como mediadora entre teorias e situações empíricas.
8.4	Participação da Modelagem Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e formal de teorias	Agrupa registros que apresentam a participação da Modelagem Matemática na compreensão de fenômenos novos que ainda não possuem conceituação teórica e que levam ao aprimoramento de teorias já existentes.
8.5	Desconhecimento da contribuição da Modelagem Matemática na construção do conhecimento científico	Agrupa registros que possibilitam afirmar que as/os participantes desconhecem a contribuição mencionada.
8.6	A resposta não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.
8.7	Ausência de explicitação do tipo de contribuição	Para agrupar registros que afirmam haver contribuições da Modelagem Matemática,

		mas que não explicitam o tipo da contribuição que a mesma exerce.
URE 8.8	Modelagem Matemática Fórmulas	x Para agrupar os registros que apresentam a Modelagem Matemática como uma metodologia que possibilita deduzir os modelos ao invés de decorar fórmulas.

Fonte: A autora.

Questão: Que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades propostas neste minicurso? Comente.

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 09 (UC9), **Dificuldades no decorrer das atividades**, a fim de reunir fragmentos textuais que explicitem quais dificuldades os/as estudantes encontraram durante as atividades propostas no minicurso.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas cinco Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis. No decorrer da análise, foi necessário elaborar uma Unidade de Registro Emergente, a URE 9.7.

Quadro 17 – Unidades Temáticas de Registros da UC9.

UR	Descrição	Explicação para os registros
9.1	Dificuldade com a Modelagem Matemática	Para agrupar registros que apresentam a metodologia Modelagem Matemática como fator de dificuldade na execução das atividades.
9.2	Dificuldade de interpretação de texto	Para agrupar registros que apresentam como dificuldade a interpretação do enunciado.
9.3	Dificuldade na construção do modelo científico	Para agrupar registros que apresentam dificuldade na elaboração do modelo científico.
9.4	Dificuldade na etapa da Matematização	Para agrupar registros que possibilitam afirmar que os/as estudantes encontraram dificuldade na etapa da Matematização.
9.5	Não houve dificuldade	Para agrupar os registros que expressam que os/as participantes não encontraram dificuldades no decorrer das atividades.
9.6	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.
URE 9.7	Dificuldade por não poder utilizar fórmulas prontas	Para agrupar os registros em que os/as participantes afirmam terem encontrado dificuldades em não poderem utilizar fórmulas já conhecidas.

Fonte: A autora.

Questão: Na sua opinião, atividades de Modelagem Matemática deveriam estar presentes em aulas de Física no Ensino Médio? Justifique sua resposta.

Elaborou-se a Unidade Temática de Contexto 10 (UC10), **Modelagem Matemática no Ensino de Física**, a fim de reunir fragmentos textuais que apresentam a opinião dos/das estudantes no que diz respeito à inserção de atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Física no Ensino Médio.

Para essa Unidade de Contexto foram organizadas oito Unidades Temáticas de Registro (UR) prévias possíveis. No decorrer da análise foi necessário elaborar duas unidades emergentes, as URE 10.9 e URE 10.10.

Quadro 18 – Unidades Temáticas de Registros da UC10.

UR	Descrição	Explicação para os registros
10.1	Não considera pertinente a inserção, sem justificativa	Para agrupar registros que apresentam a não pertinência da inserção de atividades de Modelagem Matemática em aulas de Física do Ensino Médio mas sem justificativa.
10.2	Não considera pertinente a inserção, com justificativa	Para agrupar registros que apresentam a não pertinência da inserção das atividades, com justificativa.
10.3	Considera pertinente a inserção, sem justificativa	Para agrupar registros que apresentam a pertinência, sem justificativa.
10.4	Considera pertinente a inserção, com justificativa de caráter gnosiológico	Para agrupar registros que consideram a inserção de tais atividades pertinentes e justificam que a mesma auxilia na compreensão de teorias científicas.
10.5	Considera pertinente a inserção, com justificativa de caráter epistemológico	Para agrupar registros que consideram a inserção de tais atividades pertinentes e justificam que a mesma contribui na compreensão do processo de construção do conhecimento.
10.6	Considera pertinente a inserção, com justificativa de caráter empírico	Para agrupar registros que justificam a pertinência da mesma por auxiliar na representação de fenômenos empíricos.
10.7	Considera pertinente a inserção, com justificativa de caráter contextualizador	Para agrupar registros que justificam a pertinência da mesma por proporcionar atividades contextualizadoras.
10.8	Não contempla a pergunta	Para agrupar os registros de respostas incoerentes com a pergunta.
URE 10.9	Considera pertinente a inserção por seu caráter motivador/instigante	Para agrupar registros em que os(as) participantes justificam a pertinência da mesma pelo fato da Modelagem Matemática ser uma abordagem motivadora e instigante para os(as) alunos(as).

URE 10.10	Considera pertinente a inserção por fazer com que o(a) aluno(a) pense	Para agrupar os fragmentos de resposta que justifiquem a inserção da Modelagem Matemática, pela mesma fazer com que o aluno pense ao invés de apenas aplicar fórmulas prontas.
--------------	--	--

Fonte: A autora.

No capítulo a seguir, são apresentadas a unitarização dos dados e a análise dos mesmos. É relevante salientar que esse processo não foi linear, e por muitas vezes foi preciso retornar ao referencial teórico e os procedimentos metodológicos. É conveniente enfatizar que essa não é a única interpretação possível, pois está permeada pelas escolhas teóricas e metodológicas desta pesquisa.

7 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos e a análise dos mesmos. Participaram do minicurso ofertado, 20 alunos(as), como já citado anteriormente, porém o questionário de um aluno está com letra ilegível, e foi excluído da análise dos questionários. Sendo assim, são apresentados os dados de 19 participantes.

Todo material foi obtido por meio do consentimento livre e esclarecido de cada participante (Apêndice A), mediante nosso compromisso ético em manter preservada a identidade dos(as) estudantes, por esta razão, aos nomes dos(as) participantes, foi atribuído um código, sendo F1, F2, F3, ..., F11 para os(as) 11 alunos(as) que estudam Física, licenciatura e bacharelado, e M1, M2, M3, ..., M8, para os(as) oito participantes que estudam Matemática, também nas modalidades licenciatura e bacharelado.

Os dados unitarizados foram decodificados intersubjetivamente por integrantes do grupo de pesquisa IFHIECEM. Serão apresentados alguns exemplares dos fragmentos textuais nas UR que apresentaram registro, as UR sem registro foram retiradas dos quadros, a fim de promover fluidez no texto. Todos os demais fragmentos unitarizados estão no apêndice J.

7.1 Unitarização dos questionários

Na UC1, “**Noções a respeito de Modelagem Matemática**”, foram unitarizados os dados referentes à questão 1 do questionário prévio, que tinha por objetivo conhecer se os(as) participantes receberam, em alguma etapa de sua vida escolar ou na universidade, noções a respeito da Modelagem Matemática. O Quadro 19, apresenta os fragmentos textuais obtidos agrupados em sua UR correspondente. A única UR que obteve registro foi a UR 1.5.

Quadro 19 - Frequências absolutas das UR da UC1.

UC1 - Noções a respeito de Modelagem Matemática	
UR 1.5 Ausência de Noções a respeito da Modelagem Matemática	Frequência: 19 Registros <i>Não.</i>
Total de registros	19 registros

Fonte: A autora.

Como se pode observar no Quadro 19, nenhum dos(as) participantes conhecia a Modelagem Matemática. Como já apresentado nesta pesquisa, as discussões a respeito da Modelagem Matemática no Brasil se iniciaram nos anos 1980 (BIEMBENGUT, 2009), e essa temática tem se expandido ao longo dos anos, sendo tema de muitas pesquisas na graduação e pós-graduação, e com eventos específicos na área da Educação Matemática no país e no mundo. Mesmo assim, nenhum dos 19 participantes, que são de 11 cidades diferentes, de dois estados do Brasil (SP e PR), afirmou ter tido experiências com a Modelagem Matemática no Ensino Básico (Fundamental e Médio).

Tendo em vista os 19 registros que apresentam o desconhecimento do termo, pode-se levantar duas hipóteses, a primeira é que os(as) estudantes podem ter executado atividades de Modelagem Matemática sem saberem que estas se tratavam de fato de Modelagem Matemática, ou ainda não se lembrarem de tal acontecimento, já que a pergunta se refere a um longo período. A segunda hipótese seria que as pesquisas científicas não estão chegando às salas de aula do Brasil como deveriam. De todo modo, tais dados reforçam as pesquisas que têm como intuito a formação de professores, pois são estes professores capacitados que poderão levar os resultados científicos já consolidados na academia, para as escolas.

A UC2, "**Compreensão da metodologia Modelagem Matemática**", foi elaborada a fim de conhecer as noções dos(as) participantes a respeito da Modelagem Matemática. No Quadro 20, apresentam-se os registros, prévios e posteriores, obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foi inserido também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC2.

Quadro 20 - Frequências absolutas das UR da UC2.

UC2 - Compreensão da metodologia Modelagem Matemática		
	PRÉVIO	POSTERIOR
UR2.1 Desconhecimento da Metodologia	Frequência: 3 Registros <i>F11: Não sei.</i>	Frequência: 0 Registro
UR2.2 Definição Segundo o Consenso Científico Atual	Frequência: 7 Registros <i>M1: É como a Matemática é aplicada no cotidiano e utilizada em outras áreas como a Física, por exemplo. Trazendo fenômenos do dia a dia e transformando-os em objeto de estudo.</i>	Frequência: 14 Registros <i>F9: Modelagem matemática é a aplicação da matemática para resolver problemas da realidade, seja do dia a dia ou uma questão científica. É a possibilidade de enxergar um</i>

		<i>método lógico para se chegar a um resultado.</i>
UR2.3 Divergência Semântica	Frequência: 9 Registros <i>M8: Eu entendo que a modelagem matemática é para pegar uma fórmula e deixar o mais fácil possível.</i>	Frequência: 4 Registros <i>F6: A adaptação da matemática a conceitos mais palpáveis e menos teóricos.</i>
UR2.4 Não Contempla a Pergunta	Frequência: 0 Registro	Frequência: 1 Registro <i>F11: Não sei colocar em palavras certas.</i>
Total De Registros	19 registros	19 registros

Fonte: A autora.

Ao analisar o Quadro 20, constata-se que mesmo os(as) participantes não conhecendo a Modelagem Matemática, sete participantes definiram-na, intuitivamente, segundo o consenso científico atual (UR 2.2). Pode-se observar um crescimento significativo na UR 2.2, “Definição Segundo o Consenso Científico Atual”, que passou de sete registros iniciais para 14 registros após a abordagem didática; um ponto a ser destacado é que os sete participantes que compõem a UR 2.2 prévia permaneceram nela posteriormente.

A UR 2.1, “Desconhecimento da Metodologia”, obteve apenas três registros iniciais, dentre esses registros, o participante M7, posteriormente, respondeu segundo o consenso científico atual, F10 respondeu de forma divergente e a resposta de F11 não contemplou a pergunta. A resposta de F11 no questionário posterior foi o único registro da UR 2.4 “Não Contempla a Pergunta”.

Já a UR 2.3, “Divergência Semântica”, teve expressiva diminuição, inicialmente foram unitarizados nove registros divergentes, e após a abordagem didática o número de registros caiu para quatro. Dentre os nove participantes que definiram a Modelagem Matemática de forma divergente, apenas três permaneceram com respostas posteriores divergentes, os outros seis responderam segundo o consenso científico atual.

A UC3, “**Noções a respeito do tema Matemática**”, foi elaborada com o objetivo de identificar se os/as estudantes receberam noções a respeito do tema matemática ao longo de sua formação. O Quadro 21, apresenta os registros obtidos, previamente, e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro

foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC3. Não foram unitarizados registros nas UR 3.1 “Noções de Matematização no Ensino Fundamental”, UR 3.2 “Noções de Matematização no Ensino Médio”, UR 3.3 “Noções de Matematização no Ensino Superior”, UR 3.4 “Noções de Matematização em Congressos, Minicursos e/ou Curso de Extensão” e na UR 3.7 “Não contempla a pergunta”.

Quadro 21 - Frequências absolutas das UR da UC3.

UC3 - Noções a respeito do tema Matematização	
UR 3.5 Ausência de noções a respeito da Matematização	Frequência: 18 Registros <i>M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, F1, F2, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10, F11: Não.</i>
UR 3.6 Noções de Matematização sem especificação	Frequência: 1 Registro <i>F3: Sim, por conta própria.</i>
Total de registros	19 registros

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 21, das sete UR elaboradas, apenas duas obtiveram registro. Na UR 3.5, “Ausência de noções a respeito da Matematização”, 18 participantes responderam que não receberam noções a respeito da Matematização em sua vida escolar até o momento, ou seja, no Ensino Fundamental, Médio, Superior ou em Cursos de extensão.

O único participante que afirmou conhecer a temática, alegou ser por conta própria, sem especificar em quais livros, artigos ou sites, por exemplo, ele(a) utilizou. Por essa razão, seu fragmento foi unitarizado na UR 3.6, “Noções de Matematização sem especificação”.

A UC4, “**Compreensão semântica da terminologia Matematização**”, tem como objetivo conhecer como os(as) estudantes compreendem a terminologia Matematização antes e depois do minicurso ofertado. O Quadro 22, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC4. Não foram unitarizados registros na UR 4.5 “Não Contempla a Pergunta”.

Quadro 22 - Frequências absolutas das UR da UC4.

UC4 - Compreensão semântica da terminologia Matematização		
	PRÉVIO	POSTERIOR
UR 4.1 Desconhecimento do Termo	Frequência: 3 Registros <i>F8: Não sei.</i>	Frequência: 2 Registro <i>F2: Não sei.</i>

UR 4.2 Definição Segundo o Consenso Científico Atual	Frequência: 6 Registros <i>M5: Aproximar algo à Matemática, se utilizar de conceitos matemáticos para explicar algo.</i>	Frequência: 11 Registros <i>M3: Traduzir para linguagem Matemática os dados obtidos na observação e nas experiências feitas com o objeto que está sendo modelado.</i>
UR 4.3 Divergência Semântica	Frequência: 3 Registros <i>F4: Entender a lógica por trás do problema.</i>	Frequência: 1 Registro <i>F8: É algo que ocorre para dispensar o método atual de se colocar fórmulas e não pensar.</i>
UR 4.4 Polissemia	Frequência: 7 Registros <i>F5: Algo ou alguma coisa onde a Matemática está ou pode ser inserida.</i>	Frequência: 5 Registros <i>F5: A matematização é como podemos adicionar a Matemática em várias questões.</i>
Total De Registros	19 registros	19 registros

Fonte: A autora.

Mesmo 18 estudantes terem respondido no questionário prévio que não receberam noções a respeito da temática Matematização, 16 participantes esboçaram o que entendiam acerca da mesma, como se pode observar na UR 4.1, “Desconhecimento do termo”, em que há apenas três registros. Na mesma UR, no questionário posterior, há dois registros, de F2 e F10, em que suas respostas no questionário prévio foram unitarizadas na UR 4.2 e UR 4.4, respectivamente. Tal fato ainda irá ocorrer em algumas questões, pois alguns alunos, em especial F2, F5 e F10, estavam com pressa para irem embora, e a pedido da pesquisadora, para não deixarem os questionários em branco, eles responderam “não sei” para quase todas as questões.

Pode-se observar, no Quadro 22, que o número de registros da UR 4.2, “Definição Segundo o Consenso Científico Atual”, quase dobrou, passando de seis registros para 11. E as UR 4.3, “Divergência semântica”, e UR 4.4, “Polissemia”, passaram de um total de 10 registros para, posteriormente, um total de seis registros. Assim, pode-se inferir que os(as) estudantes compreenderam a temática Matematização após a intervenção do minicurso, que propôs reflexão a respeito da mesma durante toda a abordagem.

Na UC5, “**Compreensão semântica da terminologia Modelo Científico**”, o objetivo era conhecer o que os(as) participantes compreendiam a respeito de Modelo Científico, antes e depois do minicurso. O Quadro 23, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC5.

Foi necessária a elaboração de uma Unidade de Registro Emergente, a URE 5.6, “Definição associada à Modelagem Matemática”, e não foram unitarizados registros na UR 5.5 “Não Contempla a Pergunta”.

Quadro 23 - Frequências absolutas das UR da UC5.

UC5 - Compreensão semântica da terminologia Modelo Científico		
	PRÉVIO	POSTERIOR
UR 5.1 Desconhecimento do Termo	Frequência: 5 Registros <hr/> <i>M8: Não sei.</i>	Frequência: 4 Registros <hr/> <i>F5: Não sei.</i>
UR 5.2 Definição Segundo o Consenso Científico Atual	Frequência: 1 Registro <hr/> <i>F3: Um conjunto de ideias e propostas que visam explicar um determinado fenômeno.</i>	Frequência: 8 Registros <hr/> <i>F3: Conjunto de leis que explicam fenômenos científicos. Uma teoria é formada por modelos científicos.</i>
UR 5.3 Divergência Semântica	Frequência: 8 Registros <hr/> <i>F6: Um modelo com embasamento científico e bases empíricas.</i>	Frequência: 4 Registros <hr/> <i>M7: É um modelo que abrange várias áreas do conhecimento.</i>
UR 5.4 Polissemia	Frequência: 5 Registros <hr/> <i>M5: Acredito que seja algo que passou por uma série de etapas, como hipóteses, pesquisas, provas ou indícios, de tal forma que até aquele momento nada o contradiz.</i>	Frequência: 2 Registros <hr/> <i>F1: Um apanhado de informações devidamente organizadas a fim de descrever fenômenos.</i>
URE 5.6 Definição associada à Modelagem Matemática	Frequência: 0 Registro <hr/>	Frequência: 1 Registro <hr/> <i>F2: Modelo científico seria um conjunto de informações encontradas através da modelagem, mas que ainda não está completo.</i>
Total De Registros	19 registros	19 registros

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 23, na UR 5.1, “Desconhecimento do Termo”, inicialmente cinco estudantes afirmaram desconhecer a terminologia e posteriormente quatro alegaram desconhecer a mesma. Os(as) participantes M1 e M4 se mantiveram na UR 5.1 em ambos os questionários, e os outros dois registros que compõem esta UR posteriormente, são os estudantes F5 e F10, que no questionário prévio tiveram seus registros unitarizados na UR 5.3. Tal fato já foi explicitado na UC4.

A UR 5.2, “Definição Segundo o Consenso Científico Atual”, passou de um registro para oito, um expressivo aumento. Já as UR 5.3, “Divergência Semântica” e UR 5.4, “Polissemia”, passaram de um total de 13 registros para, posteriormente, um total de seis registros. O que se pode inferir que o minicurso ofertado contribuiu para o entendimento desta temática.

Ainda, foi unitarizado um registro na URE 5.6, “Definição associada à Modelagem Matemática”.

A UC6, “**Identificação de modelos científicos da área de formação**”, foi elaborada a fim de identificar se os(as) estudantes conseguiam exemplificar Modelos Científicos de suas áreas. Esta questão também foi inserida em ambos os questionários, prévio e posterior. O Quadro 24, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC6.

Quadro 24 - Frequências absolutas das UR da UC6.

UC6 – Identificação de Modelo Científico da área de formação		
	PRÉVIO	POSTERIOR
UR 6.1 Exemplificação segundo o consenso científico atual relacionado à tipologia de modelos apresentada no minicurso	Frequência: 0 Registro	Frequência: 1 Registro <i>M8: Por exemplo, velocidade média, eu poderia usar para calcular em quanto tempo leva para ir até algum local.</i>
UR 6.2 Exemplificação segundo o consenso científico atual	Frequência: 4 Registros <i>F7: Como exemplo os átomos, que possuem os modelos científicos de Bohr e o modelo científico de Rutherford.</i>	Frequência: 7 Registros <i>M6: Modelo do DNA, modelo do sistema solar, modelo de uma célula.</i>
UR 6.3 Divergências semânticas entre definições	Frequência: 3 Registros <i>F3: Teoria da Relatividade, Gravidade emergente, Mecânica quântica.</i>	Frequência: 2 Registros <i>F6: Teoria do Big Bang.</i>

UR 6.4 Exemplificação polissêmica a respeito de modelos científicos	Frequência: 1 Registro <i>F6: O estudo da matéria química como base curricular, devido ao seu vínculo com o estudo da Física.</i>	Frequência: 0 Registro
UR 6.5 Ausência de exemplos de modelos científicos da área de formação	Frequência: 9 Registros <i>F5, F10, F11, M1, M2, M3, M4, M7, M8: Não sei.</i>	Frequência: 8 Registros <i>F5, F10, M1, M2, M3, M4, M5, M7: Não sei.</i>
UR 6.6 Não Contempla a Pergunta	Frequência: 2 Registros <i>F9: Como algo é encarado como verdade: é idealizada uma hipótese sobre algo, realiza-se experimentos sobre isso e tira-se uma conclusão a respeito do tema.</i>	Frequência: 1 Registro <i>F9: Teoremas, pesquisas, papers, etc.</i>
Total De Registros	19 registros	19 registros

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 24, inicialmente, quatro participantes citaram modelos científicos, segundo o consenso científico atual, de suas áreas de atuação, como se pode observar na UR 6.2, “Exemplificação segundo o consenso científico atual”, e posteriormente, tem-se oito participantes que citaram modelos científicos em suas áreas de formação, sendo sete registros na UR 6.2 e um na UR 6.1, “Exemplificação segundo o consenso científico atual relacionado à tipologia de modelos apresentada no minicurso”.

No que se refere às UR 6.3, “Divergências semânticas entre definições”, UR 6.4, “Exemplificação polissêmica a respeito de modelos científicos” e UR 6.6, “Não Contempla a Pergunta”, previamente somavam-se seis registros unitarizados nestas unidades e posteriormente esse número reduziu pela metade, ou seja, três registros.

Já na UR 6.5, “Ausência de exemplos de modelos científicos da área de formação”, o número de registros manteve-se praticamente inalterado, o que se pode inferir que tal abordagem foi pouco explorada no minicurso ofertado.

Um fato a ser destacado é que os quatro registros prévios da UR 6.2 e seis dos sete registros posteriores da mesma unidade de registro, são de estudantes do curso de Física. E dos nove registros prévios da UR 6.5, seis são de estudantes que cursam Matemática, da mesma forma, dos oito registros posteriores da mesma

unidade de registro, seis são de alunos(as) da Matemática. O que indica que o assunto “modelos científicos” é pouco explorado nas aulas de Matemática.

A UC7, “**O papel da Matemática na Física**”, tinha por objetivo conhecer qual papel os(as) estudantes atribuíam à Matemática na Física, antes e depois do minicurso ofertado. O Quadro 25, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC7.

Foi necessária a elaboração de uma Unidade de Registro Emergente, a URE 7.7, “Apresenta a Matemática como um recurso para resolver problemas”, e não foram unitarizados registros na UR 7.5 “Apresenta a Matemática como um obstáculo para o entendimento/desenvolvimento da Física”. É importante ressaltar que a resposta do questionário posterior de F9 foi fragmentada em duas UR, sendo elas a UR 7.2 e UR 7.4, sendo assim, o número total de registros posteriores da UC7 é 20.

Quadro 25 - Frequências absolutas das UR da UC7.

UC7 – O papel da Matemática na Física		
	PRÉVIO	POSTERIOR
UR 7.1 Apresenta a Matemática como recurso gnosiológico	Frequência: 3 Registros <i>F8: O papel da Matemática na Física é justificar e compreender algo que você está com dúvida ou criar uma comparação melhor para a teoria.</i>	Frequência: 2 Registros <i>F5: Muito mais que apenas uma ferramenta, a Matemática é uma essência de toda Ciência Exata.</i>
UR 7.2 Apresenta a Matemática como instrumento/linguagem para descrever fenômenos físicos	Frequência: 7 Registros <i>F9: A Matemática é a linguagem que a Física usa para expressar o funcionamento dos fenômenos naturais.</i>	Frequência: 4 Registros <i>F1: Atua como forma de linguagem para descrever fenômenos.</i>
UR 7.3 Participação da Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e lógico formal de teorias	Frequência: 3 Registros <i>M8: A Matemática na Física seria para deixar os teoremas dos físicos mais fáceis de se entender, e com isso transformar em uma fórmula.</i>	Frequência: 2 Registros <i>M2: A Matemática constrói as bases da Física, sendo um suporte às teorias e modelos. Pois sem a Matemática, a Física não teria um caráter sistêmico.</i>
	Frequência: 4 Registros	Frequência: 8 Registros

UR 7.4 Contribuição da Matemática na Epistemologia	<i>M2: A Matemática dá o suporte necessário para a Física se tornar Ciência Exata.</i>	<i>M3: A Matemática tem um papel fundamental na Física, pois é através dela que matematizamos um fenômeno e assim é construído um modelo matemático para descrever tal fenômeno.</i>
UR 7.6 Não Contempla a Pergunta	Frequência: 0 Registro	Frequência: 1 Registro <i>F8: A Matemática na Física é um jeito de justificar ou esclarecer algo melhor para alguém.</i>
URE 7.7 Apresenta a Matemática como um recurso para resolver problemas	Frequência: 2 Registros <i>F4: Mostra os caminhos para se resolver questões que envolvem raciocínio.</i>	Frequência: 3 Registros <i>M7: Poder equacionar e resolver problemas.</i>
Total De Registros	19 registros	20 registros

Fonte: A autora.

Segundo o Quadro 25, o número de registros das UR 7.1, “Apresenta a Matemática como recurso gnosiológico” e UR 7.3, “Participação da Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e lógico formal de teorias”, não teve alterações significativas, passando de três para dois, assim como a URE 7.7, “Apresenta a Matemática como um recurso para resolver problemas”, que passou de dois registros para três. E a UR 7.6, “Não Contempla a Pergunta”, que obteve apenas um registro posterior unitarizado.

As duas unidades de registros que apresentaram alterações significativas foram a UR 7.2, “Apresenta a Matemática como instrumento/linguagem para descrever fenômenos físicos”, em que os(as) estudantes associam a Matemática à descrição de fenômenos. Como já discutido nesta pesquisa, o papel da Matemática na Física é mais substancial do que apenas descritivo. Tal fato pode ser observado na alteração do número de registros da UR 7.4, “Contribuição da Matemática na Epistemologia”, que passou de quatro registros prévios para oito registros posteriores, o que se pode inferir que os(as) estudantes compreenderam que a Matemática tem um papel epistemológico na Física, em sua construção e aprimoramento.

Na UC8, “**Relação entre Modelagem Matemática e Epistemologia da Ciência**”, buscava-se conhecer as noções dos(das) participantes a respeito da contribuição da Modelagem Matemática no desenvolvimento do conhecimento

científico após o minicurso ofertado. O Quadro 26, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC8.

Foi necessária a elaboração de uma Unidade de Registro Emergente, a URE 8.8, “Modelagem Matemática x Fórmulas”, e não foram unitarizados registros na UR 8.2, “Modelagem Matemática para a representação de fenômenos”.

Quadro 26 - Frequências absolutas das UR da UC8.

UC8 – Relação entre Modelagem Matemática e Epistemologia da Ciência	
UR 8.1 Modelagem Matemática como recurso gnosiológico	Frequência: 3 Registros <i>F4: Sim, pois a Modelagem Matemática é uma das etapas na formação de um modelo.</i>
UR 8.3 Participação da Modelagem Matemática na análise de teorias e de testes de hipóteses teóricas aplicadas em situações empíricas	Frequência: 4 Registros <i>M5: Sim, a Modelagem Matemática traz para a Ciência uma forma diferente de enxergar diversos aspectos do mundo e quando usada de forma adequada tende a simplificar também a compreensão e a comprovação de uma dada hipótese.</i>
UR 8.4 Participação da Modelagem Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e formal de teorias	Frequência: 2 Registros <i>M2: Sim, pois todo conhecimento produzido um dia foi apenas um modelo, uma tentativa de explicação da realidade, que com aperfeiçoamento construiu as bases do nosso conhecimento.</i>
UR 8.5 Desconhecimento da contribuição da Modelagem Matemática na construção do conhecimento científico	Frequência: 2 Registros <i>M3: Não sei.</i>
UR 8.6 A resposta não contempla a pergunta	Frequência: 1 Registro <i>M4: Sim, pois a Matemática pode introduzir de maneira direta, aspectos que resultam no estudo de maneira mais ampla de assuntos em que nela estão introduzidos.</i>
UR 8.7 Ausência de explicitação do tipo de contribuição	Frequência: 2 Registros <i>F10: Sim, qualquer forma de ensino ou conhecimento contribui.</i>
URE 8.8 Modelagem Matemática x fórmulas	Frequência: 5 Registros <i>F9: Acredito que não apenas pode, mas seria ideal que fosse aplicada, pois assim o aprendizado seria legítimo e desenvolveria o pensamento lógico, não apenas incentivando decorar fórmulas e a mediocridade.</i>
Total de registros	19 registros

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 26, a maioria dos(as) estudantes entendem que a Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento científico, dentre eles, três justificaram com aspectos gnosiológicos na UR 8.1, “Modelagem Matemática como recurso gnosiológico”, quatro justificaram tal contribuição no que diz respeito a situações empíricas na UR 8.3, “Participação da Modelagem Matemática na análise de teorias e de testes de hipóteses teóricas aplicadas em situações empíricas”, e dois justificaram suas repostas por meio da compreensão e aprimoramento de teorias na UR 8.4, “Participação da Modelagem Matemática na compreensão e aprimoramento do caráter teórico e formal de teorias”.

Na UR 8.5, “Desconhecimento da contribuição da Modelagem Matemática na construção do conhecimento científico”, foram unitarizados dois registros, assim como na UR 8.7, “Ausência de explicitação do tipo de contribuição”, em que o(a) estudante afirma que a Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento científico mas não justifica sua resposta. E um(a) estudante respondeu de forma confusa, tendo seu registro unitarizado na UR 8.6, “A resposta não contempla a pergunta”.

A unidade com maior número de registros foi a URE 8.8, “Modelagem Matemática x fórmulas”, em que cinco estudantes justificaram a contribuição da Modelagem Matemática no fato de não precisarem decorar fórmulas prontas, e sim entender o processo de matematização utilizado em uma determinada situação da realidade, e chegar ao modelo matemático correspondente.

A UC9, “**Dificuldades no decorrer das atividades**”, tinha por objetivo identificar as dificuldades encontradas pelos(as) participantes no decorrer do minicurso ofertado, a fim de aperfeiçoá-lo para futuras aplicações do mesmo. O Quadro 27, apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes. Nesse quadro foram inseridas também as frequências absolutas para cada uma das UR da UC9.

Foi necessária a elaboração de uma Unidade de Registro Emergente, a URE 9.7, “Dificuldade por não poder utilizar fórmulas prontas”, e não foram unitarizados registros na UR 9.2, “Dificuldade de interpretação de texto”.

Quadro 27 - Frequências absolutas das UR da UC9.

UC9 – Dificuldades no decorrer das atividades	
UR 9.1 Dificuldade com a Modelagem Matemática	Frequência: 6 Registros <i>F3: Tive dificuldade com alguns raciocínios mais lógicos, creio eu que por falta de prática na Modelagem.</i>
UR 9.3 Dificuldade na construção do modelo científico	Frequência: 1 Registro <i>M6: O fato de demonstrar uma fórmula equacional que comprove seus resultados, não sendo o suficiente apenas achar o valor do que era procurado.</i>
UR 9.4 Dificuldade na etapa da Matematização	Frequência: 4 Registros <i>F4: As dificuldades em motivo de não conhecer todos os conceitos matemáticos.</i>
UR 9.5 Não houve dificuldade	Frequência: 2 Registros <i>F10: Nenhuma, um curso muito bacana e dinâmico que chama atenção do aluno.</i>
UR 9.6 Não contempla a pergunta	Frequência: 1 Registro <i>M7: Não diria dificuldades, pois foi muito bom poder pensar bastante e conseguir resolver o exercício ou aproximar da resolução final.</i>
URE 9.7 Dificuldade por não poder utilizar fórmulas prontas	Frequência: 5 Registros <i>F8: A dificuldade encontrada foi não poder usar a fórmula para enxergar de um outro jeito a equação.</i>
Total de registros	19 registros

Fonte: A autora.

Segundo o Quadro 27, as maiores dificuldades enfrentadas pelos(as) estudantes referem-se às etapas da Modelagem Matemática, com seis registros na UR 9.1, “Dificuldade com a Modelagem Matemática”, e com o fato de não poderem utilizar fórmulas já conhecidas, com cinco registros na URE 9.7, “Dificuldade por não poder utilizar fórmulas prontas”. Tais atividades são justificáveis pelo fato de todos os(as) participantes terem tido o primeiro contato com a Modelagem Matemática no minicurso, em que apenas seis atividades foram exploradas, logo, era esperada tal estranheza com a nova metodologia. Assim como, o fato de não poderem utilizar fórmulas prontas, para seguirem os passos da Modelagem Matemática. Como esperado pela pesquisadora, quatro dos cinco participantes que tiveram seus registros unitarizados na URE 9.7 estudam Física, e esta foi uma queixa recorrente durante o minicurso, como já exposto em questões anteriores.

