Universidade Estadual de Londrina

JOÃO LUCAS ARGUELLO DE OLIVEIRA

# ORDENS QUÂNTICAS EM MODELOS EXATAMENTE SOLÚVEIS

Londrina
2025

JOÃO LUCAS ARGUELLO DE OLIVEIRA

# ORDENS QUÂNTICAS EM MODELOS EXATAMENTE SOLÚVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física da Universidade Esta- dual de Londrina para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Paula Fernanda Bienzobas.

Londrina
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

048 Oliveira, João Lucas Arguello de.
Ordens quânticas em modelos exatamente solúveis / João Lucas Arguello de Oliveira. - Londrina, 2025.
69 f. : il.

Orientadora: Paula Fernanda Bienzobas.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.
Inclui bibliografia.

1. Ordens quânticas - Tese. 2. Líquidos de spins quânticos - Tese. 3. Ordens topológicas - Tese. 4. Ordens fractônicas - Tese. I. Bienzobas, Paula Fernanda . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

JOÃO LUCAS ARGUELLO DE OLIVEIRA

# ORDENS QUÂNTICAS EM MODELOS EXATAMENTE SOLÚVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física da Universidade Esta- dual de Londrinapara obtenção do título de Mestre em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

_____
Orientador: Profa. Dra. Paula Fernanda Bienzobas
Universidade Estadual de Londrina – UEL

_____
Prof. Dr. Pedro Rogério Sergi Gomes
Universidade Estadual de Londrina – UEL

_____
Prof. Dr. Heitor Casasola Cinel
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 27 de outubro de 2025.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha irmã, Juliana, e a meus pais, Leda e Ivan, por me incentivarem, desde nossa primeira conversa sobre meus interesses na carreira acadêmica, a buscar o melhor de mim, por me ajudarem a ter paciência nos momentos críticos e por serem meu porto seguro. Agradeço a Rebeca Lioti, minha namorada, por estar ao meu lado durante todo esse período, sua companhia trouxe alegria e conforto, obrigado pelas conversas, risadas e conselhos.

Também gostaria de agradecer a Gustavo Barreto e Orion Villanueva pela amizade desde os tempos de graduação, a minha orientadora Paula Fernanda Bienzobas que me aceitou como aluno de mestrado e permitiu que eu tivesse liberdade para me reconhecer dentro da física teórica e a todos os membros do grupo de campos e estatística e do departamento de física da UEL por contribuírem, direta e indiretamente, para minha formação.

*"Li e estudei as fantasias selvagens desses autores com prazer. Pareciam-me tesouros conhecidos por poucos além de mim. Já me descrevi como constantemente imbuído de um desejo fervente em penetrar os segredos da natureza. Em que pese o trabalho intenso e as descobertas maravilhosas dos filósofos modernos, sempre concluía meus estudos descontente e insatisfeito. Dizem que Sir Isaac Newton declarava que se sentia como uma criança catando conchas junto ao grande e inexplorado oceano da verdade. Aqueles que o sucederam em cada um dos ramos da filosofia natural, com os quais estava habituado, pareciam, mesmo para minhas apreensões de menino, aprendizes devotados à mesma busca.*

*-Mary Shelley, Frankenstein, or, The Modern Pometheus (1818, p. 56 )*

OLIVEIRA, J. L. A. **Ordens quânticas em modelos exatamente solúveis**. 2025. 68 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

## RESUMO

Após a descoberta de fases que não são descritas por quebra espontânea de simetrias usuais, uma nova classificação para o conceito de ordens da matéria foi necessária para englobar um novo conjunto de estados físicos que dependem da topologia do sistema. As "ordens quânticas" configuram um frutífero campo de estudo onde é possível observar propriedades exóticas como a emergência de quasipartículas com estatística e carga fracionada (ânyons) e com restrição de mobilidade (fráctons) em modelos de rede com propriedades topológicas. Além disso, a degenerescência do estado fundamental, que outrora, em descrições clássicas, dependia exclusivamente da existência de simetrias, agora são determinadas por invariantes topológicos medidos por operadores que descrevem curvas não triviais em modelos com condições periódicas de contorno. As excitações desses sistemas, as quais são identificadas como quasipartículas, e podem ser interpretadas como defeitos topológicos na rede, exigem um custo energético para serem criadas, porém podem ser mover, desde que não criem ou aniquilem outras excitações sem energia adicional. O estudo atual de modelos com ordens quânticas está fortemente associado a avanços tecnológicos em áreas como computação quânticas e supercondutores pois descrevem, respectivamente, modelos tolerantes a erros e interações efetivas em sistemas de muitos corpos.

**Palavras-chave**: Ordens quânticas; Quebra espontânea de simetria; Ordens topológicas; Ordens fractônicas.

OLIVEIRA, J. L. A.. **Quantum orders in exactly solvable models**. 2025. 68 p. Master's Thesis (Master in Science in Physical) – State University of Londrina, Londrina, 2025.


## ABSTRACT

After the discovery of phases that are not described by the spontaneous breaking of usual symmetries, a new classification for the concept of orders of matter was necessary to encompass a new set of physical states that depend on the system's topology. "Quantum orders" constitute a fruitful field of study, where it is possible to observe exotic properties, such as the emergence of quasiparticles with statistical and fractional charge (anyons) and with mobility restrictions (fractons), in lattice models with topological properties. Furthermore, the degeneracy of the ground state, which in classical descriptions once depended exclusively on the existence of symmetries, is now determined by topological invariants measured by operators that describe nontrivial curves in models with periodic boundary conditions. The excitations of these systems, which are identified as quasiparticles and can be interpreted as topological defects in the lattice, require an energetic cost to be created, but can move as long as they do not create or annihilate other excitations without additional energy. The current study of models with quantum orders is closely tied to technological advances in areas such as quantum computing and superconductors, as they describe, respectively, error-tolerant models and effective interactions in many-body systems.



**Key-words**: Quantum orders; Spontaneous symmetry breaking; Topological orders; Fractonic orders.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

**Figura 1** – Diagrama de classificação de ordens da matéria. A caixa em cinza indica qual sistema é descrito pelo paradigma de Landau usual. Adaptado de [2] ..... 13

**Figura 2** – Diagramação do modelo de rede $Z_2$ com o operador de plaquete $B_p$, em vermelho, e o gerador da transformação de calibre local $G_i$, em azul ..... 22

**Figura 3** – Todas as configurações possíveis de spin que retornam autovalor +1 para os operadores de plaquete $B_p$ ..... 24

**Figura 4** – (a) Os plaquetes $B_p$ e $B_p'$ , preenchidos completamente com vermelho representam vórtices. A linha vermelha pontilhada indica a trajetória da excitação pela rede através do conjunto de atuação dos operadores $\sigma^x$ destacados nos links contínuos pretos. (b) O link $l$ em destaque contínuo preto recebe a atuação do operador $\sigma^x$; os links em destaque pontilhado verde são candidatos a receberam atuação de outro operador $\sigma^x$ para mover a excitação. ..... 26

**Figura 5** – As curvas azuis, sobre a rede ordinária, representam o operador de Wegner-Wilson e as curvas vermelhas, sobre a rede dual, representam os operadores de 't Hooft. ..... 27

**Figura 6** – Os círculos coloridos em azul representam os operadores de Pauli $\sigma^x$; em vermelho os operadores $\sigma^z$; e verde o produto dos operadores $\sigma^x\sigma^z$. Os contornos simples e duplos indicam, respectivamente, a atuação de um operador e dois operadores. (a) Comutação entre dois operadores estrela. (b) Comutação entre um operador estrela e um operador plaquete. (c) Comutação entre dois operadores plaquete ..... 31

**Figura 7** – Operações sequenciais de operadores estrelas em um estado de referência, ilustrando a atuação do projetor $P$, selecionando os autoestados que pertencem ao subespaço protegido $L$ do Toric Code. ..... 32

**Figura 8** – Círculos azuis indicam a atuação de operadores $\sigma^x$, vermelhos $\sigma^z$ e ver- des $\sigma^x\sigma^y$. Representação de excitações elétricas (esquerda) e magnéticas (direita). Fonte: Adaptado de [14] ..... 33

**Figura 9** – (a) Curvas do tipo $e-e$. (b) Curvas do tipo $m-m$. (c) Curvas do tipo $m-e$ ..... 36

**Figura 10** – A esquerda está uma representação da comutação entre dois plaquetes da sub-rede par (verde) e a direita uma representação da comutação entre um plaquete da sub-rede par e um plaquete da sub-rede ímpar (branco).Os círculos azuis representam os operadores $\sigma^x$, os vermelhos $\sigma^z$ e os verdes $\sigma^x\sigma^z$.....39
**Figura 11** – Diagrama do modelo de plaquetes Wen divida em duas sub-redes. Os plaquetes em verde-claro indicam a sub-rede par enquanto os plaquetes em branco representam a sub-rede ímpar. Adaptado de [19].....39
**Figura 12** – Esquematização da mobilidade (a) horizontal e (b) diagonal das excitações de carga $Z_2$.....45
**Figura 13** – Mobilidade dos estados ligados no Wen Plaquette Model.....45
**Figura 14** – Representação visual do mapa entre o modelo de plaquetes Wen e o Toric Code. Fonte: [15].....46
**Figura 15** – Representação diagramática dos operadores de estrela ($a$), ($b$),($c$) e do operador de plaquete ($d$). Adaptado de [32].....48
**Figura 16** – Representação de todos os operadores de linha com curvas não contráteis definidos no modelo X-Cube. Adaptado de [32].....49
**Figura 17** – Diagramação das excitações no X-Cube Modelo. Fonte: [10].....49
**Figura 18** – Graus de liberdade de um link compartilhado por dois planos $P_n$ e $P_m$. Adaptado de [15].....51
**Figura 19** – (a) Representação de uma rede cúbica, onde os sítios branco são pares e os sítios pretos são ímpar. (b) Representação do operador octaédrico. Fonte: [23].....54
**Figura 20** – Comutação dos operadores octaédricos como (a) primeiros vizinhos e como (direita) vizinhos diagonais. Fonte: [24].....55
**Figura 21** – Atuação do operadores de linha rígidos no Chamon Code. Fonte: [24].....56
**Figura 22** – Atuação do operadores de linha flexíveis no Chamon Code. Fonte: [24].....57
**Figura 23** – Mobilidade das excitações elétricas ($e$) e magnéticas ($m$) no Toric Code.....67

## LISTA DE TABELAS

**Tabela 1** – Distinção entre a fase desconfinada, a região de transição e a fase confinada do $Z_2$ Lattice Gauge Theory ..... 29
**Tabela 2** – Regras de fusão das quasipartículas do Toric Code. ..... 37
**Tabela 3** – Relação entre a paridade da rede, o tipo de degenerescência e os operadores correspondentes para o Wen Plaquette Model. ..... 43

**SUMÁRIO**


**1 INTRODUÇÃO** ..... 13

**2 FASES DA MATÉRIA** ..... 16
**2.1 Fases usuais** ..... 16
**2.2 Ordens quânticas** ..... 17
2.2.1 Ordens topológicas ..... 18
2.2.2 Ordem fractônicas ..... 18
2.2.3 Ordens topológicas protegidas por simetrias ..... 18
**2.3 Teoria efetivas** ..... 19

**3 MODELOS ANIÔNICOS EXATAMENTE SOLÚVEIS EM 2+1D** ..... 20
**3.1** $Z_2$ **Lattice Gauge Theory** ..... 20
3.1.1 Limite de baixas energias ..... 24
**3.2 Toric Code** ..... 29
3.2.1 Excitações. ..... 33
3.2.2 Estatística das excitações. ..... 35
3.2.3 "Arbitrariedade" na escolha de base ..... 37
**3.3 Wen Plaquette Model** ..... **38**
3.3.1 Degenerescência do estado fundamental. ..... 40
3.3.2 Excitações. ..... 43
3.3.3 Equivalência entre o Wen Plaquette Model e o Toric Code. ..... 46

**4 MODELOS FRACTÔNICOS EXATAMENTE SOLÚVEIS EM 3+1D** ..... 47
**4.1 Modelo X-Cube** ..... 47
4.1.1 Excitações. ..... 48
**4.2 Construção via camadas acopladas do Modelo X-Cube** ..... 50
**4.3 Chamon Code** ..... 53
4.3.1 Operadores de linha do Chamon Code. ..... 55

**REFERÊNCIAS** ..... 58

**APÊNDICES** ..... 61
**APÊNDICE A –** Fenomenologia de Landau: funcional da energia livre ..... 62
**APÊNDICE B –** Mobilidade das excitações no Toric Code ..... 67

# 1 INTRODUÇÃO

Publicado no final dos anos 30, o Paradigma de Landau é uma das teorias mais robustas para descrição e classificação de fases da matéria, tanto clássicas quanto quânticas [1–3]. A teoria considera que uma fase é caracterizada segundo as simetrias do sistema e, nas proximidades da transição, a quebra espontânea dessas simetrias pode ser descrita pelo comportamento do parâmetro de ordem. Este parâmetro usualmente é definido a partir de quantidades físicas locais para fases com simetrias globais.

Contudo, no início dos anos 80, verificou-se a existência de fases da matéria que não se encaixam nessas descrições, com o efeito Hall fracionário [4, 5]. Essas fases ficaram conhecidas como fases topológicas, devido as suas características que dependem exclusivamente da topologia e, portanto, não podem ser caracterizadas com base em objetos locais. A partir de então, surgiu a necessidade de classificar essas fases da matéria. Segundo a classificação proposta em [2], as fases topológicas são um subgrupo do que foi denominado como "ordens quânticas" juntamente como outras fases que não são descritas pela teoria de Landau usual. A classificação de uma fase, por sua vez, é feita considerando-se as excitações emergentes do modelo. A Figura 1 mostra um diagrama simplificado da classificação de ordens da matéria proposta em [2]. Nesse contexto, modelos de rede em baixas energias que apresentam comportamento topológico representam um campo de estudo ativo e relevante.

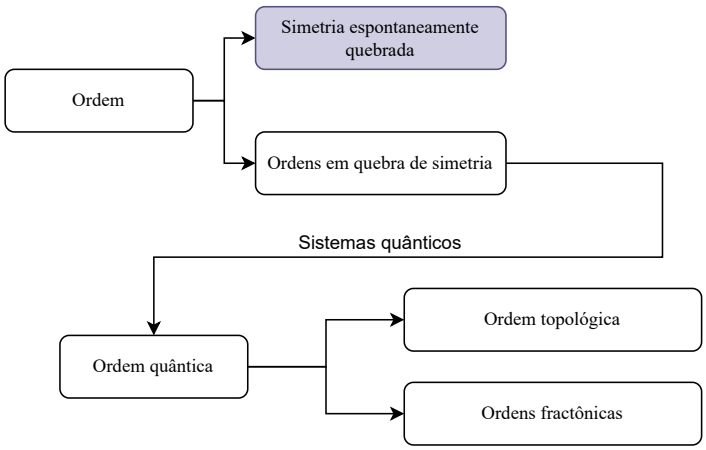


Figura 1 – Diagrama de classificação de ordens da matéria. A caixa em cinza indica qual sistema é descrito pelo paradigma de Landau usual. Adaptado de [2].

Em modelos de rede que apresentam ordens topológicas as excitações podem ser interpretadas como quasipartículas emaranhadas denominadas ânyons. Eles são observados devido a um fator de fase $e^{i\phi}$ no estado quântico global que depende do caminho que duas partículas realizam perante a troca. Ao investigar suas propriedades observam-se características exóticas como estatística não trivial e restrição de mobilidade.

Já em modelos tridimensionais com fases fractônicas as quasipartículas emergentes são fráctons [6–8]. Eles apresentam restrição de mobilidade e podem ser classificados em fráctons do tipo-I, que são imóveis individualmente, mas possuem mobilidade de estados ligados, e fráctons do tipo-II, que não apresentam mobilidade. Se os estados ligados de fráctons do tipo-I possuem mobilidade restrita a uma dimensão eles são denominados lineons [9, 10]. Caso a restrição de mobilidade desses estados ligados seja em um plano recebem o nome de planons [9, 10].

São exemplos de sistemas que manifestam ordens quânticas os **Quantum Spin Liquids** (QSL) [11], que compõem um grupo de sistemas que não apresentam magnetização espontânea. Em duas dimensões observa-se modelos de rede como o $\mathbb{Z}_2$ **Lattice Gauge Theory** [12], o **Toric Code** [13–17] e o **Wen Plaquette Model** [2, 18–20] enquanto em três dimensões destacam-se o **X-Cube Model** [8–10, 21], o **Chamon Code** [22–24] e o **Haah Code** [6, 15, 25]. Todos esses modelos possuem hamiltonianas exatamente solúveis e aplicabilidade experimental. Além disso, observa-se que fases topológicas tem aplicabilidade em fenômenos de alta demanda tecnológica como a supercondutividade [26] e a computação quântica [3, 17, 27].

Este trabalho apresenta uma revisão teórica sobre a classificação e propriedades de modelos de rede que apresentam ordens topológicas e respeitam o grupo de simetria discreta $\mathbb{Z}_N$. Porém, mais do que discutir os modelos em si, espera-se apresentar ao leitor um panorama geral e introdutório sobre a área, servindo como base para ambientação em discussões de matéria condensada mais avançadas que incluem, por exemplo, a generalização do Paradigma de Landau para simetrias não generalizadas [28] e o entendimento mais profundo das degenerescências de cada modelo, considerando *higher-form symmetry* e *Subsystem Symmetries* [7].

No que concerne a estrutura do trabalho, o Capítulo 2 aborda em detalhes a fenomenologia de Landau e a descrição de fases que apresentam ordens quânticas. Focando dessa forma na diferenciação entre fases usuais e fases com comportamento topológico. No Capítulo 3 são discutidos três modelos de rede que apresentam ordem topológica em variedades bidimensionais com condições periódicas de contorno. Sendo feita a contagem do número de degenerescências no estado fundamental e o processo de criação e mobilidade das excitações. Primeiramente é apresentado o $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory, onde, em especial, é analisado: o número de estados independentes que respeitam a simetria de calibre; e uma análise de dois limites do hamiltoniano do modelo. Desses limites distingui-se

uma fase topológica e outra trivial. Em seguida são apontados os detalhes da formulação do Toric Code, com destaque para as propriedades das quasipartículas emergentes do modelo. Por fim, é feita a contagem da degenerescência do estado fundamental para diferentes paridades da rede do Wen Plaquette Model. Na última seção, como complemento, os dois últimos modelos são conectados por um mapa entre os operadores e uma rotação do sistema.

Para finalizar, o Capítulo 4 é dedicado a dois modelos de rede em variedades tridimensionais que possuem ordens fractônicas: O X-Cube Model e o Chamon Code. Através de mecanismos similares aos apresentados para modelos bidimensionais, discute-se tanto a contagem da degenerescência no estado fundamental quanto a construção dos operadores que criam e movem as excitações para ambos os modelos. Além disso, é mostrado como uma hamiltoniana efetiva para o X-Cube pode ser obtida via acoplamento de camadas do Toric Code apresentado na Seção 3.2. Por fim, o trabalho é concluído sintetizando com os principais tópicos de cada seção e apresentando perspectivas de trabalhos futuros.

# 2 FASES DA MATÉRIA

Para que o sistema seja completamente determinado é necessário um número mínimo de variáveis independentes conhecidas como graus de liberdade. A partir deles, as interações e estatística são construídas considerando-se apenas termos que contribuem para a descrição, evitando redundâncias ou imprecisões. A imposição de vínculos que fixam o valor dessas variáveis reduz o número de graus de liberdade. De forma mais precisa, cada vínculo diminui um grau de liberdade do sistema [29]. Diante disso, o presente capítulo apresenta os graus de liberdade para definir e diferenciar fases usuais e fases topológicas.

## 2.1 Fases usuais

Do ponto de vista termodinâmico, uma fase é determinada pelo conjunto de estados em equilíbrio determinados através de variáveis macroscópicas do sistema. Essa descrição é consideravelmente limitada pois exclui, por exemplo, estados que apresentam comportamento quânticos ou regidos por interações de curto alcance. Contudo, por meio dela é possível determinar comportamentos universais como as transições de fases, que existem independente do formalismo.

As fases podem ser classificadas segundo o comportamento da energia (energia livre) do sistema [1, 2]. Transições de primeira ordem são caracterizadas pela descontinuidade na derivada primeira da energia livre, por isso também recebem o nome de descontínuas, enquanto as transições de segunda ordem são caracterizadas pelas descontinuidade na derivada segunda, por isso são muitas vezes chamadas de transições contínuas.

As fases usuais da matéria também podem ser caracterizadas pelas simetrias do sistema. Sendo que, as simetrias são responsáveis pela degenerescência do estado fundamental. Contudo, uma vez que se determina um estado a simetria é dita espontaneamente quebrada. Este é o ponto chave, pois a hamiltoniana ainda é invariante sobre todas transformação de simetria, mas o estado não possui todas as simetrias que o hamiltoniano. Esse "quebra" é conhecida como *Quebra Espontânea de Simetria*.

