



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

JOSÉ VAGNER CHIRÉIA

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A SIMETRIA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**

Londrina
2013

JOSÉ VAGNER CHIRÉIA

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A SIMETRIA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Lucia da Silva

Londrina
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C541t Chiréia, José Vagner.

Transformações geométricas e a simetria : uma proposta para o ensino médio / José Vagner Chiréia. – Londrina, 2013.
89 f. : il.

Orientador: Ana Lúcia da Silva.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Geometria – Formação de conceitos – Teses. 3. Simetria (Matemática) – Teses. 4. Coordenadas (Matemática) – Teses. I. Silva, Ana Lúcia da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

JOSÉ VAGNER CHIRÉIA

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A SIMETRIA:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dra. Ana Lucia da Silva - Orientadora
UEL – Londrina - PR



Prof. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro
UEL – Londrina - PR



Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
UEL – Londrina - PR

Londrina, 26 de junho de 2013.

Às **Anas** da minha vida por existirem e fazerem
dela uma completa alegria.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter proporcionado a oportunidade;

À minha esposa **Luciana** pelo carinho e compreensão;

Às minhas filhas **Ana** Beatriz e **Ana** Flávia pelas vezes em que não dispensei a atenção necessária;

A meus pais por oferecerem, ao longo da vida, exemplos de amor e honestidade;

À Professora Doutora Ana Lucia da Silva, que me orientou e ofereceu condições para a conclusão do curso;

Aos amigos e companheiros da turma PROFMAT-2011; especialmente a Alceu, André, Bacarin e Ivan, pois, sem o apoio de vocês o caminho seria mais longo e difícil;

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, à Universidade Estadual de Londrina – UEL e aos professores pela formação acadêmica;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo auxílio financeiro.

"Quando a gente acha que tem todas as respostas, vem a vida e muda todas as perguntas."

Luís Fernando Veríssimo

CHIRÉIA, José Vagner. **Transformações geométricas e a simetria**: uma proposta para o ensino médio. 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Neste trabalho faremos, inicialmente, a apresentação dos três principais casos de transformação isométrica no plano, aqui identificada por simetria de reflexão, simetria de translação e simetria de rotação. Essa apresentação será feita de duas formas: por coordenadas cartesianas e por construção geométrica com régua e compasso. Em seguida, apresentamos uma aplicação da simetria por meio do gráfico de funções reais que admitem função inversa e provamos que o gráfico da função inversa é simétrico ao gráfico da função relativamente à reta $x = y$. Finalizamos com alguns jogos em que a simetria é uma estratégia para definir o vencedor. No decorrer do trabalho, são apresentadas trinta e cinco atividades para que os alunos fixem o conteúdo e pratiquem os conhecimentos. Destacamos também, logo após a introdução, um capítulo com conteúdos que julgamos serem pré-requisitos, bem como um texto de motivação para o assunto.

Palavras-chave: Simetria. Reflexão. Translação. Rotação. Função. Inversa.

CHIRÉIA, José Vagner. **Geometric transformations and symmetry**: a proposal for the high school. 2013. 89 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics in Professional Network National) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this project we will, initially, present the three major cases of isometrical transformation in a plan, here identified as symmetry of reflection, symmetry of translation and symmetry of rotation. This presentation will be made in two ways: by cartesian coordinates and geometrical construction using ruler and compass. Being that done we present an application of symmetry through the graph of real functions which accept inverse function and prove that the graph of inverse function is symmetrical to the graph of function related to the line $x = y$. We wrapped up with some games where the symmetry is a strategy to define the winner. Throughout the job, are presented thirty-five activities for students to fix the content and practice the knowledge. We also highlight, straight after the introduction, a chapter with content we consider a pre requirement, as well as a motivation text for the subject.

Keywords: Symmetry. Reflection. Translation. Rotation. Function. Inverse.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Esqueleto humano com eixo de simetria.....	20
Figura 02 – Radiografia de uma coluna vertebral assimétrica	21
Figura 03 – Indicação do ângulo de Cobb na coluna vertebral assimétrica	21
Figura 04 – Radiografia de uma coluna vertebral simétrica	21
Figura 05 – Esqueleto com joelhos posicionados corretamente.....	22
Figura 06 – Indicação do ângulo Q no membro inferior direito.....	22
Figura 07 – Posicionamento de membros inferiores	23
Figura 08 – Sistema de coordenadas cartesianas ortogonal	24
Figura 09 – Sinais das coordenadas nos quadrantes.....	25
Figura 10 – Pontos P e Q no plano cartesiano	25
Figura 11 – Segmento de reta \overline{PQ}	25
Figura 12 – Triângulo retângulo (PTQ)	26
Figura 13 – Mediatriz de $\overline{PP'}$	30
Figura 14 – P coincidente a P'	30
Figura 15 – Simétrico de P em relação ao eixo OX	30
Figura 16 – Simétrico de P em relação ao eixo OY	31
Figura 17 – Simétrico dos simétricos de P	31
Figura 18 – Figuras simétricas em relação aos eixos de coordenadas	32
Figura 19 – Triângulo (ABC) no primeiro quadrante	33
Figura 20 – Ponto A refletido	34
Figura 21 – Vértices do triângulo (ABC) refletidos	34
Figura 22 – Triângulo $(A'B'C')$ refletido com as coordenadas	35
Figura 23 – Triângulo $(A'B'C')$ refletido sem as coordenadas.....	35
Figura 24 – Triângulo (ABC) no segundo quadrante.....	36
Figura 25 – Localizando ponto M e N	36
Figura 26 – Localizando o ponto K	37
Figura 27 – Segmento \overline{CK} paralelo ao eixo OX determinando P	37
Figura 28 – Ponto C' simétrico de C	38
Figura 29 – Pontos A' , B' e C' simétricos de A , B e C	38
Figura 30 – Triângulo refletido $(A'B'C')$ simétrico ao triângulo (ABC)	39

Figura 31 – Posição dos pontos A e B em relação a linha da praia	39
Figura 32 – Localização do simétrico de B	40
Figura 33 – Segmento \overline{AB} determinando P	40
Figura 34 – Segmento \overline{PB}	40
Figura 35 – Ponto $P' \neq P$	41
Figura 36 – Plano cartesiano com reta r e ponto P	41
Figura 37 – Coordenadas dos pontos A e B , onde $\overline{AB} = v$	42
Figura 38 – Translação do ponto P em P'	42
Figura 39 – Triângulo (RST) com segmento orientado \overline{AB}	44
Figura 40 – Ponto S transladado para S'	44
Figura 41 – Pontos R e T transladados para R' e T'	45
Figura 42 – Triângulo $(R'S'T')$ transladado	45
Figura 43 – Triângulo (RST) com segmento orientado \overline{OA}	46
Figura 44 – Localizando pontos auxiliares M e N	47
Figura 45 – Localização do ponto K	47
Figura 46 – Localização do ponto G	48
Figura 47 – Localização do ponto H	48
Figura 48 – Localização do ponto G'	49
Figura 49 – Pontos auxiliares J e L	49
Figura 50 – Determinação de K''	50
Figura 51 – Reta t perpendicular ao eixo OX	50
Figura 52 – Localizando ponto S' transladado de S	51
Figura 53 – Localizando pontos R' e T'	51
Figura 54 – Triângulo $(R'S'T')$ transladado do triângulo (RST)	52
Figura 55 – Plano cartesiano com reta s e segmento AB	52
Figura 56 – Plano cartesiano com polígono $(EFGHI)$ e segmento \overline{AB}	53
Figura 57 – Figura com $r//s$	53
Figura 58 – Rotação do ponto P para P'	54
Figura 59 – Ponto P e o simétrico P' no plano cartesiano	54
Figura 60 – Sistema de eixos rotacionados	55
Figura 61 – Triângulo retângulo (OPA)	55
Figura 62 – Triângulo retângulo (OBP')	56
Figura 63 – Triângulo (ABC) a ser rotacionado	58

Figura 64 – Triângulo (ABC) a ser rotacionado com coordenadas dos vértices.....	58
Figura 65 – Localização do ponto A' rotacionado de A	59
Figura 66 – Localização dos pontos B' e C' rotacionados de B e C	59
Figura 67 – Triângulo $(A'B'C')$ rotacionado do triângulo (ABC)	60
Figura 68 – Triângulo (ABC) a ser rotacionado	61
Figura 69 – Circunferência de centro em $O = (0, 0)$ e raio \overline{OA}	61
Figura 70 – Localização do ponto A' rotacionado de A com ângulo de 60°	62
Figura 71 – Localização dos pontos B' e C' rotacionado de B e C com ângulo de 60°	62
Figura 72 – Traçando o triângulo $(A'B'C')$ rotacionado pelo ângulo de 60°	63
Figura 73 – Triângulo $(A'B'C')$ rotacionado do triângulo (ABC)	63
Figura 74 – Plano cartesiano com o quadrilátero $(ABCD)$	64
Figura 75 – Diagrama de representação de f e f^{-1}	65
Figura 76 – Termômetro.....	66
Figura 77 – Balança de mola.....	66
Figura 78 – Gráfico da função afim e sua inversa quando $a > 0$	67
Figura 79 – Gráfico da função afim e sua inversa quando $a < 0$	67
Figura 80 – Parábola com a concavidade para cima	68
Figura 81 – Parábola com a concavidade para baixo	68
Figura 82 – Lado direito do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a > 0$	69
Figura 83 – Lado esquerdo do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a > 0$	69
Figura 84 – Lado direito do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a < 0$	70
Figura 85 – Lado esquerdo do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a < 0$	70
Figura 86 – Gráfico da função exponencial quando $a > 1$	71
Figura 87 – Gráfico da função exponencial quando $0 < a < 1$	71
Figura 88 – Gráfico da função logarítmica quando $a > 1$	71
Figura 89 – Gráfico da função logarítmica quando $0 < a < 1$	71
Figura 90 – Gráfico das funções exponencial e logarítmica quando $a > 1$	72
Figura 91 – Gráfico das funções exponencial e logarítmica quando $0 < a < 1$	72
Figura 92 – Gráfico da função seno	73
Figura 93 – Gráfico da função seno no intervalo de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	73
Figura 94 – Gráfico da função arco seno no intervalo de domínio $[-1, 1]$	74
Figura 95 – Gráfico da função seno e arco seno	74
Figura 96 – Gráfico da função cosseno	75

Figura 97 – Gráfico da função cosseno no intervalo de domínio $[0, \pi]$	75
Figura 98 – Gráfico da função arco cosseno no intervalo de domínio $[-1, 1]$	75
Figura 99 – Gráfico da função cosseno e arco cosseno.....	76
Figura 100 – Gráfico da função tangente	76
Figura 101 – Gráfico da função tangente no intervalo de domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	77
Figura 102 – Gráfico da função arco tangente	77
Figura 103 – Gráfico da função tangente e arco tangente	78
Figura 104 – Gráfico de uma função f qualquer e sua inversa f^{-1}	78
Figura 105 – Gráfico de uma função no intervalo $[0, \pi]$ com alternativas.....	80
Figura 106 – Gráfico de uma função sem alternativas.....	81
Figura 107 – Posicionando a primeira moeda	82
Figura 108 – Posicionando a segunda moeda	82
Figura 109 – Posicionando a terceira moeda.....	83
Figura 110 – Tabuleiro de xadrez com dois eixos de simetria.....	83
Figura 111 – Tabuleiro de xadrez com a primeira peça posicionada.....	84
Figura 112 – Tabuleiro de xadrez com a segunda peça posicionada	84

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

A – P : Anteroposterior

DCE : Diretrizes Curriculares da Educação Básica no Estado do Paraná

DNA : Ácido Desoxirribonucleico

PCN : Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT : Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

VLS : Vértebra Limite Superior

VLI : Vértebra Limite Inferior

r, s, \dots : Letra minúscula nomeando reta

A, B, \dots : Letra maiúscula nomeando ponto

A', B', \dots : Letra maiúscula nomeando ponto

π : Letra grega minúscula nomeando plano

γ : Letra grega minúscula nomeando circunferência

α, β, \dots : Letra grega minúscula nomeando ângulo

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$: Diferença entre dois valores de abscissas ou dois valores de ordenadas

e : Eixo de Simetria

\overline{AB} : Segmento de reta de A até B

$d(A, B)$: Distância de A até B

f : Representação de função

$f: A \rightarrow B$: Função com conjunto de domínio A para o conjunto de contradomínio B

$f(x)$: Imagem do domínio x

OXY : Sistema de eixos de coordenadas

$O\bar{X}\bar{Y}$: Sistema de eixos de coordenadas rotacionados

$[,]$: Intervalo fechado

$[, [$: Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

$] , [$: Intervalo aberto

$] ,]$: Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

∞ : Infinito

\sphericalangle : Ângulo

// : Retas paralelas

\perp : Ângulo reto

\in : Pertence

$=$: Igualdade

\neq : Diferença

\equiv : Congruente ou Coincidente

$>$: Maior do que

$<$: Menor do que

\subseteq : Está contido ou igual a

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
2 MOTIVAÇÃO E RETOMADA DE CONHECIMENTOS	19
2.1 MOTIVAÇÃO – SISTEMA ESQUELÉTICO	19
2.2 RETOMADA DE CONHECIMENTOS	23
2.2.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonal	23
2.2.2 Distância Entre Dois Pontos	25
3 CONCEITOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS	27
3.1 TRANSFORMAÇÃO NO PLANO	27
3.2 ISOMETRIA	27
4 SIMETRIA	29
4.1 SIMETRIA DE REFLEXÃO	29
4.1.1 Definição da Simetria de Reflexão	29
4.1.2 Simetria de Reflexão Utilizando as Coordenadas Cartesianas	33
4.1.3 Simetria de Reflexão Utilizando Régua e Compasso	36
4.2 SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO	42
4.2.1 Definição da Simetria de Translação	42
4.2.2 Simetria de Translação Utilizando as Coordenadas Cartesianas	43
4.2.3 Simetria de Translação Utilizando Régua e Compasso	46
4.3 SIMETRIA DE ROTAÇÃO	54
4.3.1 Definição da Simetria de Rotação	54
4.3.2 Simetria de Rotação Utilizando as Coordenadas Cartesianas	57
4.3.3 Simetria de Rotação Utilizando Régua, Compasso e Transferidor	60
5 SIMETRIA DE REFLEXÃO E AS FUNÇÕES INVERSAS	65
5.1 FUNÇÃO AFIM	67
5.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA	68
5.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL E A FUNÇÃO LOGARÍTMICA	71
5.4 FUNÇÃO SENO	73

5.5 FUNÇÃO COSSENO	74
5.6 FUNÇÃO TANGENTE	76
6 SIMETRIA COMO ESTRATÉGIA EM ALGUNS JOGOS	82
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
8 TGHGTž PEKCU".....	87

1 INTRODUÇÃO

Entre as modalidades sugeridas como trabalho final pela Coordenação Nacional do PROFMAT, Elaboração de Proposta Educacional e Aplicação de Atividades em Sala com Avaliação de Resultados, optamos pela primeira com o intuito de colaborar na prática docente em sala de aula.

A intenção de trabalhar com a geometria, em especial com transformações geométricas no plano, justifica-se visto que, em nossa prática cotidiana como professor, notamos que os estudantes apresentam dificuldades na visualização de figuras e na compreensão de propriedades geométricas, principalmente no que tange à geometria de movimento, o que causa falhas na formalização de conceitos.

Além disso, segundo o que observamos, simetria e transformações geométricas são dois assuntos pouco explorados. Embora estejam presentes em livros didáticos e paradidáticos do Ensino Fundamental, isso não ocorre no Ensino Médio. Ao elaborarmos esta proposta, pretendemos contribuir para valorizar o assunto e dar-lhe a dimensão que deveria ter na aprendizagem. Conquanto simetria e transformações geométricas incidam sobre figuras no plano e no espaço, o objetivo aqui é trabalhar somente com figuras no plano visando o Ensino Médio.

Considerando que os casos de simetria auxiliam na elaboração do pensamento matemático e possibilitam relações com outras áreas. Sua importância fica evidenciada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN do Ensino Fundamental já na escolha de conteúdos:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. [01], p. 51

Ou ainda nas orientações didáticas:

À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia a dia, mas refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. [01], p. 124

A simetria, apresentada ao Ensino Fundamental, passa a ser objeto de estudos também no Ensino Médio, como podemos observar nos PCN do Ensino Médio e nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE do Estado do Paraná, o que leva a um aprofundamento de ideias e contatos com procedimentos mais elaborados.

A essas concepções da matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.[02], p. 252

No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos da geometria plana e espacial em um nível de abstração mais complexo. [05], p.56

Os casos de simetria serão desenvolvidos buscando despertar a atenção dos alunos para as posições entre retas antes e depois das transformações a que forem submetidas. A abordagem acontecerá de duas formas, a primeira por intermédio das coordenadas cartesianas e a segunda por construção geométrica utilizando instrumentos como régua, compasso e transferidor.

Essas duas formas de abordagem proporcionarão diferentes maneiras de raciocinar e compreender um mesmo problema, auxiliarão na descoberta de propriedades geométricas e, juntas, construirão os conceitos envolvidos. O uso de instrumentos de construção, cada vez mais esquecidos no dia a dia dos estudantes, permitirá a descoberta de técnicas e processos, o que confirmará os conhecimentos teóricos da geometria e ainda auxiliará na organização e na autodisciplina.

Propomos também um olhar mais criterioso para a inversa de funções reais, conteúdo normalmente estudado de forma isolada e com acentuado trabalho algébrico. Serão apresentados os gráficos das funções estudadas no Ensino Médio e suas inversas a fim de mostrar aos alunos a simetria existente nos gráficos em relação à reta $y = x$.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar os casos de simetria de uma forma diferente das apresentadas no Ensino Fundamental, geralmente resumidos a definição de eixos ou reprodução de figuras simétricas em malhas quadriculadas. Pretendemos que os alunos desenvolvam, compreendam e utilizem o pensamento geométrico na resolução das atividades propostas de localização e deslocamento no plano; reconheçam noções de direção e

sentido, de ângulo, de paralelismo e perpendicularismo, elementos fundamentais na transformação no plano e que ajudarão na introdução à Geometria Analítica.

Para alcançar esse objetivo, o presente trabalho está estruturado em 6 capítulos. O capítulo 1, contém os objetivos e a forma de abordagem. No capítulo 2, apresentamos uma motivação para a escolha do tema e alguns conteúdos necessários. O capítulo 3 traz os conceitos matemáticos que fundamentam a simetria. No capítulo 4 estão os casos de simetria nas duas formas já comentadas. No capítulo 5, fazemos uso da simetria de reflexão para o estudo do gráfico de funções e suas inversas. O capítulo 6 apresenta alguns jogos mostrando que a simetria é uma estratégia fundamental para estabelecer o vencedor. Por fim o capítulo 7, com as considerações finais e o 8 com a bibliografia.

2 MOTIVAÇÃO E A RETOMADA DE CONHECIMENTOS

Inicialmente pensamos em trabalhar com simetria e simetria no corpo humano. Entretanto vimos que desenvolver tal intento necessitaríamos da ajuda e boa vontade de profissionais da área médica e fisioterápica, além disso, o tempo não estava a nosso favor.

O corpo humano nos motiva, pois é exemplo de como a simetria esta em nosso cotidiano e muitas vezes, apesar de sentir as dores da assimetria¹, não a relacionamos com a falta da simetria.

Assim, decidimos estudar apenas a parte técnica da simetria, mas elegemos o sistema esquelético humano como um exemplo da simetria no nosso dia a dia.

2.1 MOTIVAÇÃO - SISTEMA ESQUELÉTICO

O sistema esquelético, ou simplesmente esqueleto humano, é constituído, quando adulto, por cerca de duzentos ossos e uma de suas funções é sustentar o corpo. Ele é dividido em três partes principais: cabeça, tronco e membros.

A coluna vertebral, que faz parte do tronco, é constituída por trinta e três vértebras. Nela, observa-se um eixo de simetria que se projeta desde as vértebras cervicais até a região pélvica (sacro), passando posteriormente pelos pontos médios das distâncias entre os joelhos e entre os calcanhares, Figura 01. Quando não existe esse eixo imaginário, temos uma assimetria da coluna vertebral, surgindo, assim, deformações na estrutura.

¹ Ausência de Simetria.

Figura 01- Esqueleto humano com eixo de simetria



Fonte: <<http://www.esqueleto4c8.blogspot.com.br/>> Acesso em: 13 fev.2013, com modificação

Uma deformação muito comum da coluna é a escoliose, conforme visualização na Figura 02. Ela se caracteriza por uma curvatura lateral da coluna vertebral e depende da idade em que tem início e da magnitude do ângulo de curvatura durante o período de crescimento. É na adolescência que o ângulo de curvatura aumenta em maior intensidade.

O tratamento da escoliose tem início com a medição do ângulo de curvatura da coluna. Para isso, existem vários métodos, porém um, amplamente utilizado para quantificar e monitorar a progressão da escoliose, é conhecido como método de Cobb² ou ângulo de Cobb. Esse ângulo é utilizado para mensurar a angulação frontal da escoliose em uma radiografia de incidência anteroposterior (A-P), pois a quantidade de escoliose é diretamente proporcional à angulação da curva.

Para a medição do ângulo de Cobb, Figura 03, é necessário “obedecer” os passos a seguir.

- 1 – Localize a Vértebra Limite Superior (VLS). Para isso, observe a curva e identifique, de cima para baixo (quando a curva começa a se formar), a vértebra com maior grau de inclinação em relação ao plano horizontal.
- 2 - Localize a Vértebra Limite Inferior (VLI). Para isso, observe a curva e identifique, agora de baixo para cima, a vértebra com maior inclinação em relação ao plano horizontal.
- 3 - Trace uma linha reta a partir do platô superior da VLS.

² Dr. John Robert Cobb (1903-1967) foi um ortopedista estadunidense que se especializou no tratamento da escoliose e criou o método que leva seu nome para quantificar a curvatura da coluna vertebral.

4 - Trace uma linha reta a partir do platô inferior da VLI.

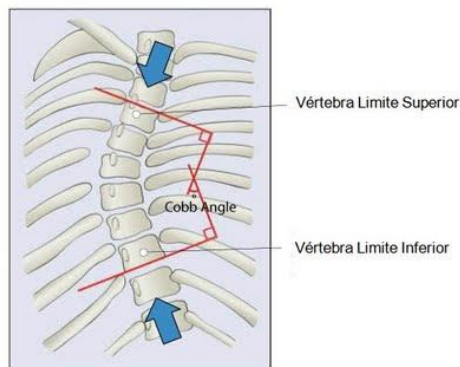
5 - Trace outras duas linhas perpendiculares às duas primeiras. O ângulo formado na intersecção dessas duas linhas é conhecido como ângulo de Cobb.

Figura 02 – Radiografia de uma coluna vertebral assimétrica



Fonte: <www.fisioterapiahumberto.blogspot.com.br/2009/10/o-angulo-de-cobb.html>. Acesso em: 13 fev. 2013

Figura 03 - Indicação do ângulo de Cobb na coluna vertebral assimétrica



Fonte: <www.fisioterapiahumberto.blogspot.com.br/2009/10/o-angulo-de-cobb.html>. Acesso em: 13 fev. 2013

Na Figura 04, é possível observamos uma coluna vertebral que não apresenta a escoliose.

Figura 04 – Radiografia de uma coluna vertebral simétrica



Fonte: < www.psicologiadagestalt.blogspot.com.br/2011_11_01_archive.html > Acesso em: 13 fev. 2013

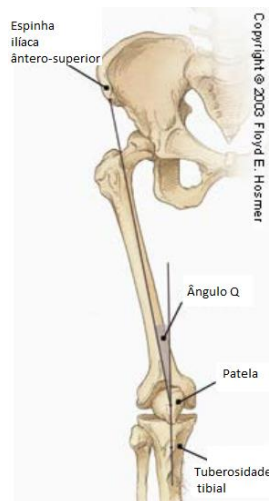
Outra deformidade muito encontrada no esqueleto humano é o desalinhamento dos membros inferiores (Figura 05), um desvio da posição entre os joelhos que causam lesões nos músculos e ligamentos. A intervenção médica inicia-se pela medição do chamado ângulo quadriciptal (Figura 06), daqui em diante chamado simplesmente por ângulo Q. O ângulo Q é uma medida de alinhamento patelar global. Trata-se do ângulo formado pela intersecção de duas retas: uma que se estende da espinha íliaca anterossuperior até o centro da patela e outra que se estende do centro da patela até o centro da tuberosidade tibial.