Nas demais unidades, tem-se que quatro estudantes apresentaram dificuldades no que se refere à matematização na UR 9.4, “Dificuldade na etapa da Matematização”, e um participante afirmou ter tido dificuldade no que diz respeito ao modelo científico na UR 9.3, “Dificuldade na construção do modelo científico”.

Dois estudantes afirmaram não terem tido dificuldade na UR 9.5, “Não houve dificuldade” e um(a) participante respondeu de forma confusa, tendo seu registro unitarizado na UR 9.6, “Não contempla a pergunta”.

Por fim, a UC10, "**Modelagem Matemática no Ensino Física**", foi elaborada a fim de investigar se, após o minicurso e as atividades de Modelagem Matemática, os(as) discentes consideram relevante a inserção de atividades deste tipo no Ensino Médio nas disciplinas de Física. O Quadro 28 apresenta os registros obtidos e agrupados em suas UR correspondentes.

Foi necessária a elaboração de duas UR emergentes, sendo a URE 10.9 "Considera pertinente a inserção por seu caráter motivador/instigante" e a URE 10,10 "Considera pertinente a inserção por fazer com que o(a) aluno(a) pense". Foi inserido também o número de registros e as frequências absolutas ocorridos para cada uma das UR da UC10. Não foram unitarizados registros nas UR 10.1 “Não considera pertinente a inserção, sem justificativa”, UR 10.2 “Não considera pertinente a inserção, com justificativa”, e na UR 10.6 “Considera pertinente a inserção, com justificativa de caráter empírico”.

Quadro 28 - Frequências absolutas das UR da UC10.

UC10 - Modelagem Matemática no Ensino de Física	
UR10.3 Considera Pertinente a Inserção, sem Justificativa	Frequência: 1 Registro <i>M5: Sim, desde que não comprometa os outros conteúdos necessários no Ensino Médio.</i>
UR10.4 Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Gnosiológico	Frequência: 3 Registros <i>F11: Sim, pois muitos não sabem distinguir as diferenças de Matemática e Física ou não entendem a correlação entre as duas ou simplesmente acreditam que a Matemática é apenas uma ferramenta para a Física.</i>
UR10.5 Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Epistemológico	Frequência: 3 Registros <i>M4: Sim, deveriam, porque a Modelagem Matemática ajuda o aluno a repensar no que ele está estudando e assim consequentemente ele irá aprender com mais clareza.</i>

UR10.7 Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Contextualizador	Frequência: 2 Registros <i>M1: Sim, pois mostraria aos alunos como a Física está fortemente presente em seus cotidianos e que ultrapassa simples equações.</i>
UR 10.8 Não Contempla a Pergunta	Frequência: 1 Registro <i>F10: Não sei.</i>
URE10.9 Considera Pertinente a Inserção por seu Caráter Motivador/Instigante	Frequência: 5 Registros <i>F6: Sim, pois assim haveria maior interesse pela parte dos alunos em conhecer pela visão da Ciência o mundo, enxergar a teoria na prática.</i>
URE10.10 Considera Pertinente a Inserção por Fazer com Que o(a) Aluno(a) Pense.	Frequência: 4 Registros <i>F4: Sim, a Modelagem faz o aluno realmente pensar, ela faz a pessoa desenvolver seu raciocínio e resolver problemas de maneira lógica informal.</i>
Total de Registros	19 registros

Fonte: A autora.

De acordo com o Quadro 28, todos(as) os(as) participantes consideraram pertinentes a inserção de atividades da Modelagem Matemática no ensino de disciplinas de Física no Ensino Médio. A UR 10.3 “Considera Pertinente a Inserção, sem Justificativa” teve apenas uma resposta unitarizada, assim como a UR 10.8 “Não Contempla a Pergunta”.

As UR com maiores números de incidência foram as UR emergentes. A URE 10.9 “Considera Pertinente a Inserção por seu Caráter Motivador/Instigante” que obteve cinco registros e a URE 10.10 “Considera Pertinente a Inserção por Fazer com que o(a) Aluno(a) Pense” com quatro registros. Ambas as unidades estavam previstas na literatura, logo, considera-se um equívoco desta pesquisadora que, por algum motivo, não descreveu tais unidades previamente.

Bassanezi (2002, p. 44), argumenta que atividades de Modelagem Matemática podem ser “utilizadas para motivar o aprendizado de certos conteúdos matemáticos ou o reconhecimento do valor da própria matemática”, e diz que “O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática” (BASSANEZI, 2002, p. 38). De acordo com o autor, “o processo utilizado para aprendizagem com modelagem leva em consideração 3 componentes fundamentais: motivação, abstração e argumentação matemática [...]” (BASSANEZI, 2002, p. 210). Tais argumentos de

Bassanezi, e que são de diversos autores da área também mostram a importância da URE 10.9 e corroboram a pertinência da mesma.

A respeito da URE 10.10, Bassanezi (2002, p. 208) ressalta que trabalhar com a Modelagem Matemática não visa apenas a ampliar o conhecimento matemático, mas sobretudo, desenvolver a forma de pensar e agir dos praticantes. Ainda, segundo o autor,

a utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do cursista, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicações dos mesmos, a partir da realidade de seu ambiente (BASSANEZI, 2002, p. 207).

Logo, a URE 10.10 também é prevista na literatura, justificando a necessidade da mesma nesta questão.

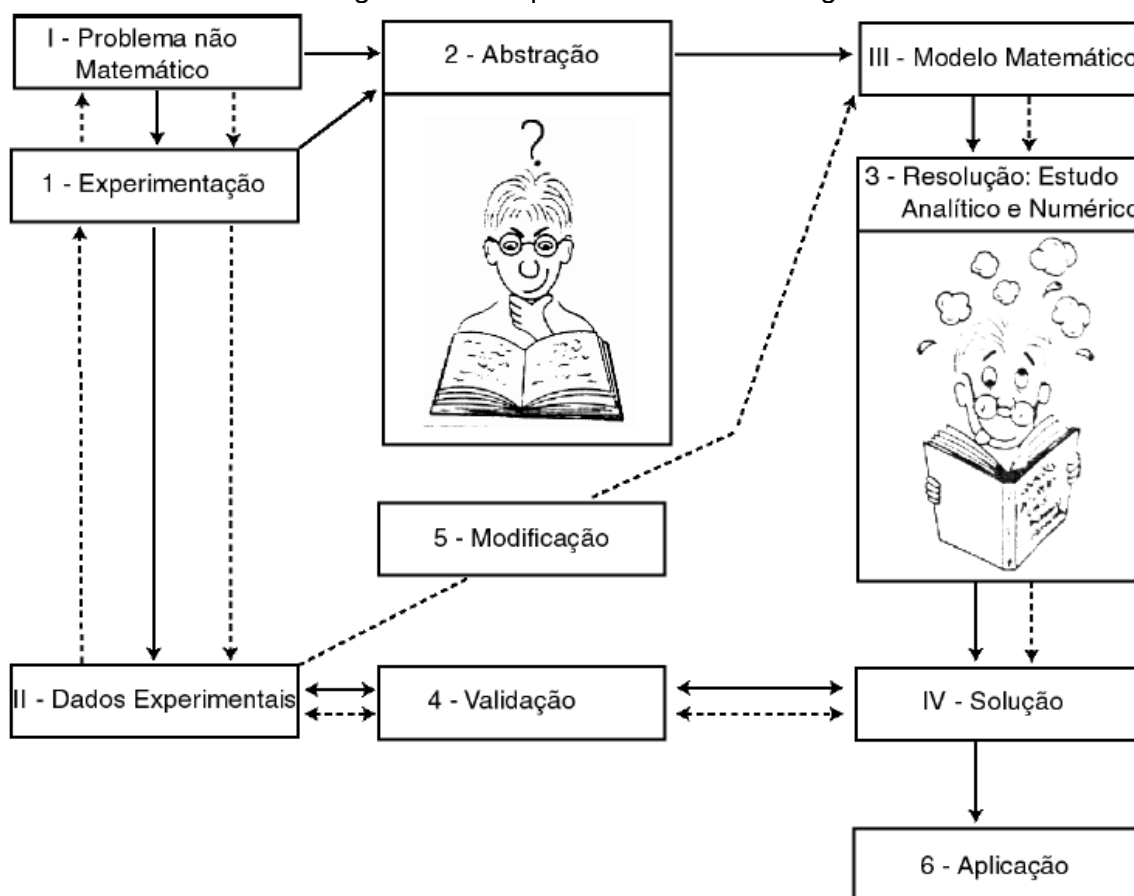
Tanto a UR 10.4 “Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Gnosiológico” quanto a UR 10.5 “Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Epistemológico” obtiveram 3 registros unitarizados em cada. E duas respostas foram unitarizadas na UR 10.7 “Considera Pertinente a Inserção, com Justificativa de Caráter Contextualizador”.

A seguir, são apresentadas as análises das seis atividades que compuseram a abordagem didática proposta.

7.2 Análise das atividades

As atividades de Modelagem Matemática foram analisadas segundo a sequência de etapas proposta por Bassanezi (2002), sendo elas: 1- experimentação, 2- abstração, 3- resolução, 4- validação e 5- modificação. A figura a seguir apresenta, simplificada, o processo de Modelagem Matemática proposto pelo autor.

Figura 15 – Esquema de uma modelagem.



Fonte: Bassanezi (2002, p. 27).

Optou-se em apresentar, de forma detalhada, a resolução e análise das seis atividades do Grupo II, formado por quatro estudantes do primeiro ano de Licenciatura em Física, e do Grupo IV, formado por quatro estudantes do primeiro ano de Licenciatura em Matemática. Tal escolha deu-se pelo fato de serem grupos formados por recém ingressos na Universidade, ou seja, que não tiveram contato com a Matemática do Ensino Superior e por representarem tanto a Licenciatura em Física quanto a Licenciatura em Matemática.

Apresenta-se também, de forma detalhada, a resolução e análise de mais um grupo, sendo este escolhido por apresentar uma alternativa de resolução diferente dos demais. Assim, em cada atividade este grupo pode variar. A resolução e análise dos demais grupos, serão apresentadas de forma sucinta.

✓ **Atividade 1: Volume da Maçã**

O objetivo desta atividade era determinar um modelo matemático para obter o volume de uma maçã. Para tanto foi entregue para cada grupo a folha com a atividade e uma maçã (todas com aproximadamente o mesmo formato e volume), e foi disponibilizado também barbante, régua e faca para os(as) participantes.

Bassanezi (2002), propõe quatro maneiras de resolução por meio de diferentes conceitos matemáticos empregados, sendo elas: utilizando a fórmula do volume da esfera, utilizando o teorema de Pappus, fatiando a maçã em retângulos e usando a integração. O autor faz uma observação a respeito dessas diferentes formas de resolver o mesmo problema.

Os modelos matemáticos empregados para a avaliação do volume de uma maçã obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual. Isto não implica necessariamente que o grau de aproximação do resultado obtido seja proporcional à complexidade do modelo. Neste caso específico, um processo mecânico seria o mais indicado para a avaliação, tanto em termos de simplicidade como de precisão: Mergulha-se a maçã num recipiente cheio de água e o volume do líquido deslocado é igual ao volume da maçã (BASSANEZI, 2002, p. 241).

Ao iniciar a atividade, todos os grupos perguntaram se podiam encontrar o volume da maçã mergulhando-a em um recipiente com água, porém foi explicado que mais do que o valor numérico do volume da maçã, eles tinham por objetivo construir um modelo matemático. Foi, então, que cada grupo começou a levantar hipóteses de como resolver este problema e a associarem a qual figura geométrica a maçã se assemelhava.

São apresentadas a seguir, as resoluções dos Grupo II, IV e V.

• **Grupo II** – Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

Os integrantes do grupo II não chegaram a um consenso de como resolver esta atividade, logo, dois integrantes seguiram uma estratégia de resolução e os outros dois seguiram outra. Esses caminhos serão discriminados a seguir como *i* e *ii*.

1- *Experimentação*: *i*) cortaram a maçã em pedaços bem pequenos e a colocaram em um copo plástico. *ii*) mediram o comprimento da maçã com o auxílio do barbante e da régua.

2- Abstração:

a) *Seleção das variáveis:* i) adotaram como variável as medidas do copo, sendo elas altura, raio maior e raio menor. ii) adotaram como variável independente o raio.

b) *Problematização:* já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses:* i) como colocaram os diversos pequenos pedaços da maçã em um copo, parte dos integrantes do grupo assumiu que o volume da maçã correspondia ao volume do copo que tinha o formato de um tronco de cone. ii) parte dos integrantes do grupo supuseram que a maçã tinha o formato de uma esfera.

d) *Simplificação:* i) assumiram que, mesmo os pedaços da maçã serem sólidos, os mesmos ocupariam exatamente o volume do copo. ii) assumiram que a maçã tinha o formato de uma esfera e desconsideraram as irregularidades reais da maçã.

Figura 16 – Maçã no tronco de cone.



Fonte: Parte dos integrantes (i) do Grupo II.

3- *Resolução:* i) Com o auxílio da régua, mediram a altura e os raios do copo, sendo as medidas: $R = 3,25$ cm, $r = 2,15$ cm e $h = 7,2$ cm. Em seguida, utilizaram a equação do volume do tronco de cone.

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2) = 167,18 \text{ cm}^3.$$

ii) os demais integrantes do grupo, por meio do comprimento da circunferência, 23,5 cm, encontraram o valor do raio.

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R \rightarrow R = \frac{C}{2\pi} \cong 3,74 \text{ cm}.$$

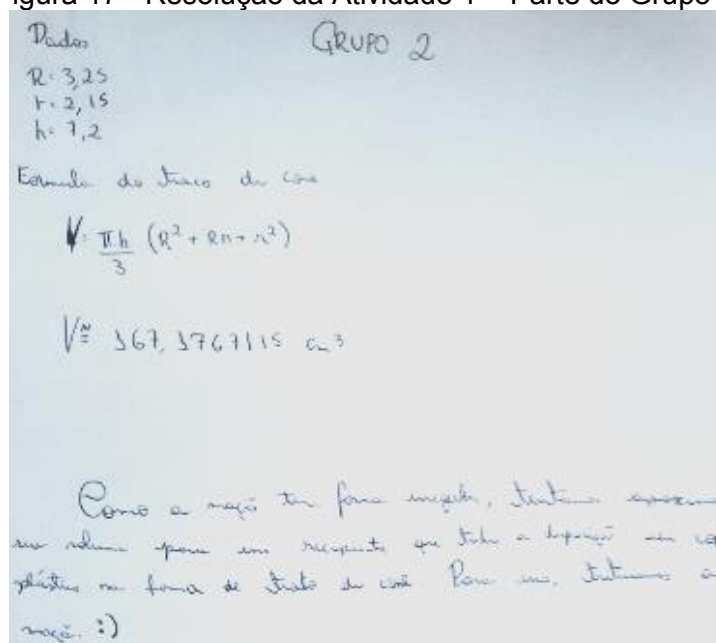
Em seguida, utilizaram a equação do volume da esfera.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 219,13 \text{ cm}^3.$$

4- *Validação*: os integrantes *ii* fizeram o cálculo do desvio padrão e escreveram o resultado com intervalo de dúvida.

5- *Modificação*: Não foi necessário modificar o modelo encontrado.

Figura 17 - Resolução da Atividade 1 – Parte do Grupo II.



Fonte: Parte dos integrantes (*i*) do Grupo II.

Figura 18 – Digitação da Figura 17.

Grupo 2	
Dados	
R = 3,25	
r = 2,15	
h = 7,2	
Fórmula do tronco de cone	
	$V = \frac{\pi \cdot h}{3} (R^2 + R \cdot r + r^2)$ $V \cong 167,1767115 \text{ cm}^3$
Como a maçã tem forma irregular, tentamos aproximar seu volume para um recipiente que tinha a disposição: um copo plástico na forma de tronco de cone. Para isso, trituramos a maçã.	

Fonte: Parte dos integrantes (*i*) do Grupo II.

As respostas finais do Grupo II para esta atividade foram i) 167,17 cm³ e ii) 219, 13 cm³ ± 49 cm³. É importante ressaltar que ambos utilizaram a mesma maçã. Utilizando a margem de erro, para menos, dos integrantes *ii*, o volume da maçã

seria $170,13 \text{ cm}^3$ e resultaria, praticamente, no mesmo valor encontrado pelos integrantes *i*.

• **Grupo IV** – Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

1- *Experimentação*: Inicialmente o grupo fez medições dos diferentes diâmetros da maçã com o auxílio do barbante e da régua.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram como variável independente o raio.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: supuseram que a maçã tinha o formato de uma esfera.

d) *Simplificação*: diferentemente de outros grupos que também fizeram a mesma aproximação com a esfera, o grupo IV cortou a maçã em cunhas esféricas com aproximadamente 45° , e com o auxílio da régua, mediram o raio que tinha, aproximadamente, 3,5 cm.

Figura 19 - Cunhas esféricas.



Fonte: Grupo IV.

3- *Resolução*: por meio da equação do volume da esfera, eles deduziram, por regra de três, o volume da cunha esférica, que é:

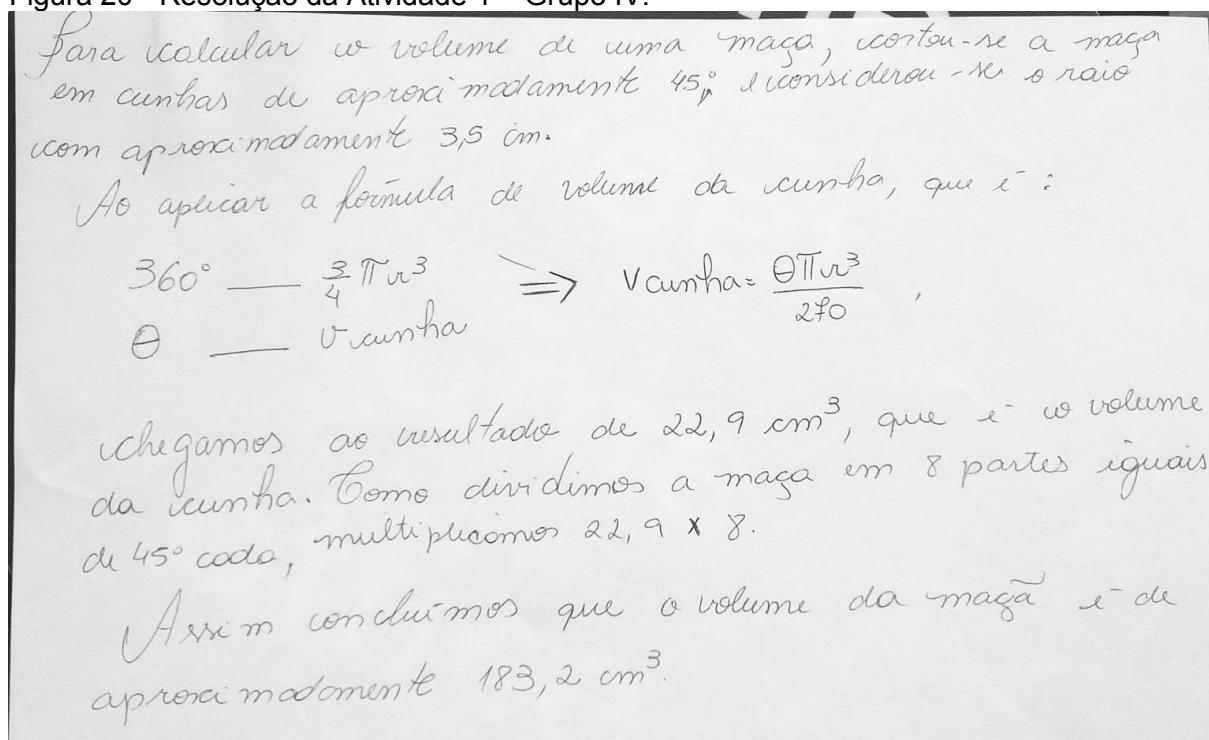
$$V = \frac{\pi \cdot r^3 \cdot \theta}{270^\circ}$$

4- **Validação:** O modelo matemático não consta na Figura, mas foi apresentado pelos(as) estudantes na lousa, sendo ele:

$$V_{\text{maçã}} = 8 \cdot \frac{\pi \cdot 3,5^3}{6} = 183,2 \text{ cm}^3.$$

5- **Modificação:** Não foi necessário modificar o modelo encontrado.

Figura 20 - Resolução da Atividade 1 – Grupo IV.



Fonte: Grupo IV.

Provavelmente os(as) integrantes do grupo não perceberam que simplificando o modelo que eles encontraram, obteriam o volume da esfera. Porém, para eles, foi mais fácil pensar nas pequenas partes do que no todo, ao passo que teriam medidas mais precisas, segundo eles(as).

O único momento que o grupo VI solicitou ajuda à pesquisadora, foi para perguntar o nome da figura geométrica que eles haviam cortado, então, a pesquisadora respondeu que era uma cunha esférica.

- **Grupo V** – Formado por três estudantes do 1º ano de Licenciatura em Matemática e duas alunas do 1º ano de Bacharelado em Matemática.

1- *Experimentação*: Cortaram a maçã em formato de um cubo e quatro calotas esféricas.

2- *Abstração*:

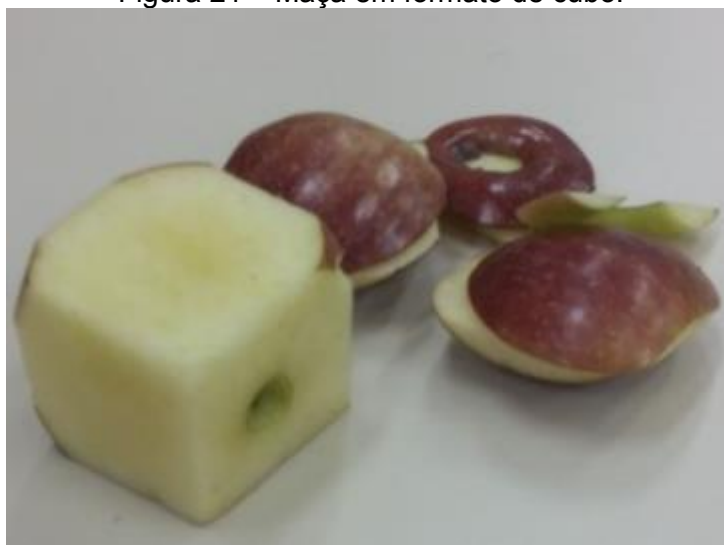
a) *Seleção das variáveis*: adotaram como variável independente o lado do cubo.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: adotaram que o volume da maçã seria a soma do volume do cubo com o volume das partes restantes.

d) *Simplificação*: dos pedaços que sobraram, os(as) integrantes do Grupo V concluíram que essas quatro partes, juntas, formavam um novo cubo cujo volume seria aproximadamente igual ao cubo por eles cortado.

Figura 21 – Maçã em formato de cubo.



Fonte: Grupo V.

3- *Resolução*: com a ajuda da régua, mediram o lado do cubo $l = 4,3$ cm.

Pela equação do volume do cubo, $V = l^3 = 79,5$ cm³.

Considerando que as partes restantes correspondiam a um cubo de mesmo volume, o volume final da maçã seria 159 cm³.

4- *Validação*: Antes de cortarem a maçã em formato de um cubo, o grupo havia medido o raio da mesma, considerando-a uma esfera “perfeita”, sendo o raio 3,5 cm. Por meio da equação do volume da esfera, encontraram que o valor seria 179,05 cm³.

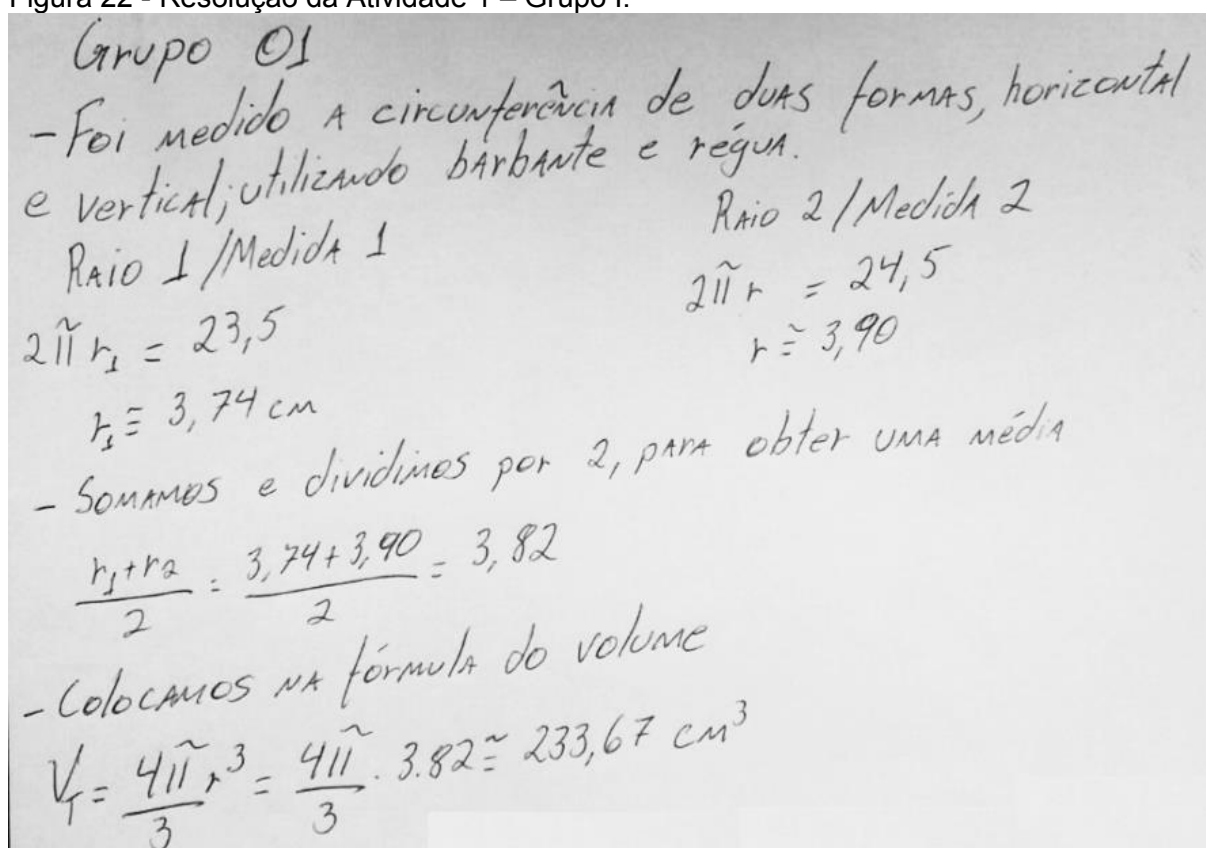
5- *Modificação*: Não modificaram.

Na exposição da resolução na lousa, os(as) integrantes do grupo disseram que acreditavam que o resultado por meio do cubo estava correto, pois

considerando a maçã como uma esfera o volume estava próximo, porém maior, o que condizia com a forma irregular da maçã.

Os demais grupos resolveram a atividade considerando a maçã como sendo uma esfera. O Grupo I calculou os raios horizontal e vertical e fazendo uma média, e por meio da equação do volume da esfera chegaram ao resultado 233,67 cm³.

Figura 22 - Resolução da Atividade 1 – Grupo I.



Fonte: Grupo I.

O Grupo III, resolveu de forma análoga ao Grupo II, obtendo o volume igual a 212,2 cm³.

Figura 23 - Resolução da Atividade 1 – Grupo III.

Handwritten mathematical work for a sphere problem. The work includes a diagram of a sphere with a vertical line through its center and a horizontal line representing the equator. A downward arrow from the center indicates a radius. The calculations are as follows:

$$2\pi R_+ = 24,5 \text{ cm} = 0,245 \text{ m}$$
$$R_+ = \frac{0,245 \text{ m}}{2\pi} = 0,039 \text{ m}$$
$$2\pi R_- = 0,223 \text{ m}$$
$$R_- = \frac{0,223}{2\pi} = 0,035 \text{ m}$$
$$R_{\text{médias}} = 0,037 \text{ m}$$
$$V_m = \frac{4}{3} \pi R_m^3 = \frac{4}{3} \pi (0,037)^3 = 212,2 \text{ cm}^3$$

Fonte: Grupo III.

Os grupos, por meio da Modelagem Matemática, utilizaram uma das propostas de resolução apresentada por Bassanezi (2002, p. 238), que é por meio do volume da esfera. Os volumes variaram entre 159 e 233,67 cm³, considerando que as maçãs tinham aproximadamente o mesmo volume, os valores foram próximos.

De todas as atividades feitas no curso, essa foi a que os(as) participantes mais gostaram, eles comentaram em todas as outras atividades o quão satisfatório foi resolver esta atividade, por seu caráter desafiador e investigativo, em que cada um pôde usar a criatividade, levantar diferentes hipóteses e constatarem que por diferentes caminhos todos chegaram a resultados parecidos.

Esse sentimento é caracterizado na literatura, uma vez que os(as) alunos(as) são convidados(as) a participar de um ambiente de investigação de situações reais por meio da Modelagem Matemática. Atividades como estas, instiga o espírito científico nos(as) alunos(as) mostrando que eles(as) são capazes de fazer Ciência (BASSANEZI, 2002; KAISER, 1995; KAISER; SRIRAMAN, 2006).

✓ **Atividade 2: O problema do Césio em Goiânia.**

A atividade 2, tinha por objetivo encontrar um modelo matemático para descrever a quantidade de Césio presente em cada ano e fazer uma estimativa da quantidade de Césio 10 anos após o acidente.

Esta atividade foi proposta por Santos, Silva e Almeida (2007), para estudar a função exponencial. Os autores utilizaram o Excel e por meio de suas ferramentas apresentaram o modelo matemático: $f(n) = 19,26 \cdot e^{-0,6931 \cdot \left(\frac{t-1987}{30}\right)}$. Segundo este modelo, em 1997, 10 anos após o acidente, a quantidade de Césio em Goiânia seria de 15,28691254 g.

São apresentadas as seguir, as resoluções dos Grupos II, IV e I.

• **Grupo II** - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: os dados já estavam contidos na atividade que foi entregue aos grupos, o que permitiu a elaboração de um esquema por parte dos integrantes.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: já estavam na atividade, sendo elas: o tempo em anos (variável independente) e a quantidade de césio em gramas (variável dependente).

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: observaram que a cada 30 anos a quantidade de césio cai pela metade, utilizaram frações e porcentagens.

d) *Simplificação*: determinaram a variável tempo como sendo $\frac{\Delta t}{30}$.

3- *Resolução*: O grupo chegou ao seguinte modelo matemático:

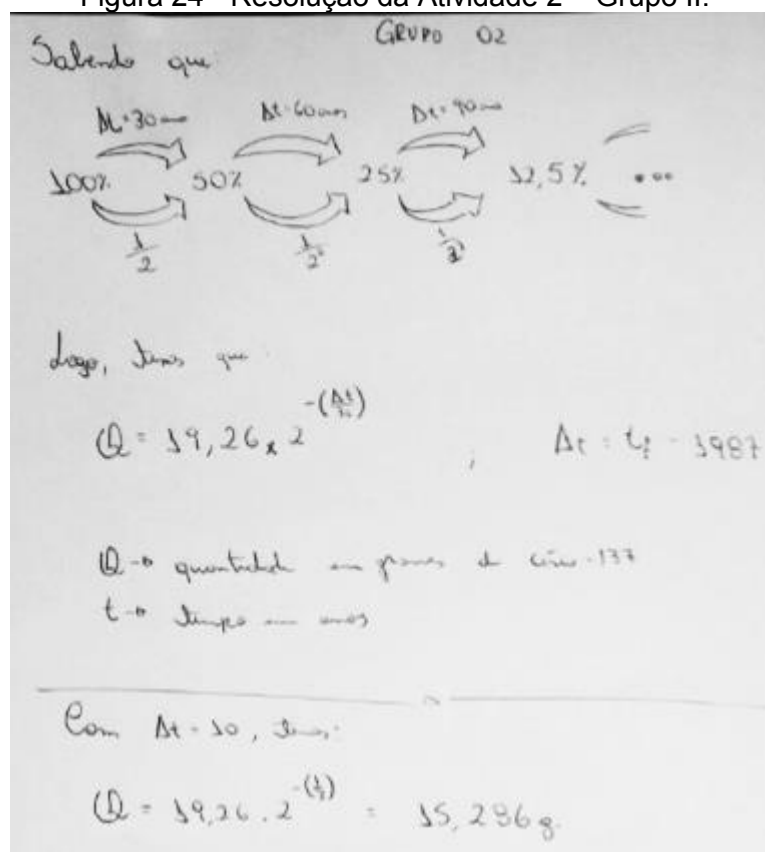
$$Q = 19,26 \cdot 2^{-\left(\frac{\Delta t}{30}\right)}$$

Substituindo $\Delta t = 10$, o grupo encontrou que a concentração de césio é de 15,286g. Resposta correta de acordo com Santos, Silva e Almeida (2007).

4- *Validação*: O grupo validou sua resposta comparando com os outros grupos.

5- *Modificação*: Após a argumentação da pesquisadora a respeito de usar as variáveis do enunciado, o grupo fez a seguinte substituição $\Delta t = t_f - 1987$.

Figura 24 - Resolução da Atividade 2 – Grupo II.