Diante disso, Landau construiu uma teoria para transições de fase com base em um parâmetro de ordem. Onde esse parâmetro é uma quantidade física[1] do sistema que se transforma de forma não trivial durante a transição. O mecanismo pelo qual o parâmetro de ordem distingui as fases de um sistema ocorre através da medida de um operador local que o caracteriza. Se a medida do operador for zero diz-se que a fase é desordenada. Em

[1] A quantidade física que determina qual é o parâmetro de ordem de um sistema não necessariamente é um escalar.

contrapartida, se tiver um valor finito diz-se que a fase é ordenada.

O exemplo mais comumente usado na literatura para apresentar o teoria de Landau é o modelo ferromagnético. Suponha que inicialmente todos os spins de um sistema ferromagnético estejam desordenados, isso implica que na média a magnetização do sistema como um todo é nula. Porém, ao submeter o sistema a um campo exiliar que alinhe seus spins, a magnetização residual é diferente de zero ao se desligar o campo externo. Assim, considere a equação

$$M = \frac{1}{N} \sum_i S_i. \tag{2.1}$$

Neste caso, a magnetização ($M$) é o parâmetro de ordem e os operadores locais são os spins ($S_i$). Por isso, é comum que algumas referências expliquem de forma heurística que o parâmetro de ordem é responsável por medir o grau desordem de uma fase.

Além disso, a teoria considera também a construção de um funcional da energia livre

$$F[T; \psi(x)] = F_0(T) + F_L[T; \psi] \tag{2.2}$$

em que $T$ é a temperatura e $\psi(x) \equiv \psi$ é o parâmetro de ordem. Analisando a função para um sistema com simetria $\mathbb{Z}_2$, pode-se expandir o funcional em torno do parâmetro de ordem e extremizar a energia para obter os regimes sobre os quais se definem as fases do modelo. Os pormenores do desenvolvimento podem ser conferidos no Apêndice A. Com base nos resultados obtidos observa-se que na fase desordenada, quando $\psi = 0$, a temperatura do sistema é maior do que a temperatura crítica e na fase ordenada, quando $\psi \neq 0$, a temperatura do sistema é menor do que a temperatura crítica.

Em sistemas quânticos a construção do parâmetro de ordem segue o mesmo princípio de sistemas clássicos. Contudo, agora o parâmetro de ordem é medido através do valor esperado de um operador $\varphi$ do sistema que apresenta transformação não trivial após uma transição de fases [2]. Considerando a transformação $\langle\varphi\rangle \to e^{i\theta} \langle\varphi\rangle$ se observa a relação

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{na fase sem quebra de simetria} \\ \varphi_0 \neq 0 & \text{na fase com quebra de simetria} \end{cases}. \tag{2.3}$$

## 2.2 Ordens quânticas

Na Seção 2.1 formalizou-se a ideia de que fases da matéria podem ser identificadas através da quebra de simetria em sistemas físicos. Diante disso, um questionamento é pertinente: existem fases da matéria que não são descritas pela quebra da simetria usuais? A resposta é sim. Conforme apresentado em [2] essas fases são classificadas como "ordens quânticas". Elas ocorrem em sistemas quânticos que não apresentam simetria usuais espontaneamente quebradas e podem ser classificadas em subclasses, dentre elas: ordens

topológicas, ordens topológicas protegidas por simetrias e condensação de redes de *strings* (linhas).

### 2.2.1 Ordens topológicas

Ordens topológicas possuem três características predominantes. A primeira consiste na degenerescência do estado fundamental ser topológica e, portanto, os estados são globalmente invariantes sobre perturbações locais suaves. A segunda característica é a robustez do modelo à criação de excitações de baixas energias. Isto é, existe um gap de energia entre o estado fundamental e os primeiros estados excitados que não sofre alteração ao se incluir pertubações no sistema. Devido há essa estrutura do espectro de energia, esses sistemas são conhecidos como gapped e não são exclusivos de sistemas com ordem topológicas. Por fim, a terceira característica diz respeito a emergência de excitações exóticas da matéria que não são descritas puramente pela estatística de Bose-Einstein (bosônicas) ou pela estatística de Fermi-Dirac (fermiônicas). Essas excitações são conhecidas como **ânyons**. Elas são criadas aos pares através de operadores não locais abertos, conhecidos como *strings operator* (operadores de linha), e estão localizadas nas extremidades dos operadores. Elas emergem de através do fenômeno de fracionalização, resultante de um fator de fase não trivial perante a troca de posições [10, 13].

Os Quantum Spin Liquids (QSL) são exemplos de sistemas que apresentam ordens topológicas. Eles são caracterizados por fases com spins altamente emaranhados que não possuem magnetização espontânea mesmo a baixas temperaturas [15]. Em duas dimensões são exemplos os modelos $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory, o Toric Code e o Wen Plaquette Model.

### 2.2.2 Ordem fractônicas

As ordens fractônicas são um conjunto de fases com comportamento topólogico cujas excitações são fráctons. Dentre as propriedades presentes nesses sistemas está a forte dependência da degenerescência com o tamanho da rede. Sendo que, em geral, fases fractônicas apresentam estados altamente degenerados.

Uma das questões que prevalecem em aberto sobre o estudo de fases fractônicas. Baseada no conjunto modelos já estudados que apresentam características em comum, têm-se que ordens fractônicas se manifestam apenas em modelos com dimensão maior ou igual a $(3+1)d$ [15].

### 2.2.3 Ordens topológicas protegidas por simetrias

A descrição de fases topológicas não se limita aos modelos que apresentam ordem topológica intrínseca. Essa distinção é evidente considerando o estado de emaranhamento do sistema. Enquanto fases descritas por ordem topológicas possuem *Long Range Entan-*

*glement* (LRE) as fases com *Symmetry-Protected Topological* (SPT) possuem *Short Range Entanglement* (SRE) [3].

As SPTs possuem estado fundamental único e não apresentam excitações "exóticas". Elas descrevem fases não triviais que preservam as simetrias do hamiltoniano contra perturbações adiabáticas [3]. Em contraste com as fases ordinárias descritas pelo paradigma de Landau, onde as fases são determinadas pela quebra espontânea da simetria.

As SPTs podem ser caracterizadas por estados de borda (edge) [28] que contém uma obstrução a simetria que só pode ser removida através de uma correspondência entre a borda e o volume (bulk) do sistema. Essa obstrução a simetria é conhecida como anomalia e o fenômeno de correspondência como *anomaly inflow*.

## 2.3 Teoria efetivas

Teorias físicas em diferentes escalas apresentam diferentes graus de liberdade. Contudo, é possível que um teoria concebida em baixa energias (IR) seja descrita efetivamente por outra em altas energias (UV) e a recíproca é verdadeira. Para isso, consideram-se apenas os graus de liberdade que contribuam com a compreensão universal do sistema [30] preservando, assim, os aspectos mais importantes.

A teoria efetiva que captura as propriedades da fase topológica em baixas energias (IR) e as descreve em altas energias (UV) é a *Topological Quantum Field Theory* (TQFT) [15, 17].

# 3 MODELOS ANIÔNICOS EXATAMENTE SOLÚVEIS EM 2+1D

Neste capítulo serão discutidos três Quantum Spin Liquids em variedades bidimensionais: o $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory, o Toric Code e o Wen Plaquette Model. Individualmente, serão analisadas as degenerescências do estado fundamental, o mecanismo de criação de quasipartículas e sua mobilidade na rede.

## 3.1 $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory

O $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory é um modelo de rede quadrada que descreve fases com ordem topológica que respeitam o grupo de simetria $\mathbb{Z}_2$ para baixas energias. Em uma variedade bidimensional, a rede $\Lambda$ tem dimensão $k_x \times k_y$, onde $k_x$ é o número de sítios (vértices) no eixo $x$ e $k_y$ o número de sítios no eixo $y$. Nos links $l$ (arestas) da rede define-se os qubits[1] ($\mathbb{C}^2$) como graus de liberdade.

Os qubits de um link $l$ são uma combinação linear de dois estados quânticos independentes em superposição, expressos matematicamente como

$$|\psi_l\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \tag{3.1}$$

em que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ correspondem a orientação de spin 1/2 na base do operador de Pauli $\sigma^z$. Logo, cada qubit $l$ pertence a um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_l$ bidimensional.

A hamiltoniana para o $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory, proposta por Wagner [31], tem a forma

$$H = -g\sum_p B_p - t\sum_l \sigma_l^x, \tag{3.2}$$

em que $g$ e $t$ são constantes de acoplamento e

$$B_p = \prod_{l\in\partial p} \sigma_l^z \tag{3.3}$$

é o operador de plaquete definido como o produto de $\sigma^z$ nas bordas de cada plaquete ($\partial p$). O primeiro termo da Eq. (3.2) é a somatória dos operadores de plaquete para todo o $p$ e o segundo termo é a somatória da atuação individual do operador $\sigma^x$ sobre todos os links $l$. Considerando que os qubits estão definidos na base do operador de Pauli $\sigma^z$, conforme apresentado na Eq. (3.1) o primeiro termo mede o produto dos autovalores em um plaquete enquanto o segundo inverte a orientação dos spins. Convém acrescentar que

[1] Qubits é uma abreviação para *quantum bit* ("bit" quântico), a unidade lógica da computação quântica.

um operador $\sigma_l^\alpha$, com $\alpha = \{x, z\}$, atuando em um link $l$, como definido em [14], tem a forma

$$\sigma_l^\alpha = I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes \underset{(link\ l)}{\sigma^\alpha} \otimes \cdots \otimes I_2 \tag{3.4}$$

e a ação sobre os estado é

$$\sigma^z \left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle, \ \sigma^z \left|1\right\rangle = -\left|1\right\rangle, \ \sigma^x \left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle \ \text{ e } \sigma^x \left|1\right\rangle = \left|0\right\rangle. \tag{3.5}$$

O espaço de Hilbert total da rede é o produto tensorial de todos subespaços dos qubits,

$$\mathcal{H}_{total} = \bigotimes \mathcal{H}_l, \tag{3.6}$$

e a dimensão total do espaço vetorial da rede, considerando uma rede quadrada de dimensão $k \times k$ é $\dim(\mathcal{H}_{total}) = 2^{2k^2}$, em que $2k^2$ o número de links na rede[2].

De forma semelhante, o conjunto de estados do modelo corresponde ao produto tensorial de todos os qubits $l$, conforme expresso por

$$\left|\Psi\right\rangle = \bigotimes_{l=1}^{2k^2} \left|\psi_l\right\rangle = \left|\psi_1\right\rangle \otimes \left|\psi_2\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|\psi_{2k^2}\right\rangle = \left|\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{2k^2}\right\rangle. \tag{3.7}$$

Isso implica em um conjunto de $2^{2k^2}$ estados linearmente independentes, consistente com a dimensão do espaço de Hilbert total, que representam diferentes configurações de spin alinhadas na base de $\sigma^z$. Como, por exemplo,

$$\left|\psi\right\rangle = \underset{(1)}{\left|0, 0, \cdots, 0\right\rangle} + \underset{(2)}{\left|1, 0, \cdots, 0\right\rangle} + \underset{(3)}{\left|0, 1, \cdots, 0\right\rangle} + \underset{(4)}{\left|1, 1, \cdots, 0\right\rangle} + \underset{(\cdots)}{\cdots} + \underset{(2k^2)}{\left|1, 1, \cdots, 1\right\rangle}. \tag{3.8}$$

O primeiro vetor, sobre (1), é o estado com todos os spins orientados na direção *down* (para "baixo"). O segundo vetor, sobre (2), é o estado com apenas um spin, pertencente a um link qualquer da rede, alinhado na direção *up* (para "cima") e todos os demais orientados na direção *down*. Assim, os vetores correm sobre todas as combinações entre duas orientações possíveis de spins nos $2k^2$ links da rede, até se obter o último estado com todos os spins orientados na direção *up*.

Ao considerar que o modelo respeite as simetrias de calibre associadas grupo de simetria $\mathbb{Z}_2$ reduz-se o número de graus de liberdade do sistema. Isso impõe uma redundância na teoria, pois os estados fisicamente equivalentes por simetria, apesar de apresentarem diferentes configurações de spins, são mapeados por transformações de calibre.

Para determinar quais estados são protegidos pela simetria considera-se a atuação do operador

$$G_i = \prod_{l \in v_i} \sigma_l^x \tag{3.9}$$

[2] Considerando as condições periódica de contorno da rede, todos os sítios $k$ da rede estão associados a 4 links . Porém, cada link compartilha 2 sítios. Com isso, o número total de sítios em uma rede quadrada de dimensão $k \times k$ é $k^2$ enquanto o número de total de links é $(4/2)k^2 = 2k^2$

como gerador das transformações. Ele atua localmente nos vértices $i$ e, pela relação de comutação das matrizes de Pauli, o operador $G_i$ comutada com operadores $\sigma^x$ e anticomuta com $\sigma^z$. Essa relação pode ser expressa como

$$G_i \sigma_l^z G_i = \begin{cases} 1, & \text{se } l \in i \\ -1, & \text{se } l \notin i \end{cases}. \tag{3.10}$$

Nota-se, assim, que o operador $G_i$ comuta com a hamiltoniana definida na Eq. (3.2). Isso implica que operadores ambos possuem autovetores simultâneos. O que reforça a invariância do sistema sob transformações de calibre. A Figura 2 mostra a diagramação dos operadores $B_p$ e $G_i$ na rede.

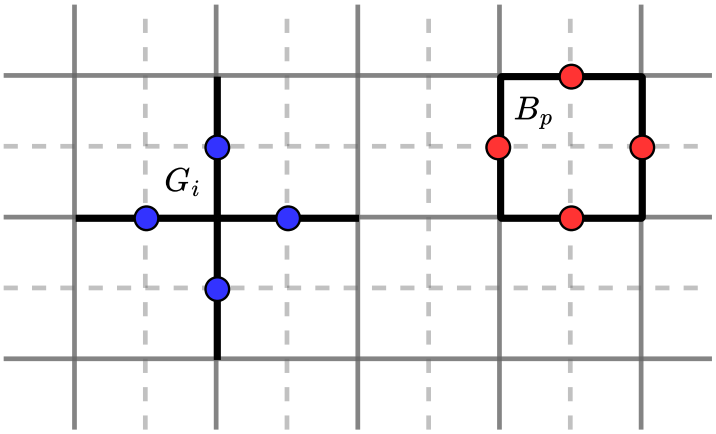


Figura 2 – Diagramação do modelo de rede $\mathbb{Z}_2$ com o operador de plaquete $B_p$, em vermelho, e o gerador da transformação de calibre local $G_i$, em azul.

Sabendo que

$$(G_1)^2 = \mathbb{I}, \tag{3.11}$$

o gerador das transformações de calibre $G_i$ juntamente com a identidade compõe um grupo de simetria de calibre local isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ no vértice $i$. Assim, a atuação do gerador da transformação $G_i$ relaciona dois estados $|\psi\rangle_1$ e $|\psi\rangle_2$ com configurações distintas de spins, mas fisicamente equivalentes através da operação

$$G_i |\psi\rangle_1 = |\psi\rangle_2 . \tag{3.12}$$

Da mesma forma, define-se um grupo de simetria local para cada sítio da rede. Logo, o grupo de calibre total $\mathcal{G}$ é o produto

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2^{(1)} \otimes \mathbb{Z}_2^{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_2^{(k^2)} \tag{3.13}$$

onde $\mathbb{Z}_2^{(n)}$ é o grupo de simetria local no sítio $n$ de um total de $k^2$ sítios. Como cada subgrupo pertencente a $\mathcal{G}$ contém dois elementos, o grupo de calibre total possui $2^{k^2}$ operadores, sendo eles

$$\mathcal{G} = \left\{ \prod_{i \in S} G_i \mid S \subseteq \{1, 2, \ldots, k^2\} \right\}. \tag{3.14}$$

Todavia, identifica-se duas transformações, nos elementos definidos na Equação (3.14), que não alteram o estado físico do modelo. A primeira é trivial, associada ao operador identidade, enquanto a segunda é a atuação do operador $\prod_{i=1}^{k^2} G_i$, que atua sobre todos os sítios da rede. Essas contribuições redundantes compõem um subgrupo de $\mathcal{G}$ conhecido como *Invariant Gauge Group* ($IGG$) [2], cuja definição pode ser matematicamente expressa como

$$IGG = \{ g\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \mid g \in \mathcal{G} \}. \tag{3.15}$$

Observa-se esse subgrupo também é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, visto que

$$IGG = \left\{ \mathbb{I}, \prod_{i=1}^{k^2} G_i \right\}. \tag{3.16}$$

e

$$\left( \prod_{i=1}^{k^2} G_i \right)^2 = \mathbb{I}. \tag{3.17}$$

Assim, o número de transformações de calibre não triviais é a razão entre o grupo de calibre total $\mathcal{G}$ e o $IGG$, ou seja,

$$\text{Nº de transf. de calibre} = \frac{\mathcal{G}}{IGG} = \frac{2^{k^2}}{2} = 2^{k^2-1}. \tag{3.18}$$

Consequentemente, o número de estados independentes, que correspondem ao espaço de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{fisico}}$ da teoria, é calculado pela razão entre a dimensão do espaço de Hilbert total $\mathcal{H}_{\text{total}}$ e o número de transformações de calibre não triviais:

$$\text{Nº de estados indep.} = \frac{\dim \mathcal{H}}{\text{Nº de transf. de calibre indep.}} = \frac{2^{2k^2}}{2^{k^2-1}} = 2^{k^2+1}. \tag{3.19}$$

O termo de plaquete $B_p$ recebe o nome de fluxo de $\mathbb{Z}_2$ e rotula $2^{k^2}$ estados, pois há dois autovalores possíveis para cada um dos $k^2$ plaquetes. Porém, conforme discutido por Wen em [2], o sistema respeita o vínculo

$$\prod_p B_p = 1,$$

rotulando assim, efetivamente, $2^{k^2-1}$ estados. Dessa forma, ainda falta determinar $2^2$ estados para se obter o total de estados independentes calculado em (3.19). Conforme será visto no decorrer do texto, recupera-se todos os estados ao considerar a degenerescência topológica presente no modelo.

### 3.1.1 Limite de baixas energias

No limite de baixas energias é interessante analisar as propriedades do sistema a partir da hamiltoniana definida na Eq. (3.2), como analisado em [15,31]. Quando $g \gg t$ o sistema está na chamada **fase desconfinada** e quando $g \ll t$ o sistema está na chamada **fase confinada**.

#### Fase desconfinada

Se $g \gg t$ pode-se considerar que $t \to 0$. Como consequência, mantêm-se apenas o termo de plaquete $B_p$ da hamiltoniana definida na Equação (3.2),

$$H_{fd} = -g \sum_p B_p. \tag{3.20}$$

Assim, o estado que minimiza a energia do sistema ocorre quando o autovalor de todos os termos de plaquetes é $+1$. Diante disso, diferentes configurações de spin podem minimizar a energia do sistema. A Figura 3 ilustra as possíveis configurações de spins nos plaquetes para que $B_p = +1$, em que $\uparrow$ e $\downarrow$ são, respectivamente, autovalores positivos e negativos referentes ao links $l \in \partial p$.

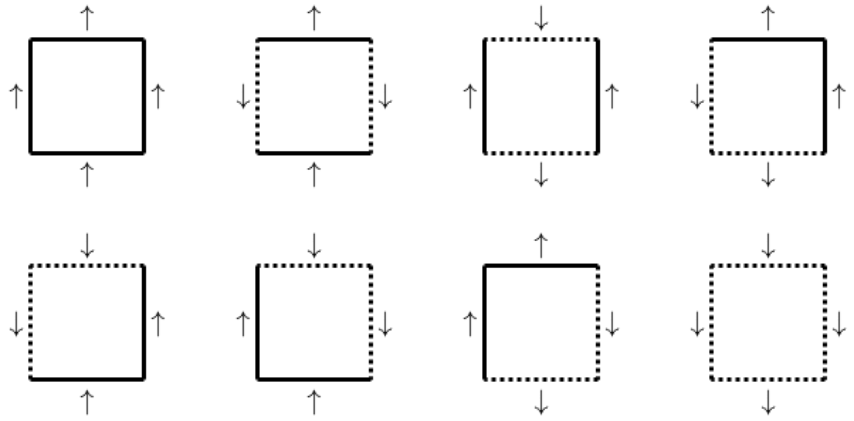

Figura 3 – Todas as configurações possíveis de spin que retornam autovalor $+1$ para os operadores de plaquete $B_p$.

Nesta fase, os estados físicos são invariantes sob as transformações de calibre locais $G_i$, definidos na Equação (3.9). O conjunto de estados superpostos com diferentes configurações de spin que minimizam a energia formam a base de autoestados da fase desconfinada.

Diante disso, defini-se o operador de projeção

$$\mathcal{P} = \prod_i (\mathbb{I} + G_i) \tag{3.21}$$

que atua sobre qualquer estado que minimize a energia do sistema e o projeta para uma base completa do subespaço físico do sistema invariante por gauge.

