Universidade Estadual de Londrina

MARIANY LAYNE DE SOUZA

TEORIA APOE E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: UM OLHAR PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Londrina
2020

MARIANY LAYNE DE SOUZA

TEORIA APOE E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: UM OLHAR PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientador: Profª. Drª. Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Souza, Mariany Layne de.

Teoria APOE e Teoria Antropológica do Didático : um olhar para o ensino de Álgebra Linear na formação inicial de professores de matemática / Mariany Layne de Souza. - Londrina, 2020.

163 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.

Inclui bibliografia.

1. Licenciatura em Matemática - Tese. 2. Álgebra Linear - Tese. 3. Teoria APOE - Tese. 4. Teoria Antropológica do Didático - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

MARIANY LAYNE DE SOUZA

TEORIA APOE E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: UM OLHAR PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Profª. Drª. Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profª. Drª. Barbara Lutaif Bianchini
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

____

Prof. Dr. Henrique Rizek Elias
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

____

Profª. Drª. Marlene Alves Dias
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP

____

Profª. Drª. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Londrina, 01 de julho de 2020.

Aos meus pais, João Marcos e Vilma, com todo amor!

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profa. Dra. Angela Marta, por quem sinto profunda admiração. Agradeço pela confiança em mim depositada, pelo carinho e pelo incentivo ao longo dessa trajetória.

Aos membros da banca, Professoras Doutoras Barbara Lutaif Bianchini, Marlene Alves Dias e Simone Luccas e ao Professor Doutor Henrique Rizek Elias, pelas valiosas contribuições dadas a esse trabalho. Gostaria de agradecer, especialmente, à Profa. Dra. Simone, que na graduação em Licenciatura em Matemática acreditou em mim e me incentivou a seguir o caminho da pesquisa, sendo minha primeira orientadora.

Aos licenciandos em Matemática por aceitarem fazer parte desta pesquisa.

Aos amigos e às amigas do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat – UEL) por todas as contribuições e reflexões trazidas ao meu trabalho.

Aos meus queridos amigos, Keila e Marcelo, pelo apoio, incentivo, trocas de ideias e sugestões, mas acima de tudo pela amizade demonstrada ao longo desses anos!

Aos meus pais, João Marcos e Vilma, por todo apoio, incentivo, compreensão e amor. Certamente, sem o apoio deles não teria chego tão longe.

À minha irmã, Jacqueline, por todo apoio, compreensão, amor e por ser sempre a minha melhor amiga!

Ao meu companheiro, Lucas, pela paciência, respeito, amor e por estar sempre ao meu lado, apoiando as minhas escolhas!

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de uma forma ou de outra para a realização deste trabalho.

A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.

Paulo Freire

SOUZA, Mariany Layne de. **Teoria APOE e teoria antropológica do didático:** um olhar para o ensino de álgebra linear na formação inicial de professores de matemática. 2020. 163 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Esta pesquisa, de natureza qualitativa, tem por objetivo desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática. Para isso, propõe-se uma reestruturação do diálogo entre a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático, levando em consideração aspectos relacionados ao conhecimento matemático para o ensino e o conceito Sistema de Equações Lineares. Para atender o objetivo geral deste trabalho, o diálogo proposto nesta pesquisa apresenta os seguintes passos: identificar as referências básicas adotadas na disciplina; analisar um livro didático de Álgebra Linear presente na ementa do curso a ser pesquisado, olhando para as praxeologias e para as tarefas propostas com base na decomposição genética; desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores e analisar as produções escritas, seguindo a decomposição genética. Sendo assim, aplicou-se o Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores a uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública localizada no norte do estado do Paraná. Essa aplicação foi realizada em quatro encontros com duração de duas horas aulas, nos quais se discutiu a questão geratriz do Percurso de Estudo e Pesquisa "como desenvolver o estudo de Sistema de Equações no Ensino Médio?" e como resultado final da aplicação os licenciandos produziram um plano de aula. Por meio da análise dos dados obtidos na aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores, constatou-se a mobilização/desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino, dentre eles: o conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do conteúdo e do ensino; o conhecimento do conteúdo e dos estudantes e o conhecimento do conteúdo no horizonte. Evidenciou-se, por meio da análise, elementos do diálogo proposto, no que tange aos momentos didáticos do ciclo de Atividade, discussão em Classe e Exercícios. Diante do exposto, almeja-se que o diálogo sugerido contribua para reflexões a respeito da disciplina de Álgebra Linear na formação inicial de professores.

Palavras-chave: álgebra linear; licenciatura em matemática; teoria APOE; teoria antropológica do didático; educação matemática.