Figura 05– Esqueleto com joelhos posicionados corretamente



Fonte: < www.cpaqv.org/cinesiologia/anguloq.pdf > Acesso em: 13 fev. 2013

Figura 06 - Indicação do ângulo Q no membro inferior direito



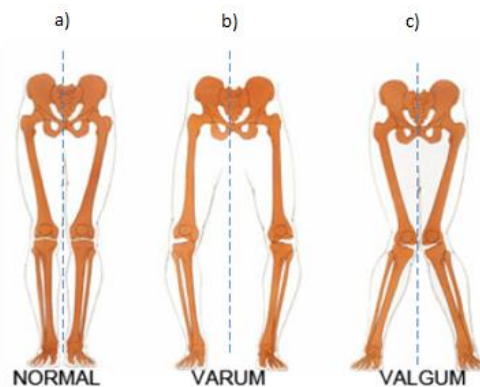
Fonte: < www.cpaqv.org/cinesiologia/anguloq.pdf > Acesso em: 13 fev. 2013, com modificações

Considera-se como normal, para indivíduos do sexo masculino, o ângulo Q variando de 11 e 17 graus. Para o sexo feminino, essa variação fica entre 14 e 20 graus. Valores que não se enquadram nos apresentados anteriormente são considerados patológicos e

causam sobrecarga em partes do esqueleto, principalmente joelhos e articulação coxofemoral³. A variação angular do joelho pode resultar em duas situações (Figura 07):

- o joelho *varum* ou varo, que se trata do arqueamento dos membros inferiores para o lado externo do corpo, popularmente conhecido como “pernas de *cowboy*”, Figura 07 b).
- o joelho *valgum* ou valgo, que se caracteriza por joelhos muito unidos ou virados para dentro, com pernas em forma de “x”, ver figura 07 c).

Figura 07 - Posicionamento de membros inferiores



Fonte: < www.cpaqv.org/cinesiologia/anguloq.pdf > Acesso em: 13 fev. 2013

Apesar de as Figuras 07 a), 07 b) e 07 c) apresentarem a posição dos joelhos de forma simétrica em relação à linha pontilhada, ou seja, o ângulo de inclinação no membro inferior esquerdo ser igual à inclinação do membro inferior direito, é muito comum acontecer a assimetria entre os membros, ângulos diferentes entre o membro inferior esquerdo e o membro inferior direito.

2.2 RETOMADA DE CONHECIMENTOS

Neste item, relembremos os assuntos sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais e a distância entre dois pontos, necessários no desenvolvimento do trabalho.

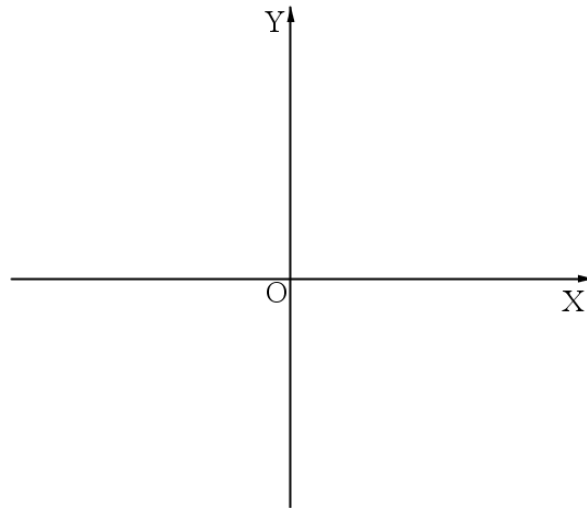
2.2.1 Sistema De Coordenadas Cartesianas Ortogonal

O sistema de coordenadas cartesianas ortogonal em um plano π ou simplesmente plano cartesiano, é constituído por duas retas concorrentes orientadas,

³ É composta por duas estruturas ósseas: o acetábulo constituído pelo encontro de três ossos (ílio, ísquio e púbis) e a cabeça do fêmur.

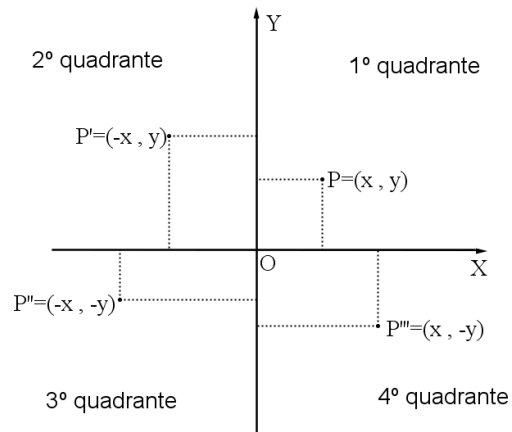
chamadas eixos de coordenadas, perpendiculares no ponto de concorrência O , chamado de origem. A reta horizontal é o eixo OX graduado como uma reta real, sendo a semirreta da direita positiva e a semirreta da esquerda negativa. A reta vertical é o eixo OY , também graduado como uma reta real, com a semirreta superior positiva e a semirreta inferior negativa, como ilustrado na Figura 08.

Figura 08 - Sistema de coordenadas cartesianas ortogonal



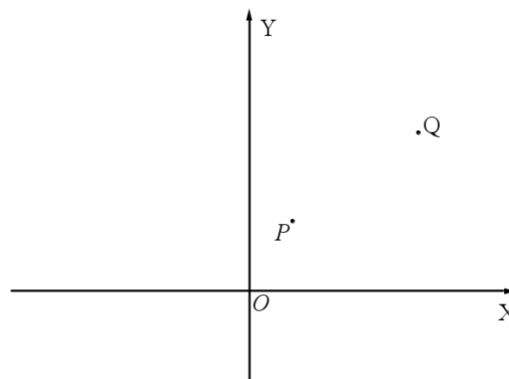
O Plano Cartesiano tem a finalidade de descrever a posição de qualquer ponto P do plano por meio de um par de valores que fazem referência aos eixos OX e OY , respectivamente. Esse par de valores fica indicado entre parênteses, separados por uma vírgula (x, y) e é chamado par ordenado ou coordenadas cartesianas de P . Seu primeiro número x , é o valor localizado sobre o eixo OX , que é chamado de abscissa e indica por onde passara uma reta paralela ao eixo OY . O segundo valor y é o valor a ser localizado sobre o eixo OY , chamado de ordenada e indica por onde passará uma reta paralela ao eixo OX . Assim, um ponto P estará localizado quando da intersecção das retas perpendiculares aos eixos OX e OY passando por x e por y , ou ainda $P = (x, y)$. O ponto de origem O tem suas coordenadas, a abscissa e a ordenada, com valor zero, ou seja, a posição da origem fica definida como $O = (0, 0)$.

Os dois eixos, OX e OY , dividem o plano em quatro regiões denominadas, em sentido anti-horário, de quadrantes, Figura 09. No primeiro quadrante, temos pontos abscissas e ordenadas positivas. No segundo quadrante, a abscissa é negativa e a ordenada, positiva. No terceiro quadrante, a abscissa e a ordenada são negativas. No quarto quadrante, a abscissa é positiva e a ordenada é negativa.

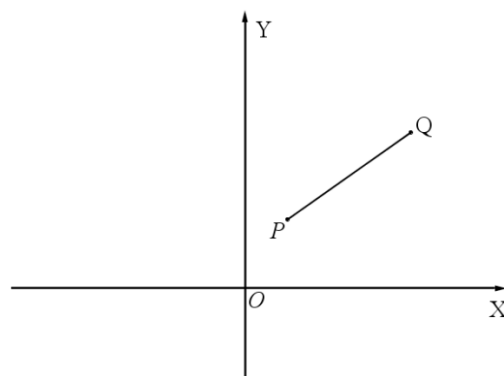
Figura 09 - Sinais das coordenadas nos quadrantes

2.2.2 Distância Entre Dois Pontos

Dados dois pontos, P e Q , no plano cartesiano, conforme Figura 10, as coordenadas são indicadas por $P = (x', y')$ e $Q = (x'', y'')$.

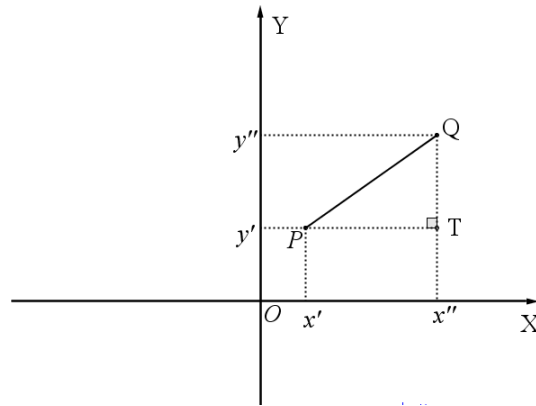
Figura 10 – Pontos P e Q no plano cartesiano

A distância existente de P até Q é um número real, representado por $d(PQ)$, enquanto o segmento de reta que vai de P até Q fica representado por \overline{PQ} , Figura 11.

Figura 11 - Segmento de reta \overline{PQ} 

Os segmentos de retas pontilhadas (Figura 12) são paralelos aos eixos, portanto se interceptam no ponto T formando um ângulo de 90° .

Figura 12 – Triângulo retângulo (PTQ)



Dessa forma, temos (Figura 12) o triângulo (PTQ) retângulo em T , com $d(PT) = (x'' - x')$ e $d(QT) = (y'' - y')$, o que permite aplicar o teorema de Pitágoras.

$$(d(PQ))^2 = (d(PT))^2 + (d(QT))^2$$

$$(d(PQ))^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$$

$$d(PQ) = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

$$d(PQ) = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

3 CONCEITOS MATEMÁTICOS NECESSÁRIOS

Para o trabalho com a simetria, alguns conceitos matemáticos são fundamentais. Entre eles, destacamos a transformação no plano e a isometria.

3.1 TRANSFORMAÇÃO NO PLANO

Uma transformação no plano é um movimento de mudança de posição. Tais movimentos podem, ou não, manter a forma e o tamanho da figura a ser transformada.

Uma transformação no plano π é uma correspondência, isto é, uma função $f: \pi \rightarrow \pi$ que associa cada ponto P do plano a um outro ponto $f(P) = P'$ do mesmo plano, chamado imagem de P .

Uma transformação no plano π é injetiva, quando pontos distintos do plano possuem imagens distintas, isto é, se $P \neq Q$, então $f(P) \neq f(Q)$.

Uma transformação no plano π é sobrejetora, quando todo ponto P' é imagem de pelo menos um ponto P , ou seja, para todo ponto P' existe P tal que $f(P) = P'$.

Uma transformação no plano π é bijetiva, quando é, ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva, isto é, para todo ponto $P' \in \pi$ existe um único ponto $P \in \pi$ tal que $f(P) = P'$.

3.2 ISOMETRIA

A isometria (iso = mesma, metria = medida) é uma transformação no plano em que há uma mudança de posição, porém preservam-se a forma e o tamanho da figura. Ela é um movimento rígido.

Essa transformação é uma função sempre bijetiva. Como diz Wagner (2007, p.70), “transformações em que pontos distintos possuem sempre imagens distintas e também que cada ponto do plano é imagem de outro ponto desse plano”.

A isometria preserva distância. Para Lima (2007, p.13), “Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$.”

Em decorrência dessa preservação de distância entre pontos na figura transformada, podemos nomeá-las como figuras congruentes.

Uma outra propriedade fundamental da isometria é levar as figuras a não sofrerem alterações em sua forma e tamanho, podendo fazer mudança de direção e sentido.

4 SIMETRIA

De grande importância para o trabalho, este capítulo apresenta os casos de simetria e constrói figuras simétricas utilizando as coordenadas cartesianas e instrumentos de desenho, como régua e compasso.

Presente na civilização desde tempos remotos, primeiramente a simetria buscava verificar regularidade e harmonia na natureza, posteriormente passou a ser utilizada para alcançar perfeição e beleza nas criações humanas, seja na arte, seja na arquitetura ou em outras áreas.

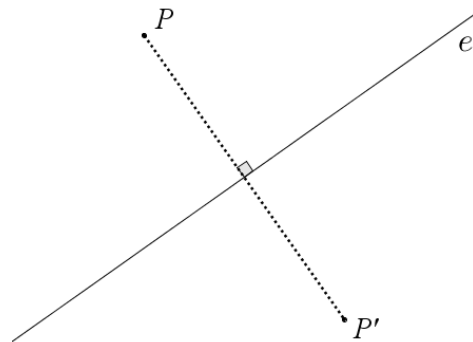
Intimamente ligada ao conceito de isometria, a simetria acontece em relação a um elemento geométrico, a uma reta, a um ângulo ou a uma distância. Neste trabalho faremos o estudo dos seguintes casos de simetria: simetria de reflexão, simetria de translação e simetria de rotação, apresentando sua definição, construção via coordenadas cartesianas e instrumentos, finalizando cada tópico com exemplos de atividades didáticas.

4.1 SIMETRIA DE REFLEXÃO

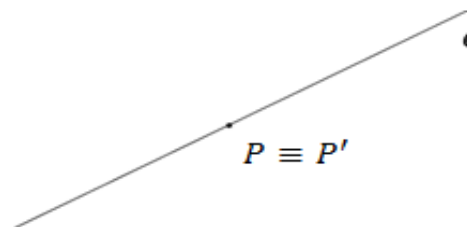
4.1.1 Definição - A simetria de reflexão é uma transformação no plano π , onde uma função bijetora $f: \pi \rightarrow \pi$ preserva distâncias e associa cada ponto P do plano π ao ponto $f(P) = P'$, onde P' é chamado imagem de P .

A simetria de reflexão acontece em relação a uma reta e , chamada eixo de simetria, de forma que:

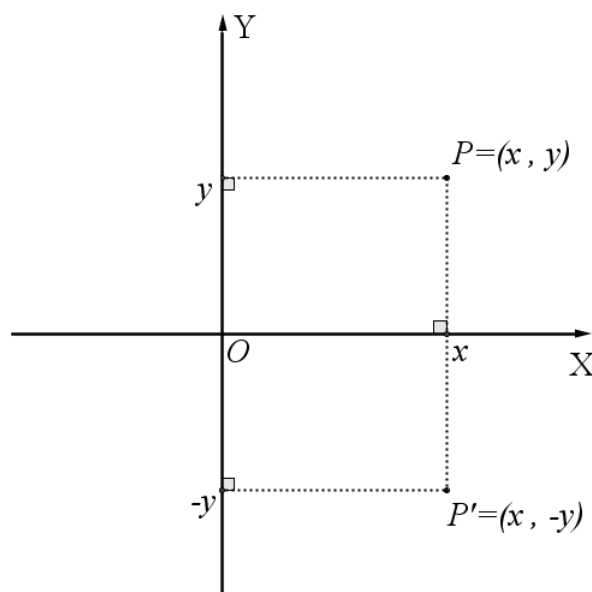
- a) se P é um ponto do plano que não pertence à reta e , a imagem de P , pela transformação, é um ponto P' tal que e seja a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$, conforme Figura 13.

Figura 13: Mediatriz de $\overline{PP'}$ 

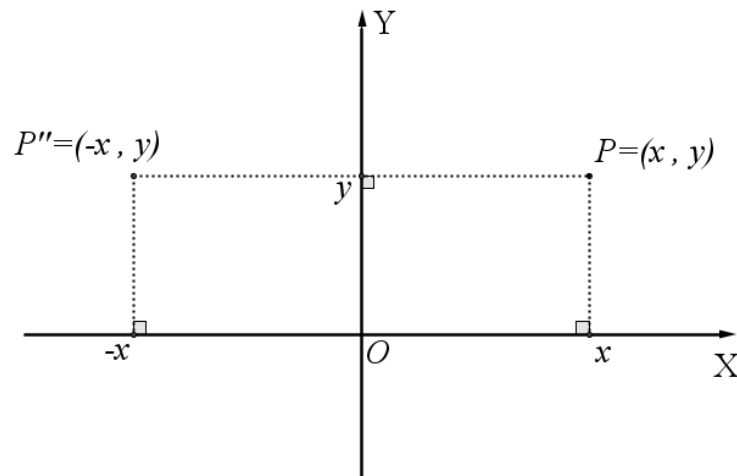
b) se P pertence à reta e , então P e sua imagem P' são coincidentes, Figura 14.

Figura 14: P coincidente a P' 

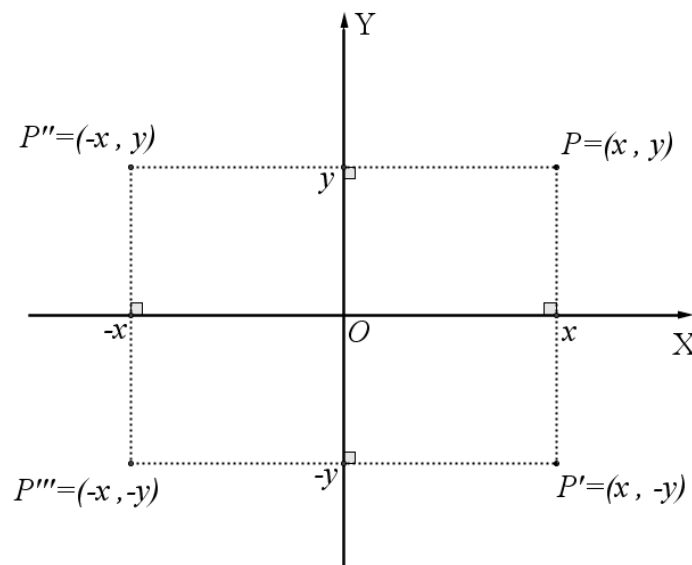
No Plano Cartesiano o eixo OX é o eixo de simetria. Dessa forma, um ponto $P = (x, y)$ tem como simétrico o ponto $P' = (x, -y)$, Figura 15.

Figura 15 – Simétrico de P em relação ao eixo OX 

No caso de OY ser o eixo de simetria, teremos o simétrico de P sendo $P'' = (-x, y)$, Figura 16.

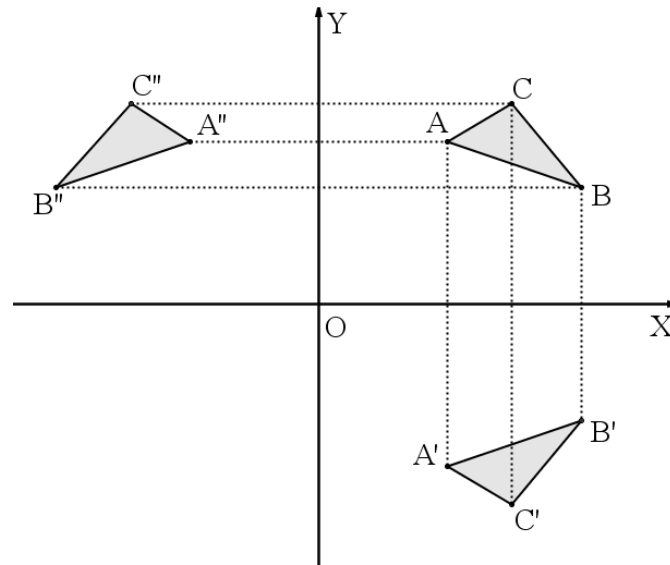
Figura 16 – Simétrico de P em relação aos eixos OY

Se considerarmos o simétrico de P' em relação ao eixo OY, ou simétrico de P'' em relação ao eixo OX, teremos um $P''' = (-x, -y)$, conforme Figura 17.

Figura 17 - Simétrico dos simétricos de P

Para obtermos uma imagem simétrica de um polígono em relação a um dos eixos do plano cartesiano, devemos conhecer os simétricos de todos os vértices para então traçar segmentos entre eles, como ilustrado na Figura 18.

Figura 18 - Figuras simétricas em relação aos eixos de coordenadas



Pelo apresentado na Definição 4.1.1, da simetria de reflexão, temos a preservação de distâncias entre pontos. Para verificar que isso é verdadeiro, vamos assumir dois pontos quaisquer do plano, no nosso caso, $A = (x, y)$ e $B = (x', y')$ com seus simétricos em relação ao eixo OY , sendo $A' = (-x, y)$ e $B' = (-x', y')$

Hipótese: $\overline{A'B'}$ é simétrico de \overline{AB}

Tese: $d(AB) = d(A'B')$

$$\begin{aligned}
 \text{Verificação: } d(AB) &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} = \\
 &= \sqrt{\{x'^2 + [2 \cdot x' \cdot (-x)] + (-x)^2\} + \{y'^2 + [2 \cdot y' \cdot (-y)] + (-y)^2\}} = \\
 &= \sqrt{\{x'^2 - 2 \cdot x' \cdot x + x^2\} + \{y'^2 - 2 \cdot y' \cdot y + y^2\}} = \\
 &= \sqrt{\{x'^2 - 2 \cdot x' \cdot x + x^2\} + \{y'^2 - 2 \cdot y' \cdot y + y^2\}} = \\
 &= \sqrt{\{(-x')^2 + [2 \cdot (-x') \cdot x] + x^2\} + \{y'^2 + [2 \cdot y' \cdot (-y)] + (-y)^2\}} = \\
 &= \sqrt{(-x' + x)^2 + (y' - y)^2} = \\
 &= \sqrt{[-x' - (-x)]^2 + (y' - y)^2} = d(A'B')
 \end{aligned}$$

Propomos, a seguir, algumas atividades para fixar os conceitos de eixo de simetria e pontos simétricos.

Atividade 01 : Determine os vértices e faça um esboço no plano cartesiano da figura simétrica ao quadrado de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, 3)$ e $D = (3, 3)$ usando como eixo de simetria a reta $y = -x$.

Atividade 02 : Determine as coordenadas do simétrico de $P = (3, 4)$ em relação ao eixo de simetria que é paralelo ao eixo das ordenadas passando pelo ponto $(1, 0)$.

Atividade 03 : Observando o exercício número 2, generalize o caso a seguir.

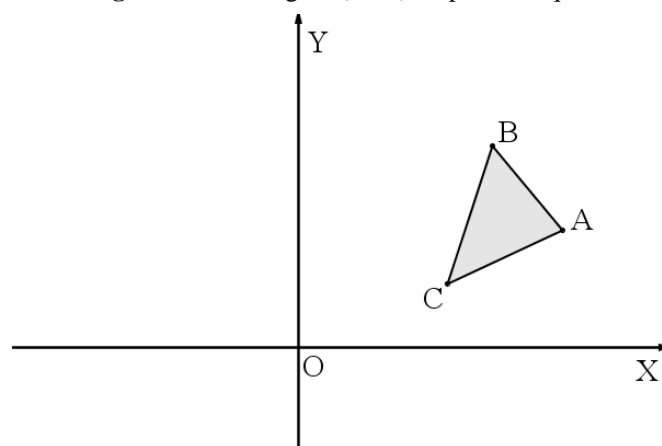
- $P = (x', y')$ é ponto do 1º quadrante;
- $y = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ é o eixo de simetria;

Como ficarão indicadas as coordenadas de P' ?

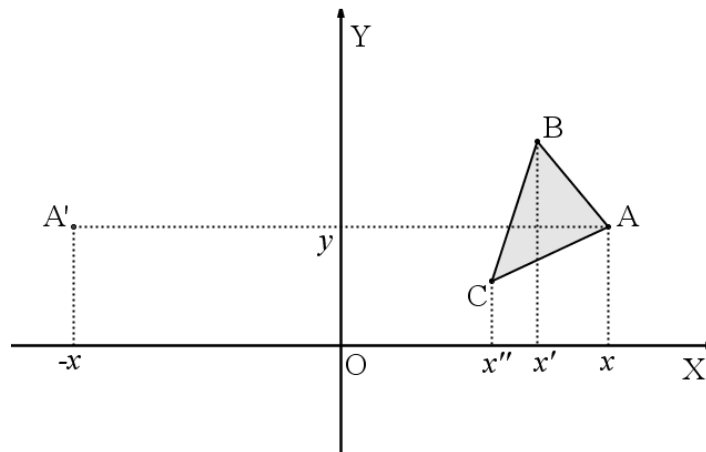
4.1.2 Simetria de Reflexão Utilizando as Coordenadas Cartesianas

Vamos descrever como encontrar a figura simétrica do triângulo (ABC) , Figura 19, em relação ao eixo OY .