Considera-se, por conveniência, um estado de referência com todos os spins alinhados em uma direção, de modo que

$$|\Psi_0\rangle = \prod_i (\mathbb{I} + G_i) \, |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \, , \tag{3.22}$$

em que cada $|0\rangle$ representa um spin alinhado (estado de referência), escolhido apenas por simplicidade, e $|\Psi_0\rangle$ é um dos autoestados físicos da fase desconfinada, obtido aplicando o operador de projeção $\mathcal{P}$ sob estado de referência.

A energia do estado fundamental é calculada pela atuação da hamiltoniana $H_{fd}$ no estado definido na Equação (3.22). Sabendo que $k^2$ é o número de plaquetes da rede, verifica-se que

$$H_{fd} \, |\Psi_0\rangle = -g \sum_p B_p \, |\Psi_0\rangle = -gk^2. \tag{3.23}$$

Já as excitações no modelo decorrem da mudança de autovalor dos plaquetes de +1 para -1. Essas excitações são chamadas de **vórtices** e são criadas pela atuação de um operador $\sigma^x$, em um link $l$ da rede, no estado fundamental:

$$|\Psi\rangle' = \sigma_l^x \, |\Psi_0\rangle \, .$$

Como um link é compartilhado por dois plaquetes, a atuação de $\sigma_l^x$ cria um par de vórtices. O gap de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado é $\Delta E = E_1 - E_0 = 4g$. Esse gap garante que o sistema seja estável e robusto contra perturbações, uma característica de fases topológicas.

Contundo, apesar de ser impossível criar uma excitação isoladamente, as excitações podem ser deslocadas sem gasto energético desde que o operador $\sigma_k^x$ atue em um link $k$ que pertença a um dos plaquetes que também contém $l$ conforme pode ser conferido na Figura 4. É justamente a liberdade de deslocamento das excitações que batiza a fase como desconfinada.

Um detalhe interessante presente na Figura 4 é a presença da rede dual (pontilhada) cujos vértices se localizam no centro dos plaquetes da rede ordinária (contínua). De forma mais precisa, a rede dual é uma cópia da rede ordinária deslocada pela metade da diagonal de um plaquete. Portanto, como o sistema é invariante por translações [2], ambas as redes descrevem física equivalente. Por isso, são discriminadas strings que percorrem a rede ordinária e a rede dual, respectivamente, pela notação $\gamma$ e $\gamma^*$. Como elas existem nos dois eixos da rede, se for necessário, um subíndice as acompanhará especificando a trajetória. Essa relação de dualidade entre redes permite uma descrição mais completa dos observáveis que comutam com a hamiltoniana da fase desconfinada.

Assim, sobre a rede também se define outros dois observáveis. Os operadores de linha de Wegner-Wilson, definidos como

$$W_x = \prod_{l \in \gamma_x} \sigma_l^z \quad \text{e} \quad W_y = \prod_{l \in \gamma_y} \sigma_l^z, \tag{3.24}$$

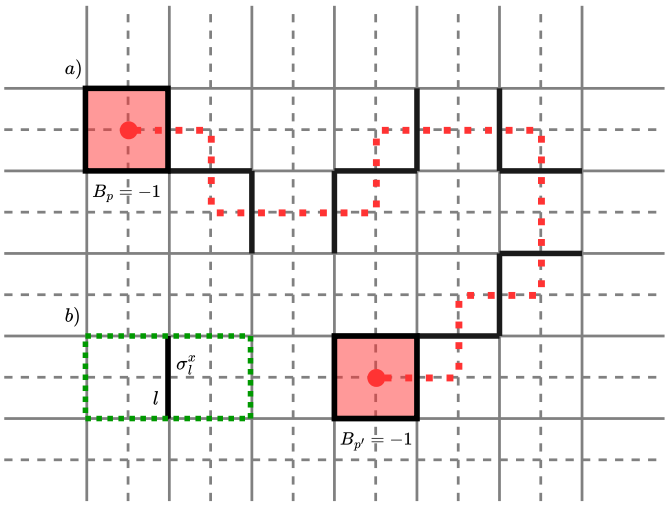


Figura 4 – (a) Os plaquetes $B_p$ e $B_{p'}$, preenchidos completamente com vermelho representam vórtices. A linha vermelha pontilhada indica a trajetória da excitação pela rede através do conjunto de atuação dos operadores $\sigma^x$ destacados nos links contínuos pretos. (b) O link $l$ em destaque contínuo preto recebe a atuação do operador $\sigma^x$; os links em destaque pontilhado verde são candidatos a receberam atuação de outro operador $\sigma^x$ para mover a excitação.

que medem o fluxo $\mathbb{Z}_2$ sobre uma curva fechada $\gamma$. E os operadores de linha de 't Hooft, definidos como

$$V_x = \prod_{l \in \gamma_x^*} \sigma_l^x \quad \text{e} \quad V_y = \prod_{l \in \gamma_y^*} \sigma_l^x, \tag{3.25}$$

os quais invertem a orientação dos spins sobre uma curva fechada $\gamma^*$. A Figura 5 ilustra a representação dos operadores da Eqs. (3.24) e (3.25) na rede.

Como os operadores $W_x$, $W_y$ e $H_{fd}$ são definidos em termos apenas de operadores $\sigma^z$ eles comutam trivial,

$$[W_x, H] = [W_x, H] = 0. \tag{3.26}$$

Agora, como os operadores $V_x$ e $V_y$, definidos em termos de matrizes $\sigma^x$, descrevem curvas fechadas na rede há sempre um número par de links compartilhados com a $H_{fd}$, logo apresentam um número par de anticomutações entre os operadores, o que implica em

$$[V_x, H] = [V_y, H] = 0, \tag{3.27}$$

Para os geradores das transformações de calibre a regra de comutação com os operadores é

$$[W_x, G_i] = [W_y, G_i] = [V_x, G_i] = [V_y, G_i] = 0. \tag{3.28}$$

Nesse caso, $V_x$, $V_y$ e $G_i$ são escritos em termos do mesmo operador $\sigma_x$ e, portanto, comutam trivialmente. Já $W_x$, $W_y$ ao cruzarem um sítio qualquer da rede obrigatoriamente atuam sobre dois links para completarem uma curva fechada. Sabendo que os operadores

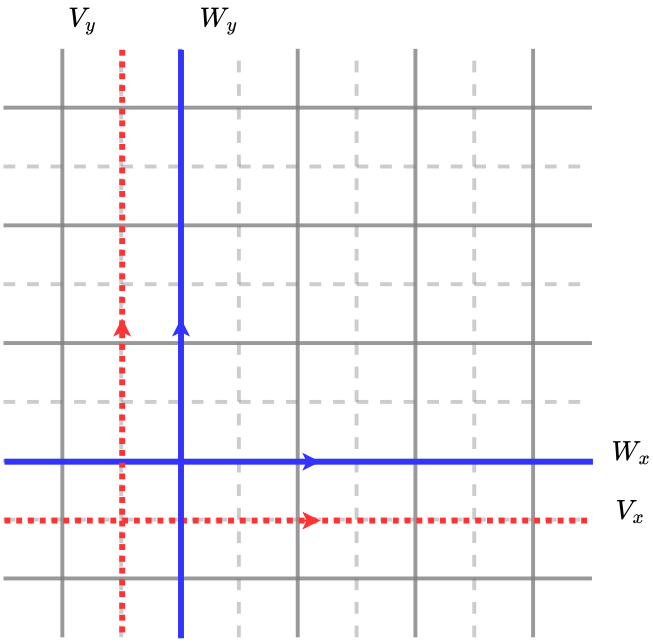


Figura 5 – As curvas azuis, sobre a rede ordinária, representam o operador de Wegner-Wilson e as curvas vermelhas, sobre a rede dual, representam os operadores de 't Hooft.

de calibre locais atuam sobre os quatro links pertencentes ao sítio que compartilham, inevitavelmente o operador $G_i$ anticomuta duas vezes com os operadores de linha de 't Hooft e, em decorrência disso, efetivamente comutando.

Em contrapartida, a relação de comutação entre os operadores de linha é

$$W_\alpha V_\beta = -V_\beta W_\alpha. \tag{3.29}$$

Logo, os operadores de Wegner-Wilson e 't Hooft possuem autoestados simultâneos com a hamiltoniana, mas não compartilham autoestados simultaneamente. Isso permite definir os estados

$$V_x \left|\Psi_0\right\rangle = \left|\Psi_1\right\rangle, \quad V_y \left|\Psi_0\right\rangle = \left|\Psi_2\right\rangle \quad \text{e} \quad V_x V_y \left|\Psi_0\right\rangle = \left|\Psi_3\right\rangle. \tag{3.30}$$

como sendo linearmente independentes. O conjunto dos quatro estados $|\Psi_0\rangle$, $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_3\rangle$ e $|\Psi_4\rangle$ constituem a degenerescência do estado topológico. Juntando todas as $2^{k^2-1}$ configurações independentes mapeadas pelo operador de plaquete $B_p$ com a quadrupla degenerescência topológica ($2^2$) do modelo, todos os $2^{k^2+1}$ estados invariantes de calibre estão determinados.

**Fase confinada**

Se $g \ll t$ pode-se considerar $g \to 0$. Nesse limite, o termo de plaquete da hamiltoniana definida na Equação (3.2) é desprezível e pode ser desconsiderado. A hamiltoniana efetiva dessa fase é escrita simplesmente como

$$H_{fc} = -t \sum_l \sigma_l^x. \tag{3.31}$$

O estado que minimiza a hamiltoniana da fase confinada deve retornar apenas autovalores positivos dos autovetores de $\sigma^x$ em todos os links da rede. Ou seja, o estado fundamental é a configuração em que todos os spins estão orientados na base de operadores $\sigma^x$. O produto tensorial dos autovetores configura o estado base da hamiltoniana

$$|\Rightarrow\rangle = \bigotimes_l^{2k^2} |+\rangle_l \,, \tag{3.32}$$

em que $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são autoestados de base do operador $\sigma^x$.

A energia do estado fundamental é facilmente calcula, pois trata-se da contribuição de todos de todos os $2k^2$ links da rede medido pelo operador hamiltoniano na base definida em (3.32), de modo que $E_0 = -2k^2 t$. O primeiro estado excitado decore da atuação do operador $\sigma_l^z$ sobre $|\Rightarrow\rangle$, cuja ação inverte o spin no link $l$ e exige uma um custo energético de $\Delta E = 2t$.

As excitações nessa fase são criadas por operadores locais alterando o autovalor individualmente de um elemento da rede, diferentemente do que ocorre na fase desconfinada. Essa excitação não possui mobilidade e, por isso, são consideradas confinadas[3].

Observa-se que há uma conveniência na escolha das bases para cada fase. Enquanto na fase desconfinada o estado fundamental é definido em termos das bases do operador $\sigma^z$, na fase confinada o estado fundamental é definido em termos das bases do operador $\sigma^x$. Se fosse convencionado manter a mesma base dos operadores de Pauli em ambas as fases não haveria perdas físicas nem conceituais. Inclusive, como a base de $\sigma^z$ é uma combinação linear das bases de $\sigma^x$ (e a recíproca é verdadeira), o estado definido na Equação (3.32) pode ser reescrito como um conjunto de configurações de spin orientados na base de $\sigma^z$.

Como o hamiltoniano contém apenas termos $\sigma^x$ independente da forma como se aplica o gerador de transformação de calibre $G_i$, os estados invariantes por calibre são mapeadas neles mesmos. Essa relação é trivial ao se observar que ambos são definidos como produtos de $\sigma^x$, ou seja, comutam trivialmente. Além disso, não são observadas degenerescências no estado fundamental, isso pois apenas os operadores de linha de t´Hooft comutam com a hamiltoniana e apresentam autovalor $+1$. Desse modo, não são observadas características topológicas na fase confinada.

[3] Apesar das excitações não possuírem mobilidade, por se manifestarem em uma fase trivial, não são fráctons.

**Região de transição**

Após analisar os dois limites da teoria, é válido avaliar a hamiltoniana da fase desconfinada, quando $g \gg t$, com $t \neq 0$. A inclusão do segundo termo da hamiltoniana é interpretada como uma perturbação no sistema que mantêm a relação de comutação entre a hamiltoniana com os operadores de linha de 't Hooft, mas não conserva a relação de comutação da hamiltoniana com os operadores de linha de Wilson.

Em virtude disso, a hamiltoniana não possui mais autovetores simultâneos com $W_x$ e $W_y$ e os estados definidos em (3.30) apresentam um gap de energia proporcional ao tamanho da rede, como apresentado em [31], e medida de ordem $\Delta E \sim g(t/g)^L$ sendo $L$ o tamanho da rede. Porém, no limite termodinâmico $L \to \infty$, se $t$ é muito menor que $g$ a diferença de energia tende a zero recuperando a degenerescência do estado fundamental. O que corrobora para natureza topológica da fase robusta a perturbações. A Tabela 1 resumo os tópicos apresentados nesta seção.

| | **Fase desconfinada** | **Região de transição** | **Fase confinada** |
|---|---|---|---|
| Const. de acoplamento | $t \ll g$ | $t < g$ com $g \neq 0$ | $g \ll t$ |
| Degenerescência | $2^{k^2+1}$ | $2^{k^2+1}$ (no limite termodinâmico) | Ausente |
| Op. de linha de Wilson | Comuta com a hamiltoniana | Não comuta com a hamiltoniana | Não comuta com a hamiltoniana |
| Op. de linha de t'Hooft | Comuta com a hamiltoniana | Comuta com a hamiltoniana | Comuta com a hamiltoniana |
| Excitações | Topológicas | Topológicas | Locais |

Tabela 1 – Distinção entre a fase desconfinada, a região de transição e a fase confinada do $\mathbb{Z}_2$ Lattice Gauge Theory.

## 3.2 Toric Code

Neste seção, considera-se o Toric Code discutido em [13]. Em que o modelo é definido em uma rede quadrada $\Lambda$ de tamanha $k \times k$ com condições periódicas sobre uma a variedade bidimensional de genus 1, cuja a hamiltoniana é

$$H = \sum_p B_p + \sum_v A_v \tag{3.33}$$

onde

$$B_p = \prod_{l \in \partial p} \sigma_l^z \tag{3.34}$$

e

$$A_s = \prod_{l \in s} \sigma_l^x \tag{3.35}$$

são chamados operadores estabilizadores. Em que $B_p$ atua sobre os links pertencentes as bordas dos plaquetes $p$ e $A_s$ atua sobre os links pertencentes ao links ao vértice $s$. O espaço de Hilbert total $\mathcal{N}$, assim como no modelo de rede $\mathbb{Z}_2$, é produto tensorial de todos os subespaços vetoriais dos qubits localizados nos links $l$ da rede. Portanto, da dimensão de

$$\dim \mathcal{N} = 2^{2k^2}, \tag{3.36}$$

sendo $2k^2$ o número de links na rede.

Observa-se que $(A_v)^2 = \mathbb{I}$ e $(B_p)^2 = \mathbb{I}$, o implica que os autovalores dos operadores são $\pm 1$ e que a regra de comutação entre os operadores é

$$[A_s, A_{s'}] = [B_p, B_{p'}] = 0 \tag{3.37}$$

e

$$[A_s, B_p] = 0. \tag{3.38}$$

Isso pois, os operadores de estrela comutam entre si, pois são definidos a partir de operadores de Pauli $\sigma^x$, que comutam trivialmente consigo mesmo, como ilustrado na Figura 6*a)*. De forma análoga, os operadores plaquete comutam trivialmente entre si, pois são definidos a partir de operadores de Pauli $\sigma^z$, como apresentado na Figura 6*c)*. A comutação não trivial ocorre entre os operadores estrela e os operadores de plaquete. Eles comutam porque compartilham dois links. Em cada um desses links, os operadores $\sigma^x$ e $\sigma^z$ anticomutam e o sinal negativo $(-1)$ de cada anticomutação se cancela, levando à comutação global dos operadores, como ilustrado na Figura 6*b)*. Pode-se concluir com isso que ambos os operadores compartilham o mesmo conjunto de autovetores linearmente independentes $|\psi\rangle$.

O estado fundamental do Toric Code é definido no subespaço protegido $\mathcal{L}$ em que os operadores definidos nas Equações (3.34) e (3.35) respeitam a condição de estabilidade

$$\mathcal{L} = \{|\psi\rangle \in \mathcal{N} : \; A_s |\psi\rangle = |\psi\rangle \, , \, B_p |\psi\rangle = |\psi\rangle \; \forall \, s, p\}, \tag{3.39}$$

em que $|\psi\rangle$ são chamados de setores lógicos do código. Considere que o estado $|\psi\rangle$ é escrito em termos da base dos operadores $\sigma^z$. A atuação dos operadores de plaquete mede o autovalor dos estados correspondentes ao links $l$ que pertencem ao plaquete $p$. Enquanto a atuação dos operadores estrela inverte a orientação dos spins dos links $l$ pertencentes a um sítio $s$.

Dessa forma, a condição $B_p |\psi\rangle = |\psi\rangle$ restringe, entre todas as configurações de spins possíveis, apenas os estados que pertencem ao subespaço protegido em que $B_p = 1 \, \forall p \in \Lambda$. De forma semelhante, a condição $A_v |\psi\rangle = |\psi\rangle$ restringe apenas os autoestados

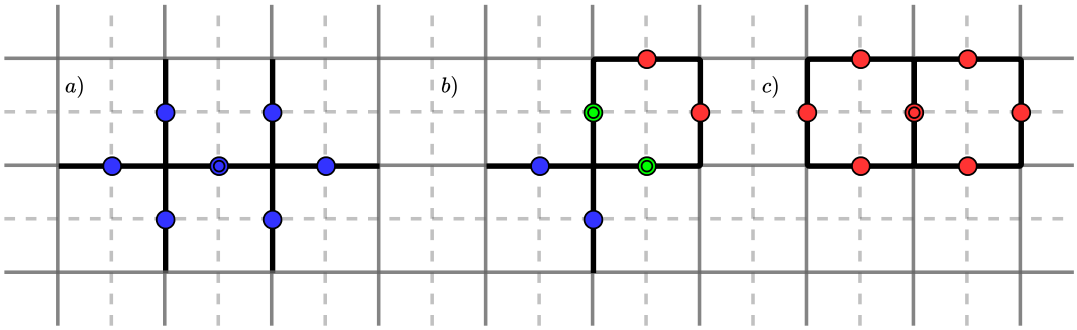


Figura 6 – Os círculos coloridos em azul representam os operadores de Pauli $\sigma^x$; em vermelho os operadores $\sigma^z$; e verde o produto dos operadores $\sigma^x\sigma^z$. Os contornos simples e duplos indicam, respectivamente, a atuação de um operador e dois operadores. (a) Comutação entre dois operadores estrela. (b) Comutação entre um operador estrela e um operador plaquete. (c) Comutação entre dois operadores plaquete.

em que $A_v = 1\,\forall s \in \Lambda$. Sendo que a única forma de mudar as orientações dos spin sem criar excitações na rede é através de operadores de loops fechados.

Além disso, ao definir as condições do subespaço protegido, observa-se duas relações dos operadores estabilizadores: $\prod_v A_v = \mathbb{I}$ e $\prod_p B_p = \mathbb{I}$. Essas relações são interpretadas como vínculos, em que cada uma contribui com $k^2 - 1$ restrições ao espaço de Hilbert físico. Assim, a dimensão do subespaço protegido $\mathcal{L}$ é

$$\dim \mathcal{L} = \frac{\dim \mathcal{N}}{\text{Nº de vínculos}} = \frac{\dim \mathcal{N}}{(\text{Vín.})_s(\text{Vín.})_p} = \frac{2^{2k^2}}{2^{(k^2-1)} \cdot 2^{(k^2-1)}} = 2^2. \tag{3.40}$$

É valido ressaltar que a dimensão desse espaço vetorial depende da topologia, pois a contagem do número de qubits depende das condições periódicas de contorno e o número de genus do sistema. Para um caso geral, a dimensão do espaço protegido, considerando uma superfície de genus $g$, é $2^{2g}$

A partir do projetor

$$\mathcal{P} = \prod_s \frac{(\mathbb{I} + A_s)}{2} \prod_p \frac{(\mathbb{I} + B_p)}{2}. \tag{3.41}$$

atuando em um estado de referência

$$|\xi\rangle = \prod_{l=1}^{2k^2} |0\rangle_l \tag{3.42}$$

projeta-se todos os estados de base que são autoestados de $A_v$ e $B_p$ [15, 32]. Assim, um

estado do Toric Code pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \mathcal{P}\,|\xi\rangle \\ &= \prod_s \frac{(\mathbb{I}+A_s)}{2} \prod_p \frac{(\mathbb{I}+B_p)}{2}\,|\xi\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.43}$$

mas como $B_p\,|0\rangle = +1\,|0\rangle$ isso implica que

$$\prod_p \frac{(\mathbb{I}+B_p)}{2}\,|\xi\rangle = |\xi\rangle\,, \tag{3.44}$$

logo

$$|\psi\rangle = \prod_s \frac{(\mathbb{I}+A_s)}{2}\,|\xi\rangle\,. \tag{3.45}$$

Conforme as relações de comutação apresentadas nas Equações 3.37 e 3.38, é fácil ver que $\mathcal{P}$ comuta com os operadores estabilidades de estrela e plaquete. A Figura 7 ilustra a atuação do projeto $\mathcal{P}$ no estado $|\xi\rangle$.