SOUZA, Mariany Layne de. **APOS theory and anthropological theory of didactics**: a look at the teaching of linear algebra in the initial training of mathematics teachers. 2020. 163 f. Thesys (Doctorate in Science Teaching and Mathematical Education) ‑ States University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This qualitative research aims to develop a Study and Research Course, using the APOS Theory and the Anthropological Theory of Didactics, for teaching Linear Algebra in the initial training of Mathematics teachers. To this end, it is proposed to restructure the dialogue between the APOS Theory and the Anthropological Theory of Didactics, taking into account aspects related to mathematical knowledge for teaching and the concept of Linear Equations System. To meet the general objective of this work, the dialogue proposed in this research presents the following steps: to identify the basic references adopted in the discipline; analyze a Linear Algebra textbook present on the course menu to be researched, looking at the praxeologies and the proposed tasks based on genetic decomposition; develop a Study and Research Pathway for teacher training and analyze written productions, following genetic decomposition. Therefore, the Study and Research Course for teacher training was applied to a fourth-year class in a Mathematics Degree course at a public university located in the north of the state of Paraná. This application was carried out in four meetings lasting two hours, in which the generative question of the Study and Research Course was discussed "how to develop the study of System of Equations in High School?" and as a final result of the application the graduates produced a lesson plan. Through the analysis of the data obtained in the application of the Study and Research Pathway for teacher training, it was found the mobilization / development of mathematical knowledge for teaching, among them: the specialized knowledge of the content; knowledge of content and teaching; knowledge of contente and students and knowledge of content on the horizon. Through the analysis, elements of the proposed dialogue became evident, with regard to the didactic moments of the Activity, Class discussion and Exercises cycle. In view of the above, it is hoped that the suggested dialogue will contribute to reflections on the subject of Linear Algebra in the initial training of teachers.

Keywords: linear álgebra; degree in mathematics; APOS theory; anthropological theory of didactics; mathematical education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As preocupações com o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear motivam o estudo de vários pesquisadores tanto nacionais, como Silva, Alves e Almeida (2018), quanto internacionais, como Harel (2018). A origem dessa preocupação pode estar relacionada à importância que a Álgebra Linear tem, não apenas para a Matemática como também para outras áreas do conhecimento e essa preocupação nos motiva a realizar este estudo.

Desse modo, antes de tratarmos, especificamente, da pesquisa que desenvolvemos, consideramos importante apresentar alguns detalhes, como as escolhas tomadas e os aspectos referentes ao caminho percorrido até aqui.

No ano de 2014 lecionei[1] a disciplina de Álgebra Linear em uma universidade pública localizada no norte do estado do Paraná e iniciei o mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Londrina. A partir desse momento, comecei meus estudos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear, que também encontraram uma motivação pessoal, despertada pelo estudo dos conceitos dessa disciplina, que me fascinam até hoje! Todavia, cabe ressaltar que em minha dissertação (SOUZA, 2016) o foco estava direcionado à aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear.

Com essas motivações e levando em consideração o fato de que na dissertação investigamos questões relacionadas à aprendizagem, buscamos ampliar nosso estudo, agora, voltando-nos também ao processo de ensino.

A questão do ensino sempre foi uma preocupação minha, uma vez que buscava em minhas aulas tecer relações que favorecessem a construção dos conceitos pelos estudantes, além de utilizar diferentes metodologias de ensino. Porém, com os estudos do mestrado, as discussões nas disciplinas obrigatórias e no Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat) comecei a olhar com outros “óculos” a questão das disciplinas matemáticas abordadas na Licenciatura em Matemática, questionando-me se elas deveriam ser abordadas do mesmo modo que em um curso de Bacharelado em Matemática ou em um curso de alguma Engenharia, por exemplo.

---

[1] Nesse primeiro momento os comentários transitarão ora usando a primeira pessoa do singular, quando trazer minhas motivações pessoais e inquietações, ora usando a primeira pessoa do plural, quando discutirmos os desdobramentos que assumimos ao longo da pesquisa.

Desse modo, e querendo dar continuidade no meu estudo a respeito da Teoria APOE[2] desenvolvida por Dubinsky et al. (1996), ingressei no doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, no ano de 2016, com a mesma orientadora do mestrado, Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

No primeiro ano do doutorado, comecei a buscar diálogos possíveis entre a Teoria APOE e alguma outra, uma vez que queria ampliar meus conhecimentos e as discussões realizadas com essa teoria. Nesse momento, pensei inicialmente em estudar a APOE e o conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner (1981), mas em uma busca por outros referencias da APOE, encontrei no site *ResearchGate*[3] um artigo intitulado “As funções de duas variáveis: análise mediante os resultados do diálogo entre a teoria APOE e a TAD”[4], da autoria de María Trigueros e Rafael Martínez-Planell.