Fonte: Grupo II.

• **Grupo IV** - Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

1- *Experimentação*: os dados já estavam contidos na atividade que foi entregue aos grupos, e permitiu que eles(as) elaborassem uma tabela sistematizando o ano, a quantidade de césio e os períodos.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: já estavam na atividade, sendo elas: o tempo em anos (variável independente) e a quantidade de césio em gramas (variável dependente).

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: observaram que a cada 30 anos a quantidade de césio cai pela metade.

d) *Simplificação*: chamaram cada período de 30 anos de n , em que $n = 0$ correspondia ao ano do acidente, $n = 1$ correspondia ao ano de 2017 e assim sucessivamente.

3- *Resolução*: O grupo chegou ao seguinte modelo matemático:

$$Q = \frac{Q_0}{2^n} \text{ em que } Q_0 = 19,26g$$

Substituindo $n = 1/3$, ou seja, para encontrar a quantidade de césio 10 anos após o acidente, o grupo encontrou que a concentração de césio é de 15,28g.

4- *Validação*: Validaram com os dados do enunciado.

5- *Modificação*: Após a argumentação da pesquisadora a respeito do uso do tempo em anos, proposto na atividade, ao invés dos períodos, os(as) alunos(as) modificaram o modelo matemático, fazendo a seguinte substituição:

$$n = \frac{t - 1987}{30}, \text{ assim, } Q = \frac{Q_0}{2^{\frac{t-1987}{30}}}$$

Como se pode observar na resolução final entregue pelo grupo.

Figura 25 - Resolução da Atividade 2 – Grupo IV.

GRUPO 4

Primeiramente, observa-se que a cada 30 anos a quantidade de Césio cai pela metade, porém devemos colocar o t em anos. Logo, cairá pela metade quando t for igual a 30. Disto segue que:

$$Q = \frac{Q_0}{2^{\frac{t-1987}{30}}}, \text{ onde } Q_0 = 19,26$$

Considerando $t = 1997$, temos que:

$$Q = \frac{19,26}{2^{\frac{10}{30}}} = \frac{19,26}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{19,26}{\sqrt[3]{2}} = \frac{19,26}{1,26} = 15,28 \text{ g.}$$

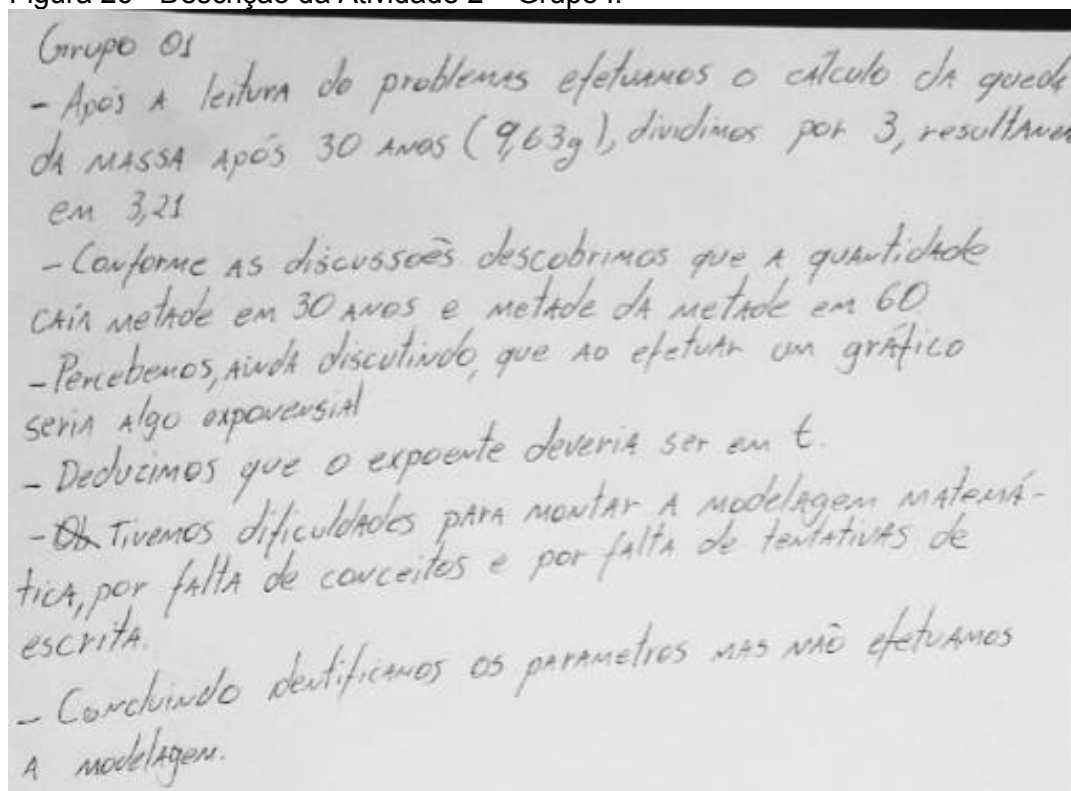
Portanto no ano de 1997, a concentração de Césio será de 15,28g

Fonte: Grupo IV.

- **Grupo I** - Formado por três alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Física.

Este grupo encontrou dificuldades no processo de matematização e na Modelagem Matemática como um todo, eles(as) identificaram que a quantidade de cério caía pela metade a cada 30 anos, registraram que esboçaram um gráfico e perceberam se tratar de uma exponencial (o gráfico não consta nos registros apresentados), mas não conseguiram elaborar um modelo matemático, não há sequer um esboço do processo de matematização.

Figura 26 - Descrição da Atividade 2 – Grupo I.



Fonte: Grupo I.

Os Grupos III e V resolveram de forma análoga ao Grupo IV, e também chegaram na resposta de 15,287g.

Figura 27 - Resolução da Atividade 2 – Grupo III.

Handwritten mathematical solution for a half-life problem. The text is written on a light blue background. It starts with 'Grupo 03' at the top. Below that, the equation $Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(t-1987)}{30}}$ is written, followed by an arrow pointing to the text 'Modelo encontrado'. Below this, it says 'Data t = 1997:'. The final calculation is $Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(1997-1987)}{30}} = 19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 15,287 g$.

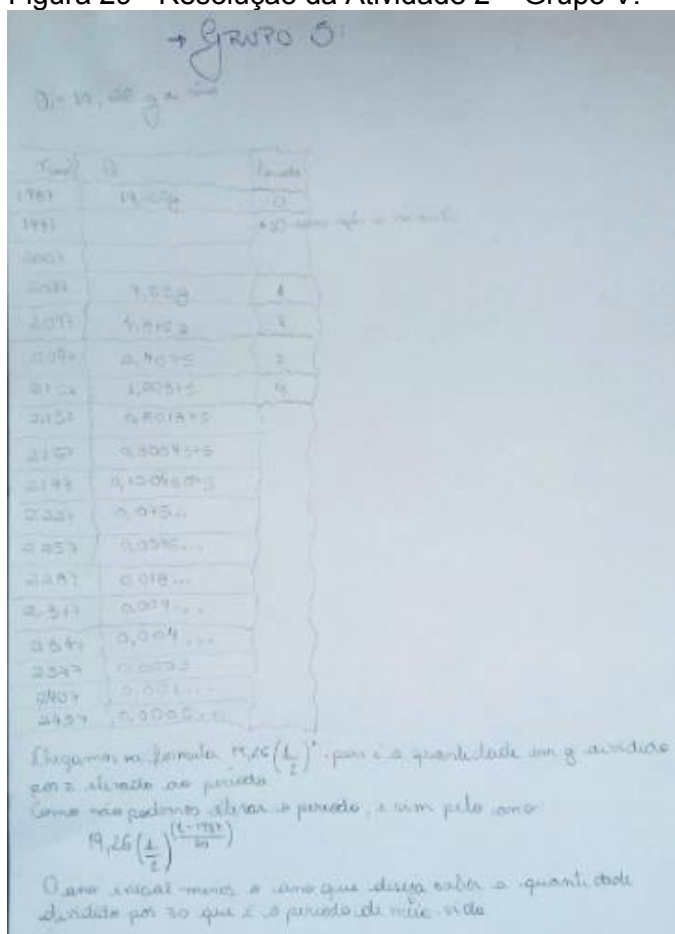
Fonte: Grupo III.

Figura 28 – Digitação da Figura 27.

Digitized version of the handwritten solution from Figure 27. The text is enclosed in a black rectangular box. It starts with 'Grupo 03' at the top right. Below that, the equation $2) Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(t-1987)}{30}}$ is written, followed by an arrow pointing to the text 'Modelo Encontrado'. Below this, it says 'Para t = 1997'. The final calculation is $Q = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(1997-1987)}{30}} = 19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = 15,287 g$.

Fonte: Grupo III.

Figura 29 - Resolução da Atividade 2 – Grupo V.



Fonte: Grupo V.

Figura 30 – Digitação da Figura 29.

Grupo 5		
Q = 19,26g de céσιο		
T(ano)	Q	Período
1987	19,26	0
1997 (10 anos após o acidente)		
2007		
2017	9,63g	1
2047	4,815g	2
2077	2,4075	3
2107	1,20375	4
2137	0,601975	
2167	0,3009375	
2197	0,15046875	
2227	0,075...	
2257	0,0376...	
2287	0,018...	
2317	0,009...	
2347	0,004...	
2377	0,0023...	
2407	0,001...	
2437	0,0005...	

Chegamos na fórmula $19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, pois é a quantidade em g dividido por 2 elevado ao período. Como não podemos elevar o período, e sim pelo ano:

$$19,26 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t-1987}{30}\right)}$$

O ano inicial menos o ano que deseja saber a quantidade dividido por 30 que é o período de meia-vida.

Fonte: Grupo V.

Com exceção do grupo I, os demais grupos construíram o modelo matemático e chegaram no resultado correto sem dificuldades.

✓ **Atividade 3: Frota de veículos na cidade de Londrina.**

Esta atividade tinha como objetivo encontrar um modelo matemático que forneça o número de veículos com o passar dos anos na cidade de Londrina. A pesquisadora resolveu esta atividade, inspirada em Vertuan (2013).

A partir da observação dos dados, pode-se encontrar regularidades e buscar uma constante k , tal que k seria a razão entre a quantidade de veículos em um dado ano e a quantidade de veículos em um ano imediatamente anterior. Pode-se escrever a relação $k = \frac{V_{n+1}}{V_n}$ e construir a tabela a seguir.

Tabela 4 - Resolução de atividade.

t (ano)	n (tempo em anos)	V (nº de veículos)	k
2012	1	305647	
2013	2	326594	1,068
2014	3	343159	1,051
2015	4	359134	1,046
2016	5	367458	1,023
2017	6	371647	1,011

Fonte: A autora.

Calculando a média aritmética de k , pode-se adotar $k = 1,04$. Usando a recorrência matemática, nota-se que:

$$V_{n+1} = k \cdot V_n$$

$$V_2 = k \cdot V_1$$

$$V_3 = k.V_2 = k.k.V_1 = k^2.V_1$$

.

.

.

$$V_{n+1} = k^n.V_1$$

Substituindo k e V_1 , tem-se que:

$$V_{n+1} = 1,04^n \cdot 305647$$

Substituindo $n = t - 2012$, pode-se escrever o modelo matemático desta atividade

$$\text{como: } V_{n+1} = 305647 \cdot 1,04^{t-2012}$$

Assim, para $t = 2018$, $V = 386741$ veículos e para $t = 2027$, $V = 550453$ veículos.

A seguir são apresentadas as resoluções dos Grupos II, IV e III.

• **Grupo II** - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: os dados estavam na atividade proposta.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram a constante 371647 que se refere à quantidade de carros no ano de 2017, e a variável x como sendo a progressão do ano.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: Lançaram a hipótese de ser uma função exponencial.

d) *Simplificação*: Adotaram a expressão $y = y_0 \cdot e^x$. O grupo não evidenciou na folha de resposta como determinaram o valor de x .

3- *Resolução*: Na primeira parte da atividade, que era para determinar o número de veículos na cidade de Londrina em 2018, o grupo não fez o uso do modelo matemático, eles multiplicaram o número correspondente à quantidade de veículos em 2017 por 0,01 e somaram a esse mesmo número.

$$y = 371647 \cdot 0,01 + 371647 = 375363 \text{ veículos.}$$

Na segunda parte, em que deveriam calcular o número de veículos na cidade de Londrina em 2027, eles utilizaram o modelo matemático.

$$y = y_0 \cdot e^x \rightarrow y = 371647 \cdot e^x \rightarrow y = 371647 \cdot e^{0,09} = 406646 \text{ veículos.}$$

4- *Validação*: Não validaram.

5- *Modificação*: Não houve alterações para o modelo encontrado.

A quantidade de veículos para 2018 foi bem próximo do valor encontrado pela pesquisadora, que foi 386741, já a quantidade de veículos para 2027 foi 26,12% menor que o da pesquisadora, que foi 550453.

Figura 31 - Resolução da Atividade 3 – Grupo II.

$y(t) = y_0 e^x$ $x = \text{progressão do ano referente ao aumento de 2026} \rightarrow 2027$
 $y(t) = y_0 e^x \rightarrow y(t) = 371647 e^{0,09}$
 ↓ ↓ ↓
 Valores p/ 2017 ↓
 Valores p/ 2018 ≈ 406646 (~~veículos~~) veículos
 Grupo 2
 $y(t) = 371647 \times 0,01$
 $\quad \quad \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad 3716,47$
 $y = 371647 + 3716,47$
 $y = 375363,47$ (~~veículos~~) veículos

Fonte: Grupo II.

Figura 32 – Digitação da Figura 31.

$y(t) = y_0 \cdot e^x$ \downarrow $y(t) = y_0 \cdot e^x \rightarrow y(t) = 37167 \cdot e^{0,09}$ $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$ Valores p/ 2017 ↓ Valores p/ 2027 $\cong 406646$ veículos	Grupo 2
Valores p/2018 $y(t) = 371647 \times 0,01$ $\quad \quad \quad 3716,47$ $y = 371647 + 3716,47$ $y = 375363,47$ veículos	

Fonte: Grupo II.

- **Grupo IV** - Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

O grupo IV utilizou uma estratégia inusitada, e resolveram a atividade em duas etapas.

1- *Experimentação*: os dados estavam na atividade proposta.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram o ano n , o ano x , e uma constante k .

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: Na primeira etapa da atividade, em que o objetivo era encontrar o número de veículos no ano 2018, eles observaram que o número de veículos no ano n correspondia, aproximadamente, à média aritmética de $n-1$ com $n+1$. Na segunda etapa, levantaram a hipótese de que o crescimento seria linear.

d) *Simplificação*: por mais que tenham percebido, que ao plotar os dados em um gráfico obteriam uma curva, mesmo assim optaram por trabalhar com uma reta, simplificando os dados.

3- *Resolução*: Na primeira etapa, eles(as) fizeram uma média aritmética, em que: $n^\circ \text{ de veíc. em jan/2016} + n^\circ \text{ de veíc. em jan/2018} = 2 \cdot n^\circ \text{ de veíc. em jan/2017}$. Trocando os valores da tabela correspondentes aos anos de 2016 e 2017 eles concluíram que o número de veículos em 2018 seria 375836.

Já na segunda etapa, eles partiram que o ano inicial seria 2018, e que a partir deste ano o gráfico se comportaria como uma função afim. Desta forma, encontraram o valor de uma constante $k = 4189$. Essa constante foi encontrada por meio do número de veículos de 2017 menos o número de veículos de 2018. Desta forma, obtiveram o seguinte modelo matemático: $y = 4189 \cdot (x - 2018) + 375836$.

Por meio do modelo construído, para o ano $x = 2027$, o número de veículos seria 413537.

4- *Validação*: Como dividiram a atividade em duas partes, eles validaram apenas a primeira.

5- *Modificação*: Não houve alterações para o modelo encontrado.

Na figura a seguir está a resolução apresentada pelo grupo.

Figura 33 - Resolução da Atividade 3 – Grupo IV.

Mediante a observação dos dados tem-se que o número de veículos no ano n é aproximadamente a média aritmética de $n-1$ com $n+1$. Disto segue que:

$$\text{jan}/2016 + \text{jan}/2018 = 2 \cdot \text{jan}/2017$$
$$367458 + \text{jan}/2018 = 743294$$
$$\text{jan}/2018 = 375836$$

Desta forma, obtemos uma constante $K = 4189$

Dai, temos que:

$$y = 4189 \cdot (x - 2018) + 375836$$

Para 2027, temos:

$$y = 4189 \cdot (2027 - 2018) + 375836$$
$$y = 4189 \cdot 9 + 375836$$
$$y = 37701 + 375836$$
$$y = 413537$$

→ GRUPO 4

Fonte: Grupo IV.

Por mais que os(as) integrantes do grupo tenham trabalhado toda esta atividade com o conceito de função afim, o que de fato eles utilizaram foi o conceito de PA (progressão aritmética). Na primeira etapa foi utilizada a seguinte propriedade da PA:

→ Qualquer termo de uma PA, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ para } n \geq 2$$

Na segunda etapa, eles utilizaram a fórmula do termo geral de uma PA:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Em que:

a_n = termo geral = y

a_1 = primeiro termo da sequência = nº de veículos jan/2018 = 375836

n = nº de termos = x anos

r = razão = k = 4189

Em uma aula de Matemática, esse momento seria ideal para discutir as correlações entre a função afim e a PA.

• **Grupo III** - Formado por dois alunos do 1º ano de Bacharelado em Física e dois estudantes do 2º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: os dados estavam na atividade proposta.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram C_n como o número de carros no ano n.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: assumiram que a taxa de crescimento era linear.

d) *Simplificação*: Determinaram que o acréscimo do número de carros seria dado pela subtração do número de veículos de um ano pelo número de veículos do ano anterior.

3- *Resolução*: Calcularam a porcentagem de acréscimo de veículos como sendo:

$$V_{n+1} = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n - C_{n-1}}, \text{ resultando em } V_{2017} = 0,51; V_{2016} = 0,51; V_{2015} = 0,96 \text{ e } V_{2014} = 0,79.$$

Em seguida, calcularam o aumento médio $\bar{V} = 0,69 = 69\%$.

A partir desta porcentagem, elaboraram o modelo matemático:

$$C_{n+1} = C_n + (C_n - C_{n-1}).69\%$$

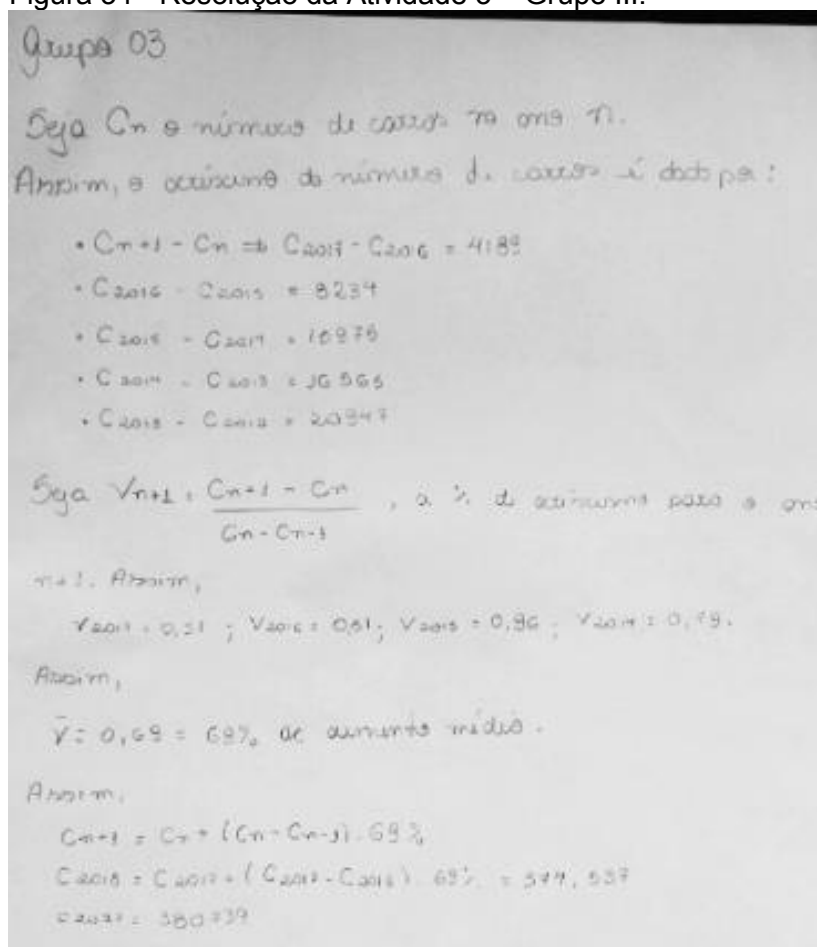
Para o ano de 2018: $C_{2018} = C_{2017} + (C_{2017} - C_{2016}).69\% = 374537$

Para o ano de 2027: $C_{2027} = 380739$

4- *Validação*: Validaram por meio dos dados da tabela dos anos anteriores.

5- *Modificação*: Não houve modificações.

Figura 34 - Resolução da Atividade 3 – Grupo III.



Fonte: Grupo III.

Figura 35 – Digitação da Figura 34.

Grupo 03

Seja C_n o número de carros no ano n .

Assim, o acréscimo do número de carros é dado por:

- * $C_{n+1} - C_n \Rightarrow C_{2017} - C_{2016} = 4189$
- * $C_{2016} - C_{2015} = 8234$
- * $C_{2015} - C_{2014} = 15975$
- * $C_{2014} - C_{2013} = 16565$
- * $C_{2013} - C_{2012} = 20947$

Seja $V_{n+1} = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n - C_{n-1}}$, a % de acréscimo para o ano $n+1$. Assim,

$V_{2017} = 0,51$; $V_{2016} = 0,31$; $V_{2015} = 0,96$; $V_{2014} = 0,79$.

Assim,

$\bar{V} = 0,69 = 69\%$ de aumento médio.

Assim,

$C_{n+1} = C_n + (C_n - C_{n-1}) \cdot 69\%$

$C_{2018} = C_{2017} + (C_{2017} - C_{2016}) \cdot 69\% = 374,537$

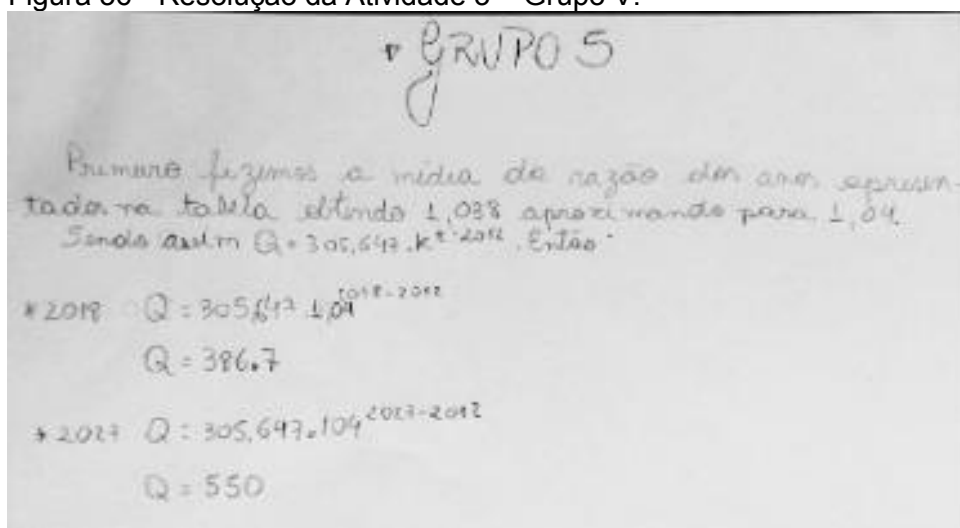
$C_{2027} = 380739$

Fonte: Grupo III.

A quantidade de veículos para o ano de 2018 ficou bem próximo do valor encontrado pela pesquisadora, que foi 386741, porém, a quantidade de veículos para o ano de 2027 ficou bem abaixo. Na discussão após as apresentações das resoluções dos grupos, eles(as) perceberam que a taxa de crescimento não poderia ser dada por meio da subtração da quantidade de um ano com a quantidade do ano anterior, por essa diferença não ser constante e sim exponencial.

O Grupo V fez exatamente o mesmo processo de matematização da pesquisadora, obtendo o mesmo modelo matemático e os mesmos valores finais.

Figura 36 - Resolução da Atividade 3 – Grupo V.



Fonte: Grupo V.

Figura 37 – Digitação da Figura 36.

Grupo 5

Primeiro fizemos a média da razão dos anos apresentados na tabela, obtendo 1,038 aproximando para 1,04.
Sendo assim $Q = 305,647 \cdot k^{t-2012}$. Então:

* 2018 $Q = 305,647 \cdot 1,04^{2018-2012}$
 $Q = 386,7$

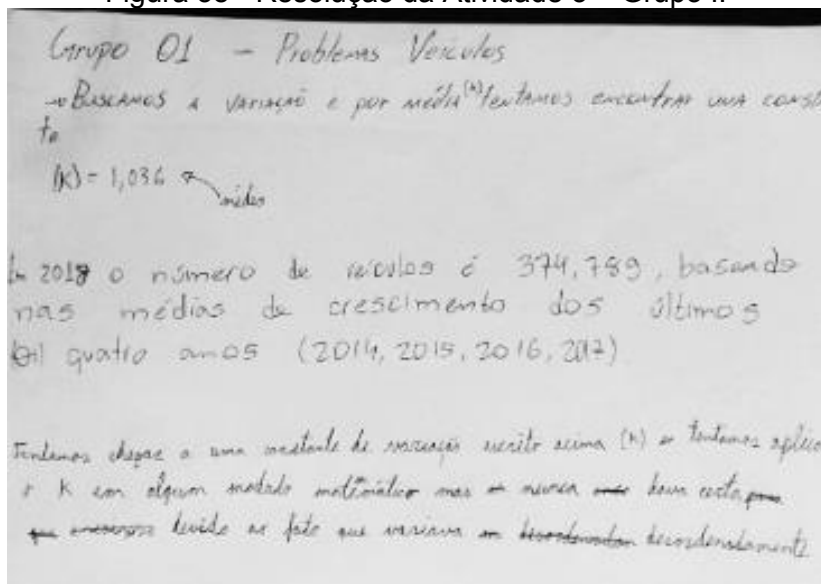
* 2027 $Q = 305,647 \cdot 1,04^{2027-2012}$
 $Q = 550$

Fonte: Grupo V.

Assim como na atividade anterior, o Grupo I não conseguiu montar um modelo matemático. Eles(as) não conseguiram identificar que tipo de função aqueles dados podiam descrever. A pesquisadora interveio e os(as) orientou a montar

uma tabela para determinar uma constante, assim foi feito, porém, mesmo com um valor de uma constante, não souberam esboçar nenhum processo de matematização. Apresentaram apenas o número de veículos para 2018, que seria 374789, baseados nas médias de crescimento dos últimos quatro anos.

Figura 38 - Resolução da Atividade 3 – Grupo I.



Fonte: Grupo I.

Figura 39 – Digitação da Figura 38.

Grupo 01 – Problema Veículos

Buscamos a variação e por média (k) tentamos encontrar uma constante.
(k) = 1,036 → média

Em 2017 o número de veículos é 374789, baseado nas médias de crescimento dos últimos quatro anos (2014, 2015, 2016, 2017).

Tentamos chegar a uma constante de variação escrita acima (k) e tentamos aplicar o k em algum modelo matemático mas nunca dava certo, devido ao fato que variava desordenadamente.

Fonte: Grupo I.

As próximas três atividades possuem conceitos físicos, para tanto, para análise das atividades, optou-se em acrescentar mais uma etapa na sequência de etapas proposta por Bassanezi (2002). Além das cinco propostas, será acrescentada: 6- correlação com a Física.

✓ Atividade 4: Gravidade Variável

O objetivo desta atividade era que os(as) participantes chegassem ao modelo lógico-matemático-fenomenológico $P = m.g$, por meio da Modelagem Matemática, e também que os(as) discentes, sabendo que a aceleração da gravidade (g) é variável, encontrassem um modelo para calcular g em diferentes latitudes no nível do mar.

De acordo com Lopes (2008, p. 564), a variação da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude, pode ser definida por:

$$g_{\gamma,z} \approx g_{\gamma} + \Delta g_z \approx g_0(1 + \beta \cdot \text{sen}^2\gamma) \cdot (1 - 2z/R)$$

Em que z é altitude, localizada a uma determinada latitude γ , e $R = 6,371 \times 10^6$ m é o raio da Terra.

Há uma equação internacional para calcular a aceleração da gravidade, ao nível do mar, sendo ela (LOPES, 2008, p. 562):

$$g(\gamma) = 9,78032677(1 + 0,0052790414 \cdot \text{sen}^2\gamma + 0,0000232718 \cdot \text{sen}^4\gamma)$$

Em que γ representa a latitude medida em graus.

Na atividade proposta, os grupos teriam que encontrar a aceleração da gravidade, no nível do mar, no equador (0°), no pólo (90°) e com uma latitude de 70° , para então determinar o peso de uma pessoa em cada situação. Substituindo os valores das latitudes pedidas na equação internacional, tem-se:

$$g(0^\circ) = 9,78032677 \text{ m/s}^2.$$

$$g(90^\circ) = 9,832185126 \text{ m/s}^2.$$

$$g(70^\circ) = 9,82609534 \text{ m/s}^2.$$

Assim, a resposta da primeira pergunta da atividade, “qual a diferença de peso de uma pessoa de massa 80kg ao se deslocar, ao nível do mar, do equador até o pólo?”, será:

$$\Delta P = m \cdot (g_{90^\circ} - g_{0^\circ}) = 80 \cdot (9,8321 - 9,7803) = 4,15N$$

Já para a segunda questão, “qual o peso de uma pessoa de massa 70kg, ao nível do mar, com uma latitude de 70° ?”, será:

$$P = m \cdot g = 70 \cdot 9,82609 = 687,83N$$

A seguir, são apresentadas as resoluções dos Grupos II, IV e III.

• **Grupo II** - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: os dados já constavam na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram a constante 9,7717, que segundo os estudantes, representa a aceleração da gravidade a 0°, a variável independente 'n°' que representa a latitude, peso (P) como variável dependente, massa (m) e aceleração da gravidade (g) como variável dependente da latitude.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: adotaram que a aceleração da gravidade variava linearmente.

d) *Simplificação*: determinaram uma constante $7,35 \cdot 10^{-3}$ como sendo a média de aumento da aceleração da gravidade a cada 10° de latitude.

3- *Resolução*: o grupo elaborou o seguinte modelo matemático para determinar a aceleração da gravidade em função da latitude:

$$g(n^\circ) = g(0) + \left(7,35 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{n^\circ}{10}\right) = 9,7717 + \left(7,35 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{n^\circ}{10}\right)$$

Em seguida, escreveram que: $P(n^\circ) = g(n^\circ) \cdot m$, e deram as seguintes respostas para as perguntas da atividade:

a) $\Delta P = P(90^\circ) - P(0) = 5,3N$

b) $g(70^\circ) = 9,82315 \text{ m/s}^2$ e $P(70^\circ) = 687,6205N$

4- *Validação*: validaram a equação da aceleração da gravidade com os dados da tabela fornecida.

5- *Modificação*: Não houve modificações.

6- *Correlação com a Física*: Os integrantes deste Grupo, em especial, apresentaram dificuldades em não poderem utilizar fórmulas prontas, eles não queriam matematizar o problema e seguir os passos da Modelagem Matemática, desta forma, nesta atividade, eles simplesmente utilizaram a fórmula que já conheciam.

Figura 40 - Resolução da Atividade 4 – Grupo II.

Handwritten work for Group II:

$$g(l) = 9,7717 + \left(3,35 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{l}{10}\right)$$

Annotations: l : latitude 0° ; medida de aumento da g a cada 10°

$$P(l) = 9,7717 + \left(3,35 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{l}{10}\right) \cdot m$$

Annotation: massa (kg)

$$P(l) = g(l) \cdot m$$

A) $\Delta P = 5,3 \text{ N}$ $\Delta P = P(90^\circ) - P(0^\circ)$

b) $g(70^\circ) = 9,82315 \text{ m/s}^2$

$P(70^\circ) = 687,6205 \text{ N}$, onde $m = 70 \text{ kg}$

Fonte: Grupo II.

• **Grupo IV**- Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

1- *Experimentação*: os dados já constavam na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: na primeira parte da atividade utilizaram a aceleração da gravidade (g) como variável dependente, latitude (l) como variável independente. Na segunda parte, peso (P) como variável dependente, massa (m) e aceleração da gravidade (g) como variável dependente da latitude.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: adotaram que a aceleração da gravidade variava linearmente.

d) *Simplificação*: De forma linear, encontraram uma variação média da aceleração da gravidade para cada 20° de latitude.

3- *Resolução*: Para encontrar a variação, fizeram $\Delta g = g_n - g_{n-1}$ e em seguida calcularam uma média aritmética, obtendo uma variação de $0,0149 \text{ m/s}^2$ para cada 20° de latitude e conseqüentemente, $0,00745 \text{ m/s}^2$ para cada 10° de latitude.

