



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

OSMAR TORMENA JUNIOR

**MÉTODO DE AUTO-CALIBRAÇÃO PARA TRÍADES DE
SENSORES UTILIZADAS EM APLICAÇÕES DE
ESTIMAÇÃO DE ATITUDE**

Londrina
2010

OSMAR TORMENA JUNIOR

**MÉTODO DE AUTO-CALIBRAÇÃO PARA TRÍADES DE
SENSORES UTILIZADAS EM APLICAÇÕES DE
ESTIMAÇÃO DE ATITUDE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como Parte dos Requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Tosin.

Londrina
2010

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

T684m Tormena Junior, Osmar..

Método de auto-calibração para tríades de sensores utilizados em aplicações de estimação de atitude/ Osmar Tormenta Junior. – Londrina, 2010.

89 f. : il.

Orientador: Marcelo CARvalho Tosin.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Tecnologia e Urbanismo, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica– Teses. 2. Calibração– Teses. 3. Sistemas microeletromecânicos – Teses. I. Tosin, Marcelo Carvalho. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica III. Título.

CDU 621.3:519.685

OSMAR TORMENA JUNIOR

**MÉTODO DE AUTO-CALIBRAÇÃO PARA TRÍADES DE
SENSORES UTILIZADAS EM APLICAÇÕES DE ESTIMAÇÃO DE
ATITUDE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como Parte dos Requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos
Especialidade: Sistemas Inerciais

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Tosin
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Taufik Abrao
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Roberto Lopes
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais -
INPE

Londrina, 21 de dezembro de 2010.

Este trabalho é dedicado primeiramente a minha família. Em especial à minha namorada Marcela, a quem este trabalho custou, indiretamente, muitas horas de relaxação e entretenimento.

O autor também dedica este trabalho a todos que, em maior ou menor grau, contribuíram para o desenvolvimento do trabalho realizado.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela clareza de ideias e perseverança com os quais Ele sempre me abençoou, pois sem estes este trabalho não poderia ser feito.

A minha família, em especial meus pais, de quem sempre desfrutei de total apoio e confiança.

À Marcela, a quem o desenvolvimento deste trabalho custou, mesmo que de forma indireta, muitas oportunidades de diversão, porem ainda assim, sempre ofereceu seu apoio e compreensão.

Ao meu orientador Prof. Tosin e ao Prof. Francisco Granziera Jr., que tiveram participação ativa em todas as fases de desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca: Prof. Taufik que deu substancial contribuição a este trabalho em sua qualificação e realçou compromissos familiares

para estar presente na defesa e, mais uma vez, trazer sua contribuição. Ao Dr. Roberto Lopes que mesmo em meio a seus diversos compromissos, não se furtou de trazer sua experiência na área para a melhor avaliação deste trabalho.

A todos os amigos e colegas, em especial o grupo de pesquisa do Laboratório T5, cujo o apoio e a amizade contribuíram de diversas formas para o desenvolvimento deste trabalho.

**"A verdadeira glória consiste de ler algo que mereça ser
escrito, e escrever algo que mereça ser lido."**

Gaius Plinius Secundus

TORMENA JUNIOR, Osmar. **Método de auto-calibração para tríades de sensores utilizadas em aplicações de estimação de atitude**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e simulação computacional de uma metodologia para auto-calibração de sensores triaxiais em aplicações de atitude, especificamente acelerômetros e magnetômetros MEMS. A metodologia consiste de um processo em dois passos, onde primeiramente são estimadas linearmente variáveis intermediárias, sendo que a partir destas são resolvidos algebricamente os parâmetros de calibração. O procedimento de auto-calibração foi desenvolvido para corrigir desvios nos valores de sensibilidade, *bias* e erros de ortogonalidade da tríade sensora. É mostrado que os valores reais dos parâmetros do modelo do sensor podem ser bastante diferentes dos valores nominais, e que a utilização de parâmetros calibrados produz resultados mais precisos. Ainda mais importante é a melhoria na precisão e acurácia na determinação da direção da grandeza física de referência observada, pois este erro se propaga para a informação de atitude independentemente do algoritmo de atitude utilizado. Por fim, é exposta uma interessante relação entre o erro na direção observada da grandeza física de referência, o nível de ruído intrínseco do sensor e o nível de independência linear entre as amostras utilizadas na auto-calibração. Esta relação pode ser utilizada para prever o desempenho de sistemas de atitude auto-calibrados, consistindo então de uma poderosa ferramenta de desenvolvimento.

Palavras chaves: Engenharia elétrica. Calibração. Sistemas microeletromecânicos.

TORMENA JUNIOR, Osmar. **Method of auto-calibration for triad of sensors used in applications estimation of attitude.** 2010. Dissertation (Master's Degree in Electric Engineering) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010

ABSTRACT

This work presents the development and computational simulations of a methodology to auto-calibrate triaxis sensors used in attitude systems, specifically MEMS accelerometers and magnetometers. The method is a two-step procedure, where first, intermediate variables are linearly estimated, and secondly, the calibration parameters are algebraically solved from the intermediate variables. The auto-calibration procedure was developed to correct deviations in the sensibility and bias values, as well as correct orthogonality errors in the sensor triad. It is shown that the real sensor model parameters can appreciably differ from typical values, and that the use of calibrated parameters yield more precise results. More important yet is the improvement in the accuracy and precision in determining the direction of the observed reference physical quantity, as this error propagates itself into the attitude data, regardless of the attitude algorithm in use. Finally, it is exposed an interesting relationship between the error in the direction of the observed physical quantity, the characteristic noise level in the sensor and the level of linear independence among the samples used in the auto-calibration procedure. This relationship can be used to predict the performance of auto-calibrated attitude systems, which makes it an important development tool.

Keywords: Electric engineering. Calibration. Microelectromechanical systems.

Lista de Figuras

Figura 3.1 :	Transformação do sistema de coordenadas do corpo (a) para o sistema de coordenadas de referencia (b) através da atitude	23
Figura 3.2 :	Desvio do valor médio da gravidade, dado em mGal	25
Figura 4.1:	Construção típica de um acelerômetro MEMS.....	46
Figura 4.2:	Sensibilidade cruzada em um acelerômetro MEMS.....	46
Figura 4.3 :	Desvios de ortogonalidade na tríade	47
Figura 4.4:	Diagrama esquemático da estrutura interna de um magnetômetros AMR.....	49
Figura 7.1:	Estimação das sensibilidades.....	69
Figura 7.2 :	Estimação dos <i>bias</i>	70
Figura 7.3 :	Estimação dos desvios de ortogonalidade	71
Figura 7.4:	Erro na direção do vetor observado	72
Figura 7.5:	Amplitude do erro na direção do vetor observado.....	73
Figura 7.6:	Relação entre erro na direção observada, nível de ruído e espalhamento das amostras	74

Lista de Abreviaturas e Siglas

AHRS	Attitude and Heading System - Sistema de Atitude e Apontamento
AMR	Anisotropic Magnetoresistive - Magneto-resistiva Anisotrópica
AWG	Additive White Gaussian - Gaussiano Branco e Aditivo
CI	Circuito Integrado
DCM	Direction Cosine Matrix - Matriz de Cossenos Diretores
EGM2008	Earth Gravitational Model 2008 - Modelo Gravitacional Terrestre 2008
ESOQ1	First Estimator of the Optimal Quaternion - Primeiro Estimador do Quatérnion Ótimo
ESOQ2	Second Estimator of the Optimal Quaternion - Segundo Estimador do Quatérnion Ótimo
FOAM	Fast Optimal Attitude Matrix - Matriz de Atitude Ótima Rápida
GPS	Global Positioning System - Sistema de Posicionamento Global
LSE	Least Squares Estimator - Estimador de Mínimos Quadrados
MEMS	Micro-Electro-Mechanical Systems - Sistemas Micro-Eletromecânicos
MLE	Maximum Likelihood Estimator - Estimador de Máxima Verossimilhança
MSE	Mean Square Error - Erro Quadrático Médio
MVUE	Minimum Variance Unbiased Estimator - Estimador Não-Viesado de Mínima Variância
PCB	Printed Circuit Board - Placa de Circuito Impresso
QUEST	Quaternion Estimator - Estimador do Quatérnion
SVD	Singular Value Decomposition - Decomposição em Valor Singular
TRIAD	Three-axis Attitude Determination - Determinação da Atitude em Três Eixos
WMM2010	World Magnetic Model 2010 - Modelo Magnético Mundial 2010

Convenções e Lista de Símbolos

a, b e c	Sensibilidades dos eixos x, y e z
\mathbf{a}_{in}	Vetor Aceleração
\mathbf{a}_{out}	Saída Analógica do Acelerômetro
$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$	Campo Geomagnético Total
$\mathbf{b}_{\text{c}}(\mathbf{r}, t)$	Campo Geomagnético Crustal
$\mathbf{b}_{\text{d}}(\mathbf{r}, t)$	Campo Geomagnético de Perturbação
\mathbf{b}_{in}	Vetor Campo Magnético
$\mathbf{b}_{\text{m}}(\mathbf{r}, t)$	Campo Geomagnético Principal
\mathbf{b}_{out}	Saída Analógica do Magnetômetro
\mathbf{e}	Eixo de Rotação
\mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k}	Versores da base ortonormal Euclidiana
$\mathbf{o}_{\mathbf{a}}$	<i>Bias</i> do Acelerômetro
$\mathbf{o}_{\mathbf{b}}$	<i>Bias</i> , ou Erro <i>Hard Iron</i> , do Magnetômetro
$\llbracket \mathbf{q} \rrbracket$	Matriz Anti-Simétrica de \mathbf{q}
\check{q}	Quatérnion
q_1, q_2 e q_3	Componentes Vetoriais do Quatérnion
q_4	Componente Escalar do Quaternion
\check{q}^*	Quatérnion Conjugado
\mathbf{q}	Parte Vetorial do Quaternion
\mathbf{u}	Vetor da Grandeza Física Genérica
u_x, u_y e u_z	Componentes da Grandeza Física Genérica
\tilde{u}_x, \tilde{u}_y e \tilde{u}_z	Componentes da Saída do Sensor Genérico
\mathbf{v}	Vetor no Sistema de Coordenadas de Referência
\mathbf{w}	Vetor no Sistema de Coordenadas de Observação
x_0, y_0 e z_0	<i>Biases</i> dos eixos x, y e z
\mathbf{y}	Vetor de Gibbs
\mathbf{A}	Matriz de Atitude

$A-J$	Variáveis Intermediárias
\mathbf{B}	Matriz Perfil de Atitude
\mathbf{C}_m	Matriz de Desalinhamento
\mathbf{C}_{sf}	Matriz dos Fatores de Escala
\mathbf{C}_{si}	Matriz de Erro <i>Soft Iron</i>
\mathbf{M}_{obs}	Tríade de Observação
\mathbf{M}_{ref}	Tríade de Referência
$\mathbf{P}_{\phi\phi}$	Matriz de Covariância em Ângulos de Euler
\mathbf{P}_{qq}	Matriz de Covariância Quaterniônica
$\mathbf{P}_{\theta\theta}$	Matriz de Covariância Cartesiana
\mathbf{R}	Matriz de Rotação
\mathbf{R}_{ϕ}^x	Rotação de ϕ no eixo x
\mathbf{R}_{θ}^y	Rotação de θ no eixo y
\mathbf{R}_{ψ}^z	Rotação de ψ no eixo z
\mathbf{X}	Matriz de Amostras
σ^2	Variância do Versor
σ_{η}	Desvio Padrão do Ruído do Sensor
σ_{Dado}	Desvio pPadrão do Espalhamento Angular das Amostras
η_x, η_y e η_z	Ruído para os eixos x, y e z
v e v	Ângulos de erro na direção do vetor observado
ψ, θ e ϕ	Ângulos de Euler
ρ, ϕ e λ	Desvios de Ortogonalidade da Tríade
ρ_1, ρ_2 e ρ_3	Parâmetros de Rodrigues
$\Delta(\cdot)$	Variação
Θ_{max}	Ângulo máximo de erro da atitude
$[\cdot]^*$	Operador Conjugado
$[\cdot]^T$	Operador Transposição
$[\cdot]^{\dagger}$	Operador Pseudo-Inversa de Moore-Penrose
$[\cdot]^a$	Operador Adjunta
\bullet	Produto Interno
$ \cdot $	Operador Norma Euclidiana
\otimes	Produto Quaterniônico
\parallel	Indica paralelismo entre vetores.

\times Produto Externo
 $det[\cdot]$ Operador Determinante
 $E[\cdot]$ Operador Esperança Estatística
 $tr[\cdot]$ Operador traço

Sumário

1	<i>Introdução</i>	15
1.1	Produção Bibliográfica	18
	<i>Parte I - Revisão Bibliográfica</i>	19
2	<i>Calibração e Auto-calibração</i>	20
2.1	Auto-calibração	21
3	<i>Atitude</i>	23
3.1	Referências de Atitude	24
3.1.1	Campo Gravitacional Terrestre	24
3.1.2	Campo Magnético Terrestre	26
3.1.3	Outras Referências de Atitude	27
3.2	Representação de Atitude	29
3.2.1	Ângulos de Euler	30
3.2.2	Matriz de Rotação	31
3.2.3	Quatérnions	33
3.2.4	Outras Representações	35
3.3	Algoritmos de Atitude	36
3.3.1	TRIAD	37
3.3.2	QUEST	38
3.3.3	Ouros Algoritmos	43
4	<i>Sensores de Atitude</i>	45
4.1	Acelerômetros	45
4.2	Magnetômetros	48
5	<i>Estimação de Parâmetros</i>	51
5.1	Conceitos Gerais em Estimação Pontual	52
5.2	Métodos de Estimação Pontual	53
5.2.1	Método dos Momentos	53
5.2.2	Método de Máxima Verossimilhança	53

5.2.3	Estimação Bayesiana de Parâmetros	54
5.3	Análise de Regressão	56
5.3.1	Regressão Linear Múltipla	56
5.3.2	Regressão Linear por Mínimos Quadrados.....	56
5.3.3	Propriedades da Estimação de Mínimos Quadrados	57
<i>Parte II - Desenvolvimento</i>		58
6	<i>Metodo de Calibração</i>	59
6.1	Modelo Matemático Genérico.....	59
6.2	Estimação por Mínimos Quadrados.....	61
6.3	Resolvendo os Parâmetros Algebricamente	62
6.4	Computo da Pseudo-Inversa	63
6.5	Condições de Aplicabilidade e Confiabilidade	64
7	Resultados	67
7.1	Erro nos Parâmetros de Calibração	68
7.2	Erro na Direção do Vetor Observado.....	69
7.3	Erro na Atitude	73
8	<i>Conclusão</i>	76
8.1	Proposta	77
<i>Referencias Bibliográficas</i>		77
<i>APÊNDICE A – Equações Expandidas</i>		79
A.1	Forma Expandida da Eq. (6.8).....	82
A.2	Forma Expandida e Simplificada da Eq. (6.9)	84
A.3	Parâmetros de Calibração.....	85
Anexo A – Intensidade do Campo Geomagnético		87
Anexo B – Declinação do Campo Geomagnético		88
Anexo C – Inclinação do Campo Geomagnético		89

1 *Introdução*

A calibração de um determinado sistema é a única maneira prática de conferir alguma confiabilidade aos dados obtidos por este sistema. Teoricamente, as informações obtidas por um sistema bem calibrado sofre apenas de erros aleatórios, inerentes à qualquer processo de obtenção de informações.

Este fato torna a calibração uma ferramenta essencial para a obtenção de um nível desejado de desempenho nos mais diversos sistemas de aquisição de dados, eletrônicos ou não, para as mais variadas finalidades.

O procedimento de calibração de um sistema genérico comumente faz uso de uma ou mais referências conhecidas, para que se possa corrigir os parâmetros que tenham sofrido desvio. As particularidades de uma rotina de calibração são dependentes do tipo de informações que o sistema obtém, e da forma como ele as obtém.

Sistemas determinadores, ou estimadores, de atitude para aplicações terrestres normalmente fazem uso do campo gravitacional da Terra e do campo geomagnético para resolver a orientação de um corpo, em relação a um dado sistema de coordenadas. Desta forma, para que o sistema seja capaz de obter a informação com o menor erro possível, faz-se necessário garantir que os sensores responsáveis por medir as grandezas físicas utilizadas como referência, neste caso acelerômetros e magnetômetros, estejam propriamente calibrados, com desvios residuais de seus parâmetros dentro de uma faixa de tolerância aceitável.

A diferença entre sistemas determinadores de atitude e sistemas estimadores de atitude está na forma como estes sistemas utilizam as informações obtidas através de seus sensores para obter a informação de atitude. Sistemas determinadores de atitude comumente fazem uso de duas referências de atitude, porém parte das informações obtidas é descartada, de forma a poder determinar algebricamente a atitude do sistema. Embora esta seja uma abordagem sub-ótima, ela é bastante simples de implementar. Sistemas estimadores de atitude fazem uso de duas ou mais referências e suas estatísticas de erro a fim de estimar, de maneira ótima, a atitude do sistema, ao custo de uma maior complexi-

dade. Neste trabalho, sistemas determinadores ou estimadores de atitude serão chamados genericamente de sistemas de atitude.

Devido à particularidades de sistemas de atitude, como o uso de tríades ortogonais de sensores, bem como as características das referências de atitude utilizadas (praticamente não variam localmente, exceto na presença de agentes perturbadores externos), várias rotinas de calibração são propostas na literatura, tais como Lerner e Shuster (1979). Praticamente todas elas requerem, a fim de realizar a calibração do sistema, que o sistema seja colocado em uma posição específica, de onde serão realizadas rotações conhecidas, ou seja, estas metodologias de calibração dependem do conhecimento da atitude do sistema, uma informação que pode estar corrompida pelo próprio fato do sistema estar descalibrado.

Além desta óbvia vulnerabilidade, uma metodologia deste tipo pode ser inviável, ou mesmo impraticável, em certos tipos de aplicação. Mesmo onde ela se aplica, a necessidade de submeter o sistema à rotações específicas pode ser um procedimento trabalhoso e por vezes custoso, uma vez que envolve a parada da operação normal do sistema, para que este seja submetido às rotações necessárias. A necessidade de uma parada, total ou parcial, da operação normal do sistema pode variar de um mero inconveniente para uma impossibilidade prática, dependendo do tipo de sistema e do ambiente de aplicação.

O método de calibração proposto neste trabalho não apresenta nenhum desses problemas. O método não exige que o sistema tenha sua operação normal interrompida, o que é uma grande vantagem sobre os métodos tradicionais. Na realidade, é proposta uma metodologia de auto-calibração neste trabalho, pois o processo é completamente autônomo, sem nenhuma necessidade da intervenção de um operador humano.

A utilização deste método de auto-calibração em particular potencializa a utilização de tríades de sensores MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems* – Sistemas Micro-Eletromecânicos) de baixo custo, mesmo para aplicações onde é necessário um nível de precisão que normalmente requerem sensores de médio a alto desempenho. Isto se torna possível porque, uma vez que as maiores tolerâncias nos parâmetros dos sensores MEMS são corrigidas pela rotina de auto-calibração, há uma melhora substancial no desempenho destes sensores. A aplicação desta rotina também pode simplificar, e baratear, a implementação de sistemas estimadores de atitude, uma vez que ela possibilita o relaxamento de parâmetros críticos de construção.

O fato de esta metodologia de auto-calibração permitir o barateamento de sistemas de atitude lhe confere uma grande importância mercadológica pois, aplicações envolvendo atitude que antes eram restritas a áreas militares, aeroespaciais, navegação, etc., se difun-

diram recentemente para a área de entretenimento. Hoje há diversos jogos eletrônicos cuja interface com o jogador é feita pela atitude do controle (Um exemplo clássico é o Nintendo *Wii*). Recentemente, um sistema de atitude completo com acelerômetros, magnetômetros e girômetros foi implementado em um *smartphone* (iPhone 4). Esta popularização da tecnologia só é possível através da diminuição dos custos de implementação da mesma.

O procedimento de auto-calibração proposto também se destaca, mesmo entre os métodos de auto-calibração de uso mais comum, pois normalmente, os métodos de auto-calibração de sensores utilizam modelos simplificados, contemplando apenas os parâmetros de sensibilidade e *bias*. Porém, para tríades de sensores, em especial sensores MEMS triaxiais, onde a tolerância de ortogonalidade entre os eixos é da ordem de um grau, a correção destes desvios de ortogonalidade da tríade sensora torna-se necessária.

A adição dos desvios de ortogonalidade no modelo de calibração torna o problema de estimação dos parâmetros não-linear e, com isto, computacionalmente mais complexo. Porém, os benefícios em relação ao custo do projeto com a utilização de sensores MEMS triaxiais, ou mesmo na construção de uma tríade de sensores com maiores tolerâncias estruturais, compensam o aumento na carga computacional.

Como a maioria dos sistemas de atitude são embarcados, deve-se dar atenção especial às limitações de poder computacional disponível, desta forma, a fim de evitar um aumento substancial no poder computacional necessário, optou-se por uma abordagem diferenciada na estimação dos parâmetros de calibração, contornando a abordagem direta de um problema de estimação não-linear. A metodologia proposta consiste de dois passos onde: no primeiro passo, variáveis intermediárias lineares são estimadas utilizando um LSE (*Least Squares Estimator* – Estimador de Mínimos Quadrados), um dos estimadores mais simples, porém um dos mais robustos; no segundo passo, os parâmetros de calibração são resolvidos algebricamente a partir das variáveis intermediárias estimadas. Desta forma, as dificuldades de implementação e o custo computacional de um estimador não-linear são evitados, em favor da aplicação de uma técnica de estimação linear simples e a solução de equações algébricas.

O objetivo a ser atingido através da aplicação desta metodologia de auto-calibração é a minimização dos erros sistemáticos na determinação da direção dos vetores que representam as grandezas físicas de referência, pois este erro médio na direção dos vetores de observação é tido como nulo nos algoritmos determinadores ou estimadores de atitude. A presença de erros deste tipo afeta a acurácia da informação de atitude obtida.

O desenvolvimento do algoritmo de auto-calibração deu especial atenção às potenciais

causas de falhas que por vezes ocorrem na rotina de calibração. Normalmente a discussão destas falhas é omitida nos trabalhos publicados, porém, este trabalho dá uma ênfase especial na discussão das causas e nas técnicas de correção adotadas a fim de mitigar seus efeitos, obtendo desta forma, um sistema de atitude mais confiável, preciso e acurado.