A partir desse achado, interessei-me pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) e por essa possibilidade de diálogo[5]. Com isso, começamos a estudar a TAD para compreender suas características e para pensar como poderíamos utilizá-la em um diálogo voltado à formação inicial de professores de Matemática. Tendo em mente o interesse por estudos envolvendo a Licenciatura em Matemática, no 1º semestre de 2017, cursei a disciplina “Professor de Ciências e os Modelos de Formação”, ministrada pelo Prof. Dr. Álvaro Lorencini Júnior, no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, visando conhecer mais aspectos relacionados à formação de professores.

Após esse relato a respeito das questões que nos motivaram a escrever esta tese, voltamos nosso olhar agora para a Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática. A Álgebra Linear é uma disciplina específica e obrigatória nos Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001). Todavia, assim como comentado por Prado (2016), baseado em Resende (2007), há poucas investigações a respeito do papel das disciplinas específicas para a formação do professor de Matemática.

---

[2] Visando alinhar minha pesquisa com as realizadas nos países latinos, como México, decidimos adotar APOE ao invés de APOS, visto que o Brasil se inseri nesse contexto, isto é, de ser um país latino.
[3] Rede social voltada a pesquisadores, na qual são compartilhadas publicações, interesses de pesquisa, dentre outras informações.
[4] Tradução de: Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD.
[5] No capítulo 4 trataremos acerca do diálogo entre as teorias APOE e TAD.

Além disso, concordamos com Machado e Bianchini (2012, p. 70), visto que autoras comentam que a Álgebra Linear fornece subsídios para o(a) professor(a) compreender a “[...] importância de certos temas abordados na Educação Básica, como matrizes, sistemas de equações, etc.”

Desse modo, nosso estudo possui como questão norteadora: *Que potencialidades podem ser evidenciadas ao utilizar a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático na formação inicial de professores de Matemática?*

Visando responder à questão apresentada traçamos o seguinte objetivo geral: *desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*.

A partir da nossa questão e do nosso objetivo geral elencamos alguns objetivos específicos que contribuíram para pensar no desenvolvimento desta tese:

- Investigar como a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático poderiam ser adotadas na formação inicial de professores de Matemática;
- Elaborar um Percurso de Estudo e Pesquisa do conceito Sistema de Equações Lineares para a formação inicial de professores de Matemática.
- Discutir com futuros professores de Matemática, a partir da aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa elaborado, como desenvolver o ensino de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio;
- Analisar qualitativamente os dados coletados no desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa.

Nesse momento, cabe ressaltar o porquê da nossa escolha por um conceito específico de Álgebra Linear, a saber Sistema de Equações Lineares. Essa escolha se deu devido ao tempo que tínhamos para realizar a investigação e porque a professora-pesquisadora não lecionava Álgebra Linear, na modalidade presencial. Além disso, esse conceito é abordado desde os anos finais do Ensino Fundamental e com isso vimos a possibilidade de discuti-lo sob uma nova ótica com os licenciandos em Matemática, refletindo a respeito do seguinte questionamento que nos mobilizou a pensar sobre esse e demais conceitos de Álgebra Linear: *Como ensinar o conceito de Sistema de Equações Lineares?*

Depois de discutirmos nossas motivações e apresentarmos nossa questão norteadora e nossos objetivos trataremos da organização da nossa tese. Nosso estudo está organizado em seis capítulos.

No capítulo um, abordamos a Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática, discutindo aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear e à formação do professor de Matemática. Nesse capítulo também apresentamos um panorama das pesquisas nacionais a respeito da Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

No capítulo dois, discutimos a Teoria APOE, seu desenvolvimento, suas características e apresentamos uma decomposição genética para o conceito Sistema de Equações Lineares.

No capítulo três, tratamos dos elementos e das características que compõem a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Nesse capítulo apresentamos um modelo epistemológico de referência (MER) e propomos um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP).

No capítulo quatro, apresentamos aspectos relacionados ao diálogo entre a APOE e a TAD e propomos um diálogo voltado para a formação inicial de professores.

No capítulo cinco, explicitamos os procedimentos metodológicos, trazendo esclarecimentos quanto a natureza, os participantes, a coleta de dados, bem como quanto as nossas escolhas metodológicas para análise dos dados.

No capítulo seis, trazemos as análises dos dados, buscando evidenciar o que é revelado pelo PEP-FP desenvolvido por meio do diálogo proposto.

E por fim, nas considerações finais são expostas as reflexões e conclusões, bem como nossas perspectivas futuras.

CAPÍTULO 1
ÁLGEBRA LINEAR NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo discutiremos a disciplina Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática, uma vez que o objetivo geral de nosso estudo é "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*".