Para acharem o valor da aceleração da gravidade no equador, eles tiraram $0,0149 \text{ m/s}^2$ do valor referente à aceleração da gravidade na latitude 20° , chegando ao seguinte resultado:

$$g(0^\circ) = g(20^\circ) - 0,0149 = 9,7715 \text{ m/s}^2$$

Após encontrarem $g(0^\circ)$, construíram o seguinte modelo matemático:

$$g(l) = 0,00745 \cdot \frac{l}{10} + 9,7715$$

Substituindo $l = 90^\circ$, chegaram a $g(90^\circ) = 9,838 \text{ m/s}^2$ e para $l = 70^\circ$, $g(70^\circ) = 9,82665 \text{ m/s}^2$.

Para responder às perguntas da atividade, eles teriam que encontrar o peso de uma pessoa de massa 80 kg nas latitudes citadas. Na apresentação oral, eles(as) disseram que deduziram a equação $P = m \cdot g$ da tabela fornecida na atividade, mas esta não está explicitada na folha de resolução entregue pelo grupo (Fig. 34). Ao contrário de alguns grupos que explicitaram o processo para formularem tal equação.

Tendo as acelerações da gravidade para cada latitude e a equação $P = m \cdot g$, para a primeira questão obtiveram a seguinte resposta:

$$P(0^\circ) = 781,72\text{N} \text{ e } P(90^\circ) = 787,044\text{N}$$

$$\text{Assim, } P(90^\circ) - P(0^\circ) = 5,324\text{N}.$$

Na segunda questão, era preciso encontrar o peso de uma pessoa de massa 70 kg a uma latitude de 70° , a resposta deles(as) foi:

$$P(70^\circ) = 9,82665 \cdot 70 = 687,8655 \text{ N}.$$

4- *Validação*: validaram a equação da aceleração da gravidade com os dados da tabela fornecida.

5- *Modificação*: não houve modificações

6- *Correlação com a Física*: O Grupo IV escreveu: “Como $P = m \cdot g$, tem-se”. Assim, não fica claro se de fato eles deduziram por meio dos dados ou se apenas aplicaram uma fórmula pronta.

Figura 41 - Resolução da Atividade 4 – Grupo IV.

GRUPO 4

a) Primeiramente analisamos a variação da aceleração da gravidade, após isso fizemos a média aritmética entre as variações e obtivemos uma variação de $0,0149 \text{ m/s}^2$ para cada 20° de latitude, logo para cada 10° tem-se uma variação de $0,00745 \text{ m/s}^2$. Determinaremos agora a aceleração para latitude de 0° .

$$g_{(0)} = g_{(20)} - 0,0149 \rightarrow g_{(0)} = 9,7715.$$

Podemos concluir que $g_{(l)} = 0,00745 \cdot \frac{l}{10} + 9,7715$.

Para $l = 90^\circ$, tem-se:

$$g_{(90)} = 0,00745 \cdot \frac{90}{10} + 9,7715 \Rightarrow g_{(90)} = 9,838.$$

Como $P = m \cdot g$, onde P : peso, m : massa e g : aceleração da gravidade, tem-se:

$$P_{(0)} = 781,72 \text{ e } P_{(90)} = 787,044,$$

Nessa forma, a diferença entre eles é de $5,324 \text{ N}$.

Fonte: Grupo IV.

• **Grupo III** - Formado por dois alunos do 1º ano de Bacharelado em Física e dois estudantes do 2º ano de Licenciatura em Física.

1- **Experimentação**: os dados já constavam na atividade.

2- **Abstração**: utilizaram a aceleração da gravidade (g) como variável dependente, a constante (k) que representa o aumento da aceleração da gravidade por grau de

latitude, a latitude (a) como variável independente e a constante (L_0) que representa a aceleração da gravidade para latitude 0° . Utilizaram também, peso (P) como variável dependente, massa (m) e aceleração da gravidade (g) como variável dependente da latitude.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: assumiram que a aceleração da gravidade variava linearmente.

d) *Simplificação*: Concluíram que a cada 20° de latitude havia um decréscimo de $0,01473 \text{ m/s}^2$ na aceleração da gravidade, sendo que para cada grau de latitude esse decréscimo seria de $0,00074 \text{ m/s}^2$.

3- *Resolução*: Após determinarem $k = 0,00074 \text{ m/s}^2$, escreveram a seguinte função linear:

$$g(a) = k \cdot a + L_0$$

Em seguida, determinaram o valor da aceleração da gravidade para 0° de latitude:

$$g(0) = 9,7864 - 20 \cdot 0,00074 = 9,7716 \text{ m/s}^2$$

E elaboraram o seguinte modelo matemático:

$$g(a) = 0,00074 \cdot a + 9,7716, \text{ em que } g(90) = 9,8382 \text{ m/s}^2$$

Para a parte b da atividade, perceberam que para massa constante, $P \propto g$.

Por fim, apresentaram o modelo matemático para determinar a força peso em função da latitude:

$$P(a) = m \cdot (k \cdot a + L_0)$$

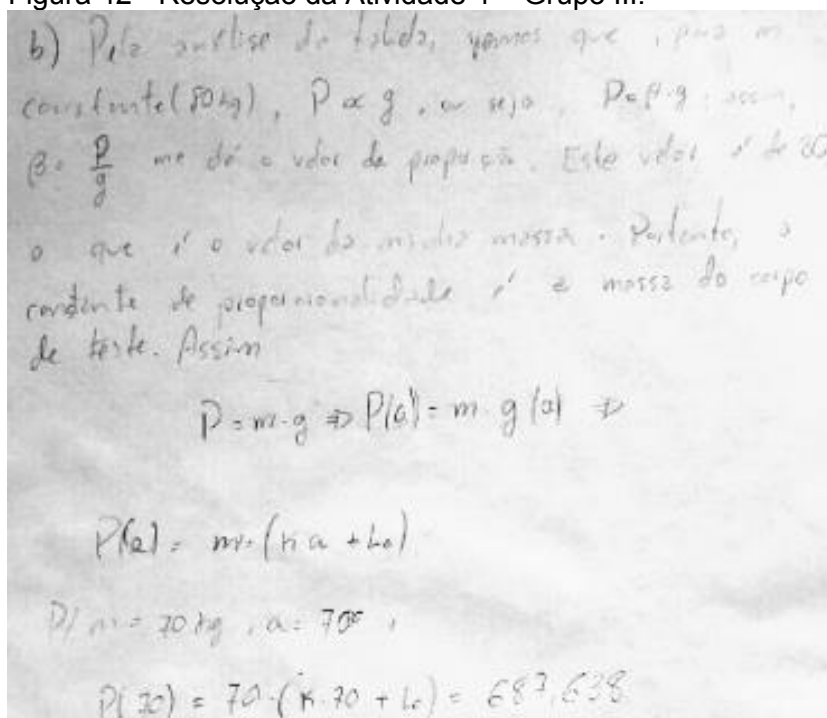
E para $a = 70^\circ$ encontraram $P(70) = 687,638\text{N}$.

4- *Validação*: validaram a equação da aceleração da gravidade com os dados da tabela fornecida.

5- *Modificação*: não houve modificações.

6- *Correlação com a Física*: Este foi o Grupo que apresentou menos dificuldade em não utilizarem fórmulas, de maneira clara e coerente, determinaram o modelo lógico matemático fenomenológico $P = m \cdot g$, por meio da Modelagem Matemática.

Figura 42 - Resolução da Atividade 4 – Grupo III.



Fonte: Grupo III.

Figura 43 – Digitação da Figura 42.

b) Pela análise da tabela, vemos que, para m constante (80 kg), $P \propto g$, ou seja, $P = \beta \cdot G$; assim, $\beta = \frac{P}{g}$ me dá o valor da proporção. Este valor é de 80, o que é o valor da minha massa. Portanto, a constante de proporcionalidade é a massa do corpo de teste. Assim:

$$P = m \cdot g \rightarrow P(a) = m \cdot g(a)$$

$$P(a) = m \cdot (k \cdot a + L_0)$$

$$P/m = 70 \text{ kg}, a = 70,$$

$$P(70) = 70 \cdot (k \cdot 70 + L_0) = 687,638$$

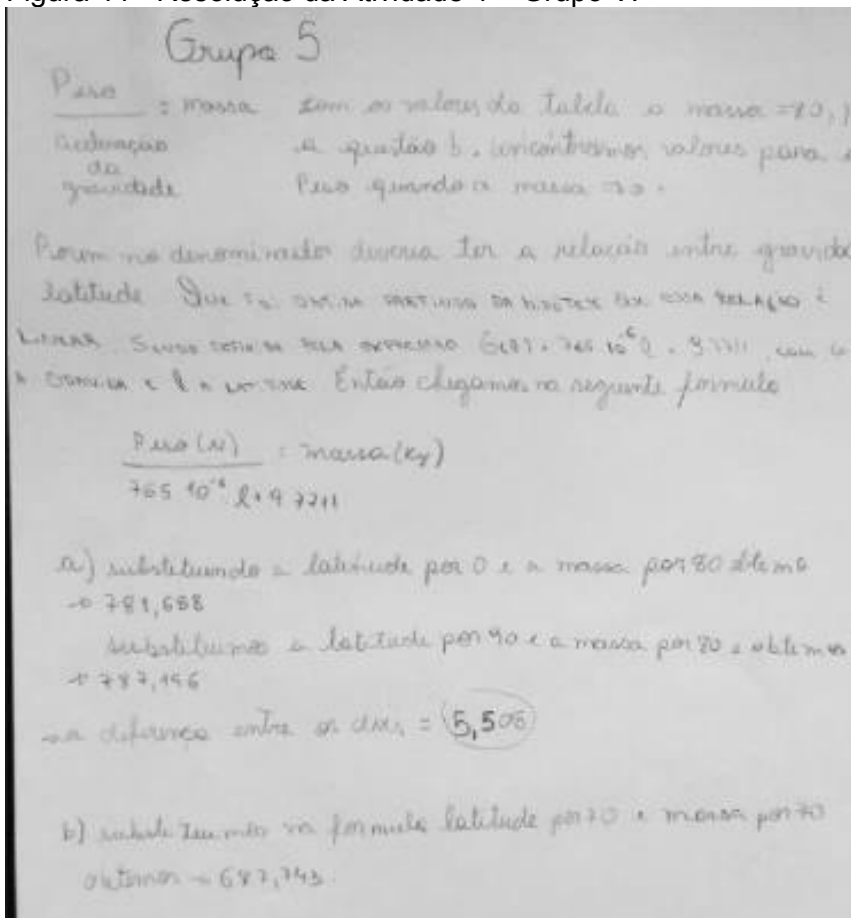
Fonte: Grupo III.

O Grupo V também justificou a relação $\frac{\text{Peso}}{\text{aceleração da gravidade}} = \text{massa}$

por meio dos dados da tabela, e de maneira análoga aos outros grupos, determinaram o seguinte modelo matemático para a aceleração da gravidade (g) em função da latitude (l):

$$g(l) = 765 \cdot 10^{-6} \cdot l + 9,7711$$

Figura 44 - Resolução da Atividade 4 – Grupo V.



Fonte: Grupo V.

Figura 45 – Digitação da Figura 44.

Grupo 5

$$\frac{\text{Peso}}{\text{aceleração da gravidade}} = \text{massa}$$

Com os valores da tabela a massa = 80, para a questão b encontramos valores para o peso quando a massa = 70.

Porém no denominador deveria ter a relação entre gravidade e latitude. Que foi obtida partindo da hipótese que essa relação é linear. Sendo definida pela expressão $G(l) = 765.10^{-6}.l + 9,7711$, com G é a gravidade e l a latitude. Então chegamos na seguinte fórmula.

$$\frac{\text{Peso (N)}}{765.10^{-6}.l + 9,7711} = \text{massa (kg)}$$

a) substituindo a latitude por 0 e a massa por 80 obtemos $\rightarrow 781,688$
 substituímos a latitude por 90 e a massa por 80 e obtemos $\rightarrow 787,196$
 \rightarrow a diferença entre os dois = 5,508

b) substituímos na fórmula latitude por 70 e massa por 70, obtemos $\rightarrow 687,743$.

Fonte: Grupo V.

O Grupo I, de maneira análoga aos demais, conseguiu resolver esta atividade e também escrever o modelo matemático: $P = [9,77167 + (x \cdot 0,0007365)] \cdot m$ em que x representa a latitude e m a massa. Esta atividade foi especial para este grupo, pois nas duas atividades anteriores eles não haviam conseguido esboçar nenhum processo de matematização, e mesmo com duas tentativas mal sucedidas de Modelagem Matemática, este Grupo não desistiu e concluiu esta atividade.

Após todos os grupos apresentarem suas resoluções na lousa, a pesquisadora perguntou o que eles acharam da atividade e se eles sabiam desta variação da aceleração da gravidade. Muitos disseram que sabiam que a aceleração da gravidade variava, mas não sabiam como nem o porquê.

Em seguida, a pesquisadora apresentou a equação internacional e os valores de aceleração da gravidade para cada uma das latitudes solicitadas de acordo com esta equação. Todos os grupos ficaram admirados com a complexidade da equação e comentaram que nunca imaginaram que, com aqueles dados, teriam que utilizar funções trigonométricas para modelar o fenômeno. E por consequência, todos(as) se sentiram muito satisfeitos por terem encontrado resultados muito próximos dos reais de forma bem mais simples. Muitos se sentiram, nas palavras deles, como “gênios da Ciência”.

Tal sentimento motivador é umas das características da Modelagem Matemática, presente na literatura. Atividades como esta ajudam a desmitificar a imagem da Ciência e do cientista, em que muitos(as) estudantes pensam que os cientistas eram seres diferenciados, “gênios”, e que enquanto estudantes, não seriam capazes de fazer Ciência.

A maioria dos(as) participantes da pesquisa, apresentou uma dificuldade, já prevista por esta pesquisadora, que era deduzir as equações e não utilizar as prontas. Apenas o grupo dos bacharéis apresentou a dedução do modelo $P = m \cdot g$ de forma clara e concisa com os pressupostos da Modelagem Matemática. Os grupos de Matemática tiveram uma certa dificuldade com isso e os grupos de Física apresentaram extrema dificuldade em não utilizar as fórmulas prontas, nas demais atividades também. Tal dificuldade será discutida mais rente, no metatexto.

➤ **Como utilizar esta atividade em sala de aula?**

Esta atividade é ideal para introduzir o conceito de força peso e aceleração da gravidade, pode ser feita no início do estudo de Dinâmica. O(A) aluno(a) não precisa ter conhecimentos prévios a respeito do assunto, pois todos os conceitos necessários serão introduzidos na atividade.

Após a atividade o(a) professor(a) poderá discutir o conceito de aceleração da gravidade e falar a respeito de seu valor médio na superfície terrestre, e falar acerca da força peso, suas unidades de medida e todo o conceito envolvido, bem como suas aplicações.

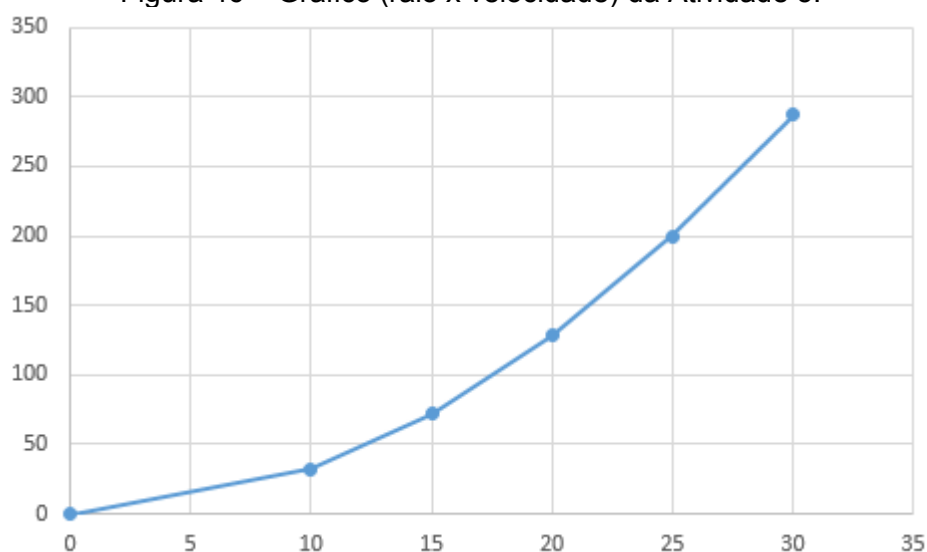
✓ **Atividade 5: Rotatória como redutor de velocidade.**

O objetivo desta atividade era construir um modelo matemático para determinar a velocidade em função do raio e também, determinar a força exercida sobre uma pessoa de massa 80 kg dentro de um veículo ao trafegar por esta rotatória. Para a segunda etapa da atividade, espera-se que, por analogia, os(as) alunos(as) se lembrem da relação $P = m \cdot g$ e façam a correlação de que força = massa x aceleração. Neste caso, a força e a aceleração serão centrípetas

A pesquisadora resolveu esta atividade da seguinte maneira:

Primeiro, traçou-se o gráfico para visualizar o formato da curva.

Figura 46 – Gráfico (raio x velocidade) da Atividade 5.



Fonte: A autora.

Pelo gráfico, pode-se inferir que esta função se assemelha a uma função quadrática do tipo $y = a.x^2$, em que y corresponde ao raio da rotatória e x à velocidade da via, sendo assim, tem-se que; $R = a.V^2$.

Substituindo $R = 32\text{m}$ e $V = 10 \text{ m/s}$, dados na atividade, tem-se que $a = 0,32$, logo, $R = 0,32.V^2$.

Com os dados da tabela, por regra de três, é possível calcular que 20 km/h corresponde a 5,55 m/s. Substituindo na equação do raio, tem-se a resposta da letra a) que seria um raio mínimo de, aproximadamente, 10 m.

A partir deste momento, é preciso interpretar fisicamente a atividade de Modelagem Matemática, e sabe-se que, provavelmente, a pesquisadora terá que intervir neste momento, a fim de auxiliar os(as) alunos(as) a compreenderem o conceito físico envolvido.

Pode-se escrever a equação $R = 0,32.V^2$ como $\frac{V^2}{R} = \frac{1}{0,32} = 3,125$.

A grandeza que se associa à mudança de direção da velocidade de um corpo que se desloca seguindo um percurso do tipo curvilíneo é chamada de aceleração centrípeta, ou seja, a razão entre a velocidade e o raio da curva é denominada de aceleração centrípeta.

Por analogia à atividade 4, sabe-se que força = massa x aceleração, substituindo força por F , massa por m e aceleração centrípeta por $\frac{V^2}{R}$, tem-se que:

$$F = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

Ou seja, o modelo lógico-matemático-fenomenológico da força centrípeta. Substituindo os valores pedidos no enunciado, ou seja $m = 80 \text{ kg}$, $V = 20\text{km/h}$, sabendo-se que o raio é 10 m, tem-se que $F = 250\text{N}$.

A seguir são apresentadas as resoluções dos Grupos II, IV e III.

• **Grupo II** - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: Dados fornecidos na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram o eixo x para a velocidade e o eixo y para o raio.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: por meio de um esboço, assumiram que os dados representavam uma parábola com o vértice na origem.

d) *Simplificação*: Utilizaram a equação $\frac{x^2}{a} = y$.

3- *Resolução*: O grupo não deixou claro na resolução apresentada como definiram a = 3,125, e apresentaram as seguintes equações:

$$\frac{x^2}{3,125} = y \rightarrow \frac{V^2}{3,125} = R$$

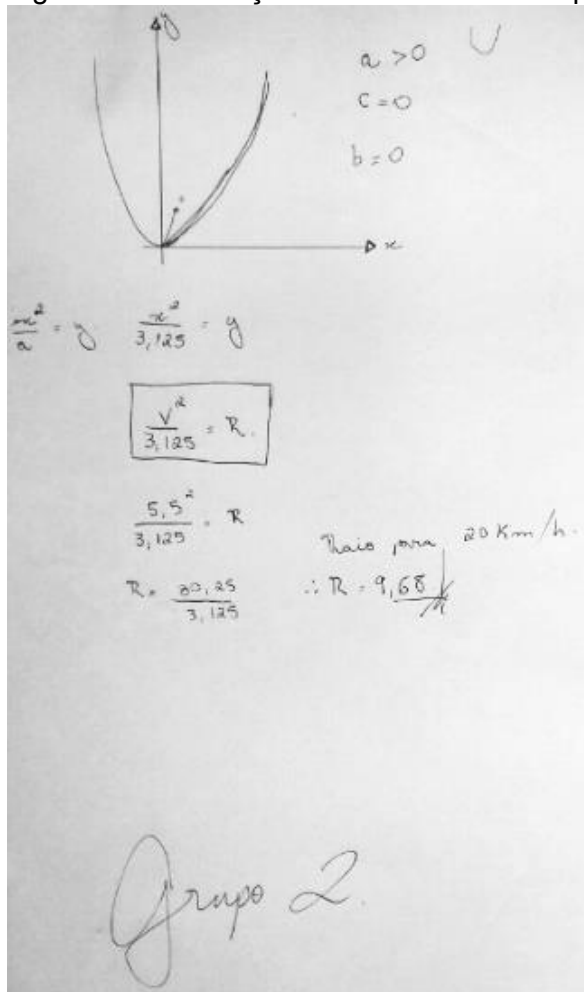
Substituindo $V = 5,5 \text{ m/s}$, encontraram $R = 9,68\text{m}$.

4- *Validação*: não validaram.

5- *Modificação*: não houve modificação.

6- *Correlação com a Física*: não correlacionaram com nenhum conceito físico e não conseguiram responder a segunda parte da atividade.

Figura 47 - Resolução da Atividade 5 – Grupo II.



Fonte: Grupo II.

• **Grupo IV**- Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

1- *Experimentação*: Dados fornecidos na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: raio (r) como variável dependente, velocidade (V) como variável independente, e uma constante k.

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: perceberam que o raio dividido pela velocidade resulta em número k, em que a cada 5 m/s a mais na velocidade tem-se um aumento de 1,6 em k.

d) *Simplificação*: Adotaram $k = \frac{r}{V}$

3- *Resolução*: primeiro escreveram um modelo em função de k, de acordo com a hipótese levantada:

$$k = k_0 + 1,6 \frac{V - V_0}{5}$$

Assumindo, de acordo com a tabela, $k_0 = 3,2$ e $V_0 = 10$

$$k = 3,2 + 1,6 \frac{V - 10}{5}$$

Substituindo $k = \frac{r}{V}$ e fazendo a distributiva, chegaram ao modelo matemático:

$$r = 3,2 \cdot V + \frac{1,6V^2 - 16}{5}$$

Para $V = 20 \frac{km}{h} \cong 5,5 \frac{m}{s}$, o raio mínimo da rotatória é de 9,68 m.

4- *Validação*: validaram com os dados fornecidos na tabela.

5- *Modificação*: não houve modificação.

6- *Correlação com a Física*: não correlacionaram com nenhum conceito físico e não conseguiram responder a segunda parte da atividade.

Figura 48 - Resolução da Atividade 5 – Grupo IV.

GRUPO 4

Procurando um padrão quanto a relação entre o Raio e a Velocidade sabemos que o raio dividido pela velocidade resulta em um número k , onde a cada 5 m/s a mais na velocidade temos um aumento de 1,6 em k . Logo, podemos concluir que:

$$k = k_0 + 1,6 \cdot \frac{v - v_0}{5}$$

Assumindo $k_0 = 3,2$ e $v_0 = 10$ (baseado na tabela)

$$k = 3,2 + 1,6 \left(\frac{v - 10}{5} \right)$$

Como $\frac{r}{v} = k$, segue que $r = v \cdot k$, substituindo k , temos:

$$r = v \cdot \left(3,2 + 1,6 \left(\frac{v - 10}{5} \right) \right)$$

Fazendo a distributiva da multiplicação em relação à adição, segue que:

$$r = 3,2v + \frac{1,6v^2 - 16}{5}$$

Logo, para $v = 20 \text{ km/h} \approx 5,5 \text{ m/s}$, temos:

$$r = 3,2 \cdot 5,5 + \frac{1,6 \cdot (5,5)^2 - 16}{5}$$

$$r = 9,68 \text{ m.}$$

Fonte: Grupo IV.

- **Grupo III** - Formado por dois alunos do 1º ano de Bacharelado em Física e dois estudantes do 2º ano de Licenciatura em Física.

1- **Experimentação**: os dados já constavam na atividade.

2- **Abstração**:

a) **Seleção das variáveis**: adotaram $r(v)$ como variável dependente, v como variável independente e k como constante.

b) **Problematização**: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: após o esboço do gráfico, assumiram que os dados se comportavam como uma função quadrática.

d) *Simplificação*: adotaram a expressão $\frac{v^2}{r(v)} = k$

3- *Resolução*: por meio da expressão acima e com os dados fornecidos na atividade, calcularam $k = 3,125 \text{ m/s}^2$, e em seguida encontraram o valor do raio.

$$\frac{v^2}{r} = k \rightarrow 5,556^2 = 3,125 \cdot r \rightarrow r = 9,875 \text{ m}$$

Este grupo conseguiu responder a segunda parte da atividade, que pedia a força exercida sobre uma pessoa de massa 80kg dentro do veículo, durante a rotatória. Resolveram da seguinte forma:

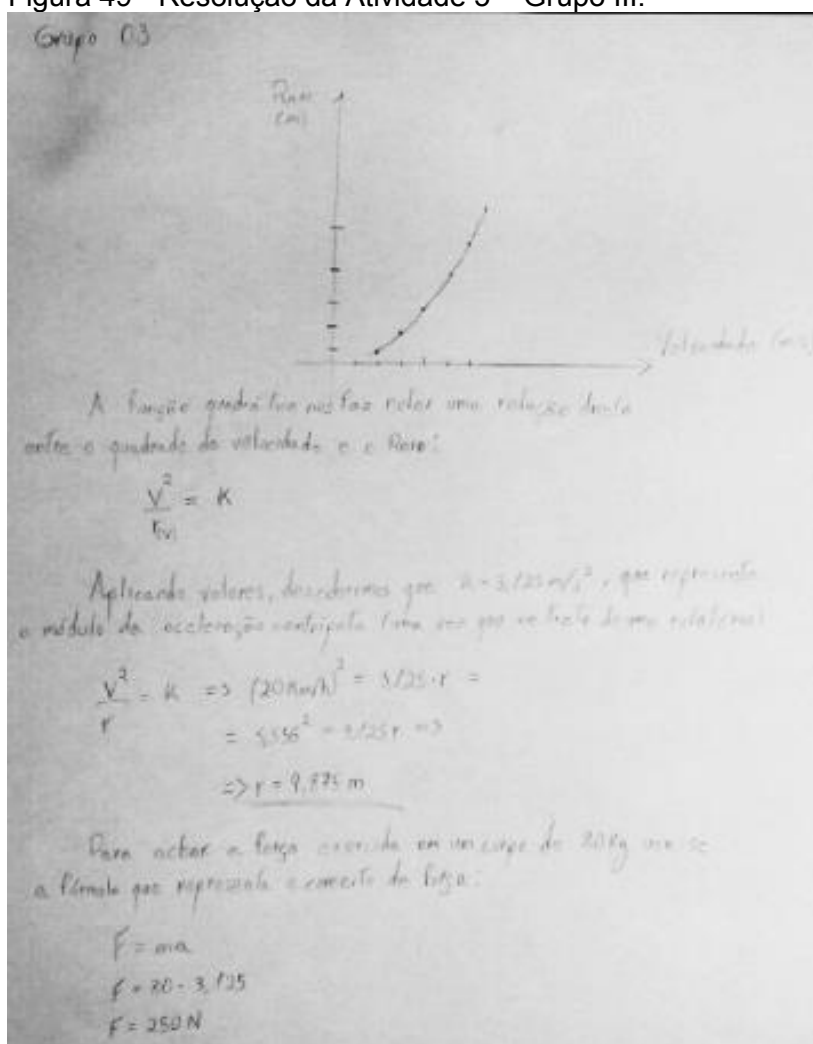
$$F = m \cdot a \rightarrow F = 80 \cdot 3,125 \rightarrow F = 250 \text{ N}$$

4- *Validação*: validaram a primeira parte da atividade com os dados da tabela.

5- *Modificação*: não houve modificação.

6- *Correlação com a Física*: Ao determinarem a constante k , constataram que a mesma representava o módulo da aceleração, e uma vez que se tratava de uma rotatória, esta aceleração representava uma aceleração centrípeta. Tendo a aceleração, para determinarem a força, utilizaram a equação que representa o conceito de força. Sendo assim, este grupo fez todas as correlações esperadas para esta atividade, só não escreveram o modelo lógico-matemático-fenomenológico da força centrípeta.

Figura 49 - Resolução da Atividade 5 – Grupo III.



Fonte: Grupo III.

Figura 50 – Digitação da Figura 49.

Grupo 03

A função quadrática nos faz notar uma relação direta entre o quadrado da velocidade e o raio:

$$\frac{v^2}{r(v)} = k$$

Aplicando valores, descobrimos que $k = 3,125 \text{ m/s}^2$, que representa o módulo da aceleração centrípeta (uma vez que se trata de uma rotatória).

$$\frac{v^2}{r} = k \rightarrow \left(\frac{20 \text{ km}}{\text{h}}\right)^2 = 3,125 \cdot r =$$

$$= 5,556^2 = 3,125 r \rightarrow$$

$$\rightarrow r = 9,875 \text{ m}$$

Para achar a força exercida em um corpo de 80 kg usa-se a fórmula que representa o conceito de força:

$$F = m \cdot a$$

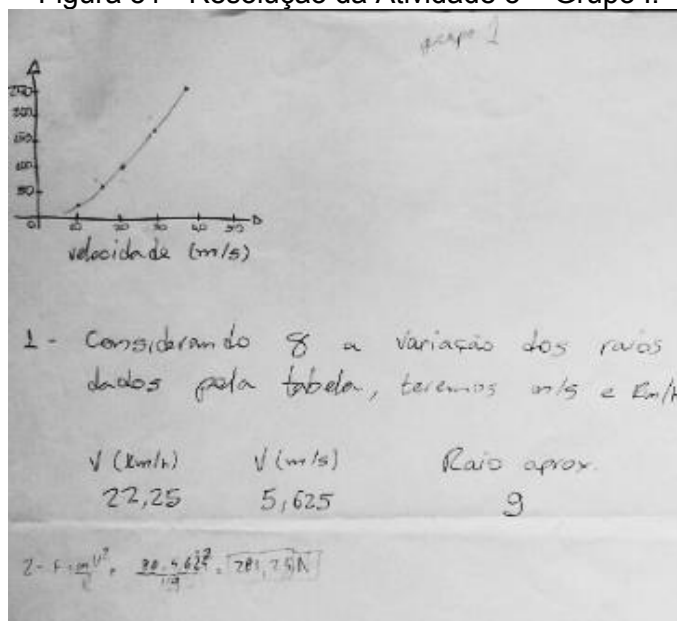
$$F = 80 \cdot 3,125$$

$$F = 250 \text{ N}$$

Fonte: Grupo III.

Os(as) integrantes Grupo I apresentaram dificuldades nesta atividade e determinaram o raio da trajetória por meio dos dados da tabela, mas não mostraram o processo de matematização, e apresentaram a resposta da segunda parte da atividade após a intervenção da pesquisadora junto aos demais.

Figura 51 - Resolução da Atividade 5 – Grupo I.



Fonte: Grupo I.

Figura 52 – Digitação da Figura 51.

Grupo I

1- Considerando 8 a variação dos raios dados pela tabela, teremos m/s e km/h.

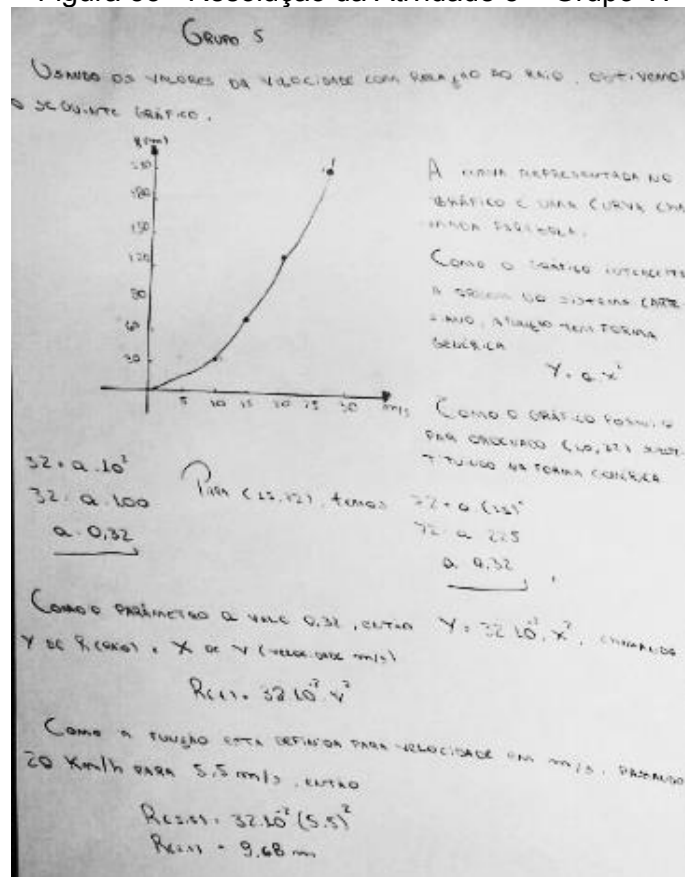
V(km/h)	V(m/s)	Raio aprox..
22,25	5,625	9

$$2- F = \frac{mV^2}{R} = \frac{80 \cdot 5,625^2}{9} = 281,25 N$$

Fonte: Grupo I.