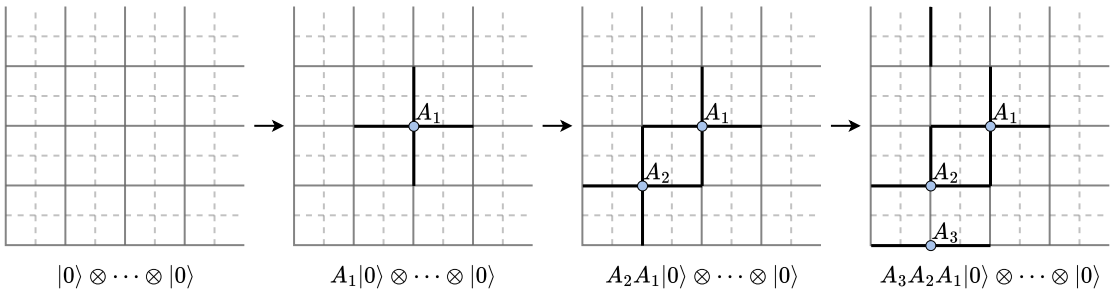


Figura 7 – Operações sequenciais de operadores estrelas em um estado de referência, ilustrando a atuação do projetor $\mathcal{P}$, selecionando os autoestados que pertencem ao subespaço protegido $\mathcal{L}$ do Toric Code.

Assim, a energia do estado fundamental é obtida pela atuação da Hamiltoniana $H_{TC}$ definida na Eq. (3.33) sobre o estado $|\psi\rangle$, definido na Eq. (3.45). Portanto,

$$\begin{aligned} H_{TC}\,|\psi\rangle &= -J\left(\sum_{s=1}^{k^2} A_v\,|\psi\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} B_p\,|\psi\rangle\right) \\ &= -J\left(\sum_{s=1}^{k^2} +1\,|\psi\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} +1\,|\psi\rangle\right) \\ &= -J\Big(k^2+k^2\Big)\,|\psi\rangle \\ &= -J2k^2\,|\psi\rangle\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nota-se com isso que a soma sobre os operadores estrela contribui com o mesmo valor que a soma sobre os operadores de plaquete.

### 3.2.1 Excitações

As excitações do modelo são defeitos topológicos detectados pelos operadores estabilizadores. Elas podem ser entendidas como quasipartículas emaranhadas emergentes em fases topológicas. Considere a regra de comutação $\left[\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\beta\right] = 2i\delta_{ij}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma^\gamma$, mantendo a notação de índices latinos para a rede e índices gregos para representação das matrizes de Pauli.

Os estados excitados são criados a partir da atuação dos operadores $\sigma^x$ e/ou $\sigma^z$ sobre o estado fundamental,

$$|\psi'\rangle = \sigma_l^x |\psi_0\rangle \quad \text{e} \quad |\psi''\rangle = \sigma_l^z |\psi_0\rangle . \tag{3.47}$$

O operador $\sigma^x$ gera duas excitação medidas por dois operadores de plaquete e o operador $\sigma^z$ gera duas excitação medidas por dois operadores estrela. Isso ocorre pois todos os links da rede têm dois operadores de cada "flavor" que o compartilham, conforme ilustrado na Figura 8. A excitação[4] detectada pelo operador estrela é observada quando $A_{s\subset i}|\psi'\rangle = -1|\psi'\rangle$ e pode ser interpretada como uma quasipartícula "elétrica", $e$, enquanto a excitação detectada pelo operador de plaquete é observada quando $B_{p\subset i}|\psi''\rangle = -1|\psi''\rangle$ e pode ser interpretada como uma quasipartícula"magnética", $m$.

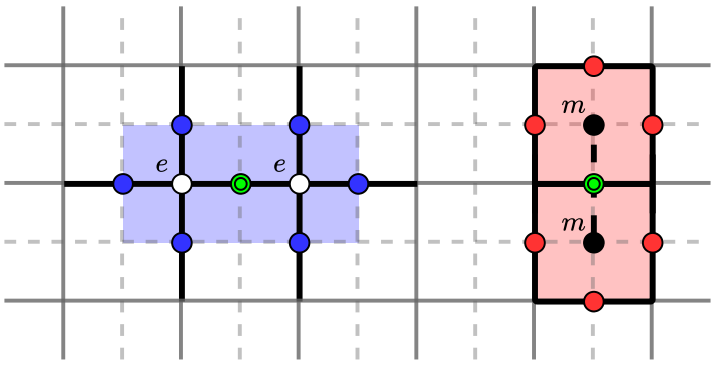


Figura 8 – Círculos azuis indicam a atuação de operadores $\sigma^x$, vermelhos $\sigma^z$ e verdes $\sigma^x\sigma^y$. Representação de excitações elétricas (esquerda) e magnéticas (direita). Fonte: Adaptado de [14].

A energia das excitações pode ser medida aplicando o hamiltoniano $H_{TC}$ nos es-

[4] Algumas referências se referem as partículas elétricas como éxons e as partículas magnéticas como magnos. A terminologia adotada depende da área e do contexto.

tados definidos em (3.47). Assim, observa-se que

$$\begin{aligned} H\left|\psi'\right\rangle &= -J\left(\sum_{v=1}^{k^2} A_v\left|\psi'\right\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} B_p\left|\psi'\right\rangle\right) = -J\left(\sum_{v=1}^{k^2} A_v\sigma_i^x\left|\psi\right\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} B_p\sigma_i^x\left|\psi\right\rangle\right) \\ &= -J\left(-\sigma_i^x B_c\left|\psi\right\rangle - \sigma_i^x B_{c'}\left|\psi\right\rangle + \sum_{v=1}^{k^2}\sigma_i^x A_v\left|\psi\right\rangle + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq c,c'}}^{k^2}\sigma_i^x B_p\left|\psi\right\rangle\right) \\ &= -J(-1-1+k^2+(k^2-2))\sigma_i^x\left|\psi\right\rangle = -J(2k^2-4)\left|\psi'\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.48}$$

e, de forma semelhante,

$$\begin{aligned} H\left|\psi''\right\rangle &= -J\left(\sum_{v=1}^{k^2} A_v\left|\psi''\right\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} B_p\left|\psi''\right\rangle\right) = -J\left(\sum_{v=1}^{k^2} A_v\sigma_i^z\left|\psi\right\rangle + \sum_{p=1}^{k^2} B_p\sigma_i^z\left|\psi\right\rangle\right) \\ &= -J\left(-\sigma_i^z A_s\left|\psi\right\rangle - \sigma_i^z A_{s'}\left|\psi\right\rangle + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq s,s'}}^{k^2}\sigma_i^z A_v\left|\psi\right\rangle + \sum_{p=1}^{k^2}\sigma_i^z B_p\left|\psi\right\rangle\right) \\ &= -J(-1-1+(k^2-2)+k^2)\sigma_i^z\left|\psi\right\rangle = -J(2k^2-4)\left|\psi''\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.49}$$

A diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado vale $\Delta E = E_1 - E_0 = 4J$. Contudo, é importante lembrar que uma excitação cria duas quasipartículas, cada uma com mesma energia e, portanto, com custo energético $2J$ independente de sua natureza ($e$ ou $m$).

Até o momento foram apresentadas apenas semelhanças entre as quasipartículas do Toric Code. Por exemplo, serem medidas pela mudança de autovalor dos respectivos observáveis e apresentarem o mesmo gap de energia para serem criadas. Diante disso, vale ressaltar que as partículas elétricas pertencem a rede ordinária, localizadas nos vértices das excitações, enquanto as partículas magnéticas pertencem a rede dual localizadas no centro do plaquete.

Considere o estado

$$\sigma_{l+1}^x\sigma_l^x\left|\psi_0\right\rangle = \left|\psi\right\rangle \tag{3.50}$$

. Conforme visto anteriormente a atuação de $\sigma_l^x$ altera o autovalor de dois operadores de plaquete que compartilham o mesmo $l$-ésimo link. Mas algo interesse acontece se aplicar o operador $\sigma^x$ no link seguinte. O plaquete que contém tanto o link $l$ quanto $l+1$ retorna ao autovalor inicial enquanto seu vizinho, que compartilha o $l+1$-ésimo link, agora, muda seu autovalor. Isso pode ser interpretado como uma mobilidade, pois a excitação aniquilou a quasipartículas associada a um plaquete e criou outra no plaquete vizinho. A demonstração mais explicita é descrita no Apêndice B

Aplicando consecutivamente os operadores que geram as excitações de vértice, diz-se que uma string $\gamma$ é o caminho percorrido pelas quasipartículas na rede ordinária. Para o caso das excitações de plaquete, a string $\gamma*$ acompanha as excitações na rede dual. Com

isso em mente, é possível construir os chamados operadores de linha (*string operators*), definidos como

$$S_{\gamma}^{z} = \prod_{i\in\gamma} \sigma_i^z \quad \text{e} \quad S_{\gamma*}^{x} = \prod_{i\in\gamma*} \sigma_i^x. \tag{3.51}$$

Com base na exigência de um gap de energia para criação do par de quasipartículas é natural induzir que movê-las pelas redes tenha algum custo energético. Porém, ao lembrar que mover uma quasipartícula é um processo que exige a aniquilação de uma para a criação da outra entre operadores vizinhos percebe-se a compensação de energia mantendo o número total de excitações. Assim, as excitação podem se mover adiabaticamente sem custo energético adicional.

Há três tipos operadores de linha gerados por diferentes curvas: abertas, fechadas contráteis e fechadas não contráteis. Os operadores definidos em curvas abertas contém as excitações em suas extremidades. Os operadores definidos em curvas fechadas contráteis são triviais, pois não alteram o estado lógico do sistema. Ja os operadores de linha definidos em curvas fechadas não contráteis preservam a energia do estado fundamental, porém atuam globalmente alterando o estado lógico do sistema.

Devido a relação de anticomutação entre os operadores $S_{\gamma}^{x}$ e $S_{\gamma*}^{z}$ não há como diagonalizar simultaneamente os operadores de linha definidos em curvas não contráteis. Consequentemente, não compartilham a mesma base de autovetores. Assim, a atuação desses operadores de linha mapeia efetivamente diferentes estados fundamentais. Como ambos os operadores percorrem curvas não contráteis nos dois eixos da superfície bidimensional os estados de vácuo são

$$\left|\psi_0^{(2)}\right\rangle = S_{\bar{\mathcal{C}}_1}^{x} \left|\psi_0^{(1)}\right\rangle, \quad \left|\psi_0^{(3)}\right\rangle = S_{\bar{\mathcal{C}}_2}^{x} \left|\psi_0^{(1)}\right\rangle, \quad \left|\psi_0^{(4)}\right\rangle = S_{\bar{\mathcal{C}}_1}^{x} \circ S_{\bar{\mathcal{C}}_2}^{x} \left|\psi_0^{(1)}\right\rangle. \tag{3.52}$$

Todos os estados obtidos devem respeitar as condições de minimização da energia. Pode-se, assim, escrever um estado genérico do modelo como a combinação linear dos estados como

$$|\Psi\rangle = \alpha \left|\psi_0^{(1)}\right\rangle + \beta \left|\psi_0^{(2)}\right\rangle + \gamma \left|\psi_0^{(3)}\right\rangle + \eta \left|\psi_0^{(4)}\right\rangle, \tag{3.53}$$

em que os coeficientes obedecem a normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1$. Isso significa que não é possível a partir apenas de inversão de spin que respeitam $A_v \left|\psi_0^{(1)}\right\rangle$ obter todas as configurações possíveis de loop. É necessário percorrer a rede. Portanto, o Toric Code possui uma quadrupla degenerescência no estado fundamental.

### 3.2.2 Estatística das excitações

A próxima etapa para entender a fenomenologia das excitações no Toric Code é explorar a estatísticas das quasipartículas. Como as quasipartículas são defeitos topológicos na rede é necessário submetê-las a medidas que não alterem a energia do estado

lógico do sistema e retornem estatísticas não triviais. Conforme visto na sessão anterior, curvas contráteis mantém o estado topológico, logo é necessário mover excitações entorno de outras e comparar os estados antes e após a ação dos operadores.

Por isso, considere que dois estados, inicial e final, estão vinculados por

$$|\psi\rangle_{fin} = \mathcal{L}^{\beta}_{p_1 p_2} |\psi\rangle_{ini} \tag{3.54}$$

em que $\mathcal{L}^{\beta}_{p_1 p_2}$, exemplificado na Figura 9, é uma curva fechada $\beta$ feita por um operador de linha que move uma quasipartícula $p_1$ em torno de uma curva fechada sobre quasipartícula $p_2$. Considere a notação $p_1 - p_2$ para representar as partículas envolvidas sobre as curvas.

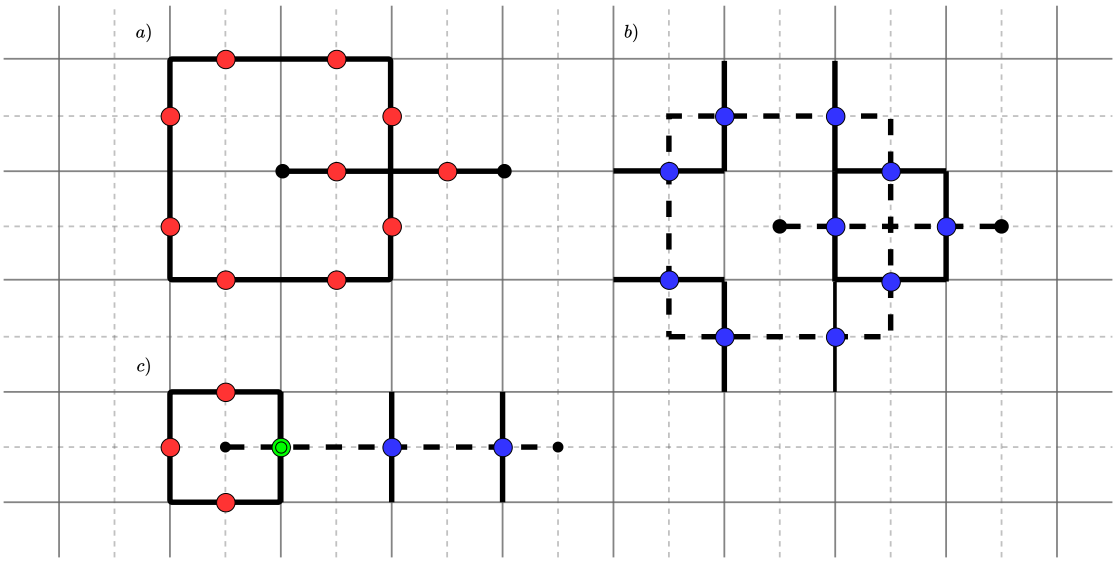


Figura 9 – (a) Curvas do tipo $e - e$. (b) Curvas do tipo $m - m$. (c) Curvas do tipo $m - e$.

Naturalmente, se o operador de linha que move a partícula $p_1$ for de mesma natureza que cria a partícula $p_2$, devido a relação de comutação trivial, o estado final é igual ao estado inicial, implicando que em uma estatística bosônica para as excitações magnéticas e elétricas.

O caso interessante ocorre quando esses operadores são diferentes, ou seja, quando uma partícula elétrica descreve uma curva fechada entorno de uma partícula magnética, e reciprocamente, quando uma partícula elétrica descreve uma curva fechada entorno de uma partícula magnética, pois, devido a relação de anticomutação, o estado final difere do estado inicial por uma fase $-1$.

A composição entre as excitações elétricas e de excitações magnéticas retorna uma um quasipartícula fermiônica

$$\epsilon = e \times m. \tag{3.55}$$

Porém, se um operador de linha percorrer duas curvas contráteis em torno da extremidade de um operador de linha de diferente natureza o estado final é igual ao estado inicial.

Considerando o operador identidade, fecha-se o conjunto $\mathcal{Q}$ com todas as quasi-partículas do modelo formado pelos elementos

$$\mathcal{Q} = \{\mathbb{I}, e, m, \epsilon\}\,.$$

De modo que as regras de fusão do Toric Code, convencionando $p_1 \equiv e$, $p_2 \equiv m$ e $p_3 \equiv \epsilon$, entre as quasipartículas é

$$p_l \times p_m = \delta_{lm} + \varepsilon_{lmn} p_n \tag{3.56}$$

e

$$\mathbb{I} \times p_l = p_l \times \mathbb{I} = p_l. \tag{3.57}$$

A Tabela 2 agrupa todas combinações de entre as quasipartículas.

| $\times$ | $\mathbf{1}$ | $\boldsymbol{e}$ | $\boldsymbol{m}$ | $\boldsymbol{\epsilon}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ | $e$ | $m$ | $\epsilon$ |
| $e$ | $e$ | $\mathbf{1}$ | $\epsilon$ | $m$ |
| $m$ | $m$ | $\epsilon$ | $\mathbf{1}$ | $e$ |
| $\epsilon$ | $\epsilon$ | $m$ | $e$ | $\mathbf{1}$ |

Tabela 2 – Regras de fusão das quasipartículas do Toric Code.

### 3.2.3 "Arbitrariedade" na escolha de base

A hamiltoniana é invariante pela escolha da base dos operadores de Pauli dos qubits, mas o significado físico dos operadores de $A_v$ e $B_p$ depende da base.

- Na escolha de base $\sigma^z$, que formam um conjunto ortogonal dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, os operadores $\sigma^z$ medem o autovalor dos estados enquanto $\sigma^x$ invertem a orientação dos spins. Os operadores de plaquetes são diagonais e medem o fluxo magnético na rede enquanto os operadores estrela medem a presença de carga $e$.

- Na escolha de base $\sigma^x$, que formam um conjunto ortogonal dos estados $|+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|-\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)$, os operadores $\sigma^x$ medem o autovalor dos estados enquanto $\sigma^z$ atua como operadores de inversão dos spins. Os operadores de plaquetes são diagonais e medem a excitações elétricas enquanto os operadores estrela medem o fluxo magnético.

A escolha da base $\sigma^z$ é, usualmente, mais utilizada.

## 3.3 Wen Plaquette Model

O Wen Plaquette Model é definido em um variedade bidimensional com condições periódicas de contorno sobre uma rede com $k_x \times k_y$ sítios, onde $k_x$ é número de sítios no eixo $x$ e $k_y$ o número de sítio no eixo $y$. Dentre as diferenças com o Toric Code, os graus de liberdade do modelo proposto por Wen estão localizados nos sítios da rede $\Lambda$, a qual é dividida em duas sub-redes conforme a paridade do sítio inferior esquerdo de um plaquete segundo a regra:

$$i \begin{cases} \in \Lambda_{par} & \text{se } i_x + i_y \text{ for par,} \\ \in \Lambda_{\text{ímpar}} & \text{se } i_x + i_y \text{ for ímpar.} \end{cases} \tag{3.58}$$

A partir disso, pode-se generalizar a paridade das demais estruturas e operadores da rede como, por exemplo, os plaquetes e o operador hamiltoniano.

A construção da hamiltoniana do modelo de plaquetes Wen é um processo laborioso e requer um arcabouço significativo de teoria de grupos e representações projetivas. O desenvolvimento para obtê-la pode ser conferido em [2, 18, 33], sendo construída em duas dimensões da forma

$$\hat{H} = -g \sum_i F_i = -g \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+\hat{x}}^y \sigma_{i+\hat{x}+\hat{y}}^x \sigma_{i+\hat{y}}^y, \tag{3.59}$$

onde $g > 0$ e $F_i$ forma um plaquete que possui paridade definida pelo sítio representado pelo subíndice $i$.

Os operadores de plaquete do Wen Plaquette Model respeitam a regra de comutação

$$[F_i, F_j] = 0. \tag{3.60}$$

A Figura 10 ajuda a compreender essa relação. A esquerda da figura está uma representação de dois operadores pertencentes a sub-rede par - em verde - vizinhos diagonais. Eles compartilham um sítio em comum, sobre o qual ambos atuam um operador $\sigma^x$, por isso a relação de comutação é trivial. O mesmo princípio se aplica aos operadores de plaquete pertencentes a vizinhos diagonais na sub-rede ímpar, porém substituindo o operador de Pauli em $x$ por $z$. A direita da figura se encontram dois operadores de plaquete, um na sub-rede ímpar - em branco - e outro na sub-rede par, e primeiros vizinhos. Eles compartilham dois sítios, sobre os quais atuam diferentes operadores de Pauli. Desse modo, anticomutam duas vezes implicando em um comutação efetiva.