Para realizar a discussão proposta nesse capítulo dividimo-lo em três seções: na primeira, apresentamos aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem em Álgebra Linear, uma vez que nesse estudo utilizamos duas teorias que contemplam tanto aspectos do ensino quanto da aprendizagem de conceitos matemáticos. Na segunda seção, discorremos a respeito da formação de professores de Matemática. Na terceira e última seção, tratamos das pesquisas nacionais, especificamente teses e dissertações, envolvendo o ensino e aprendizagem em Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

1.1 Aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem em Álgebra Linear

O ensino e aprendizagem em Álgebra Linear são temas que despertam o interesse de vários pesquisadores, tais como: Dubinsky (1997), Dorier e Sierpinska (2002), Harel (2018), Silva, Alves e Almeida (2018), dentre outros.

Harel (2018) traz uma discussão a respeito do ensino e aprendizagem em Álgebra Linear por meio do *framework instrução matemática baseada DNR*[6]. A sigla DNR é utilizada devido aos três princípios instrucionais do *framework*, a saber: Dualidade, Necessidade e Raciocínio Repetido.

No princípio da dualidade temos que: "[...] (a) a maneira de pensar de uma pessoa afeta suas formas de entender; e, (b) é a aquisição de formas apropriadas de entendimentos que gera uma mudança e desenvolvimento nas maneiras de

[6] Tradução de "*DNR-based instruction in mathematics*".

pensar”[7]. (HAREL, 2018, p. 5, tradução nossa). No princípio da necessidade é evidenciado que o estudante aprende quando vê uma necessidade intelectual naquilo que está sendo ensinado. E no princípio do raciocínio repetido, Harel (2018) comenta que é preciso que os estudantes pratiquem o raciocínio a fim de internalizar as maneiras de entender e pensar.

Dorier *et al.* (2000) trazem uma discussão acerca do uso de *alavancas-meta* no ensino da Álgebra Linear. As alavancas-meta correspondem, de modo geral, a recursos que podem suscitar reflexões, nos estudantes, a respeito do conceito estudado. Elas são utilizadas para dar significado às intervenções feitas pelo(a) professor(a) no momento do ensino, tais intervenções podem ser identificadas por meio do discurso matemático do(a) professor(a), sendo que esse discurso não precisa abordar necessariamente informações matemáticas. É interessante ressaltar, assim como Dorier *et al.* (2000) que as “alavancas” não são as mesmas para todos os estudantes, visto que elas dependem dos conhecimentos que possuem e do modo como lidam com as informações recebidas.

Outra alternativa para lecionar a disciplina Álgebra Linear é apresentada por Stewart (2008), em sua tese de doutorado. A autora desenvolve um *framework* que aborda os Três Mundos da Matemática – conceitual corporificado, simbólico proceitual e axiomático formal – de Tall (2004) e a Teoria APOE[8], de Dubinsky et al. (1996).

No *framework*, a pesquisadora contribui para que alguns conceitos da Álgebra Linear sejam vistos de forma mais abrangente, possibilitando que o(a) professor(a) da disciplina possa perceber aspectos que precisam de melhorias e consiga planejar formas de lidar com tais conceitos. Além disso, o *framework* corrobora para que os estudantes tenham uma visão geral do que é abordado na disciplina.

Outro estudioso que aborda o ensino de Álgebra Linear é Dubinsky (1997). Em seu artigo, o autor traz uma discussão relacionada às recomendações feitas pelo *Grupo de Estudo do Currículo de Álgebra Linear*[9] e outras realizadas por David Carlson, que é um dos organizadores da proposta do referido grupo, em um artigo publicado em 1993. As recomendações tanto do grupo quanto de Carlson consistem

[7] [...] (a) one’s ways of thinking impacts her or his ways of understanding; and, (b) it is the acquisition of appropriate ways of understanding that brings about a change and development in one’s ways of thinking.
[8] Discutiremos a respeito da Teoria APOE no capítulo 2.
[9] Tradução de *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG)

em privilegiar as aplicações da Álgebra Linear, no sentido de mostrá-la como uma disciplina a serviço de outras áreas. Desse modo, Dubinsky (1997) propõe como alternativa abordar os conceitos de Álgebra Linear, valendo-se da Teoria APOE.

A utilização da Teoria APOE no ensino de Álgebra Linear também é sugerida por Trigueros (2018). A pesquisadora mostra a possibilidade de recorrer à APOE para o *design* de situações que servem para introduzir conceitos de Álgebra Linear, utilizando como exemplo os seguintes conceitos: Sistema de Equações Lineares, Dependência e Independência Linear, Autovalores e Autovetores. Essas situações são utilizadas no ciclo ACE (Atividades – discussão em Classe – Exercícios).