O Grupo V também fez apenas a primeira parte da atividade, os(as) estudantes esboçaram o gráfico e determinaram que os dados se comportavam como uma parábola, assim, concluíram que o raio era 9,68m.

Figura 53 - Resolução da Atividade 5 – Grupo V.



Fonte: Grupo V.

Figura 54 – Digitação da Figura 53.

Grupo 5

Usando os valores da velocidade com relação ao raio, obtivemos o seguinte gráfico.

A curva representada no gráfico é uma curva chamada parábola.

Como o gráfico intercepta a origem do sistema cartesiano. A função tem forma genérica:

$$y = a \cdot x^2$$

Como o gráfico possui o par ordenado (10, 32) substituindo na forma genérica.

$$32 = a \cdot 10^2$$

$$32 = a \cdot 100$$

$$a = 0,32$$

Para (15, 72), temos:

$$72 = a \cdot (15)^2$$

$$72 = a \cdot 225$$

$$a = 0,32$$

Como parâmetro a vale 0,32, então $y = 32 \cdot 10^{-2} \cdot x^2$, chamando y de R (raio) e x de v (velocidade m/s)

$$R(t) = 32 \cdot 10^{-2} \cdot v^2$$

Como a função está definida para velocidade em m/s, passando de km/h para 5,5 m/s, então

$$R(5,5) = 32 \cdot 10^{-2} \cdot (5,5)^2$$

$$R(5,5) = 9,68 \text{ m}$$

Fonte: Grupo V.

Os grupos demoraram cerca de 1h para determinar um modelo matemático que correlacionasse o raio da trajetória com a velocidade. Apenas o Grupo III conseguiu dar a resposta da segunda pergunta, que era para calcular a força exercida sobre uma pessoa de massa 80 kg dentro de um veículo nesta rotatória. Os demais grupos, não conseguiram correlacionar, por si sós, o resultado encontrado na atividade 4 nem identificar a aceleração centrípeta.

Após o tempo proposto, a pesquisadora conduziu uma discussão com toda a sala, como mediadora, para que todos alcançassem o entendimento do conteúdo.

A seguir, apresenta-se a transcrição dos diálogos deste momento. Para este diálogo, como foi gravado por áudio, os alunos(as) serão descritos como A1, A2, e assim sucessivamente, e a pesquisadora por P.

P: Alguém tem ideia do que esta relação representa?

A1⁸: Coeficiente da função quadrática.

P: Sim, e seu significado físico?

A1: Agora “moio”.

A2: Aceleração.

P: É uma aceleração!

A3⁹: Aceleração centrípeta.

P: Sim!

Neste momento a pesquisadora definiu aceleração centrípeta. Após esse momento, retornou-se ao modelo lógico-matemático-fenomenológico da atividade 4, $P = m.g$.

P: Nós queremos uma força exercida sobre uma massa. O que é isso daqui? (referindo-se ao modelo $P = m.g$).

A1: Segunda Lei de Newton.

P: Uma força sobre uma massa. Podemos generalizar trocando P por uma força qualquer F?

Todos: Sim.

⁸ A1 é licenciando em Matemática e faz parte do Grupo IV.

⁹ A3 é licenciando em Física.

P: 'g' é o que?

Todos: aceleração.

P: Então podemos generalizar como $F = m.a$?

Todos: Sim.

P: A partir daqui, podemos encontrar a aceleração pedida no enunciado? Mas qual aceleração nós temos?

Alguns alunos: Aceleração centrípeta.

Resultando em: $F = m \cdot \frac{v^2}{R}$

P: Agora ficou fácil achar a força?

A1: Já achamos.

P: Quanto deu?

A3: 250N.

Após essa discussão, foi feita mais uma reflexão a respeito do tipo de rotatória, que no caso seria uma mini rotatória, segundo o DENIT, e a aplicação da força centrípeta em um problema real.

Foi feita uma discussão a respeito do número 3,125, da relação $\frac{v^2}{R} = \frac{1}{0,32} = 3,125$. Ao falar do movimento circular, e como uma proposta de como eles(as) poderiam trabalhar com esta atividade em sala de aula, foi perguntada qual força que impede que este móvel derrape durante o movimento na curva. Um aluno respondeu, "atrito". Em seguida a pesquisadora continuou.

Sobre um carro de massa m , em um plano horizontal, descrevendo uma curva de raio R , com atrito de escorregamento lateral, existe uma força horizontal que evita que ele derrape (saia pela tangente), esta força é a força de atrito (F_{at}) que é a própria resultante centrípeta (F_c), ou seja, $F_{at} = F_c$.

Tem-se que: $F_{at} = \mu \cdot m \cdot g$ e $F_c = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Assim, pela igualdade $F_{at} = F_c$,

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Cancelando as massas.

$$\mu \cdot g = \frac{v^2}{R}$$

Ou seja, o número encontrado, 3,125 corresponde ao produto $\mu \cdot g$. Substituindo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, tem-se que:

$$\mu \cdot 9,8 = 3,125$$

$$\mu \cong 0,32$$

Sendo que 0,32 é o coeficiente de atrito médio entre o pneu e o asfalto, segundo o DENIT.

Após a exposição, muitos alunos(as) falaram a respeito do “trabalho” que tiveram e como tudo fazia sentido agora, e mais uma vez, se sentiram satisfeitos e entusiasmados por terem feito o processo de Modelagem Matemática e por terem construído, nas palavras deles, “com as próprias mãos”.

Mais uma vez foi ressaltado que no processo de matematização na Física é preciso interpretar fisicamente o modelo matemático encontrado e suas variáveis e constantes.

➤ **Como utilizar esta atividade em sala de aula?**

Esta atividade pode ser utilizada para ensinar forças no movimento circular. E necessita, como conhecimentos prévios, o conceito de aceleração centrípeta e de força de atrito.

Se a atividade anterior for utilizada, por analogia o(a) aluno(a) pode deduzir a equação da 2ª Lei de Newton, como foi feito durante a abordagem. O(a) professor(a) têm duas opções, pode utilizá-la para abordar também o conceito da 2ª Lei de Newton, ou pode utilizá-la com o objetivo de apenas abordar a Força Centrípeta, tendo como conhecimento prévio a 2ª Lei de Newton também.

Pode-se explorar então, com esta atividade os conceitos de: 2ª Lei de Newton, Força Centrípeta e o caso particular em que um móvel de massa m sobre um plano horizontal descreve uma curva de raio R , com atrito de escorregamento lateral.

✓ **Atividade 6: Eficiência dos airbags.**

Esta atividade era mais complexa, e tinha por objetivo calcular a força sobre uma pessoa de massa 80 kg. Com e sem o airbag, em uma colisão com os dados apresentados na atividade. O objetivo era identificar que com e sem o airbag, o motorista receberia o mesmo impulso, ou seja o produto $m \cdot \Delta V$ é constante. A

diferença é que quanto maior o tempo de contato menor será a força média aplicada sobre o motorista, sendo essa a importância dos airbags. Ainda, tem-se por objetivo definir o conceito de quantidade de movimento e descrever o modelo lógico-matemático tipo-essência do movimento que é $F = \frac{dp}{dt}$.

A pesquisadora, ao resolver esta atividade, constatou que o tempo de contato com o airbag é 10 vezes maior do que sem o airbag, e para os dados do enunciado, a força que age sobre uma pessoa de massa 80kg, com e sem o airbag, na situação descrita seria $F_{\text{com}} = 2844,4\text{N}$ e $F_{\text{sem}} = 28444,4\text{N}$.

A seguir, são apresentadas as resoluções dos Grupos II, IV e III.

• **Grupo II** - Formado por quatro alunos do 1º ano de Licenciatura em Física.

1- *Experimentação*: os dados já constavam na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram como constante a massa (m), e como variáveis a variação da velocidade (ΔV), a variação do tempo (Δt) e a força resultante (F_r).

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: levantaram a hipótese de que a variação da velocidade correspondia à área do gráfico.

d) *Simplificação*: adotaram formas regulares, sendo elas paralelogramo, triângulo e trapézio, e fizeram a soma das áreas.

3- *Resolução*: Inicialmente, por meio da soma das áreas das figuras geométricas, determinaram que a área total sem o airbag correspondia a 43,6 m², enquanto a área total com o airbag correspondia a 40,1 m².

Substituindo na equação $F_r = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$, encontraram os seguintes valores:

$$\text{Sem o airbag: } F_r = 80 \cdot \frac{43,6}{0,05} = 69760\text{N}$$

$$\text{Com o airbag: } F_r = 80 \cdot \frac{40,1}{0,5} = 6416\text{N}$$

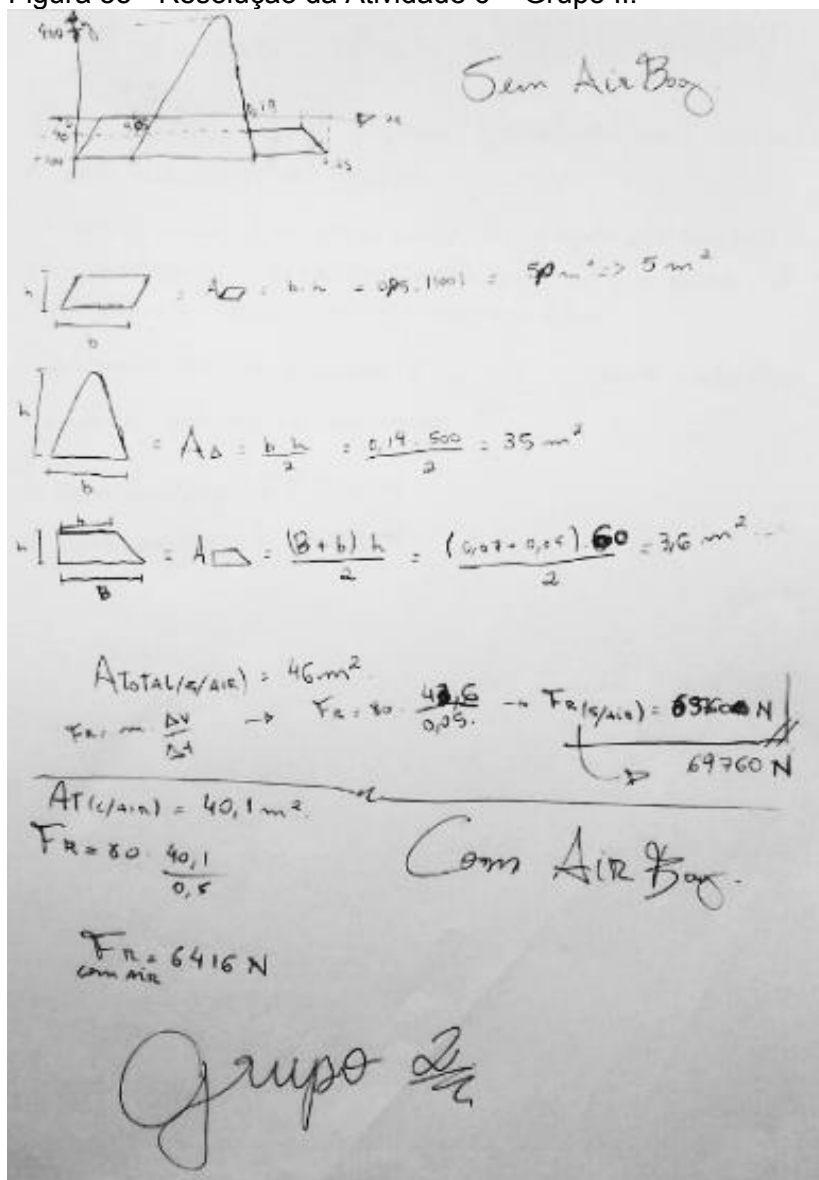
Ou seja, com o airbag a força exercida sobre o motorista é, aproximadamente, 10 vezes menor que sem o airbag.

4- *Validação*: não validaram.

5- *Modificação*: não foi preciso.

6- *Correlação com a Física*: Fizeram a correlação com a atividade anterior em que $F = m \cdot a$ e substituíram $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Figura 55 - Resolução da Atividade 6 – Grupo II.



Fonte: Grupo II.

• **Grupo IV**- Formado por quatro alunos(as) do 1º ano de Licenciatura em Matemática.

1- *Experimentação*: os dados já estavam na atividade.

2- *Abstração*:

a) *Seleção das variáveis*: adotaram como variáveis a força (F), a aceleração (a) e o tempo (t).

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: o grupo encontrou a aceleração por meio da área do gráfico, mas na resolução entregue não estão claras quais hipóteses eles utilizaram para a determinação da área. Alguns grupos fizeram por somas de diversas áreas geométrica e outros simplificaram pela área do triângulo.

d) *Simplificação*: Não está explicitado.

3- *Resolução*: A partir da equação $F = m \cdot a$, substituíram $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, formulando a seguinte equação: $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Por meio da área do gráfico, eles encontraram os seguintes dados:

Com Airbag	Sem Airbag
$\Delta V = 43,4 \text{ m/s}$	$\Delta V = 46,4 \text{ m/s}$
$\Delta t = 0,5 \text{ s}$	$\Delta t = 0,05 \text{ s}$

Substituindo na equação $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$, os valores encontrados foram:

Com Airbag $\rightarrow F = 6.944\text{N}$.

Sem Airbag $\rightarrow F = 74.240\text{N}$.

Ou seja, com o airbag a força exercida sobre o motorista é, aproximadamente, 10 vezes menor que sem o airbag.

4- *Validação*: não validaram.

5- *Modificação*: não foi preciso.

6- *Correlação com a Física*: Fizeram a correlação com a atividade anterior em que $F = m \cdot a$.

Figura 56 - Resolução da Atividade 6 – Grupo IV.

GRUPO 4

De acordo com a segunda lei de Newton temos que $F = m \cdot a$, onde $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, portanto $F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$ dessa forma encontramos aproximações para a variação de velocidade.

Assumindo $t = 0,05$ para as pessoas sem Airbag e $t = 0,5$ para as pessoas com Airbag tendo como referência uma massa igual a 80, temos:

Pessoas sem Airbag

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$F_{PSA} = 80 \cdot \frac{46,4}{0,05}$$
$$F_{PSA} = 80 \cdot 928$$
$$F_{PSA} = 74\,240 \text{ N}$$

Pessoas com Airbag

$$F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$F_{PCA} = 80 \cdot \frac{43,4}{0,5}$$
$$F_{PCA} = 80 \cdot 86,8$$

$F_{PCA} = 6\,944 \text{ N}$

Fonte: Grupo IV.

- **Grupo III** - Formado por dois alunos do 1º ano de Bacharelado em Física e dois estudantes do 2º ano de Licenciatura em Física.

1- **Experimentação**: os dados já estavam na atividade.

2- **Abstração**:

a) **Seleção das variáveis**: adotaram como variáveis a força (F), a aceleração (a) e o tempo (t).

b) *Problematização*: já fornecida no enunciado.

c) *Formulação de hipóteses*: o grupo encontrou a aceleração por meio da área do gráfico, mas na resolução entregue não estão claras quais hipóteses eles utilizaram para a determinação da área.

d) *Simplificação*: Não está explicitado.

3- *Resolução*: A partir da equação $F = m \cdot a$, substituíram $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, formulando a seguinte equação: $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

Por meio da área do gráfico, eles encontraram os seguintes dados:

Com Airbag	Sem Airbag
$\Delta V = 17,7 \text{ m/s}$	$\Delta V = 21,8 \text{ m/s}$
$\Delta t = 0,5 \text{ s}$	$\Delta t = 0,05 \text{ s}$

Substituindo na equação $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$, os valores encontrados foram:

Com Airbag $\rightarrow F = 2832 \text{ N}$.

Sem Airbag $\rightarrow F = 34880 \text{ N}$.

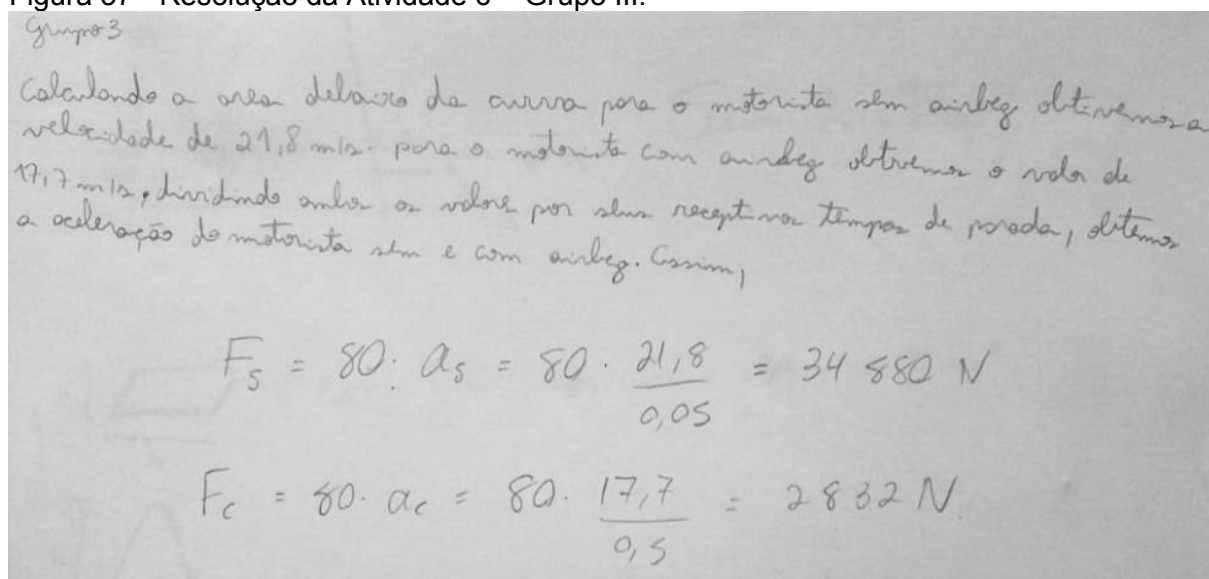
Ou seja, com o airbag a força exercida sobre o motorista é, aproximadamente, 12 vezes menor que sem o airbag.

4- *Validação*: não validaram.

5- *Modificação*: não foi preciso.

6- *Correlação com a Física*: Fizeram a correlação com a atividade anterior.

Figura 57 - Resolução da Atividade 6 – Grupo III.



Fonte: Grupo III.

Figura 58 – Digitação da Figura 57.

Grupo 3

Calculando a área debaixo da curva para o motorista sem airbag obtivemos a velocidade de 21,8 m/s para o motorista com airbag obtivemos o valor de 17,7 m/s. Dividindo ambos os valores por seus respectivos tempos de parada, obtemos a aceleração do motorista sem e com airbag. Assim,

$$F_s = 80 \cdot a_s = 80 \cdot \frac{21,8}{0,05} = 34880 \text{ N}$$

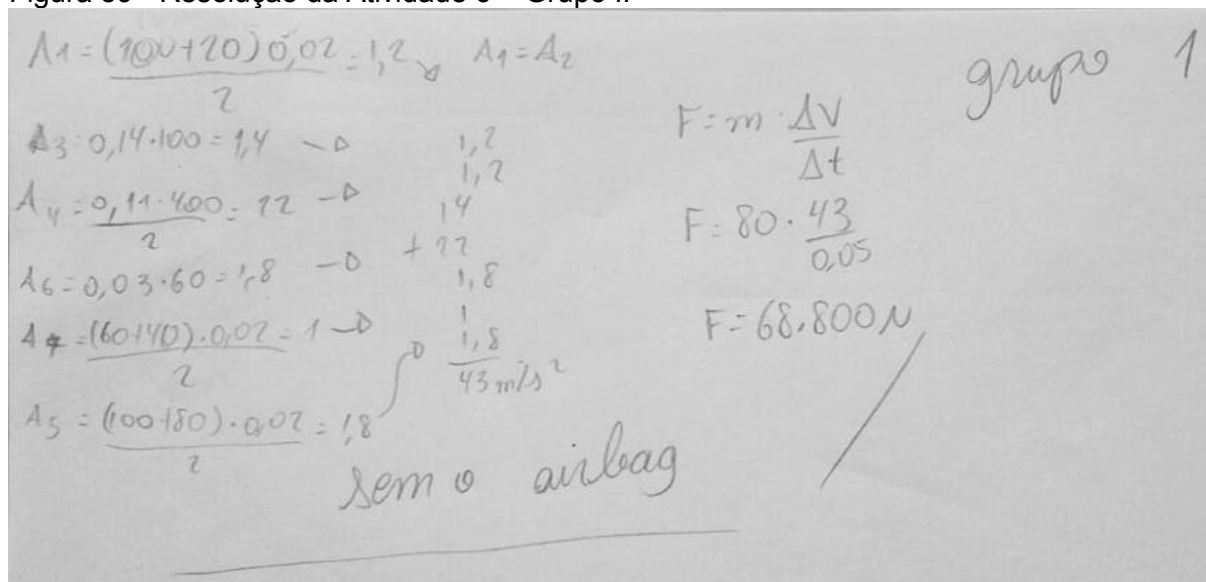
$$F_c = 80 \cdot a_c = 80 \cdot \frac{17,7}{0,5} = 2832 \text{ N}$$

Fonte: Grupo III.

Os Grupos I e V resolveram a atividade de maneira análoga, calcularam a variação da velocidade por meio da área do gráfico, e para tanto, simplificaram utilizando figuras geométricas regulares e fizeram a somatória das mesmas. Em seguida, utilizaram a equação $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$ para determinarem as forças que agem sobre uma pessoa de massa 80 kg, para os tempos típicos de parada.

Porém, o Grupo I determinou o valor da força apenas para o caso sem o airbag, sendo ela igual a 68800N.

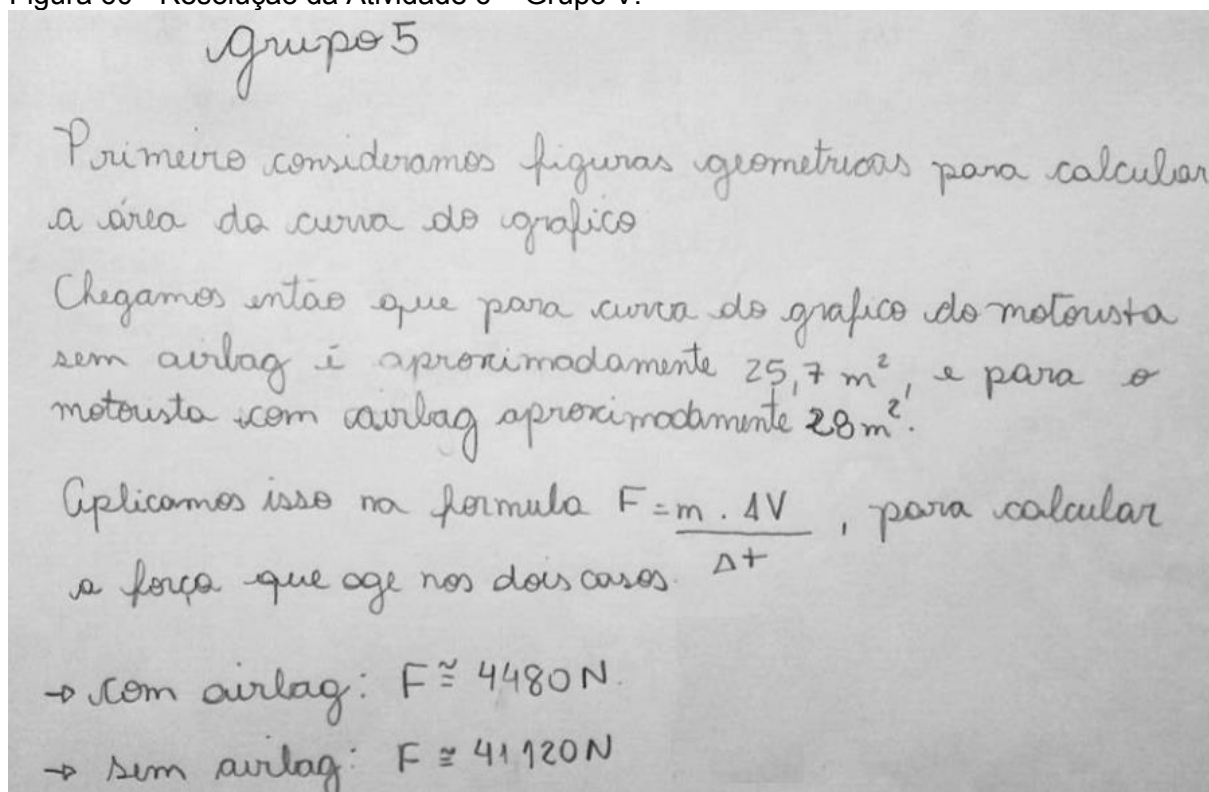
Figura 59 - Resolução da Atividade 6 – Grupo I.



Fonte: Grupo I.

Já o Grupo V, calculou a força para ambos os casos, sendo 4480N com o airbag e 41120N sem o airbag.

Figura 60 - Resolução da Atividade 6 – Grupo V.



Fonte: Grupo V.

Após todos terem resolvido essa atividade e fornecido as forças exercidas sobre um motorista com e sem o airbag durante a colisão apresentada, a pesquisadora fez um momento de discussão e reflexão com todos(as) na lousa. Para melhor explicitação desse momento, serão transcritos, ao longo dos próximos parágrafos, trechos do diálogo dessa discussão.

Todos os grupos utilizaram a expressão: $F = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Passando o Δt multiplicando F , tem-se que $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$.

A pesquisadora solicitou que eles calculassem, a partir dos dados encontrados, o valor do produto $m \cdot \Delta V$, e todos(as) perceberam que para ambos os casos, com e sem o airbag, esse produto era praticamente igual. Foi então que a pesquisadora explicitou que esse produto era chamado de Impulso, definido por: $I = F \cdot \Delta t$, e que a relação $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$ é chamada de teorema do impulso. Foi definido também que o produto $m \cdot \Delta V$ representa a variação da quantidade de movimento (Δp).

Depois das considerações teóricas a respeito do impulso e da quantidade de movimento, retomou-se a equação $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$.

Após este momento iniciou-se uma discussão a respeito dos modelos trabalhados nestas últimas três atividades. A pesquisadora mostrou que dois conceitos foram recorrentes nas três últimas atividades, sendo eles, força e movimento. Sendo que, nas três atividades, construiu-se um modelo que envolvia força, massa e aceleração e que os três modelos resultantes podiam ser escritos, de forma geral, como $F = m.a$.

Em seguida, foi indagado se os(as) participantes conheciam a equação fundamental do movimento, ou seja, uma equação que descreve todos os movimentos. Um participante falou que seria $m.\Delta V$, ou seja, a quantidade de movimento. A pesquisadora, então, fez o seguinte procedimento na lousa: substituindo $m.\Delta V = \Delta p$ e passado Δt dividindo o segundo termo da equação, tem-se que:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

P: Se esta equação descreve todos os movimentos, ela seria caracterizada como um modelo lógico-matemático-fenomenológico ou tipo-essência?

Alguns alunos: Tipo-essência.

Retomando ao modelo $F = m.a$, a pesquisadora perguntou:

P: E esse modelo ($F = m.a$), seria caracterizado como fenomenológico ou tipo-essência?

Alguns alunos: Tipo-essência.

P: é um modelo lógico-matemático-fenomenológico, alguém sabe por quê?

(Silêncio)

P: se é um modelo fenomenológico, significa que ela descreve fenômenos, mas não todos.

A1: porque aí tem que ter a massa constante.

P: exato, pois nem todas as massas são constantes, logo ela não pode ser considerada tipo-essência.

Assim, conclui-se o minicurso apresentando aos(as) estudantes a equação fundamental do movimento e os modelos lógico-matemático-fenomenológico e tipo-essência da 2ª Lei de Newton.

➤ **Como utilizar esta atividade em sala de aula?**

Esta atividade pode ser utilizada para ensinar o teorema do impulso, e também abordar o conceito de quantidade de movimento. E requer como conhecimentos prévios o conceito de aceleração, como variação da velocidade pelo tempo, e a 2ª Lei de Newton, em que $F = m \cdot a$.

7.3 Participação dos(as) Estudantes na pesquisa

Foi gratificante o desenvolvimento do minicurso ofertado, foram dois sábados trabalhosos e cansativos, mas de muitas discussões e interação. Ao longo do desenvolvimento da pesquisa, percebeu-se a satisfação dos(as) estudantes e a evolução dos mesmos no decorrer das atividades.

No questionário posterior, elaborou-se uma questão para que os(as) participantes pudessem relatar suas experiências no minicurso, citando pontos positivos e aspectos desfavoráveis. A seguir, são apresentados alguns desses pontos citados e seus respectivos trechos.

Entre os aspectos desfavoráveis, uma queixa recorrente foi não poder utilizar fórmulas, como se pode observar nos trechos a seguir.

F2: Negativo: foi partir do começo e deixar o conhecimento de jeitos práticos e rápidos de resolução.

F5: Primeiro que todo conhecimento é válido, mas alguns aspectos desfavoráveis foram na realidade o desafio de ter que moldar a solução que no caso para muitos é difícil.

Outro aspecto negativo destacado foi a leitura dos textos, que para alguns foi extenso.

F3: O curso mostrou como uma abordagem matemática é essencial para a resolução de problemas. Entretanto, se talvez ao invés de termos que ler um artigo longo, que pode ser cansativo, a professora fizesse uma síntese e passasse aos alunos de maneira um pouco mais expositiva, alguns conceitos ficariam mais claros.

F9: Por mais que a parte teórica tenha sido parcialmente entediante, se mostrou necessária para a resolução dos exercícios e da filosofia principalmente do curso, esses que compensaram qualquer desconforto eventual.

F11: Negativos: leituras longas de textos que tendia fazer eu perder atenção para aula.

A outra queixa recorrente, foi o fato do minicurso ter sido feito no sábado, e principalmente por tê-los feito acordar cedo.

F4: “Negativos: acordar cedo no sábado”.

F10: “Negativo: sábado manhã e tarde”.

Em relação aos pontos positivos citados pelos(as) alunos(as), pode-se destacar, primeiramente, os que se referem ao fato de que maneiras diferentes de se resolver uma atividade conduziram aos mesmos resultados.

F2: Positivo: foi ver que há várias formas de se pensar, e que chegam a um resultado em comum.

M3: Foi interessante ver que problemas ou uma questão pode ter vários meios de solução, além disso, sem precisar usar fórmulas decoradas.

M8: Eu consegui perceber que posso encontrar várias maneiras para encontrar um resultado.

Também foram citados aspectos epistemológicos, a respeito de modelos e terminologias científicas.

M7: O minicurso foi muito bom, me fez saber o que era o modelo matemático, a matematização e os modelos científicos, mostrando a importância do mesmo. E confesso que fiquei apaixonada por modelos matemáticos, algo que sempre gostei porém não sabia que se dava este nome.

F4: Participar foi uma experiência interessante, me fez perceber que “saber algo” é diferente de “saber sobre o nome de algo”.

E por fim, os pontos positivos no que se referem à condução das atividades e do minicurso como um todo.

F6: Comunicação foi o que eu diria o mais importante, o que aconteceu entre a professora e os alunos. O diálogo e a troca de muitos pontos de vista diferentes.

F4: Positivos: boa dinâmica, divertido, 20 horas.

F10: Positivos: Dinâmico, cativante, emocionante.

Todos os pontos destacados servem como um norte para melhorar futuras aplicações do minicurso e como incentivo de saber que abordagens como esta podem despertar novos olhares a respeito da Ciência e seu ensino.

No capítulo a seguir, são apresentadas, no metatexto, as inferências e a interpretação dos resultados, baseados nos teóricos adotados nesta pesquisa.

METATEXTO

Após a pré-análise e a exploração do material, Bardin (1979) propõe a inferência e a interpretação dos resultados por meio da elaboração de um texto evidenciando suas relações com a fundamentação teórica que sustenta a investigação. Baseados nesta proposta, elaborou-se o metatexto de análise, que consiste de um diálogo entre os referenciais teóricos adotados e os resultados obtidos nos questionários e nas atividades.

O metatexto foi dividido em função dos temas centrais e norteadores da abordagem didática proposta, sendo eles: Modelagem Matemática, Matematização e Modelos Científicos, e também das temáticas a respeito do papel da Matemática na Física e os saberes docentes.

• Modelagem Matemática

Como já apresentado nas análises do capítulo 7, nenhum dos 19 participantes da pesquisa afirmou conhecer a Modelagem Matemática. Mesmo supondo que eles(as) possam ter participado de atividade de Modelagem Matemática durante sua vida escolar e não se lembrarem ou não saberem o que estavam fazendo, partiremos do pressuposto que eles(elas) nunca tiveram contato com a Modelagem Matemática, como apresentado nos registros.