1.1 Produção Bibliográfica

As atividades de pesquisa e desenvolvimento realizadas no programa de mestrado pelo autor tiveram como resultado as seguintes produções bibliográficas:

- TORMENA JR., O.; GRANZIERA JR., F.; TOSIN, M. C. Método de Auto-Calibração para Sensores MEMS Utilizados em Sistemas Estimadores de Atitude. In: VI SBEIN - Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Outubro 2010.
- TORMENA JR., O.; GRANZIERA JR., F.; TOSIN, M. C. Development and Performance Analysis of an Autocalibration Method for Tri-axis Sensors in Attitude Estimation Systems. In: DINAME 2011 - XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. São Sebastião, SP, Brasil: Março 2011.

Este último item, cujo evento ainda não ocorreu, o trabalho foi aceito para apresentação em plenário.

Parte I

Revisão Bibliográfica

2 *Calibração e Auto-calibração*

Conforme mencionado no Cap. 1, a calibração de um sistema é a única forma prática de se obter alguma garantia do seu desempenho. Desta forma, um sistema de aquisição de dados que seja confiável deve ter os parâmetros dos sensores constantemente avaliados, a fim de corrigir eventuais desvios que possam ocorrer.

Os desvios dos valores nominais dos parâmetros no modelo de medida de um sensor, são causados por diversos fatores, dentre eles: tolerâncias na própria construção do elemento sensor; sensibilidade à variações térmicas; desgaste, natural ou não, do elemento sensor com o tempo de uso. Os efeitos acumulados de todos estes fatores torna proibitivo o uso dos valores típicos dos parâmetros dos sensores para qualquer aplicação com algum requisito mínimo de exatidão.

Tradicionalmente, sistemas de aquisição de dados baseados em algum tipo de sensor são calibrados logo após sua produção. Dependendo do tipo de equipamento, e do uso que será feito dele, é comum que ele não seja mais calibrado durante sua vida útil. Porém, certas aplicações requerem uma aferição periódica do equipamento, de forma a verificar se seus parâmetros sofreram alterações e recalibrá-los, conforme necessário. Neste caso assume-se que, dentro do período entre as aferições os erros induzidos pelos desvios da calibração, que eventualmente ocorrerem, estarão dentro de um limite aceitável.

No entanto, esta condição não é sempre verdadeira e o que ocorre na prática é que alguns sistemas operam fora de especificação. Para o caso específico de sistemas de atitude, ao qual se dedica este trabalho, isto se traduz numa informação de atitude com um erro maior que o mínimo permitido. Isto pode trazer sérias consequências, dependendo da criticalidade da informação de atitude.

Para ilustrar os possíveis resultados que um erro na informação de atitude, derivado de um erro na calibração dos sensores, pode ter na prática, pode-se tomar por exemplo um AHRS (*Attitude and Heading System* – Sistema de Atitude e Apontamento) muito utilizado em aviões, se a incerteza do AHRS for da ordem de um grau, em um voo de São Paulo a Tóquio (18500 km), ao final da viagem o avião poderia estar até a 320 km de

Tóquio ($\approx 18500 \tan 1^\circ$).

Esta situação é ainda mais grave para satélites artificiais de órbita alta (órbitas com apogeu acima de 35786 km), pois a esta distância mesmo erros da ordem de um minuto de arco (a sexagésima parte de um grau), causaria um erro de apontamento de dez quilômetros na superfície de Terra.

Nestes tipos de aplicação, onde não é possível realizar a parada da operação do sistema para realizar a aferição, torna-se necessário aplicar uma metodologia diferente de calibração, a fim que o sistema possa continuar a desempenhar sua função com o mesmo padrão de desempenho, durante toda sua vida útil.

2.1 Auto-calibração

A auto-calibração de um sistema, ou seja, a implementação de uma metodologia de calibração autônoma, sem a necessidade da intervenção de um operador externo, e por vezes sem a necessidade da interrupção da operação normal do sistema em si, é uma alternativa desejável, com várias vantagens sobre os métodos tradicionais de aferição.

Diferentes trabalhos, em diferentes aplicações, podem entender o termo auto-calibração de forma diferente. Neste trabalho, auto-calibração se refere à implementação de uma metodologia de aferição autônoma do sistema de atitude, sem necessidade de intervenção de um operador externo, humano ou não. Nesta implementação, o valor real dos parâmetros do modelo de medida da tríade sensora são estimados, e o processamento dos dados obtidos são feitos de acordo com esta estimativa.

Metodologias de auto-calibração normalmente utilizam os mesmos dados necessários na obtenção da informação de atitude para realizar sua própria calibração. Isto traz vantagens e desvantagens: por um lado é vantajoso, pois não faz necessária a interrupção da operação normal do sistema, ou uma mudança no seu comportamento; por outro lado, a metodologia de auto-calibração também possui seus requisitos específicos, que podem não estar de acordo com a situação atual do sistema, ou serem fracamente atendidos. Isto pode empobrecer a qualidade da calibração a ser feita, chegando ao extremo de o sistema ter seu erro aumentado após uma calibração inoportuna.

Para evitar que uma situação desse tipo ocorra, a metodologia de auto-calibração deve ser inteligente, capaz de discernir entre uma boa condição para auto-calibração e uma condição prejudicial a este processo. Ou seja, para que uma metodologia de auto-calibração seja confiável e eficiente, ela deve ser capaz de decidir quando, ou melhor, com

qual conjunto de medidas, ela deve realizar o processo.

Em aplicações terrestres, onde as referências de atitude mais largamente utilizadas são a aceleração da gravidade e o campo magnético da Terra, a implementação de uma metodologia de auto-calibração se torna bastante viável pois: estas referências são bastante “comportadas”, ou seja, não variam ou variam muito pouco local e temporalmente; existem modelos bastante precisos destas duas grandezas físicas para toda a superfície do globo, o EGM2008 (*Earth Gravitational Model 2008* – Modelo Gravitacional Terrestre 2008)(NGA) e o WMM2010 (*World Magnetic Model 2010* – Modelo Magnético Mundial 2010)(NGA e DGC). Estes modelos necessitam apenas da informação de posição do sistema que em muitos casos, como em aplicações de navegação, já é uma informação necessária e prontamente disponível.

Uma vez que, através da utilização dos modelos, é possível conhecer os vetores que representam a gravidade e o campo magnético terrestre em qualquer lugar do planeta, isto provê a informação necessária para determinar se as tríades de acelerômetros e magnetômetros estão, ou não, calibradas. Esta dependência do modelo não aumenta a complexidade do sistema de atitude, uma vez que as informações dos modelos das grandezas físicas de referência já são necessárias para o processo de determinação, ou estimação, da atitude.

O método de auto-calibração proposto neste trabalho, que é baseado nas ideias apresentadas por: Alonso e Shuster (2002a, 2002b, 2002c, 2003), Gebre-Egziabher et al. (2001), Foster e Elkaim (2008) e Frosio, Pedersini e Borghese (2009).

Fundindo de maneira conveniente diferentes conceitos das metodologias de auto-calibração desenvolvidas nos trabalhos supracitados, obteve-se um método de auto-calibração bastante confiável, especificamente desenvolvido para potencializar a utilização de sensores MEMS simples e baratos.

A metodologia de auto-calibração proposta pode ser classificada como uma expansão do trabalho apresentado por Foster e Elkaim (2008), que por sua vez foi uma expansão do trabalho de Gebre-Egziabher et al. (2001), porém, com substanciais inovações que conferem à metodologia uma maior aplicabilidade prática. Isto é de grande importância pois, conforme pode ser observado através de simulações computacionais, ou mesmo previsto teoricamente, a aplicação de uma metodologia de auto-calibração a esmo levará a uma eventual falha.

A exposição detalhada do desenvolvimento da metodologia de auto-calibração, com suas características e particularidades será apresentada no Cap. 6.

3 *Atitude*

O tema central deste trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia de auto-calibração, para sensores MEMS utilizados em sistemas de atitude em aplicações terrestres. Porém, faz-se necessária uma discussão mais aprofundada do problema da determinação, ou estimação, da atitude em si, uma vez que mitigar os erros em sistemas de atitude é a motivação deste trabalho.

De maneira simples, pode-se definir atitude como sendo a orientação de um corpo no espaço tridimensional, porém, definições genéricas como esta são de pouco ou nenhum valor na definição real de um sistema de atitude.

Uma definição mais elegante, e útil na prática, é a seguinte: “Atitude é a rotação que deve ser aplicada à um corpo, de maneira que o sistema de coordenadas definido no corpo (também chamado de sistema de coordenadas de observação) coincida com o sistema de coordenadas escolhido como referência,” conforme ilustra a Fig. 3.1. Desta forma, a fim de se obter alguma informação da atitude de um corpo, o sistema de coordenadas de referência e do corpo devem ser pré-definidos. É importante salientar que a atitude de um corpo é independente da sua posição no espaço tridimensional, sendo que estes dois problemas comuns em aplicações de navegação podem ser abordados separadamente.

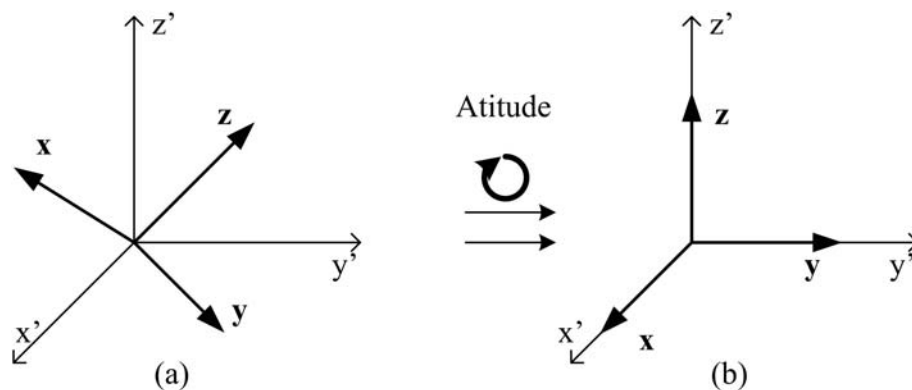


Figura 3.1: Transformação do sistema de coordenadas do corpo (a) para o sistema de coordenadas de referência (b) através da atitude.

O sistema de coordenadas definido para o corpo é completamente arbitrário, podendo

ser escolhido conforme sua conveniência para outros fatores do sistema.

O sistema de coordenadas de referência deve ser escolhido com maior critério. Normalmente o fator determinante na sua escolha é o ambiente de aplicação do sistema de atitude. Como este trabalho se dedica à auto-calibração de sistemas de atitude em aplicações terrestres, o sistema de coordenadas mais diretamente aplicável é o Sistema de Coordenadas Horizontal Local, onde utiliza-se como eixos diretores o Norte, o Leste e a direção do Zênite, que é o eixo ortogonal ao plano horizontal local. Os eixos x , y e z podem ser atribuídos aos eixos diretores arbitrariamente, respeitando a condição de que x , y e z formem uma base dextrógira, ou seja, que obedeça a regra da mão direita. É importante ressaltar que o Sistema de Coordenadas Horizontal Local é dependente da posição sobre o globo.

Outros sistemas de coordenadas de referência são mais específicos para diferentes ambientes de aplicação, um exemplo são corpos em órbita terrestre, onde é preferível utilizar o Sistema de Coordenadas Equatorial (ou Celestial).

Uma referência mais completa sobre o tema de atitude pode ser encontrada em Kuipers (1999). Outros trabalhos com uma abordagem mais focada no problema de determinação ou estimação de atitude podem ser encontrados em Granziera Jr (2006) e Tormena Jr (2008).

3.1 Referências de Atitude

Conforme brevemente mencionado no Cap. 1, a fim de resolver a atitude de um sistema, seja por métodos determinísticos, seja por estimação, deve-se utilizar pelo menos duas referências de atitude. Para este caso específico de aplicações em ambiente terrestre, as principais referências utilizadas são o campo gravitacional terrestre e o campo magnético terrestre.

3.1.1 Campo Gravitacional Terrestre

O campo gravitacional terrestre apresenta muitas qualidades quando é utilizado como referência de atitude. A grosso modo, seu valor pode ser considerado como 1 g^1 , e sua direção é sempre ortogonal ao plano horizontal local. Porém, como será mostrado no Cap. 6, o módulo da aceleração da gravidade é essencial para o procedimento de auto-calibração,

¹Onde 1 g equivale em média a $9,81 \text{ m/s}^2$

desta forma pode-se fazer necessária a utilização de um modelo que determine a aceleração da gravidade (NGA), em um determinado ponto na superfície da Terra, corrigida para os efeitos de rotação e distribuição irregular de sua massa.

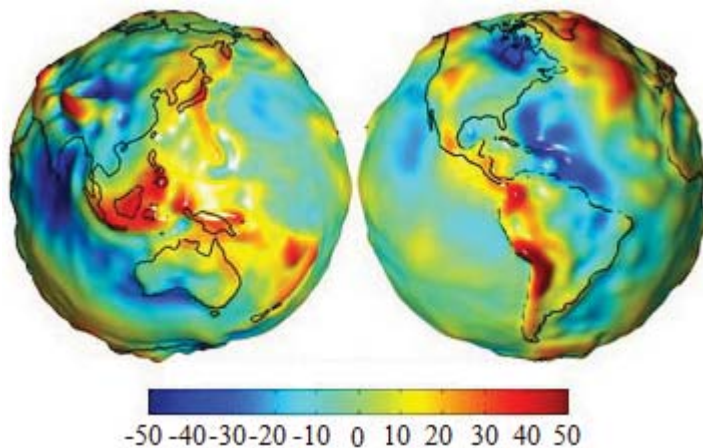


Figura 3.2: Desvio do valor médio da gravidade, dado em mGal.

A Fig. 3.2 mostra uma varredura na superfície da Terra, onde a diferença do valor da gravidade é dada em mGals ($\times 10^{-3}\text{Gal}^2$).

Embora seja notável que a amplitude de variação do campo gravitacional sobre a superfície da Terra seja bastante pequena (da ordem de $10^{-4}g$), que é a amplitude típica de ruído para acelerômetros MEMS. Descartando a necessidade da correção do modelo da gravidade, para fins da metodologia de calibração. Porém, é importante salientar que os gradientes de campo gravitacional ilustrados na Fig. 3.2 causam anomalias na direção da gravidade. Este erro na direção da referência se transforma em um erro médio da informação de atitude, e por se tratar de um erro sistemático, dependendo de sua amplitude, sua correção pode se fazer necessária.

A grande vantagem da utilização da gravidade terrestre como referência para atitude é devido a ela ser disponível globalmente. Observa-se que mesmo a utilização de um modelo extremamente simples, onde seu módulo direção e sentido são considerados constantes em todo a superfície da Terra, não traz nenhuma perda de precisão apreciável para os atuais acelerômetros MEMS.

O maior problema do campo gravitacional, em sua utilização como referência de atitude, está no fato que acelerômetros não medem exclusivamente a aceleração da gravidade, mas sim qualquer aceleração a que ele seja submetido (mais precisamente, acelerômetros medem a força de reação e transformam esta informação em aceleração). Isto é pro-

²1 Gal, ou galileu, equivale a $0,01\text{ m/s}^2$

blemático pois, em um sistema acelerado, é impossível distinguir a gravidade da outra componente de aceleração, o que causa erros nas medidas. Cuidados especiais devem ser tomados ao utilizar os dados de aceleração quando o sistema se encontra sob uma situação dinâmica.

3.1.2 Campo Magnético Terrestre

O campo geomagnético tem sido usado desde a Idade Média como referência para navegação. Desde então, os avanços científicos e tecnológicos proporcionaram um melhor entendimento da sua natureza. Embora a ciência ainda não tenha determinado claramente as origens do campo magnético terrestre, sabe-se que ele é variável com o tempo e com a posição sobre a Terra.

O campo magnético terrestre costuma ser dividido em três partes distintas, cuja soma é o campo total (embora os livros de física tradicionalmente utilizem a letra maiúscula \mathbf{B} para representar o campo magnético, a fim de manter a consistência neste trabalho, por se tratar de um vetor, o campo magnético será dado pela letra minúscula \mathbf{b}):

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_m(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{b}_d(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

Onde:

- $\mathbf{b}_m(\mathbf{r}, t)$ representa a componente principal do campo, gerada pela circulação de correntes no núcleo terrestre. Esta componente apresenta variações seculares, ou seja, muda lentamente com o passar dos anos.
- $\mathbf{b}_c(\mathbf{r}, t)$ representa a influência de aglomerações rochosas na crosta terrestre. Esta influência, embora varie espacialmente, é praticamente constante com o passar dos anos.
- $\mathbf{b}_d(\mathbf{r}, t)$ representa o campo de perturbação, que é o efeito combinado de correntes elétricas na alta atmosfera, e correntes induzidas no mar e em terra. Pode ser considerado como ruído natural no campo magnético.

Conforme descrito, o vetor campo magnético total, $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$, varia espacialmente e temporalmente, esta dependência é indicada pelas variáveis \mathbf{r} e t , que representam a posição e tempo, respectivamente.

Devido a estes fatores, o campo geomagnético não é tão uniforme quanto o campo gravitacional terrestre. Assim o uso de um modelo de para o campo magnético (NGA e

DGC) é essencial para que ele possa ser útil como uma referência de atitude, e também para que seu valor absoluto modelado seja utilizado no procedimento de auto-calibração.

A caracterização do campo geomagnético para uma determinada localidade e a um determinado tempo é definida por três valores: o módulo do campo, o ângulo de inclinação magnética e o ângulo de declinação magnética. Onde:

- O módulo do campo representa seu valor absoluto e, conforme comentado, é importante na metodologia de calibração.
- O ângulo de inclinação magnética é o ângulo formado entre o plano horizontal local e a direção do campo magnético, sendo que um valor positivo indica que o campo está saindo do plano e um valor negativo indica que o campo está entrando no plano.
- O ângulo de declinação magnética mostra o desvio da direção do campo em relação ao norte geográfico, onde um valor positivo indica um desvio a oeste e um valor negativo indica um desvio a leste.

Os Anexos A, B e C contêm as cartas magnéticas mundiais obtidas através do WMM2010, o Anexo A contém as informações do módulo do campo, o Anexo B contém as informações de declinação e, por fim, o Anexo C contém as informações de inclinação do campo magnético terrestre.

Mesmo com a necessidade de utilizar um modelo para que o campo geomagnético possa servir como referência, ele é a referência de atitude mais utilizada, desde aplicações terrestres até satélites artificiais em órbita, onde pelo fato dos corpos estarem em queda livre, não é possível utilizar a gravidade terrestre.

A instalação dos magnetômetros que medirão o campo geomagnético deve ser bastante criteriosa. Ele não deve estar próximo à materiais ferromagnéticos, que distorcem o campo localmente, bem como fontes de campos de indução, como linhas de potência, bobinas e indutores. Uma condição bastante difícil de corrigir é a dependência do campo magnético observado com a própria atitude do sistema, pois este, composto de diferentes materiais com diferentes permeabilidades magnéticas, podem causar alterações no campo que são dependentes da direção do campo e da orientação do corpo onde está o sistema de atitude.

3.1.3 Outras Referências de Atitude

Além dos campos gravitacional e magnético terrestres, há outras referências para atitude, sendo algumas bastante utilizadas em aplicações espaciais. Elas serão citadas

brevemente no texto que segue:

Sol

O Sol é uma importante referência de atitude para aplicações espaciais. Embora o Sol não seja um objeto pontual, e isto traz uma incerteza intrínseca da sua direção, quase todos os satélites que não precisam de alta precisão na sua informação de atitude utilizam o Sol e o campo geomagnético como referência, pelo baixo custo envolvido na utilização destas referências. Há satélites que utilizam os próprios painéis solares, ao invés de sensores solares dedicados, a fim de determinar sua direção, porém ao custo de uma maior imprecisão em seu resultado.

Albedo

O albedo é a radiação eletromagnética refletida pela Terra, identificável facilmente por seu conteúdo espectral característico pois, vista do espaço, na faixa do infravermelho, a Terra aparece como um farol na fria escuridão do espaço que a circunda. O albedo terrestre também é uma das referências de uso mais difundido, e capaz de atingir uma razoável precisão por um baixo custo.

Estrelas

As estrelas são as referências de atitude mais precisas disponíveis hoje. Através de uma pequena imagem de um conjunto de estrelas, comparada à um mapa estelar contido no banco de dados, é possível obter atitudes com precisão da ordem de 1 arcsec³. A maior dificuldade na difusão do uso de sensores de estrela está no seu altíssimo custo, e nas dificuldades para sua obtenção, pois se trata de um dispositivo de venda regulada por agências de defesa governamentais.

GPS

O GPS (*Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global) pode ser utilizado como referência de atitude. Para isto, deve-se utilizar ao menos dois receptores GPS suficientemente espaçados (o que para o sinal disponibilizado para uso civil corresponde a 3 m) de forma a obter a informação da posição de dois, ou mais, pontos do corpo,

³Onde 1 arcsec significa um segundo de arco, ou arco-segundo, equivalente a $\frac{1^\circ}{3600}$.

sendo possível inferir sobre sua atitude. É comum que sistemas de navegação, dos quais o AHRS é parte integrante, sejam assistidos, porém não dependentes, do sinal de GPS.

Girômetros

Embora não seja uma referência de atitude no sentido estrito da expressão, os girômetros podem ser utilizados para obter informações sobre a dinâmica do sistema de atitude, mais especificamente as velocidades angulares sobre seus eixos coordenados. Esta informação pode ser utilizada em conjunto com as referências de atitude em um Filtro de Kalman, capaz de fundir dados de atitude com informações dinâmicas, de forma a refinar a informação de atitude obtida. Um exemplo deste tipo de implementação é o trabalho pioneiro de Lefferts, Markley e Shuster (1982).

Uma das grandes dificuldades na utilização dos dados dos girômetros em sistemas de atitude está no fato que qualquer *bias* mínimo presente no sinal, que será integrado temporalmente a fim de obter o deslocamento angular do corpo, irá causar desvios intoleráveis na informação de atitude obtida após algum tempo.

3.2 Representação de Atitude

A informação de atitude pode ser representada de diversas formas. As três formas mais comumente utilizadas, por suas particularidades em diferentes situações, são os Ângulos de Euler, as Matrizes de Rotação e os Quatérnions. Uma breve revisão a respeito das representações de atitude se faz necessária pois, a informação da incerteza da atitude, dada por sua covariância, é dependente da representação em si.