O desenvolvimento de diferentes formas de ensinar a Álgebra Linear é motivado, algumas vezes, pelo conhecimento das dificuldades na aprendizagem dos alunos. Em relação às dificuldades, Dorier e Sierpinska (2002) comentam que essas podem ter dois tipos de origem: um associado à dificuldade conceitual, que se relaciona à natureza da Álgebra Linear, e outro, à dificuldade cognitiva, que se refere aos tipos de pensamento necessários para o conhecimento da Álgebra Linear.

A dificuldade conceitual, de acordo com Dorier e Sierpinska (2002), pode ser identificada nos estudantes quando esses não compreendem o caráter generalizador, unificador e simplificador da Álgebra Linear. Os autores comentam também sobre a linguagem que é adotada na Álgebra Linear, pois essa possui um caráter formal, além de ser expressa em diferentes tipos – a abstrata, a geométrica e algébrica –, o que exige que, em algumas tarefas matemáticas, os estudantes façam diferentes conversões.

Em relação à dificuldade cognitiva, os estudiosos abordam a flexibilidade cognitiva que os estudantes precisam para transitar entre as diferentes representações semióticas[10] (DUVAL, 2012). Além disso, discutem a respeito da dificuldade dos estudantes em chegar ao nível trans-objectal, que corresponde às transformações e à construção de estruturas matemáticas. A dificuldade para chegar a esse nível ocorre, pois os estudantes costumam criar mecanismos de defesa para sobreviverem à disciplina, isto é, fazem e/ou reproduzem o que é solicitado, mas sem atribuir significado aos símbolos e terminologias que estão utilizando.

[10] "As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes" (DUVAL, 2012, p. 269, grifo do autor).

Ainda a respeito da dificuldade cognitiva, Dorier e Sierpinska (2002) explicam que os estudantes mostram uma tendência em basear sua compreensão em exemplos ao invés de recorrer à definição do objeto matemático. Além disso, os autores comentam acerca dos modos do pensamento em Álgebra Linear, os quais têm uma predominância analítica, visto que o termo analítico corresponde a como os objetos podem ser construídos em uma linguagem e um sistema conceitual. A dificuldade dos modos de pensamento reside, algumas vezes, nas tarefas propostas que exigem, novamente, uma flexibilidade cognitiva.

Silva, Alves e Almeida (2018) trazem uma discussão sobre o ensino e aprendizagem da disciplina Álgebra Linear, valendo-se do *Modelo dos Campos Semânticos*, desenvolvido por Lins (1999, 2002). Por meio desse modelo, os autores comentam a respeito da produção de significado, no sentido de “[...] que o significado de um objeto será entendido como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade” (SILVA; ALVES; ALMEIDA, 2018, p. 93).

Sobre essa produção de significado, os autores evidenciam que alguns significados que os estudantes possuem acerca de Espaços Vetoriais, ao final da disciplina, não caminham na direção dos que são produzidos pelo(a) professor(a) ao ensinar. Sendo assim, Silva, Alves e Almeida (2018, p. 99) trazem uma proposta alternativa para a disciplina de Álgebra Linear, para a Licenciatura em Matemática, em que essa deve ser pensada como um “Curso de Serviço”, no sentido de não se limitar “[...] a ensinar apenas o conteúdo matemático, incorporando também aspectos de sua formação didático-pedagógica [...]”.

Acreditamos, assim como Silva, Alves e Almeida (2018), que o ensino da Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática deva ser feito de forma diferenciada, levando em conta aspectos da sua formação didático-pedagógica. Desse modo, na próxima seção discutiremos aspectos relacionados à formação inicial de professores de Matemática, em específico, os conhecimentos necessários a essa formação.

1.2 Um olhar para a formação inicial de professores de Matemática

A formação de professores de Matemática, em específico o conhecimento necessário aos professores, tem sido objeto de pesquisa de muitos estudiosos, tais como Ponte e Chapman (2008), Shulman (1987, 2014), Ball, Thames e Phelps (2008), Jakobsen *et al.* (2012), Elias (2017), dentre outros.

Ponte e Chapman (2008), em relação à formação inicial, que é o foco de nosso trabalho, comentam que esta é um processo complexo que envolve a interação de diferentes elementos, tais como:

> [...] tipos de conhecimento, competências, atitudes e valores que os futuros professores devem desenvolver, o contexto em que a aprendizagem ocorre (universidade, escola e outros contextos) e os papéis, interesses e características dos participantes no processo (professores em formação, instrutores universitários, mentores escolares e estudantes). Outros elementos são as opções e condições do programa, como abordagens pedagógicas, o relacionamento de professores formadores e instrutores, acesso a recursos e uso da tecnologia da informação e comunicação (TIC). (PONTE; CHAPMAN, 2008, p. 223, tradução nossa)[11].