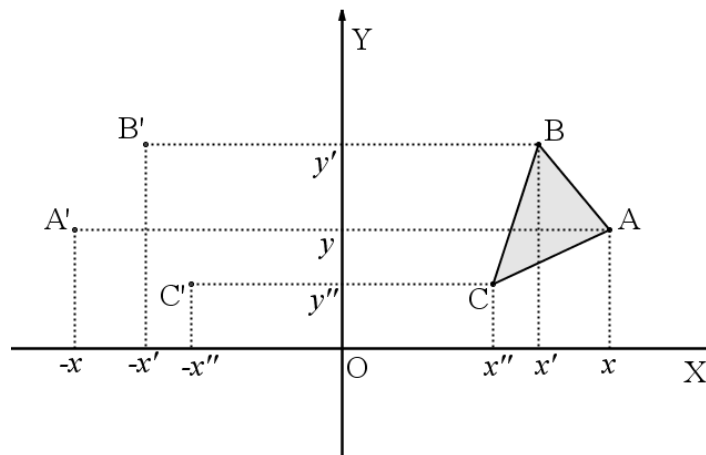
Figura 19 - Triângulo (ABC) no primeiro quadrante



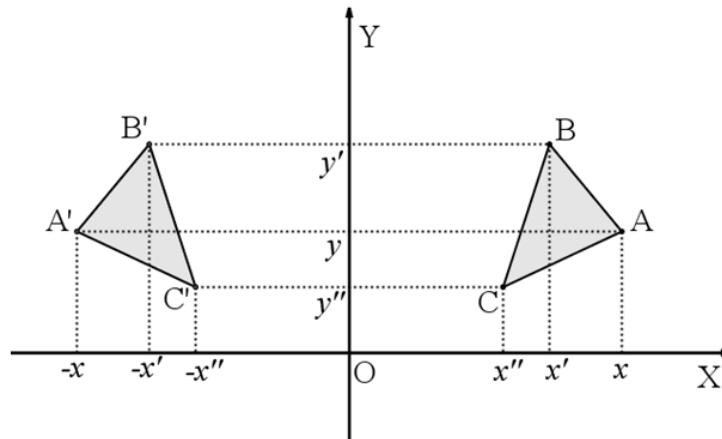
1º passo – A reflexão está acontecendo em relação ao eixo das ordenadas, portanto os valores do eixo das abscissas são opostos, se $A = (x, y)$ então $A' = (-x, y)$, Figura 20, quanto às ordenadas, estas não sofrem alterações.

Figura 20 - Ponto A refletido

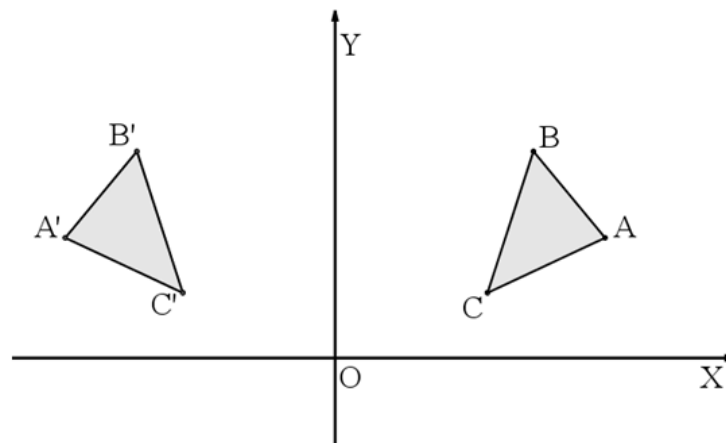
2º passo – Repetir o procedimento do 1º passo para os outros vértices da figura, onde $B = (x', y')$ e $C = (x'', y'')$ terão suas imagens em $B' = (-x', y')$ e $C' = (-x'', y'')$, observados na Figura 21.

Figura 21 - Vértices do triângulo (ABC) refletidos

3º passo – Traçar segmentos de retas entre os vértices transladados, como ilustrado na Figura 22.

Figura 22 - Triângulo ($A'B'C'$) refletido com as coordenadas

O triângulo ($A'B'C'$) é a imagem refletida do triângulo (ABC), onde os valores das abscissas são opostos para pontos simétricos, Figura 23.

Figura 23 – Triângulo ($A'B'C'$) refletido sem as coordenadas

As atividades a seguir são sugestões que permitem a prática dos procedimentos apresentados anteriormente.

Atividade 04 : Conhecendo os vértices $A = (x, 0)$ e $B = (-x, 0)$ de um triângulo equilátero, determine as coordenadas do vértice C .

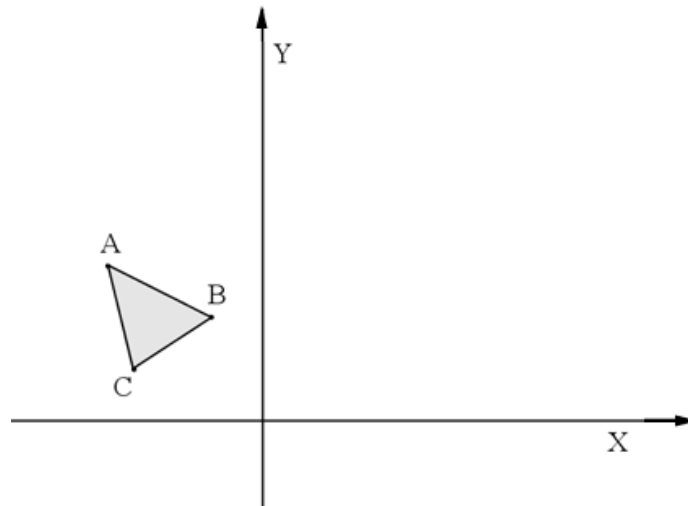
Atividade 05 : Dado o paralelogramo de vértices $A = (2, 3)$, $B = (5, 4)$, $C = (5, 2)$ e $D = (2, 1)$, determine a figura simétrica em relação ao eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas passando pelo ponto $(-1, 0)$.

Atividade 06 : Determine as coordenadas do simétrico do ponto $A = (6, 1)$ em relação à reta $y = x - 1$.

4.1.3 Simetria de Reflexão Utilizando Régua e Compasso

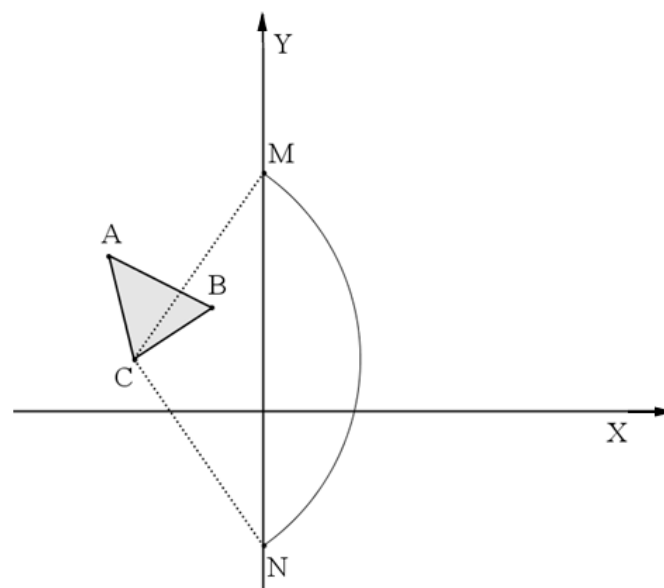
Utilizando régua e compasso, vamos descrever como encontrar a figura simétrica do triângulo (ABC), dado na Figura 24, em relação ao eixo OY . Para isso, serão necessários 6 passos:

Figura 24 - Triângulo (ABC) no segundo quadrante



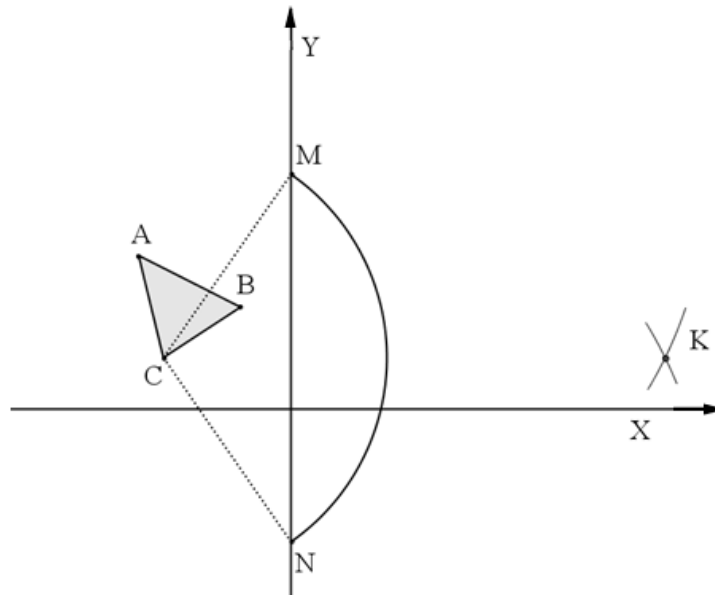
1º passo – Com a ponta seca do compasso centrada no ponto C , traçar um arco de circunferência que intercepta o eixo OY em dois lugares, encontrando, assim, os pontos auxiliares M e N , Figura 25.

Figura 25 - Localizando pontos M e N



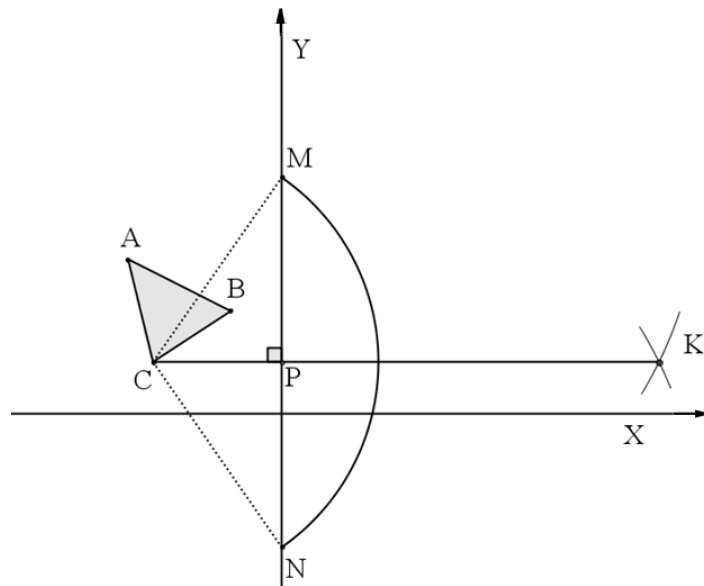
2º passo – Com a ponta seca do compasso centrada em M e posteriormente em N , traçar arcos de circunferência, de mesmo raio (Figura 26), que se interceptem em um ponto K .

Figura 26 - Localizando o ponto K



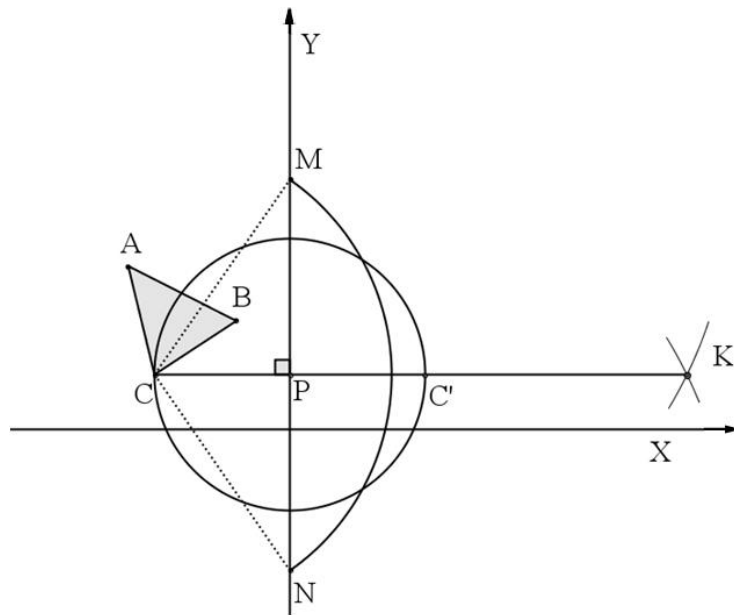
3º passo – Traçar um segmento de reta pelos pontos C e K , perpendicular ao eixo OY e paralelo ao eixo OX , definindo assim o ponto P sobre OY , conforme Figura 27.

Figura 27 - Segmento \overline{CK} paralelo ao eixo OX e determinando P



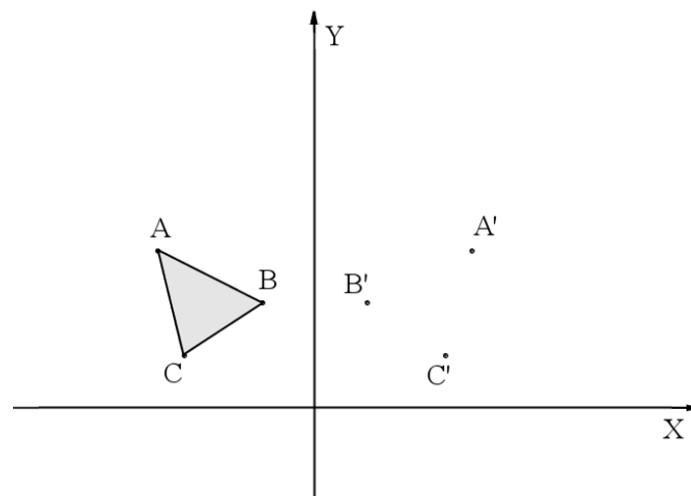
4º passo – Com a ponta seca do compasso em P e abertura até o ponto C , traçar uma circunferência γ de raio \overline{PC} que intercepte o segmento \overline{CK} . Essa intercessão será o ponto C' , simétrico ao ponto C , conforme Figura 28.

Figura 28 - Ponto C' simétrico de C



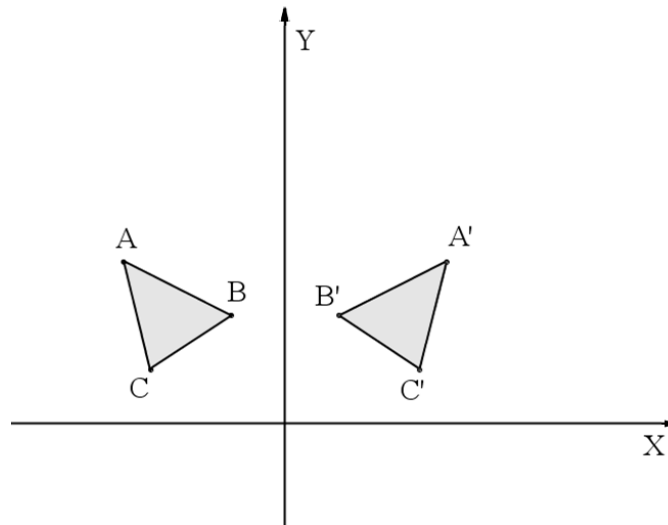
5º Passo - Repetindo os passos anteriores para os dois outros vértices da Figura 29, encontraremos os vértices A' e B' .

Figura 29 - Pontos A' , B' e C' simétricos de A , B e C



6º Passo - Com segmentos de retas traçados entre os pontos simétricos A' , B' e C' , obteremos o triângulo refletido ($A'B'C'$), simétrico ao triângulo (ABC), como mostrado na Figura 30.

Figura 30 - Triângulo refletido ($A'B'C'$) simétrico ao triângulo (ABC)



Podemos ainda observar que uma imagem é simétrica pela reflexão, se esta for o reflexo da imagem original, isto é, existe um espelho posicionado no lugar do eixo OY .

A seguir apresentamos exemplos de atividades utilizando régua e compasso na simetria de reflexão. A primeira apresenta a resolução.

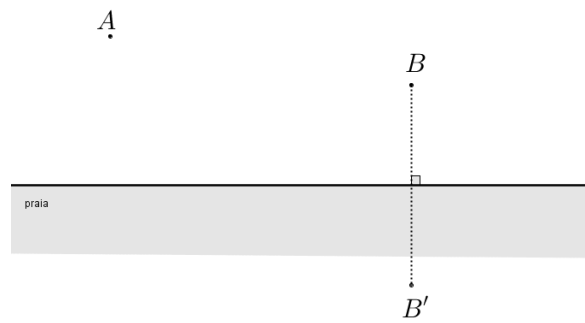
Atividade 07 : Uma embarcação pesqueira, localizada no ponto A , deseja deixar em um ponto P da praia sua carga e retornar ao encontro de outra embarcação localizada no ponto B , Figura 31. Determinar o ponto P , sobre a praia, de forma que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja mínimo.

Figura 31 – Posição dos pontos A e B em relação a linha da praia

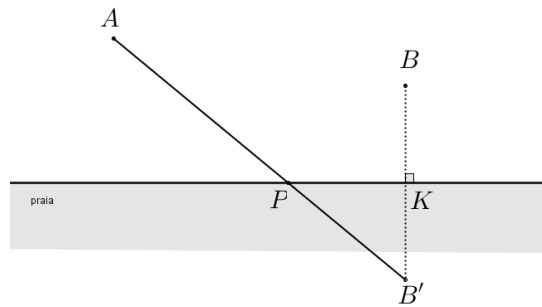


Solução:

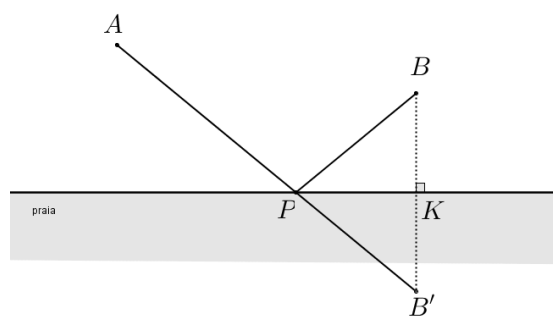
1º Passo - Determinar o simétrico de um dos pontos em relação à linha da praia, como apresentado na figura 31. Dessa maneira, a linha de praia será perpendicular ao segmento formado entre B e seu simétrico B' , Figura 32.

Figura 32 – Localização do simétrico de B

2º Passo – Traçar o segmento $\overline{AB'}$ localizando o ponto procurado P sobre a linha da praia, Figura 33.

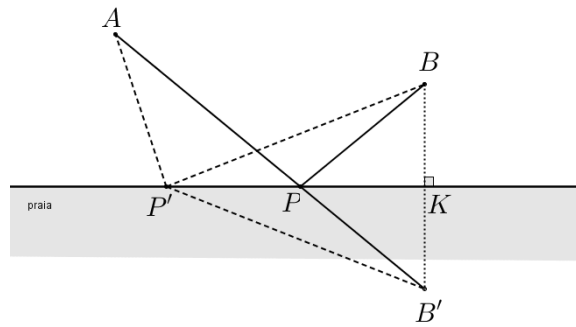
Figura 33 – Segmento $\overline{AB'}$ determinando P 

3º passo – Traçar o segmento \overline{PB} , visualizando assim o trajeto procurado $\overline{AP} + \overline{PB}$, conforme indicado na Figura 34.

Figura 34 – Segmento \overline{PB} 

A seguir mostraremos uma verificação feita com o auxílio da Figura 35 para comprovar o resultado da atividade 07.

Dado um ponto P' , pertencente à linha da praia onde P' é diferente de P .

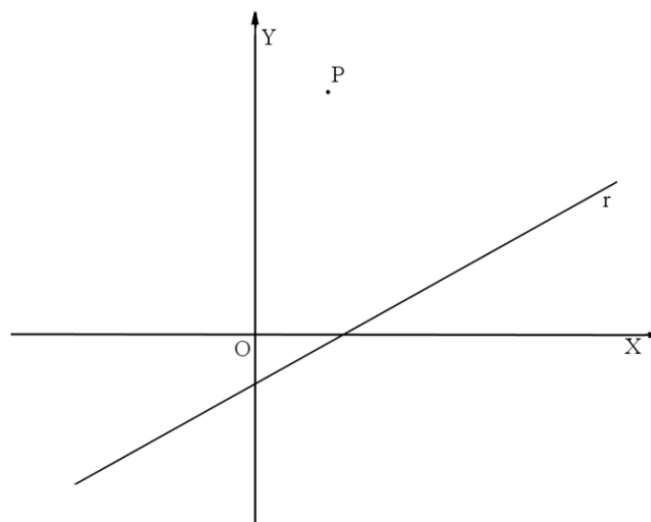
Figura 35 – Ponto $P' \neq P$ 

Como a linha da praia é a mediatriz do segmento $\overline{BB'}$, temos que $\overline{PB} \equiv \overline{PB'}$, $\overline{P'B} \equiv \overline{P'B'}$ e $\overline{BK} \equiv \overline{B'K}$, logo temos $\overline{AP'} + \overline{P'B} \equiv \overline{AP'} + \overline{P'B'}$. Os triângulos (PBK) e $(PB'K)$ são congruentes, pois $PB \equiv PB'$, $BK \equiv B'K$ e PK é comum, logo os ângulos \widehat{PBK} e $\widehat{PB'K}$ têm a mesma medida, concluímos assim que os pontos A , P e B' são colineares, pela desigualdade triangular $\overline{AP'} + \overline{P'B'} > \overline{AP} + \overline{PB'}$.

Atividade 08 : Determine as coordenadas do ponto K , sobre o eixo OX do plano cartesiano, de forma que a distância entre $\overline{AK} + \overline{KB}$ seja a menor possível. Utilize $A = (1, 4)$ e $B = (6, 2)$.

Atividade 09 : Utilizando os instrumentos de desenho, construa uma circunferência simétrica por reflexão à circunferência de centro $C=(2, 5)$ e raio igual a 3 em relação ao eixo OX .

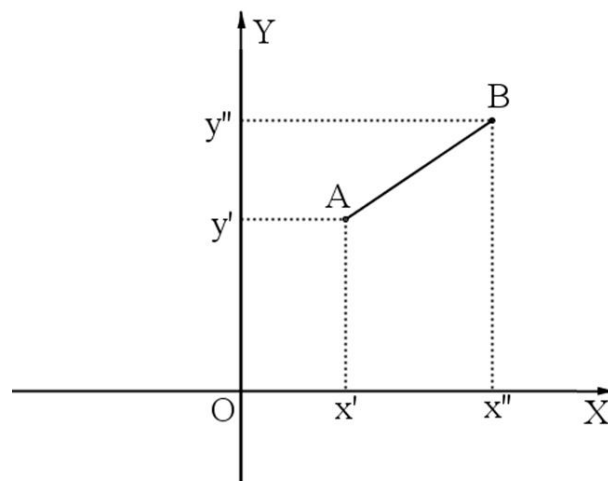
Atividade 10 : Utilizando os instrumentos de desenho, determine a posição do simétrico do ponto P em relação à reta r no plano cartesiano apresentado na Figura 36.

Figura 36 – Plano Cartesiano com reta r e ponto P 

4.2 SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO

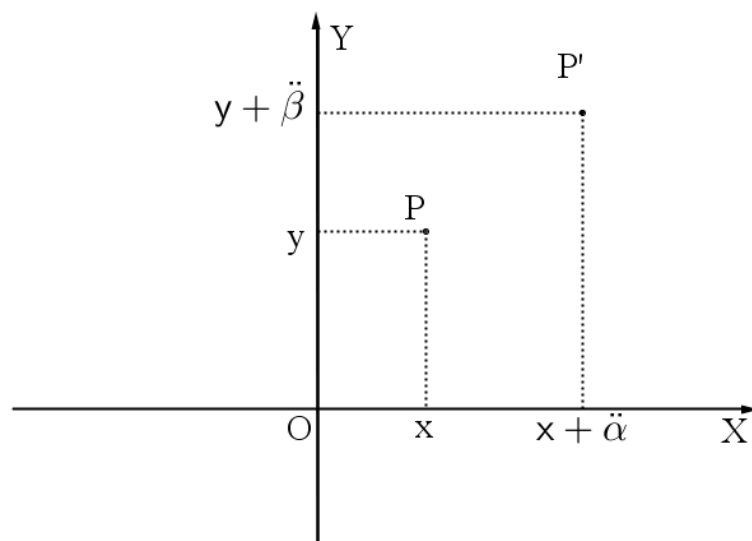
4.2.1 Definição - Simetria de translação é uma transformação no plano π onde uma função bijetora $f: \pi \rightarrow \pi$ preserva distâncias e associa cada ponto P do plano π ao ponto $f(P) = P' = P + v$, onde v é um segmento de reta orientado de A para B , assim $\overline{PP'}$ terá mesma medida, direção e sentido de \overline{AB} , Figura 37 e Figura 38. A simetria de translação acontece em relação a uma distância fixa e orientada.