O trabalho de Stuelpnagel (1964) sobre a parametrização de rotações tridimensionais mostra restrições à que formas de representação estão sujeitas, dependendo do número de parâmetros da representação, não importando a forma como a representação seja construída. Neste trabalho as representações de atitude são avaliadas quanto ao número de parâmetros utilizado, a forma diferencial da representação (importante para informações sobre a dinâmica da atitude), a susceptibilidade a erros computacionais e a facilidade de se obter uma solução da atitude nas representações.

Nesse trabalho é provado que uma parametrização em três elementos não pode ser ao mesmo tempo global e não-singular. Uma representação global quer dizer que cada rotação possível é determinada por valores finitos dos parâmetros, porém como estes parâmetros não são unicamente definidos, pode haver singularidades (i.e. valores infinitos)

nas derivadas da representação, como ocorre com os ângulos de Euler. Por outro lado, uma representação não-singular tem suas derivadas bem definidas, porém não é capaz de representar algumas atitudes (um exemplo é a parametrização de Cayley)(SHUSTER, 1993).

Uma parametrização em quatro elementos possui a vantagem de levar a equações lineares, com apenas um parâmetro redundante. Porém, independente de como esta seja construída, sua representação sempre será ambígua, ou seja, haverá duas representações para a mesma rotação, como ocorre com os quatérnions.

Uma representação de atitude com cinco parâmetros é a menor representação global livre de ambiguidades e singularidades. Porém invariavelmente levará à equações não-lineares e uma enorme carga computacional para obter a atitude. Por estas características, este tipo de representação é a menor explorada entre as parametrizações de atitude.

Uma representação em seis elementos possui todas as vantagens da representação em cinco elementos, mais o fato de suas equações serem lineares e a atitude ser obtida prontamente. Como será discutido a seguir, uma matriz de rotação em três dimensões, com nove elementos, pode ser facilmente reduzida para uma representação de seis elementos, sendo a operação contrária igualmente simples. Porém, como as restrições de uso de memória hoje são bem menores que a vinte anos atrás, dificilmente matrizes de rotação 3×3 são reduzidas para a forma 3×2 .

Um estudo mais completo e específico sobre as formas de representação de atitude, suas características e inter-relações pode ser encontrado em Shuster (1993) e Markley (1978).

3.2.1 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler, chamados assim em homenagem ao seu inventor, Leonhard Euler, são a forma mais natural de representar rotações. Os três ângulos de Euler indicam as sucessivas rotações que, em seus eixos coordenados, que o corpo deve ser submetido, de forma que seu sistema de coordenadas coincida com o sistema de coordenadas referencial. Deve-se observar o fato que após a rotação sobre um dos eixos, os dois outros eixos mudam de orientação, sendo que a rotação subsequente deve ser feita sobre esta nova posição do eixo. Como rotações consecutivas sobre um mesmo eixo podem ser consideradas como apenas uma única rotação, são doze as possibilidades de sequência de rotações sobre eixos quem podem ser utilizadas. Não há vantagens entre uma ou outra, mas para fins de

normalização entre os trabalhos, é comum os autores preferirem a sequência zyx , conhecida como Sequência Aeroespacial.

As doze sequências possíveis podem ser classificadas como simétricas e assimétricas. As sequências simétricas possuem duas rotações sobre um eixo (Ex.: xyx), as sequências assimétricas não possuem rotações sobre eixos repetidos (Ex.: xyz). As sequências possíveis são as seguintes:

xyx	xzx	yxy	zyz
zxz	zyz	xyz	xzy
yzx	yxz	zxy	zyx

A Sequência Aeroespacial é constituída de uma rotação $\boldsymbol{\psi}$ sobre z , uma rotação $\boldsymbol{\theta}$ sobre y e uma rotação $\boldsymbol{\varphi}$ sobre x . Onde $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\varphi}$ são os ângulos de Euler, cujos limites são:

$$0 \leq \boldsymbol{\psi} < 2\pi, \quad 0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \pi, \quad 0 \leq \boldsymbol{\varphi} < 2\pi \quad (3.2)$$

As maiores vantagens da utilização de ângulos de Euler são a ausência de parâmetros redundantes (uma rotação pode ser determinada por pelo menos três parâmetros), e interpretação física clara em muitos casos. Eles são bastante utilizados em estudos analíticos sobre rotações e como entrada e saída de dados em aplicações de atitude. Porém, a representação de atitude em ângulos de Euler também apresenta sérios problemas, o mais sério deles é a presença de singularidades na representação, bem como a presença de funções trigonométricas, que aumentam a carga computacional. Para esta representação também não há uma forma conveniente do produto de duas rotações sucessivas.

Em casos onde pode-se considerar que o ângulo entre duas atitudes consecutivas de um corpo será sempre pequeno, é comum utilizar os ângulos de Euler para o controle de atitude, visto que as aproximações decorrentes dos ângulos pequenos facilitam muito seu uso, computacionalmente.

3.2.2 Matriz de Rotação

Também chamadas de DCM (*Direction Cosine Matrix* – Matriz de Cossenos Diretores), as matrizes de rotação representam os parâmetros de rotação matematicamente mais diretos. Os sistemas de coordenadas do corpo e de referência podem ser representados através de vetores 3×1 , e a simples aplicação de álgebra linear, através da transformação de bases de vetores, pode-se utilizar uma matriz 3×3 para realizar a rotação de um

sistema de coordenadas no outro.

$$\mathbf{w}_{3 \times 1} = \mathbf{R}_{3 \times 3} \mathbf{v}_{3 \times 1} \quad (3.3)$$

Onde \mathbf{R} é uma matriz de rotação, \mathbf{w} é o vetor que representa o sistema de coordenadas do corpo e \mathbf{v} o vetor que representa o sistema de coordenadas de referência.

Nem toda matriz 3×3 é uma matriz de rotação. As propriedades matemáticas de uma matriz de rotação tridimensional são:

- **Ortogonalidade:** Todas as matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, a operação de inversão é equivalente à transposição da matriz. Isto é bastante útil pois a inversão de matrizes é um processo computacionalmente custoso e potencialmente instável.
- **Determinante unitário:** Todas as matrizes de rotação possuem determinante igual a +1.

A matriz de rotação tridimensional pode ser separada em três componentes de rotação segundo cada eixo. Novamente, como o produto matricial não é comutativo, a ordem em que é feito o produto das componentes é importante. Utilizando a Sequência Aeroespacial obtém-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\varphi}^x \mathbf{R}_{\theta}^y \mathbf{R}_{\psi}^z \quad (3.4)$$

Onde \mathbf{R}_{φ}^x , \mathbf{R}_{θ}^y e \mathbf{R}_{ψ}^z representam as rotação de φ , θ e ψ sobre os eixos x, y e z, respectivamente. As matrizes componentes podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\varphi}^x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{\theta}^y &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{\psi}^z &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

A utilização da DCM apresenta as vantagens de não haver singularidades na representação, não utiliza funções trigonométricas. Sucessivas rotações podem ser representadas

por uma simples e conveniente regra de produto, lembrando que para matrizes, o produto não é comutativo, devendo ser observada a ordenação com que ele é feito, conforme a sequência das rotações realizadas.

A grande desvantagem da matriz de rotação é o tamanho da representação, uma vez que uma matriz 3×3 possui nove parâmetros, seis dos quais são redundantes, tendo assim uma eficiência em memória de apenas um terço. Para sistemas onde a memória disponível é muito limitada esta situação pode ser melhorada pelo fato que, para uma matriz de rotação, a terceira coluna é resultado do produto externo das duas primeiras colunas. Assim é possível diminuir de nove para seis parâmetros, sendo os três restantes facilmente obtidos.

Devido à suas propriedades, as matrizes de rotação são comumente utilizadas na análise de problemas de atitude, transformando vetores de um sistema de coordenadas para outro.

3.2.3 Quatérnions

Também chamados de Parâmetros Simétricos de Euler, embora muito menos comumente, os quatérnions foram inventados por *Sir William Rowan Hamilton* em 1843, sendo aplicados em problemas mecânicos e outros problemas físicos até que suplantados pela Análise Vetorial, introduzida por *J. Willard Gibbs*, onde vetores 3×1 começaram a ser utilizados para este propósito (e ainda o são até hoje).

A utilização dos quatérnions se repopularizou com a necessidade de uma representação prática e eficiente de rotações no espaço tridimensional, algo para o qual, os quatérnions têm uma grande proficiência.

Os quatérnions são uma expansão do conjunto de números complexos (\mathbb{C}), conhecidos como números hiper-complexos. Um estudo mais aprofundado e detalhado sobre quatérnions pode ser encontrado em Kuipers (1999).

O quatérnion pode ser escrito da seguinte forma:

$$\check{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 + q_4 \quad (3.6)$$

Onde \check{q} representa o quatérnion, q_1 , q_2 e q_3 são as componentes vetoriais do quatérnion e q_4 sua componente escalar. Os símbolos \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} representam vetores unitários, ou versores, que formam a base ortonormal, com a seguinte propriedade: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} =$

–1. Em uma notação mais compacta, pode-se representar os quatérnions como:

$$\check{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Onde \mathbf{q} representa a parte vetorial do quatérnion.

Especificamente, um quatérnion de rotação pode ser escrito como:

$$\check{q} = \left(\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{e}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.8)$$

Onde \mathbf{e} é o vetor unitário que representa o eixo de rotação e θ neste caso representa o ângulo de rotação sobre o eixo. Quatérnions de rotação devem satisfazer a seguinte restrição:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (3.9)$$

A representação de rotações através de quatérnions é ambígua uma vez que os quatérnions $(\mathbf{q}, -q_4)$ e $(-\mathbf{q}, q_4)$ representam a mesma rotação. A fim de evitar problemas computacionais, normalmente é utilizada apenas a uma das representações, normalmente a que possui a parte escalar positiva.

O operador que aplica a transformação de base, representada pelos quatérnions, sobre um vetor é:

$$\check{\mathbf{w}} = \check{q}^* \otimes \check{\mathbf{v}} \otimes \check{q} \quad (3.10)$$

Onde \check{q}^* representa o quatérnion conjugado, ou seja, com sua parte complexa oposta à original (i.e. $(\mathbf{q}, q_4)^* = (-\mathbf{q}, q_4)$), $\check{\mathbf{v}}$ e $\check{\mathbf{w}}$ são quatérnions puros, ou seja, com a parte escalar nula, são dados respectivamente por: $(\mathbf{v}, 0)$ e $(\mathbf{w}, 0)$. O operador (\otimes) indica o produto quaterniônico. Para dois quatérnions \check{q} e \check{p} , o produto quaterniônico pode ser definido como:

$$\check{p} \otimes \check{q} = p_4 q_4 - \mathbf{p} \bullet \mathbf{q} + p_4 \mathbf{q} + q_4 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (3.11)$$

Onde os operadores (\bullet) e (\times) indicam os produtos internos e externos entre vetores, respectivamente.

Uma similaridade que os quatérnions de rotação têm com as matrizes de rotação é a simplicidade na sua inversão, devido à propriedades do próprio quatérnions de rotação. A rotação inversa para um dado quatérnion \check{q} é dada simplesmente pelo seu conjugado \check{q}^* .

Conforme mostrado, representar atitude através de quatérnions é vantajoso devido à ausência de singularidades em sua representação, bem como a ausência de funções trigonométricas. O quatérnion apresenta apenas um parâmetro redundante e possui uma regra simples para o produto de rotações sucessivas. Porém, o significado físico dos quatérnions não é claro. Mesmo assim, suas características computacionais o tornam preferido para implementação de sistemas de atitude embarcados.

3.2.4 Outras Representações

Há diversas outras formas de se representar a atitude de um corpo. Nesta seção serão mostradas as representações que, embora não tenham uso tão generalizado quanto as citadas anteriormente, são ainda bastante comuns.

Parâmetros de Rodrigues

Também conhecidos como vetor de Gibbs, os parâmetros de Rodrigues são matematicamente semelhantes ao quatérnion pois:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q}/q_4 = \mathbf{e} \tan \theta/2 \quad (3.12)$$

Onde as três componentes de $\boldsymbol{\rho}$, ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 são os parâmetros de Rodrigues.

Os parâmetros de Rodrigues apresentam todas as vantagens dos quatérnions, exceto pela singularidade em rotação de 180° . Eles ainda apresentam a vantagem de não possuir parâmetros redundantes. Os parâmetros de Rodrigues são comumente utilizados em estudos analíticos.

Representação Eixo/Ângulo de Euler

Uma das representações fisicamente mais claras possíveis de atitude. Esta representação consiste de vetor unitário \mathbf{e} que representa o eixo de rotação e pelo ângulo de rotação θ .

Porém as dificuldades matemáticas e computacionais desta representação tornam seu uso proibitivo para aplicações práticas. A representação é indefinida para o caso trivial de o ângulo de rotação é nulo (para $\theta = 0$, \mathbf{e} fica indefinido). Não há uma forma simples de obter a resultante de várias rotações, são necessárias equações trigonométricas para a aplicação desta representação.

Porém, mesmo com estas dificuldades esta representação ainda encontra uso como dado de entrada para controle de manobra.

3.3 Algoritmos de Atitude

Nesta seção serão apresentados os algoritmos determinadores, ou estimadores de atitude. O maior problema quando se tenta na prática resolver a atitude de um corpo está no fato que, com apenas uma referência, a atitude está sub-determinada, pois ela seria insensível a rotação sobre um eixo paralelo à referência. Para resolver isso, faz-se necessária uma segunda referência, não-paralela à primeira, porém, agora a atitude fica sobre-determinada com duas referências.

A solução de um sistema sobre-determinado é um problema simples de aplicação de Álgebra Linear, porém, na prática, na presença de ruído, o resultado da aplicação direta das técnicas tradicionais de resolução invariavelmente resultaria em um sistema impossível (i.e. sem solução).

Para contornar este problema, algoritmos determinadores de atitude, que normalmente fazem uso de apenas duas referências, utilizam apenas parte das informações de uma das referências, normalmente a com maior nível de incerteza. Desta forma, é possível resolver a atitude como um sistema algébrico determinado. Esta metodologia é bastante simples, porém a atitude obtida através dela não é ótima. Um exemplo clássico deste tipo de algoritmo é o TRIAD (*Tri-axis Attitude Determination* – Determinação da Atitude em Três Eixos)(BLACK, 1964).

Algoritmos estimadores de atitude são mais elaborados e complexos, fazem uso da estatística do ruído das referências, que podem ser duas ou mais, a fim de obter uma solução ótima de atitude. Um exemplo clássico de um algoritmo estimador de atitude é o QUEST (*Quaternion Estimator* – Estimador do Quatérnio)(SHUSTER, 1978), que embora seja um dos pioneiros, ainda hoje é largamente utilizado, por sua rapidez e relativa simplicidade.

É interessante um estudo dos aspectos dos algoritmos de atitude pois cada um deles apresentam diferentes incertezas intrínsecas da atitude. Neste trabalho serão estudados os efeitos que a auto-calibração irá causar nos erros e nas incertezas da atitude obtida pelo TRIAD e pelo QUEST.

3.3.1 TRIAD

O algoritmo TRIAD, desenvolvido por Harold. D. Black em 1964 foi utilizado por quase duas décadas para a determinação de atitude de espaçonaves, até ser suplantado pelo QUEST. Uma discussão bastante completa sobre o algoritmo TRIAD e suas variações pode ser encontrada em Tanygin e Shuster (2007).

Dados dois vetores de referência não-paralelos \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e seus correspondentes vetores de observação (i.e. medidos pelos sensores) \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 , a matriz de atitude deve satisfazer (lembrando que tanto os vetores de referência quanto os de observação são considerados como vetores coluna):

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \quad (3.13)$$

Como a matriz \mathbf{A} é sobre-determinada pela Eq. (3.13), são construídas duas tríades de vetores ortonormais da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \quad \mathbf{r}_2 = \frac{(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|} \quad \mathbf{s}_2 = \frac{(\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2)}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|} \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \quad (3.15)$$

Onde $|\cdot|$ é o operador norma Euclidiana.

Assim existe uma única matriz \mathbf{A} que satisfaz:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{A}\mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.16)$$

Que pode ser escrita como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_i \mathbf{r}_i^T \quad (3.17)$$

Onde o sobrescrito (T) denota a operação de transposição. Em notação mais compacta, pode-se escrever:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\text{obs}} \mathbf{M}_{\text{ref}}^T \quad (3.18)$$

Com:

$$\mathbf{M}_{\text{ref}} = [\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3] \quad \mathbf{M}_{\text{obs}} = [\mathbf{s}_1; \mathbf{s}_2; \mathbf{s}_3] \quad (3.19)$$

Onde as \mathbf{M}_{obs} e \mathbf{M}_{ref} são matrizes 3×3 , representando as tríades de observação e referência respectivamente.

Uma condição necessária e suficiente para que a matriz de atitude dada por Eq. (3.17),

ou Eq. (3.18), também satisfaça a Eq. (3.13) é:

$$\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2 \quad (3.20)$$

A solução dada pelo algoritmo TRIAD não é simétrica em relação às referências 1 e 2. Observa-se claramente nas Eqs. (3.14) e (3.15) que parte da informação da referência 2 é descartada. Desta forma, a acurácia da atitude obtida através do TRIAD é aumentada se for escolhida como referência 1, a referência com menor incerteza associada.

Matriz de Covariância do TRIAD

A matriz de covariância da atitude obtida através do TRIAD é uma medida da incerteza da atitude determinada. Há duas formas comuns de representar a covariância do TRIAD, a Matriz de Covariância Cartesiana $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ e a Matriz de Covariância em Ângulos de Euler $\mathbf{P}_{\phi\phi}$. A Matriz de Covariância Cartesiana pode ser considerada mais útil pois, seu cômputo é bastante simples, o traço de $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ provê um valor escalar conveniente para ser utilizado como figura de mérito sobre a qualidade da atitude obtida, e principalmente, $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ é independente da atitude.

Uma análise completa da covariância do TRIAD pode ser encontrada em Shuster e Oh (1981). A Matriz de Covariância Cartesiana do TRIAD pode ser escrita como:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2 \mathbf{I} + \frac{1}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|^2} [(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T + \sigma_1^2 (\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2) (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^T + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_1^T)] \quad (3.21)$$

Onde \mathbf{I} indica uma matriz identidade 3×3 . As variâncias dos versores σ_1^2 e σ_2^2 são dadas por:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{\mathbf{w}_1}^2 + \sigma_{\mathbf{v}_1}^2 \quad \sigma_2^2 = \sigma_{\mathbf{w}_2}^2 + \sigma_{\mathbf{v}_2}^2 \quad (3.22)$$

Onde $\sigma_{\mathbf{v}_1}^2$ é a variância da referência 1, $\sigma_{\mathbf{w}_1}^2$ é a variância da observação 1, $\sigma_{\mathbf{v}_2}^2$ é a variância da referência 2 e $\sigma_{\mathbf{w}_2}^2$ é a variância da observação 2.

3.3.2 QUEST

O algoritmo QUEST, proposto originalmente no trabalho de Shuster (1978) é uma implementação do q-Método desenvolvido, porém não publicado, por Davenport. O q-Método é uma solução matematicamente elegante do problema de Wahba (WAHBA, 1965), que trata da otimização de atitudes estimadas. O problema proposto por Wahba

pode ser escrito de maneira mais conveniente como:

$$L(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\mathbf{w}_i - \mathbf{A}\mathbf{v}_i|^2 \quad (3.23)$$

Onde, utilizando n referências de atitude, $L(\cdot)$ indica a função de custo, que deve ser minimizada para uma atitude ótima \mathbf{A} . Os valores a_1, a_2, \dots, a_n são um conjunto de pesos positivos.

O q-Método, apesar de ser uma solução elegante do problema de otimização da atitude estimada, é computacionalmente bastante custoso, uma vez que o quatérnio ótimo é obtido através de uma equação de autovalores, autovalores estes que devem ser encontrados (especificamente, deve-se resolver um problema de autovalor de dimensão quatro). O QUEST é uma aproximação, ou modificação, do trabalho original de Davenport. O inventor do QUEST, Malcom D. Shuster, se valeu de certas especificidades do q-Método e de seu conhecimento matemático diferenciado (Shuster era originalmente um físico de nuclear) para contornar as dificuldades computacionais do q-Método, criando assim o QUEST, um dos algoritmos de atitude ótima mas rápidos e precisos até hoje. No texto que segue, o equacionamento do QUEST será exposto sem maiores detalhes, uma descrição bastante detalhada do desenvolvimento do QUEST pode ser encontrada em Shuster (1990).