Vemos com isso, que dentre os elementos que fazem parte do processo da formação inicial de professores, temos os tipos de conhecimentos, e, com base em nosso objetivo, trataremos mais especificamente desse elemento nessa seção. Todavia, devemos refletir inicialmente sobre qual(is) conhecimento(s) é(são) necessário(s) ao professor de Matemática.

Shulman (1987, 2014) traz alguns conhecimentos que são necessários ao professor de Matemática, sendo eles:

- Conhecimento do conteúdo: refere-se ao entendimento de um conteúdo, no caso da Matemática, da organização conceitual e de teorias relacionadas à natureza do conhecimento.
- Conhecimento pedagógico geral: corresponde a “[...] princípios e estratégias mais abrangentes de gerenciamento e organização da sala de aula [...]” (SHULMAN, 2014, p. 206).
- Conhecimento do currículo: compreende os materiais e os programas que servem como “ferramentas para o ofício” do professor.

[11] […] kinds of knowledge, competencies, attitudes, and values that teacher candidates should develop, the context in which learning takes place (university, school, and other settings), and the roles, interests, and characteristics of the participants in the process (preservice teachers, university instructors, school mentors, and students). Other elements are program options and conditions such as pedagogical approaches, the relationship of preservice teachers and instructors, access to resources, and use of information and communication technology (ICT).

- Conhecimento pedagógico do conteúdo: refere-se ao "[...] terreno exclusivo dos professores, seu meio especial de compreensão profissional". (SHULMAN, 2014, p. 206)
- Conhecimento dos alunos e de suas características;
- Conhecimento de contextos educacionais que vão "desde o funcionamento do grupo ou da sala de aula, passando pela gestão e financiamento dos sistemas educacionais, até as características das comunidades e suas culturas" (SHULMAN, 2014, p. 206).
- Conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica.

Shulman (2014, p. 207) mostra que o conhecimento pedagógico do conteúdo é de seu especial interesse por esse identificar

> [...] os distintos corpos de conhecimentos necessários para ensinar. Ele representa a combinação de conteúdo e pedagogia no entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e apresentados no processo educacional em sala de aula.

Vale ressaltar que esse conhecimento é o que distingue o professor de uma área específica, no nosso caso a Matemática, de qualquer outro (SHULMAN, 1987, 2014).

O conhecimento pedagógico do conteúdo vem sendo objeto de estudo de diversas pesquisas ao longo de mais de trinta anos[12] e com isso houve uma ampliação desse conceito, tendo em vista as especificidades das áreas do conhecimento investigadas. Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008), em seu artigo trazem uma discussão sobre os progressos nos estudos desse conhecimento. O foco dos autores é tratar do conhecimento matemático para o ensino.

Ball, Thames e Phelps (2008, p. 399, tradução nossa) identificaram o conhecimento matemático *necessário* "[...] para executar as tarefas recorrentes de

---

[12] A respeito dessa temática existem algumas revisões sistemáticas como a de Goes e Fernandes (2018), na qual evidenciam que encontram 3329 trabalhos do período de 1986 a 2013. Outro trabalho nessa linha é o de Almeida *et al.* (2019) que apresentam uma revisão interativa do conhecimento pedagógico do conteúdo e dos processos de ação e raciocínio pedagógicos, categorias teóricas de conhecimento docente formuladas por Shulman e colaboradores, nesse levantamento acharam 114 produções de 1986 a 2019.

ensinar matemática aos alunos"[13]. O termo "necessário" foi utilizado pelos estudiosos com vistas a evitar o reducionismo utilitário da matemática. Com essa identificação, os autores definiram alguns conhecimentos, sendo eles:

- O *conhecimento comum do conteúdo*: refere-se ao conhecimento e à habilidade matemática "usada em outras configurações além do ensino"[14] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 399, tradução nossa).
- O *conhecimento especializado do conteúdo*: corresponde ao conhecimento de Matemática específico para o ensino.

Para elucidar esse conhecimento, Ball, Thames e Phelps (2008) comentam a respeito da procura de padrão nos erros dos alunos, da necessidade de possuir diferentes interpretações das operações e da avaliação de uma abordagem diferente para ensinar um conteúdo.

- O *conhecimento do conteúdo e dos estudantes*: relaciona-se à combinação do conhecimento do aluno e da Matemática.

Para tratar desse conhecimento, os estudiosos explicam a necessidade do professor conhecer seus alunos e a partir disso prever explicações, exemplos, tarefas, dentre outras coisas.