Figura 37 – Coordenadas dos pontos A e B , onde $\overline{AB} = v$



No Plano Cartesiano $v = \overline{AB} = (\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}) = (x'' - x', y'' - y')$, então, para cada $P = (x, y)$, tem-se $f(P) = P' = (x + \ddot{\alpha}, y + \ddot{\beta})$, logo a $d(PP') = d(AB)$.

Figura 38 - Translação do ponto P em P'



Pelo apresentado na definição 4.2.1, da simetria de translação, assim como na simetria de reflexão, preserva-se distâncias entre pontos. Sejam dado dois pontos quaisquer do plano, $T = (x_1, y_1)$ e $R = (x_2, y_2)$, com seus simétricos em relação ao eixo OY , sendo $T' = (x_1 + \ddot{\alpha}, y_1 + \ddot{\beta})$ e $R' = (x_2 + \ddot{\alpha}, y_2 + \ddot{\beta})$.

Hipótese: $\overline{T'R'}$ é simétrico de \overline{TR}

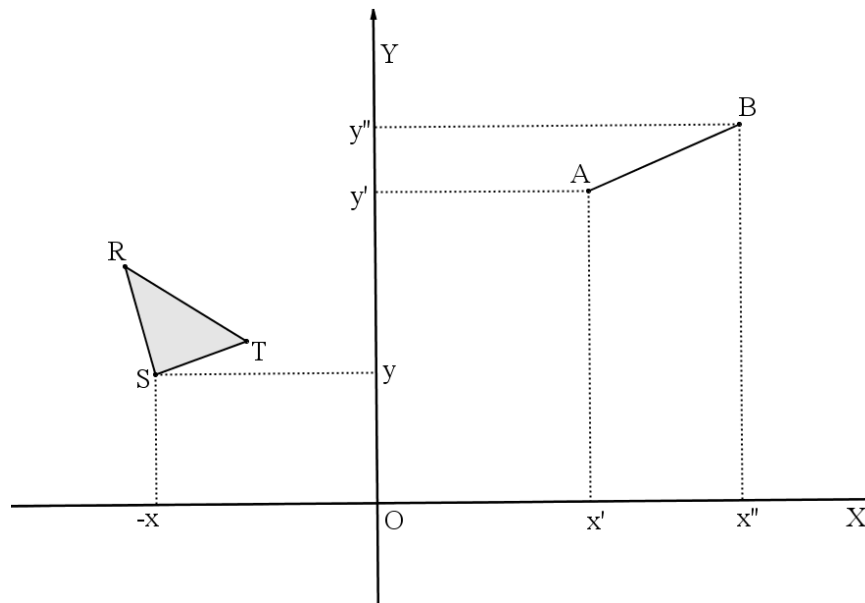
Tese: $d(TR) = d(T'R')$

$$\begin{aligned}
 \text{Verificação: } d(TR) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\
 &= \sqrt{\{x_2^2 + [2 \cdot x_2 \cdot (-x_1)] + (-x_1)^2\} + \{y_2^2 + [2 \cdot y_2 \cdot (-y_1)] + (-y_1)^2\}} = \\
 &= \sqrt{\{x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_1^2\} + \{y_2^2 - 2 \cdot y_2 \cdot y_1 + y_1^2\}} = \\
 &= \sqrt{\{x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot (-x_1)\} + (-x_1)^2 + \{y_2^2 - 2 \cdot y_2 \cdot y_1 + y_1^2\}} = \\
 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\
 &= \sqrt{(x_2 + \ddot{\alpha} - \ddot{\alpha} - x_1)^2 + (y_2 + \ddot{\beta} - \ddot{\beta} - y_1)^2} = \\
 &= \sqrt{(x_2 + \ddot{\alpha} - x_1 - \ddot{\alpha})^2 + (y_2 + \ddot{\beta} - y_1 - \ddot{\beta})^2} = \\
 &= \sqrt{[(x_2 + \ddot{\alpha}) - (x_1 + \ddot{\alpha})]^2 + [(y_2 + \ddot{\beta}) - (y_1 + \ddot{\beta})]^2} = d(T'R')
 \end{aligned}$$

4.2.2 Simetria de Translação Utilizando as Coordenadas Cartesianas

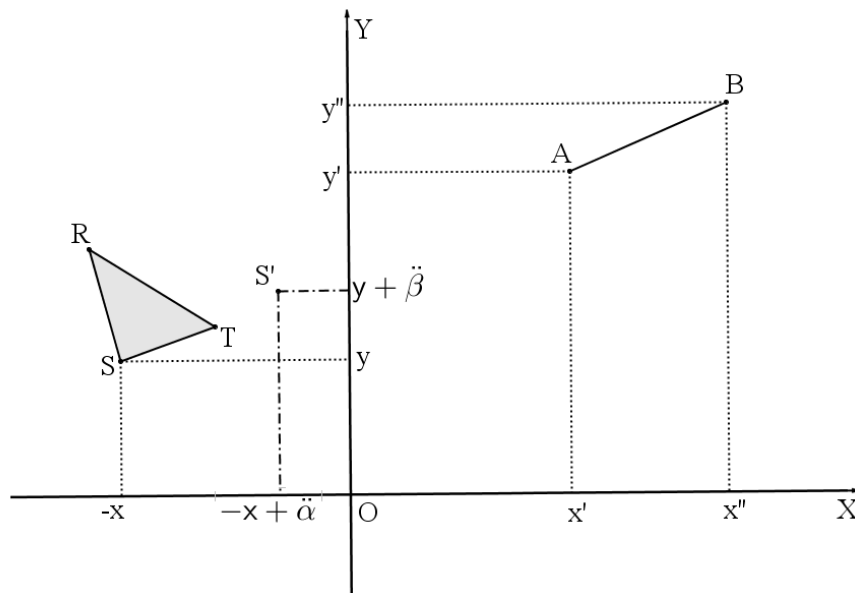
Prosseguimos descrevendo como encontrar a figura simétrica do triângulo (RST) , utilizando a translação, onde o segmento orientado $\overline{AB} = v = (\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}) = (x'' - x', y'' - y')$, Figura 39.

Figura 39 - Triângulo (RST) com segmento orientado \overline{AB}

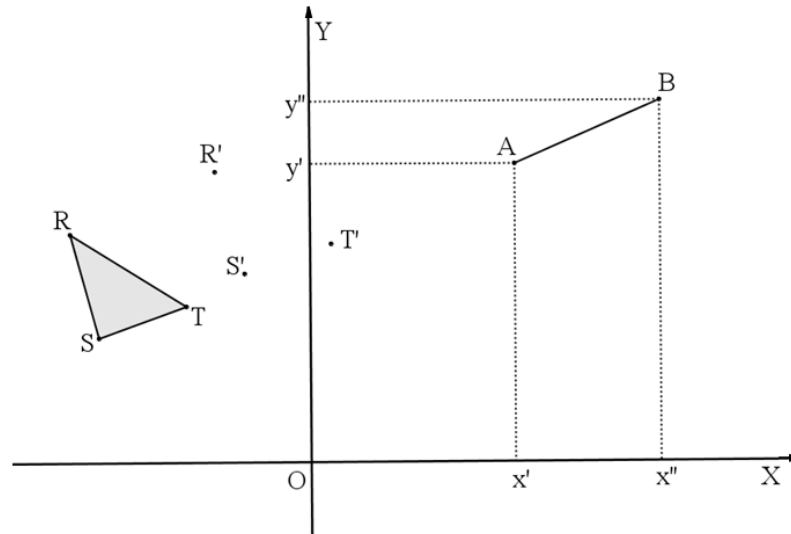


1º passo – Seja o vértice $S = (-x, y)$ a ser transladado para $S' = (-x + \ddot{\alpha}, y + \ddot{\beta})$, onde $\ddot{\alpha} = (x'' - x')$ e $\ddot{\beta} = (y'' - y')$, Figura 40.

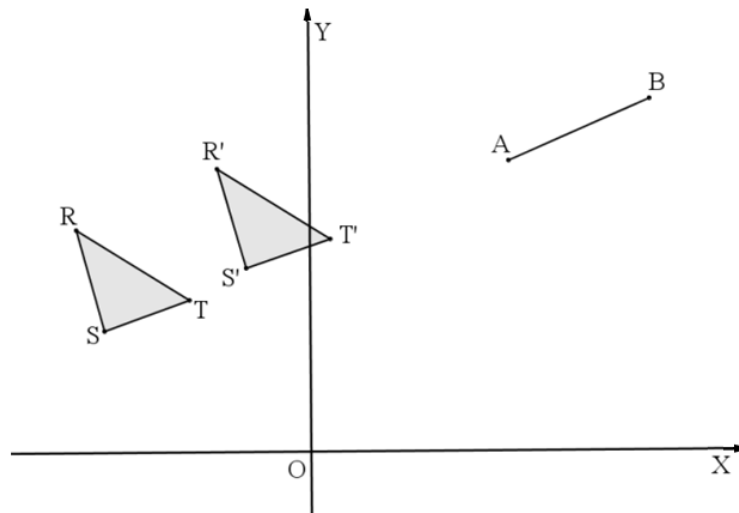
Figura 40 - Ponto S transladado para S'



2º passo – Repetir o procedimento do 1º passo para os outros vértices da figura $T = (-x_1, y_1)$ e $R = (-x_2, y_2)$, obtendo, respectivamente, $T' = (-x_1 + \ddot{\alpha}, y_1 + \ddot{\beta})$ e $R' = (-x_2 + \ddot{\alpha}, y_2 + \ddot{\beta})$, Figura 41.

Figura 41 - Pontos R e T transladados para R' e T' 

3º passo – Traçar segmentos de retas entre os vértices transladados, Figura 42.

Figura 42 - Triângulo $(R'S'T')$ transladado

O triângulo $(R'S'T')$ é a imagem transladada do triângulo (RST) , α unidades na horizontal e β unidades na vertical.

A sequência de atividades a seguir busca uma reflexão das ideias apresentadas no texto 4.2.2.

Atividade 11: Determine a equação da reta transladada, imagem da reta $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, onde $v = (-1, 1)$.

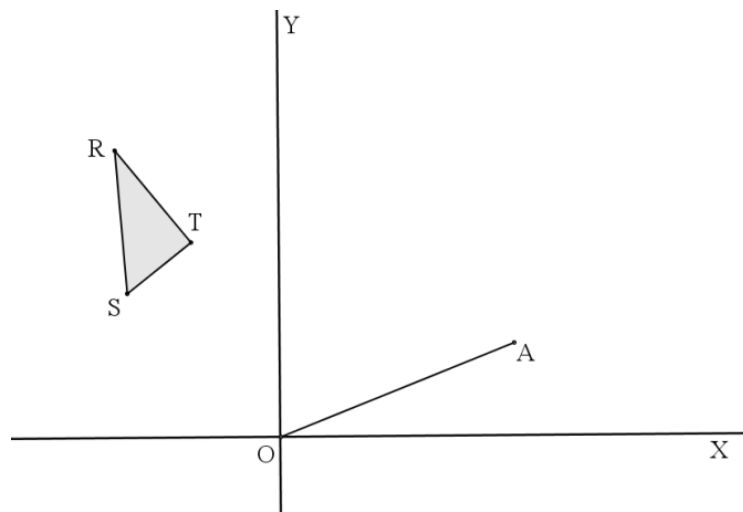
Atividade 12: Utilizando a simetria de translação com o segmento orientado \overline{AB} definido pelos pontos $A = (4, 1)$ e $B = (0, 4)$, determine os pontos simétricos dos vértices $M = (2, 0)$, $N = (0, 2)$, $P = (-2, 0)$ e $Q = (0, -2)$.

Atividade 13: Determine as coordenadas dos vértices do triângulo (ABC) onde $A = (2, 3)$, $B = (1, 2)$ e $C = (4, 1)$ após um reflexão em relação ao eixo OX do sistema de coordenadas cartesianas seguida de uma translação com um segmento orientado \overline{MN} definido por $M = (-5, 4)$ e $N = (0, 4)$.

4.2.3 Simetria de Translação Utilizando Régua e Compasso

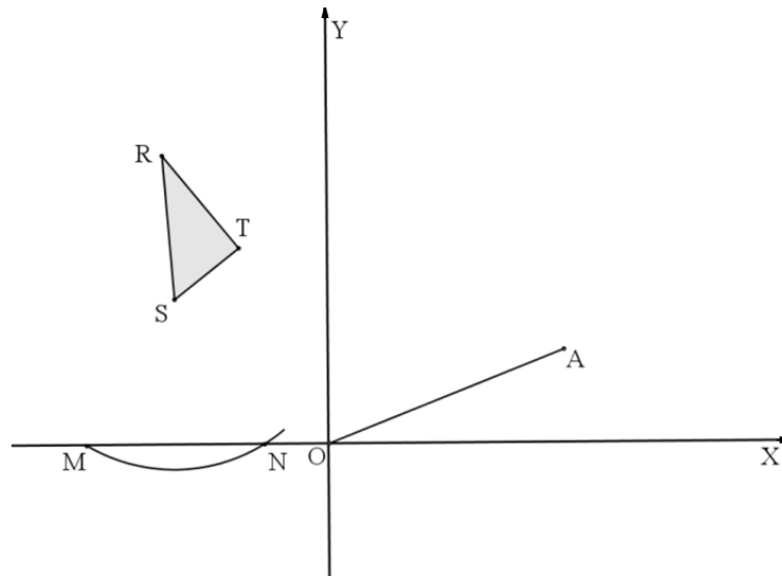
Utilizando régua e compasso, vamos descrever como encontrar a figura simétrica do triângulo (RST) pela translação, utilizando \overline{OA} como referência para a obtenção da direção, do sentido e do deslocamento dos pontos, Figura 43.

Figura 43 - Triângulo (RST) com segmento orientado \overline{OA}



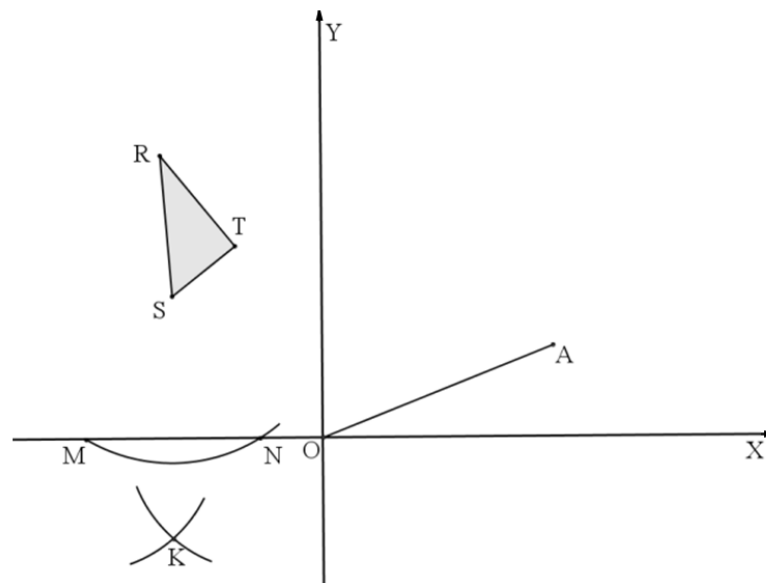
1º passo – Dado S como um dos vértices, com abertura qualquer no compasso, traçar um arco de circunferência que intercepta os eixos OX em dois pontos auxiliares M e N , Figura 44.

Figura 44 – Localizando pontos auxiliares M e N



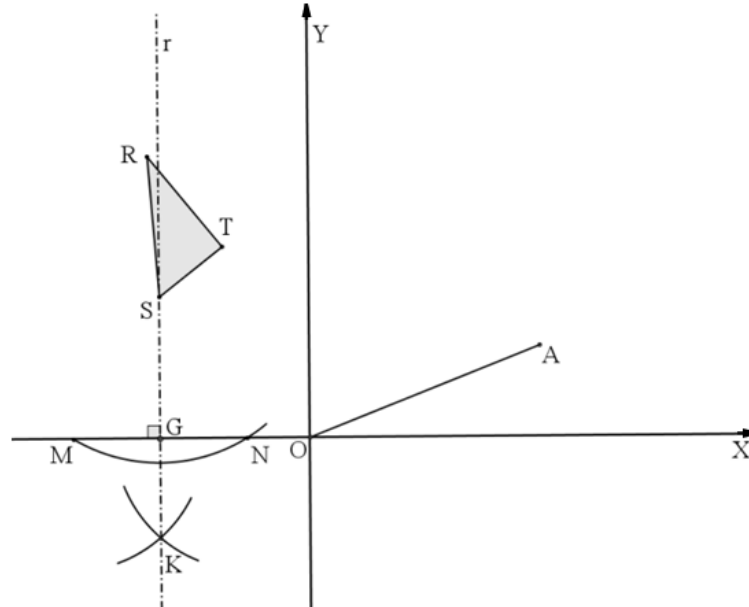
2º passo – Construir dois arcos de circunferências de mesmo raio centrado em M e N localizando, assim, o ponto K , Figura 45.

Figura 45 – Localização do ponto K



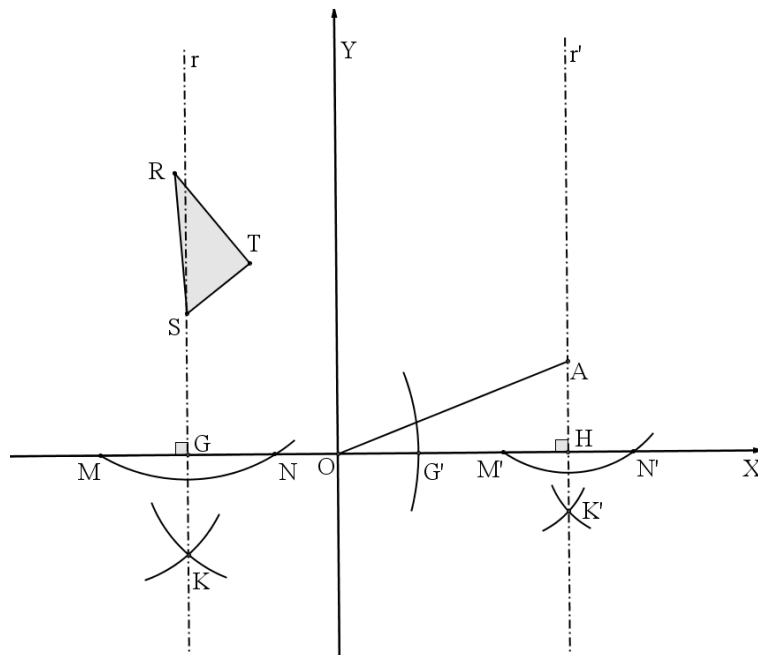
3º passo – Construir uma reta r passando pelos pontos S e K , perpendicular ao eixo X no ponto G , Figura 46.

Figura 46 - Localização do ponto G



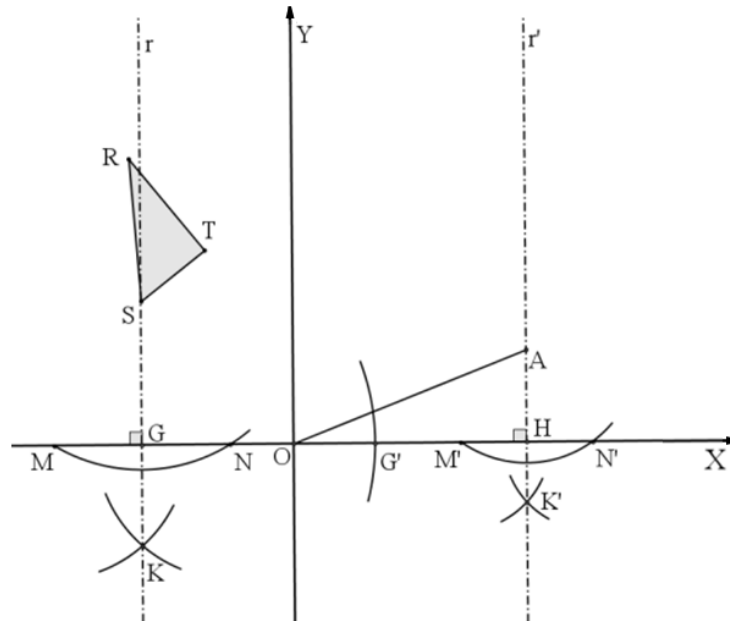
4º passo – Repetir os três primeiros passos para o ponto A em relação ao eixo OX , obtendo, assim, o ponto H , Figura 47.

Figura 47 - Localização do ponto H



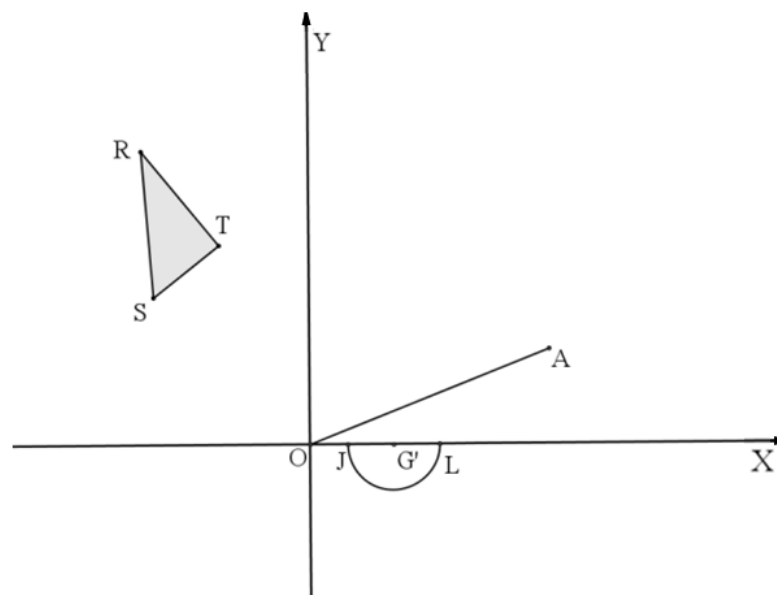
5º passo – Com o \overline{OH} conhecido, temos a medida padrão para o deslocamento na horizontal. Ponta seca do compasso no ponto G , com abertura igual a \overline{OH} , obtermos o ponto G' , ($\overline{OH} = \overline{GG'}$), Figura 48.

Figura 48 - Localização do ponto G'



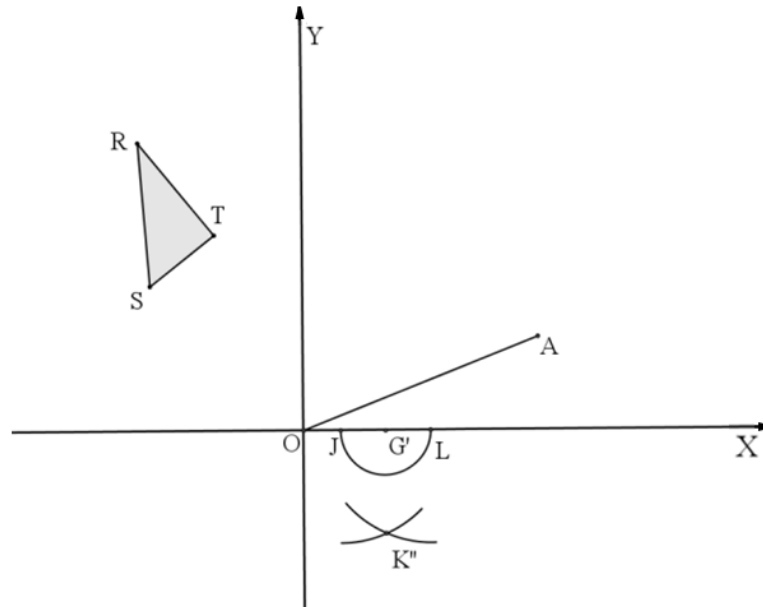
6º passo – Por G' , traçar uma reta perpendicular ao eixo OX . Com o compasso centrado em G' , com abertura qualquer, determinar os pontos auxiliares J e L sobre o eixo OX , Figura 49.