Dividindo a hamiltoniana em duas sub-redes, par e ímpar, obtêm-se

$$H = -g \left( \sum_{i \in \Lambda_{\text{par}}} F_i + \sum_{i \in \Lambda_{\text{ímpar}}} F_i \right), \tag{3.61}$$

considerando que o termo de acoplamento $g$ possui o mesmo peso para ambas as sub-redes, preservando a homogeneidade entre elas. Além disso, como $F_i$ é hermitiano, pode-se

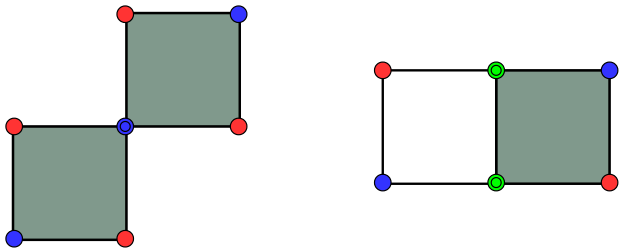

Figura 10 – A esquerda está uma representação da comutação entre dois plaquetes da sub-rede par (verde) e a direita uma representação da comutação entre um plaquete da sub-rede par e um plaquete da sub-rede ímpar (branco).Os círculos azuis representam os operadores $\sigma^x$, os vermelhos $\sigma^z$ e os verdes $\sigma^x\sigma^z$.

escrever a hamiltoniana apresentada na Equação (3.61) como

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g}{2}\left(\sum_{i\in\Lambda_{\text{par}}} F_i + \sum_{j\in\Lambda_{\text{ímpar}}} F_j\right) - \frac{g}{2}\left(\sum_{i\in\Lambda_{\text{par}}} F_i^\dagger + \sum_{j\in\Lambda_{\text{ímpar}}} F_j^\dagger\right) \\ &= -\frac{g}{2}\left(\sum_{i\in\Lambda_{\text{par}}} F_i + \sum_{j\in\Lambda_{\text{ímpar}}} F_j\right) + h.c., \end{aligned} \tag{3.62}$$

sendo a Equação (3.62) a forma mais geral do hamiltoniana do sistema sem perturbações. A Figura 11 esboça o modelo plaquetes de Wen distinguindo as sub-redes e apresentando o operador $F_i$ na rede.

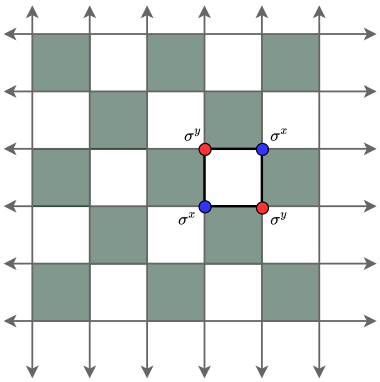


Figura 11 – Diagrama do modelo de plaquetes Wen divida em duas sub-redes. Os plaquetes em verde-claro indicam a sub-rede par enquanto os plaquetes em branco representam a sub-rede ímpar. Adaptado de [19].

Os estados quânticos do modelo de Wen podem ser obtidos através dos operadores de linha que, assim como no Toric Code, possuem papel fundamental para descrição das

propriedades do modelo bem como das excitações. Há três tipo de operadores de linha

$$\hat{W}_c(\gamma) = \prod_{i\in\gamma} \sigma_i^{a_i}, \quad \hat{W}_v\left(\gamma^*\right) \prod_{i\in\gamma^*} \sigma_i^{a_i} \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\mathcal{C}\right) = \prod_{n\in\mathcal{C}} \sigma_{i_n}^{l_n}, \tag{3.63}$$

onde $\gamma$ é uma curva que conecta plaquetes pares, $\gamma^*$ uma curva que conecta plaquetes ímpares e

$$a^i = \begin{cases} y \text{ se } i \text{ for par,} \\ x \text{ se } i \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

A curva $\mathcal{C}$ conecta o ponto médio entre sítios vizinhos, representados pela notação $i_n$, e

$$l_n = \begin{cases} z \text{ se } i_n \text{ for par,} \\ y \text{ se faz curva com } i_n \in \Lambda_{par} \\ x \text{ se faz curva com } i_n \in \Lambda_{par}. \end{cases}$$

Os subíndices $c$ indica carga $\mathbb{Z}_2$ enquanto $v$ indica vórtice $\mathbb{Z}_2$ e, finalmente, o $f$ representa estado ligados de carga e vórtice resultado em férmions. Todos os operadores de linha definidos na Eq. (3.63) comutam com a hamiltoniana

$$\left[\hat{W}_c(\gamma), H\right] = \left[\hat{W}_v(\gamma^*), H\right] = \left[\hat{W}_f(\mathcal{C}), H\right] = 0. \tag{3.64}$$

O estado fundamental consiste em diferentes configurações de loops mapeadas através de operadores de linha fechados atuando sobre um estado de referência, ou simplesmente

$$|\psi\rangle = \prod_{\gamma} \hat{W}(\gamma) \left|0\right\rangle, \tag{3.65}$$

em que $|0\rangle$ é estado com todos os spins alinhados.

Naturalmente, como $F_i$ é um produto de matrizes de Pauli, e conforme nossa normalização, os autovalores do operadores são $\pm 1$. Isso implica que a energia do estado fundamental é obtido quando $F_i = 1$ para todo $i$ de modo que o valor esperado da hamiltoniana no vácuo vale

$$\langle\psi|H_{Wen}|\psi\rangle \Rightarrow E = -g2k^2, \tag{3.66}$$

onde $2k^2$ é o número total de plaquetes na rede.

### 3.3.1 Degenerescência do estado fundamental

A degenerescência do estado fundamental está fortemente interligada com a paridade da rede, mais especificamente com o número de operadores de strings fechados não contráteis nos eixos $\hat{e}_x$ e $\hat{e}_y$. Em [19, 20] pode-se verificar os argumentos apresentados nessa seção bem como a linha de raciocínio para deduzir o número de degenerescências em cada caso.

Em uma rede *par* $\times$ *par* (p $\cdot$ p) é possível definir quatro operadores de linha fechados e não contráteis que comutam com o hamiltoniano da Eq. (3.62), sendo eles

$$\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right), \quad \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right), \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right) \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right). \tag{3.67}$$

Em que os operadores comutam entre si se forem de mesma natureza $(c, v, f)$ em strings de diferentes eixos $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$ ou se forem de diferentes natureza com strings no mesmo eixo, ou seja,

$$\left[\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right), \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right)\right] = \left[\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right)\right] = 0 \tag{3.68}$$

$$\left[\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right), \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right)\right] = \left[\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right)\right] = 0. \tag{3.69}$$

Enquanto os operadores anti-comutam se forem de diferentes naturezas em com strings em diferentes eixos, expressos como

$$\left\{\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right)\right\} = 0 \quad \text{e} \quad \left\{\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_y}\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\hat{e}_x}\right)\right\} = 0. \tag{3.70}$$

Diferente da forma como os operadores de linha foram definidos em (3.63), como produtos de matrizes de Pauli atuando sobre spins físicos, os operadores apresentados em (3.67), agora, são definidos considerando o caráter efetivo das curvas, ou seja, pela propriedades topológicas induzindo uma representação por pseudo-spins $(\tau^x, \tau^y, \tau^z)$. Essa mudança preserva a física do sistema, porém garante descrições menos desgastantes e, consequentemente, mais prática.

Assim os operadores de linha efetivos em uma rede $p \cdot p$ são redefinidos como

$$\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) \to \tau_1^x \otimes \mathbb{I}, \quad \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) \to \mathbb{I} \otimes \tau_2^x \tag{3.71}$$

$$\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) \to \mathbb{I} \otimes \tau_2^z, \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) \to \tau_1^z \otimes \mathbb{I}. \tag{3.72}$$

Sabendo que

$$\hat{W}_c\left(\bar{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}\right) = \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_\alpha\right)\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_\beta\right), \quad \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}\right) = \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_\alpha\right)\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_\beta\right) \tag{3.73}$$

$$\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_{\alpha\beta}\right) = \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_\alpha\right)\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_\beta\right), \tag{3.74}$$

em que $\alpha, \beta = x, y$, através do produtos entre os quatro operadores definidos nas Eqs. (3.71) e (3.72) é possível obter qualquer outro operador de linha com curvas não contráteis, inclusive curvas que cruzam a diagonal da rede $(xy)$.

Assim, o estado fundamental da rede são autoestados dos operadores $\hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_\alpha\right)$ e $\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_\beta\right)$, novamente como $\alpha, \beta = x, y$. No entanto, não são autoestados simultâneos, pois respeitam uma regra de anticomutação. Desse modo, pode-se escrever um estado do modelo como o produto de dois subespaços vetoriais da forma

$$|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle, \tag{3.75}$$

o qual sobre atuação de $\tau_l^z$, sendo $l = 1, 2$, os estados $|m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle$ devolvem autovalor 1 se $m_l = 0$ e $-1$ se $m_l = 1$.

Relembrando a definição dos operadores $\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right)$ e $\hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right)$ em (3.72) observa-se que eles são escritos em termos de $\tau_l^z$ e, portanto, medindo o fluxo fermiônicos na rede. Consequentemente, a interpretação física quando o estado $m_l = 0$ é a ausência de fluxo fermiônico enquanto para $m_l = 1$ é a presença.

A combinação de estados possíveis para os valores $m_l$ compõe um total de quatro estado linearmente independentes. Os quais podem ser escritos, de forma genérica, como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= A_{00}\,|0,0\rangle + A_{01}\,|0,1\rangle + A_{10}\,|1,0\rangle + A_{11}\,|11\rangle \\ &= \sum_{m_1=0,1}\sum_{m_2=0,1} A_{m_1,m_2}\,|m_1, m_2\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.76}$$

um estado fundamental com quadrupla degenerescência.

Em uma rede *ímpar* $\times$ *par* (í $\cdot$ p) é possível definir apenas um operador para cada eixo. Os quais correspondem a

$$\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) = \hat{W}_c\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) = \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right), \tag{3.77}$$

sendo definidos, mantendo o padrão apresentado para os operadores em uma rede $(p \cdot p)$, como

$$\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}} \tau_i^x \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}} \tau_i^z \tag{3.78}$$

e apresentam regra de anticomutação

$$\left\{\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right)\right\} = 0. \tag{3.79}$$

Esses são os elementos essenciais para construção do estado fundamental, o qual a partir do número de operadores $\tau^z$ e seus respectivos autovalores é possível inferir dois estados topologicamente distintos $|m_l\rangle$, quando $m_l = 0$ e $m_l = 1$, os quais agrupados em uma combinação linear compõem um estado genérico

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ip} &= A_0\,|0\rangle + A_1\,|1\rangle \\ &= \sum_{l=0,1} A_l\,|m_l\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.80}$$

levando a conclusão de um estado fundamental duplamente degenerado.

De forma semelhante, para uma rede par $\times$ ímpar (p $\cdot$ í) há dois operadores, um para cada eixo, da forma

$$\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) = \hat{W}_c\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) = \hat{W}_v\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right). \tag{3.81}$$

Observa-se que apenas a natureza dos operadores se mantém, comparado com a rede (í $\cdot$ p) trocando-se apenas os eixos, o mesmo, consequentemente, ocorre com a definição em

termos de pseudo-spins

$$\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right) = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}} \tau_i^x \quad \text{e} \quad \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right) = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}} \tau_i^z, \tag{3.82}$$

que anticomutam entre si

$$\left\{\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_y\right), \hat{W}_f\left(\bar{\mathcal{C}}_x\right)\right\} = 0, \tag{3.83}$$

indicando a dupla degenerescência do estado fundamental.

Um caso especial ocorre em uma rede *ímpar* $\times$ *ímpar* (í $\cdot$ í), pois não é possível definir operadores de carga ou vórtice $\mathbb{Z}_2$ com curvas não contráteis estritamente sobre os eixos $\hat{e}_x$ e $\hat{e}_y$. Contundo, é possível definir um operador atuando sobre a diagonal da rede

$$\hat{W}\left(\bar{\mathcal{C}}_{xy}\right) = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}} \sigma_i^x. \tag{3.84}$$

Nos casos (p $\cdot$ p), (í$\cdot$ p) e (p$\cdot$ í) também existem operadores que atuam na diagonal, resultado da mistura de operadores com loops não contráteis em ambos os eixos, porém eles não contribuem para a degenerescência do estado fundamental. A Tabela 3 sintetiza os principais tópicos dessa seção.

| **Rede** | **Degenerescência** | **Operadores** |
|---|---|---|
| *par* $\times$ *par* | Quádrupla | $\hat{W}_v(C_X), \hat{W}_v(C_Y), \hat{W}_f(C_X), \hat{W}_f(C_Y)$ |
| *par* $\times$ *ímpar* | Dupla | $\hat{W}_f(C_Y)$, $\hat{W}(C_X) = \hat{W}_v(C_X) = \hat{W}_c(C_X)$ |
| *ímpar* $\times$ *par* | Dupla | $\hat{W}_f(C_X)$, $\hat{W}(C_Y) = \hat{W}_v(C_Y) = \hat{W}_c(C_Y)$ |
| *ímpar* $\times$ *ímpar* | Dupla | $\hat{W}(C_{XY})$, $\hat{W}_f(C_X) = \hat{W}_f(C_Y)$ |

Tabela 3 – Relação entre a paridade da rede, o tipo de degenerescência e os operadores correspondentes para o Wen Plaquette Model.

### 3.3.2 Excitações

As excitações do modelo emergem quando $F_i = -1$. Se $i \in \Lambda_{par}$ observa-se excitações de carga $\mathbb{Z}_2$, as quais podem-se interpretadas como partículas elétricas (e-partículas), se $i \in \Lambda_{ímpar}$ observa-se excitações de vórtice $\mathbb{Z}_2$, as quais podem ser interpretadas como partículas magnéticas (m-partículas). Além disso, os estados ligados entre as excitações de carga e vórtice sobre plaquetes vizinhos resultam em férmions [19].

Para criar uma excitação de carga $\mathbb{Z}_2$, partindo do estado fundamental, é preciso aplicar operadores que anticomutam com os sítios dos plaquetes pares $F_i$. Assim, considere a atuação do operador $\sigma^y$ no sítio $i$. Com efeito, os autovalores dos plaquetes pares que

compartilham o sítio $i$ são invertidos de $+1$ para $-1$ e observa-se a criação de um e-partícula em cada plaquete.

Para determinar o custo energético da excitação de carga basta calcular o autovalor da operador hamiltoniano aplicado no primeiro estado excitado,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{Wen}\left(\sigma_i^y\left|\psi\right\rangle\right) &= -g\left[\sum_{i\in\Lambda_{par}} F_i + \sum_{i\in\Lambda_{ímpar}} F_i\right]\sigma_i^y\left|\psi\right\rangle \\
&= -g\left[-\sigma_i^y F_i - \sigma_i^y F_{i'} + \sum_{j_{par}\neq i} F_j + \sigma_i^y \sum_{i_{ímpar}} F_j\right]\left|\psi\right\rangle \\
&= -g\left[(-1-1) + \left(k^2-2\right) + k^2\right]\sigma_i^y\left|\psi\right\rangle \\
&= -g(2k^2-4)\sigma_i^y\left|\psi\right\rangle . \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

Assim, o gap de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado vale $\Delta E = 4g$, com $2g$ para cada plaquete excitado e, portanto, para a criação de cada e-partícula.

Pode-se mover as excitações de carga $\mathbb{Z}_2$ de três formas: horizontal, vertical e diagonal. A Figura 12 permite acompanhar melhor a mobilidade das cargas juntamente com a explicação. Analisando o primeiro caso para o deslocamento horizontal, pode-se aplicar o operador $\sigma^x$ nos sítios $i+\hat{x}$ ou $i-\hat{x}$ aniquilando a excitação inicial do plaquete que o contém criando outra excitação no plaquete que o compartilha o mesmo vértice. De forma semelhante é possível mover verticalmente uma excitação aplicando o operador $\sigma^x$ nos sítios $i+\hat{y}$ ou $i-\hat{y}$. Sobre o mesmo principio de aniquilação e criação da excitação em plaquetes adjacentes é possível mover a carga $\mathbb{Z}_2$ pela diagonal da rede atuando-se o operador $\sigma^y$ em um dos sítios $i+\hat{x}+\hat{y}$, $i+\hat{x}-\hat{y}$, $i-\hat{x}+\hat{y}$ ou $i-\hat{x}-\hat{y}$.

Identifica-se, com isso, um padrão. Após uma excitação ser criada é necessário aplicar operadores $\sigma^x$ em sítios vizinhos impares ou $\sigma^y$ em sítios vizinhos pares para movê-la através de um curva. Agrupando o conjunto de operadores pelo caminho descrito pela curva identifica-se o operador de string $\hat{W}_c\left(\gamma\right)$ em que $\gamma$ descreve um caminho aberto entre os plaquetes pares. Aplicando o mesmo desenvolvimento para a sub-rede ímpar obtêm-se que as excitações de vórtice $\mathbb{Z}_2$ são criados e propagados pelo operador de string aberto $\hat{W}_v\left(\gamma^*\right)$ com $\gamma^*$ percorrendo um caminho sobre os plaquetes ímpares.

Considere agora a atuação de $\sigma^z$ em um sítio $i$. A ação desse operador é sentida através da inversão do autovalor de $F_j = 1 \rightarrow F_j = -1$ pelos quatro plaquetes que compartilham o mesmo vértice criando dois estado ligado entre excitações de carga $\mathbb{Z}_2$ e vórtice $\mathbb{Z}_2$. Isso só é possível devido a atuação simultânea da matriz de Pauli $z$ nas duas sub-redes.

Apesar dos estados ligados possuírem liberdade de mobilidade em ambos os eixos e pela diagonal da rede, é impossível mover as excitações de plaquete individualmente

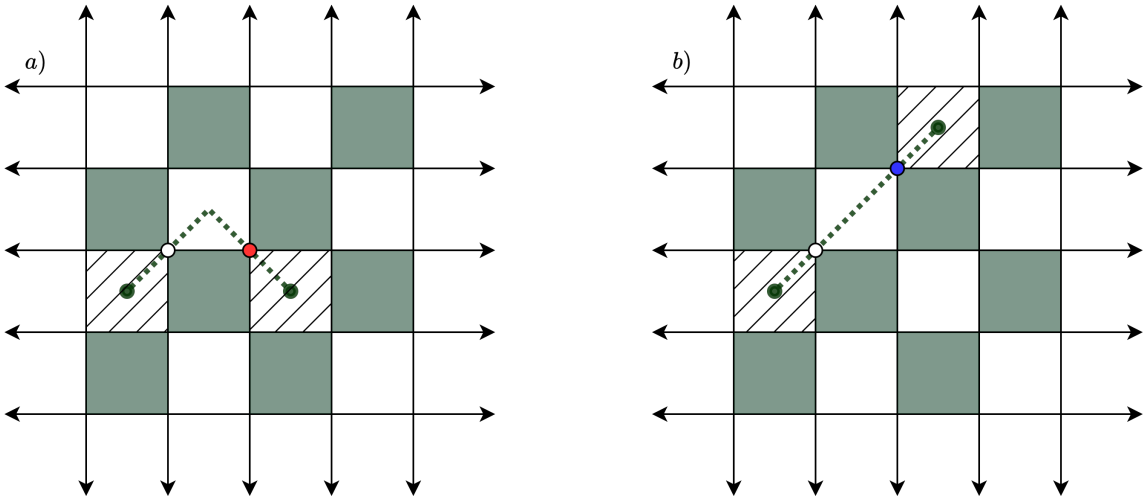


Figura 12 – Esquematização da mobilidade (a) horizontal e (b) diagonal das excitações de carga $\mathbb{Z}_2$.

sem custo energético adicional e a criação de outros estados ligados.

A Figura 13 ilustra a movimentação de estados ligados pela rede. Percebe-se que a movimentação horizontal e vertical dos estados segue a fenomenologia das excitações de carga e vórtice, ou seja, pela aniquilação e criação das excitações em plaquetes vizinhos, porém, neste caso, mediados pelo operador $\sigma^z$. Atuando apenas em sítio ímpares o operador $\sigma^x$ desloca diagonalmente uma excitação de carga enquanto $\sigma^y$ atuando apenas em sítios desloca diagonalmente a excitação de vórtice.

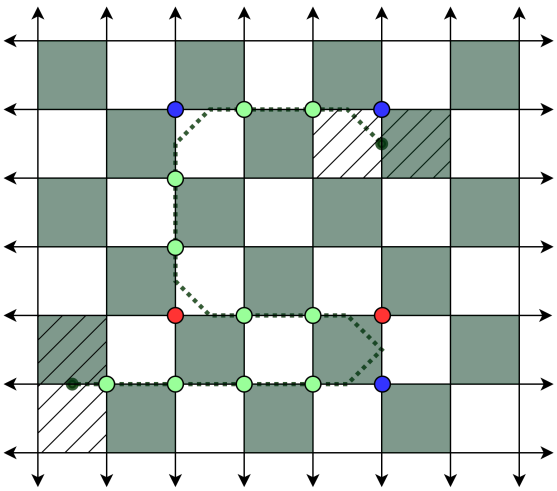

Figura 13 – Mobilidade dos estados ligados no Wen Plaquette Model.