- O *conhecimento do conteúdo e do ensino*: relaciona-se à combinação do conhecimento sobre o ensino e a respeito da Matemática.

Sobre esse conhecimento, Ball, Thames e Phelps (2008) comentam que muitas tarefas matemáticas do ensino necessitam do entendimento de questões pedagógicas que podem afetar a aprendizagem do aluno.

A partir disso, os estudiosos apresentam um refinamento do conhecimento pedagógico do conteúdo (SHULMAN, 1987) ao tratar do conhecimento matemático para o ensino, para exemplificar as relações entre eles trazem o seguinte diagrama (Figura 1):

---

[13] […] mathematical knowledge needed to perform the recurrent tasks of teaching mathematics to students.
[14] [...] the mathematical knowledge and skill used in settings other than teaching.

Figura 1 – Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino

Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403, tradução nossa)

Nesse diagrama é possível notar a inserção do conhecimento do conteúdo no horizonte, o qual se refere a "[...] uma consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da extensão da matemática incluída no currículo"[15] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa). Por exemplo, o professor de Matemática do 8°ano precisa saber como os conceitos que está ensinando relaciona-se com os dos anos anteriores e posteriores para, assim, estabelecer conexões com o que os alunos se depararão mais tarde.

Com vistas aos nossos objetivos de pesquisa, levando em consideração o que foi tratado até o momento e compartilhando da ideia de Elias (2017)[16], discutiremos, nos próximos parágrafos, o conhecimento do conteúdo no horizonte, pois esse caracteriza o papel da disciplina de Álgebra Linear na formação inicial de professores

O conhecimento do conteúdo no horizonte, de acordo com Jakobsen *et al.* (2012, p. 4642, tradução nossa), pode ser definido como:

> [...] uma orientação para e uma familiaridade com a disciplina (ou disciplinas) que contribui para o ensino da disciplina escolar em questão, fornecendo aos professores um senso de como o conteúdo ensinado está situado e conectado a um território disciplinar mais amplo. O CCH [conhecimento do conteúdo no horizonte] inclui conhecimento explícito de formas e ferramentas para entender a

---

[15] [...] an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum.

[16] Elias (2017) aborda a disciplina de Estruturas Algébricas na formação inicial de professores, mesmo sendo outra disciplina acreditamos que a ideia pode ser transposta, com adequações, para outras disciplinas matemáticas presentes na Licenciatura em Matemática.

> disciplina, os tipos de conhecimento e suas justificativas, e de onde vêm as ideias e como a "verdade" ou validade é estabelecida. O CCH também inclui o conhecimento das principais orientações e valores disciplinares e as principais estruturas da disciplina. O CCH permite que os professores "ouçam" os alunos, façam julgamentos sobre a importância de ideias ou perguntas específicas e tratem a disciplina com integridade, todos os recursos para equilibrar a tarefa fundamental de conectar os alunos a um campo vasto e altamente desenvolvido[17].

A respeito dessa definição, os autores elucidam as expressões "orientação para" e "familiaridade com", visto que são importantes para o entendimento do conhecimento do conteúdo no horizonte. A "familiaridade com" diz respeito à maneira pela qual o conhecimento é entendido e mantido na mente. Já a "orientação para" refere-se a uma forma de pensar a respeito do conteúdo que está sendo ensinado e aprendido na escola.

Cabe frisar que Jakobsen *et al.* (2012) discorrem a respeito desse conhecimento tendo em vista os conteúdos matemáticos avançados abordados na formação inicial dos professores de Matemática e tal questão vai ao encontro das ideias que trataremos em nossa tese, visto que essas são relacionadas ao ensino e aprendizagem da Álgebra Linear na formação inicial de professores. Além disso, concordamos com os estudiosos ao dizer que a discussão do conhecimento do conteúdo no horizonte é a principal responsabilidade dos professores das disciplinas de conteúdos matemáticos avançados.

Após esse olhar para a formação inicial de professores de Matemática, em específico para as questões dos conhecimentos, na próxima seção traremos um levantamento de pesquisas acerca do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

---

[17] Horizon Content Knowledge (HCK) is an orientation to and familiarity with the discipline (or disciplines) that contribute to the teaching of the school subject at hand, providing teachers with a sense for how the content being taught is situated in and connected to the broader disciplinary territory. HCK includes explicit knowledge of the ways of and tools for knowing in the discipline, the kinds of knowledge and their warrants, and where ideas come from and how "truth" or validity is established. HCK also includes awareness of core disciplinary orientations and values, and of major structures of the discipline. HCK enables teachers to "hear" students, to make judgments about the importance of particular ideas or questions, and to treat the discipline with integrity, all resources for balancing the fundamental task of connecting learners to a vast and highly developed field.