Figura 49 - Pontos auxiliares J e L



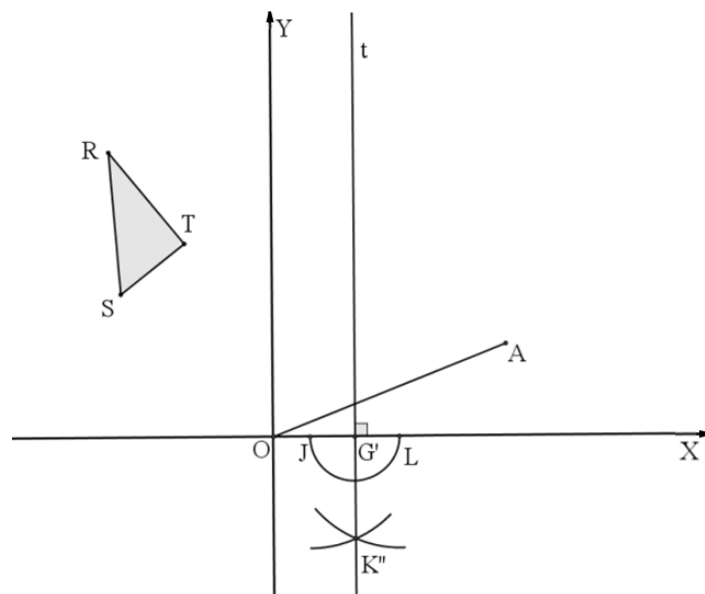
7º passo - Construir dois arcos de circunferências de mesmo raio centrados em J e L localizando assim o ponto K'' , Figura 50.

Figura 50 – Determinação de K''



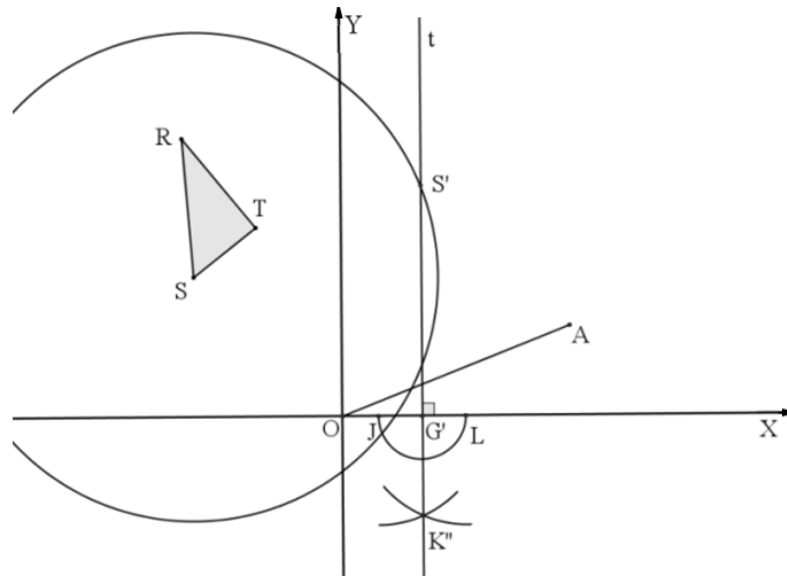
8º passo – Construir uma reta t , perpendicular ao eixo OX , passando pelos pontos G' e K'' , Figura 51.

Figura 51 – Reta t perpendicular ao eixo OX



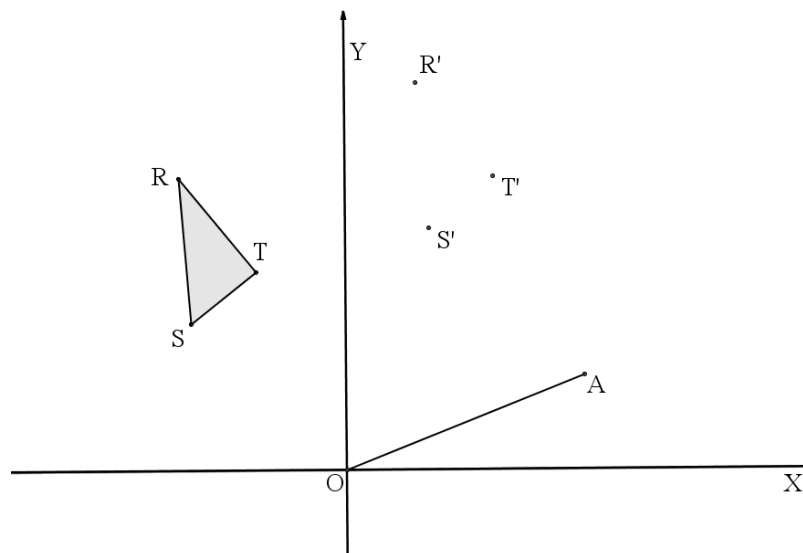
9º passo – Com a ponta seca do compasso no ponto S , traçar uma circunferência de raio \overline{OA} , localizando, assim, o ponto S' , Figura 52.

Figura 52- Localizando ponto S' transladado de S



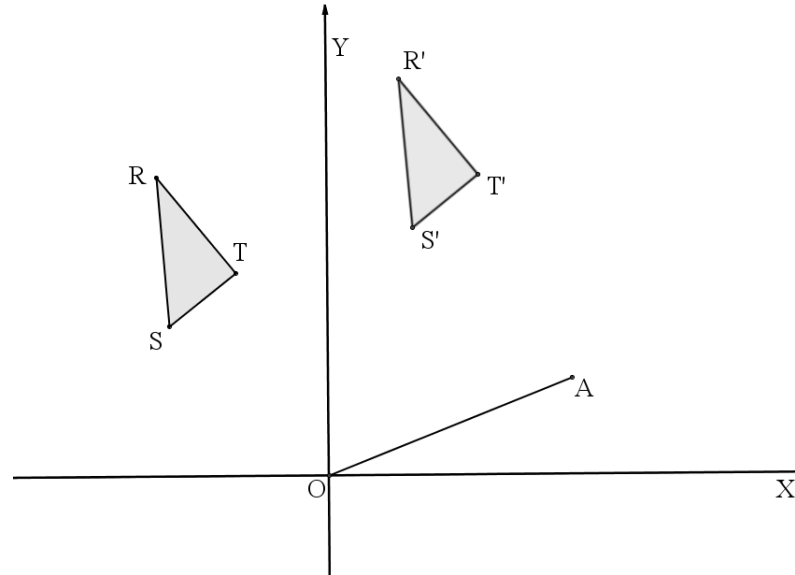
10º passo - Repetir os passos do 1º ao 9º para os vértices R e T , localizando os pontos transladados R' e T' , Figura 53.

Figura 53 – Localizando pontos R' e T'



11º passo - Traçar segmentos de retas entre os pontos trasladados, imagens dos vértices R, S e T , obtendo o triângulo $(R'S'T')$, Figura 54.

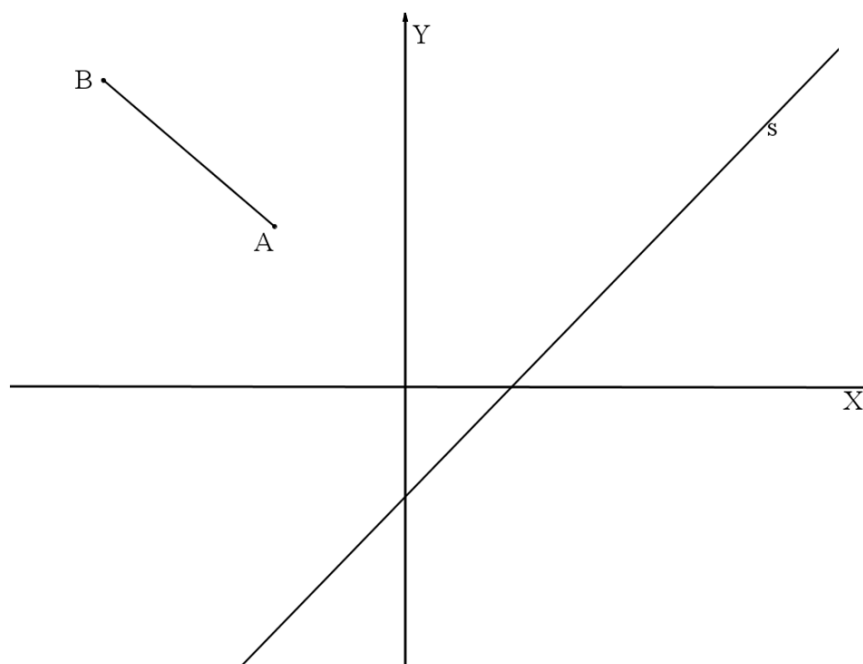
Figura 54 - Triângulo $(R'S'T')$ trasladado do triângulo (RST)



A sequência de atividades, a seguir, proporciona a reflexão das ideias apresentadas no item texto 4.2.3.

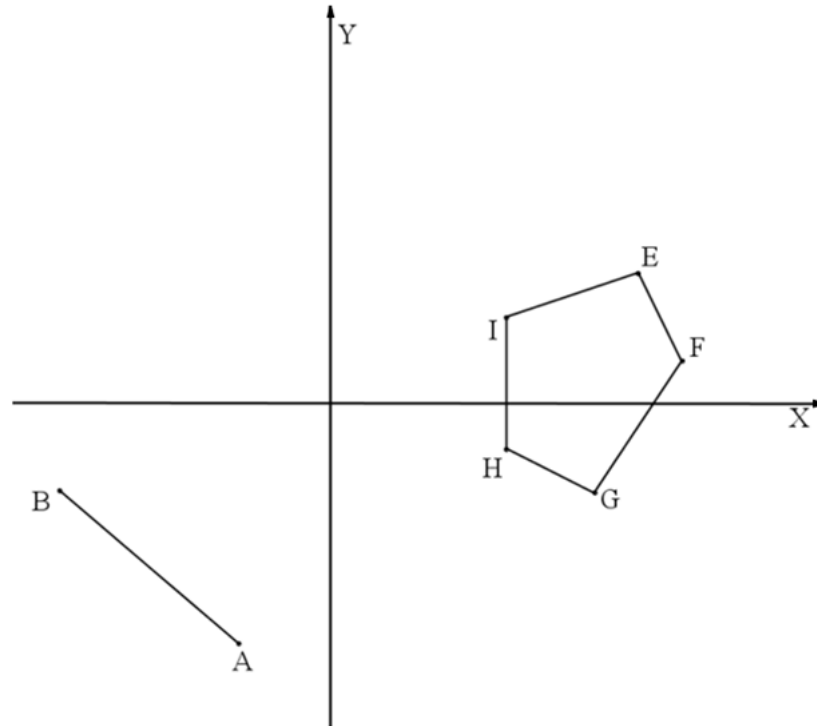
Atividade 14: Com o uso de instrumentos de desenho, construa a reta s' trasladada de s , com $v = \overline{AB}$, utilizando a Figura 55 como referência.

Figura 55 – Plano Cartesiano com reta s e segmento \overline{AB}



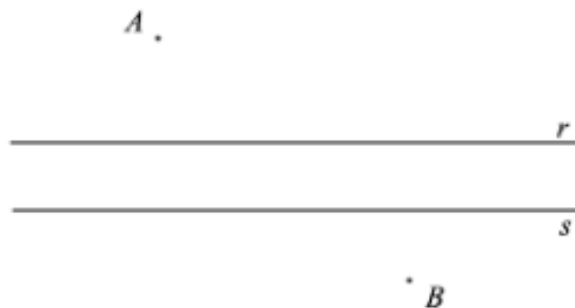
Atividade 15 : Dada a Figura 56 e utilizando o segmento orientado \overline{AB} , translade o polígono ($EFGHI$) com o auxílio dos instrumentos de desenho.

Figura 56 – Plano Cartesiano com polígono ($EFGHI$) e segmento \overline{AB}



Atividade 16 : [24], p.87 – Na Figura 57, os pontos A e B representam cidades, e as retas paralelas r e s representam um rio. Determine a posição de uma ponte MN (M sobre r e N sobre s) perpendicular às margens, de forma que se tenha $AM = NB$.

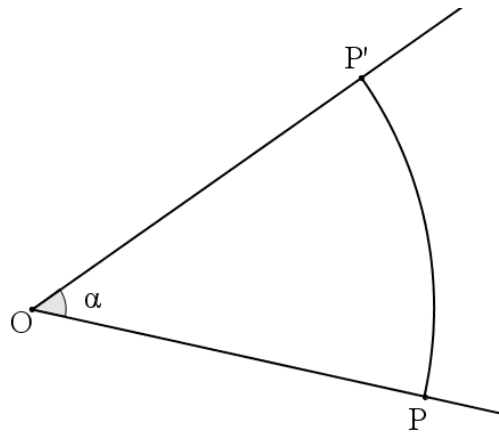
Figura 57 – Figura com $r//s$



4.3 SIMETRIA DE ROTAÇÃO

4.3.1 Definição - Seja O um ponto fixo no plano π e α um ângulo de vértice em O . A rotação em torno do ponto O é uma transformação no plano π , onde uma função bijetora $f: \pi \rightarrow \pi$ preserva distâncias e associa cada ponto P do plano, com $P \neq O$, ao ponto $f(P) = P'$, onde P' é chamado imagem de P , os segmentos \overline{OP} e $\overline{OP'}$ são de mesma medida e $\alpha = \widehat{POP'}$, Figura 58.

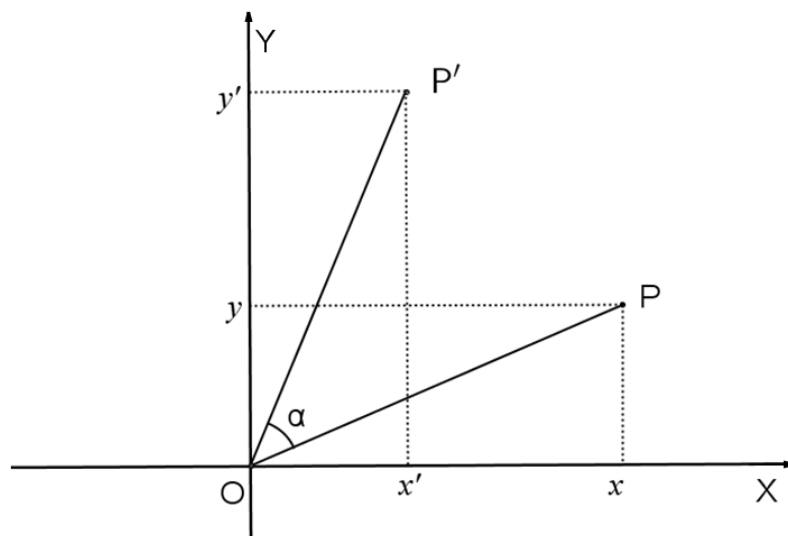
Figura 58 - Rotação do ponto P para P'



A simetria de rotação acontece em relação a um ângulo e, para que fique bem definida, devemos estabelecer um sentido de rotação: o ângulo α deve ser orientado em sentido anti-horário.

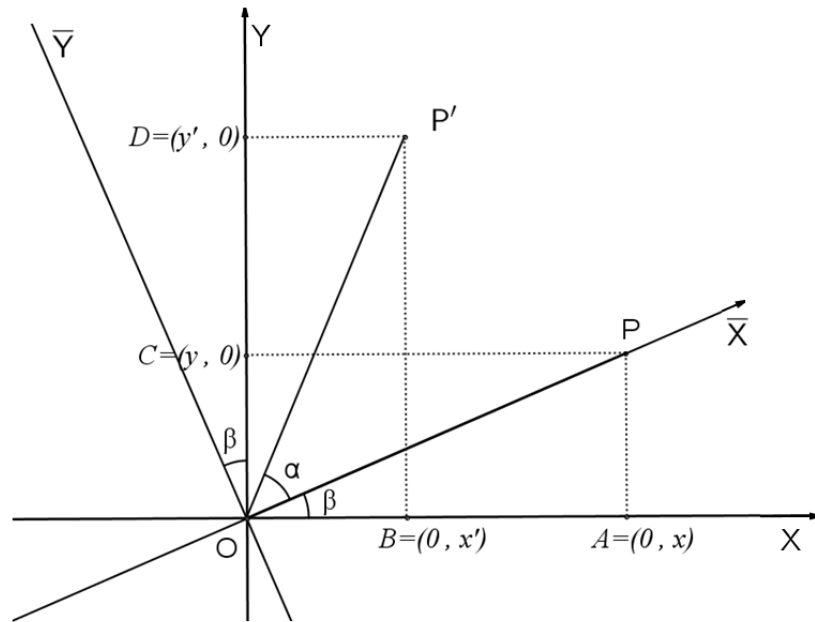
Seja o plano cartesiano com $P = (x, y)$ definido, a rotação de centro em O e ângulo α transforma P no ponto $P' = (x', y')$, conforme Figura 59.

Figura 59 – Ponto P e o simétrico P' no Plano Cartesiano



Uma rotação no sistema de eixos OXY , centrado em $O = (0,0)$, sobre um ângulo α , no sentido anti-horário, pode ser pensado como um movimento giratório que leva os eixos OXY para um novo sistema de eixos $O\bar{X}\bar{Y}$, Figura 60.

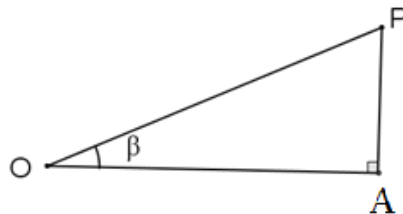
Figura 60 - Sistema de eixos rotacionados



Essa rotação leva o eixo OX ao eixo $O\bar{X}$, o eixo OY ao eixo $O\bar{Y}$ e preserva as distâncias entre \overline{OP} e $\overline{OP'}$, ($\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$).

Aplicando as razões trigonométricas, em relação ao sistema de eixos OXY , no triângulo retângulo (OPA), Figura 61, teremos:

Figura 61 – Triângulo retângulo (OPA)

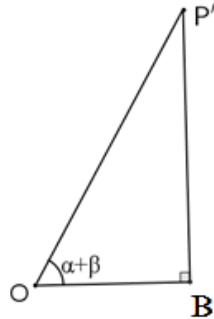


$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{y}{\overline{OP}} \Rightarrow y = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen} \beta \quad (1)$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{x}{\overline{OP}} \Rightarrow x = \overline{OP} \cdot \operatorname{cos} \beta \quad (2)$$

Novamente aplicamos as razões trigonométricas, agora no triângulo retângulo (OBP'), Figura 62:

Figura 62 – Triângulo retângulo (OBP')



$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{P'B}}{\overline{OP'}} = \frac{y'}{\overline{OP'}} \Rightarrow y' = \overline{OP'} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \Rightarrow y' = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad (3)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP'}} = \frac{x'}{\overline{OP'}} \Rightarrow x' = \overline{OP'} \cdot \operatorname{cos}(\alpha + \beta) \Rightarrow x' = \overline{OP} \cdot \operatorname{cos}(\alpha + \beta) \quad (4)$$

Das transformações trigonométricas⁴, sabemos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha \quad (5)$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (6)$$

Substituindo (5) em (3) e (6) em (4), teremos

$$y' = \overline{OP} \cdot (\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha) = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha \quad (7)$$

$$x' = \overline{OP} \cdot (\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) = \overline{OP} \cdot \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta - \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (8)$$

Nova substituição, agora (1) e (2) em (7) e (8), respectivamente,

$$y' = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \operatorname{cos}\alpha \quad (9)$$

$$x' = \overline{OP} \cdot \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta - \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = x \cdot \operatorname{cos}\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad (10)$$

Resumindo, o ponto P' , que é imagem do ponto P pela rotação tem suas coordenadas no sistema de eixos OXY sendo

$$P' = (x', y') = (x \cdot \operatorname{cos}\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha, x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \operatorname{cos}\alpha) \quad (11)$$

⁴ Ver [13]

Segundo a definição 4.3.1 da simetria de rotação, assim como das simetrias de reflexão e de translação, temos a preservação de distâncias entre pontos em relação a um ponto central O . Para verificar isso vamos assumir um ponto qualquer do plano $P = (x, y)$ com seu simétrico $P' = (x', y')$, dado em (11), em relação a um ângulo de rotação α no ponto O .

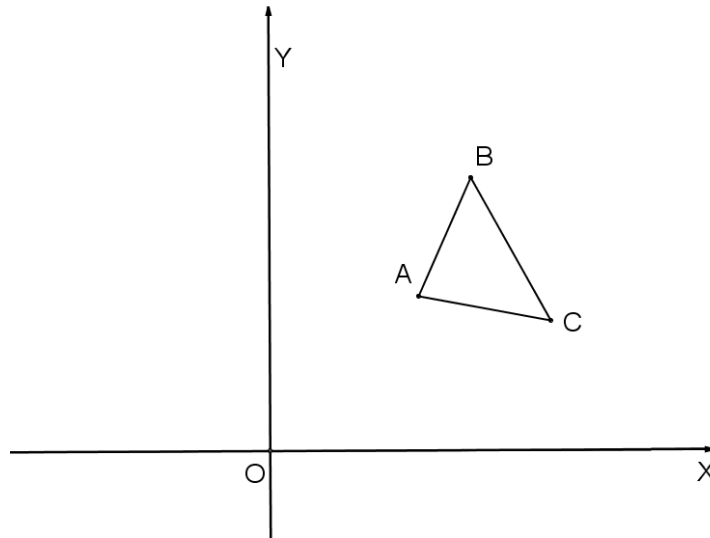
Hipótese: \overline{OP} é simétrico de $\overline{OP'}$

Tese: $d(OP') = d(OP)$

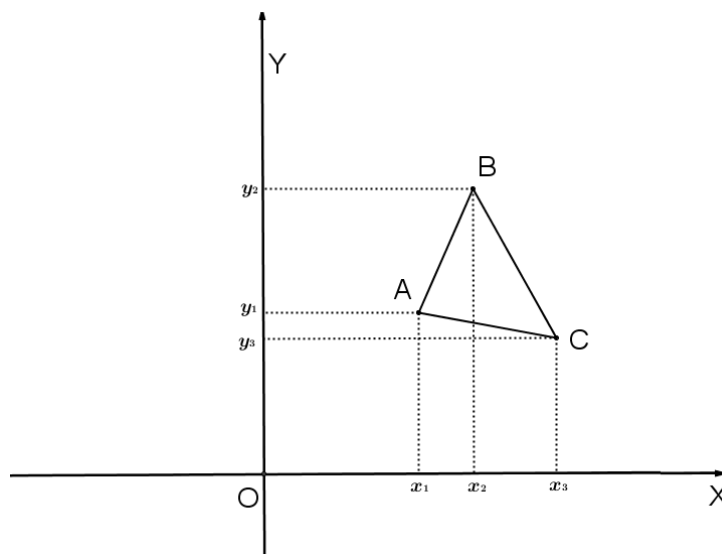
$$\begin{aligned}
 \text{Verificação: } d(OP') &= \sqrt{(x' - 0)^2 + (y' - 0)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \\
 &= \sqrt{(x \cdot \cos\alpha - y \cdot \text{sen}\alpha)^2 + (x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha)^2} = \\
 &= \sqrt{[(x \cdot \cos\alpha)^2 + 2 \cdot x \cdot \cos\alpha \cdot (-y \cdot \text{sen}\alpha) + (-y \cdot \text{sen}\alpha)^2] + [(x \cdot \text{sen}\alpha)^2 + 2 \cdot x \cdot \text{sen}\alpha \cdot y \cdot \cos\alpha + (y \cdot \cos\alpha)^2]} = \\
 &= \sqrt{[x^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha + y^2 \cdot \text{sen}^2\alpha] + [x^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha + y^2 \cdot \cos^2\alpha]} = \\
 &= \sqrt{x^2 \cdot \cos^2\alpha + y^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + x^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + y^2 \cdot \cos^2\alpha} = \\
 &= \sqrt{x^2 \cdot \cos^2\alpha + x^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + y^2 \cdot \text{sen}^2\alpha + y^2 \cdot \cos^2\alpha} = \\
 &= \sqrt{x^2 \cdot (\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + y^2 \cdot (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \\
 &= \sqrt{x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot 1} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = d(OP)
 \end{aligned}$$

4.3.2 Simetria de Rotação Utilizando as Coordenadas Cartesianas

Prosseguimos descrevendo como encontrar a figura simétrica do triângulo (ABC) , utilizando a rotação, Figura 63.

Figura 63 – Triângulo (ABC) a ser rotacionado

1º passo – Definir o ângulo de rotação $\alpha = 60^\circ$ e as coordenadas dos vértices do triângulo (ABC) , conforme Figura 64.