### 3.3.3 Equivalência entre o Wen Plaquette Model e o Toric Code

Comparando o comportamento da física emergente do modelo de plaquetes Wen em uma rede $par \times par$ com o Toric Code, tais como a natureza e estatística das excitações de carga, vórtice e o estado ligado, a degenerescência do estado fundamental e o gap de energia para o primeiro estado excitado, nota-se semelhanças muito destacadas para serem ignoradas.

Em [34], apesar do autor desenvolver seu estudo baseado em ordens topológicas com simetria discreta $\mathbb{Z}_N$, é possível particularizar seus resultados quando $N = 2$ considerando os mapas

$$\sigma_i^x \to \sigma_i^x \quad \text{e} \quad \sigma_i^y \to \sigma_i^x \tag{3.86}$$

para plaquetes pares enquanto para os plaquetes impares considera-se

$$\sigma_i^x \to \sigma_i^z \quad \text{e} \quad \sigma_i^y \to \sigma_i^z. \tag{3.87}$$

Isso permite identificar $F_i$ em que $i$ pertence a sub-rede par como o operador estrela do Toric Code e $F_i$ com $i$ pertence a sub-rede ímpar como o operador de plaquete. Porém, apenas essas redefinições dos operadores não é o suficiente, pois os operadores do modelo de Wen atuam nos sítios em contraste com o Toric Code cujos graus de liberdade estão nos links. Assim, o segundo passo é considerar que os modelos apresentam uma fase de 45° de rotação, como pode ser observado na Figura 14.

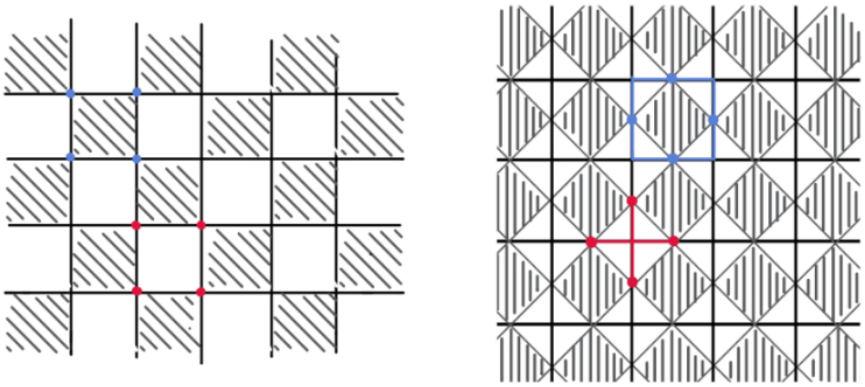

Figura 14 – Representação visual do mapa entre o modelo de plaquetes Wen e o Toric Code. Fonte: [15].

Redefinindo os operadores de string através dos mapas apresentados em (3.86) e (3.87), relembrando que $\gamma$ é um caminho sobre plaquetes pares e $\gamma^*$ o caminho sobre plaquetes ímpares os operadores tem a forma

$$\hat{W}_c(\gamma) \to \hat{S}_\gamma^z = \prod_{i\in\gamma} \sigma_i^z \quad \text{e} \quad \hat{W}_v(\gamma^*) \to \hat{S}_\gamma^x = \prod_{i\in\gamma} \sigma_i^x. \tag{3.88}$$

Além disso, devido a rotação por um fator de fase 45°, as excitações diagonais no modelo de plaquete Wen ocorrem sobre os eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ do Toric Code.

# 4 MODELOS FRACTÔNICOS EXATAMENTE SOLÚVEIS EM 3+1D

Líquidos de spin quânticos cujas excitações são fráctons manifestam as chamadas fases fractônicas. Esses estados da matéria apresentam degenerescência do estado fundamental fortemente dependente do tamanha da rede e cujo os espectros de energia são gapped. Neste capítulo serão desenvolvidas a generalização do Toric Code e do modelo de plaquetes Wen para uma rede tridimensional sendo, respectivamente. o X-Cube Model e o Chamon Code.

## 4.1 Modelo X-Cube

Inicialmente proposto em [8], o X-Cube Model é construído em uma rede cúbica $\Lambda$ com $k_x \times k_y \times k_z$ sítios e condições periódicas de contorno nos três eixos. Os graus de liberdade são autovalores dos qubits localizados nos links.

A hamiltoniana do modelo é

$$\begin{aligned} H_{XC} &= -\sum_{s\in P_\mu}\left(A_s^{P_x}+A_s^{P_y}+A_s^{P_z}\right)-\sum_{\mathcal{C}} B_{\mathcal{C}} \\ &= -\sum_{s\in P_\mu}\sum_{\mu=x,y,z} A_s^{P_\mu}-\sum_{\mathcal{C}} B_{\mathcal{C}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$A_s^{P_\mu}=\prod_{l\ltimes s_\mu}\sigma_l^z \quad \text{e} \quad B_{\mathcal{C}}=\prod_{l\in\partial\mathcal{C}}\sigma_l^x. \tag{4.2}$$

A Figura 15 auxilia a compreensão da estrutura dos operadores definidos em (4.2). Os operadores de plaquete $B_{\mathcal{C}}$ são o produto de operadores $\sigma^x$ sobre as borda de uma unidade cúbica da rede e o operador estrela $A_s^{P_\mu}$ são o produto de $\sigma^z$ nos links que compartilham o sítios $s$ pertencentes aos três planos ortogonais a direção de $\mu=(x,y,z)$ [6]. O nome do modelo foi escolhido justamente pelo formato de desses operadores.

Os termos estrela e cúbicos apresentam regra de comutação trivial, ou seja,

$$\left[A_s^{P_\mu},A_{s'}^{P_\nu}\right]=\left[B_{\mathcal{C}},B_{\mathcal{C}'}\right]=\left[A_\nu^{P_\mu},B_{\mathcal{C}}\right]=0 \tag{4.3}$$

e, portanto, atuam sobre base de autoestados simultâneos respeitando a relação

$$A_s^{P_\mu}\left|\psi\right\rangle_{xc}=\left|\psi\right\rangle_{xc} \quad \text{e} \quad B_{\mathcal{C}}\left|\psi\right\rangle_{xc}=\left|\psi\right\rangle_{xc}, \quad \forall\,\mathcal{C} \text{ e } s\in\Lambda. \tag{4.4}$$

Como $(A_s^{P_\mu})^2=1$ e $(B_{\mathcal{C}})^2=1$, os autovalores dos operadores são $\pm1$.

Sobre o modelo é possível construir um conjunto de nove operadores não locais que comutam com hamiltoniana [32]. Três operadores de linha

$$W_x\left[\mathcal{C}_\alpha\right]=\prod_{i\in\mathcal{C}_\alpha}\sigma_i^x \tag{4.5}$$

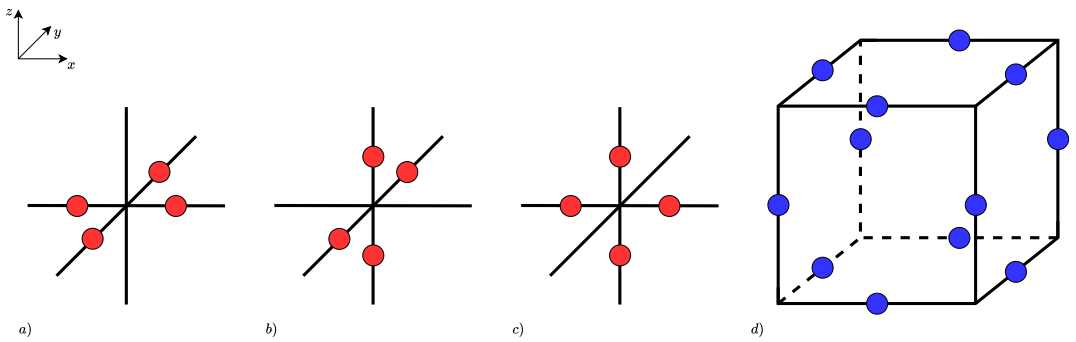


Figura 15 – Representação diagramática dos operadores de estrela $(a)$, $(b)$,$(c)$ e do operador de plaquete $(d)$. Adaptado de [32].

onde $\mathcal{C}$ é um loop topológico na rede ordinária sobre eixo indicado pelo subíndice $\alpha = \{x, y, z\}$ e seis operadores

$$W_z\left[\tilde{C}_{\alpha,\beta}\right] = \prod_{i\in\bar{\mathcal{C}}_\alpha} \sigma_i^z \quad \text{com } \alpha \neq \beta, \tag{4.6}$$

em que $\tilde{\mathcal{C}}$ indica curvas na rede dual em que a primeira entrada $\alpha$ do subíndice índica a direção do loop e a segunda entrada $\beta = \{x, y, z\}$ a direção de atuação dos operadores $\sigma^z$. A Figura 16 ilustra os loops de todos os operadores de linha fechados.

Os operadores definidos em (4.5) e (4.6) respeitam a regra de anticomutação

$$\left\{\hat{W}_x\left[\mathcal{C}_\alpha\right], \hat{W}_z\left[\tilde{\mathcal{C}}_{\gamma,\alpha}\right]\right\} = 0, \quad \text{se } \gamma \neq \alpha. \tag{4.7}$$

Cada operador $\hat{W}_x$ anticomuta com dois operadores $\hat{W}_z$. As demais combinações de operadores comutam trivialmente, pois não apresentam sobreposição de spins. Isso implica em um vinculo para cada plano do número de estados independentes da ordem

$$xy : 2^{L_x+L_y-1}, \quad xz : 2^{L_x+L_z-1} \quad \text{e} \quad yz : 2^{L_y+L_z-1}. \tag{4.8}$$

O produto dos estados em (4.8) reflete o número de degenerescências do modelo, assim:

$$\log_2(GSD) = 2L_x + 2L_y + 2L_z - 3 \tag{4.9}$$

### 4.1.1 Excitações

Diferente do que foi apresentado na Seção 3.2.1, as excitações do X-Cube possuem restrições de mobilidade. Para verificar essa afirmação, considere inicialmente o sistema no estado fundamental. A atuação de um operador $\sigma^z$ sobre um link $l$, devido a relação de anticomutação das matrizes de Pauli, inverte o autovalor de quatro termos cúbicos da hamiltoniana que compartilham o mesmo link, conforme ilustrado na Figura 17, levando o sistema para o primeiro estado excitado. Não é possível, sobre a atuação de outro operador

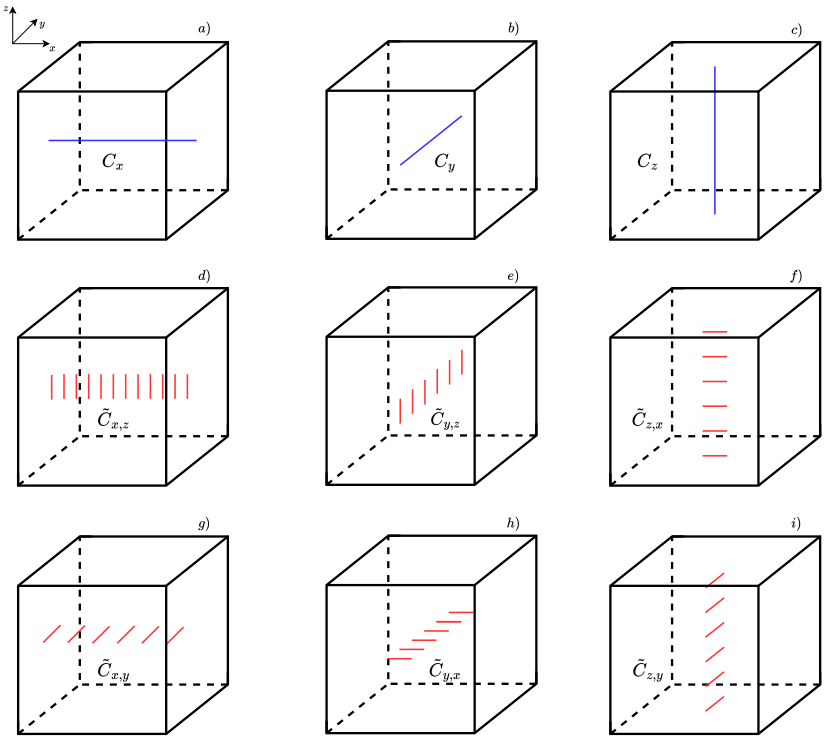


Figura 16 – Representação de todos os operadores de linha com curvas não contráteis definidos no modelo X-Cube. Adaptado de [32].

$\sigma^z$ em um link adjacente (nem sobre qualquer link), mover uma excitação individualmente sem gasto energético e a criação de outras excitações. Essas excitações, no estudo de matéria condensada, recebem o nome de fráctons.

Contudo, conforme ilustrado na Figura 17, a atuação simultânea de um conjunto de operadores que anticomutam com os termos cúbicos $B_{\mathcal{C}}$, organizados segundo a geometria da rede, conhecida como operadores de membrana, movem as excitações através da extremidades de um quadrado formado pelo operadores $\sigma^z$. Isso permite criar e mover excitações sobre um plano, de modo que, sobre a superfície da membrana são consideradas excitações desconfinadas. Os operadores de membrana podem ser interpretados como operadores de linha "espessos" [10].

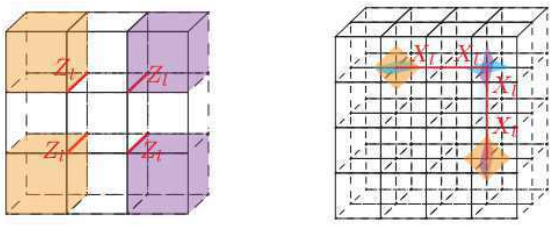

Figura 17 – Diagramação das excitações no X-Cube Modelo. Fonte: [10].

Além disso, também é possível mover estados ligados de fráctons ao longo de su-

bespaços unidimensionais. Isso é facilmente verificado, pois uma vez que quatro excitações são criadas pela atuação de um operador $\sigma^z$ em sítio $l$, a atuação de outro operador $\sigma^z$ em um sítio $l'$, que obrigatoriamente seja compartilhado por duas excitações, permite a aniquilação das duas excitações iniciais e a criação de duas excitações nos termos cúbicos que compartilham $l'$ e inicialmente apresentam autovalor $B_{\mathcal{C}} = 1$. As excitações que violam a paridade dos termos cúbicos são chamadas excitações cúbicas.

A descrição das excitações associadas a mudança de autovalor dos operadores de cruz apresenta maior sutileza. Por exemplo, tomando o estado fundamental, considere a atuação de um operador $\sigma^x$ em um link $l$, cujas extremidades localizam os vértices $s$ e $s'$, orientado sobre o eixo $\hat{x}$. A ação sobre a rede resulta na inversão do autovalor de quatro operadores de cruz. Um par associado ao sítio $s$, em que um operador de cruz pertence ao plano $xy$ e outro no plano $xz$, e o segundo par associado ao sítio $s'$, também com um operador de cruz referente para o plano $xy$ e outro para o plano $xz$.

A única forma de mover as excitações, sem gasto energético, é através da atuação de operadores $\sigma^x$ em links vizinhos a $l$ sobre o eixo $\hat{x}$ que estejam sobre o mesmo plano que $\sigma^x_l$. Com efeito, isso move um par de excitações associados a sítios adjacentes. Portanto, como essas excitações apresentam restrição de mobilidade são identificadas como fráctons e por se limitarem a movimentação em um subdimensão unidimensional são chamados de lineons. Essa descrição se aplica sobre qualquer eixo da rede, de forma que as excitações de cruz são identificadas nas extremidades dos operadores de cruz definidos em (4.5).

Um par de lineons, que apresenta estrutura semelhante a um dipolo, entretanto, pode ser promovido para um planon, ou seja, são fráctons que tem mobilidade restrita a um plano, por meio de um composição entre dois operadores de linha $\hat{W}_x$ [15].

## 4.2 Construção via camadas acopladas do Modelo X-Cube

Apesar das semelhanças com o Toric Code em uma rede $2D$, estudado na Seção 3.2, o X-Cube Model não configura o mesmo modelo que o Toric Code em uma rede $3D$. Enquanto o X-Cube Model manifesta uma fase fractônica, definida pelas emergência de fráctons, e, em geral, com estado fundamental altamente degenerado que depende do tamanho da rede, O Toric Code em $3D$ é uma fase topológica, com excitações sem restrição de mobilidade.

Conforme apresentado em [6,10], pode-se obter o X-Cube a partir do acoplamento forte de Toric Codes em redes $2D$ sobrepondo os sítios de todos os modelos pertencentes aos planos ortogonais $xy$ para diferentes valores de $z = \{1, 2, 3, , \cdots , k_z\}$, $xz$ para diferentes valores de $y = \{1, 2, 3, \cdots , k_y\}$ e $yz$ para diferentes valores de $x = \{1, 2, 3, , \cdots , k_x\}$ e impondo-se o termo de acoplamento do tipo $\sigma^z\sigma^z$ enquanto o Toric Code em $d = 3$, sobre o mesmo conjunto de camadas acopladas, porém, impondo-se termos de acoplamento do

tipo $\sigma^x\sigma^x$. Este trabalho aborda apenas a construção do modelo X-Cube.

Um link na rede tridimensional é a região de interseção entre os links pertencentes a duas camadas ortogonais de Toric Codes, conforme ilustra a Figura 18. Note-se que são necessários identificar o vértice $j$ e o plano $\hat{x}_i$ que link pertence para localizá-lo, $l = (j, \hat{x}_i)$. A partir disso, observa-se que os graus de liberdade associados os links, agora, são o produto de dois qubits.

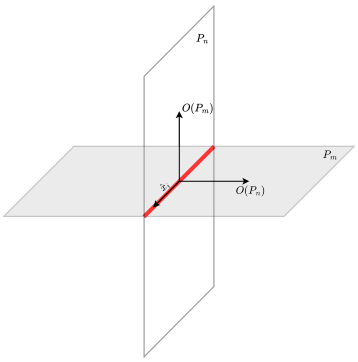


Figura 18 – Graus de liberdade de um link compartilhado por dois planos $P_n$ e $P_m$. Adaptado de [15].

Com base nessa estrutura da rede, pode-se escrever a hamiltoniana sobre a soma de todos os planos $P$ das camadas de Toric Codes na forma

$$H_{TC}^{P} = -\sum_{P}\left(\sum_{i\in P} A_i^{o(P)} + \sum_{p\in P} B_p^{o(P)}\right) \tag{4.10}$$

onde, substituindo a notação $\sigma^z$ para $Z$, a fim de evitar poluição visual nas equações,

$$A_i^{o(P)} = \prod_{i\perp o(P)} Z_l^{o(P)} \quad \text{e} \quad B_i^{o(P)} = \prod_{i\in\partial p} X_l^{o(P)} \tag{4.11}$$

com o superíndice $o(P)$ indicando o plano ortogonal a $P$. A hamiltoniana da Equação (4.10) é chamada livre, pois as camadas de Toric Code são independentes, ou seja, não apresentam vínculos, sem a inserção de termos adicionais, que entrelace a física de cada sistema.

Assim, faz-se necessário incluir um termo de interação cuja a intensidade é quantificada por uma constante de acoplamento e relacione os qubits de planos distintos. Considere, portanto, a hamiltoniana

$$H = \sum_{P} H_{TC}^{P} - J_z \sum_{l} Z_l^{o(P_1)} Z_l^{o(P_2)} \tag{4.12}$$

em que a constante $J_z > 0$ e os superíndices $o(P_1)$ e $o(P_2)$ são ortogonais entre si e ortogonais a orientação do link $l$.

No limite de acoplamento forte, ou seja, para $J_z \to \infty$, e considerando a hamiltoniana livre como um termo uma perturbação inicialmente desprezível, o estado de menor

energia é obtido minimizando $Z_l^{o(P_1)} Z_l^{o(P_2)}$. De modo que a configuração de spins na rede que permite obter tal estado obedece, para todos os links, que

$$Z_l^{o(P_1)} = Z_l^{o(P_2)}, \tag{4.13}$$

considerando a base de autoestados do operador $\sigma^z$.

Isso permite definir os operadores

$$\mathcal{Z}_l \equiv Z_l^{o(P_1)} = Z_l^{o(P_2)} \quad \text{e} \quad \mathcal{X}_l = X_l^{o(P_1)} X_l^{o(P_2)}, \tag{4.14}$$

os quais comutam com o termo de acoplamento que acompanha $J_z$ e permite construir qualquer outro operador atuando sobre o estado fundamental como uma combinação deles. Logo, os dois operadores constituem um conjunto gerador do espaço de operadores.

Para obter a hamiltoniana efetiva do modelo de camada acopladas, escrita em termos dos geradores definidos em (4.14), pode-se aplicar a teoria de perturbação degenerada de Brillouin-Wigner, conforme detalhado no apêndice de [9, 10]. O desenvolvimento consiste em analisar o efeito das perturbações no estado fundamental.

Inicialmente a hamiltoniana sobre a soma de todos os planos do Toric Code, Equação (4.10), é chamada de livre, porém quando compõem uma parte da hamiltoniana do modelo acoplado, Equação (4.12), atua como um termo de perturbação. A ação dos operadores de plaquete e dos operadores estrela, contudo, age apenas nos qubits ortogonais ao plano de cada camada, isto é, em apenas um de dois qubits pertencentes a um link $l$.