Ao esboçarem o que eles(as) entendiam por Modelagem Matemática, foi possível observar um aumento significativo na “UR 2.2 Definição segundo o consenso científico atual”, em que 14 registros foram unitarizados nesta UR após o minicurso. Dos demais registros, quatro apresentaram noções divergentes e um(a) estudante, não soube “colocar em palavras certas”.

Os autores da Modelagem Matemática na Educação Matemática adotados nesta pesquisa, citam as seguintes definições do que é Modelagem Matemática:

- processo para descrever, formular e resolver uma situação não Matemática por meio da Matemática (BASSANEZI, 2004; BIEMBENGUT, 2009; ALMEIDA e BRITO, 2005);

- processo que possibilita abordar assuntos do cotidiano por meio de uma linguagem matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; CHAVES, 2010);

De acordo com Blum e Niss (1991),

O processo de modelagem não apenas produz uma imagem simplificada mas verdadeira de parte de uma realidade pré-existente. Em vez disso, a modelagem matemática também estrutura e cria uma peça de realidade, dependente do conhecimento, intenções e interesses do solucionador de problemas (BLUM; NISS, 1991, p. 39, tradução nossa).

As 14 respostas da UR 2.2, contemplam essas definições apresentada pelos autores, como se pode observar nos fragmentos de registros a seguir:

F4: Trazer um problema real para a linguagem matemática, e assim resolvê-lo através da lógica.

F9: Modelagem matemática é a aplicação da matemática para resolver problemas da realidade, seja do dia a dia ou uma questão científica.

M5: Tornar um problema real em uma linguagem matemática de forma a trabalhar com este modelo e chegar a conclusões aplicáveis à realidade.

M6: Um meio diferenciado em resolver determinado problema no qual fatos do mundo real são abstraídos e simplificados, supondo as devidas considerações para uma prática e simples resolução.

Além dessas características, a Modelagem Matemática foi apresentada, também, pelos(as) participantes, como um processo que favorece o entendimento da construção do conhecimento e da elaboração de equações, como se pode observar no registro de F7, "*Modelagem é um modo mais prático de se ver a matemática, onde se entende o porquê e como das fórmulas e equações*"; e também foi apresentada como um método de aprendizagem, como no registro de M2, "*A Modelagem Matemática é tanto um método científico no sentido de matematizar um problema da realidade, quanto um método de aprendizagem*".

Esses resultados corroboram com Bassanezi (1999), que afirma que a Modelagem Matemática, como uma estratégia didática, ajuda o aluno a compreender a construção do conhecimento por meios de relações matemáticas.

Pode-se inferir, também, que a abordagem didática proposta proporcionou uma visão adequada do que é a Modelagem Matemática.

No que diz respeito às atividades desenvolvidas no minicurso, vale ressaltar que todas são caracterizadas como atividades de "1º momento de familiarização", em que o professor leva a situação problema juntamente com os dados e as informações necessárias para a resolução das mesmas. Por esta razão, as etapas 1- experimentação, e a 2- b) problematização, proposta por Bassanezi

(2002), não foram desenvolvidas pelos(as) discentes. Apenas na “Atividade 1: Volume da Maçã” os(as) participantes executaram a etapa 1- experimentação.

Ainda em relação às etapas da Modelagem Matemática, a 4- validação não foi explicitada em todas as resoluções entregues pelos(as) participantes. Supõe-se que para elaborar o modelo todos os grupos validaram seus modelos com os dados preexistentes. A etapa 5- modificação foi a que menos os(as) estudantes utilizaram, mas como não é uma exigência e não compromete o processo de Modelagem Matemática.

Como já previsto pela pesquisadora, a maioria dos(as) alunos(as) apresentaram dificuldade em não poderem utilizar fórmulas prontas da Física; esse é um reflexo do atual Ensino de Física, discutido na introdução desta pesquisa, em que inúmeras fórmulas são decoradas sem a menor reflexão a respeito dos conceitos envolvidos e muitas vezes sem contextualização.

Ao final de cada atividade, os grupos apresentaram na lousa suas respostas, hipóteses e resolução e após todos apresentarem, a pesquisadora mostrava o “valor correto”. A cada apresentação, diversos(as) participantes expressaram surpresa ao conhecerem os caminhos adotados pelos outros grupos, que na maioria das vezes eram diferentes entre si, mas que levavam ao mesmo resultado ou semelhantes. Essas diferentes resoluções obtidas por grupos distintos, reforçam características da NdC tais como: não existe um único método científico, o processo científico é coletivo e tem como características a imaginação e a criatividade.

Um ponto a ser destacado, foi a motivação clara dos(as) alunos(as) ao final de cada atividade. Ao serem informados das equações e respostas “verdadeira”, eles se sentiam, como eles mesmos repetiram diversas vezes, como “gênios”, “verdadeiros cientistas”. De acordo com Robilotta (1988, p. 17), “a apologia da lógica torna a ciência sobre-humana aos olhos dos estudantes, superior às possibilidades dos mortais”, assim, atividades de Modelagem Matemática podem contribuir para romper com esta apologia.

Autores como Bassanezi (2002), Blum e Ferri (2009) e Kaiser (1995), citam o caráter motivador da Modelagem Matemática e, de acordo com Castro e Carvalho (1992, p. 233), “buscar razões parece indicar um comprometimento maior com o que se estuda e se, além disso, o aluno argumenta, ele dá mostras de estar reconhecendo-se também como sujeito construtor de saber”. Esse reconhecimento

do(a) aluno(a) como construtor do saber se mostrou como um aliado no decorrer das atividades, o que reforça as convicções de que atividades de Modelagem Matemática no ensino, neste caso, no Ensino de Física, podem proporcionar aprendizagem e podem promover reflexões que se caracterizam como noções de NdC.

Ainda em relação à NdC, pode-se destacar que o processo de resolução de atividades de Modelagem Matemática, rompem com a ideia de Ciência imutável e com verdades absolutas. Atividades como estas que foram desenvolvidas na abordagem didática simulam os caminhos da Ciência 'real', um caminho não linear, que não têm fórmulas prontas, em que os cientistas construíram esses conhecimentos e elaboraram modelos científicos com os dados de uma situação real, por meio de correlações, levantamento de hipóteses e refutações até chegarem a um resultado plausível, não necessariamente correto ou definitivo, mostrando, assim, que os(as) estudantes são capazes de fazer Ciência.

Tais atividades colaboram em desmitificar a Ciência, suprimindo a ideia de descoberta, de um método infalível, feito por gênios e apresentando seu caráter provisório, empírico, humanista, entre outros (ABD-EL-KHALICK, 1998; LEDERMAN *et al.*, 2002; ALMEIDA; FARIAS, 2011).

As primeiras três atividades do minicurso, foram retiradas ou adaptadas da literatura e tinham como objetivo promover a familiarização com a Modelagem Matemática. As duas primeiras atividades, "Volume da Maçã" e "O problema do Césio em Goiânia", foram as que os(as) participantes apresentaram menos dificuldade, em relação às demais atividades do minicurso. As três últimas atividades abordavam conceitos físicos, e a atividade "Gravidade Variável" teve melhor desempenho, por parte dos grupos, em relação às demais.

A última atividade, "Eficiência dos airbags", foi a que os(as) estudantes apresentaram mais dificuldade e foi necessária maior intervenção da pesquisadora. Por mais que era sabido que esta atividade continha maior grau de dificuldade, a pesquisadora, em uma aplicação futura, percebeu a necessidade de reformulá-la ou substituí-la, para melhor desempenho da mesma, a fim de alcançar os objetivos pretendidos.

De um modo geral, o desempenho dos grupos no que diz respeito às etapas da Modelagem Matemática foi satisfatório, e as dificuldades apresentadas não comprometeram os objetivos da abordagem.

Cabe, aqui, desenvolver uma análise mais profunda a respeito do Grupo I. Este grupo foi composto por três alunos(as) que cursavam o 1º ano de Licenciatura em Física (F6, F7 e F11) e não conseguiu construir o modelo matemático das atividades “O problema do Césio em Goiânia”, “Frota de veículos na cidade de Londrina” e “Rotatória como redutor de velocidade”, e resolveu parcialmente a atividade “Eficiência dos airbags”.

Autores como Blum e Ferri (2009), argumentam a respeito do porquê a modelagem é tão difícil para estudantes, e levantam a seguinte hipótese:

Uma razão importante é certamente a demanda cognitiva das tarefas de modelagem. A modelagem é inseparavelmente ligada a outras competências matemáticas [...], como leitura e comunicação, projetar e aplicar estratégias de resolução de problemas, ou trabalhar matematicamente (raciocínio, cálculo, ...) (BLUM; FERRI, 2009, p. 46, tradução nossa).

Em quase todas as atividades, houve intervenção da pesquisadora por meio de perguntas que pudessem fazê-los pensar nas possíveis formas de resolvê-las, e por vezes, a pesquisadora indicou caminhos a serem seguidos. Na penúltima questão do questionário posterior, foi indagado aos participantes que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades. As respostas dos integrantes do Grupo I foram:

F6: Dificuldades comuns ao desenvolver de atividades, como a correta aplicação de ideias, que muitas vezes pode parecer abstrata.

F7: Duro admitir que as partes mais difíceis eram olhar a resolução da questão e não conseguir pensar em uma fórmula para descrever, a resposta na ponta da língua, mas não conseguia colocá-la em fórmula matemática.

F11: Alguns exercícios tendiam a ser mais difíceis pois eu não sabia utilizar certos valores.

Os(as) integrantes do grupo sabiam argumentar e apresentavam respostas verbais, porém, como eles mesmos disseram, não conseguiam escrever em linguagem matemática, ou seja, não conseguiam executar o processo de matematização a fim de construir um modelo matemático. Tais justificativas corroboram a hipótese de Blum e Ferri (2009).

Porém, mesmo com todas as dificuldades enfrentadas, os(as) integrantes do grupo não desistiram e tentaram resolver todas as atividades. Um ponto a ser destacado, é que mesmo com tantas dificuldades, todos foram a favor da

inserção de atividades de Modelagem Matemática no Ensino de Física, como é possível observar em seus registros da última questão do questionário posterior.

F6: Sim, pois assim haveria maior interesse pela parte dos alunos em conhecer pela visão da Ciência o mundo, enxergar a teoria na prática.

F7: Com certeza, pois seria uma aula bem mais prática e ajudaria muito no raciocínio das crianças e dos adolescentes.

F11: Sim, pois muitos não sabem distinguir as diferenças de Matemática e Física ou não entendem a correlação entre as duas ou simplesmente acreditam que a Matemática é apenas uma ferramenta para a Física.

Após o desenvolvimento das atividades, no questionário posterior, foi perguntado aos(as) participantes se a Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico. Todos os(as) participantes afirmaram que sim, a Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico. Dentre as repostas oferecidas pelos(as) estudantes, a Modelagem Matemática foi apresentada como uma abordagem que:

✓ *Facilita os pensamentos e ideias;*

F2: Sim, usando a Modelagem Matemática os pensamentos e as ideias se tornam mais fáceis de serem desenvolvidas, contribuindo assim para o conhecimento científico.

✓ *Proporciona a construção de modelos;*

F4: Sim, pois a Modelagem Matemática é uma das etapas na formação de um modelo.

✓ *Contribui com o desenvolvimento de outras Ciências;*

M7: Sim, pois o conhecimento científico abrange várias áreas, por exemplo a Modelagem Matemática pode contribuir em Física, assim como em Química, Biologia, etc.

✓ *Viabiliza a resolução de problemas científicos;*

F3: Sim, vista que uma abordagem Matemática torna mais viável a resolução de alguns problemas científicos.

✓ *Proporciona o aperfeiçoamento do conhecimento científico;*

M2: Sim, pois todo conhecimento produzido um dia foi apenas um modelo, uma tentativa de explicação da realidade, que com aperfeiçoamento construiu as bases do nosso conhecimento.

✓ *Desenvolve o pensamento lógico.*

F9: Acredito que não apenas pode, mas seria ideal que fosse aplicada, pois assim o aprendizado seria legítimo e desenvolveria o pensamento lógico, não apenas incentivando decorar fórmulas e a mediocridade.

As respostas apresentadas pelos(as) participantes estão presentes na literatura. Autores como Kaiser e Sriraman (2006), afirmam que a Modelagem Matemática apresenta diferentes perspectivas, entre elas: resolver problemas do mundo real, promover a contextualização, contribuir com a aprendizagem, contribuir para o exercício da cidadania, contribuir para a promoção do desenvolvimento teórico e como instrumento de compreensão e análise dos processos cognitivos. Cifuentes e Negrelli (2012) ressaltam que o processo de Modelagem Matemática, em seu caráter epistemológico, visa promover a compreensão de fenômenos por meio de um processo investigativo.

Outra contribuição da Modelagem Matemática na construção do conhecimento científico, com significativa incidência nos registros, foi o fato de ao invés de se decorar fórmulas, ser possível construir o modelo e chegar à resposta por meio do processo de Modelagem Matemática. O uso excessivo de fórmulas prontas e vazias no Ensino de Física é alvo de crítica da maioria dos autores da área, tais como Batista (2004), Moreira (2000), Matthews (1995). Tendo em vista os registros obtidos, pode-se inferir que a Modelagem Matemática aplicada ao Ensino de Física, pode ser uma alternativa para minimizar esse problema.

A última questão referente à Modelagem Matemática, tinha como objetivo saber se, após a experiência dos(as) estudantes com a abordagem didática proposta, eles(as) consideravam pertinente inserir atividades de Modelagem Matemática em aulas de Física no Ensino Médio. Todos(as) os(as) participantes reponderam ser pertinente a inserção da Modelagem Matemática no Ensino de Física. Dentre as justificativas, pode-se destacar que um ensino com tais atividades:

✓ *Ajudaria a entender as fórmulas e saber de onde vieram;*

M8: Sim, pois a Modelagem ajuda a entender as fórmulas e ver de onde vieram.

✓ *Facilitaria a aprendizagem;*

M4: Sim, deveriam, porque a Modelagem Matemática ajuda o aluno a repensar no que ele está estudando e assim consequentemente ele irá aprender com mais clareza.

✓ *Seria um instrumento contextualizador;*

M7: Sim, para que os alunos pudessem enxergar como a Matemática e a Física é usada no dia a dia.

✓ *Promoveria o interesse pela Física;*

F6: Sim, pois assim haveria maior interesse pela parte dos alunos em conhecer pela visão da Ciência o mundo, enxergar a teoria na prática.

✓ *Promoveria o raciocínio.*

F4: Sim, a Modelagem faz o aluno realmente pensar, ela faz a pessoa desenvolver seu raciocínio e resolver problemas de maneira lógica informal.

De acordo com Kaiser (1995), a Modelagem Matemática tem os seguintes objetivos:

Objetivos pedagógicos: conferir habilidades que permitam aos alunos compreender melhor os aspectos centrais do nosso mundo;

Objetivos psicológicos: promover e melhorar a motivação e a atitude dos alunos para o ensino de matemática e matemática;

Objetivos relacionados com o assunto: estruturação de processos de aprendizagem, introdução de novos conceitos e métodos matemáticos, incluindo a sua ilustração;

Objetivos relacionados à ciência: transmitir uma imagem realista da matemática como ciência, dando uma visão sobre a sobreposição de considerações matemáticas e extra-matemáticas sobre o desenvolvimento histórico da matemática (*apud* KAISER; SRIRAMAN, 2006, 302-303, tradução nossa).

Ao observar as respostas concedidas pelos(as) estudantes, pode-se perceber que tais respostas estão contempladas nos objetivos da Modelagem Matemática apresentados por Kaiser (1995).

• **Matematização**

A respeito do assunto matemática, inicialmente foi perguntado aos(as) participantes se eles(as) já haviam estudado a temática. Dos(as) 19 participantes, apenas um (F3) afirmou conhecer ou ter estudado a respeito da matemática, e por conta própria, não especificando quais fontes ou autores foram estudados. Tendo em vista as respostas oferecidas, mesmo sabendo que eles(as) possam ter estudado a respeito da temática em algum período de sua vida escolar, partiremos do pressuposto que eles(as) desconhecem o processo de matemática.

Na questão “o que você entende por matematização”, após o minicurso, dos 19 registros, 11 foram unitarizados “UR 4.2 Definição segundo o consenso científico atual”. Dentre as respostas, pode-se destacar a matematização como:

- ✓ *Processo que descreve parte da realidade por meio de conceitos matemáticos;*

F1: É descrever através de conceitos matemáticos uma parte da realidade.

- ✓ *Uma das etapas da Modelagem Matemática;*

F3: É uma das etapas da Modelagem Matemática, onde problemas físicos são abordados matematicamente.

- ✓ *Processo para explicar matematicamente um fenômeno;*

F7: É o processo de explicar, matematicamente, um fenômeno ou um acontecimento.

- ✓ *Tradução para linguagem matemática;*

M3: Traduzir para linguagem Matemática os dados obtidos na observação e nas experiências feitas com o objeto que está sendo modelado.

- ✓ *Processo entre o real e o modelo matemático.*

M8: Matematização é transformar um problema em uma fórmula matemática.

Tais respostas contemplam as definições de matematização na Modelagem Matemática apresentadas pelo referencial teórico adotado nesta pesquisa (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; FERRI, 2006; MICHÓ; MAAß, 2012; GALBRAITH; STILLMAN, 2006); entre elas, pode-se destacar Blum e Niss (1991, p. 39), que argumentam que “enquanto a matematização é o processo do modelo real em Matemática, usamos a modelagem ou construção de modelos para significar todo o processo que leva da situação do problema real original para um modelo matemático”.

Em relação às atividades propostas no minicurso, o processo de matematização, como definido pelos autores da Modelagem Matemática, foi bem executado. De diferentes maneiras, os grupos levantaram hipóteses, selecionaram variáveis, fizeram simplificações, abstrações, construíram gráficos e tabelas, correlacionaram conceitos matemáticos prévios e fizeram a “transição do modelo real

para o modelo matemático”. Esse processo não foi linear e passou por momentos de refutação e adaptação, e com o passar das atividades, os(as) estudantes apresentaram mais facilidade no processo de matematização.

Um ponto a ser destacado, é que os(as) participantes ficaram surpresos com as diferentes formas de matematização elaboradas pelos diferentes grupos, como se pode observar nos registros da última questão do questionário posterior.

F2: Positivo: foi ver que há várias formas de se pensar, e que chegam a um resultado em comum.

M3: Foi interessante ver que problemas ou uma questão pode ter vários meios de solução.

M8: Eu consegui perceber que posso encontrar várias maneiras para encontrar um resultado.

Essas ações executadas pelos(as) participantes nos processos de matematização das atividades, e essa surpresa por poderem fazê-lo por meios de diferentes caminhos, faz remeter à citação de Lederman et al. (2002) no que se refere a aspectos da natureza da Ciência. Segundo os autores,

A verdade é que os cientistas observam, comparam, medem, testam, especulam, deduzem hipóteses, criam ideias e instrumentos conceituais, e constroem teorias e explicações. No entanto, não existe uma única sequência de atividades (prescritas ou não) que infalivelmente levará a soluções ou respostas funcionais ou válidas, muito menos a certeza ou ao conhecimento verdadeiro (LEDERMAN *et al.*, 2002, p. 501-502, tradução nossa).

Outro ponto a ser destacado é o fato de o processo de matematização permitir que os(as) estudantes vislumbrassem a origem das fórmulas por eles(as) decoradas, e principalmente, não ter que usá-las. Como se pode observar nos registros da última questão do questionário posterior que se seguem:

F7: Achei muito interessante o curso, pois nos incentivou a fazer as atividades, equacionar, a questão de não simplesmente aplicar uma fórmula sem saber de onde nem como surgiu, achei muito importante para mostrar como tudo faz sentido.

M4: O curso foi ótimo, ele me fez repensar sobre o que eu realmente devo fazer, e me desprender do comodismo em usar fórmulas prontas, além do mais ele contribuiu muito na forma de como eu devo tratar alguns problemas cotidianos dentro da sala de aula.

Almeida e Farias (2011, p. 482), destacaram nove princípios nos quais se baseia a natureza da Ciência, dentre eles, pode-se identificar a compreensão dos(as) estudantes de alguns desses princípios, sendo:

1) *As teorias são tentativas*: todos os grupos vivenciaram este princípio, em muitas atividades foram feitas diferentes tentativas de matematização, feitas em grupo ou individualmente por diferentes integrantes do mesmo grupo.

3) *Não há um método científico universal*: foi possível observar que diferentes caminhos conduziram a respostas semelhantes.

4) *As observações são carregadas de teorias*: ao olhar para o enunciado das atividades, muitos estudantes quiseram aplicar as fórmulas decoradas do Ensino Médio, tal atitude mostra que toda observação é carregada de teoria, ou seja, olhavam para o enunciado buscando teorias já conhecidas.

5) *O conhecimento científico implica na observação*, argumentos racionais, criatividade e ceticismo: em todas as atividades houve abundante discussão entre os integrantes dos grupos, em que cada um(a) argumentava a respeito de suas hipóteses. E utilizaram a criatividade para elaborarem seus modelos, como pode ser observado na atividade do volume da maçã.

7) *Os cientistas podem interpretar os mesmos dados experimentais de forma diferente*: esse princípio também foi observado na construção das atividades, como no do volume da maçã em que determinaram o volume assumindo que a maçã era uma esfera, tronco de um cone, dois cubos; ou ainda em outras atividades em que uns grupos resolveram por meio de funções lineares e outros por funções exponenciais.

Diante do exposto, pode-se inferir que o processo de matematização expõe aspectos da NdC, e se discutido, tal processo pode contribuir para o entendimento da epistemologia da Ciência.

No que diz respeito ao entendimento de matematização na Física, diferentemente da etapa matematização na Modelagem Matemática que se refere ao processo entre a situação real e o modelo matemático, esta é caracterizada pelos autores, na Física, como: um processo na construção de um conhecimento científico (MENDES; BATISTA, 2016); a elaboração de conceitos físicos pensados matematicamente (PATY, 1995); etapa imbricada em métodos hipotético-dedutivos,

em que ela atua como forma de expressão, linguagem e raciocínio interpretativos de fenômenos naturais (BATISTA, 2004).

Sendo assim, diante das atividades propostas, com conceitos físicos, os(as) estudantes deveriam, a partir dos dados da situação real, por meio de métodos hipotético-dedutivos e conceitos matemáticos, chegar a um conceito físico, ou seja, ao seu respectivo modelo lógico-matemático, seja ele fenomenológico ou tipo-essência.

O que se pode inferir, é que a matematização na Física envolve todo o processo de Modelagem Matemática, que pode ser descrito em função de etapas, tais como proposto por Galbraith e Stillman (2006), sendo elas: 1) entender, simplificar, interpretar o contexto; 2) matematizar; 3) trabalhar matematicamente; 4) interpretar; 5) validar; 6) comunicar (se o modelo for considerado satisfatório) e 7) visitar o processo de modelagem (se o modelo for considerado insatisfatório); acrescido de uma etapa adicional, que seria, por meio de uma discussão conceitual, atribuir significado físico ao modelo matemático encontrado.

• Modelos Científicos

No que se refere ao tema modelos científicos, houve significativa mudança no entendimento dos mesmos após o minicurso ofertado. Inicialmente, foi obtido um registro segundo o consenso científico atual e posteriormente, nove registros (somando os registros da UR 5.2 e URE 5.6), e entre os registros divergentes e polissêmicos, houve uma redução de um total de 13 para seis registros.

Dentre as definições apresentadas, posteriormente, do que é um modelo científico, pode-se destacar as seguintes:

✓ *Algo para basear ou definir uma teoria;*

F8: O modelo científico é algo usado para basear ou definir melhor a sua teoria ou equação.

✓ *Representação do objeto real;*

M3: É uma representação do fenômeno ou objeto real que está sendo estudado.

✓ *Simplificação de um objeto complexo;*

M5: Uma simplificação de um objeto mais complexo de tal forma que trabalhamos com o modelo e aplicamos no objeto.

✓ *Uma teoria é formada por modelos científicos.*

F3: Conjunto de leis que explicam fenômenos científicos. Uma teoria é formada por modelos científicos.

Os autores adotados nesta pesquisa caracterizam os modelos científicos na Física como: uma representação de um objeto (JUSTI, 2006; BUNGE, 1974), uma representação de aspectos da realidade (SAYÃO, 2001; BATISTA, 2004; MORRISON; MORGAN, 1999) e de acordo com Batista (2004), teorias científicas são entendidas como “coleção de modelos”. Já os modelos científicos na Educação Matemática, a saber, os modelos matemáticos, são definidos pelos autores como: sistema conceitual para descrever ou explicar outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BEAN, 2012), conjunto de equações elaborado para corresponder a algum fenômeno (BASSANEZI, 1999). De acordo com as respostas oferecidas pelos(as) estudantes e as definições dos autores supracitados, é possível inferir que os(as) participantes compreenderam o que é um modelo científico.

Na questão seguinte, do questionário, foi pedido para que os(as) docentes citassem exemplos de Modelos Científicos que pertencessem às suas áreas de conhecimento. A maioria das respostas, nove previamente e oito posteriormente, foi “não sei”; e das exemplificações segundo o consenso científico atual (UR 6.1 e UR 6.2), inicialmente foram unitarizados quatro registros e posteriormente oito. Os exemplos apresentados foram:

- ✓ Modelo do Big Bang;
- ✓ Modelo do sistema solar;
- ✓ Modelo atômico de Rutherford;
- ✓ Modelo do átomo de Bohr;
- ✓ Modelo do DNA;
- ✓ Modelo de uma célula.

No questionário prévio, todos os exemplos se referiam aos modelos atômicos, e teve um(a) estudante que exemplificou também por meio do Efeito fotoelétrico – Einstein, Partícula de Bóson de Higgs. Já no questionário posterior, além

dos exemplos citados acima, um(a) estudante citou o modelo, ou equação, da velocidade média. Podem-se inferir alguns pontos a partir dos dados desta questão.

Em primeiro lugar, que modelos científicos são pouco abordados na Educação Básica. É consensual, na comunidade científica, a discussão a respeito de modelos científicos (BATISTA, 2004), e esta discussão, no Ensino de Ciências, tem por finalidade proporcionar que os(as) alunos aprendam Ciência, aprendam a respeito da Ciência e aprendam a fazer Ciência (JUSTI; GILBERT, 2002). Portanto, ressalta-se a importância de pesquisas a respeito de modelos científicos no Ensino de Ciências e a inserção de discussões a respeito da temática nas aulas de Ciências.

A segunda inferência diz respeito ao minicurso ofertado. Como já citado ao longo desta tese, o minicurso teve duração de 20 horas, sendo 15 horas presenciais e 5 horas de leituras complementares, assim, para ter tempo hábil para desenvolver as atividades, os textos teóricos foram abordados de forma sucinta, com menos horas de discussão do que realmente deveriam ter, por se tratar de assuntos complexos.

Pensando nessas poucas horas de discussão presencial, foi encaminhada uma série de textos para leitura complementar durante a semana, dentre eles, três artigos relacionados aos modelos científicos, para que no encontro seguinte, as discussões pudessem ter maior rendimento. Porém, no segundo sábado, quando a pesquisadora foi iniciar a discussão a respeito dos três artigos que abordavam modelos científicos, apenas um participante afirmou ter lido todos os artigos, alguns falaram que leram parcialmente e a maioria afirmou não ter lido. Logo, a discussão ficou bastante comprometida, e como havia uma programação estabelecida, não houve como prolongar a discussão dessa temática para minimizar este problema.

Sendo assim, para futuras aplicações deste minicurso, será preciso uma reformulação a fim de evitar que novos episódios como estes aconteçam, e lacunas como estas sejam supridas, pois ao observar os registros da questão anterior, “o que são modelos científicos”, pode-se perceber que os(as) estudantes compreenderam o conceito, porém, esta compreensão não foi suficiente para que eles(as) pudessem identificar exemplos em suas áreas. Um ponto a ser destacado, é que todos os exemplos citados posteriormente, foram citados durante o minicurso.

No que diz respeito às atividades desenvolvidas na abordagem didática proposta, nas três primeiras atividades, os(as) estudantes não apresentaram dificuldades em construir os respectivos modelos matemáticos. Já nas três últimas atividades, que continham conceitos físicos, primeiramente os(as) participantes tiveram que fazer um esforço para não utilizarem as fórmulas já conhecidas. Vencendo essa etapa de não usarem fórmulas, não apresentaram dificuldades em construir os modelos matemáticos das mesmas.

Em relação às atividades que tinham como objetivo formular modelos científicos da Física, tais como:

- ✓ Modelos lógico-matemático-fenomenológicos

$$P = m \cdot g$$

$$F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$$

- ✓ Modelo lógico-matemático tipo-essência

$$F = \frac{dp}{dt}$$

O modelo lógico matemático fenomenológico $P = m \cdot g$ foi o mais fácil de ser vislumbrado pelos(as) estudantes, mas como já relatado nas análises, apenas alguns grupos descreveram o processo de construção deste modelo, os demais colocaram-no sem as etapas de desenvolvimento, o que se pode inferir, que colocaram a fórmula que eles já conheciam.

Na atividade seguinte, “Rotatória como redutor de velocidade”, conseguiram construir um modelo matemático para relacionar a velocidade e o raio da curva, e encontraram o valor correto do raio da situação apresentada. Porém, a segunda parte da atividade dependia da correlação com a atividade anterior, em que força é igual à massa vezes a aceleração. Apenas um grupo conseguiu fazer essa correlação sozinho, os demais, precisaram da interferência da pesquisadora. Essa interferência foi feita por meio de uma discussão com todos, como já apresentada. Só

assim foi possível escrever os modelos lógico-matemático-fenomenológicos $F = m \cdot a$ e $F = m \cdot \frac{v^2}{R}$.

Na última atividade, “Eficiência dos airbags”, os grupos conseguiram fazer correlações com os modelos anteriores e a partir do modelo lógico-matemático-fenomenológico $F_r = m \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}$, encontraram os valores de força pedidos. Porém, só após a discussão com a pesquisadora foi possível construir o modelo $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta V$. E após mais algumas discussões, chegar ao modelo lógico-matemático tipo-essência $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.

O que se pode inferir a partir destas considerações é que os(as) estudantes fizeram correlações matemáticas com os dados e chegaram nos resultados das atividades, porém, só compreenderam os aspectos físicos e construíram modelos físicos após a discussão conceitual, por meio de deduções e recorrência.

Tais inferências corroboram com Greca e Santos (2005, p. 34), ao afirmarem que “[...] embora o modelo físico carregue implícito um modelo matemático, este último não constitui em geral por si só uma descrição dos fenômenos”. Isto é consequência de que esse sistema axiomático carece de referencial, ou seja, requer uma interpretação semântica (LOMBARDI, 1997, p. 10).

Assim, pode-se inferir que a Modelagem Matemática não é suficiente para ensinar Física, mas é uma metodologia que permite o processo de construção de modelos. Sendo este processo pertencente à epistemologia da Física, com as devidas discussões, é possível promover aprendizagem de conceitos físicos por meio da Modelagem Matemática, assim como destacado por Morrison e Morgan (1999, p. 12, tradução nossa), ao afirmarem que “em uma abordagem com modelos científicos pode ocorrer aprendizagem e o modelo funciona como um instrumento mediador. A aprendizagem não ocorre pelo simples fato de olhar um modelo, mas sim por meio de sua construção e manipulação”, e também por Halloun (1996), ao destacar que,

[...] em Física, a aprendizagem do aluno será tanto mais significativa quanto maior for sua capacidade de modelar [...] a Física é uma ciência de modelos e a modelagem é uma atividade sistemática dos físicos para construir e aplicar o conhecimento científico. Aprender Física implica, então, aprender e jogar o “jogo da modelagem” (apud MOREIRA, 1996, p. 222).

- **O papel da Matemática na Física**

Optou-se em acrescentar uma questão a fim de investigar como os(as) participantes entendiam o papel que a Matemática exerce na Física e na construção de conceitos físicos.

Antes da abordagem didática proposta, no questionário prévio, a unidade de registro que obteve maior número de registros, sete ao todo, foi a “UR 7.2 Apresenta a Matemática como instrumento/linguagem para descrever fenômenos físicos”, sendo caracterizada, pelos(as) estudantes, como ferramenta ou uma simples linguagem. Esses dados corroboram com Pietrocola e Silva (2003, p. 1) ao destacarem que “muitos professores ainda têm a concepção ingênua de que, devido a sua precisão e universalidade asseguradas por sua estrutura formal, a Matemática é apenas uma ferramenta a mais utilizada pelo método empírico-indutivo”.

Em relação à unidade de registro que alocou o maior número de registro, oito ao todo, no questionário posterior foi a “UR 7.4 Contribuição da Matemática na Epistemologia”, sendo que inicialmente obteve apenas quatro registros na mesma.

De acordo com os registros, pode-se perceber que, após o minicurso, os(as) estudantes apresentaram uma alteração em suas compreensões, ao caracterizarem o papel da Matemática na Física mais pelo seu caráter epistemológico do que como uma simples linguagem. Como se pode observar nos registros a seguir.

F7: Matemática não é apenas uma ferramenta para descrever fenômenos, mas serve para universalizar, concretizar e comprovar tais fenômenos.

M2: A Matemática constrói as bases da Física, sendo um suporte às teorias e modelos [...].