Como a função de custo pode ser escalada sem alterar a atitude ótima, pode-se considerar que:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (3.24)$$

Definindo então uma função ganho $g(\mathbf{A})$ como:

$$g(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_i \text{tr}[\mathbf{w}_i^T \mathbf{A}\mathbf{v}_i] = \text{tr}[\mathbf{A}\mathbf{B}^T] \quad (3.25)$$

Onde tr denota a operação traço, e \mathbf{B} é chamada de matriz do perfil de atitude, dada por:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i \mathbf{v}_i^T \quad (3.26)$$

A maximização de $g(\mathbf{A})$ torna-se difícil porque os nove elementos da matriz \mathbf{A} estão sujeitos à seis restrições, desta forma é mais conveniente expressar a atitude através da matriz de atitude quaterniônica, dada por:

$$\mathbf{A}(\check{q}) = (q_4^2 - \mathbf{q} \bullet \mathbf{q})\mathbf{I} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T + 2q_4\llbracket \mathbf{q} \rrbracket \quad (3.27)$$

Onde novamente \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 , e $\llbracket \mathbf{q} \rrbracket^4$ é a matriz anti-simétrica dada por:

$$\llbracket \mathbf{q} \rrbracket = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Substituindo Eq. (3.27) na Eq. (3.25), a função ganho pode ser reescrita como:

$$g(\check{q}) = (q_4^2 - \mathbf{q} \bullet \mathbf{q}) \text{tr} \mathbf{B} + 2 \text{tr} [\mathbf{q} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T] + 2q_4 \text{tr} [\llbracket \mathbf{q} \rrbracket \mathbf{B}^T] \quad (3.29)$$

Definindo as quantidades:

$$s = \text{tr} \mathbf{B} \quad \mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \quad \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n a_i (\mathbf{w}_i \times \mathbf{v}_i) \quad (3.30)$$

Pode-se obter a seguinte forma bilinear:

$$g(\check{q}) = \check{q}^T \mathbf{K} \check{q} \quad (3.31)$$

Onde \mathbf{K} é uma matriz 4×4 dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} - s\mathbf{I} & \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^T & s \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Assim, o problema de estimação da atitude ótima é reduzido a encontrar o quatérnio que maximize a Eq. (3.31). Como quatérnios de rotação são unitários (i.e. $\check{q}^T \check{q} = 1$), utilizando os multiplicadores de Lagrange, uma nova função ganho pode ser definida:

$$g'(\check{q}) = \check{q}^T \mathbf{K} \check{q} - \lambda \check{q}^T \check{q} \quad (3.33)$$

Que possui máximo para:

$$\mathbf{K} \check{q}_{\text{opt}} = \lambda_{\text{max}} \check{q}_{\text{opt}} \quad (3.34)$$

Que é o resultado desejado, onde \check{q}_{opt} é o quatérnio ótimo (autovetor correspondente) e λ_{max} é o maior autovalor correspondente. Porém, conforme afirmado anteriormente, esta operação é computacionalmente custosa, a implementação do QUEST contorna esta dificuldade da seguinte forma:

⁴Esta notação é uma forma diferente de expressar um produto externo através do produto de um vetor e uma matriz, onde esta matriz é definida de forma que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \mathbf{b}$

Rearranjando a Eq. (3.34), para qualquer autovalor.

$$\mathbf{y} = [(\lambda + s)\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} \mathbf{z} \quad (3.35)$$

$$\lambda = s + \mathbf{z} \bullet \mathbf{y} \quad (3.36)$$

Onde \mathbf{y} é o vetor de Gibbs definido como (Eq. (3.12)):

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{q}}{q_4} \quad (3.37)$$

Em termos do vetor de Gibbs, o quatérnion pode ser escrito da seguinte forma:

$$\check{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathbf{y}|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Se $\lambda = \lambda_{max}$, \mathbf{y} e conseqüentemente \check{q} representam a atitude ótima. Inserindo a Eq. (3.35) na Eq. (3.36), obtém-se:

$$\lambda = s + \mathbf{z}^T \frac{1}{(\lambda + s)\mathbf{I} - \mathbf{S}} \mathbf{z} \quad (3.39)$$

A Eq. (3.39) é a equação característica dos autovalores de \mathbf{K} , cuja solução direta é o que se deseja evitar, porém, notando que:

$$\lambda_{max} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\mathbf{w}_i - \mathbf{A}_{opt} \mathbf{v}_i|^2 \quad (3.40)$$

Fica determinado que o maior autovalor é bem próximo à unidade. Substituindo $\lambda_{max} \approx 1$ em Eq. (3.35) leva a uma expressão aproximada bastante acurada da atitude ótima, assumindo que a matriz $[(1 + s)\mathbf{I} - \mathbf{S}]$ não seja singular, porém, como o vetor de Gibbs é infinito para ângulos de rotação de 180° , a matriz será singular nesta situação. Para resolver este problema, deve-se computar \check{q}_{opt} sem utilizar o vetor de Gibbs intermediário.

Como o autovalor ξ de uma matriz quadrada \mathbf{S} satisfaz a equação característica:

$$\det [\mathbf{S} - \xi \mathbf{I}] = 0 \quad (3.41)$$

Que para o caso específico de uma matriz 3×3 fica da forma:

$$-\xi^3 + 2s\xi^2 - \kappa\xi + \Delta = 0 \quad (3.42)$$

Sendo:

$$s = 1/2tr\mathbf{S} \qquad \kappa = tr[\mathbf{S}^a] \qquad \Delta = det\mathbf{S} \qquad (3.43)$$

Onde $det[\cdot]$ e $[\cdot]^a$ denotam as operações determinante e adjunta de uma matriz, respectivamente. Pelo teorema da Cayley-Hamilton \mathbf{S} deve satisfazer sua própria equação característica (Eq. (3.42)), de forma que:

$$\mathbf{S}^3 = 2s\mathbf{S}^2 - \kappa\mathbf{S} + \Delta\mathbf{I} \qquad (3.44)$$

A Eq. (3.44) pode ser usada para expressar uma função em \mathbf{S} como um fator quadrático em \mathbf{S} , em particular:

$$[(\omega + s)\mathbf{I} - \mathbf{S}]^{-1} = \gamma^{-1} (\alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{S} + \mathbf{S}^2) \qquad (3.45)$$

Onde:

$$\alpha = \omega^2 - s^2 + \kappa \qquad \beta = \omega - s \qquad \gamma = (\omega + s)\alpha - \Delta \qquad (3.46)$$

Fazendo $\omega = \lambda_{max}$ obtém-se:

$$\mathbf{y}_{opt} = \frac{\mathbf{x}}{\gamma} \qquad (3.47)$$

Onde:

$$\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{S} + \mathbf{S}^2) \mathbf{z} \qquad (3.48)$$

Das Eqs. (3.38) e (3.47) segue:

$$\check{q}_{opt} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + |\mathbf{x}|^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

Aplicando a Eq. (3.45) na Eq. (3.39) leva a uma forma mais conveniente da equação característica, como:

$$\lambda^4 - (a+b)\lambda^2 - c\lambda + (ab + cs - d) = 0 \qquad (3.50)$$

Onde:

$$a = s^2 - \kappa \qquad b = s^2 + \mathbf{z}^T \mathbf{z} \qquad c = \Delta + \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z} \qquad d = \mathbf{z}^T \mathbf{S}^2 \mathbf{z} \qquad (3.51)$$

Sabe-se que λ_{max} é bem próximo da unidade, desta forma, pode-se aplicar o método de

Newton-Raphson na Eq. (3.50) com valor de partida unitário de forma a computar λ_{max} para uma precisão numérica desejável (ex: para sensores com acurácia melhores que um grau, a representação de 64 bits é exaurida com apenas duas iterações)(SHUSTER; OH, 1981). Para o caso especial de apenas duas referências de atitude (que é o caso específico deste trabalho), há uma simples solução analítica para λ_{max} .

$$\lambda_{max} = \sqrt{a_1^2 + 2a_1a_2[(\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2)(\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2) + |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2||\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|] + a_2^2} \quad (3.52)$$

Matriz de Covariância do QUEST

O algoritmo QUEST provê informação sobre o nível de incerteza da atitude estimada, a fim de que esta informação possua um valor de mérito de confiabilidade. O desenvolvimento da análise de covariância da atitude obtida pelo QUEST pode ser encontrado em Shuster e Oh (1981). A matriz de covariância quaterniônica \mathbf{P}_{qq} é dada por:

$$\mathbf{P}_{qq} = \frac{1}{4} \sigma_{tot}^2 \left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{w}_i \mathbf{w}_i^T \right)^{-1} \quad (3.53)$$

Onde:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{vi}^2 + \sigma_{wi}^2 \quad \frac{1}{\sigma_{tot}^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \cdots + \frac{1}{\sigma_n^2} \quad a_i = \frac{\sigma_{tot}^2}{\sigma_i^2} \quad (3.54)$$

Especificamente para duas referências de atitude:

$$\mathbf{P}_{qq} = \frac{1}{4} \left\{ \sigma_{tot}^2 \mathbf{I} + \frac{1}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|^2} [(\sigma_2^2 - \sigma_{tot}^2) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \cdots \right. \\ \left. \cdots + (\sigma_1^2 - \sigma_{tot}^2) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T + \sigma_{tot}^2 (\mathbf{w}_1 \bullet \mathbf{w}_2) (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2^T + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_1^T)] \right\} \quad (3.55)$$

Sabendo que \mathbf{P}_{qq} se relaciona com a matriz de covariância Cartesiana de ângulos de erro $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ (a forma diretamente obtida para o TRIAD na Sub-Seção 3.3.1), pela relação:

$$\mathbf{P}_{qq} = \frac{1}{4} \mathbf{P}_{\theta\theta} \quad (3.56)$$

3.3.3 Outros Algoritmos

Certamente o TRIAD e o QUEST não são os únicos algoritmos de atitude. Eles são discutidos em maiores detalhes neste trabalho pois são os algoritmos de escolha para avaliar a melhoria na informação de atitude, obtida através da auto-calibração.

Dentre os outros algoritmos de atitude existentes, destacam-se por sua popularidade, ou por seu valor histórico: O y -Método desenvolvido por Davenport (1968). O q -Método, também desenvolvido por Davenport, porém nunca publicado (o q -Método é discutido em maiores detalhes na Sub-Seção anterior, uma vez que o algoritmo QUEST é baseado nele). A resolução do problema de Wahba (Eq. (3.23)) através de SVD (*Singular Value Decomposition* – Decomposição em Valor Singular) proposta por Markley (1988). O algoritmo FOAM (*Fast Optimal Attitude Matrix* – Matriz de Atitude Ótima Rápida) desenvolvido por Markley (1993). A determinação da atitude ótima em Eixo/Ângulos de Euler através dos algoritmos EULER-2 e EULER- n , desenvolvidos por Mortari (1995). Os métodos ESOQ1 (*First Estimator of the Optimal Quaternion* – Primeiro Estimador do Quatérnio Ótimo), desenvolvido por Mortari (1997), e ESOQ2 (*Second Estimator of the Optimal Quaternion* – Segundo Estimador do Quatérnio Ótimo) desenvolvido por Mortari (2000).

Uma comparação de eficiência e precisão destes algoritmos pode ser encontrada no trabalho de Markley e Mortari (2000).

4 *Sensores de Atitude*

Conforme mostrado na Seção 3.1, há diversas grandezas físicas que podem ser utilizadas como referência, ou fonte de informação, para a atitude. Cada uma das referências de atitude é medida, ou observada, por um sensor específico. Como este trabalho trata do desenvolvimento de um algoritmo de auto-calibração para um sistema de atitude em aplicações terrestres, onde as referências de atitude utilizadas serão a gravidade terrestre e o campo geomagnético, este Capítulo apresentará uma discussão mais detalhada sobre os sensores específicos destas grandezas, respectivamente, acelerômetros e magnetômetros.

4.1 Acelerômetros

Os acelerômetros não medem diretamente a aceleração propriamente dita de um corpo. Normalmente o elemento sensor é uma massa conhecida, onde a força inercial sobre esta massa, quando ela se encontra sob aceleração, pode ser medida. Esta força inercial pode distender uma mola, e esta distensão pode ser medida; ela pode alterar a tensão sobre uma linha, alterando sua frequência de vibração; ou pode até ocasionar um torque que irá causar precessão em um giroscópio, sendo que a precessão do giroscópio se torna uma fonte de medida da aceleração (LAWRENCE, 1998). Estes e muitos outros efeitos podem ser utilizados para se obter dados sobre a aceleração de um corpo.

Para os acelerômetros MEMS mais comuns, aos quais o desenvolvimento desta metodologia de auto-calibração especificamente se dedica, o princípio pelo qual se mensura a aceleração é através da alteração da capacitância entre três placas ligadas em série, onde a placa interna é presa apenas por uma de suas extremidades, sendo livre para oscilar sob a ação de alguma aceleração, como na Fig. 4.1.

Conforme a placa central oscila, sua distância média d é alterada, e consigo, as capacitâncias C_1 e C_2 . Através da diferença destas capacitâncias, é possível obter dados sobre a aceleração, na direção perpendicular às placas.

Em um acelerômetro MEMS triaxial, estão integrados no CI (Circuito Integrado) três

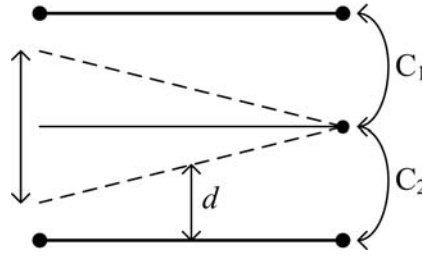


Figura 4.1: Construção típica de um acelerômetro MEMS.

estruturas como a da Fig. 4.1, ortogonais entre si, mais a eletrônica necessária para o condicionamento do sinal obtido e para a disponibilização dos dados na saída do sensor.

De uma forma geral, o modelo de medida de um acelerômetro, ou seja, a relação entre a aceleração e a saída do sensor, pode ser dada, para uma boa aproximação, pela seguinte equação (por simplicidade, foi omitida a corrupção por ruído):

$$\mathbf{a}_{\text{out}} = \mathbf{C}_m \mathbf{C}_{sf} (\mathbf{a}_{\text{in}} + \mathbf{o}_a) \quad (4.1)$$

Onde \mathbf{a}_{out} é a saída analógica do acelerômetro (3×1), \mathbf{a}_{in} é o vetor 3×1 de aceleração real a que o sensor está submetido, \mathbf{o}_a é o vetor 3×1 que representa os valores de *offset*, ou *bias*, do acelerômetro, \mathbf{C}_{sf} é a matriz 3×3 dos valores de sensibilidade, ou fatores de escala, do acelerômetro e por fim \mathbf{C}_m é uma matriz 3×3 que indica o desalinhamento ortogonal da tríade sensora.

O elemento sensor do acelerômetro (Fig. 4.1) deve ser sensível à acelerações apenas na direção ortogonal ao plano que contém a placa central, porém, em situações onde há uma aceleração em seu eixo sensível causando uma deflexão na placa, uma força de reação em outro eixo pode causar um torque no ponto de fixação da placa, que causará uma deflexão perturbadora, devido a uma aceleração em outro eixo. Este efeito é conhecido como sensibilidade cruzada e está melhor ilustrado na Fig. 4.2.

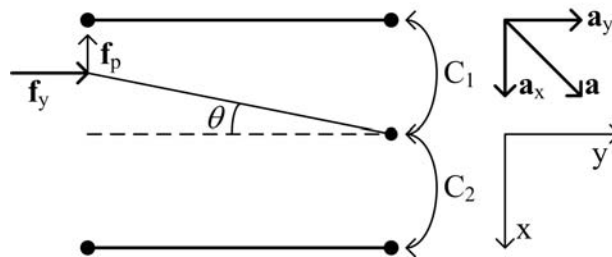


Figura 4.2: Sensibilidade cruzada em um acelerômetro MEMS.

A Fig 4.2 ilustra o elemento sensor do eixo x de um acelerômetro MEMS. Observa-se que sob uma aceleração resultante \mathbf{a} , a componente em y da força de reação irá se

comportar como uma força perturbadora \mathbf{f}_p onde $\mathbf{f}_p \propto \mathbf{f}_y \sin \theta$.

Levando o efeito de sensibilidade cruzada em conta, a matriz \mathbf{C}_{sf} possuirá elementos não-nulos fora de sua diagonal principal e o modelo do acelerômetro ficaria bastante complexo. Porém, para a maioria dos acelerômetros MEMS, o efeito da sensibilidade cruzada pode ser desprezado (seu valor comum é $> 1\%$ da sensibilidade direta), sem que isto cause perda apreciável de precisão. Assim, \mathbf{C}_{sf} pode ser dada por:

$$\mathbf{C}_{sf} = \begin{pmatrix} s_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & s_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Onde s_{xx} , s_{yy} e s_{zz} são as sensibilidades nos eixos x , y e z , respectivamente.

Os desvios de ortogonalidade na tríade sensora do acelerômetro podem ser descritos, sem perda de generalidade, através de três ângulos ρ , ϕ e λ . A tríade ortogonal é dada por x , y e z , enquanto a tríade real, desalinhada é dada por x' , y' e z' . O eixo x é considerado perfeitamente alinhado (i.e. $x \parallel x'$). Considera-se o eixo y' contido no plano xy , e seu desvio em relação a y é dado por ρ . Os desvios do eixo z' em relação ao plano xz e yz são dados respectivamente por λ e ϕ . Os desvios de ortogonalidade da tríade são ilustrados na Fig. 4.3.

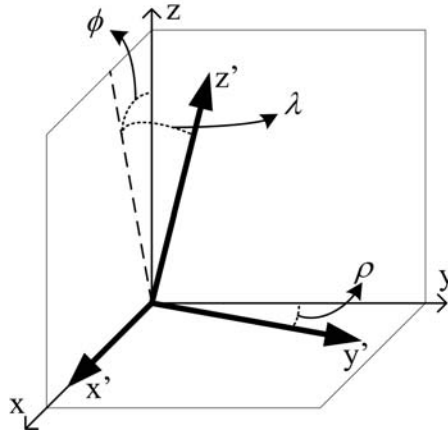


Figura 4.3: Desvios de ortogonalidade na tríade.

Desta forma, a matriz \mathbf{C}_m , que representa a não-ortogonalidade da tríade pode ser reduzida à uma matriz triangular inferior, dada por:

$$\mathbf{C}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ \sin \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \cos \phi \cos \lambda \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

O efeito do desalinhamento deve ser levado em conta pois, tradicionalmente a tolerância na ortogonalidade da tríade de um acelerômetro MEMS triaxial é da ordem de um grau. No caso de uma montagem em PCB (*Printed Circuit Board* – Placa de Circuito Impresso), com três acelerômetros uni-axiais, o erro de ortogonalidade pode ser ainda maior ($\approx 5^\circ$).

Uma outra fonte de erro bastante comum em acelerômetros MEMS é o erro vibropendular, causado por vibrações abaixo da frequência natural do sistema massa e meio de suspensão que compõem o elemento sensor (LAWRENCE, 1998). Efeitos de não-linearidade do sensor e deriva térmica, quando apreciáveis, são comumente tratados através de processamento digital do sinal de saída.

4.2 Magnetômetros

Magnetômetros são sensores que medem a direção e o módulo de campos magnéticos. São praticamente essenciais em qualquer sistema de navegação, pois desde o período das Grandes Navegações, o campo magnético terrestre é utilizado como referência para o norte geográfico.

Diferentes magnetômetros operam baseados em diferentes princípios. Dentre as várias tecnologias utilizadas na construção de magnetômetros, uma das que resulta em sensores de baixo custo e desempenho adequado é a AMR (*Anisotropic Magnetoresistive* – Magneto-resistiva Anisotrópica) (GEBRE-EGZIABHER et al., 2001), onde o sensor é construído utilizando uma liga de ferro-níquel, ou *Permalloy*, cuja resistência elétrica é dependente da presença de campos magnéticos em uma direção específica.

A Fig. 4.4 ilustra da maneira simples a construção de um magnetômetro AMR. Nela, cada uma das pontes resistivas está contida em um plano, onde os três planos são mutualmente ortogonais. Para cada plano, a direção perpendicular ao mesmo é a direção onde o elemento sensor é sensível ao campo magnético.

O modelo matemática de medida para um magnetômetro deste tipo pode ser escrito como (novamente, por simplicidade, a corrupção por ruído foi omitida):

$$\mathbf{b}_{\text{out}} = \mathbf{C}_m \mathbf{C}_{sf} \mathbf{C}_{si} (\mathbf{b}_{\text{in}} + \mathbf{o}_b) \quad (4.4)$$

Onde \mathbf{b}_{out} é um vetor 3×1 que representa a saída analógica do sensor, \mathbf{b}_{in} é o vetor 3×1 que representa o campo magnético presente, \mathbf{o}_b representa o *bias* ou *offset* (3×1),

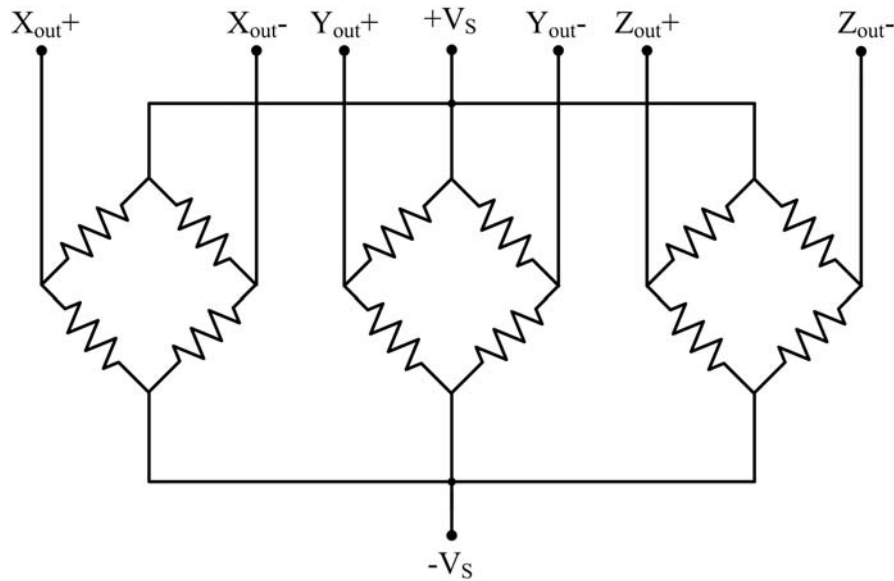


Figura 4.4: Diagrama esquemático da estrutura interna de um magnetômetro AMR.

que para magnetômetros é conhecido como erros *Hard Iron*, \mathbf{C}_m é uma matriz 3×3 que representa os desvios de ortogonalidade da tríade sensora do magnetômetro, \mathbf{C}_{sf} também é uma matriz 3×3 que representa os valores de sensibilidade, ou fatores de escala, do magnetômetro e, por fim, \mathbf{C}_{si} representa os chamados erros *Soft Iron* (3×3).

Os erros *Hard Iron* são erros gerados pela presença de materiais ferromagnéticos ou magnetos permanentes (ímãs) próximos ao magnetômetro, sendo parte da estrutura onde o magnetômetro está instalado, como um AHRs dentro de um avião. Estes erros se sobrepõem ao *bias* intrínseco do magnetômetro gerando erros constantes na saída do sensor. Normalmente, erros *Hard Iron* são considerados invariantes no tempo, porém, como o *bias* do sensor, ao qual ele se sobrepõe, geralmente é fortemente dependente da temperatura e se altera com o tempo, uma rotina de auto-calibração se faz necessária para manter este erro corrigido.

Certos materiais possuem a propriedade de gerar campos induzidos em resposta a campos magnéticos externos. As perturbações sobre o campo magnético causada por esses campos induzidos são chamados de erros *Soft Iron*. Ou seja, a medida do campo geomagnético é corrompida por campos induzidos pelo próprio campo geomagnético. A situação é complicada ainda mais pelo fato deste erro ser variável com a atitude. Assumindo que a histerese seja pequena, o que é verdadeiro para a maioria dos materiais *Soft Iron*, é possível representar este erro como uma matriz 3×3 para o caso tridimensional. Devido à complexidade do erro *Soft Iron*, a maioria dos sistemas de atitude têm seus magnetômetros instalados de forma a minimizar ao máximo esta fonte de erro, assim, é

possível aproximar \mathbf{C}_{si} para uma matriz identidade, sem perda apreciável de precisão.