A atuação dos operadores estrela pertencentes ao plano $P'$ sobre o estado fundamental retorna o autovalor dos qubits ortogonais a $P'$ sem alterar a configuração de spin da rede, mantendo o sistema no mesmo estado físico, preservando a condição $Z_l^{o(P_1)} = Z_l^{o(P_2)}$. Por outro lado, os operadores de plaquete alteram os estados lógicos da rede e violam a condição de minimização da hamiltoniana ao inverter um dos qubits associados a um link $l$. Portanto, há algumas configurações de spins que são favorecidas e estão diretamente relacionadas com o alto emaranhamento da rede.

Outra consequência da restrição (4.13) é restringir o conjunto de estados linearmente independentes dos autoestados do modelo acoplado. Um estado de dois qubits genérico tem a forma

$$|\psi\rangle = a_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\uparrow\rangle + a_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\downarrow\rangle + a_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\uparrow\rangle + a_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\downarrow\rangle \,, \tag{4.15}$$

porém os qubits associados a cada link da rede em $3d$ devem estar alinhados para pertencerem ao estado fundamental. Logo, o único conjunto de estados superpostos que formam a base da hamiltoniana (4.12) é

$$|\psi\rangle_l = a_{l\uparrow} |\uparrow\uparrow\rangle + a_{l\downarrow} |\downarrow\downarrow\rangle \tag{4.16}$$

e o produto de todos os auto estado forma o espaço de Hilbert total do modelo.

Para aplicar a teoria de perturbação, o estado total é decomposto em dois subespaços:

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle \,. \tag{4.17}$$

O primeiro vetor é o subespaço pertencente ao estado fundamental enquanto o segundo é seu complemento ortogonal. Na ausência de perturbação, os autovalores de $|\psi_1\rangle$ são nulos e o estado é simplesmente $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle$.

Diante disso, constrói-se o projetor

$$\mathcal{P} = \prod_l \frac{(\mathbb{I} + Z_l^{o(P_1)} Z_l^{o(P_2)})}{2} \tag{4.18}$$

que, atuando sobre $|\psi\rangle$, seleciona apenas os vetores $|\psi\rangle_0$. Naturalmente, o operador $(\mathbb{I} - \mathcal{P})$ projeta apenas o complemento ortogonal $|\psi_1\rangle$.

A hamiltoniana do modelo acoplado, Equação (4.12), é reescrita como $H = H_0 + H_1$, em que $H_0$, termo dominante, é o termo de acoplamento e $H_1$, termo de perturbação, é a soma dos Toric Codes acoplados, que, por sua vez, é subdivido em $H_{1v}$ - referente aos operadores estrela - e $H_{1p}$ - referente aos operadores de plaquete.

Com base nesse arcabouço, a teoria de perturbação aplicada ao modelo fornece duas contribuições não triviais ao se expandir os autovalores até sexta ordem considerando a restrição (4.13) para o estado fundamental. As quais podem ser identificadas como termos efetivos e a hamiltoniana pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H_{efetiva}^{XC} &= -\sum_i \sum_{\mu=x,y,z} \mathcal{A}_i^\mu - K \sum_c \mathcal{B}_c \\ &= -\sum_i \sum_{\mu=x,y,z} \prod_{ij\perp\mu} \mathcal{Z}_{ij} - K \sum_c \prod_{l\in c} \mathcal{X}_l. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Sendo $\mathcal{A}_i^\mu$ o termo de primeira ordem e correspondendo ao termo de vértice e $\mathcal{B}_c$ o termo de sexta ordem da expansão. Os termos de ordem 2 à 5 contribuem trivialmente.

## 4.3 Chamon Code

O Chamon Code, proposto por Cláudio Chamon [22], é um modelo exatamente solúvel em uma rede $3D$ de dimensão $L_x \times L_y \times L_z$ com condições periódicas de contorno nos três eixos. Ele pode ser interpretado como uma generalização do modelo de plaquetes de Wen em duas dimensões para uma rede tridimensional [15], porém com excitações fractônicas e estado fundamental altamente degenerado.

O modelo é descrito como uma rede cúbica de face centrada, onde os sítios são localizado por vetores na base canônicos e distinguem a rede conforme a paridade. Se a

soma dos coeficientes de vértice que localiza um sítio é par, logo pertence a sub-rede par. O mesmo se aplica a sítios ímpares pertencerem a sub-rede ímpar.

Por isso, para que o sistema preserve a paridade da rede, todos os eixos devem apresentar dimensão par, uma vez que um loop em torno de qualquer direção deve retornar a mesma sub-redes [23]. Por isso, é conveniente reescrever as dimensões como $L_x = 2p_x$, $L_y = 2p_y$ e $L_z = 2p_z$

Os graus de liberdade do modelo estão na face dos cubos unitários.

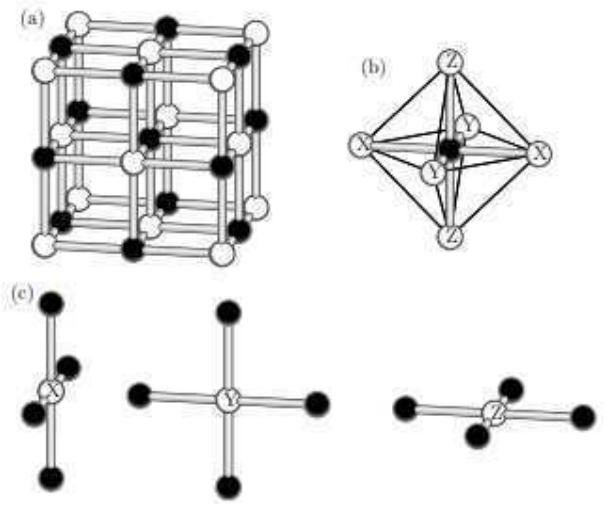


Figura 19 – (a) Representação de uma rede cúbica, onde os sítios branco são pares e os sítios pretos são ímpar. (b) Representação do operador octaédrico. Fonte: [23].

Considere que sobre sítio $i \in \Lambda_{ímpar}$ se atue um operador de Pauli $\sigma^\alpha$ nos primeiros sítios vizinhos que pertencem ao eixo $\alpha = \{x, y, z\}$. O produto das matrizes de Pauli sobre os seis primeiros vizinhos define o operador octaédrico

$$S_i = \sigma^x_{i+\hat{x}}\sigma^x_{i-\hat{x}}\sigma^y_{i+\hat{y}}\sigma^y_{i-\hat{y}}\sigma^z_{i+\hat{z}}\sigma^z_{i-\hat{z}} \tag{4.20}$$

que apresenta regra de comutação

$$[S_i, S_j] = 0 \quad \forall_{i,j}.$$

Evidentemente, se não forem primeiros (sobre o mesmo eixo) ou segundos (diagonais) vizinhos não há sobreposição de operadores e, assim, comutam trivialmente. Se forem vizinhos sobre o mesmo eixo há sobreposição do mesmo operador de Pauli e, novamente, comutam trivialmente. O caso mais interessante ocorre quando são vizinhos diagonais e anticomutam duas vezes nos sítios compartilhados, que por sua vez, comutam como um todo. Conforme ilustrado na Figura 20.

A soma de todos os operadores $S_i \in \Lambda_{ímpar}$ define a hamiltoniana

$$H = -\sum_{i \in \Lambda_{ímpar}} S_i \tag{4.21}$$

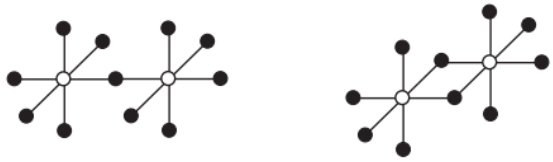

Figura 20 – Comutação dos operadores octaédricos como (a) primeiros vizinhos e como (direita) vizinhos diagonais. Fonte: [24].

que atua no subespaço protegido

$$\mathcal{L} = \{|\psi\rangle : S_i\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{para todo } i \in \Lambda_{ímpar}\}\,, \tag{4.22}$$

em que $|\psi\rangle$, na linguagem de *stabilizer code* (código estabilizador), é chamado de estado lógico. A energia do estado fundamental ocorre quando $S_i = 1$ para todos os sítios, o que implica que $E = -N$, sendo $N$ o número de sítios calculado por

$$N = \frac{L_x L_y L_z}{2}.$$

A degenerescência do estado fundamental depende do tamanho da rede e é determinado pelo número de operadores de linha independentes que mapeiam estados equivalente. De forma prática, sabendo que $g$ é o máximo divisor comum (mdc) entre o tamanho das rede nos três eixos $p_x$, $p_y$ e $p_z$ o número de estados degenerados é calculado pela expressão

$$2^{4g} = 2^{4\cdot\mathrm{mdc}(p_x,p_y,p_z)}. \tag{4.23}$$

### 4.3.1 Operadores de linha do Chamon Code

Sobre o Chamon Code são definidos dois operadores de linha que realizam loops não contráteis: operadores de linha rígidos e operadores de linha flexíveis. Nas extremidades dos operadores de linha abertos há violam a paridade de operadores octaédricos levando o sistema para um estado excitado com a criação de partículas fractônicas. As excitações ocorrem devido a mudança de autovalor dos operadores octaédricos $S_i = 1 \rightarrow S_i = -1$. Em [24], o qual é a referência primária para esta seção, há um discussão detalhada sobre as excitações e a diagramação na rede da sua mobilidade.

Considere o plano $xy$ em $z = 0$, conforme ilustrado na Figura 21. A atuação de um operador $\sigma^z$ sobre um operador octaedro em um sítio $i \in \Lambda_{ímpar}$ anticomutam com os operadores nos quatro primeiros vizinhos com sítios na sub-rede par sobre o mesmo plano gerando quatro excitações que individualmente são fixas.

A única forma de mover as excitações, sem custo energético, é através de estados ligados, interpretados como dipolos de fráctons, sobre a diagonal da rede. Apesar de estarem limitados a um plano, as excitações se movem sobre um dimensão e, por isso, são considerados lineons.

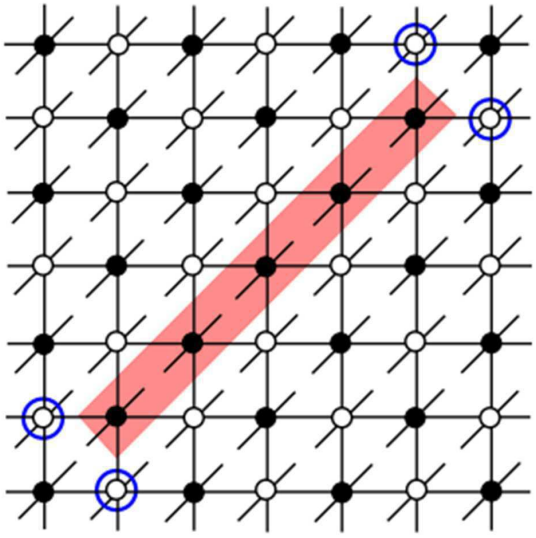

Figura 21 – Atuação do operadores de linha rígidos no Chamon Code. Fonte: [24].

O conjunto dos operadores de Pauli $\sigma^\alpha$ atuando em sequência em $n+1$ sítios pertencentes a sub-rede ímpar sobre uma curva diagonal

$$\begin{aligned}
\gamma^x &= \{(x, i_y, i_z), (x, i_y+1, i_z+1), \cdots, (x, i_y+n, i_z+n)\} \quad \text{para } x \text{ constante,} \\
\gamma^y &= \{(i_x, y, i_z), (i_x+1, y, i_z+1), \cdots, (i_x+n, y, i_z+n)\} \quad \text{para } y \text{ constante e} \\
\gamma^z &= \{(i_x, i_y, z), (i_x+1, i_y+1, z), \cdots, (i_x+n, i_y+1, z)\} \quad \text{para } z \text{ constante}
\end{aligned}$$

defini um operador de linha sobre a rede para $\alpha$ perpendicular ao plano. Uma vez sobre uma diagonal não é possível alterar a orientação da curva. Por isso, o operador de linha é classificado como rígido.

Não é possível definir uma curva fechada não trivial apenas sobre um plano devido a rigidez dos operadores e a orientação diagonal de mobilidade. Por se tratar de uma rede FCC o menor caminho fechado é sobre a diagonal principal de três faces simultaneamente adjacentes do cubo, porém na extremidade de cada linha sobre um plano há excitações que não foram aniquiladas. Para que o sistema volte ao estado lógico inicial pode-se conectar as extremidades das linha, por meio outros operadores de linha, sobre os planos sem aplicação, formando o desenho de um tetraedro. O operador que contém o conjunto $T$ de curvas que forma o tetraedro é definido como

$$W(T) = \prod_{\alpha=x,y,z} \prod_{j=1,2} \prod_{i \in \gamma_i^\alpha} \sigma_i^\alpha \tag{4.24}$$

A construção dos operadores de linha flexíveis é mais complexa e axiomática quando comparada a construção dos operadores de linha rígidos. Ela consiste na sobreposição de camadas definidas sobre a rede tridimensional resultando em uma rede hexagonal efetiva bidimensional como ilustrado na Figura 22 sobre a qual se defini o operador de

linha

$$W(\gamma) = \prod_{j=0}^{m-1} \sigma_{i_j}^{\alpha_j} \sigma_{i_j}^{\alpha_j}. \tag{4.25}$$

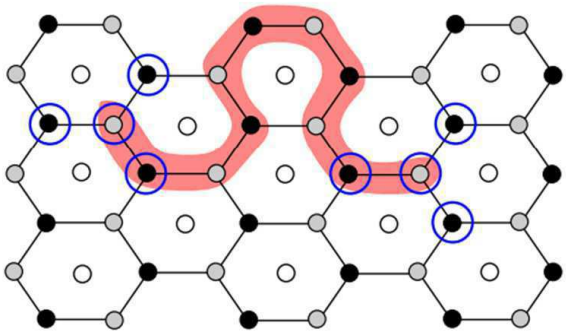

Figura 22 – Atuação do operadores de linha flexíveis no Chamon Code. Fonte: [24].

# REFERÊNCIAS


1 SALINAS, S. R. A. Introdução à física estatística. In: _____. São Paulo: EdUSP, 2001. cap. 12. ISBN 8531404665. Citado 3 vez na página 13, 16, and 62.

2 WEN, X.-G. **Quantum field theory of many-body systems: From the origin of sound to an origin of light and electrons**. [S.l.]: Oxford university press, 2004. Citado 7 vez na página 13, 14, 16, 17, 23, 25, and 38.

3 STANESCU, T. D. **Introduction to Topological Quantum Matter & Quantum Computation**. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. Includes bibliographical references and index. ISBN 978-1482245936. Citado 5 vez na página 13, 14, 19, 62, and 63.

4 STANESCU, T. D. Introduction to topological quantum matter & quantum computation. In: _____. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. ISBN 978-1482245936. Includes bibliographical references and index. Citado na página 13.

5 STANESCU, T. D. Introduction to topological quantum matter & quantum computation. In: _____. Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017. ISBN 978-1482245936. Includes bibliographical references and index. Citado na página 13.

6 PRETKO, M.; CHEN, X.; YOU, Y. Fracton phases of matter. **International Journal of Modern Physics A**, v. 35, n. 06, p. 2030003, fev. 2020. ISSN 1793-656X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X20300033>. Citado 3 vez na página 14, 47, and 50.

7 CASASOLA, H.; DELFINO, G.; YOU, Y.; BIENZOBAZ, P. F.; GOMES, P. R. S. Fractal subsystem symmetries, anomalies, boundaries, and effective field theory. **Physical Review B**, v. 110, n. 19, nov. 2024. ISSN 2469-9969. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.110.195105>. Citado na página 14.

8 VIJAY, S.; HAAH, J.; FU, L. Fracton topological order, generalized lattice gauge theory, and duality. **Physical Review B**, v. 94, n. 23, dec 2016. ISSN 2469-9969. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.94.235157>. Citado 2 vez na página 14 and 47.

9 MA, H.; LAKE, E.; CHEN, X.; HERMELE, M. Fracton topological order via coupled layers. **Physical Review B**, v. 95, n. 24, jun 2017. ISSN 2469-9969. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.95.245126>. Citado 2 vez na página 14 and 52.

10 MA, H. **Mechanisms for Fracton Phases**. 2019. Tese (Doutorado) — University of Colorado, 2019. Citado 5 vez na página 14, 18, 49, 50, and 52.

11 SAVARY, L.; BALENTS, L. Quantum spin liquids: a review. **Reports on Progress in Physics**, v. 80, n. 1, p. 016502, nov 2016. ISSN 1361-6633. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/80/1/016502>. Citado na página 14.

12 KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. **Rev. Mod. Phys.**, v. 51, p. 659–713, Oct 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.659>. Citado na página 14.

13 KITAEV, A. Fault-tolerant quantum computation by anyons. **Annals of Physics**, v. 303, n. 1, jan 2003. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0>. Citado 3 vez na página 14, 18, and 29.

14 RESENDE, M. F. A. d. A pedagogical overview on 2d and 3d toric codes and the origin of their topological orders. **Reviews in Mathematical Physics**, World Scientific, v. 32, n. 02, p. 2030002, 2020. Citado 2 vez na página 14 and 21.

15 SILVA, G. D. **Effective field theories for quantum spin liquids and fractonic systems**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, 2021. Disponível em: <https://repositorio.uel.br/handle/123456789/13303>. Citado 7 vez na página 14, 18, 19, 24, 31, 50, and 53.

16 HERRINGER, P. The toric code. **Rutgers university, lecture notes**, 2020. Citado na página 14.

17 WANG, Z. **Topological Quantum Computation**. Conference Board of the Mathematical Sciences, 2010. (Conference board of the mathematical sciences. CBMS regional conference series in mathematics). ISBN 9780821849309. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=OEWNAwAAQBAJ>. Citado 2 vez na página 14 and 19.

18 WEN, X.-G. Quantum orders in an exact soluble model. **Physical Review Letters**, v. 90, n. 1, p. 016803, Jan 2003. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.90.016803>. Citado 2 vez na página 14 and 38.

19 GUO, C.-X.; WANG, X.-R.; WANG, C.; KOU, S.-P. Non-hermitian dynamic strings and anomalous topological degeneracy on a non-hermitian toric-code model with parity-time symmetry. **Physical Review B**, v. 101, n. 14, apr 2020. ISSN 2469-9969. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.101.144439>. Citado 3 vez na página 14, 40, and 43.

20 YU, J.; KOU, S.-P. Macroscopic quantum tunneling effect of $Z_2$ topological order. **Phys. Rev. B**, v. 80, p. 075107, Aug 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.80.075107>. Citado 2 vez na página 14 and 40.

21 LEE, C.; HU, Y.; CHO, G. Y.; WATANABE, H. $\mathbb{Z}_N$ **generalizations of three-dimensional stabilizer codes**. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2504.09847>. Citado na página 14.

22 CHAMON, C. Quantum glassiness in strongly correlated clean systems: an example of topological overprotection. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, n. 4, p. 040402, feb 2005. Citado 2 vez na página 14 and 53.

23 SCHWARTZMAN-NOWIK, Z.; BROWN, B. J. Generalizing the matching decoder for the chamon code. **Quantum**, v. 9, p. 1775, jun 2025. ISSN 2521-327X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.22331/q-2025-06-18-1775>. Citado 2 vez na página 14 and 54.

24 BRAVYI, S.; LEEMHUIS, B.; TERHAL, B. M. Topological order in an exactly solvable 3d spin model. **Annals of Physics**, v. 326, n. 4, p. 839–866, apr 2011. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2010.11.002>. Citado 2 vez na página 14 and 55.

25 HAAH, J. Local stabilizer codes in three dimensions without string logical operators. **Physical Review A**, v. 83, n. 4, abr. 2011. ISSN 1094-1622. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.83.042330>. Citado na página 14.

26 HANSSON, T.; OGANESYAN, V.; SONDHI, S. Superconductors are topologically ordered. **Annals of Physics**, v. 313, n. 2, p. 497–538, oct 2004. ISSN 0003-4916. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2004.05.006>. Citado na página 14.

27 KITAEV, A.; LAUMANN, C. **Topological phases and quantum computation**. 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0904.2771>. Citado na página 14.

28 MCGREEVY, J. Generalized symmetries in condensed matter. **Annual Review of Condensed Matter Physics**, Annual Reviews, v. 14, n. 1, p. 57–82, mar 2023. ISSN 1947-5462. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-040721-021029>. Citado 2 vez na página 14 and 19.

29 SCHWICHTENBERG, J. **Physics from Symmetry**. 2nd. ed. Springer, 2018. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 978-3-319-66631-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66631-0>. Citado na página 16.

30 PICH, A. **Effective Field Theory**. 1998. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9806303>. Citado na página 19.

31 SACHDEV, S. Topological order, emergent gauge fields, and fermi surface reconstruction. **Reports on Progress in Physics**, v. 82, n. 1, p. 014001, nov 2018. ISSN 1361-6633. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aae110>. Citado 3 vez na página 20, 24, and 29.