M3: A Matemática tem um papel fundamental na Física, pois é através dela que matematizamos um fenômeno e assim é construído um modelo matemático para descrever tal fenômeno.

Estes registros estão em consonância com os autores desta pesquisa, tais como Robilotta (1988, p. 13), que afirma que “os conhecimentos da Física englobam fenômenos e teorias, sendo estas últimas baseadas em conceitos e leis, e estruturadas por meio da matemática”; e Paty (1995, p. 234) que ressalta que “a constituição progressiva da física matemática substitui essa “tradução matemática” da natureza por uma mediação física propriamente dita”. Ainda, segundo Batista (2004),

Pietrocola e Silva (2003), Issa Mendes (2014), se tivesse que definir o papel para a Matemática na Física, seria o de estruturador do conhecimento físico.

Outro ponto a ser destacado foi o fato de os(as) estudantes compreenderem que os conhecimentos não são segmentados, como propostos nas disciplinas e estrutura curricular, e expressarem o imbricamento entre as Ciências, como se pode observar nos registros que se seguem.

F5: Muito mais que apenas uma ferramenta, a Matemática é uma essência de toda Ciência Exata.

F2: As duas andam juntas, uma auxilia a outra.

M6: As duas áreas encontram-se amplamente relacionadas, pois a Física, na realidade, está baseada na própria Matemática, nos quais existem soluções baseadas nas duas áreas para dado exercício, mas que chegam na mesma resposta.

A mesma noção foi identificada em registros de outras Unidades de Contexto, tais como estes da UC 10 que perguntou se os(as) estudantes consideravam pertinente a inserção de atividades de Modelagem Matemática em aulas de Física.

URE 8.8 - F7: Sim, pois ela (Modelagem Matemática) não simplesmente é uma Matemática ou Física com fórmulas para decorar, e sim verdadeiros problemas que te fazem pensar bastante e que no final, na verdade, eram mais fáceis do que se imaginava.

UR 10.4 - F11: Sim, pois muitos não sabem distinguir as diferenças de Matemática e Física ou não entendem a correlação entre as duas ou simplesmente acreditam que a Matemática é apenas uma ferramenta para a Física.

Essa concepção de Ciência está destacada na literatura, como já citada nesta pesquisa, por autores do Ensino de Ciências, tais como Roque (2005 apud KARAM; PIETROCOLA) que alerta que um problema físico-matemático, não deve pretender separar o que é Física e o que é Matemática, e ainda Paty (1995, p. 236) ao afirmar que “a Matemática e a Física têm uma ligação de constituição, aliás recíproca”.

Diante dessas considerações, pode-se inferir que a abordagem didática proposta e as discussões levantadas, pôde colaborar para a compreensão do papel da Matemática na Física.

- **Saberes docentes**

De acordo com Shulman (1987), uma das fontes para a base de conhecimento para o ensino é a formação acadêmica, que são os conhecimentos aprendidos nas disciplinas e cursos de extensão durante a graduação.

O minicurso ofertado não teve como objetivo apenas obter dados ou responder à pergunta de pesquisa desta tese, mas também de proporcionar uma nova experiência de ensino a futuros professores, mostrando-lhes que existem abordagens diferenciadas, como a Modelagem Matemática, que podem contribuir com um ensino de Física menos acrítico, distante do aluno e cheio de fórmulas vazias.

Os(as) participantes do minicurso ofertado, compreenderam a pertinência do mesmo em suas futuras ações docentes, como se pode observar nos registros a seguir.

M1: Com o minicurso entendi como a Modelagem Matemática pode auxiliar e facilitar o aprendizado do aluno e a forma como o professor ministra o conteúdo em sala de aula. Por isso, participar do minicurso acrescentou ainda mais na minha bagagem tanto como aluno como futuro professor.

M2: Só vejo pontos positivos neste curso, pois o aprendizado que tive nestas poucas horas foram de muita valia para a minha formação tanto como aluno como futuro professor.

M5: A área de Ciências Exatas tem uma dificuldade quanto a aceitação dos alunos no Ensino Médio, a Modelagem tende a despertar interesse, e isso é um ponto positivo [...]. A participação foi válida, e acrescenta para a formação de futuros docentes como eu.

Como já exposto, foi possível identificar, tanto nas falas quanto nos registros dos(as) estudantes, aspectos relacionados a noções de NdC, sendo estes, explicitados após a abordagem didática proposta, tais como a compreensão de que o conhecimento é uma construção social, alimentado pela criatividade, observações, dados empíricos, e de caráter provisório, uma vez que os cientistas não têm acesso a verdades absolutas, não linear, sem um único método, entre outros (ABD-EL-KHALICK, 1998; LEDERMAN *et al.*, 2002; ADÚRIZ-BRAVO *et al.* 2006). Um ponto a ser destacado, é o fato de os(as) discentes, diante dessas características de NdC, perceberem que eles(as) podem fazer Ciência.

Assim, em relação aos saberes docentes, pode-se inferir que foram mobilizados saberes relacionadas a aspectos da NdC, e também saberes disciplinares

relacionados a conceitos matemáticos e aos conceitos físicos que envolvem a construção do modelo lógico- matemático tipo-essência da segunda lei de Newton.

Destaca-se, por fim, que a investigação realizada contribui para as pesquisas que versam a respeito do Ensino de Física. Os resultados obtidos por meio dessa investigação trazem elementos relevantes para as pesquisas em Ensino de Física a respeito da Modelagem Matemática e a construção de modelos científicos.

As considerações aqui expressas não apresentam cunho conclusivo, mas interpretativo, baseados na literatura adotada para esta tese, de forma a demonstrar-se que as hipóteses levantadas na pesquisa, expressas nas unidades de contexto e de registro, foram consistentes com os resultados empíricos obtidos por meio da abordagem desenvolvida e aplicada.

CONCLUSÃO

Dentre tantas possibilidades de investigação, foi difícil, inicialmente, delimitar o tema. Há mais de sete anos desenvolvemos pesquisas que tem investigado alternativas metodológicas que contribuam com o Ensino de Física.

Essa tese surgiu com o interesse de investigar se uma situação de ensino envolvendo a Modelagem Matemática e discussões epistemológicas, proporcionava a estudantes de Física e Matemática no nível de graduação, entendimento a respeito da 2ª Lei de Newton, bem como a formulação de seu modelo científico.

Para atingir o objetivo proposto, elaborou-se uma abordagem didática baseada na Modelagem Matemática, composta por discussões epistemológicas e a resolução de seis atividades, sendo três delas inéditas, elaboradas pela pesquisadora. Esta abordagem tinha como objetivo promover a construção de modelos científicos, abordar assuntos referentes à Epistemologia da Ciência, como a NdC e ainda proporcionar novas experiências de ensino para os futuros docentes. Os(as) participantes dessa pesquisa foram estudantes do 1º e 2º anos de Licenciatura em Física e Matemática, e 1º e 2º anos de Bacharelado em Física e Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Foi realizada uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Na coleta de dados, utilizaram-se questionários prévios e posteriores e a videogravação do processo de intervenção pedagógica. As análises foram realizadas com base na análise de conteúdo de Bardin (1979), que permitiu a construção de Unidades de Contexto e Registro, baseada nos estudos teóricos (unidades prévias) e nos dados coletados (unidades emergentes).

Esta tese, por meio dos estudos teóricos e dos dados empíricos, possibilitou compreender e explicitar alguns aspectos quanto à utilização da Modelagem Matemática para ensinar conteúdos físicos, bem como proporcionou identificar a diferenciação a respeito da temática matematização, na Educação Matemática e na Física.

Segundo as inferências desta tese, a Modelagem Matemática não é suficiente para ensinar Física, mas é uma metodologia que permite o processo de construção de modelos. Sendo a Física um constructo de modelos, feitas as devidas

discussões epistemológicas, pode-se inferir que a Modelagem Matemática contribui com o Ensino de Física.

Em relação aos Modelos Científicos, foi possível analisar a construção dos mesmos em cada atividade proposta. Inicialmente os(as) estudantes elaboraram modelos científicos matemáticos e em seguida modelos científicos físicos. Este processo envolveu discussões e argumentações entre os integrantes dos grupos que estavam resolvendo as atividades, bem como discussões epistemológicas com a professora pesquisadora.

Outra inferência desta tese é que a matematização na Física, diferentemente da matematização na Modelagem Matemática, corresponde a todo o processo de Modelagem Matemática acrescido de uma etapa adicional, que seria, por meio de uma discussão teórico-conceitual, atribuir significado físico ao modelo matemático encontrado.

Um ponto a ser destacado é que durante as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas, foi possível identificar aspectos relacionados à Natureza da Ciência, que foram evidenciados pelos(as) participantes ao longo do minicurso ofertado e nos registros do questionário posterior.

A abordagem proporcionou aos(as) estudantes reflexões a respeito da construção do conhecimento científico, bem como uma nova compreensão relacionada ao papel da Matemática na Física.

A respeito dos saberes docentes, pode-se inferir, a partir dos dados, que foram mobilizados saberes relacionadas a aspectos da NdC, e também saberes disciplinares relacionados aos conceitos físicos que envolvem a construção do modelo lógico- matemático tipo-essência da segunda lei de Newton.

Em relação aos dados dos questionários prévios e posteriores, foi possível observar um aprimoramento nas argumentações oferecidas pelos(as) estudantes após a abordagem didática, o que nos permite inferir que, de maneira geral, o minicurso ofertado promoveu o entendimento dos conceitos abordados, tais como a Modelagem Matemática, Matematização e Modelos Científicos.

É relevante evidenciar as contribuições do grupo de pesquisa IFHIECEM, cujo as linhas de pesquisa são: “A construção do conhecimento em Ciências e Matemática”, “A formação de professores em Ciências e Matemática” e “História e Filosofia da Ciência e da Matemática”. As discussões e os estudos

referentes a essas linhas de pesquisa ao longo dos anos, proporcionaram a elaboração desta tese. Ressalto ainda a contribuição de integrantes do grupo IFHIECEM que fizeram a decodificação intersubjetiva das UC e UR, dos questionários e da unitarização dos dados desta pesquisa.

Consideramos que a pesquisa desenvolvida acrescenta elementos significativos para as pesquisas referentes ao Ensino de Física, às questões epistemológicas e às discussões de NdC na formação inicial; como as atividades elaboradas para uma abordagem de conceitos físicos envolvendo a Modelagem Matemática e modelos científicos.

Esta investigação contribuiu para suscitar novas questões de pesquisa, pois a partir do (re)conhecimento dos limites e potencialidades da Modelagem Matemática no Ensino de Física, percebem-se lacunas, como a construção de abordagens que envolvam os três momentos de familiarização; que precisam ser refletidas em novas propostas de formação, que estudem e explicitem os processos de construção de modelos científicos.

Sabemos que uma abordagem, quando colocada em novos contextos, pode sofrer adaptações para se adequar às especificidades propostas, mas consideramos que a abordagem aqui apresentada possui potencial para ser utilizada em futuras situações de ensino na formação inicial de professores de Física e também no Ensino Médio.

Diante dos resultados, há que se considerar que a presente pesquisa contribui para o assunto em questão, ensino de Física. Assim, poderá auxiliar futuros professores a desenvolverem atividades fundamentadas e elaboradas na perspectiva da Modelagem Matemática.

Finalizamos essas considerações com a sensação de ter realizado uma pesquisa que vai ao encontro da preocupação que é compartilhada com muitos outros pesquisadores, colaborar com o Ensino de Física.

REFERÊNCIAS

ABD-EL-KHALICK, Foud. **The influence of history of science courses on students' conceptions of the nature of science**. Unpublished doctoral dissertation Oregon State University, Oregon, 1998.

ADÚRIZ-BRAVO, Agustin. Un Modelo para Introducir la Naturaleza de la Ciencia en la Formación de los Profesores de Ciencias. **Pensamiento Educativo**. Vol. 30, pp. 315-330, julio 2002.

ADÚRIZ-BRAVO, Agustin. La epistemología en la formación de profesores de ciências. **Revista Educación y Pedagogía**, vol. XVIII, núm. 45, 2006.

ADÚRIZ-BRAVO, Agustin. ¿Qué naturaleza de la ciencia hemos de saber los profesores de ciencias?: una cuestión actual de la investigación didáctica. **Tecné, Episteme y Didaxis**, Bogotá, p. 23-33, 2005. (Número extraordinario: 2º Congreso sobre Formación de Profesores de Ciencias).

ADÚRIZ-BRAVO, Agustin; SALAZAR, Isabel; MENA, Nubia; BADILLO, Edelmira. La Epistemología en la Formación del Profesorado de Ciencias Naturales: Aportaciones del Positivismo Lógico. **Revista Electrónica de Investigación en Educación em Ciências**. Vol. 1, nº 1. Tandil, ene/jul. 2006.

ALMEIDA, Argus Vasconcelos; FARIAS, Carmen Roselaine de Oliveira. A natureza da Ciência na formação de professores: reflexões a partir de um curso de licenciatura em ciências biológicas. **Investigações em Ensino de Ciências**, Rio Grande do Sul, v. 16, n. 3, p. 473-488, 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessôa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação Básica**. Editora Contexto, 2012.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; ARAÚJO, Jussara de Loiola; BISOGNIN, Eleni. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Heloísa Cristina da. A Matemática em Atividades de Modelagem Matemática. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.8, n.3, p.207-227, novembro 2015.

ALONSO, Ángel Vázquez; MAS, Maria Antonia Manassero; DÍAZ, José Antonio Acevedo; ROMERO, Pilar Acevedo. Consensos sobre la naturaleza de la ciencia: La comunidad tecnocientífica. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 6, n. 2, p. 331-3636, 2007.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. **Contribuições da História da Matemática para a construção dos saberes do professor de Matemática**. 2011. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

AREVALO, Diego Fabian Vizcaíno. **Papel da “Matematização” nas Explicações de Professores e Alunos em Disciplinas de Física na Formação Inicial de Professores**. 2013. Tese de Doutorado. Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Bauru/SP.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 1979.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. Biomatemática IX, pp 9 – 22, 1999. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf>

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto, São Paulo, 2002.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BATISTA, Irinéa de Lourdes. O ensino de teorias físicas mediante uma estrutura histórico-filosófica. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 10, n. 3, p. 461-476, 2004.

BATISTA, Irinéa de Lourdes; SALVI, Rosana Figueiredo; LUCAS, Lucken Bueno. Modelos Científicos e suas relações com a Epistemologia da Ciência e a Educação Científica. In: **Atas do Enpec**, Campinas, 2011. Disponível em: < <http://www.uel.br/grupo-pesquisa/ifhiecem/arquivos/BATISTA;%20SALVI;%20LUCAS%202011.pdf> > Acesso em: 20/02/2018.

BEAN, Dale. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. Anais do **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

BERNADELLI, Marlize Spagolla. **A interdisciplinaridade Educativa na Contextualização do Conceito de Transformação Química em um curso de Ciências Biológicas**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BLUM, Werner; FERRI, Rita Borromeo. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application.**, Vol. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BLUM, Werner; NISS, Mogens. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. In: **Educational studies in mathematics**, Editor: Dorfler etc., Volume 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 37-68, 1991.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Portugal: Porto, 1994.

BORDENAVE, Juan Díaz; PEREIRA, Adair Martins. **Estratégias de ensino-aprendizagem.** 33 ed., Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002-a.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Volume 2, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002-b.

BRASIL, Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília, MEC, 2006.

BUNGE, Mario. **Teoria e Realidade.** São Paulo: Editora Perspectiva, 1974.

CAMILETTI, Giuseppi; FERRACIOLI, Laércio. A Utilização da Modelagem Computacional Semiquantitativa no Estudo do Sistema Mola-Massa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 24, no. 2, Junho, 2002.

CAMPOS, Luís da Silva; ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira de. A Modelagem Matemática e a Experimentação aplicadas ao ensino de Física. In: **VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, 2009, Florianópolis - SC. Anais do Encontro Nacional de Pesquisadores em Educação em Ciências (ENPEC), v. 1. p. 1-12; 2009.

CARVALHO, Anna Maria Pessoa. Metodologia de pesquisa em ensino de física: uma proposta para estudar os processos de ensino e aprendizagem. In: **ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA.** Jaboticatubas, MG. Sociedade Brasileira de Física, 2004.

CASADO, Carlos M. Madrid. Filosofía de la Física: El cierre de la Mecánica Cuántica. In: **El Basilisco.** 2ª Época, nº 39, p. 67 – 112, Madri, 2008.

CASTRO, Ruth Schmitz; CARVALHO, Anna Maria Pessoa. História da ciência: investigando como usá-la num curso de segundo grau. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 9, n. 3, p. 225-237, 1992.

- CHAVES, Maria Isaura de Albuquerque. Modelagem na Educação Matemática: Elaboração de atividades. *In: III Encontro Paraense de Modelagem Matemática*. Marabá, 2010. Disponível em: <<http://www.ufpa.br/epamm2010/media/system/Trabalhos/MC15184188215.pdf>>. Acesso em: 13 dez. 2013.
- CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 791-815, ago. 2012.
- COSTA, Helisângela Ramos da. A Modelagem Matemática Através de Conceitos Científicos. *Ciências & Cognição*; Vol 14 (3): 114-133, 2009.
- CURY, Helena Noronha. Modelagem matemática e problemas em ciências: Uma experiência em um curso de mestrado. *In: Revista Perspectiva*, v. 27, n.98, p. 75-86, 2003.
- DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great Assessment Problems**. Utrecht. Freudenthal Institute. (Traducción: Ma. Fernanda Gallego). GPDM. Bariloche. Río Negro, Argentina, 2002. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/catch/products/GAP_book/GAP_book_spanish.pdf>
- DRAKE, Stillman. **Galileu**. Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1981.
- DUTRA, Luiz Henrique De Araújo. Os Modelos e a Pragmática da Investigação. *Scientiae Studia*, São Paulo, v. 3, n. 2, p. 205-32, 2005.
- EINSTEIN, Albert. Física e realidade. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 1, p. 9 - 22, 2006. Publicado originalmente no Journal of the Franklin Institute, 221, 313-347, 1936. Tradução de Sílvia R. Dahmen.
- ERNEST, Paul. The Philosophy of Mathematics, Values and Keralaese Mathematics. **The Mathematics Enthusiast**: Vol. 4: No. 2, Article 4, 2007.
- FERRI, Rita Borromeo. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.
- FREGE. Johan Gottlob. Os Fundamentos da Aritmética: Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. *In: Peirce e Frege, Coleção Os Pensadores*. São Paulo: Abril Cultural, 1983.
- GALAGOVSKY, Lydia; ADÚRIZ-BRAVO, Agustín. Modelos y Analogías en la Enseñanza de las Ciencias Naturales. El Concepto de *Modelo Didáctico Analógico*. **Enseñanza de las Ciencias**, 19 (2), p. 231-242, 2001.
- GALBRAITH, Peter. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.
- GALBRAITH, Peter; STILLMAN, Gloria. A Framework for Identifying Student Blockages during Transitions in the Modelling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), p. 143 -162, 2006.

GARCEZ, Andrea; DUARTE, Rosalia; EISENBERG, Zena. Produção e análise de vídeogravações em pesquisas qualitativas. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 37, n.2, p. 249-262, mai./ago, 2011.

GARCÍA PÉREZ, Francisco F. Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. Biblio 3W. **Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales**. [Revista electrónica de la Universidad de Barcelona. ISSN 1138-9796], nº 207, febrero de 2000.

GAUTHIER, Clermont; MARTINEAU, Stéphane; DESBIENS, Jean-François; MALO, Annie; SIMARD, Denis. **Por uma teoria da pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente**. Editora UNIJUÍ, Ijuí, Rio Grande do Sul, 1998.

GAZZETA, Marineusa. **A modelagem como estratégia da aprendizagem da matemática**. Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 1989.

GEYMONAT, Ludovico. **Galileu Galilei**. Tradução de Eliana Aguiar. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

GOODMAN, Nicolas D. Modernizing the Philosophy of Mathematics. In: HERSH, Reuben. **New directions in the Philosophy of Mathematics**. Volume 88, nº 2. USA: Synthese, p. 119 – 126, 1991.

GRECA, Ileana M.; SANTOS, Flávia M. T dos. Dificuldades da Generalização das Estratégias de Modelação em Ciências: O Caso da Física e da Química. **Investigações em Ensino de Ciências**, V10(1), pp. 31-46, 2005.

HEERDT, Bettina. Saberes Docentes: Gênero, Natureza da Ciência e Educação Científica. 2014. 239 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

HOLTON, Gerald; RUTHERFORD, James; WATSON, Fletcher. **Projecto Física**. Unidade 1: Conceitos de Movimento. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985a. Disponível em: <http://fep.if.usp.br/~profis/projetos/HARVARD/Portugues/PROJETO_FISICA_Unidade_1.pdf>. Acesso em: 21/02/2018.

HOLTON, Gerald; RUTHERFORD, James; WATSON, Fletcher. **Projecto Física**. Unidade 3: O Triunfo da Mecânica. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985b. Disponível em: <http://fep.if.usp.br/~profis/projetos/HARVARD/Portugues/PROJETO_FISICA_Unidade_3.pdf>. Acesso em: 21/02/2018.

ISSA MENDES, Gabriela Helena Geraldo. **Matematização e Ensino de Física: uma discussão de noções docentes**. 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

JUSTI, Rosária. La Enseñanza de Ciencias Basada en la Elaboración de Modelos. **Enseñanza de las Ciencias**, 24(2), p. 173 – 184, 2006.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n.3, p. 302 - 310, 2006.

KANT, Immanuel. **Os progressos da Metafísica**. Lisboa: Edições 70, 1995.

KARAM, Ricardo Avelar Sotomaior; PIETROCOLA, Maurício. Habilidades Técnicas Versus Habilidades Estruturantes: Resolução de Problemas e o Papel da Matemática como Estruturante do Pensamento Físico. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.181-205, jul., 2009.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. Bases Epistemológicas e Implicações para Práticas de Modelagem Matemática em Sala Aula. **IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática Brasília** – DF, 25 a 28 de Outubro de 2009.

KOYRÉ, Alexandre. **Estudos de história do pensamento científico**. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária; Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1982.

KOYRÉ, Alexandre. **Estudos Galilaicos**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1986.

LEDERMAN, Norm G.; ABD-EL-KHALICK, Fouad; BELL, Randy L.; SCHWARTZ, Renée S. Views of Nature of Science Questionnaire: Toward Valid and Meaningful Assessment of Learners' Conceptions of Nature of Science. **Journal of research in Science teaching**, v. 39, n. 6, p. 497-521, 2002.

LIMA, Paulo Gomes. Ciência e Epistemologia: Reflexões Necessárias à Pesquisa Educacional. **QUAESTIO**, Sorocaba, SP, v. 12, p. 109-138, nov. 2010.

LOMBARDI, Olimpia. La noción de modelo en ciencias. **Educación en Ciencias**, v.II (4), pp.4-13, 1997.

LOPES, Wilson. Variação da Aceleração da Gravidade com a Latitude e Altitude. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, v. 25, n. 3: p. 561-568, dez. 2008.

LOZADA, Cláudia de Oliveira; ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira de; MORRONE, Wagner; AMARAL, Luiz Henrique. A Modelagem Matemática Aplicada ao Ensino de Física no Ensino Médio. **LOGOS**, n. 14, 2006.

LUCCAS, Simone; BATISTA, Irinéa de Lourdes. O papel da matematização em um contexto interdisciplinar no ensino superior. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 17, n. 2, p. 451-468, 2011.

MATTHEWS, Michael R. História, filosofia e ensino de ciências: a tendência atual de reaproximação. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

MATTHEWS, Michael R. In Defense of Modest Goals When Teaching about the Nature of Science. **Journal of Research In Science Teaching**. Vol. 35, Nº. 2, p. 161–174, 1998.

MENDES, Gabriela H. G. Issa; BATISTA, Irinéa de Lourdes. Matemática e ensino de Física: uma discussão de noções docentes. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 757-771, 2016.

MICHO, Christoph; MAAß, Katja. Which personal factors affect mathematical modelling? The effect of abilities, domain specific and cross domain-competences and beliefs on performance in mathematical modelling. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Vol. 1, No. 7, 3-19, 2012.

MOLINA, Jorge Alberto. Lakatos como filósofo da Matemática. **Episteme**. Porto Alegre, n. 13, p. 129 -153, 2001.

MOREIRA, Marco Antônio. Modelos Mentais. **Investigações em Ensino de Ciências**, V1(3), pp.193-232, 1996.

MOREIRA, Marco Antônio. Ensino de Física no Brasil: Retrospectiva e Perspectivas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 22, no. 1, Março, 2000.

MOREIRA, Marco Antônio. Modelos científicos, modelos mentais, modelagem computacional e modelagem matemática: aspectos epistemológicos e implicações para o ensino. **Revista Brasileira de Ensino de C&T**. Vol. 7, n. 2, 2014.

MOREIRA, Marco Antônio; MASSONI, Neusa Teresinha; OSTERMANN, Fernanda. "História e Epistemologia da Física" na licenciatura em Física: uma disciplina que busca mudar concepções dos alunos sobre a natureza da Ciência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 127-134, 2007.

MORRISON, Margaret; MORGAN, Mary. S. Models as mediating instruments, In: Morgan, M.S. y Morrison, M. (eds.). **Models as mediators**, pp. 10-37, 1999. Cambridge: Cambridge University Press.

NEWTON, Isaac. **Principia: princípios matemáticos de filosofia natural**. Tradução: Trieste Ricci et al. São Paulo: EDUSP, 2ª edição, 2002.

NORMAN, Donald A. Some observations on mental models. In Gentner, D. and Stevens, A.L. (Eds.). **Mental models**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. p. 6-14, 1983.

OCDE - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. **Brasil: Resultados principais**. 2016a. Disponível em: < <http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf>>. Acesso em: 13/01/2017.

OCDE - Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico. **PISA 2015 Resultados Clave**. 2016b. Disponível em: < <http://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf>>. Acesso em: 13/01/2017.

OSBORNE Jonathan, COLLINS, Sue, RATCLIFFE, Mary, MILLAR, Robin, DUSCHL, Rick. **What 'Ideas-About-Science' Should be Taught in School Science? A Delphi Study of the Expert Community**. Paper presented at the Sixth International History, Philosophy and Science Teaching Conference, Denver, Colorado, November p. 7-11, 2001.

PATY, Michel. **A matéria roubada: A apropriação crítica do objeto da Física Contemporânea**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1995.

PIETROCOLA, Maurício. A Matemática como Estruturante do Conhecimento Físico. **Cad. Cat. Ens. Fís.**, v.19, n.1: p.89-109, ago. 2002.

PIETROCOLA, Maurício; SILVA, Cibelle Celestino. O papel estruturante da matemática na teoria eletromagnética: um estudo histórico e suas implicações didáticas. *In: 3º Encontro de Pesquisa em Ensino de Ciências*, 2003, Bauru. **Atas do 3º Encontro de Pesquisa em Ensino de Ciências**. Bauru: ABRAPEC, 2003.

Disponível em:

<http://www.nupic.fe.usp.br/Publicacoes/congressos/Cibelle_Celestino_Silva_O_PAPEL_ESTRUTURANTE_DA_MATEMATICA_NA_TEORIA_ELETROMAGNETICA.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2013.

POINCARÉ, Henri. **O valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

RAMOS, Daiany Cristiny. **O Raciocínio Abduutivo em Atividades de Modelagem Matemática**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

RIBEIRO, Fabiano L. Unificando Modelos de Dinâmica Populacional por Primeiros Princípios. **Rev. Bras. Ensino Fís.** [online]. vol.39, n.1, e1311, 2017.

RICO, Luis. **La competencia matemática en PISA**. PNA, 1(2), p. 47-66, 2007.

Disponível em:

<http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/La%20Competencia%20Matem%C3%A1tica%20en%20Pisa*Rico,%20Luis*competencia%20en%20PISA.pdf> . Acesso em: 02/03/2018.

RIOJA, Ana. La Filosofía de la Ciencia Física de G. Berkeley. **La Ciencia de los Filósofos**, p. 145 – 165, 1996.

ROBILOTTA, Manoel Roberto. O Cinza, o Branco e o Preto – Da Relevância da História da Ciência no Ensino da Física. **Cad. Cat. Ens. Fís.**, Florianópolis, 5 (Número Especial): p. 7-22, jun. 1988.

ROUX, Sophie. **Forms of Mathematization**. Transformation of the Early Modern Concept of Construction. New York: ESM, v. 15, n. 4, 2001.

SANTOS, Fabio Vieira dos; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. **O Uso do Computador no Estudo de Funções no Ensino Médio**. IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

SAYÃO, Luís Fernando. Modelos teóricos em Ciência da Informação – abstração e método científico. **Ciência da Informação**. Brasília, v. 30, n. 1, p. 82-91, jan./abr. 2001.

SHULMAN, Lee S. **Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform**. Harvard Educational Review. Vol. 57, n. 1, 1987.

SHULMAN, Lee S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**. São Paulo, v.4, n.2, p.196-229, dez. 2014. Traduzido e publicado com autorização. Tradução de Leda Beck e revisão técnica de Paula Louzano.

SILVA, Alessandra Ribeiro; TOGNON, Carlos Henrique; BRANDÃO, Milena Almeida Leite; JAFELICE, Rosana Sueli da Mota. O uso de Modelagem Matemática no Cálculo do Volume de uma Maçã. **FAMAT em Revista**, nº 9, 2007.

SILVA, E. S. Estudo da Relação entre o Movimento Circular Uniforme e o Movimento Harmônico Simples Utilizando a Videoanálise de Uma Roda de Bicicleta. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 40, nº 2, e2301, 2018.

SILVA, Heloísa Cristina; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle. Sobre Matematização e Modelagem Matemática. In: ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessôa (Org.). Modelagem Matemática em Foco. 1ªed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, p. 23-48, 2014.

SOUZA, Ednilson Sergio Ramalho de. Uma Experiência com Modelagem Matemática para a Abordagem de Conceitos de Física. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n.2, p. 309-325, 2012.

STEUP, Matthias. Epistemology. In: Edward N. (ed.) ZALTA. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. 2005. Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/entries/epistemology/>>. Acesso em: 20/09/2017.

TARDIF, Maurice; RAYMOND, Danielle. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educação & Sociedade**, ano XXI, no 73, 2000.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TREFFERS, A.; GOFFREE, F. Rational analysis of realistic mathematics education: the Wiskobas program. In: STREEFLAND, L. (Ed.). **International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, 1985, Utrecht. Proceedings. Utrecht: Utrecht University, v. 2, p. 97-121, 1985.

TREVISAN, André Luis; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Educação Matemática Realística: Uma Abordagem para o Ensino e a Avaliação em Matemática. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.10, n. 2, p. 167-184, 2015.

VEIT, E.A; TEODORO, V. D. Modelagem no Ensino/Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 24, no. 2, Junho, 2002. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v24_87.pdf>. Acesso em: 28/12/2016.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. 2013. Tese - (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina/PR.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA



TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a):

Este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido refere-se aos dados coletados no minicurso “Modelagem Matemática no Ensino de Física” e está vinculado ao projeto de pesquisa intitulado, provisoriamente, “**Modelagem Matemática no Ensino de Física: Uma Visão Epistemológica na Construção de Modelos Científicos**” de responsabilidade da pesquisadora Ma. Gabriela H. G. Issa Mendes, referente à Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina/PR, sob orientação da Dra. Irinéa de Lourdes Batista. O objetivo desta pesquisa é investigar se a Modelagem Matemática, no Ensino de Física, aliada a um referencial epistemológico propicia a criação de Modelos Científicos pelos estudantes

Para participar da pesquisa, é preciso que você preencha a autorização para a publicação das respostas e suas respectivas análises. Ao autorizá-lo, estará contribuindo com a pesquisa e concordando com futuras publicações dos dados fornecidos.

Sua decisão de participar é voluntária e você pode se recusar a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo a você. Esclarecemos que os dados pessoais coletados serão utilizados somente para fins de pesquisa e serão tratados com sigilo e confidencialidade, por meio de códigos, a fim de preservar sua identidade.

Eu, (nome completo) _____,

RG: _____, declaro ter sido informado(a) e concordo em participar, como voluntário(a), do projeto de pesquisa acima descrito.

ASSINATURA

APÊNDICE B
Questionário Prévio

Perfil do Acadêmico

Nome: _____

Idade: _____ Data de Nascimento: ___/___/____ Telefone: _____

Cidade de Origem: _____

Curso: ____ ano

Licenciatura

Bacharelado

Física

Matemática

Perfil Escolar

Ensino Fundamental

Público

Privado

Ensino Médio

Público

Privado

Participa do PIBID

Sim

Não

Questionário Prévio

1- Você conhece ou já estudou algo a respeito de Modelagem Matemática?

Sim Não

Se sim, em que momento da sua formação?

Ensino Fundamental

Ensino Médio

Ensino Superior

Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc.

Outros. Comente: _____

2- O que você entende por Modelagem Matemática?

3- Você conhece ou já estudou algo a respeito de Matemática?

() Sim () Não

Se sim, em que momento da sua formação?

() Ensino Fundamental

() Ensino Médio

() Ensino Superior

() Formação complementar: cursos de extensão, congressos, minicursos, etc.

() Outros. Comente: _____

4- O que você entende por Matemática?