A sensibilidade, ou fator de escala, para um magnetômetro pode ser definido de forma bastante semelhante à sensibilidade de um acelerômetro, descrita na Seção 4.1. Novamente, qualquer efeito de sensibilidade cruzada pode ser considerado desprezível, anulando todos os elementos fora da diagonal principal de \mathbf{C}_{sf} , sendo que \mathbf{C}_{sf} é definida da mesma forma que a Eq. (4.2).

De maneira análoga à sensibilidade, os desvios de ortogonalidade de um magnetômetro podem ser descritos da mesma forma que foram para um acelerômetro. Ou seja, sem perda de generalidade, podem ser dados por uma matriz triangular inferior \mathbf{C}_m definida em Eq. (4.3).

Uma característica dos magnetômetros AMR é que os domínios magnéticos se deterioram após poucas medidas, perdendo então a sensibilidade ao campo magnético, empobrecendo assim a resposta do sensor. Uma técnica simples para corrigir este efeito é a aplicação de pulsos de corrente, com valor de pico elevado porém curta duração. Esta técnica é conhecida como *set* e *reset*, onde o primeiro pulso de corrente faz com que todos os domínios magnéticos se orientem em uma direção, e o segundo pulso faz com que os domínios magnéticos invertam sua orientação, anulando desta forma, qualquer influência anterior que tenha se mantido por histerese do material. Normalmente, a amostragem do campo magnético é feita logo após um ciclo de *set* e *reset*.

Uma vez que \mathbf{C}_{si} pode ser considerada uma matriz identidade, a Eq. (4.4) que define o modelo matemático do magnetômetro é reduzida à uma equação análoga à Eq. (4.1), assim, fica claro que uma metodologia de auto-calibração desenvolvida para um acelerômetro MEMS triaxial, poderá ser adaptada para também auto-calibrar um magnetômetro AMR, onde ambos os sensores podem fazer uso do mesmo modelo matemático.

5 *Estimação de Parâmetros*

Uma vez que qualquer procedimento de calibração é, em sua essência, um processo de estimação de parâmetros, este Capítulo se dedica a expor os principais conceitos em estimação de parâmetros utilizados neste trabalho. Devido à natureza onde estes conceitos serão aplicados neste trabalho, todas as distribuições de probabilidade apresentadas neste Capítulo são consideradas contínuas.

Conforme mostrado em Papoulis (1991), um problema genérico de estimação pode ser definido da seguinte maneira¹: supondo que \mathbf{x} seja uma variável aleatória, com função de distribuição cumulativa $F(x, \theta)$ de forma conhecida, de um parâmetro θ , que é o parâmetro que se deseja estimar. Para realizar a estimação, um experimento é repetido n vezes, sendo que x_i indica os valores observados de \mathbf{x} .

Uma estimação pontual é uma função $\hat{\theta} = g(\mathbf{X})$ do vetor de observação $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]$. A correspondente variável aleatória $\hat{\Theta} = g(\mathbf{X})$ é o estimador pontual de θ , para um vetor de amostras $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$.

De maneira diferente, uma estimação intervalar de um parâmetro θ é o intervalo (θ_1, θ_2) , cujos limites são as funções $\theta_1 = g_1(\mathbf{X})$ e $\theta_2 = g_2(\mathbf{X})$ do vetor de observação \mathbf{X} . O correspondente intervalo aleatório (Θ_1, Θ_2) é o estimador intervalar de θ , onde define-se que (θ_1, θ_2) é o intervalo de confiança de valor $P\{\Theta_1 < \theta < \Theta_2\}$, sendo este o valor da probabilidade de θ estar contido no intervalo (θ_1, θ_2) . Alternativamente, o valor $1 - P\{\Theta_1 < \theta < \Theta_2\}$ é chamado de nível de confiança.

O estimador pontual de parâmetros atende de maneira conveniente as necessidades de um procedimento de calibração, sendo a forma de escolha para realizar a estimação dos parâmetros necessária à calibração. Conceitos e aplicações de estimação pontual de parâmetros em aplicações de engenharia podem ser encontrados em Montgomery e Runger (2003).

¹Como ficará claro no decorrer deste trabalho, muitos dos símbolos utilizados neste Capítulo possuem significado diferente fora dele, as definições de convenções ou símbolos aqui declaradas não tem valor fora deste Capítulo. Isto é feito para que este Capítulo possa utilizar das convenções comumente encontradas na literatura especializada, facilitando sua leitura.

5.1 Conceitos Gerais em Estimação Pontual

Uma estimativa deve ser próxima, de certa forma, do valor verdadeiro do parâmetro. Um estimador não-viesado (*unbiased*) $\hat{\Theta}$ de θ tem a esperança de $\hat{\Theta}$ igual a θ , ou seja, a média da distribuição de probabilidade de $\hat{\Theta}$ é igual a θ . Definindo o viés (*bias*) como:

$$E[\hat{\Theta}] - \theta \quad (5.1)$$

Onde $E[\cdot]$ é o operador estatístico esperança, ou primeiro momento. Para um estimador não-viesado, o viés é nulo, ou seja $E[\hat{\Theta}] - \theta = 0$. É evidente que a característica de viés nulo é altamente desejável para um estimador de parâmetros.

Estimadores não-viesados podem ter diferentes distribuições de probabilidade, ou seja, podem possuir variâncias diferentes. Um estimador não-viesado de menor variância possui maior probabilidade de produzir uma estimativa mais próxima do valor verdadeiro θ . Um princípio lógico ao selecionar vários estimadores é de escolher o estimador com a menor variância. O MVUE (*Minimum Variance Unbiased Estimator* – Estimador Não-Viesado de Mínima Variância) é o estimador que, dentre todos os estimadores não-viesados, possui a menor variância.

Para distribuição normal, que quase sempre é uma boa aproximação da distribuição de um parâmetro desconhecido, em uma amostra aleatória, de tamanho n , X_1, \dots, X_n de média μ e variância σ^2 , a média amostral \bar{X} é o MVUE de μ .

Mesmo em situações onde não seja possível determinar absolutamente o MVUE, o mesmo princípio pode ser aplicado para selecionar entre os potenciais candidatos.

Por vezes pode ser necessário utilizar um estimador viesado (*biased*). Nestes casos, o erro quadrático médio do estimador é uma importante figura de mérito do seu desempenho. O MSE (*Mean Square Error* – Erro Quadrático Médio) é definido como:

$$MSE(\hat{\Theta}) = E[(\hat{\Theta} - \theta)^2] \quad (5.2)$$

A Eq. (5.2) pode ser reescrita como:

$$MSE(\hat{\Theta}) = V(\hat{\Theta}) + (\text{bias})^2 \quad (5.3)$$

Ou seja, o MSE de um estimador $\hat{\Theta}$ é igual à sua variância ($V(\hat{\Theta})$) mais o quadrado do seu valor de viés. Se $\hat{\Theta}$ for não-viesado, seu MSE será igual à sua variância.

O MSE de um estimador é um importante critério de comparação entre diferentes estimadores. A análise do MSE de vários estimadores, viesados ou não, revelará qual possui o menor erro, sob o critério de erro quadrático médio. É bastante comum encontrar estimadores viesados com menor MSE que estimadores não-viesados. Desta forma, embora a característica de viés nulo seja desejável em um estimador, ela não necessariamente define o melhor estimador dentre várias escolhas possíveis.

5.2 Métodos de Estimação Pontual

As propriedades gerais de estimadores pontuais discutidas na Seção anterior são de pouca ajuda no projeto de estimadores. Nesta Seção, serão discutidos três métodos de obtenção de estimadores pontuais por inferência estatística: o método dos momentos, o método de máxima verossimilhança e o método de Bayes. Serão discutidas as características, vantagens e desvantagens de cada um dos tipos de estimação.

5.2.1 Método dos Momentos

A ideia geral por trás do método dos momentos é igualar os momentos estatísticos da população, definidos em termos de valores médios, para seus correspondentes momentos estatísticos amostrais. Assim os momentos estatísticos da população serão funções dos momentos estatísticos amostrais e de parâmetros desconhecidos. Resolvendo as equações em função dos parâmetros resultam em uma estimativa no valor dos mesmos.

Desta forma, para obter m parâmetros a partir de n amostras deve-se igualar os primeiros m momentos da população com os primeiros m momentos amostrais, resultando em m estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ dos parâmetros desconhecidos $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

Uma das maiores vantagens do método dos momentos é que ele é, geralmente, fácil de computar. Isto somente é verdadeiro se a função densidade de probabilidade, que descreve a estatística da população, for facilmente integrável.

5.2.2 Método de Máxima Verossimilhança

Os estimadores MLE (*Maximum Likelihood Estimator* – Estimador de Máxima Verossimilhança), são uma das melhores maneiras de proceder uma estimação pontual. Como o nome indica, a estimativa do parâmetro maximiza a função de verossimilhança.

Assim, assumindo que X seja uma variável aleatória com função densidade de pro-

babilidade $f(x; \theta)$, onde θ é o parâmetro desconhecido. Sendo x_1, x_2, \dots, x_n , n amostras observadas, a função verossimilhança é:

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \bullet f(x_2; \theta) \bullet \dots \bullet f(x_n; \theta) \quad (5.4)$$

O método da máxima verossimilhança é um dos preferidos em trabalhos estatísticos, pois, normalmente é fácil de usar, e produz estimadores com boas propriedades estatísticas, como:

1. Produz estimadores aproximadamente não-viesados de θ [$E(\hat{\Theta}) \cong \theta$].
2. A variância de $\hat{\Theta}$ é bastante próxima, senão igual, à variância de um MVUE.
3. O estimador $\hat{\Theta}$ possui distribuição normal.

Ou seja, o MLE é aproximadamente um MVUE, o que é bastante desejável. Isto atrelado ao fato que ele é geralmente fácil de obter e que possui, quando n é grande, uma clara distribuição normal, explica seu uso difundido. A única restrição para seu uso é que a distribuição da população seja conhecida.

Uma outra propriedade importante do MLE é a invariância, i.e. sendo $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_k$ os MLEs dos parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, então o estimador de máxima verossimilhança de qualquer função $h(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ destes parâmetros é a mesma função $h(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_k)$ dos estimadores $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_k$.

Uma das complicações no uso do método de máxima verossimilhança é que, nem sempre pode ser simples maximizar a função $L(\theta)$, pois $dL(\theta)/d\theta = 0$ pode ser difícil de resolver, ou por vezes sequer possuir uma solução analítica.

5.2.3 Estimação Bayesiana de Parâmetros

A estimação Bayesiana é uma abordagem diferenciada da inferência estatística, pois faz uso das informações amostrais, como nos métodos previamente discutidos, e também de alguma outra informação que não faz parte das amostras. Ou seja, sendo X uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade seja dependente de θ , pode-se escrever a função densidade de probabilidade como $f(x|\theta)$.

Supondo que a informação adicional de θ possa ser dada na forma de distribuição de probabilidade, como $f(\theta)$. Esta função densidade de probabilidade é comumente chamada

de distribuição *a priori* de θ , tratando desta forma θ como uma variável aleatória. A abordagem Bayesiana para estimação faz uso de $f(\theta)$ e da distribuição *a posteriori* da amostra $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ para encontrar a distribuição posterior de θ , como $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$. A distribuição posterior combina as informações sobre as amostras observadas e o conhecimento prévio sobre θ . De certa forma, ela expressa o grau de credibilidade do valor verdadeiro de θ após observação dos dados amostrados.

Encontrar a distribuição posterior é, conceitualmente, simples. A densidade de probabilidade conjunta das amostras X_1, X_2, \dots, X_n e o parâmetro θ é:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) f(\theta) \quad (5.5)$$

E a distribuição marginal de X_1, X_2, \dots, X_n é:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) d\theta \quad (5.6)$$

Assim, a distribuição *a posteriori* de θ é dada por:

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (5.7)$$

O estimador Bayesiano de θ é o valor $\hat{\theta}$ que corresponde ao valor esperado da distribuição *a posteriori* $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Na prática, para um número moderado de amostras, os resultados de um estimador Bayesiano ou MLE serão aproximadamente equivalentes, se a distribuição *a posteriori* das amostras é consistente com a distribuição *a priori* de θ . Caso contrário, haverá uma diferença apreciável nos resultados. Neste caso, assumindo que os resultados amostrais são tidos como corretos, há um erro na informação prévia, e o MLE obterá o melhor resultado. O estimador de Bayes possui a tendência de produzir um resultado entre a estimativa de máxima verossimilhança e o que é assumido *a priori*.

Um ponto negativo bastante claro do uso do método de Bayes na metodologia de auto-calibração é o fato que, para diferentes sensores, seria necessário obter as distribuições *a priori* dos parâmetros de interesse, para cada sistema a ser auto-calibrado utilizando diferentes sensores. Isto aumenta o trabalho necessário para implementar a rotina de auto-calibração, porém, sem nenhuma garantia de melhora substancial na qualidade da estimação, em contraste com resultados obtidos através de métodos de máxima verossimilhança ou método dos momentos.

5.3 Análise de Regressão

Muitos problemas de engenharia, especialmente problemas de calibração, envolvem explorar as relações entre duas ou mais variáveis. A Análise de Regressão é uma técnica estatística bastante útil neste tipo de problema. Através da Análise de Regressão é possível obter modelos para otimização de processos.

5.3.1 Regressão Linear Múltipla

Conforme observado através dos modelos dos sensores apresentados no Cap. 4, uma regressão linear para obter os parâmetros de calibração dos sensores será, necessariamente, uma regressão linear múltipla. Um exemplo genérico de regressão linear múltipla pode ser dado por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \quad (5.8)$$

Onde Y representa a variável dependente, x_1, x_2, \dots, x_n são as n variáveis independentes, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, são os $n + 1$ parâmetros desconhecidos, também chamados de coeficientes de regressão, e ε representa o erro presente nas medidas. A regressão é dita linear pois a Eq. (5.8) é linear em termos dos coeficientes de regressão.

Modelos que incluem efeitos de interação também podem ser avaliados por regressão linear múltipla², pois:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \varepsilon \quad (5.9)$$

Onde definindo $x_3 = x_1 x_2$ e $\beta_3 = \beta_1 \beta_2$, obtém-se:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \varepsilon \quad (5.10)$$

Que é análoga à forma da Eq. (5.8), e portanto, um modelo de regressão linear.

5.3.2 Regressão Linear por Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados pode ser utilizado para estimar os coeficientes de regressão. Matricialmente, o modelo de regressão pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.11)$$

²Este fato será melhor apreciado nos desenvolvimentos apresentados no Cap. 6, especificamente na Eq. (6.9)

Onde \mathbf{y} é um vetor $n \times 1$ de observações, \mathbf{X} é uma matriz $n \times p$ das variáveis independentes, $\boldsymbol{\beta}$ é o vetor $p \times 1$ de coeficientes de regressão e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor $n \times 1$ de erros aleatórios.

Deve-se encontrar uma estimativa de $\boldsymbol{\beta}$ que minimize:

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (5.12)$$

O estimador de mínimos quadrados $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é a solução de $\boldsymbol{\beta}$ que satisfaz:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (5.13)$$

Que é dada pela por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (5.14)$$

As propriedades da Eq. (5.14) serão discutidas em maiores detalhes no Cap. 6.

5.3.3 Propriedades da Estimação de Mínimos Quadrados

As propriedades estatísticas dos estimadores de mínimos quadrados $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n$ podem ser facilmente definidas, assumindo que os erros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, no modelo de regressão, são independentes, com média zero, e variância σ^2 . Desta forma é possível provar que $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é um estimador não-viesado de $\boldsymbol{\beta}$, com covariância dada por:

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (5.15)$$

Outra propriedade importantíssima da regressão linear por estimador de mínimos quadrados é que, assumindo que os erros possuam distribuição normal, o estimador de mínimos quadrados linear é idêntico ao estimador de máxima verossimilhança. Assim, das propriedades do MLE, pode-se inferir que o estimador de mínimos quadrados linear é assintoticamente eficiente, no sentido que sua variância alcança o valor de *Cramér-Rao bound*³ (HAYASHI, 2000).

³*Cramér-Rao bound* – Expressa o limite inferior para a variância na estimação de parâmetros. Em sua forma mais simples, ele declara que o limite inferior para a variância de um estimador não-viesado é pelo menos tão grande quanto o inverso da informação presente.

Parte II

Desenvolvimento

6 *Método de Calibração*

Conforme declarado ao final do Cap. 4, acelerômetros MEMS e magnetômetros AMR podem ser descritos através do mesmo modelo matemático. Desta forma, a mesma metodologia de auto-calibração pode ser aplicada a ambos os sensores, com mínimas adaptações.

Neste Capítulo será exposto o desenvolvimento de uma rotina de auto-calibração para acelerômetros e magnetômetros MEMS (magnetômetros AMR triaxiais são construídos utilizando tecnologia MEMS). O método desenvolvido é uma expansão do trabalho de Foster e Elkaim (2008), que por sua vez, foi derivado do trabalho de Gebre-Egziabher et al. (2001).

A solução proposta é uma das possíveis soluções que se pode obter através do trabalho publicado por Foster e Elkaim (2008), uma vez que a forma como os autores desta referência chegaram a seus resultados não foi explicitamente exposta, não há forma de afirmar se a metodologia desenvolvida neste trabalho é a mesma por eles utilizada.

Embora a simples demonstração da minimização dos erros dos parâmetros dos sensores seja um resultado desejável para uma rotina de auto-calibração, para um sistema de atitude, o que realmente importa é de quanto o erro na direção dos versores de referência diminuiu. Este erro é crítico na determinação da incerteza da informação de atitude através de sua covariância, como mostrado nas Eqs. (3.21) e (3.55), para o TRIAD e o QUEST (com duas referências), respectivamente.

Desta forma, a avaliação da eficiência da metodologia de auto-calibração desenvolvida será dada pela melhoria na qualidade da informação de interesse de um sistema de atitude, que é a própria atitude.

6.1 **Modelo Matemático Genérico**

Conforme citado anteriormente, os modelos matemáticos dos acelerômetros e magnetômetros MEMS são análogos, podendo então serem representados de forma genérica.

A fim de manter um senso de generalidade, o desenvolvimento da metodologia de auto-calibração a ser exposto neste Capítulo, será dado em termos de uma grandeza física genérica, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$.

Em concordância com os modelos dados pelas Eqs. (4.1) e (4.4), as componentes da grandeza genérica podem ser escritas como:

$$\tilde{u}_x = au_x + x_0 + \eta_x \quad (6.1)$$

$$\tilde{u}_y = b(u_x \sin \rho + u_y \cos \rho) + y_0 + \eta_y \quad (6.2)$$

$$\tilde{u}_z = c(u_x \sin \phi \cos \lambda + u_y \cos \phi \sin \lambda + u_z \cos \phi \cos \lambda) + z_0 + \eta_z \quad (6.3)$$

Onde \tilde{u}_x , \tilde{u}_y e \tilde{u}_z são as saídas corrompidas do sensor, para os eixos x, y e z, respectivamente. Os valores u_x , u_y e u_z são os valores reais das componentes da grandeza física genérica, a , b e c são os fatores de escala, ou sensibilidades, dos respectivos eixos x, y e z. Os valores x_0 , y_0 e z_0 são os *biases* dos eixos x, y e z.

Os ângulos ρ , ϕ e λ são os ângulos de desalinhamento ortogonal da tríade sensora. São definidos da mesma forma que na Seção 4.1, repetida aqui para uma melhor referência: o ângulo ρ é o desvio do eixo y real (chamado y') para o eixo y perfeitamente ortogonal, dentro do plano xy. Os ângulos ϕ e λ representam os desvios de z' para o plano zx e zy, respectivamente. A Fig. 4.3 expõe de maneira clara a relação da tríade ortogonal e não-ortogonal através destes ângulos.

Os valores η_x , η_y e η_z representam a corrupção por ruído nas medidas, para os eixos x, y e z. O ruído pode ser considerado AWG (*Additive White Gaussian* – Gaussiano Branco e Aditivo) com média zero para uma excelente aproximação. Para a maioria dos acelerômetros e magnetômetros MEMS disponíveis no mercado, o desvio padrão do ruído intrínseco é da ordem de 10^{-3} – 10^{-4} do valor de fundo de escala.

Conforme já comentado nos Caps. 1 e 2, a metodologia de auto-calibração desenvolvida neste trabalho possui uma única restrição para sua aplicabilidade, que é o conhecimento do módulo da grandeza física de referência. Escrevendo matematicamente para a grandeza física genérica \mathbf{u} , obtém-se:

$$|\mathbf{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (6.4)$$

Reescrevendo as Eqs. (6.1), (6.2) e (6.3), em termos de u_x , u_y e u_z :

$$u_x = \frac{(\tilde{u}_x - x_0)}{a} \quad (6.5)$$

$$u_y = \frac{-b \sin \rho (\tilde{u}_x - x_0) + a (\tilde{u}_y - y_0)}{ab \cos \rho} \quad (6.6)$$

$$u_z = \frac{bc (\sin \rho \cos \phi \sin \lambda - \cos \rho \sin \phi \cos \lambda) (\tilde{u}_x - x_0) \dots}{abc \cos \rho \cos \phi \cos \lambda} \dots \quad (6.7)$$

$$\dots \frac{-ac \cos \phi \sin \lambda (\tilde{u}_y - y_0) + ab \cos \rho (\tilde{u}_z - z_0)}{abc \cos \rho \cos \phi \cos \lambda}$$

Aplicando as Eqs. (6.5), (6.6) e (6.7) na Eq. (6.4), é possível obter uma equação da seguinte forma:

$$A\tilde{u}_x^2 + B\tilde{u}_x\tilde{u}_y + C\tilde{u}_x\tilde{u}_z + D\tilde{u}_y^2 + E\tilde{u}_y\tilde{u}_z + F\tilde{u}_z^2 + G\tilde{u}_x + H\tilde{u}_y + I\tilde{u}_z + J = 0 \quad (6.8)$$

Onde A , B , C , D , E , F , G , H , I e J são funções não-lineares dos parâmetros de calibração. Embora a Eq. (6.8) seja não-linear em termos dos parâmetros de calibração, ela é linear em termos de A – J . Assim, pode-se utilizar A – J como variáveis intermediária lineares, que podem ser encontradas por um estimador simples, e resolver, *a posteriori*, os parâmetros de calibração algebricamente, a partir destas variáveis.