32 HE, H.; ZHENG, Y.; BERNEVIG, B. A.; REGNAULT, N. Entanglement entropy from tensor network states for stabilizer codes. **Physical Review B**, v. 97, n. 12, mar 2018. ISSN 2469-9969. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.125102>. Citado 2 vez na página 31 and 47.

33 WEN, X.-G. Quantum orders and symmetric spin liquids. **Physical Review B**, v. 65, n. 16, apr 2002. ISSN 1095-3795. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.65.165113>. Citado na página 38.

34 SCHULZ, M. D.; DUSUEL, S.; ORúS, R.; VIDAL, J.; SCHMIDT, K. P. Breakdown of a perturbed $\mathbb{Z}_n$ topological phase. **New Journal of Physics**, v. 14, n. 2, p. 025005, feb 2012. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/14/2/025005>. Citado na página 46.

# Apêndices

# APÊNDICE A – FENOMENOLOGIA DE LANDAU: FUNCIONAL DA ENERGIA LIVRE

A fenomenologia de Landau, considerando que o funcional de energia livre do sistema apresente simetria $\mathbb{Z}_2$, descreve as fases do sistema a partir do valor do parâmetro de ordem. Conforme anunciado no Capítulo 2, o desenvolvimento a seguir considera a interseção entre o escopo da mecânica estatística e o formalismo da teoria de campos. Por isso, com base no desenvolvimento apresentado em [3], será detalhado como determinar o funcional da energia livre a partir da função de partição no ensemble canônico. Em seguida, seguindo os passos apresentados em [1], será discutido com maior abrangência as condições impostas pelas teorias e, com isso, interpretar os resultados obtidos.

O modelo ferromagnético de Ising em uma dimensão contempla a condição de simetria presente na hamiltoniana no qual as variáveis do sistema, autovalores de spins, são $S_i = \pm 1$ e formam um grupo de simetria $\mathbb{Z}_2$. Desse modo, esse modelo, por mais que não capture todos os aspectos da fenomenologia de Landau ilustra a construção do funcional da energia livre e do parâmetro de ordem.

Por se tratar de um sistema de interação entre primeiros vizinhos em uma rede considera-se que a hamiltoniana livre tem a forma

$$H_0 = -\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij} S_i S_j, \tag{A.1}$$

em que os subíndices $i$ e $j$ localizam sítios da rede e correm sobre primeiros vizinhos dentro da somatória. Além disso, $J_{ij}$ é a constante de acoplamento e $S_i$ os operadores que atuam sobre os spins. Observa-se que os spins estão atuando localmente na rede e que a média dos seus valores fornecem a magnetização, $\psi$, do sistema, que por sua vez, representa o parâmetro de ordem. Diante disso, uma estratégia perspicaz para extrair física não trivial de um problema é adicionar uma interação que acople com o sistema. Assim incluindo-se um campo externo $h_i$ que interage com com spins da rede, a hamiltoniana, agora, tem a forma

$$H = H_0 + H_{int} = -\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij} S_i S_j - \sum_{i}^{N} h_i S_i. \tag{A.2}$$

Como o intuito é analisar o sistema pela lente da mecânica estatística o próximo passo é determinara função de partição. Como o número de partículas é fixo e considera-se que o sistema está a temperatura fixa, ou seja, em contato com um reservatório térmico, é possível analisar pequenas flutuações, a partir da função de partição canônica

$$Z = \mathrm{Tr}\exp(-\beta H). \tag{A.3}$$

Nesse ponto, o cálculo da função de partição é um exercício desafiador pois a hamiltoniana da equação não está diagonalizada devido a interação explicita entre primeiros vizinhos que misturam estados de bases.

Felizmente, é possível linearizar termos quadráticos do operador hamiltoniano ao se introduzir um campo auxiliar contínuo usando a transformação de Hubbard-Stratonovich [3]. Isso representa uma mudança de variável.

A priori, a interação entre os spins determinava a dinâmica do sistema e a média de seus valores fornecia a magnetização. Agora, impõem-se que os spins interagem com um campo auxiliar recuperando a mesma dinâmica. Como esse campo auxiliar deve ser intrínseco à rede, trata-se da própria magnetização $\psi$ e, por sua vez, o parâmetro de ordem.

Aplicando a transformação de Hubbard-Stratonovich na exponencial da Equação A.3 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} I \equiv exp\left(-\left(-\sum_{\langle i,j\rangle}\frac{\beta J_{ij}}{2}S_iS_j\right)+\sum_i \beta h_i S_i\right) &= \exp\left(\sum_{\langle i,j\rangle}\frac{\beta J_{ij}}{2}S_iS_j\right)\exp\left(\sum_i \beta h_i S_i\right) \\ &= \left[A\prod_i\int \mathrm{d}\psi_i\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\psi_i K_{ij}\psi_j+\sum_{\langle i,j\rangle}\psi_i K_{ij}S_j\right)\right]\exp\left(\sum_i \beta h_i S_i\right). \end{aligned} \tag{A.4}$$

em que $K_{ij} = \beta J_{ij}$ e $A = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det(K)}}$.

Agora, para determinar a função de partição de forma mais conveniente pode-se expressar o traço da Equação A.4 como o proditório sobre a soma dos valores de spin

$$\begin{aligned} A\prod_i\int \mathrm{d}\psi_i\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\psi_i K_{ij}\psi_j\right)\mathrm{Tr}\left(\exp\left(\sum_i\left(\psi_i\bar{K}S_j+\beta h_i S_i\right)\right)\right) \\ A\prod_i\int \mathrm{d}\psi_i\ \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\psi_i K_{ij}\psi_j\right)\prod_i\sum_{S_{i,j}}\exp\left(\psi_i\bar{K}S_j+\beta h_i S_i\right). \end{aligned} \tag{A.5}$$

com $\sum_j K_{ij} = \bar{K}$. Concentrando a atenção para a somatória dos valores de spin é possível identificar a soma como o cosseno hiperbólico

$$\exp\left(\psi_i\bar{K}+\beta h_i\right)+\exp\left(-\psi_i\bar{K}-\beta h_i\right) = 2\cosh\left(\psi_i\bar{K}+\beta h_i\right). \tag{A.6}$$

Contudo, é mais conveniente manter a notação em termos de exponencias, por isso se reescreve o produtório como

$$\prod_i\sum_{S_{i,j}}\exp\left[\psi_i\bar{K}S_j+\beta h_i S_i\right] = \exp\left[\sum_i \ln\left(2\cosh\left(\psi_i\bar{K}+\beta h_i\right)\right)\right]. \tag{A.7}$$

Expandindo a Equação A.7 e levando a somatória para o limite do contínuo sabendo que a expansão do $\ln(\cosh(x)) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(x^6)$

$$\ln\Big(\cosh\Big(2(\bar{K}\psi + \beta h)\Big)\Big) = \cancel{\ln 2} + \frac{(\bar{K}\psi + \beta h)^2}{2} - \frac{(\bar{K}\psi + \beta h)^4}{12} + O((\bar{K}\psi + \beta h)^6)$$
$$\approx \frac{(\bar{K}\psi)^2}{2} + \bar{K}\beta h\psi + \frac{\bar{K}^2\psi^2\beta^2h^2}{2} - \frac{(\bar{K}\psi)^4}{12}$$

Concentrando a atenção para o campo auxiliar $\psi_i$ é conveniente aplicar a transformada de Fourier no limite do contínuo. Assim, os campos podem ser reescritos como

$$\psi_i = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\psi(k)e^{ik\cdot R_i} \quad \textbf{e} \quad \psi_j = \int \frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\psi(k')e^{ik'\cdot R_j}. \tag{A.8}$$

Sabendo, pela invariância translacional, que $R_{ij} = R_i - R_j$ e $K_{i,j} \to K_{0,j-i} \to K_{0,l}$ em que $l = j - i$ a exponencial que depende do campo, usando as Equações A.8, também podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
\sum_{ij}\psi_iK_{ij}\psi_j &= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\psi(k)\psi(k')\sum_{\langle i,j\rangle}K_{ij}e^{ik\cdot R_i}e^{ik'\cdot R_j} \\
&= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\psi(k)\psi(k')\sum_i e^{ik\cdot R_i}\sum_j K_{ij}e^{ik'\cdot R_j} \\
&= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\psi(k)\psi(k')\sum_i e^{i(k+k')\cdot R_i}\sum_l K_{ol}e^{ik'\cdot R_{0l}} \\
&= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{d^dk'}{(2\pi)^d}\psi(k)\psi(k')(2\pi)^d\delta(k+k')K(k) \\
&= \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\psi(k)\psi(-k)K(k) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}|\psi|^2K(k).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Aplicando a transformada de Fourier de $K(k)$, evidenciando a dependência explicita de $k$.

$$\begin{aligned}
K(k) &= \sum_l K_{0l}e^{-ik\cdot R_{0l}} = \sum_l K_{0l}\left(1 - i(k\cdot R_{0l}) - \frac{1}{2}(k\cdot R_{0l})^2 + O(k^3)\right) \\
&= \sum_l K_{0l}\left(1 - \frac{1}{2}k^2R_{0l}^2\cos^2(\theta)\right) = \sum_l K_{0l}\left(1 - \frac{1}{2d}k^2R_{0l}^2\right) \\
&= \sum_l K_{0l} - \frac{1}{2d}\sum_l R_{0l}^2k^2 = \bar{K} - wk^2.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Substituindo a Equação A.10 na Equação A.9

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}|\psi|^2K(k) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}|\psi|^2\left(\bar{K} - wk^2\right) = \frac{1}{v}\int d^dx\left(\bar{K}\psi^2 + wk(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2\right) \tag{A.11}$$

Com base nas relações obtidas, pode-se reescrever a Equação A.11, desconsiderando termos constantes

$$A\prod_i \int \mathrm{d}\psi_i \, \exp\left[-\frac{1}{2v}\int \mathrm{d}^d x \, \bar{K}\psi^2 - wk(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2 + \ln\left(2\cosh\left(\psi\bar{K}+\beta h\right)\right)\right]$$
$$A\prod_i \int \mathrm{d}\psi_i \, \exp\left[-\frac{\beta}{\beta v}\int \mathrm{d}^d x \, \frac{wk(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} + \frac{\bar{K}\psi^2}{2} - \ln\left(2\cosh\left(\psi\bar{K}+\beta h\right)\right)\right] \tag{A.12}$$

Definindo $A\prod_i \mathrm{d}\psi_i = \mathcal{D}\psi$, a função de partição em termos das novas varáveis é

$$\begin{aligned} Z &= A\prod_i \int \mathrm{d}\psi_i \, \exp\left[-\beta\left(\frac{1}{\beta v}\int \mathrm{d}^d x \, \frac{w(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} + \frac{\bar{K}\psi^2}{2} - \ln\left(2\cosh\left(\psi\bar{K}+\beta h\right)\right)\right)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\psi \, \exp\left[-\beta F[\psi]\right]. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Comparando com a função de partição do ensemble canônico, no limite do contínuo, o funcional $F[\psi]$ representa a hamiltoniana efetiva para o sistema. Analisando seus termos, algumas informações da teoria se destacam. Observe que o termo do gradiente ao quadrado $(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2$ garante que o parâmetro de ordem seja suave sobre todo o espaço, nos casos essa condição não é respeitada, normalmente em sistemas de baixais dimensão, com $d = 1, 2$, a teoria de Landau não pode ignorar flutuações térmicas e de correlação.

Somando os termos quadráticos e a quarta potência obtidos da expansão do ln calculado em A na Equação A.13 a forma completa do funcional é

$$\begin{aligned} F[\psi] &= \frac{1}{\beta v}\int \mathrm{d}^d x \, \frac{w(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} + \frac{\bar{K}\psi^2}{2} - \ln\left(2\cosh\left(\psi\bar{K}+\beta h\right)\right) \\ &= \int \mathrm{d}^d x \, \frac{w}{\beta v}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} + \frac{\bar{K}\beta h}{\beta v}\psi + \frac{(\bar{K}-\bar{K}^2)}{\beta v}\frac{\psi^2}{2}\psi^2 - \frac{\bar{K}^4}{3\beta v}\frac{\psi^4}{4} \\ &= \int \mathrm{d}^d x \, w\frac{(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} - h\psi + a\frac{\psi^2}{2} + b\frac{\psi^4}{4} \\ &= \int \mathrm{d}^d x \, w\frac{(\boldsymbol{\nabla}\psi)^2}{2} + f_L(\psi) \end{aligned} \tag{A.14}$$

Observa-se também que $f_L$ é uma expansão do parâmetro de ordem, sendo, portanto, associado a transições de segunda ordem (transições contínuas). Os mínimos da função da energia livre na ausência de campo são os pontos críticos do sistema. Assim, considerando $h = 0$ e impondo que a derivada primeira seja zero

$$\frac{\partial f_L}{\partial \psi} = a\psi + b\psi^3 = \psi(a + b\psi^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi = 0 \\ \psi = \pm\sqrt{-\dfrac{a}{b}} \end{cases} \tag{A.15}$$

a derivada segunda, considerando os valores obtidos em A.15, vale

$$\frac{\partial^2 f_L}{\partial \psi^2} = a + 3b\psi^2 \Rightarrow \begin{cases} a, \text{se } \psi = 0 \\ -2a, \text{se } \psi = \pm\sqrt{-\dfrac{a}{b}}. \end{cases} \tag{A.16}$$

A partir disso, pode-se extrair informações sobre o coeficiente $a$. Para a fase desordenada, ou seja, quando $\psi = 0$, o coeficiente $a$ deve apresentar valores positivos para a concavidade seja positiva e, com isso, o funcional apresente um único mínimo. Respaldado sobre o mesmo argumento, na fase ordenada, quando $\psi \neq 0$, o coeficiente $a$ deve apresentar valores negativos. Na fase ordenada se observa a quebra espontânea da simetria quando o sistema escolhe um dos dois mínimos.

# APÊNDICE B – MOBILIDADE DAS EXCITAÇÕES NO TORIC CODE

As excitações do Toric Code são quasipartículas emaranhadas que emergem da violação de estabilidade do subespaço protegido $\mathcal{L}$, definido na Equação 3.39, associados aos operadores $A_s$ e $B_p$. Os chamados operadores de linha abertos criam e movem essas excitações. A figura 23 traz uma ilustração da mobilidade dessas excitações.

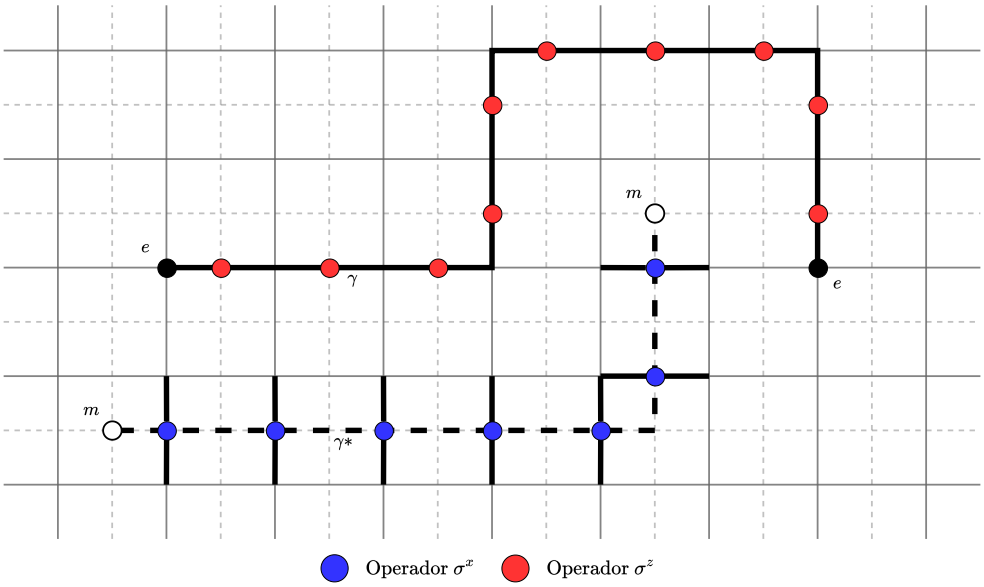


Figura 23 – Mobilidade das excitações elétricas ($e$) e magnéticas ($m$) no Toric Code.

Considere o primeiro estado excitado criado pela atuação de um operador $\sigma_j^x$ em um link $j$ que pertence simultaneamente a $\partial p_1$ e $\partial p_2$. Isso implica que o autovalor dos operadores de plaquete $B_{p_1}$ e $B_{p_2}$ são invertidos e, consequentemente, identificados como excitações, as quais são podem ser interpretadas como quasipartículas localizadas no vértice da rede dual (centralizada no plaquete da rede ordinária). Após isso, considere, também, que outro operadores $\sigma^x$ é aplicado no link $\{i \mid i \neq j\}$ que pertence a $\partial p_2$ e $\partial p_3$. Essa operação retorna o autovalor inicial do operador de plaquete $B_{p_2}$ e inverte o autovalor do operador $B_{p_3}$, aniquilando a quasipartícula associada ao plaquete $p_2$ e criando outra no plaquete $p_3$.

Para verificar essa mobilidade, assuma que

$$|\xi\rangle = \sigma_i^x |\psi\rangle = \sigma_i^x |1,-1\rangle \otimes |1,1\rangle \otimes \cdots \otimes |1,1\rangle \,, \tag{B.1}$$

onde $|\psi\rangle$ é o primeiro estado excitado, resultado da atuação de $\sigma_j^x$ em um estado de referência, e $|\xi\rangle$ o estado após a atuação do operador $\sigma_i^x$.

Para interpretar a atuação sequencial do operadores $\sigma^x$ uma estratégia prática é determinar o espectro de energia para e o estado correspondente. Assim, aplicando a hamiltoniana na equação B.1 obtém-se a equação

$$H\left|\xi\right\rangle = -J\left(\sum_s A_v - \sum_p B_p\right)\sigma_i^x\left|1,-1\right\rangle \otimes \left|1,1\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|1,1\right\rangle. \tag{B.2}$$

Considerando a regra de comutação entre os operadores de Pauli, apenas os termos de plaquete que contém o link $i$ anticomutam, conforme pode ser observado na equação

$$\begin{aligned} H\left|\xi\right\rangle &= -J\left(\sum_s^N A_v\sigma_i^x + \sum_p^N B_p\sigma_i^x\right)\left|1,-1\right\rangle_{p_2} \otimes \left|1,1\right\rangle_{p_3} \otimes \cdots \otimes \left|1,1\right\rangle \\ &= -J\left(\sum_v^N A_v\sigma_i^x + B_{p_2\subset i}\sigma_i^x + B_{p_3\subset i}\sigma_i^x + \sum_p^{N-1} B_p\sigma_i^x\right)\left|1,-1\right\rangle_{p_2} \otimes \left|1,1\right\rangle_{p_3} \otimes \cdots \otimes \left|1,1\right\rangle \\ &= -J\left(\sigma_i^x\sum_v^N A_v - \sigma_i^x B_{p_2\subset i} - \sigma_i^x B_{p_3\subset i} + \sigma_i^x\sum_p^{N-1} B_p\sigma_i^x\right)\left|1,-1\right\rangle_{p_2} \otimes \left|1,1\right\rangle_{p_3} \otimes \cdots \otimes \left|1,1\right\rangle. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Atuando os termos da hamiltoniana no estado $\left|\psi\right\rangle$, o autovalor, após a hamiltoniana comutar com $\sigma_i^x$, é

$$H\left|\xi\right\rangle = -J\left(1_{p_2} - 1_{p_3} + \sum_{v,p\neq p_2,p_3}(1_v + 1_p)\right)\sigma_i^x\left|1,-1\right\rangle \otimes \cdots \otimes \left|1,1\right\rangle \tag{B.4}$$

Isso é equivalente medir o autovalor de um estado com excitação em $B_{p_3}$. A atuação sequencial de operadores que violam a condição de estabilidade dos termos de plaquete define um operador de linha aberto de

$$S_{\gamma*}^m = \prod_{l\in\gamma*}\sigma_l^x, \tag{B.5}$$

em que $\gamma^*$ é a curva na rede dual. As excitações que referentes a mudação de autovalor dos termos de plaquete são chamadas de cargas magnéticas

As excitações associadas a violação de estabilidade dos operadores estrela, chamadas de cargas elétricas, são criadas e propagadas pelos operadores de linha abertos

$$S_\gamma^e = \prod_{l\in\gamma}\sigma_l^z \tag{B.6}$$

com $\gamma$ uma curva na rede ordinária. O desenvolvimento para mostrar a mobilidade das cargas elétricas é semelhante ao apresentado para as cargas magnéticas.

Entre as semelhanças entre elas destacam-se o custo energético para serem criadas. Ambas as excitações são gapped, porém podem ser mover pela rede mantendo a energia do sistema. Quanto as diferenças, tomando como parâmetro apenas a rede ordinária, as cargas elétricas se movem paralelamente e sobre a mesma orientação dos links enquanto as cargas magnéticas se movem ortogonalmente. A Figura 23 mostra a mobilidade das excitações na rede.