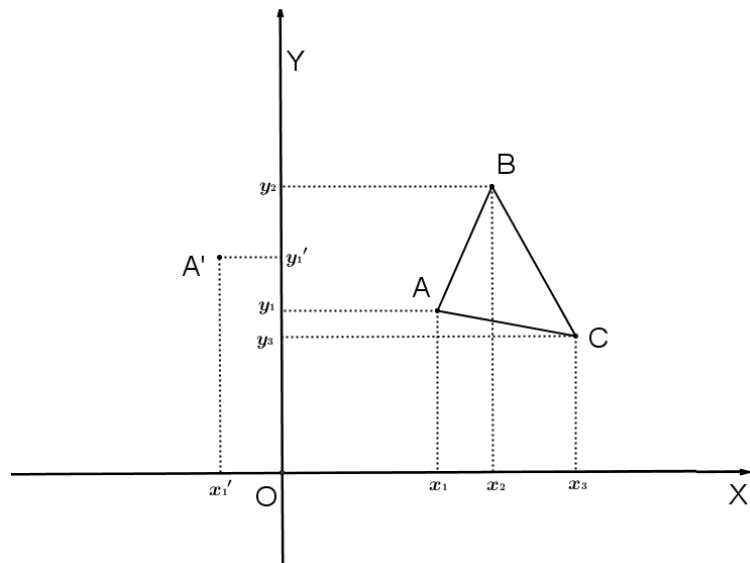
Figura 64 – Triângulo (ABC) a ser rotacionado com as coordenadas dos vértices

2º passo – Dado $A = (x_1, y_1)$ como um dos vértices, calcular o ponto $A' = (x_1', y_1')$, Figura 65, pelas fórmulas deduzidas em (11), onde:

$$x_1' = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sen\alpha = x_1 \cdot \cos 60^\circ - y_1 \cdot \sen 60^\circ = x_1 \cdot \frac{1}{2} - y_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

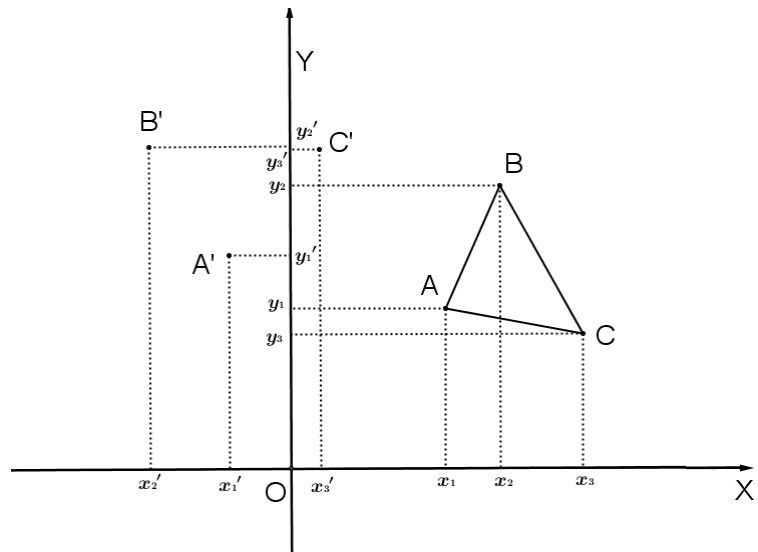
$$y_1' = x_1 \cdot \sen\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha = x_1 \cdot \sen 60^\circ + y_1 \cdot \cos 60^\circ = x_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y_1 \cdot \frac{1}{2}$$

Figura 65 – Localização do ponto A' rotacionado de A



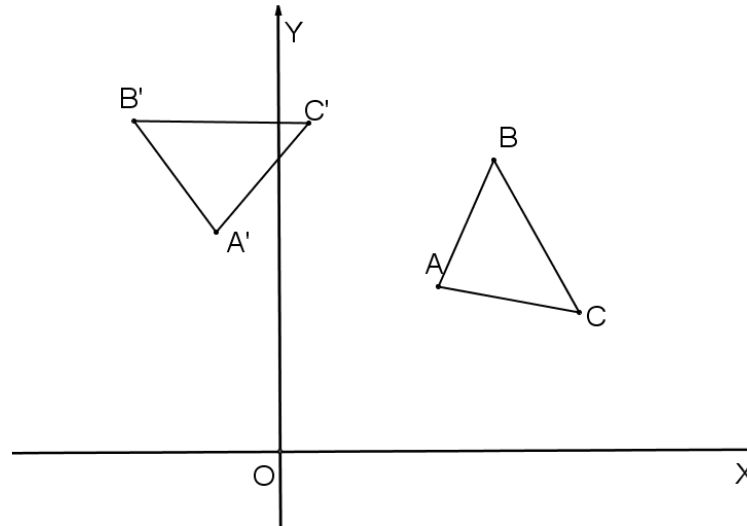
3º passo – Repetindo o mesmo procedimento para as coordenadas dos pontos B e C , encontramos suas imagens B' e C' , respectivamente, Figura 66.

Figura 66 – Localização dos pontos B' e C' rotacionados de B e C



4º passo – Traçar segmentos de retas entre os vértices, Figura 67.

Figura 67 – Triângulo ($A'B'C'$) rotacionado do triângulo (ABC)



A seguir apresentamos algumas atividades para fixação do conteúdo apresentado em 4.3.2.

Atividade 17 : O ponto $P = (5, 3)$ faz parte de uma figura que passou por uma rotação de centro $C = (1, 1)$. Determine o ponto, imagem de P , após a transformação, sabendo que ele possui ordenada -3 e ângulo de rotação menor que 180° .

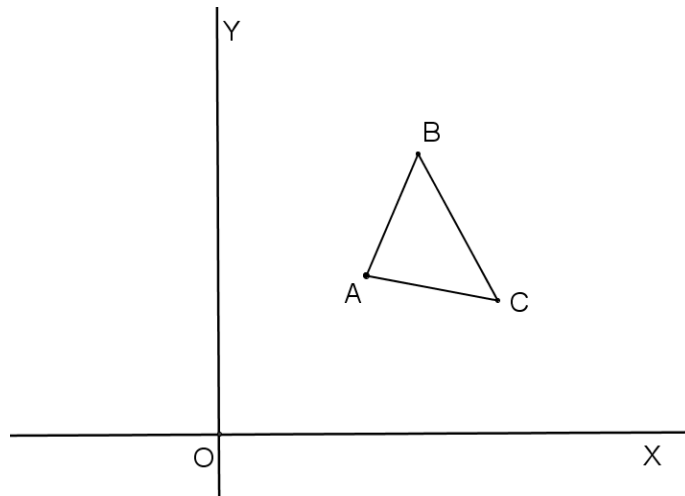
Atividade 18 : Determine as coordenadas dos pontos simétricos dos vértices do polígono ($ABCD$), onde $A = (0, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (6, 5)$ e $D = (2, 1)$ são rotacionados sob um ângulo de 135° no sentido anti-horário.

Atividade 19 : Faça no plano cartesiano a transformação de um triângulo (ABC) com $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$ e $C = (4, 1)$, após sofrer uma reflexão em relação ao eixo OY e uma rotação de 180° .

4.3.3 Simetria de Rotação Utilizando Régua, Compasso e Transferidor

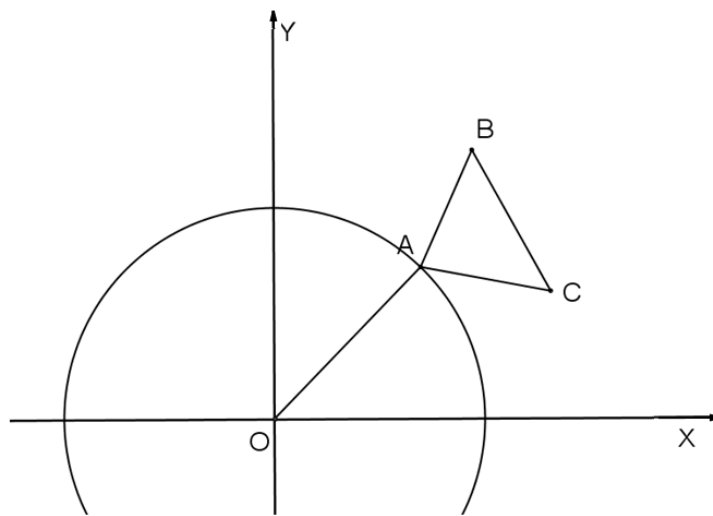
Utilizando régua, compasso e transferidor, descreveremos os passos para encontrar a figura simétrica do triângulo (ABC), Figura 68, pela rotação e utilizando $\alpha = 60^\circ$.

Figura 68 - Triângulo (ABC) a ser rotacionado



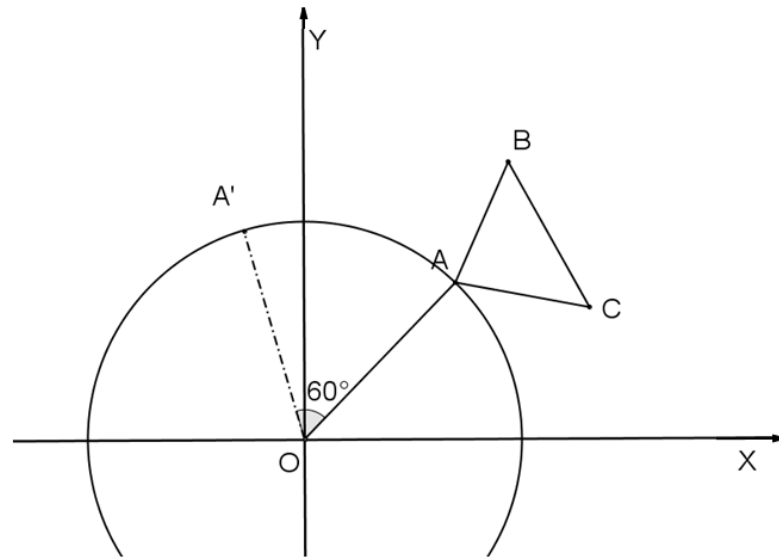
1º passo – Escolhido o vértice A como sendo aquele a ser rotacionado, traçar uma circunferência de centro em $O = (0,0)$ e raio \overline{OA} , Figura 69.

Figura 69 – Circunferência de centro em $O=(0,0)$ e raio \overline{OA}



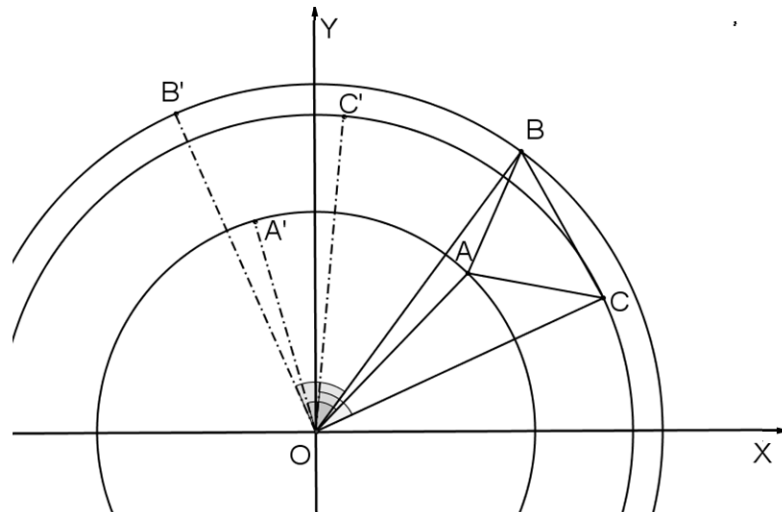
2º passo – Centrar o transferidor no ponto O e marcar o ângulo no sentido anti-horário de 60° sobre o segmento \overline{OA} , localizando o ponto A' simétrico pela rotação ou ainda imagem de A, Figura 70.

Figura 70 – Localização do ponto A' rotacionado de A com ângulo de 60°



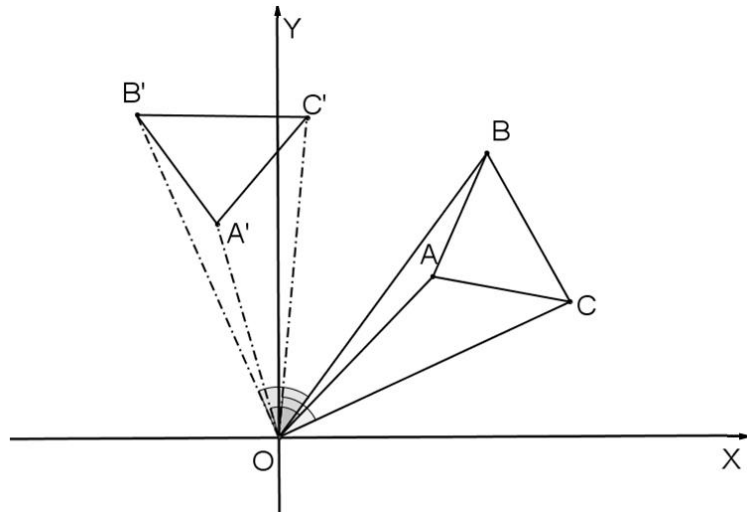
3º passo – Repetir o 1º e 2º passos para os outros vértices B e C da figura, localizando B' e C' , respectivamente, Figura 71.

Figura 71 – Localização dos pontos B' e C' rotacionados de B e C com ângulo de 60°



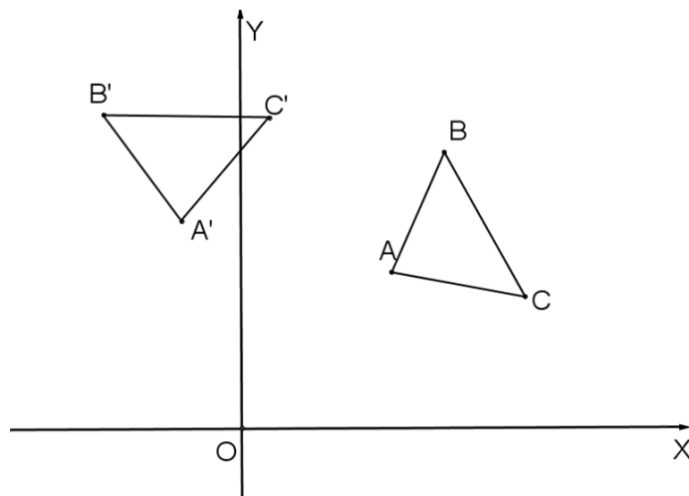
4º passo – Traçar os segmentos de retas entre os vértices do triângulo ($A'B'C'$), Figura 72.

Figura 72 – Traçando o triângulo ($A'B'C'$) rotacionado pelo ângulo de 60°



Retirando as linhas auxiliares, Figura 73, temos:

Figura 73 – Triângulo ($A'B'C'$) rotacionado do triângulo (ABC)

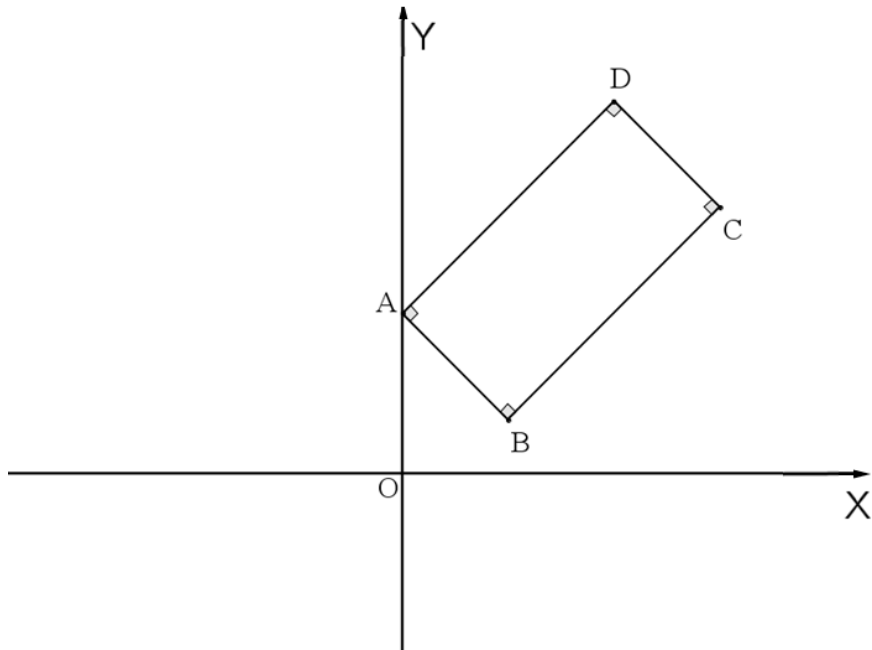


Da mesma maneira que nos casos anteriores, seguem algumas atividades para fixação do conteúdo apresentado em 4.3.3.

Atividade 20 : O que acontece com retas perpendiculares quando aplicamos a rotação? E a translação?

Atividade 21 : Utilizando os instrumentos de desenho, rotacione o polígono ($ABCD$), Figura 74, sob um ângulo de 135° no sentido anti-horário.

Figura 74 – Plano cartesiano com o quadrilátero ($ABCD$)



5 SIMETRIA DE REFLEXÃO E AS FUNÇÕES INVERSAS

Nossa experiência como professor mostra que nos livros didáticos o tópico sobre função inversa é pouco explorado. Não vimos ainda a abordagem deste conteúdo utilizando o conceito de simetria. Desta forma, este capítulo será dedicado ao estudo dos gráficos das funções e suas inversas, especificamente função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, função seno, função cosseno e função tangente. Esse assunto é tão importante que há um resultado geral que mostraremos neste capítulo, qual seja: os gráficos de uma função real e de sua inversa, quando existem, são simétricos em relação à reta $y = x$. Para obtermos esse resultado, serão necessários alguns conceitos do estudo de função que passamos a definir.

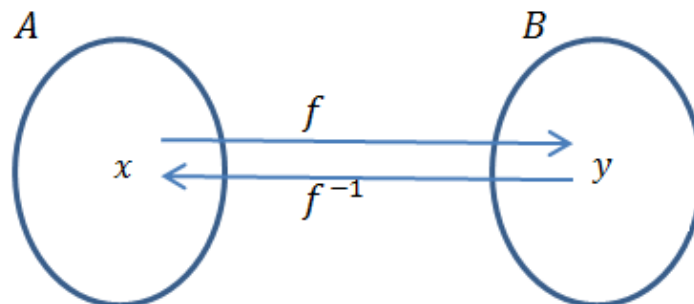
Função sobrejetora é uma função $f: A \rightarrow B$ se, e somente se, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Função injetora é uma função $f: A \rightarrow B$ se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 com $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ e $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Função bijetora é uma função $f: A \rightarrow B$ se, e somente se, f é sobrejetora e injetora, ou ainda, uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para todo e qualquer elemento $y \in B$ existe um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora, então f é invertível, admite uma função inversa dada por $g: B \rightarrow A$ denotada por f^{-1} , Figura 75.

Figura 75 – Diagrama de representação de f e f^{-1}



O domínio da função f^{-1} é B , que é a imagem da função f . A imagem da função f^{-1} é A , que é o domínio da função f .

As funções inversas são de grande utilidade no dia a dia, por exemplo, o uso do termômetro (Figura 76) para verificarmos a temperatura em dias mais frios. A variação na temperatura faz com que haja oscilação na coluna de mercúrio, o que nos permite dizer que a coluna de mercúrio depende da variação de temperatura, ou seja, a coluna de mercúrio está em função da temperatura. Na prática usamos a função inversa para obtermos a temperatura em função da coluna de mercúrio.

Figura 76 – Termômetro



Fonte: http://www.supermedy.com.br/termometro_ambiente.html

Um outro exemplo pode ser observado quando aplicamos uma força sobre uma mola, pois é possível verificar sua deformação, seja em uma balança mecânica (Figura 77), seja no sistema de amortecimento dos carros, seja no colchão, enfim, observamos que a deformação da mola é em função da força à qual está submetida. É comum o uso da função inversa para determinar o massa do corpo em função da deformação da mola.

Figura 77 – Balança de mola



Fonte: <http://chc.cienciahoje.uol.com.br/um-pulo-para-a-ciencia/>

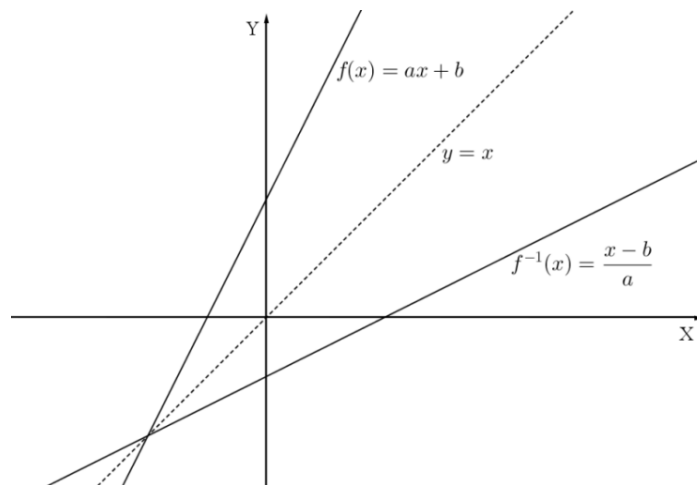
5.1 FUNÇÃO AFIM

A função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetora na forma $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$. A função afim apresenta como gráfico uma reta e, para cada elemento do conjunto imagem, existe um único valor correspondente no conjunto domínio, o que garante a existência da inversa.

1º caso - $a > 0$

Seendo f uma função tal que $f(x) = ax + b$, sua inversa fica determinada por $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, Figura 78.

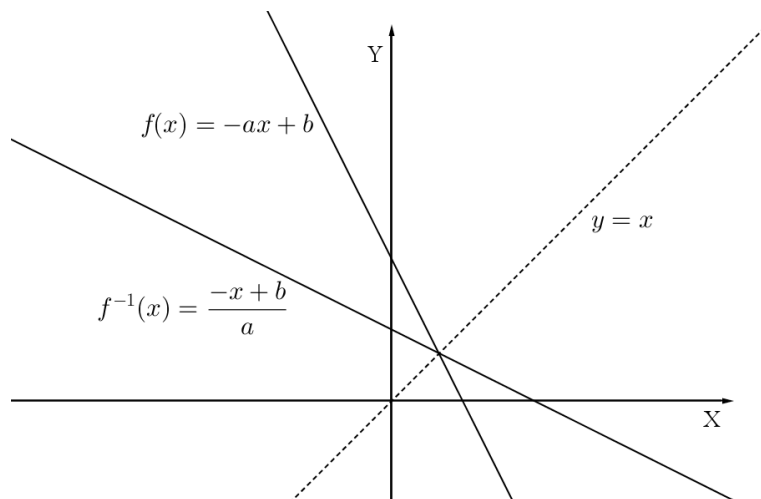
Figura 78 – Gráfico da função afim e sua inversa quando $a > 0$



2º caso - $a < 0$

Seendo f uma função tal que $f(x) = -ax + b$, sua inversa fica determinada por $f^{-1}(x) = \frac{-x+b}{a}$, Figura 79.

Figura 79 - Gráfico da função afim e sua inversa quando $a < 0$



Observando as Figuras 78 e 79, é possível verificar um eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrante, o que é reconhecido como função identidade $f(x) = ax$ com $a = 1$ ou simplesmente reta $y = x$.