Por simplicidade, e para manter a leitura do texto mais suave, o desenvolvimento algébrico completo das equações deste Capítulo não será exposto no corpo do texto. Uma referência mais completa do desenvolvimento das equações pode ser encontrada no Apêndice A.

6.2 Estimação por Mínimos Quadrados

A fim de aplicar um estimador de mínimos quadrados, para estimar as variáveis intermediárias, a Eq. (6.8) pode ser escrita de maneira mais conveniente como:

$$\frac{A\tilde{u}_x^2}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{B\tilde{u}_x\tilde{u}_y}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{C\tilde{u}_x\tilde{u}_z}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{D\tilde{u}_y^2}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{E\tilde{u}_y\tilde{u}_z}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{G\tilde{u}_x}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{H\tilde{u}_y}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{I\tilde{u}_z}{F\tilde{u}_z^2} + \frac{J}{F\tilde{u}_z^2} = -1 \quad (6.9)$$

O fator $F\tilde{u}_z^2$ foi escolhido como denominador comum para facilitar o manipulação posterior das equações, uma vez que, como fica claro no Apêndice A, F e D são os fatores mais simples, dentre A – J . Para os desenvolvimentos deste trabalho, optou-se arbitrariamente por utilizar F como denominador comum. A Eq. (6.9) pode ser reescrita

matricialmente como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{u}_{x_1}^2/\tilde{u}_{z_1}^2 & \tilde{u}_{x_1}\tilde{u}_{y_1}/\tilde{u}_{z_1}^2 & \cdots & 1/\tilde{u}_{z_1}^2 \\ \tilde{u}_{x_2}^2/\tilde{u}_{z_2}^2 & \tilde{u}_{x_2}\tilde{u}_{y_2}/\tilde{u}_{z_2}^2 & \cdots & 1/\tilde{u}_{z_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{u}_{x_n}^2/\tilde{u}_{z_n}^2 & \tilde{u}_{x_n}\tilde{u}_{y_n}/\tilde{u}_{z_n}^2 & \cdots & 1/\tilde{u}_{z_n}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} A/F \\ B/F \\ \vdots \\ J/F \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}} \quad (6.10)$$

Onde \mathbf{X} é a matriz de amostras, de dimensão $n \times 9$, onde n é o número de amostras utilizado, sendo $n \geq 9$. O vetor \mathbf{k} indica os coeficientes da Eq. (6.9) e \mathbf{p} é um vetor de elementos unitários negativos.

A partir do sistema dado pela Eq. (6.10), é necessário isolar o vetor \mathbf{k} de forma a se obter as variáveis intermediárias e proceder com a auto-calibração. Desta forma, pode-se utilizar o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{k} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{k} &= \mathbf{X}^T\mathbf{p} \\ (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{k} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{p} \\ \mathbf{I}\mathbf{k} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{p} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \mathbf{X}^\dagger\mathbf{p} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Onde $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$ indica a Pseudo-Inversa de Moore-Penrose¹, que para $n > 9$, torna-se matematicamente equivalente a aplicação do LSE. O (^) indica o caráter estimado do vetor \mathbf{k} .

6.3 Resolvendo os Parâmetros Algebricamente

No intuito de simplificar a representação da solução algébrica dos parâmetros de calibração a partir das variáveis intermediárias estimadas, os valores A/F , B/F , \dots e J/F , que são as componentes de $\hat{\mathbf{k}}$ podem ser reescritos de forma mais conveniente como:

$$\begin{aligned} \alpha &= -A/F & \beta &= -B/F & \gamma &= -C/F \\ \delta &= -D/F & \varepsilon &= -E/F & \chi &= -G/F \\ \mu &= -H/F & \iota &= -I/F & \kappa &= -J/F \end{aligned} \quad (6.12)$$

¹Assim chamada por ter sido desenvolvida independentemente por Eliakim H. Moore e Roger Penrose.

Onde o sinal negativo é devido ao efeito de \mathbf{p} .

Como para a maioria dos acelerômetros e magnetômetros MEMS triaxiais disponíveis no mercado, o desvio de ortogonalidade é menor que um grau, pode-se utilizar da aproximação para pequenos ângulos das funções trigonométricas (i.e. $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \theta$, para $\theta \leq 5^\circ$).

Assim, minimiza-se o trabalho algébrico ao determinar os parâmetros de calibração, que são três fatores de escala, três *biases* e três ângulos, a partir das variáveis intermediárias redefinidas na Eq. (6.12). Um desenvolvimento mais detalhado da resolução dos parâmetros pode ser encontrado no Apêndice A. A seguir, é exposta a solução obtida:

$$\hat{x}_0 = -\frac{\varepsilon^2 \chi - 2\beta\mu + 4\delta\chi - \beta\varepsilon\iota + 2\gamma\delta\iota - \gamma\varepsilon\mu}{-2\beta^2 - 2\beta\gamma\varepsilon + 2\delta\gamma^2 + 2\alpha\varepsilon^2 + 8\alpha\delta} \quad (6.13)$$

$$\hat{y}_0 = -\frac{\gamma^2\mu + 4\alpha\mu - 2\beta\chi - \beta\gamma\iota + 2\alpha\varepsilon\iota - \gamma\varepsilon\chi}{-2\beta^2 - 2\beta\gamma\varepsilon + 2\delta\gamma^2 + 2\alpha\varepsilon^2 + 8\alpha\delta} \quad (6.14)$$

$$\hat{z}_0 = -\frac{\beta^2\iota - \beta\gamma\mu - 4\alpha\delta\iota + 2\alpha\varepsilon\mu - \beta\varepsilon\chi + 2\gamma\delta\chi}{-2\beta^2 - 2\beta\gamma\varepsilon + 2\delta\gamma^2 + 2\alpha\varepsilon^2 + 8\alpha\delta} \quad (6.15)$$

$$\hat{c} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \sqrt{\kappa - \alpha\hat{x}_0^2 - \beta\hat{x}_0\hat{y}_0 - \gamma\hat{x}_0\hat{z}_0 - \delta\hat{y}_0^2 - \varepsilon\hat{y}_0\hat{z}_0 + \hat{z}_0^2} \quad (6.16)$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{c}}{\sqrt{-\delta}} \quad (6.17)$$

$$\hat{a} = \sqrt{2}\hat{c}^2 (1 - \hat{\lambda}^2) \sqrt{\frac{-1}{2\alpha\hat{c}^2 (1 - \hat{\lambda}^2)^2 - (\beta\hat{b}\hat{\lambda} + \gamma\hat{c}\hat{\lambda}^2) (\beta\hat{b}\hat{\lambda} + \gamma\hat{c})}} \quad (6.18)$$

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{a} (\beta\hat{b} + \gamma\hat{c}\hat{\lambda})}{2\hat{c}^2 (1 - \hat{\lambda}^2)} \quad (6.19)$$

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{a} (\beta\hat{b}\hat{\lambda} + \gamma\hat{c})}{2\hat{c}^2 (1 - \hat{\lambda}^2)} \quad (6.20)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{-\delta}} \quad (6.21)$$

6.4 Cômputo da Pseudo-Inversa

A aplicação direta dos resultados obtidos na Eq. (6.11) e nas Eqs. (6.13)–(6.21) apenas não garante uma auto-calibração confiável, principalmente devido à colinearidade da matriz \mathbf{X} . A determinação da Pseudo-Inversa de Moore-Penrose em si é uma operação bastante problemática, pois o produto $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ apresenta uma característica de amplificação do ruído presente em \mathbf{X} . A aplicação direta da definição $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ é numérica-

mente instável, sendo muito comuns erros na inversão de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. Uma forma de contornar estas dificuldades é através de decomposição QR ou SVD de \mathbf{X} , e então sua aplicação na definição de \mathbf{X}^\dagger (RAO; MITRA, 1970-1971; SHINOZAKI; SIBUYA; TANABE, 1972).

A forma computacionalmente mais simples e precisa de se obter a pseudo-inversa de Moore-Penrose é através da decomposição SVD, pois se $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^*$ é a decomposição por valor singular de \mathbf{X} , então $\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{V}\mathbf{D}^\dagger\mathbf{U}^*$, onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal $n \times 9$, cuja pseudo-inversa é bastante simplificada, \mathbf{U} é uma matriz $n \times n$ cujas colunas são autovetores de $\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ e \mathbf{V} é uma matriz 9×9 cujas colunas são autovetores de $\mathbf{X}^*\mathbf{X}$. É desta maneira que o MatLab calcula a pseudo-inversa, através do comando `pinv`.

6.5 Condições de Aplicabilidade e Confiabilidade

Fica claro pela Eq. (6.4) que o módulo da grandeza física utilizada como referência age como um valor condicionante, que viabiliza o processo de auto-calibração proposto. A metodologia de auto-calibração proposta utiliza o resíduo entre o valor absoluto da grandeza física modelado, e o valor que está sendo medido pelo sensor, este resíduo é a fonte de dados que possibilita o processo de calibração.

Na metodologia de auto-calibração, considera-se que o valor do resíduo seja dependente apenas dos erros nos parâmetros dos sensores, porém isto nem sempre é verdadeiro. As medidas de campos gravitacionais e magnéticos terrestres, através de acelerômetros e magnetômetros, respectivamente, pode sofrer perturbações de outras fontes que não erros de calibração, sendo que informações obtidas nestas condições são inutilizáveis no procedimento de auto-calibração, pois resultariam em erros imprevisíveis.

Para ilustrar melhor este fato, pode-se tomar por exemplo um acelerômetro em um sistema de atitude, onde esse estará medindo a gravidade terrestre. Porém, se o sistema de atitude encontra-se sob movimento acelerado, o acelerômetro irá observar uma aceleração resultante entre a gravidade e a aceleração do sistema. Isto trará alterações no valor do módulo da aceleração medida, justamente o dado crítico para o procedimento de auto-calibração. Uma situação análoga ocorre para magnetômetros na proximidade de materiais ferromagnéticos, ou fontes de campos de indução.

Isto faz necessária uma filtragem dos dados a serem utilizados para a rotina de auto-calibração, a fim de evitar a utilização de dados onde essas perturbações estão presentes. Uma forma simples de realizar esta filtragem é através do próprio módulo observado da grandeza física, cuja diferença entre valor observado e modelado, dentro de uma faixa de

tolerância, deve ser utilizada como critério para rejeição de dados corrompidos. Os valores limiares da faixa de tolerância podem ser determinados empiricamente, devendo apenas ser compatíveis com o nível de ruído intrínseco ao sensor.

Como pode ser deduzido a partir da análise da Eq. (6.9), a presença de amostras cuja componente \tilde{u}_z seja muito pequena pode causar problemas de escalamento na matriz, uma potencial fonte de erros numéricos uma vez que os cálculos são realizados em precisão finita. Este fato é agravado ainda mais pelo fato de \tilde{u}_z ser elevado ao quadrado, diminuindo ainda mais o valor nos denominadores da Eq. (6.9), uma vez que $\tilde{u}_z \leq 1$. Em uma situação extrema onde \tilde{u}_z seja nula, irá ocorrer erro por divisão por zero, causando uma falha geral do processo de estimação das variáveis intermediárias, e por conseguinte, na auto-calibração.

Uma última grande fonte de erros, ou mesmo falha geral, na aplicação da metodologia de auto-calibração está na escolha das amostras que constituirão a matriz \mathbf{X} . Conforme declarado neste Capítulo, o número de amostras utilizado n deve ser de pelo menos nove, o que resultaria em uma matriz \mathbf{X} quadrada, o que contornaria as dificuldades do cálculo da pseudo-inversa. Porém, a utilização de mais que nove amostras faz com que a pseudo-inversa seja análoga a uma estimação de mínimos quadrados, minimizando desta forma, o efeito do ruído sobre os valores estimados. Um número de amostras de algumas poucas dezenas traria uma melhoria no desempenho da estimação, em termos do ruído presente, sem aumentar significativamente o custo computacional do procedimento de auto-calibração.

Porém, de modo a evitar singularidades em $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, o conjunto de amostras utilizado deve ser linearmente independente, ou seja, as amostras utilizadas no processo de auto-calibração devem ser, na essência das informações que elas trazem, diferentes umas das outras. Uma forma bastante prática de se observar esta independência linear entre as amostras, é através do lugar geométrico de todas as amostras possíveis, que na prática, pode ser considerado como um elipsoide (mais precisamente, devido à corrupção por ruído, o lugar geométrico é a casca de espessura finita delineada pelo elipsoide, sendo esta espessura determinada pela característica de ruído das medidas). Este elipsoide possui seus semi-eixos não ortogonais, devidos aos desvios de ortogonalidade da tríade, os comprimentos dos seus semi-eixos refletem os valores dos fatores de escala e seu desvio da origem representa o *bias* da tríade sensora.

Quanto maior o espalhamento das amostras sobre o elipsoide, maior a razão entre nível de informação e nível de ruído, obtendo assim, uma melhor estimação das variáveis

intermediárias. Este é um importante resultado, e será discutido mais a fundo nos Capítulos seguintes, onde o erro direcional do sensor será avaliado em função do ruído presente e o espalhamento das amostras.

Deve ser notado que, a fim de que duas amostras geometricamente próximas sejam úteis ao processo de auto-calibração, a distância angular entre elas deve ao menos ser maior que a incerteza na direção da amostra, devido à corrupção por ruído. Porém, como uma maior dispersão entre as amostras leva à uma melhor estimativa das variáveis intermediárias, pode-se utilizar de um valor arbitrário para a diferença mínima entre as amostras. Este valor deve levar em conta a dinâmica do sistema em sua aplicação final, de forma que a escolha de um valor muito alto para esta diferença mínima não impossibilite a realização da auto-calibração em um sistema com comportamento mais estático.

A distância angular entre duas amostras pode ser dada por:

$$\theta_{ij} = \arccos \left(\frac{\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_i| |\mathbf{u}_j|} \right) \quad (6.22)$$

Esta distância deve satisfazer à seguinte restrição:

$$\theta_{min} \leq \theta_{ij}, \quad i \neq j \quad (6.23)$$

Assim, a distância angular entre qualquer par de amostras da coleção, indexadas por i e j , deve satisfazer à condição da Eq. (6.23). Desta forma, é garantida a viabilidade do processo de auto-calibração utilizando as amostras da dada coleção. Conforme afirmado anteriormente, θ_{min} pode ser determinado arbitrariamente, porém levando em conta o comportamento do sistema de atitude em seu ambiente de aplicação.

Procedimentos para evitar todas as potenciais fontes de erro discutidas nesta Seção foram implementadas na metodologia de auto-calibração proposta, com excelentes resultados, como será visto no próximo Capítulo. Todo este trabalho adicional, normalmente ignorado em desenvolvimentos semelhantes na área de auto-calibração, constituem uma grande melhoria na robustez e aplicabilidade do método desenvolvido.

7 Resultados

A metodologia de auto-calibração proposta no Capítulo anterior foi implementada e simulada utilizando o MatLab[®]. A fim de garantir um compromisso entre menor sensibilidade ao ruído, porém, sem aumentar exageradamente o tamanho da coleção de amostras a serem utilizadas no processo de auto-calibração, foi determinado empiricamente que com trinta amostras ($n = 30$) é possível obter bons resultados, para uma carga computacional aceitável.

A metodologia de implementação do processo de auto-calibração desenvolvido em uma simulação computacional através do MatLab[®] foi feita de seguinte forma:

1. A fim de gerar os dados a serem utilizados na simulação, foi criada uma dispersão de pontos sobre uma esfera unitária. Estes pontos foram criados através de dispersões uniformes dos parâmetros de inclinação e azimute das coordenadas esféricas. Após isto, os pontos criados foram corrompidos aplicando erros de calibração e ruído ($\mathcal{N}(0, 1 \times 10^{-6})$), gerando amostras que podem ser definidas pela Eqs. (6.1), (6.2) e (6.3).
2. Foram aplicados os filtros de dados definidos na Seção 6.5, de forma a descartar amostras que possam causar erro no processo de auto-calibração. Dentre as amostras viáveis, trinta são sorteadas para efetivamente fazerem parte do procedimento de estimação das variáveis intermediárias.
3. O cômputo da pseudo-inversa de Moore-Penrose foi feita utilizando o comando `pinv`, desta forma, contornando as dificuldades numéricas desta operação (conforme discutido na Seção 6.4).
4. Após a estimação das variáveis intermediárias (α , β , γ , δ , ε , χ , μ , ι e κ), aplica-se as Eqs. (6.13)–(6.21) de forma a encontrar os parâmetros de calibração obtidos pelo processo.

Um ponto importante a ser notado é que, embora as variáveis intermediárias estimadas sejam ótimas sob o critério de mínimos quadrados, não há nenhuma garantia que os

parâmetros de calibração resolvidos a partir delas sejam ótimos sob qualquer critério. Porém, como ficará claro a seguir, os resultados obtidos são bastante favoráveis ao analisar o desempenho do método.

7.1 Erro nos Parâmetros de Calibração

A princípio, pode-se afirmar que o objetivo final de uma metodologia de auto-calibração, ou mesmo qualquer método genérico de calibração, é minimizar os erros dos parâmetros do modelo de medida. A Tab. 7.1 fornece dados comparativos entre o nível de erro presente, quando se utiliza valores nominais provenientes de *datasheets* e o nível de erro médio para os parâmetros calibrados utilizando a metodologia proposta neste trabalho. Para esta análise, foi considerada uma grandeza física fictícia com módulo unitário e que o ruído presente era gaussiano, branco, aditivo, com desvio padrão de 0,001. Esta situação é uma boa aproximação para os valores relativos de sinal e ruído que ocorrem na prática com acelerômetros e magnetômetros.

Tabela 7.1: Valores comuns de desvios dos parâmetros em tríades de sensores, com e sem calibração.

Parâmetros do Sensor	Erro Típico	Erro com Calibração
Sensibilidade	$\pm 5\% \text{ VN}^a$	$\pm 1,5\% \text{ VN}$
Bias	$\pm 5\% \text{ FE}^b$	$\pm 1\% \text{ FE}$
Ortogonalidade	$\pm 1^\circ$	$\pm 0.2^\circ$

^a % VN: porcentagem do valor nominal.

^b % FE: porcentagem do valor de fundo de escala.

Observa-se que, mesmo para o pior caso, que é o erro na sensibilidade, o nível de erro neste parâmetro após a auto-calibração é de apenas 30% da incerteza do valor nominal. A minimização destes desvios dos parâmetros dos sensores é de fundamental importância para garantir um processo de medidas confiável, com mínima amplitude de erros sistemáticos.

As Figs. 7.1, 7.2 e 7.3 indicam com clareza o fato que uma quantidade de amostras maior que trinta não trará nenhum benefício apreciável ao desempenho do processo de auto-calibração, servindo apenas para aumentar seu custo computacional.

Uma análise mais atenta dos resultados apresentados pelas Figs. 7.1, 7.2 e 7.3 revelará que o erro médio na estimação dos parâmetros de calibração é pequeno, mas não tão próximo da nulidade, o que, idealmente, deveria ocorrer de fato. Isto se deve, em sua maior parte, às sucessivas aplicações da aproximação para pequenos ângulos das funções

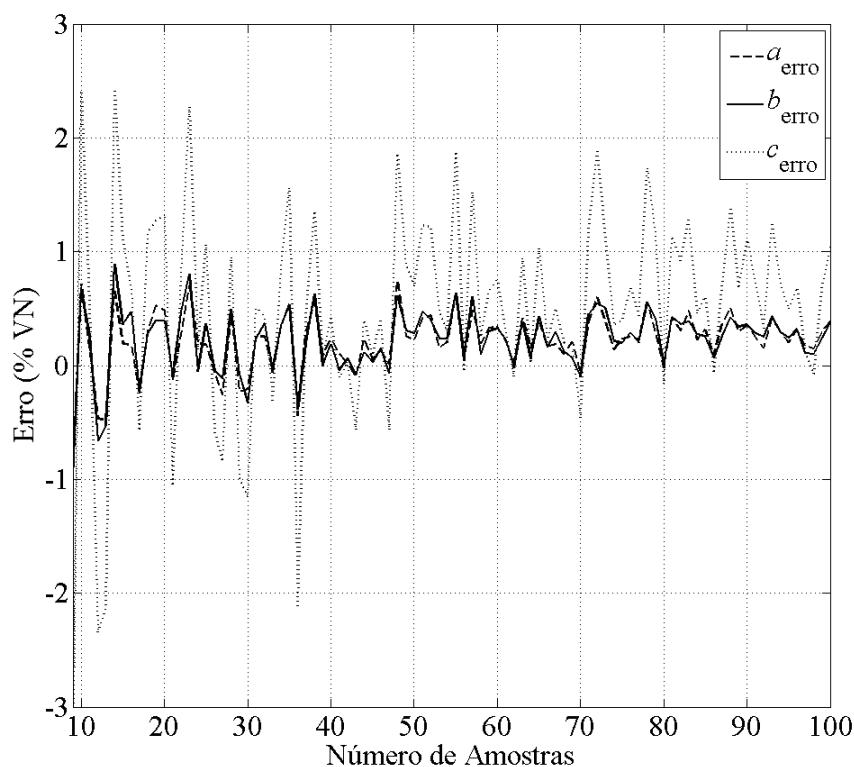


Figura 7.1: Estimação das sensibilidades.

seno e cosseno nas equações para a solução dos parâmetros de calibração a partir das variáveis intermediárias, mostradas em maior detalhe no Apêndice A.

A análise estatística dos parâmetros estimados mostra que eles podem ser considerados variáveis aleatórias gaussianas, com valores médios aproximadamente iguais aos valores verdadeiros. Conforme fica bastante claro nas Figs. 7.1, 7.2 e 7.3, há uma grande variação entre os valores de desvio padrão entre os parâmetros estimados. Isto se deve à construção assimétrica das equações de solução dos parâmetros (Eqs. (6.13)–(6.21)).

7.2 Erro na Direção do Vetor Observado

O conhecimento que a metodologia de auto-calibração minimizou os erros de medida causados por parâmetros descalibrados certamente é o resultado desejado ao se aplicar qualquer metodologia para calibração de sensores. Porém, para que esta melhoria traga alguma informação útil para o sistema de atitude ela deve ser quantificada de maneira conveniente.