5- O que você entende por Modelo Científico?

6- Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.

7- Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta.

APÊNDICE C
Questionário Posterior

Nome: _____

1- O que você entende por Modelagem Matemática?

2- O que você entende por Matematização?

3- O que você entende por Modelo Científico?

4- Cite exemplos de Modelos Científicos que pertençam a sua área de conhecimento.

5- Na sua opinião, qual o papel da Matemática na Física? Justifique sua resposta.

6- A Modelagem Matemática pode contribuir no desenvolvimento do conhecimento científico? Justifique sua resposta.

7- Que dificuldades foram encontradas no decorrer das atividades propostas neste minicurso? Comente.

8- Na sua opinião, atividades de Modelagem Matemática deveriam estar presentes em aulas de Física no Ensino Médio? Justifique sua resposta.

9- Relate pontos positivos e destaque aspectos desfavoráveis a respeito da aplicação desse minicurso, e comente como foi participar do mesmo.

APÊNDICE D

Atividade 1 – Volume da Maçã

A produção mundial de maçãs, em 2012/13, segundo dados do United States Department of Agriculture (USDA), será de 67,8 milhões de toneladas métricas. A produção chinesa corresponde a 56% da produção mundial. Nas últimas 6 safras, a produção aumentou 53% na China e 10% na União Europeia. Em termos mundiais, a produção de maçãs é crescente (28% em 6 anos).

Maçã: Balanço mundial (em mil toneladas métricas)

	2007/08	2008/09	2009/10	2010/11	2011/12	2012/13
Produção	53.081	60.550	62.342	62.318	66.500	67.852
China	24.800	29.800	31.681	33.263	35.985	38.000
EU-27	10.295	12.655	12.021	10.886	12.069	11.297
Estados Unidos	4.103	4.327	4.288	4.174	4.224	4.200
Outros	13.883	13.768	14.353	13.996	14.221	14.355
Consumo (frutas frescas)	38.568	47.137	48.950	49.523	54.221	55.151
China	16.058	23.875	24.941	26.520	30.647	32.240
EU-27	7.997	8.296	8.074	7.456	7.687	7.112
Turquia	2.346	2.479	2.560	2.328	2.517	2.716
Outros	12.168	12.488	13.377	13.220	13.370	13.083
Para processamento	14.238	13.146	12.999	12.468	11.751	12.047
China	7.760	4.800	5.600	5.760	4.400	4.760
EU-27	2.430	3.937	3.327	2.973	3.396	3.435
Estados Unidos	1.346	1.481	1.424	1.318	1.377	1.300
Outros	2.701	2.927	2.650	2.418	2.578	2.553
Importações	4.317	4.908	4.950	4.816	4.890	5.114
Rússia	940	1.147	1.120	1.112	1.201	1.180
EU-27	883	780	596	632	526	700
México	197	223	215	214	191	225
Outros	2.298	2.758	3.018	2.858	2.973	3.009
Exportações	4.565	5.140	5.314	5.113	5.378	5.707
EU-27	750	1.203	1.217	1.089	1.513	1.450
China	1.022	1.173	1.201	1.057	1.012	1.065
Estados Unidos	673	802	769	826	841	875
Chile	776	679	843	800	760	800
África do Sul	359	339	306	335	380	400
Argentina	236	207	179	233	129	310
Outros	751	737	799	773	744	807

Fonte: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (2013).

O Brasil produziu, em 2011, último dado consolidado pelo IBGE, 1,3 milhão de toneladas de maçãs, o que o classifica como 9º (nono) maior produtor mundial. O valor da produção de maçãs foi calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em R\$ 851,7 milhões. A produção brasileira ocupa 38 mil hectares, 96% desses pomares estão em Santa Catarina (18 mil ha) e Rio Grande do Sul (17 mil ha), segundo IBGE. O aumento da produtividade dos pomares de maçã é o principal responsável pelo incremento da produção desde 2001. Enquanto a área plantada aumentou 29%, a produtividade cresceu 50%.

De acordo com Silva et al (2007), presume-se que o cultivo da macieira, tenha-se iniciado há 25 milhões de anos, tendo como centro de origem a região entre o Cáucaso e o leste da China. No império Romano, a cultura da macieira já estava bastante difundida. No entanto, é muito provável que o desenvolvimento das espécies atuais tenha-se iniciado após o final da última era glacial, portanto, há 20.000 anos. As migrações dos povos euroasiáticos colaboraram para a disseminação das formas primitivas das macieiras atuais.

O início das plantações de maçã no Brasil ocorreu, provavelmente no município de Valinhos, estado de São Paulo, pelo fruticultor Batista Bigneti que, em 1926, tinha plantas da Cultivar Ohio Beauty.

Com a criação em 1928 da Estação Experimental de São Roque, em São Paulo, pelo Instituto Agrônomo de Campinas, foi dado o passo inicial na pesquisa sobre macieira no Brasil.

Curiosidades

- 1) Há mais de 7.500 espécies e variedades de maçãs. As diferentes espécies encontram-se em climas temperados e subtropicais.
- 2) As macieiras não florescem em áreas tropicais, por exemplo, as variedades da família Gala necessitam de um inverno com cerca de 700 horas de frio com temperaturas de $7,2^{\circ}\text{C}$;
- 3) A maçã fermentada é utilizada para elaborar bebidas alcoólicas, como a sidra asturiana, o Calvados francês e a sagardua basca;
- 4) A maçã possui as seguintes vitaminas: B1, B2 e Niacina, e também contém sais minerais como Fósforo e Ferro.

Ficha BEC da maçã (BEC- Bolsa Eletrônica de Compras)

As maçãs são frutas amplamente comercializadas nos diferentes estados brasileiros. Os maiores consumidores são os estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Paraná. As frutas são classificadas, em geral, em função de seu tamanho.

Segundo a BEC da maçã, o tamanho da maçã é identificado considerando a quantidade de frutas contidas na embalagem, caixa de 18 kg.

Com relação ao tamanho, as maçãs são classificadas em: graúda, média, miúda e solto.

O tamanho Graúdo abrange lotes de peso médio superior a 200 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 72 e 100.

O tamanho Médio abrange lotes de peso médio entre 133 gramas e 164 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 110 e 135.

O tamanho Miúdo abrange lotes de peso médio entre 91 gramas e 120 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 150 e 198.

O tamanho Solto abrange lotes de peso médio entre 72 gramas e 83 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 68 e 79.

Fonte: Ramos (2016, p. 59).

Nosso desafio: calcular o volume de uma maçã!

APÊNDICE E

Atividade 2 – O problema do Césio em Goiânia

A situação apresentada refere-se a um acidente ocorrido com Césio-137 na cidade de Goiânia, capital de Goiás. Esse acidente ocorreu no dia 13 de setembro de 1987, quando dois sucateiros encontraram um aparelho de radioterapia em um prédio abandonado da Santa Casa de Misericórdia de Goiânia. Os sucateiros, então, levaram o aparelho, por eles, desconhecido para a casa de um deles e o desmontaram. Durante a desmontagem do aparelho de radioterapia, os sucateiros expuseram no ambiente 19,26 g de cloreto de césio-137 (CsCl), pó branco semelhante ao sal de cozinha, que brilha no escuro com uma coloração azulada.

O acidente somente foi diagnosticado no dia 29 de setembro de 1987 depois de muitas pessoas apresentarem sintomas de contaminação radioativa. Percebida a contaminação radioativa, a primeira medida foi separar toda a roupa das pessoas contaminadas, lavá-las com água e sabão para descontaminação externa. Depois, os que entraram em contato com a cápsula tomaram um quelante – substância que elimina os efeitos da radiação – chamado azul da prússia. Com ele, as partículas de césio saem do organismo pelas fezes e pela urina. Todo esse material foi reunido, encapsulado em contêineres de metal para posterior descarte em um depósito.

Nos trabalhos de descontaminação dos locais afetados foram produzidos 13,4 t de lixo contaminado com césio-137: roupas, utensílios, plantas, restos de solo e materiais de construção. O lixo do maior acidente radiológico do mundo está armazenado em cerca de 1.200 caixas, 2.900 tambores e 14 *contêineres* em um depósito construído na cidade de Abadia de Goiás, vizinha a Goiânia, onde deverá ficar pelo menos 180 anos.

Segundo a Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN), cada elemento radioativo se transmuta a uma velocidade que lhe é característica. Meia-vida é o tempo necessário para que a sua atividade seja reduzida à metade da atividade inicial. Alguns elementos possuem meia-vida de milionésimos de segundos. Outros, de bilhões de anos. (CNEM, 2006).

A meia-vida do césio-137 é 30, 2 anos. Mas para facilitar nossos cálculos vamos considerar a meia-vida do césio-137 sendo de 30 anos.

A partir destas informações, a atividade se propõe a estudar como se comporta a concentração do césio-137 na cidade de Goiânia no decorrer do tempo.

Problema: Encontrar um modelo matemático para descrever a quantidade de Césio presente em cada instante e fazer uma estimativa de como estará a situação da cidade daqui 10 anos.

Definição das variáveis: As variáveis utilizadas para resolver o problema são: Variável independente: $t \rightarrow$ tempo (anos); variável dependente: $Q \rightarrow$ quantidade (gramas) de césio-137

Dedução do modelo

Dicas: Como a quantidade de césio-137 diminui pela metade a cada 30 anos, construir uma tabela na qual o tempo inicial seja o ano de 1987 e a partir disso construir um modelo matemático que indica a quantidade de Césio num ano t qualquer.

APÊNDICE F

Atividade 3 – Frota de veículos na cidade de Londrina

Jornal Folha de Londrina - 05/05/2016 - Celso Felizardo - Reportagem Local

Frota cresce oito vezes mais que população¹⁰

Estado ganha 2,7 milhões de veículos em oito anos; municípios têm dificuldades para encontrar soluções de mobilidade urbana

A frota do Paraná teve um crescimento de 68% nos últimos oito anos, passando de 3,9 milhões para 6,6 milhões de veículos, segundo dados do Departamento de Trânsito do Paraná (Detran-PR). No mesmo período, o aumento populacional no Estado, que passou de 10,2 milhões para 11,1 milhões de habitantes, foi de apenas 8,5%, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em um cenário hipotético, sem levar em conta o fator econômico, os dados significam que se a tendência fosse mantida, em 20 anos o Paraná teria mais veículos que pessoas.

Diante dos números, gestores de trânsito penam para encontrar soluções de mobilidade urbana e evitar o caos nas ruas e avenidas dos grandes e médios e, há quem garanta, até nos pequenos municípios. Em levantamento elaborado pela FOLHA, do índice de motorização dos municípios paranaenses, que leva em conta a proporção de veículos por habitantes, duas cidades do Oeste, Quatro Pontes e Mercedes, no Oeste, se destacam.

Com 3.998 habitantes, Quatro Pontes tem 3.352 veículos, relação de 0,84 veículo por morador, a maior do Estado. Em Mercedes, que aparece na sequência com taxa de 0,82, são 4.432 veículos para 5.398 habitantes. Os pequenos municípios, com economias basicamente agrícolas, estão longe de sofrer com engarrafamentos e outros problemas das grandes metrópoles. Mas, segundo as administrações municipais, encontrar uma vaga para estacionar no centro ou trafegar no início e fim de mês não são tarefas tão fáceis como há uma década.

Vilson Martins, secretário de Planejamento de Mercedes, conta que nos dias de pagamento é bem complicado se locomover pelo centro. "Temos uma produção agrícola bem forte. Aí no começo e fim de cada mês, em que chamamos de 'cheque do leite', por conta do pagamento dos laticínios, os produtores vêm todos para a cidade, vira uma loucura", conta. Martins adianta que o município já planeja construir um sistema de ciclovias para estimular as pessoas a deixar o carro em casa. "A cidade está ficando pequena para tanto carro. Como aqui é tudo perto, dá para o morador usar a bicicleta tranquilamente", avalia.

Já em Quatro Pontes, os efeitos negativos da maior frota proporcional do Estado são menos impactantes. Conforme a secretária municipal de Administração e Planejamento, Cleonice Zanette, com exceção de alguns pequenos transtornos, o trânsito está longe de ser um problema crônico. "A população tem a cultura da bicicleta. Os carros são mais usados para deslocamentos para Marechal Cândido Rondon ou Toledo, por exemplo", comenta. Segundo ela, duas transportadoras existentes na cidade elevam o índice de motorização. "Somos uma típica cidade pequena do interior e prezamos pela qualidade de vida."

Enquanto as pequenas cidades ainda têm fôlego para adotar uma série de medidas pontuais para amenizar os transtornos, as grandes já se vêm com poucas alternativas. Entre as metrópoles, Curitiba e Maringá possuem as maiores taxas de motorização, com 0,81 e 0,79 veículo por habitante, respectivamente.

Mesmo com avenidas largas, a planejada Maringá não escapa do mal comum às grandes cidades. Lá são 312.802 veículos a circular e travar o trânsito nos horários de pico. O secretário municipal de Planejamento, Laércio Barbão, informa que algumas ações estão em andamento, como a construção de ciclovias e de corredores isolados para os ônibus, desapropriações de propriedades para desafogar avenidas, além de alargamento de pistas e sincronização dos semáforos. "São algumas providências que tomamos para minimizar o problema, mas a grande chave de tudo isso é que o cidadão passe a deixar o carro em casa", opina.

LONDRINA

Avenida Ayrton Senna, zona sul de Londrina, às 18 horas. Tudo parado. Esse é o cenário encontrado na via que liga o centro da cidade à região da Gleba Palhano, que tem o maior

¹⁰Disponível em: < <http://www.folhadelondrina.com.br/geral/frota-cresce-oito-vezes-mais-que-populacao-945297.html> > Acesso em: 25/05/2017.

índice de crescimento populacional de Londrina. No mesmo horário, congestionamentos também tiram a paciência de motoristas nas avenidas Tiradentes (zona oeste), Santos Dumont (zona leste), e Saul Elkind (zona norte). As ruas do centro também estão coalhadas de carros, quase sempre com uma ou duas pessoas que desejam chegar logo em suas casas.

A cidade tinha 366.748 veículos em 2015 e 235.457 em 2007, aumento de 55%. Os 131 mil veículos emplacados na cidade em oito anos é um desafio para a equipe do Instituto de Pesquisa e Planejamento Urbano de Londrina (Ippul). Um alívio é a cidade estar distante das primeiras posições no índice de motorização; é a 29ª no Estado, com 0,7 veículo por habitante. A diretora do Ippul, Inês Dequech, ressaltava os investimentos do município em transportes alternativos. Segundo ela, o processo de instalação do BRT (Bus Rapid Transit), ou Transporte Rápido por Ônibus, está adiantado. "Acreditamos que ainda este mês haverá o anúncio da construção de um viaduto na região da rodoviária, o que vai possibilitar a adoção deste importante sistema." Ela destaca ainda que o pacote de mobilidade urbana, que abrange o BRT, adaptações viárias e investimentos em ciclovia, chega a R\$ 143 milhões em investimento.

O chefe da Coordenadoria de Veículos do Detran, Herivelto do Carmo, avalia que, por muitos anos, as grandes cidades se adaptaram ao crescimento da frota. Segundo ele, chegou o momento dos motoristas se adaptarem ao espaço físico. "Chegamos a um limite crítico. As cidades precisam adotar medidas drásticas como rodízios ou fechamento de ruas para automóveis. Isso tudo não seria necessário se não existisse uma cultura do carro tão forte."

O professor do Departamento de Transportes da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Garrone Reck, enxerga uma luz no fim do túnel. "Pesquisas mostram que o carro já não é mais o sonho de consumo da nova geração. Os jovens estão abrindo mão de ter o carro, pois entendem que o cenário é caótico", comenta. Para Reck, a saída é melhorar o transporte público. "O problema é que a qualidade do setor deixa a desejar, mas os esforços têm que ser concentrados no coletivo, não no pessoal."

De acordo com a reportagem, e tendo em vista que o trânsito na cidade de Londrina conta com um número cada vez maior de veículos e, considerando que isso aumenta o tempo no percurso entre um ponto a outro da cidade, dificulta o estacionamento nas vias mais centrais e aumenta o número de acidentes envolvendo veículos, é importante inferir uma previsão para o número de veículos na cidade nos próximos anos, o que pode influenciar, inclusive, políticas públicas relacionadas.

A tabela a seguir informa o número de veículos na cidade de Londrina nos últimos 6 anos, de acordo com o DETRAN – PR.

Tabela: Número de Veículos na Cidade de Londrina

MÊS/ANO	Nº DE VEÍCULOS
JANEIRO/2012	305.647
JANEIRO/2013	326.594
JANEIRO/2014	343.159
JANEIRO/2015	359.134
JANEIRO/2016	367.458
JANEIRO/2017	371.647

Fonte: Detran – PR (2017)¹¹

Tendo em vista todas as informações e a tabela anterior, qual o número de veículos na cidade de Londrina em 2018? E em 2027?

¹¹ Disponível em: <<http://www.detran.pr.gov.br/modules/catag/servicos-detalhes.php?tema=detran&id=469>>
Acesso em: 25/05/2017.

APÊNDICE G

Atividade 4 – Gravidade Variável¹²

É notória a dificuldade de alguns alunos, que ingressam no curso superior, em admitir que a aceleração da gravidade não seja uma grandeza física constante. Afinal, é natural que, após um longo período de tempo (pelo menos três anos) usando $9,8 \text{ m/s}^2$ (ou seu valor aproximado para 10 m/s^2) ficasse consolidado, na mente do aluno, essa grandeza física como sendo constante. Contudo, o vetor aceleração da gravidade varia em módulo, direção e sentido. Sugere-se, portanto, que o professor de Física, no curso secundário e mesmo no início do curso superior, discuta com seus alunos a respeito desse tema, mostrando aos mesmos que o peso de qualquer objeto é função do vetor aceleração da gravidade.

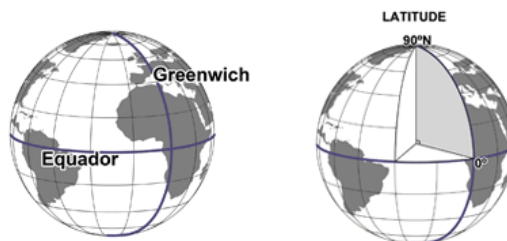
Aceleração da gravidade é a intensidade do campo gravitacional em um determinado ponto. Geralmente, o ponto é perto da superfície de um corpo massivo. A aceleração na Terra varia minimamente, devido à, principalmente, diferentes altitudes, variações na latitude e distribuição de massas do planeta.

A Terra, devido ao seu movimento de rotação, com velocidade angular $w = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, é achatada nos pólos, assemelhando-se a um elipsoide de revolução, em que o raio equatorial $a = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$ é maior que o polar $b = 6,357 \times 10^6 \text{ m}$. Seu volume é dado por: $V = 4\pi a^2 b / 3 = 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3$. Na suposição de uma Terra perfeitamente esférica, com o mesmo volume do elipsoide de revolução, seu raio assumiria o valor: $R = [3 \cdot 1,083 \cdot 10^{21} / (4\pi)]^{1/3} = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ (STACEY, 1977).

Devido a essa velocidade angular e a esse achatamento, a aceleração da gravidade, ao nível do mar, aumenta ao percorrer-se um meridiano no sentido dos pólos.

Definições

A nossa posição sobre a Terra é referenciada em relação a linha do equador e ao meridiano de Greenwich e é expressa em dois valores: a latitude e a longitude. Assim para saber a nossa posição sobre a Terra basta saber a latitude e a longitude. A **latitude** é a distância ao Equador medida ao longo do meridiano de Greenwich. Esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0° e 90° para Norte(N) ou para Sul(S).

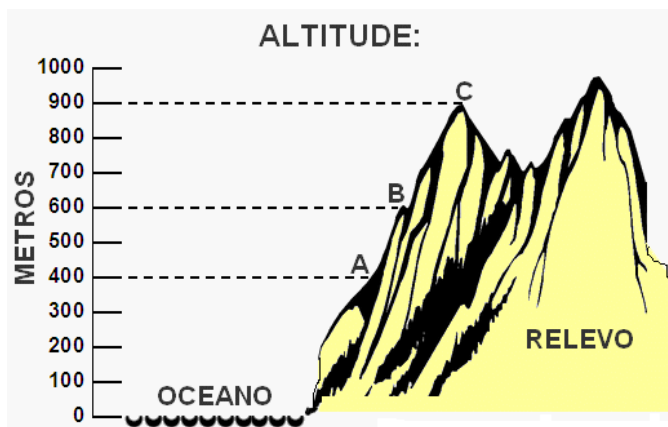


Fonte:

http://coral.ufsm.br/cartografia/index.php?option=com_content&view=article&id=43&Itemid=39

¹² Fonte: <<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5165503.pdf>> Acesso: 31/05/2017.

Altitude é a **distância vertical** medida entre um **determinado ponto**, e o **nível médio do mar**.



Alguns valores da aceleração da gravidade

Aceleração média global do Planeta Terra = $9,80665 \text{ m/s}^2$

Aceleração da gravidade no Rio de Janeiro = $9,7876 \text{ m/s}^2$

Aceleração da gravidade em São Paulo = $9,7885 \text{ m/s}^2$

Aceleração da gravidade em Belo Horizonte = $9,78363 \text{ m/s}^2$

A tabela a seguir apresenta valores da aceleração da gravidade em diferentes latitudes, ao nível do mar, e o peso de uma pessoa com massa de 80kg.

Latitude	Aceleração da Gravidade (m/s^2)	Peso (N)
20°	9,7864	782,912
40°	9,8017	784,136
60°	9,8192	785,536
80°	9,8306	786,448

a) Qual é a diferença de peso de uma pessoa, de massa $m = 80,00 \text{ kg}$, ao se deslocar, ao nível do mar, do equador até o pólo?

b) Qual o peso de uma pessoa de massa 70kg ao nível do mar com uma latitude de 70°?

Dica: 1º) estabelecer a relação entre a gravidade e a latitude (g ; L)

2º) estabelecer a relação entre o peso e a gravidade (P , g)

3º) a partir das equações anteriores, estabelecer a relação entre o peso e a latitude.

APÊNDICE H

Atividade 5 – Rotatória como redutor de velocidade

Rótulas (Rotatórias)¹³: São projetadas de modo a diminuir a velocidade dos veículos. É dada preferência aos veículos que circulam em torno da ilha central, obrigando os que chegam a ceder passagem em todos os acessos. Para isso projetam-se áreas de circulação com raios pequenos, introduzem-se elevações, saliências e/ou estreitamentos nas saídas e entradas, além de “Parada Obrigatória” antes de entrar na área de circulação.

A primeira interseção rotatória de sentido único foi construída em 1904 nos Estados Unidos, no “Columbus Circle” de Nova York. Com grande sucesso no início, com similares em 1907 em Paris para junção de doze vias e em 1910 em Hertfordshire, na Inglaterra, começou a cair em desuso em razão dos problemas de capacidade causados pelos movimentos de entrecruzamento resultantes da ausência de regra clara de prioridade entre os veículos circulando na rotatória e os que chegam à mesma. A partir de 1990, começaram a surgir em vários países da Europa e na Austrália, e mais recentemente no Brasil, rótulas com nova concepção de circulação (rótula moderna), em que é dada preferência ao tráfego circulando na rotatória, obrigando o veículo que chega, a esperar um intervalo para se inserir no fluxo.

As rótulas modernas variam de tamanho desde as “mini-rótulas” com círculo central de giro com cerca de 15 m de diâmetro, passando pelas “rótulas-compactas” com diâmetros de 30 a 35 m e chegando às “grandes rótulas” com diâmetro da ordem de 150 m (principalmente usada em áreas rurais), frequentemente apresentando mais de quatro entradas e faixas múltiplas de tráfego. A maior segurança obtida nas rótulas decresce um pouco com o uso de diâmetros maiores do que 75 m, por permitirem velocidades mais elevadas. Em trechos urbanos tem-se adotado no Brasil mini-rótulas com raios variando de 1 a 8 m. A Companhia de Engenharia de Tráfego de São Paulo (CET-SP) implantou centenas dessas interseções, cujos primeiros projetos registraram uma redução de 20% a 30% na velocidade de aproximação e de 83% no número de acidentes.

¹³<http://www1.dnit.gov.br/ipr_new/..%5Carquivos_internet%5Cipr%5Cipr_new%5Cmanuais%5CMANUAL_DE_PROJETO_DE_INTERSECOES_Versao_Final.pdf> Acesso em: 29/05/2017.

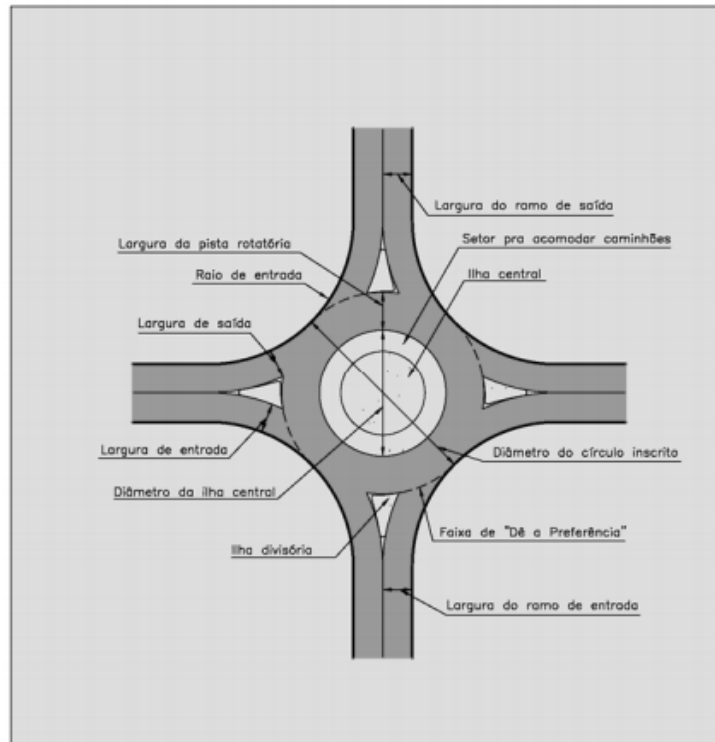


Figura 71 – Elementos de projeto de uma rótula moderna

A tabela a seguir apresenta os raios mínimos para curva em intersecções, sem superelevação.

e (km/h)	Velocidad	e (m/s)	Velocidad	Rai mínimo aproximado (m)
	36		10	32
	54		15	72
	72		20	128
	90		25	200
	108		30	287

Qual deve ser o raio mínimo de uma rótula em uma via em que se deseja reduzir a velocidade local para 20 km/h? Qual a força exercida sobre uma pessoa de 80Kg dentro do veículo ao trafegar por esta rotatória?

Dica: Construir o gráfico com a velocidade no eixo x, em m/s, e o raio no eixo y.

APÊNDICE I

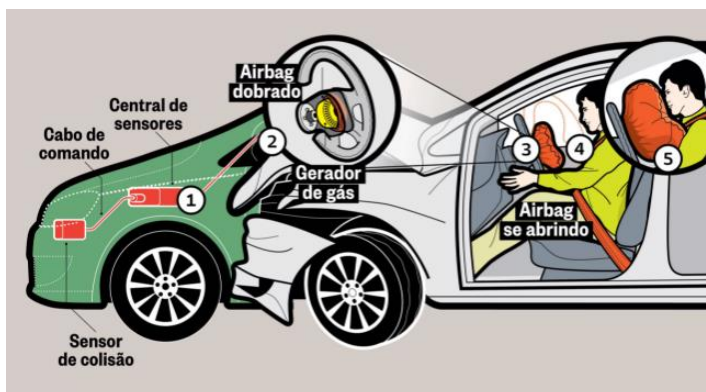
Atividade 6 – Eficiência dos airbags

Como funciona o airbag¹⁴

Ele salva milhares de vidas e espanta pela agilidade. Como o airbag abre tão rápido? Eis a resposta.

Por **Ana Becker** - Atualizado em 28 jan 2017

1. A desaceleração brusca do carro ativa o dispositivo de airbag. Munida de sensores de velocidade, a unidade de controle eletrônico envia um sinal elétrico para o ignitor do gerador de gás – o responsável por inflar a bolsa.



2. O ignitor funciona como uma espoleta. Dentro do gerador de gás, esse dispositivo pirotécnico faz com que substâncias como os

nitratos de amônia e guanidina reajam e explodam instantaneamente. Essa tecnologia de combustão é tão requintada que pode ser comparada à usada no lançamento de foguetes.

3. A reação química gera nitrogênio suficiente para encher a bolsa (que pode ter entre 60 e 90 litros) em apenas 30 milésimos de segundo. Isso significa que é possível encher um airbag 30 vezes em um único segundo.

4. Empurrada pela expansão do gás, a capa se abre em diversas partes a partir do centro, como um botão de rosa que desabrocha. Essa capa é feita de um plástico especial que tem de 2 a 3 mm de espessura e pequenos sulcos de 0,5 cm. São esses sulcos que garantem que o material romperá nos locais desejados e que nenhum pedaço de plástico atingirá o passageiro.

5. O airbag começa a esvaziar para, só então, absorver o impacto do corpo. Isso porque o choque contra um airbag em processo de inflação seria tão ruim quanto bater direto no painel. O esvaziamento é feito através de furos posicionados na parte de trás ou na lateral da bolsa.

O impacto da colisão de um veículo a 80 km/h contra um muro é igual a de um carro que despenca do 10º andar ao bater no chão.

Em termos numéricos, o **airbag** pode aumentar o tempo de colisão em até dez vezes. Tempos típicos de parada seriam 0,05 segundo sem **airbag** e 0,5 segundo com **airbag**.

Um estudo feito em 2008 pelo Centro de Experimentação e Segurança Viária concluiu que, se todos os carros envolvidos em acidentes no Brasil tivessem airbag, o dispositivo poderia ter salvado: 3.426 vidas entre 2001 e 2007. E poupado 71.047 feridos dos seus machucados, o que significaria uma economia de R\$ 2,2 bilhões.

Impulso

O impulso é uma propriedade que está diretamente ligada aos conceitos de segurança expostos até o momento, pois determina a atuação de forças sobre um corpo. O

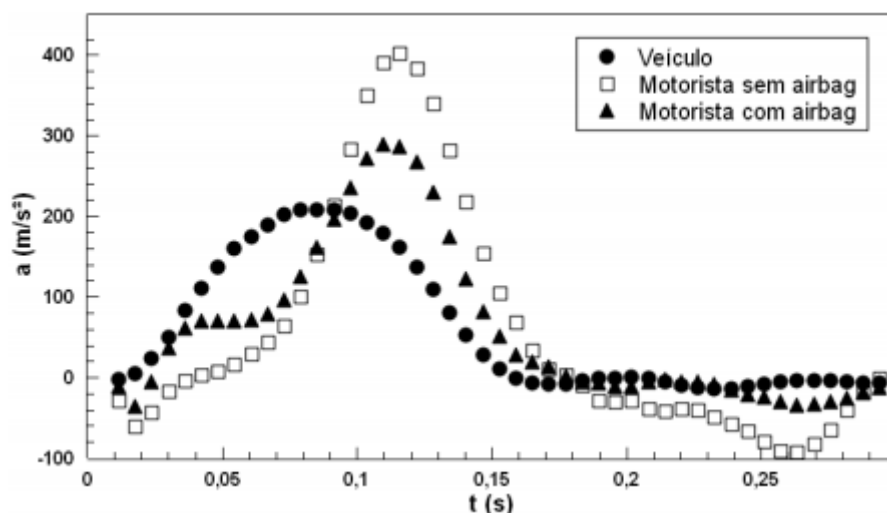
¹⁴ <<http://super.abril.com.br/tecnologia/como-funciona-o-airbag/>> Acesso em: 30/05/2017.

impulso é uma propriedade capaz de alterar a quantidade de movimento de um objeto, levando em consideração a força aplicada neste e o tempo durante o qual esta força está sendo aplicada.

Experimento – Crash Test

Foi feito um experimento, crash test, em que um veículo impacta frontalmente contra uma barreira deformável – 40% do carro colide contra a barreira, e a frente da barreira é deformável para representar essa natureza, frágil, dos carros. As leituras obtidas a partir dos dummies (bonecos utilizados nos testes de colisão) são usadas para avaliar a proteção aos passageiros adultos que viajam na parte da frente do veículo. Todo carro é submetido a um impacto contra um bloco imóvel adaptado com uma face de alumínio alveolar deformável. Esse impacto pretende simular o tipo mais frequente de colisões – entre dois carros de massa similar – que resultam em lesões graves ou mortais. O veículo recebe dois dummies adultos, que representam homens de tamanho médio, no banco do motorista e do acompanhante, enquanto dois dummies crianças, de 18 meses e 3 anos, vão nas cadeirinhas de retenção infantil no banco traseiro.

No gráfico é apresentada a aceleração do carro e do motorista, avaliada em relação ao tempo, nos casos com e sem airbag.



Sabemos que a área da curva do gráfico aceleração x tempo corresponde à variação da velocidade.

Qual a força que age sobre uma pessoa, de massa 80kg, com e sem o airbag para os tempos típicos de parada?

APÊNDICE J
Unitarização das Unidades de Contexto

Os dados estão em poder da autora e podem ser solicitados por meio do e-mail gabrielaissa5@hotmail.com.