5.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c reais e $a \neq 0$. Ela apresenta como gráfico uma curva chamada parábola (Figura 80 e Figura 81) que não é bijetora. É possível apresentarmos dois elementos do conjunto domínio para um único elemento do conjunto imagem, $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Figura 80 – Parábola com a concavidade para cima

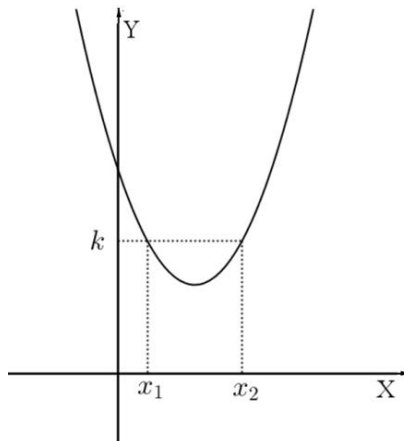
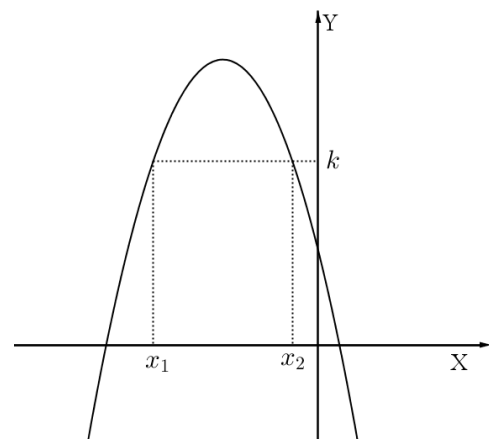


Figura 81 – Parábola com a concavidade para baixo

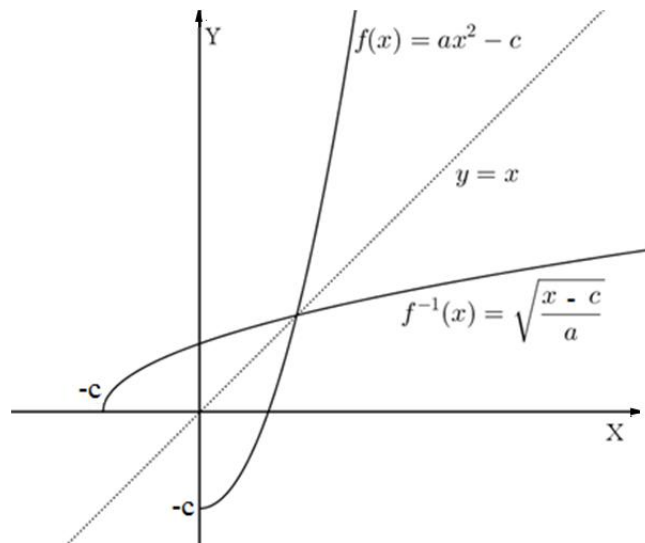


Não existe função inversa para uma função não bijetora, portanto, fazem-se necessárias algumas restrições, vejamos alguns casos;

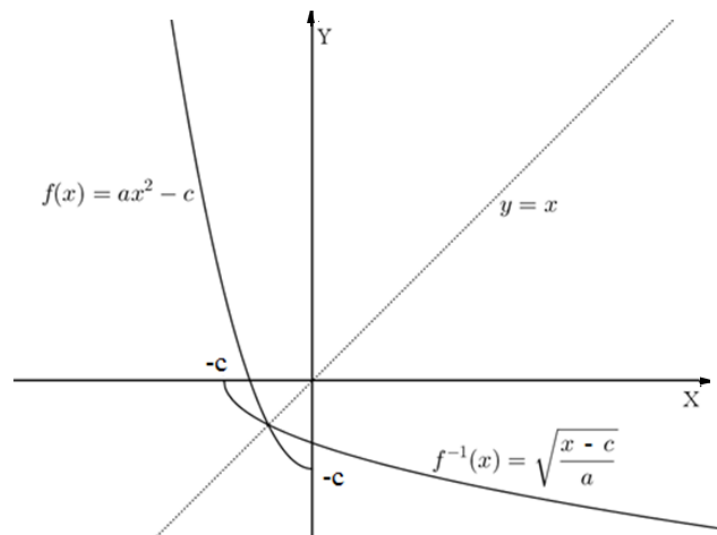
1º caso - $a > 0$ - lado direito

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [-c, +\infty[$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $b = 0$ e $a > 0$. A função inversa

$f^{-1}: [-c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-c}{a}}$, Figura 82.

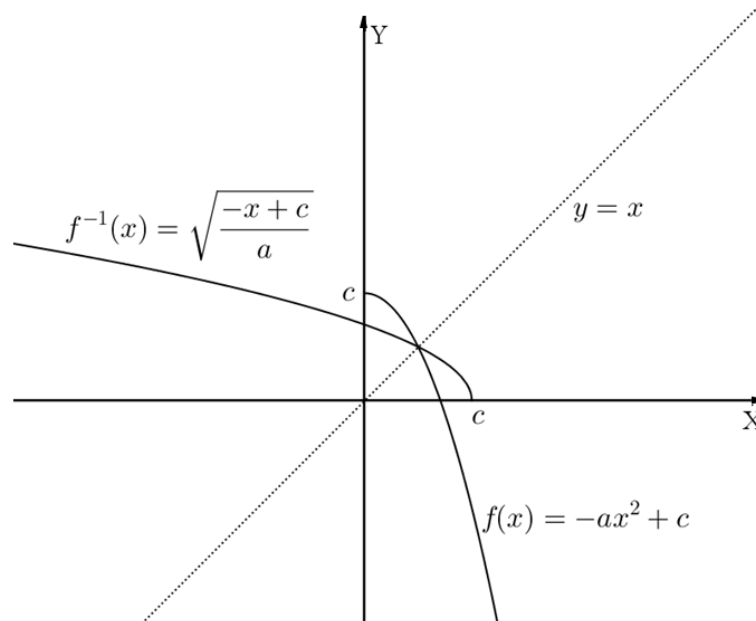
Figura 82 – Lado direito do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a > 0$ 2º caso - $a > 0$ – lado esquerdo

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R}^- \rightarrow [c, +\infty[$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $b = 0$ e $a > 0$. A função inversa $f^{-1}: [c, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^-$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+c}{a}}$, Figura 83.

Figura 83 – Lado esquerdo do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a > 0$ 3º caso - $a < 0$ – lado direito

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [c, -\infty[$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $b = 0$ e $a < 0$. A função inversa $f^{-1}: [c, -\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x+c}{a}}$, Figura 84.

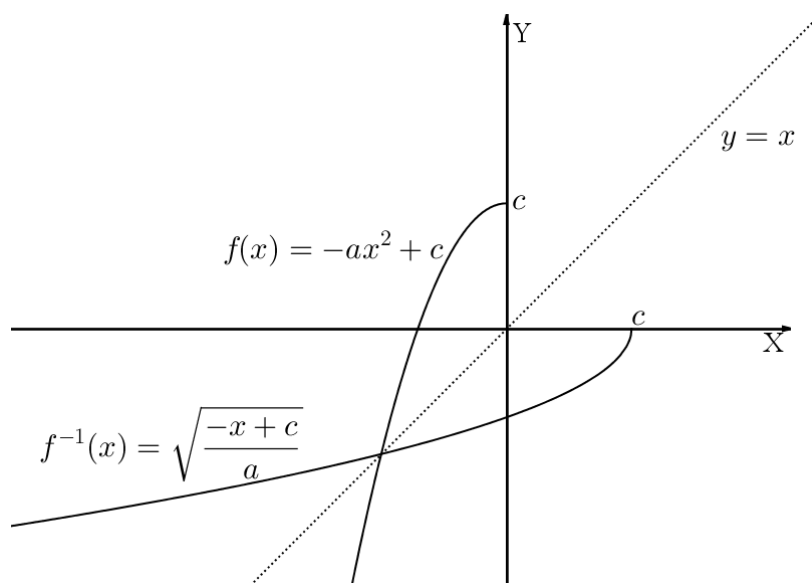
Figura 84 – Lado direito do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a < 0$



4º caso - $a < 0$ – lado esquerdo

Seja a função quadrática $f: \mathbb{R}^- \rightarrow [c, -\infty[$ onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $b = 0$ e $a < 0$. A função inversa $f^{-1}: [c, -\infty[\rightarrow \mathbb{R}^-$ tal que $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{-x+c}{a}}$, Figura 85.

Figura 85 – Lado esquerdo do gráfico da função quadrática e sua inversa com $a < 0$



Construídos os gráficos de f e f^{-1} , nos casos estudados da função quadrática, observarmos que, assim como na função afim, existe um eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrante.

5.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL E A FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ é apresentada na forma $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, representada no gráfico por uma curva crescente (Figura 86), quando $a > 1$, e por uma curva decrescente (Figura 87), quando $0 < a < 1$.

Figura 86 – Gráfico da função exponencial - $a > 1$

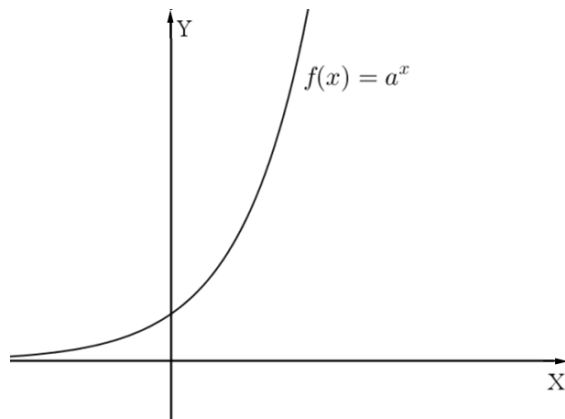
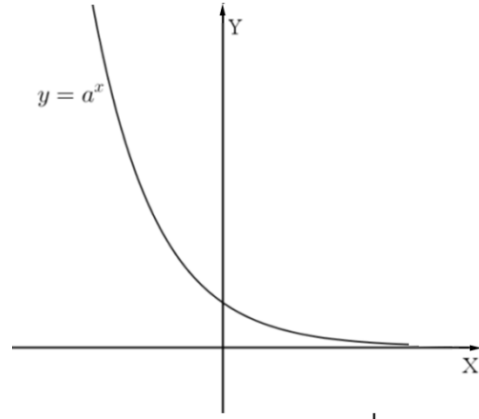


Figura 87 – Gráfico da função exponencial - $0 < a < 1$



A função logarítmica $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é apresentada na forma $f(x) = \log_a x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, representada no gráfico por uma curva crescente (Figura 88), quando $a > 1$ e por uma curva decrescente (Figura 89), quando $0 < a < 1$.

Figura 88 – Gráfico da função logarítmica - $a > 1$

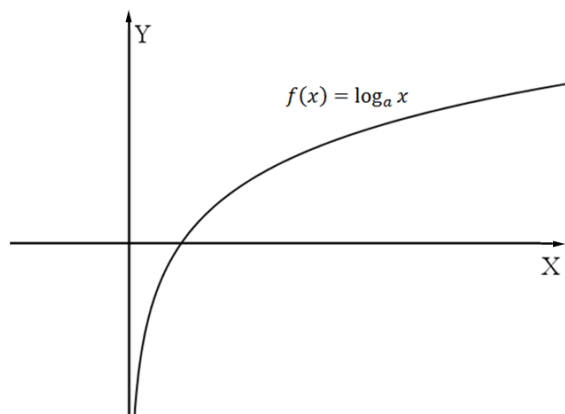
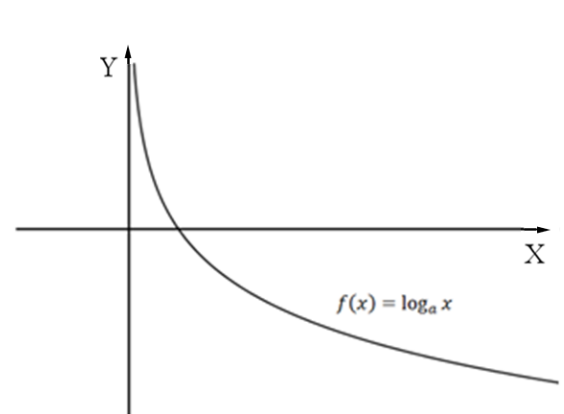


Figura 89 – Gráfico da função logarítmica - $0 < a < 1$



A função exponencial e a função logarítmica são funções bijetoras, sendo uma a inversa da outra. Construindo no mesmo plano cartesiano (Figura 90) os gráficos das funções exponencial e logarítmica, ambas crescentes, vamos observar um eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrante, o que vai se repetir se ambas forem decrescentes (Figura 91).

Figura 90 – Gráficos das funções exponencial e logarítmica quando $a > 1$

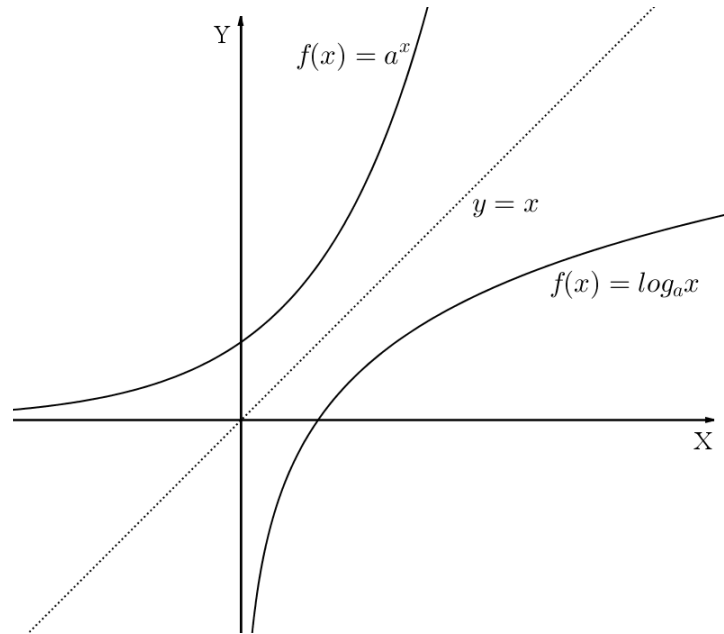
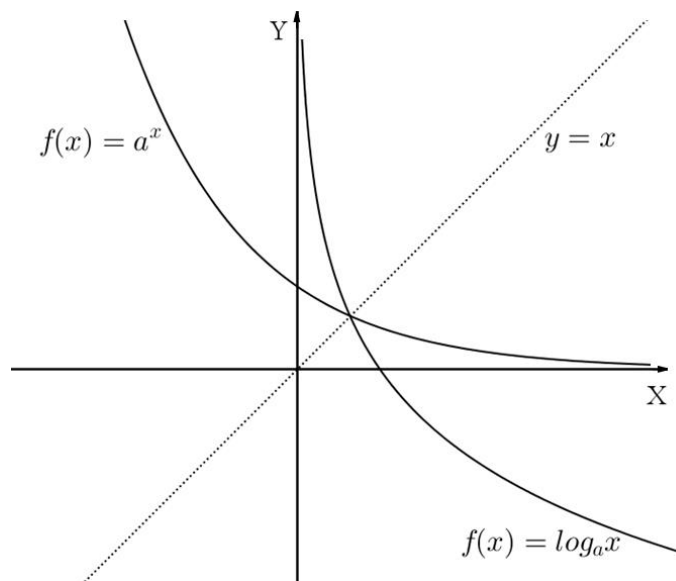


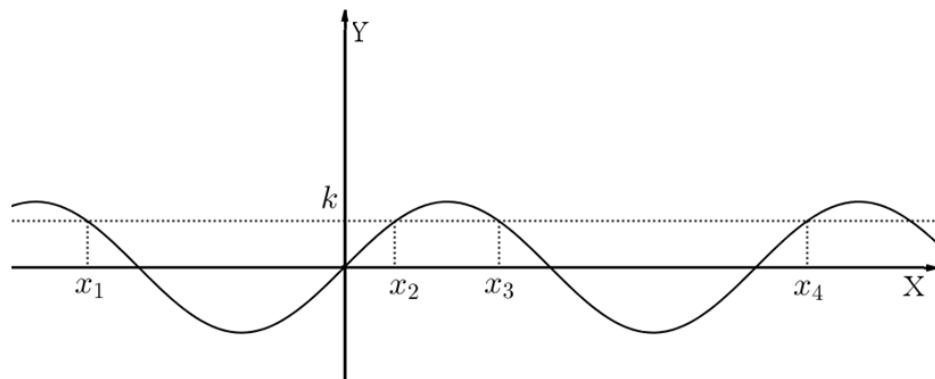
Figura 91 - Gráficos das funções exponencial e logarítmica quando $0 < a < 1$



5.4 FUNÇÃO SENO

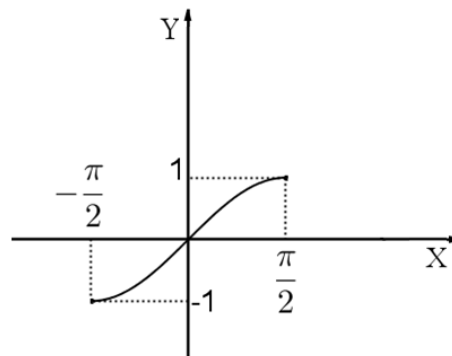
A função seno $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é uma função com período 2π , apresentada na forma $f(x) = \text{sen } x$, conforme Figura 92. Possui como gráfico uma curva chamada senoide, que não é bijetora, pois é possível apresentarmos vários elementos do conjunto domínio para um único elemento do conjunto imagem, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = \dots = k$.

Figura 92 – Gráfico da função seno



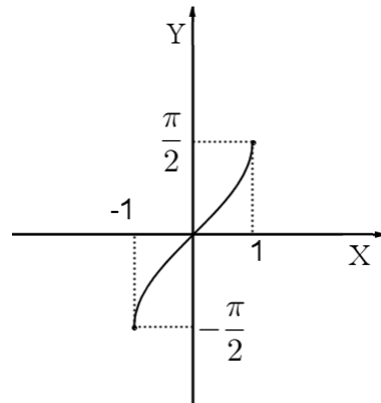
Como a função seno, com domínio em \mathbb{R} , não é bijetora, não existe sua inversa, portanto prosseguimos restringindo seu domínio para um intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtendo, assim, condições para que aconteça a bijeção, Figura 93.

Figura 93 - Gráfico da função seno no intervalo de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



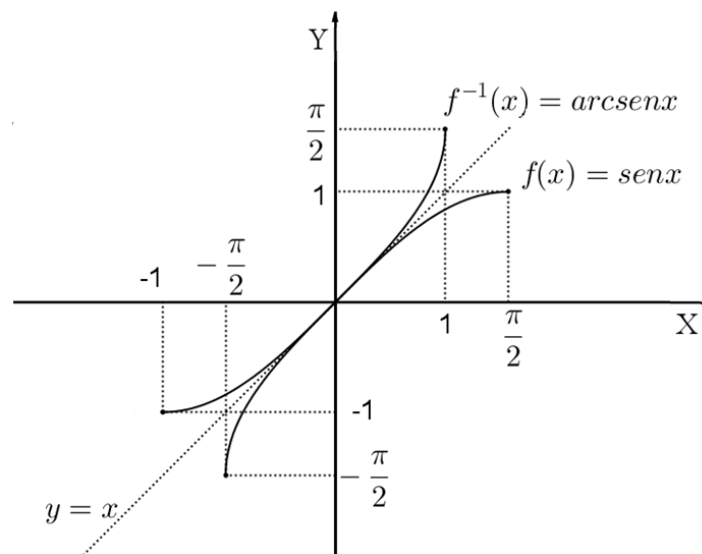
A inversa da função seno é chamada função arco seno, apresenta-se na forma $f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$ e fica definida em $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, Figura 94.

Figura 94 - Gráfico da função arco seno no intervalo de domínio $[-1, 1]$



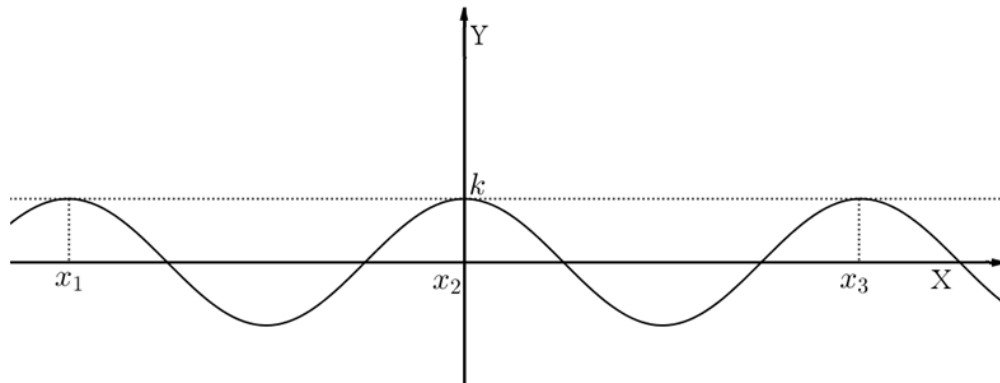
Construindo no mesmo plano cartesiano (Figura 95) os gráficos $f(x) = \text{sen } x$ e $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$, ambos crescentes, observamos novamente o eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Figura 95 – Gráficos da função seno e arco seno

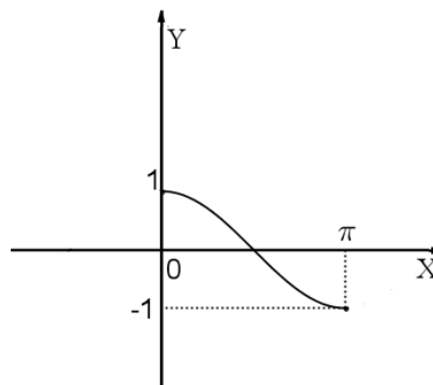


5.5 FUNÇÃO COSSENO

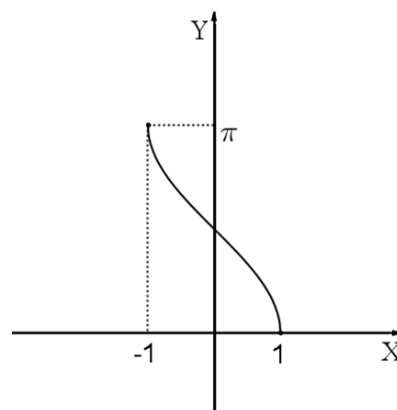
A função cosseno $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é uma função também com período 2π , escrita na forma $f(x) = \cos x$, conforme Figura 96. Possui como gráfico uma curva chamada cossenoide que não é bijetora, pois é possível obtermos vários elementos do conjunto domínio para um único elemento do conjunto imagem, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \dots = k$

Figura 96 - Gráfico da função cosseno

Como a função cosseno, com domínio em \mathbb{R} , não é bijetora, não existe sua inversa, assim como na função seno, restringiremos seu domínio para um intervalo $[0, \pi]$, obtendo condições para uma bijeção, \mathbb{R}

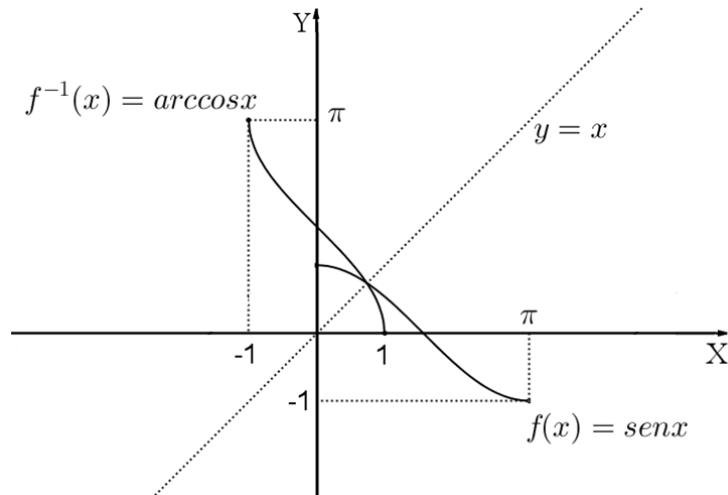
Figura 97 - Gráfico da função cosseno no intervalo de domínio $[0, \pi]$ 

A inversa da função cosseno, chamada função arco cosseno, é apresentada na forma $f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$ e fica definida em $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, Figura 98.