Para um sistema de atitude, a informação crucial extraída da grandeza física de refe-

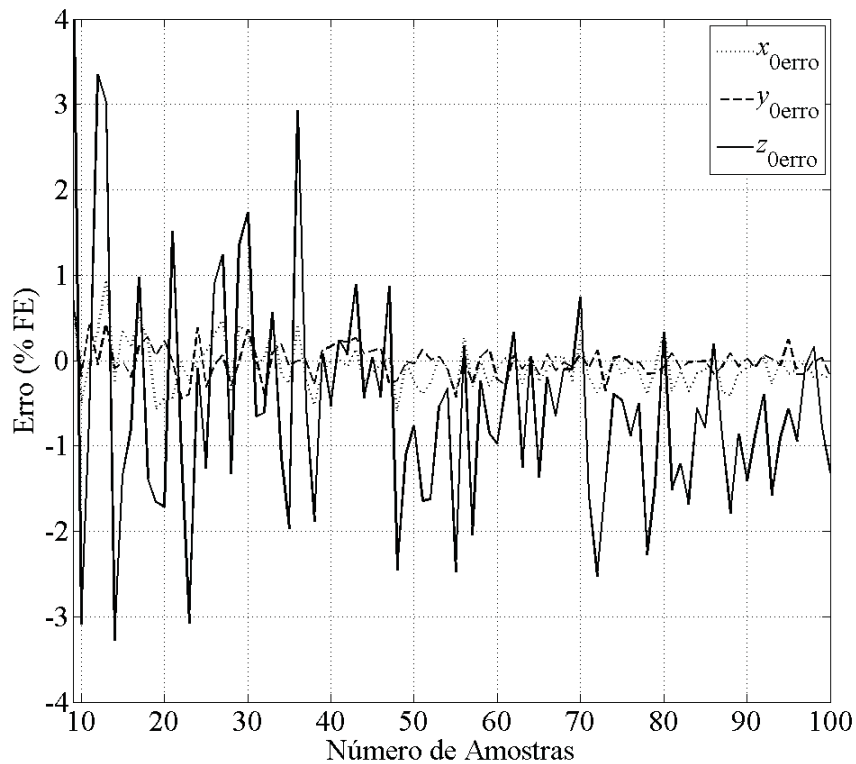


Figura 7.2: Estimação dos *bias*.

rência através dos sensores é a sua direção. Pois é a partir deste dado que é determinada ou estimada a atitude do sistema. Desta forma, para aplicações de atitude, uma forma mais útil e conveniente de expressar o desempenho da calibração seria através da análise do erro na direção da grandeza física observada, para sistemas com e sem calibração, e determinar se houve melhoria significativa.

O trabalho publicado por Frosio, Pedersini e Borghese (2009) apresenta uma forma simples de representar o erro na direção do vetor observado. Esta abordagem será utilizada aqui para quantificar o erro na direção do vetor observado.

A orientação de um sensor no espaço pode ser dada por apenas dois ângulos que definem a inclinação entre dois planos. Um destes planos é o plano ortogonal ao vetor que representa a grandeza física de referência, o outro plano representa o plano sensor, que é não paralelo ao primeiro devido aos erros de calibração. Esta análise é análoga ao funcionamento de um inclinômetro. A análise da Fig. 7.4 facilita sua compreensão.

Como o sensor deve ser insensível à rotações sobre um eixo paralelo à grandeza física que está medindo, os ângulos definidos na Fig. 7.4 podem ser dados por:

$$v = \arcsin \tilde{u}_x, \quad v = \arcsin \tilde{u}_y \quad (7.1)$$

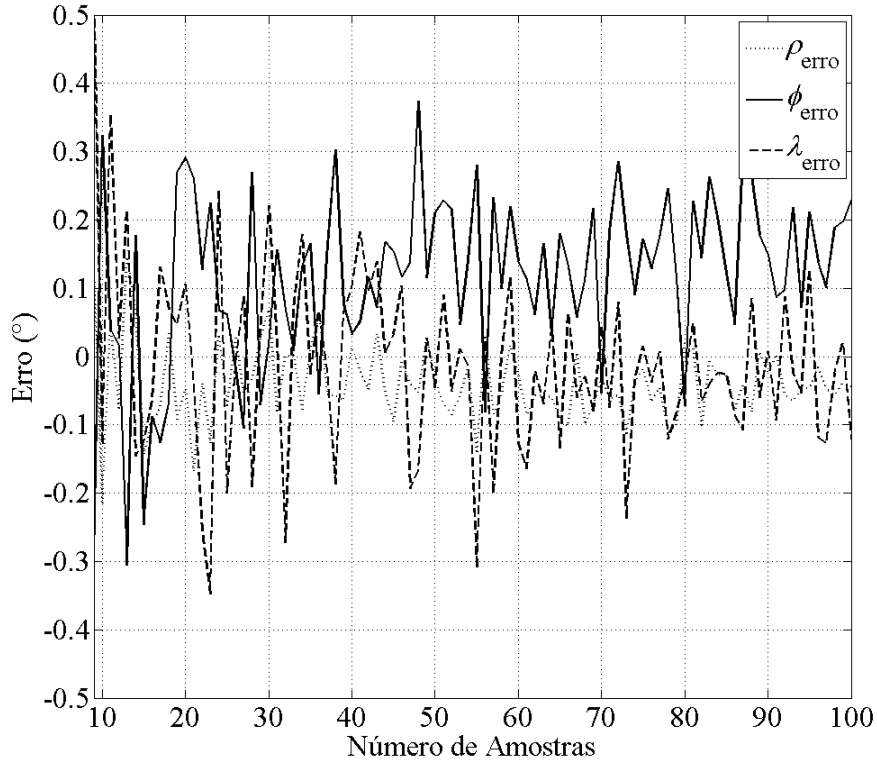


Figura 7.3: Estimação dos desvios de ortogonalidade.

Onde ν e υ são ângulos ortogonais entre si, que definem a inclinação entre o plano normal à grandeza física de referência e o plano normal ao vetor observado.

Embora a Eq. (7.1) possua interpretação direta a partir da Fig. 7.4, ela possui a desvantagem da representação dos ângulos de erro de uma forma dependente dos próprios ângulos de erro. Para contornar esta dificuldade, de forma a representar os ângulos de erro na direção do vetor de forma mais simples e útil, os ângulos ν e υ podem ser dados da seguinte forma:

$$\nu = \arctan \left(\frac{\tilde{u}_x}{\sqrt{\tilde{u}_y^2 + \tilde{u}_z^2}} \right), \quad \upsilon = \arctan \left(\frac{\tilde{u}_y}{\sqrt{\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_z^2}} \right) \quad (7.2)$$

Com a aplicação desta forma de representação do erro na direção do vetor observado em dados simulados para medidas, com e sem calibração, foi possível obter as informações de erro médio do versor e a sua variância (uma vez que \mathbf{u} e $\tilde{\mathbf{u}}$ são considerados normalizados), que são informações pivotais na determinação do erro do sistema de atitude. A Fig. 7.5 ilustra muito claramente a melhoria que se pode esperar do erro na direção do vetor observado.

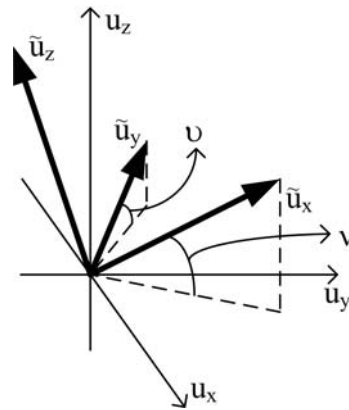


Figura 7.4: Erro na direção do vetor observado.

A análise do resultado apresentado na Fig. 7.5 mostra que, para um sensor calibrado, o erro médio em sua direção pode ser considerado como nulo, e a variância do versor é bastante diminuída. O resultado para sistemas não calibrados mostra como o uso de sensores sem auto-calibração pode ter uma influência negativa na informação de atitude, pois não há sequer um erro médio bem definido e a variância do versor é maior que 5%.

Um resultado interessante, e com potencial aplicação no projeto ou refino de metodologias de auto-calibração, ou mesmo calibração, para sistemas de atitude, é a relação entre o erro angular total na direção do vetor observado, dado por $\sqrt{\Delta v^2 + \Delta v'^2}$, o nível de ruído do sensor, dado por σ_η e o espalhamento angular das amostras utilizadas na calibração sobre seu lugar geométrico, dado por σ_{Dado} . Esta relação é ilustrada pelo gráfico na Fig. 7.6.

Observa-se que mesmo para níveis de ruído mais elevados, se for garantido um bom espalhamento entre as amostras ($> 45^\circ$), o erro total na direção do vetor observado ainda é menor que $0,25^\circ$. Para a região típica de ruído ($0,5 \times 10^{-3} \leq \sigma_\eta \leq 1,5 \times 10^{-3}$), garantindo um bom espalhamento das amostras, a metodologia de auto-calibração proporciona erros totais na direção do vetor observado menores que $0,2^\circ$.

O resultado apresentado na Fig. 7.5 possui grande importância prática, pois através dele é possível determinar uma figura de mérito para o desempenho da calibração em uma conhecida condição de ruído, bem como um conhecimento mínimo da dinâmica do sistema de atitude quando em uso, ou seja, quanto e como ele vai girar, de forma a poder ser determinado um espalhamento amostral típico. Assim, será possível saber de maneira quantitativa, a vantagem que um sistema auto-calibrado terá sobre um sistema sem calibração.

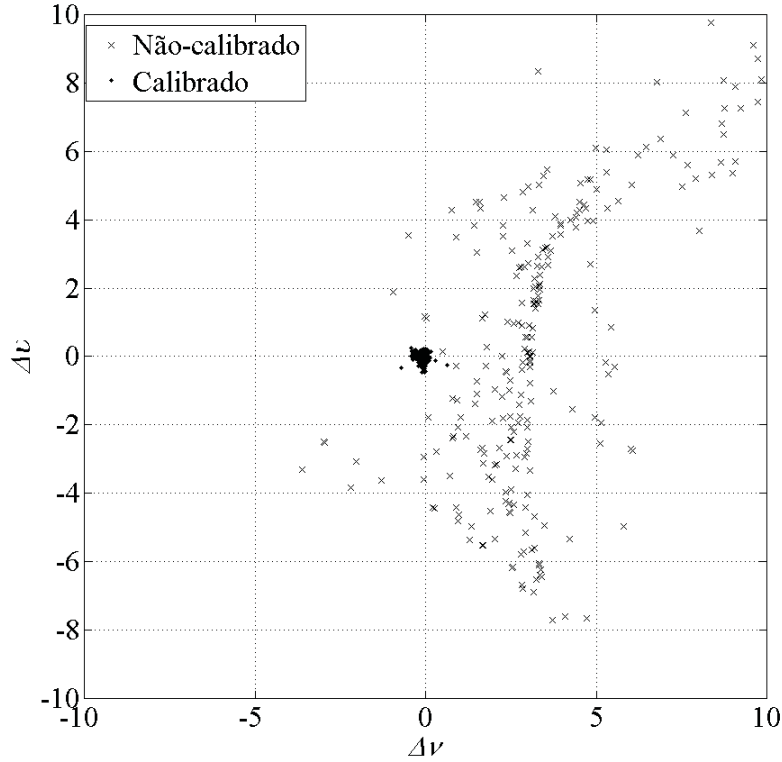


Figura 7.5: Amplitude do erro na direção do vetor observado.

7.3 Erro na Atitude

Derivar uma expressão para o erro na informação de atitude, devido a um erro médio na direção do vetor observado é um problema bastante complexo, uma vez que dependerá da forma com que o erro na direção é definido, da forma escolhida para representação de atitude e do algoritmo de atitude utilizado. Para facilitar a análise, o erro de atitude será definido como um ângulo de erro total, onde uma rotação sobre um eixo não definido, deste ângulo, corrigiria o erro da informação de atitude do sistema descalibrado.

A fim de obter uma expressão aproximada para o erro, deve-se considerar que os ângulos de erro ν e ν sejam pequenos, de forma a satisfazer $\arctan(\sqrt{\nu^2 + \nu^2}) = \sqrt{\nu^2 + \nu^2}$. Assim, pode-se definir um vetor \mathbf{u}_{erro} sendo:

$$\mathbf{u}^{\text{erro}} = \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u} \quad (7.3)$$

Lembrando que \mathbf{u} representa o versor observado na direção correta da grandeza física de referência, $\tilde{\mathbf{u}}$ é o versor observado para o sistema descalibrado e \mathbf{u}^{erro} , que é considerado pequeno, é o vetor de erro, perpendicular a \mathbf{u} e com módulo $\sqrt{\nu^2 + \nu^2}$.

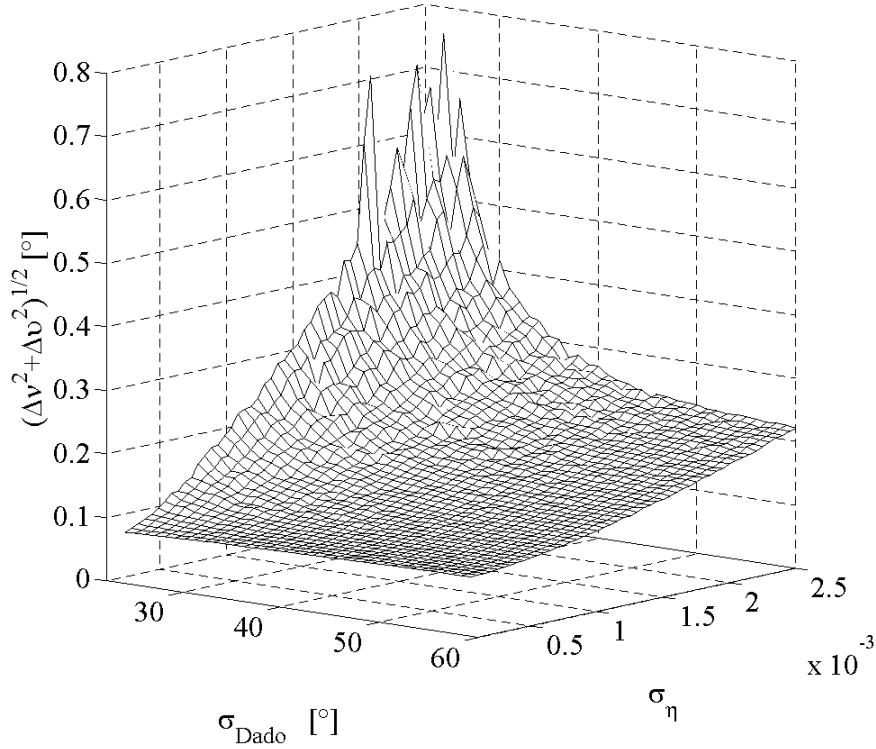


Figura 7.6: Relação entre erro na direção observada, nível de ruído e espalhamento das amostras.

Considerando a situação simples de apenas duas referências de atitude, que consiste com o foco deste trabalho, para as condições de pior caso onde as referências são mutuamente ortogonais e com seus vetores de erro paralelos, pode-se determinar o ângulo de erro total máximo da atitude como:

$$\Theta_{max} = \arctan(|\mathbf{u}_1^{erro}| + |\mathbf{u}_2^{erro}|) \quad (7.4)$$

Onde \mathbf{u}_1^{erro} e \mathbf{u}_2^{erro} são os módulos dos vetores de erro para as referência 1 e 2, respectivamente, e Θ_{max} é o ângulo total máximo de erro da atitude. A Eq. (7.4) pode ser aproximada para:

$$\Theta_{max} \approx |\mathbf{u}_1^{erro}| + |\mathbf{u}_2^{erro}| \quad (7.5)$$

Esta abordagem para a quantificação do erro de atitude tem a desvantagem de não fornecer uma informação prática do erro, porém seu uso é justificado por sua simplicidade, independência da forma de representação de atitude e por ser apenas uma figura de mérito para fornecer um valor limitante aproximado do erro na orientação de um sistema de atitude descalibrado.

Os resultados expostos na Fig. 7.5 também mostram como a precisão da atitude poder ser melhorada, uma vez que a variância de \mathbf{v} e \mathbf{v} refletem a variância do versor de observação (σ). Esta variância é um valor determinante na covariância da atitude obtida, que é a informação da sua incerteza, como foi discutido no Cap. 3, em especial para o algoritmo TRIAD, nas Eqs. (3.21) e (3.22), e para o algoritmo QUEST, nas Eqs. (3.53), (3.54) e (3.55).

8 Conclusão

Os resultados apresentados revelam a eficácia de metodologia de auto-calibração desenvolvida. Embora o processamento adicional necessário para implementar os filtros de amostras definidos na Seção 6.5, mais a estimação de mínimos quadrados das nove variáveis intermediárias com trinta amostras e a solução algébrica dos parâmetros de calibração possa ser considerado, no mínimo, significativo, é possível concluir que um sistema de atitude descalibrado pode ter sua utilidade demasiadamente diminuída.

Os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos através de simulações computacionais utilizando o *software* MatLab[®], há pouca razão para acreditar que o desempenho da metodologia sofra diferença apreciável quando implementado diretamente em *hardware*, em um protótipo para testes, desde que se tenha os cuidados necessários para o cômputo da pseudo-inversa na estimação das variáveis intermediárias, como apontado na Seção 6.4. Este é o ponto onde a simulação mais difere do que pode vir a ser implementado na prática, uma vez que o comando macro do MatLab[®] `pinv` já contorna os problemas no cálculo da pseudo-inversa, algo que deverá ser implementado em um nível de programação mais baixo no sistema físico.

Foi mostrado como a descalibração de uma tríade de sensores pode interferir na determinação da direção do vetor que representa a grandeza física de referência, introduzido um erro médio não nulo na direção observada. Isto consiste de um erro sistemático no processo de determinação, ou estimação, de atitude que deve ser evitado a todo custo, pois prejudica a acurácia da informação de atitude obtida. Foi derivada uma equação aproximada (Eq. (7.5)), no intuito de quantificar o erro de atitude máximo que pode ocorrer, considerando as condições de pior caso.

Um efeito secundário do processo de calibração foi a minimização da variância na direção do vetor observado. Isto significa uma menor variância do versor utilizado nos algoritmos de atitude, causando uma menor covariância da atitude obtida. Maiores desenvolvimentos na quantificação desta melhoria na precisão da informação de atitude não foram abordados por ser uma característica altamente dependente do algoritmo de atitude utilizado e da própria atitude, fugindo desta forma, do escopo deste trabalho.

Um dos pontos mais importantes desenvolvido neste trabalho, à parte da metodologia de auto-calibração em si, foi a determinação de uma medida de desempenho para sistemas de atitude auto-calibrados, apresentada na Fig. 7.6. Nesta figura, fica clara a característica hiperbólica entre o erro angular total na direção do vetor observado e a razão entre espalhamento geométrico das amostras e nível de ruído característico. Este resultado permite prever, para este método de auto-calibração, a eficiência da própria rotina de auto-calibração e em quanto ela pode refinar a informação de atitude, sabendo apenas a característica de ruído dos sensores utilizados e conhecendo a dinâmica do sistema de atitude no seu ambiente de aplicação.

Um ponto bastante nebuloso em trabalhos acadêmicos na área de calibração são das condições da obtenção de dados para se realizar os testes computacionais da metodologia desenvolvida. A experiência mostrou que a aplicação indiscriminada da metodologia de auto-calibração, utilizando amostras escolhidas sob nenhum critério, geralmente leva à estimação de parâmetros de calibração com maior erro que o uso de valores típicos de *datasheet*, não sendo rara uma falha geral no processo de auto-calibração.

Por esta razão o processo de filtragem de amostras viáveis à auto-calibração, definidos na Seção 6.5, por si só, também é um resultado importante. Sua utilização garante um melhor desempenho e uma maior robustez no processo de estimação das variáveis intermediárias. Sem a aplicação de cautelas similares, foi observado que qualquer metodologia de auto-calibração proposta possui de pouca a nenhuma utilidade prática real.

Por fim, foi realizado o desenvolvimento completo de uma metodologia de auto-calibração para tríades de sensores, especificamente acelerômetros e magnetômetros MEMS triaxiais, em aplicações de atitude. O desenvolvimento da metodologia teve por base as características físicas das referências de atitude utilizadas, que foram o campo gravitacional terrestre e o campo geomagnético, que possuem modelos bastante precisos aplicáveis em toda a superfície terrestre e baixas altitudes. Foi tomado um cuidado especial nas condições de aplicabilidade do método, com medidas para corrigir ou contornar todas as fontes de falhas identificáveis, tornando o método desenvolvido bastante confiável.

8.1 Proposta

Como pode ser observado ao final da leitura deste texto de qualificação, o conteúdo apresentado no Cap. 3, em especial o estudo dos algoritmos de atitude, parece estar fora de contexto. Isto é justificado pelo fato que será realizado um ensaio, mesmo que

simulado, do efeito da calibração sobre a qualidade da atitude obtida através dos TRIAD e do QUEST, para comparação, uma vez que estes dois algoritmos são os de uso mais difundido.

Outra questão bastante pertinente que pode ser levantada é o porquê do uso apenas de resultados de simulação computacional em detrimento de uma tentativa de implementar a rotina de auto-calibração em *hardware*. Este trabalho, até o momento, é um estudo da aplicabilidade e do desempenho da metodologia de auto-calibração proposta. Estes estudos podem ser feitos de maneira muito mais ampla através do controle das variáveis que a simulação computacional proporciona. Como exemplo, fazer uma análise para diferentes níveis de ruído é bastante simples computacionalmente, porém, exigiria diversos *hardwares* com diferentes características de ruído, para que a mesma análise fosse possível na prática.

Referências Bibliográficas

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. Attitude-independent magnetometer-bias determination: A survey. *The Journal of Astronautical Sciences*, v. 50, n. 4, p. 453–475, Outubro-Dezembro 2002.

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. Complete linear attitude-independent magnetometer calibration. *The Journal of Astronautical Sciences*, v. 50, n. 4, p. 477–490, Outubro-Dezembro 2002.

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. TWOSTEP: A fast robust algorithm for attitude-independent magnetometer-bias determination. *The Journal of Astronautical Sciences*, v. 50, n. 4, p. 433–451, Outubro-Dezembro 2002.

ALONSO, R.; SHUSTER, M. D. Centering and observability in attitude-independent magnetometer-bias determination. *The Journal of Astronautical Sciences*, v. 51, n. 2, p. 133–141, Abril-Junho 2003.

BLACK, H. D. A passive system for determining the attitude of a satellite. *AIAA Journal*, v. 2, n. 7, p. 1350–1351, Julho 1964.

DAVENPORT, P. B. *A Vector Approach to the Algebra of Rotations with Applications*. Goddard Space Flight Center, Agosto 1968.

FOSTER, C. C.; ELKAIM, G. H. Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 44, n. 3, p. 1070–1078, Julho 2008.

FROSIO, I.; PEDERSINI, F.; BORGHESE, N. A. Autocalibration of MEMS accelerometers. *IEEE Transactions Instrumentation and Measurement*, v. 58, n. 6, p. 2034–2041, Junho 2009.

GEBRE-EGZIABHER, D. et al. A non-linear, two-step estimation algorithm for calibrating solid-state strapdown magnetometers. In: *8th International St. Petersburg Conference on Navigational Systems*. St. Petersburg: [s.n.], 2001.

GRANZIERA JR, F. *Simulação e Implementação de um Determinador de Atitude em Tempo Real Utilizando Sensores Microfabricados*. 284 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

HAYASHI, F. *Econometrics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2000.

KUIPERS, J. B. *Quaternions and Rotation Sequences: A primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999.

- LAWRENCE, A. *Modern Inertial Technology: Navigation, guidance, and control*. Segunda edição. New York: Springer, 1998.
- LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 5, n. 5, p. 417–429, Setembro-Outubro 1982.
- LERNER, G. M.; SHUSTER, M. D. Magnetometer bias determination and attitude determination for near-earth spacecraft. In: *AIAA Guidance and Control Conference*. Boulder, Colorado: AIAA, 1979.
- MARKLEY, F. L. Parametrization of the attitude. In: _____. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1978. cap. 12.1, p. 410–435.
- MARKLEY, F. L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. 36, n. 3, p. 245–258, Julho-Setembro 1988.
- MARKLEY, F. L. Attitude determination using vector observations: A fast optimal matrix algorithm. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. 41, n. 2, p. 261–280, Abril-Junho 1993.
- MARKLEY, F. L.; MORTARI, D. Quaternion attitude estimation using vector observations. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. 48, n. 2-3, p. 359–380, Abril-Setembro 2000.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Terceira edição. New York: John Wiley & Sons, 2003.
- MORTARI, D. EULER-2 e EULER- n algorithms for attitude determination from vector observations. In: *IFAC Conference*. Beijing, China: Elsevier, 1995.
- MORTARI, D. ESOQ: A closed-form solution to the wahba problem. *Journal of the Astronautical Sciences*, v. 45, n. 2, p. 195–204, 1997.
- MORTARI, D. Second estimator of the optimal quaternion. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 23, n. 5, p. 885–888, Setembro-Outubro 2000.
- NATIONAL GEOSPATIAL-INTELLIGENCE AGENCY (US). *Earth Gravitational Model EGM2008*. Disponível em: <<http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/index.html>>. Acesso em: 17 ago. 2010.
- NATIONAL GEOSPATIAL-INTELLIGENCE AGENCY (US) AND DEFENCE GEOGRAPHIC CENTRE (UK). *The World Magnetic Model WMM2010*. Disponível em: <<http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/DoDWMM.shtml>>. Acesso em: 17 ago. 2010.
- PAPOULIS, A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Terceira edição. New York: McGraw-Hill, 1991.
- RAO, C. R.; MITRA, S. K. Generalized inverse of a matrix and its applications. In: CAM, L. M. L.; NEYMAN, J.; SCOTT, E. L. (Ed.). *6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, CA: [s.n.], 1970–1971. p. 601–620.

- SHINOZAKI, N.; SIBUYA, M.; TANABE, K. Numerical algorithms for the moore-penrose inverse of a matrix: Direct methods. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, v. 24, n. 1, p. 193–203, 1972.
- SHUSTER, M. D. Approximate algorithms for fast optimal attitude computation. In: *AIAA Guidance and Control Conference*. Palo Alto, California: AIAA, 1978.
- SHUSTER, M. D. Quest, a longa história de um algoritmo rápido. In: *Primeiro Simpósio Brasileiro de Tecnologia Aeroespacial*. São José dos Campos, SP: [s.n.], 1990.
- SHUSTER, M. D. A survey of attitude representations. *The Journal of the Astronautical Sciences*, v. 41, n. 4, p. 439–517, Outubro-Dezembro 1993.
- SHUSTER, M. D.; OH, S. D. Three-axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*, v. 4, n. 1, p. 70–77, Janeiro-Fevereiro 1981.
- STUELPNAGEL, J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, v. 6, n. 4, p. 422–430, Outubro 1964.
- TANYGIN, S.; SHUSTER, M. D. The many triad algorithms. In: *17th Space Flight Mechanics Meeting*. Sedona, Arizona: AAS, 2007.
- TORMENA JR, O. *Desenvolvimento de um Determinador de Atitude: Uma revisão sobre fundamentos teóricos e práticos*. 120 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.
- WAHBA, G. Problem 65-1: A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM Review*, v. 7, n. 3, p. 409, Julho 1965.

APÊNDICE A -- Equações Expandidas

O desenvolvimento completo das equações no Cap. 6 é bastante extenso, e não traz nenhuma informação essencial à continuidade da leitura do texto. Por esta razão, no intuito de produzir uma documentação mais completa da metodologia desenvolvida, e por sua utilidade como referência para uma eventual verificação dos resultados obtidos, este Apêndice contém o desenvolvimento passo a passo das equações do modelo de calibração. Especificamente, este Apêndice expõe as formas expandidas das Eqs. (6.8) e (6.9), bem como o desenvolvimento necessário para obter as Eqs. (6.13)–(6.21).

A.1 Forma Expandida da Eq. (6.8)

A Eq. (6.8) será repetida aqui para uma melhor referência:

$$A\tilde{u}_x^2 + B\tilde{u}_x\tilde{u}_y + C\tilde{u}_x\tilde{u}_z + D\tilde{u}_y^2 + E\tilde{u}_y\tilde{u}_z + F\tilde{u}_z^2 + G\tilde{u}_x + H\tilde{u}_y + I\tilde{u}_z + J = 0 \quad (\text{A.1})$$

Onde as variáveis intermediárias A–J podem ser escritas como:

$$A = \frac{\cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \sin^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda + \cos^2 \rho \sin^2 \phi \cos^2 \lambda}{a^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots$$

$$\dots \frac{+ \sin^2 \rho \cos^2 \phi \sin^2 \lambda - 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda}{a^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.2})$$

$$B = \frac{2(\cos \rho \sin \phi \sin \lambda - \sin \rho \cos \phi)}{ab \cos^2 \rho \cos \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.3})$$

$$C = \frac{2(\sin \rho \cos \phi \sin \lambda - \cos \rho \sin \phi \cos \lambda)}{ac \cos \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.4})$$

$$D = \frac{1}{b^2 \cos^2 \rho \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.5})$$

$$E = -\frac{2 \sin \lambda}{bc \cos \rho \cos \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.6})$$

$$F = \frac{1}{c^2 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} G = & \frac{2bcx_0 (\cos^2 \rho \cos^2 \phi + 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda \dots}{a^2 bc \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \\ & \frac{\dots - \cos^2 \phi - \cos^2 \rho \cos^2 \lambda)}{a^2 bc \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+2acy_0 (\sin \rho \cos^2 \phi - \cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda)}{a^2 bc \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+2abz_0 (\cos^2 \rho \sin \phi \cos \lambda - \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \lambda)}{a^2 bc \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$H = \frac{2(bc x_0 (\sin \rho \cos \phi - \cos \rho \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda) - ac y_0 \cos \phi + ab z_0 \cos \rho \sin \lambda)}{ab^2 c \cos^2 \rho \cos \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.9})$$

$$I = \frac{2(bc x_0 (\cos \rho \sin \phi \cos \lambda - \sin \rho \cos \phi \sin \lambda) + ac y_0 \cos \phi \sin \lambda - ab z_0 \cos \rho)}{abc^2 \cos \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} J = & \frac{b^2 c^2 x_0^2 (\cos^2 \rho \cos^2 \lambda - 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda \dots}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \\ & \frac{\dots - \cos^2 \rho \cos^2 \phi + \cos^2 \phi)}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+2abc^2 x_0 y_0 (\cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda - \sin \rho \cos^2 \phi)}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+2ab^2 c x_0 z_0 (\cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \lambda - \cos^2 \rho \sin \phi \cos \lambda)}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+a^2 c^2 y_0^2 \cos^2 \phi - 2a^2 bc y_0 z_0 \cos \rho \cos \phi \sin \lambda}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \\ & \dots \frac{+a^2 b^2 z_0^2 \cos^2 \rho - |\mathbf{u}|^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda}{a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Observa-se que as Eqs. (A.2)–(A.11) possuem o mesmo denominador. Esta é uma situação proposital, pois este fato minimizará o trabalho algébrico da Eq. (A.12), na

próxima Seção.

A.2 Forma Expandida e Simplificada da Eq. (6.9)

Redefinindo as variáveis intermediárias como indicado na Eq. (6.12), pode-se reescrever a Eq. (6.9) da seguinte forma:

$$\alpha \frac{\tilde{u}_x^2}{\tilde{u}_z^2} + \beta \frac{\tilde{u}_x \tilde{u}_y}{\tilde{u}_z^2} + \gamma \frac{\tilde{u}_x \tilde{u}_z}{\tilde{u}_z^2} + \delta \frac{\tilde{u}_y^2}{\tilde{u}_z^2} + \varepsilon \frac{\tilde{u}_y \tilde{u}_z}{\tilde{u}_z^2} + \chi \frac{\tilde{u}_x}{\tilde{u}_z^2} + \mu \frac{\tilde{u}_y}{\tilde{u}_z^2} + \iota \frac{\tilde{u}_z}{\tilde{u}_z^2} + \kappa \frac{1}{\tilde{u}_z^2} = 1 \quad (\text{A.12})$$

Onde α , β , γ , δ , ε , χ , μ , ι e κ podem ser definidos, após simplificações algébricas e trigonométricas, como:

$$\alpha = \frac{c^2 (\cos^2 \rho \cos^2 \phi + 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda - \cos^2 \rho \cos^2 \lambda - \cos^2 \phi)}{a^2 \cos^2 \rho} \quad (\text{A.13})$$

$$\beta = \frac{2c^2 (\sin \rho \cos^2 \phi - \cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda)}{ab \cos^2 \rho} \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma = \frac{2c (\cos \rho \sin \phi \cos \lambda - \sin \rho \cos \phi \sin \lambda)}{a \cos \rho} \quad (\text{A.15})$$

$$\delta = -\frac{c^2 \cos^2 \phi}{b^2 \cos^2 \rho} \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon = \frac{2c \cos \phi \sin \lambda}{b \cos \rho} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{2bc^2 x_0 (\cos^2 \phi + \cos^2 \rho \cos^2 \lambda - \cos^2 \rho \cos^2 \phi \dots}{a^2 b \cos^2 \rho} \\ & \frac{\dots - 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda)}{a^2 b \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+ 2ac^2 y_0 (\cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda - \sin \rho \cos^2 \phi)}{a^2 b \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+ 2abc z_0 (\cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \lambda - \cos^2 \rho \sin \phi \cos \lambda)}{a^2 b \cos^2 \rho} \dots \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{2bc^2x_0 (\cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda - \sin \rho \cos^2 \phi)}{ab^2 \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+2ac^2y_0 \cos^2 \phi - 2abcz_0 \cos \rho \cos \phi \sin \lambda}{ab^2 \cos^2 \rho} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\iota = \frac{2(bc x_0 (\sin \rho \cos \phi \sin \lambda - \cos \rho \sin \phi \cos \lambda) - ac y_0 \cos \phi \sin \lambda + ab z_0 \cos \rho)}{ab \cos \rho} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{b^2 c^2 x_0^2 (\cos^2 \rho \cos^2 \phi + 2 \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda \dots}{a^2 b^2 \cos^2 \rho} \\ & \dots \frac{- \cos^2 \rho \cos^2 \lambda - \cos^2 \phi)}{a^2 b^2 \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+2abc^2 x_0 y_0 (\sin \rho \cos^2 \phi - \cos \rho \cos \phi \sin \phi \cos \lambda \sin \lambda)}{a^2 b^2 \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+2ab^2 c x_0 z_0 (\cos^2 \rho \sin \phi \cos \lambda - \cos \rho \sin \rho \cos \phi \sin \lambda) - ac^2 y_0^2 \cos^2 \phi}{a^2 b^2 \cos^2 \rho} \dots \\ & \dots \frac{+2a^2 bc y_0 z_0 \cos \rho \cos \phi \sin \lambda - a^2 b^2 z_0^2 \cos^2 \rho + |\mathbf{u}|^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2 \rho \cos^2 \phi \cos^2 \lambda}{a^2 b^2 \cos^2 \rho} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A.3 Parâmetros de Calibração

Considerando que os desvios de ortogonalidade da tríade ρ , ϕ e λ são pequenos (i.e. $\cos \rho \approx 1$ e $\sin \rho \approx \rho$, tendo ϕ e λ comportamento análogo), é possível reescrever as Eqs. (A.13)–(A.21) utilizando esta aproximação, obtendo:

$$\alpha = \frac{c^2 (2\rho\phi\lambda - 1)}{a^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\beta = \frac{2c^2 (\rho - \phi\lambda)}{ab} \quad (\text{A.23})$$

$$\gamma = \frac{2c (\phi - \rho\lambda)}{a} \quad (\text{A.24})$$

$$\delta = -\frac{c^2}{b^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\varepsilon = \frac{2c\lambda}{b} \quad (\text{A.26})$$

$$\chi = \frac{2(bc^2x_0(1-2\rho\phi\lambda) + ac^2y_0(\phi\lambda - \rho) + abc z_0(\rho\lambda - \phi))}{a^2b} \quad (\text{A.27})$$

$$\mu = \frac{2(bc^2x_0(\phi\lambda - \rho) + ac^2y_0 - abc z_0\lambda)}{ab^2} \quad (\text{A.28})$$

$$\iota = \frac{2(bc x_0(\rho\lambda - \phi) - ac y_0\lambda + ab z_0)}{ab} \quad (\text{A.29})$$

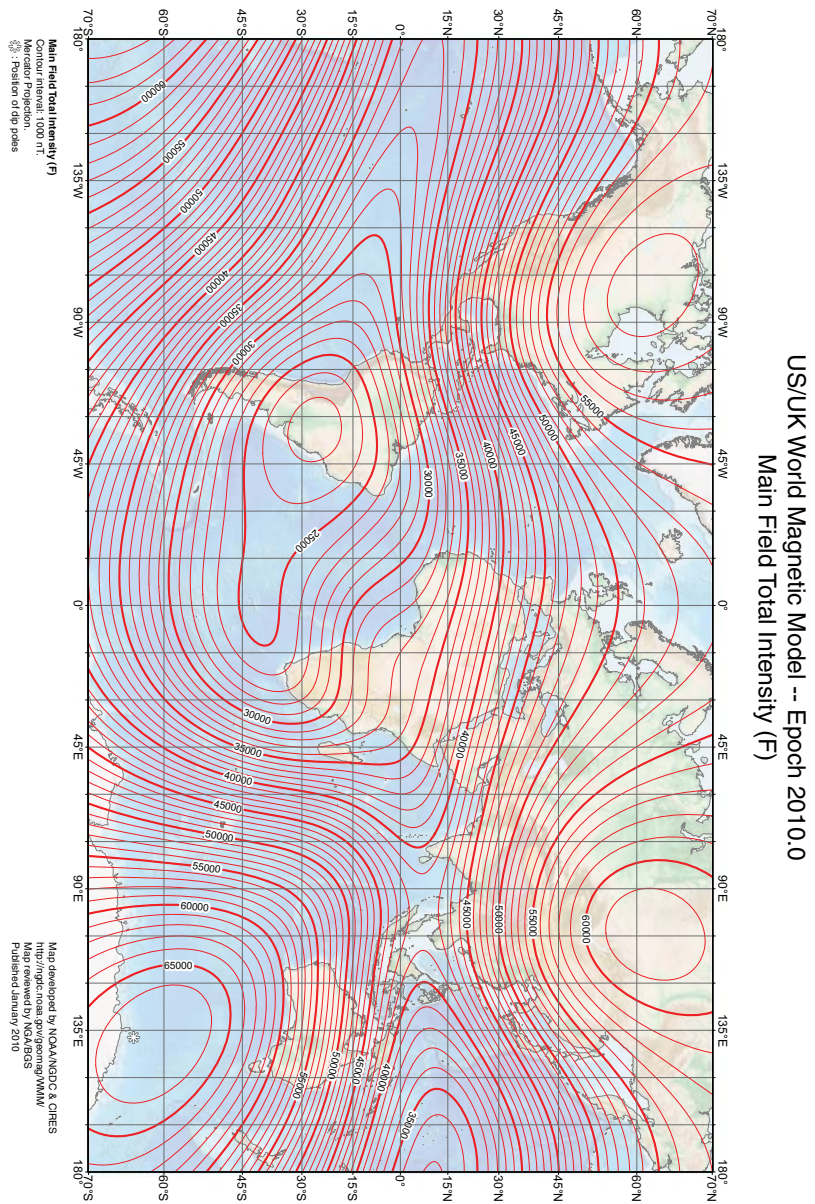
$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{b^2c^2x_0^2(2\rho\phi\lambda - 1) + 2abc^2x_0y_0(\rho - \phi\lambda) + 2ab^2cx_0z_0(\phi - \rho\lambda)}{a^2b^2} \dots \\ & \dots \frac{-a^2c^2y_0^2 + 2a^2bcy_0z_0\lambda - a^2b^2z_0^2 + |\mathbf{u}|^2 a^2b^2c^2}{a^2b^2} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Verifica-se que as Eqs. (A.22)–(A.30) são muito mais simples que as Eqs. (A.13)–(A.21), minimizando o trabalho algébrico necessário para resolver os parâmetros de calibração a , b , c , x_0 , y_0 , z_0 , ρ , ϕ , e λ a partir de α , β , γ , δ , ε , χ , μ , ι , e κ .

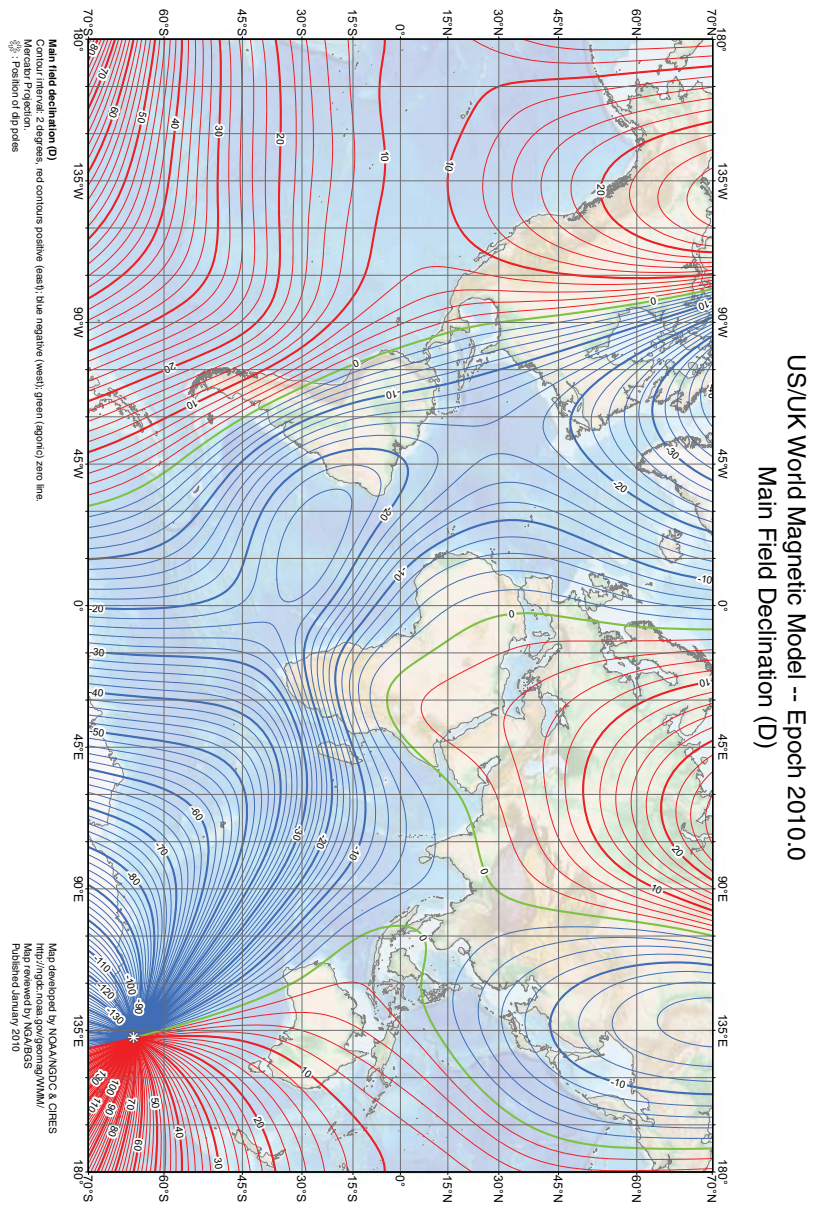
As Eqs. (6.13)–(6.21) podem ser obtidas a partir das Eqs. (A.22)–(A.30) através de um trabalhoso procedimento algébrico, cuja solução é não-trivial devido à não-linearidade das equações¹. Segue uma breve explicação dos passos utilizados para a solução do sistema: primeiramente deve ser identificado que é possível resolver λ a partir das Eqs. (A.25) e (A.26); um sistema linear 3×3 pode ser obtido a partir das Eqs. (A.27), (A.28) e (A.29), substituindo os ângulos em parênteses em suas expressões dadas nas Eqs. (A.22), (A.23) e (A.24), da solução deste sistema, encontram-se os valores de *bias*; tendo os valores de *bias*, é possível resolver a Eq. (A.30) e encontrar c , do qual a aplicação da Eq. (A.25) fornece a solução de b ; por fim as Eqs. (A.22), (A.23) e (A.24) forma um sistema não-linear para a , ρ e ϕ , sendo resolvido por substituição.

¹O autor gostaria de deixar claro que a solução deste sistema de equações não-lineares também é creditada ao Prof. Francisco Granziera Jr., que trabalhou em conjunto com o autor no início deste trabalho.

ANEXO A -- Intensidade do Campo Geomagnético



ANEXO B -- Declinação do Campo Geomagnético



ANEXO C -- Inclinação do Campo Geomagnético