Figura 98 - Gráfico da função arco cosseno no intervalo de domínio $[-1, 1]$ 

Construindo no mesmo plano cartesiano (Figura 99) os gráficos $f(x) = \cos x$ e $f^{-1}(x) = \arccos x$, vamos observar mais uma vez um eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

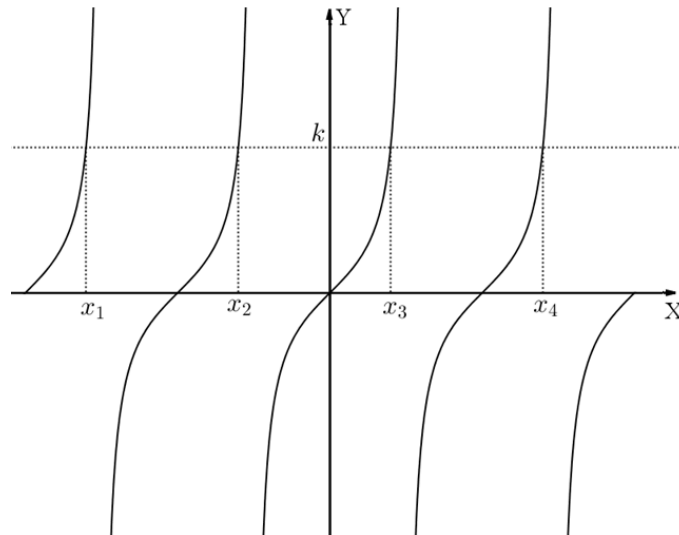
Figura 99 - Gráfico da função cosseno e arco cosseno



5.6 FUNÇÃO TANGENTE

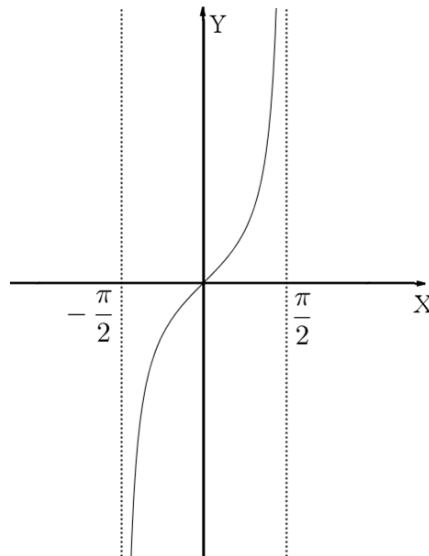
A função tangente $f: [\mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z})] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com período π , escrita na forma $f(x) = \text{tg } x$, conforme Figura 100. Possui como gráfico uma curva chamada tangente que não é bijetora, pois é possível obtermos vários elementos do conjunto domínio para um único elemento do conjunto imagem, $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = \dots = k$.

Figura 100 - Gráfico da função tangente



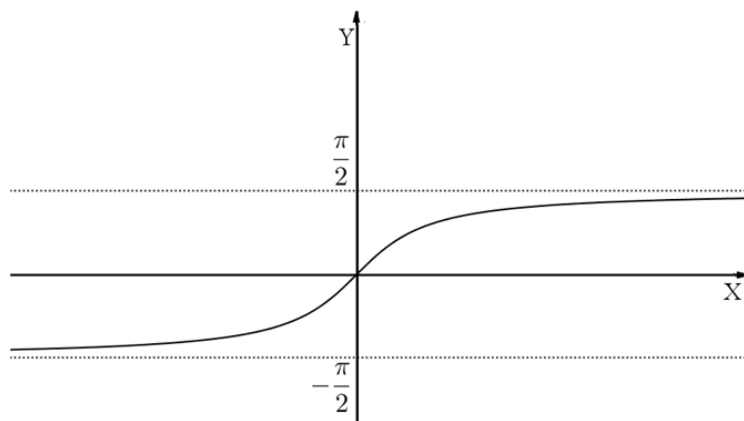
A função tangente, em todo seu domínio não é bijetora, portanto não possui uma inversa, assim, restringiremos seu domínio para um intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, obtendo condições para uma bijeção, Figura 101.

Figura 101 - Gráfico da função tangente no intervalo de domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

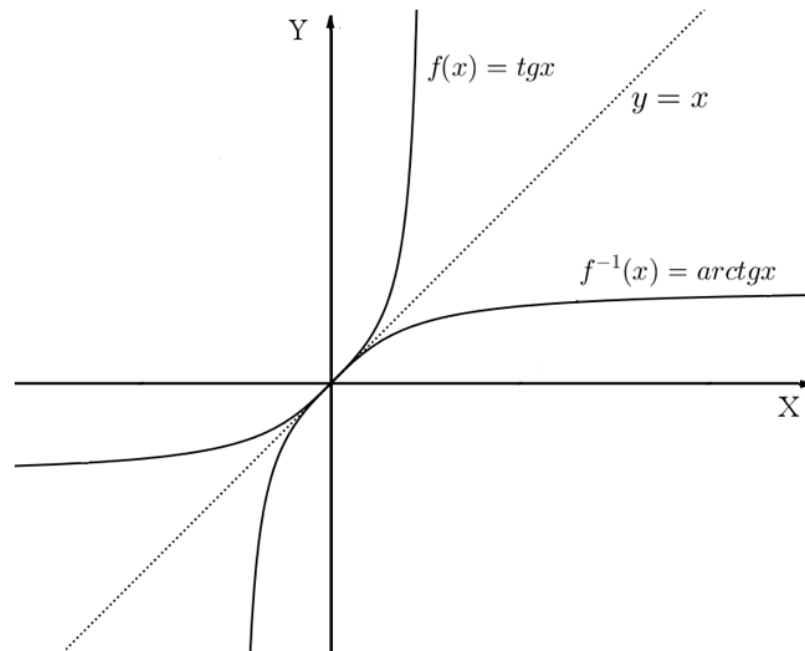


A inversa da função tangente, chamada função arco tangente, se apresenta na forma $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$ e fica definida em $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, Figura 102.

Figura 102 - Gráfico da função arco tangente

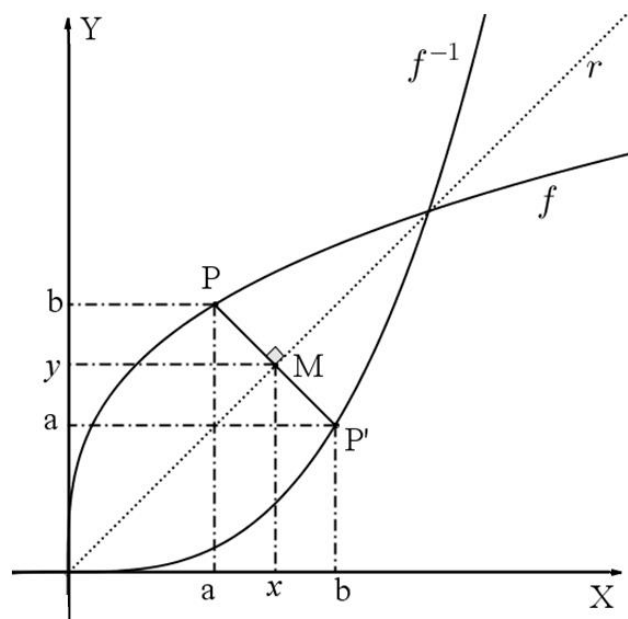


Construindo no mesmo plano cartesiano (Figura 103) os gráficos $f(x) = \text{tg } x$ e $f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$, vamos observar mais uma vez um eixo de simetria passando pela bissetriz do 1º e 3º quadrante.

Figura 103 - Gráfico da função tangente e arco tangente

Conforme os casos estudados anteriormente, notamos que o gráfico da inversa de uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora, com $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$, é simétrico por reflexão em relação a reta $y = x$, este fato pode ser generalizado.

Seja $P = (a, b)$ ponto do plano com $P' = (b, a)$ simétrico em relação à reta r , então a reta r é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ passando por $M = (x, y)$, logo M é ponto médio e $\overline{PM} \equiv \overline{P'M}$, Figura 104.

Figura 104 – Gráfico de uma função f qualquer e sua inversa f^{-1} 

Assim vamos mostrar que $d(P'M) = d(PM)$.

De fato:

$$\sqrt{(b-x)^2 + (y-a)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (b-y)^2}$$

$$(b-x)^2 + (y-a)^2 = (x-a)^2 + (b-y)^2$$

$$(b^2 - 2.b.x + x^2) + (y^2 - 2.y.a + a^2) = (x^2 - 2.x.a + a^2) + (b^2 - 2.b.y + y^2)$$

$$b^2 - 2.b.x + x^2 + y^2 - 2.y.a + a^2 - x^2 + 2.x.a - a^2 - b^2 + 2.b.y - y^2 = 0$$

$$b^2 - b^2 - 2.b.x + 2.x.a + x^2 - x^2 + y^2 - y^2 - 2.y.a + 2.b.y + a^2 - a^2 = 0$$

$$-2.b.x + 2.x.a - 2.y.a + 2.b.y = 0$$

$$-2.x.(b-a) + 2.y.(-a+b) = 0$$

$$2.y.(-a+b) = 2.x.(b-a)$$

$$y = \frac{2.x.(b-a)}{2.(-a+b)}$$

$$y = x$$

Para finalizar o capítulo, apresentamos uma lista de atividades para a fixação do conteúdo, funções inversas, por meio da simetria de reflexão em relação à reta $y = x$.

Atividade 22 : Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$, pergunta-se:

- A função f é bijetora?
- A função f tem inversa?
- Se as respostas às perguntas anteriores forem afirmativas, construir os gráficos f e f^{-1} .

Atividade 23 : Seja a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Qual a inversa da função f ? Faça o esboço do gráfico da função f e f^{-1} .

Atividade 24 : A função $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2$, possui inversa? Faça um estudo desse caso.

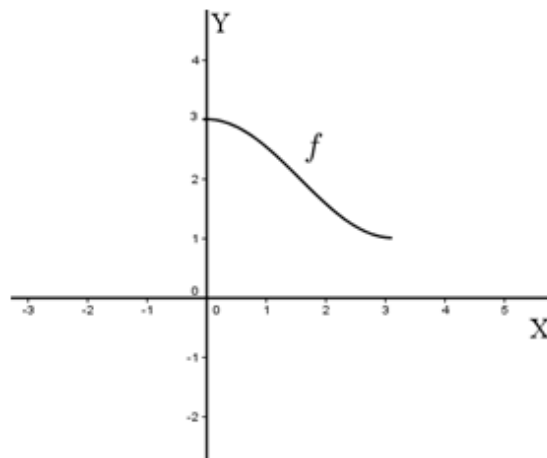
Atividade 25 : Determine um intervalo para que a função $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ possua função inversa e construa o gráfico de f e f^{-1} .

Atividade 26 : Dada a função $f(x) = 2.\text{sen } x$, determine um intervalo para que $f(x)$ possua inversa e construa o gráfico de f e f^{-1} .

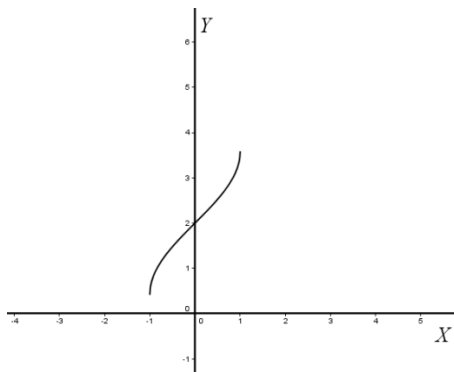
Atividade 27 : Sejam as função quadráticas $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = x^2$, e $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $g(x) = x^2 + 1$. Após a construção do gráfico de f e g no mesmo plano cartesiano, identifique o tipo de transformação ocorrida. A mesma transformação ocorre com f^{-1} e g^{-1} ?

Atividade 28 : Dado o gráfico da função f no intervalo $[0, \pi]$, identifique na Figura 105, a alternativa que representa f^{-1} .

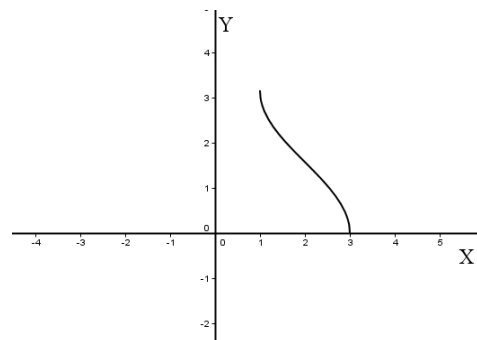
Figura 105 – Gráfico de uma função no intervalo $[0, \pi]$ com alternativas



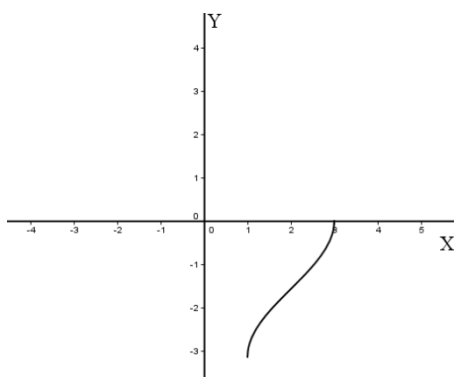
a)



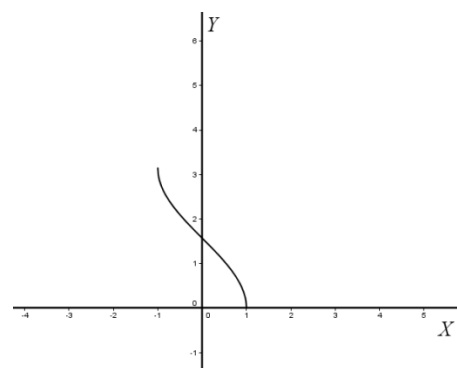
b)



c)

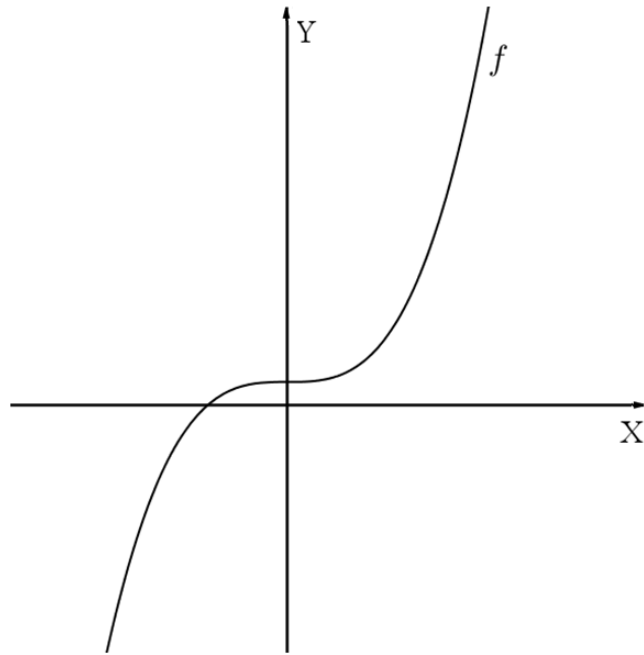


d)



Atividade 29 : Apresentamos (Figura 106) o gráfico de uma função f . Utilizando a reta $y = x$ como eixo de simetria, faça no mesmo plano cartesiano um esboço do gráfico de f^{-1} .

Figura 106 – Gráfico de uma função sem alternativas



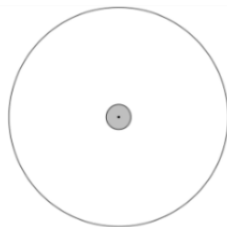
6 SIMETRIA COMO ESTRATÉGIA EM ALGUNS JOGOS

De um modo geral, os jogos têm uma boa aceitação entre os alunos, por isso, propomos algumas atividades que utilizam o conhecimento de simetria como fator determinante para uma estratégia vencedora. Vejamos alguns exemplos de atividades:

Atividade 30 : [03], p.62 – Dois jogadores se revezam colocando moedas de um centavo em uma mesa redonda, sem empilhar uma moeda em cima da outra. O jogador que não puder colocar uma moeda perde. Que estratégia o primeiro jogador deverá adotar para vencer o jogo?

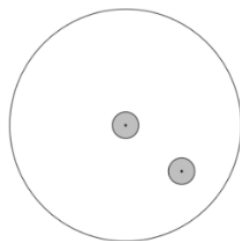
Solução : Considerando que é possível traçar vários diâmetros e que qualquer ponto de um diâmetro, exceto o centro da mesa, terá um simétrico em relação ao centro, o primeiro jogador colocará sua moeda posicionada na intersecção de todos os diâmetros, ou seja, no centro, Figura 107.

Figura 107 – Posicionando a primeira moeda

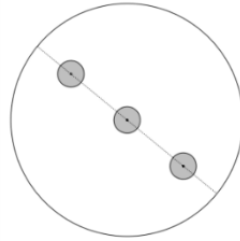


Depois disso, o segundo jogador coloca sua moeda em qualquer posição da mesa, Figura 108.

Figura 108– Posicionando a segunda moeda



A segunda jogada do primeiro jogador será efetuada buscando colocar sua moeda em uma posição simétrica à jogada anterior. Para tanto, deverá traçar um diâmetro imaginário localizando o ponto ideal, Figura 109.

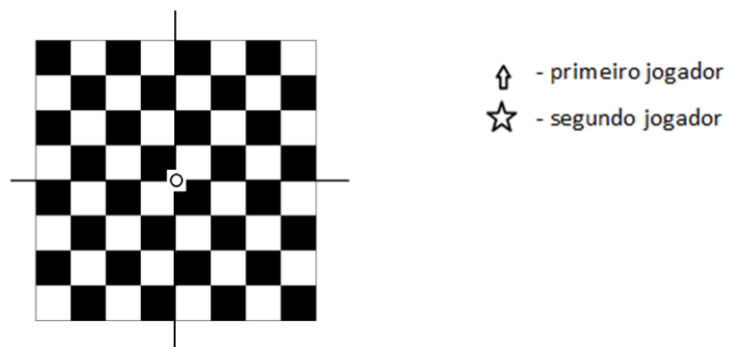
Figura 109 – Posicionando a terceira moeda

Note que, com essa estratégia, o primeiro jogador sempre posicionará sua moeda simétrica à de seu adversário, portanto, se existir a possibilidade de o adversário posicionar sua moeda, também existirá um local para o primeiro jogador. Dessa forma o primeiro jogador vencerá a partida independentemente do tamanho da mesa.

Atividade 31 : [03], p.63 – Dois jogadores se revezam colocando bispos em um tabuleiro de xadrez, de modo que não possam se capturar mutuamente (os bispos podem ser colocados em quadrados de qualquer cor). Perde o jogador que não puder fazer sua jogada.

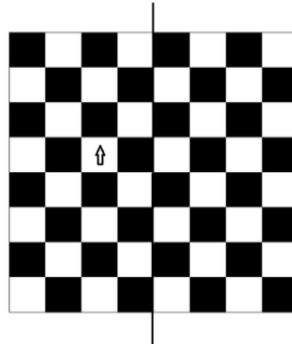
Solução : Considerando um tabuleiro de 8x8 casas, com tantos bispos quanto forem necessários e que os bispos movam-se ou capturem pelas diagonais num único sentido, encontre uma estratégia que garanta a vitória para um dos jogadores.

Como o tabuleiro de xadrez apresenta um centro entre a quarta e a quinta coluna de casas e entre a quarta e a quinta linha de casas, é natural tentarmos utilizar a estratégia da atividade 30, entretanto não podemos posicionar a peça nesse local, Figura 110.

Figura 110 – Tabuleiro de xadrez com dois eixos de simetria

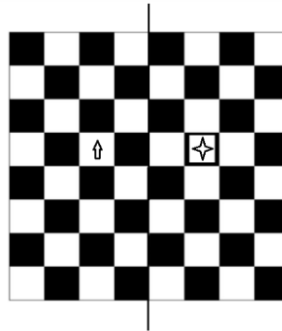
Nesse caso vamos utilizar um eixo de simetria, que não seja diagonal, entre a quarta e a quinta coluna de casas (Figura 111) como referência para posicionar o bispo do segundo jogador, simétrico ao do primeiro.

Figura 111 – Tabuleiro de xadrez com a primeira peça posicionada



Observamos desta vez que o primeiro jogador perde a vantagem que possuía no exercício anterior e que o segundo jogador passa a tê-la, posicionando sua peça de forma simétrica em relação à do adversário, Figura 112.

Figura 112 – Tabuleiro de xadrez com a segunda peça posicionada



Prosseguindo com essa estratégia, os bispos serão posicionados em casas de cores diferentes, fazendo com que a última jogada seja feita pelo segundo jogador.

Seguindo o raciocínio das atividades 30 e 31, apresentamos uma lista de atividades com jogos em que a simetria é estratégia fundamental para a determinação do vencedor.

Atividade 32 : [03], p.63 - Dois jogadores se revezam colocando reis em um tabuleiro 9x9 de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Atividade 33 : [03], p.63 - Dois jogadores se revezam colocando cavalos em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Atividade 34 : [03], p.64 - São colocados 20 pontos em um círculo. Os jogadores se revezam unindo dois dos pontos com um segmento de reta que não cruza outro segmento já desenhado. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Atividade 35 : [03], p.64, adaptado - Uma margarida (a) tem 12 pétalas e outra (b) 11 pétalas. Os jogadores se revezam retirando uma única pétala ou duas que estejam uma do lado da outra. Perde o Jogador que não puder jogar na sua vez.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que os conteúdos e as atividades apresentados neste trabalho contribuirão para que o ensino de geometria na educação básica ocorra de forma mais interessante e agradável, relacionando-se com outros assuntos. Quando os conceitos de rotação e translação são trabalhados os estudantes adquirem habilidades geométricas, o que facilita a verificação das relações de semelhança e congruência.

Salientamos que este nosso trabalho é uma proposta de atividade educacional, a qual permite que aos professores interessados em utilizá-la façam adequações e alterações a fim de enriquecê-la, mesmo porque ela não foi aplicada para que uma verificação de sua eficiência fosse conhecida.

É possível que ferramentas computacionais como *softwares* gráficos sejam utilizados nas construções e na análise de figuras, entretanto é interessante não deixar totalmente de lado os instrumentos de construção mais tradicionais, tais como régua, compasso, entre outros.

Pretendemos num futuro dar continuidade ao trabalho com as transformações no plano envolvendo matrizes.

8 TGHGTŽ PEKCU

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [01] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 5ª a 8ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 2001.
- [02] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.
- [03] FORMIN, Dimitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Iliia. **Círculos Matemáticos. A Experiência Russa**. Tradução do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Título original: Mathematical Circles.
- [04] LIMA, Elon Lajes. **Isometrias**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [05] PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba: SEED, 2008.
- [06] WAGNER, Eduardo; Colaboração de CARNEIRO, José Paulo Q.. **Construções Geométricas**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- [07] BIEMBENGUT, Maria Salett; SILVA, Viviane Clotilde da; HEIN, Nelson. **Ornamentos x Criatividade: Uma alternativa para ensinar geometria plana**. Blumenau: FURB, 1996.
- [08] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1985.
- [09] BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. Título original: A History of Mathematics.
- [10] BUSHAW, Donald; BELL, Max; POLLAK, Henry O.; THOMPSON, Maynard; USISKIN, Zalman. **Aplicações da Matemática Escolar**. Tradução de Hygino H.

Domingues. São Paulo: Atual, 2003. Título original: A Sourcebook of Applications of School Mathematics.

- [11] CROWE, Donald W.; THOMPSON, Thomas M.. **Alguns usos modernos da geometria**. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.127-140.
- [12] CUNHA, Antonio Geraldo da. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- [13] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1985. v.9.
- [14] GERONIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. 2.ed. Maringá: EDUEM, 2010.
- [15] GRAVINA, Maria Alice; DIAS, Mariângela Torres. Álgebra e Geometria: Números Comandando Pontos. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v.80, p.34-41, 1º quadrimestre 2013.
- [16] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1985. v.3.
- [17] LIMA, Elon Lajes. **Coordenadas no Plano: Com as soluções dos exercícios**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [18] LIMA, Elon Lajes. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.1.
- [19] O GUIA DO FISIOTERAPEUTA. **O ângulo de Cobb**. 24 out.2009. Disponível em: <<http://www.fisioterapiahumberto.blogspot.com.br/2009/10/o-angulo-de-cobb.html>>. Acesso em: 13 fev. 2013.
- [20] PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2.ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2010. Disponível em: <

http://www.mtm.ufsc.br/~ebatista/Eliezer_Batista_arquivos/MTM_Geometria_I_WEB.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2013.

- [21] ROCHA, Silvana Heidemann. **Sistemas de Coordenadas, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares**. Notas de Aulas. Curitiba: UTFPR, 2007. Disponível em: <<http://www.pessoal.utfpr.edu.br/heidemann/arquivos/ApostilaMatemISistCoordMatrDeterminSistLineares%281%29.pdf>>. Acesso em: 12 fev. 2013.
- [22] SILVA, Luciana Cristina Pompeo Ferreira da; QUEIROZ, Luiz Carlos de. **Isometria: Uma Proposta para o Ensino da Matemática no Ensino Médio**. Disponível em: <http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2004/trabalhos/inic/pdf/IC1-8.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2013.
- [23] VERTAMATTI, Rodolfo. **Assimetria Humana no Reconhecimento Multibiométrico**. 2011. 114 p. Tese Apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências. USP, São Paulo. 2011.
- [24] WAGNER, Eduardo. Um Pouco Sobre Descartes. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v.19, p.09-14, 2º semestre 1991.