1.3 O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: O QUE ABORDAM AS PESQUISAS NACIONAIS?

Antes de discorrer a respeito dos achados obtidos no levantamento que descreveremos a seguir, vale salientar que ele foi realizado com o intuito de conhecer o que estava sendo pesquisado em âmbito nacional, já que acreditamos ser necessário o olhar para o contexto brasileiro, que assim como em qualquer outro, possui suas especificidades educacionais e essas devem ser levadas em consideração em uma pesquisa.

Tendo em vista o que foi descrito no parágrafo anterior, no mês de março de 2018, realizamos um levantamento das teses e dissertações defendidas, de 2006 a 2017[18], em programas nacionais de pós-graduação. Tal levantamento foi realizado em todos os programas de pós-graduação, selecionados por meio da ficha de avaliação presente na Plataforma Sucupira, na área de ensino[19]. Todavia, foram selecionados apenas os programas com foco na Matemática, sendo assim, verificamos 95 programas dos 139 programas na área de ensino.

Para selecionar os trabalhos que fariam parte do *corpus* de análise, buscamos nos títulos pelas seguintes palavras-chave: Álgebra Linear e conceitos de Álgebra Linear, tais como: Sistemas de Equações Lineares; determinantes; matrizes; espaços vetoriais; combinação linear; dependência e/ou independência linear; base; transformação linear; autovalor e autovetor. Desse primeiro movimento de busca foram selecionados 52 trabalhos (Apêndice A).

Diante dessas 52 pesquisas, realizamos um segundo movimento de busca, agora focando na Licenciatura em Matemática. Desse modo, olhamos os resumos e as palavras-chave dos trabalhos selecionados e encontramos 13 pesquisas que tratam da Licenciatura em Matemática, para as quais utilizamos as letras *D*, para dissertação, e *T*, para tese, seguidas de um número adotado de acordo com o ano de publicação, se houvesse mais de um trabalho para determinado ano,

[18] Escolhemos tal período, pois em 2016 a autora da tese ingressou no programa de doutorado. Sendo assim, o ano inicial para a busca de teses e dissertações foi 2006, levando em consideração um período de 10 anos. Porém, em 2018, com a pesquisa mais clara em nossa mente, decidimos observar novamente os programas de pós-graduação e, então, ampliamos a investigação para o ano de 2017.

[19] Para maiores informações acessar: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/avaliacao/consultaFichaAvaliacao.jsf>. Acesso em: 02 fev. 2018.

consideraríamos a ordem dos programas de pós-graduação, selecionados pela Plataforma Sucupira, como é possível observar no Quadro 1:

Quadro 1 – Teses e Dissertações defendidas entre os anos 2006-2017 relacionadas à Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática

T/D	Ano de defesa	Instituição	Autor(a)	Título
D1	2007	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Michele Viana Debus de França	Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando Geometria Dinâmica
D2	2009	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	José Renato Fialho Rodrigues	Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de álgebra linear: Base e Dimensão de um Espaço Vetorial
D3	2010	Universidade Bandeirante de São Paulo	Fábio Simião	A noção de Matriz na transição entre o Ensino Médio e o Superior
D4	2011	Universidade Federal de Ouro Preto	Walter Sérvulo Araújo Rangel	Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: contribuições para a formação de Professores de Matemática
D5	2012	Universidade Estadual de Londrina	Kátia Socorro Bertolazi	Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares
D6	2013	Universidade Federal de Juiz de Fora	Aretha Fontes Alves	Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais
D7	2013	Universidade Federal de Juiz de Fora	Vitor Rezende Almeida	Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o Estudo das Transformações Lineares
D8	2016	Universidade Estadual de Londrina	Mariany Layne de Souza	Dependência e independência linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática
T1	2015	Universidade Estadual Paulista, câmpus de Rio Claro	Aparecida Santana de Souza Chiari	O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância: possibilidades, limites e desafios
T2	2016	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Eneias de Almeida Prado	Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica
T3	2016	Pontifícia Universidade	Maria Eliana Santana da Cruz	Concepção de Transformação Linear por

		Católica de São Paulo	Silva	estudantes de Licenciatura em Matemática
T4	2016	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Eliza Souza da Silva	Transformações Lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais
T5	2017	Universidade Federal do Pará	Fernando Cardoso de Matos	Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da Álgebra Linear

Fonte: a própria autora

Com o Quadro 1 é possível notar que apenas uma pesquisa (T5) não foi realizada nas regiões Sul e Sudeste do Brasil. Esse fato, da maioria das pesquisas ser desenvolvida em tais regiões, pode ser evidenciado também no levantamento geral presente no Apêndice A.

Após a seleção desses trabalhos, buscamos analisá-los para entendermos a forma que a Licenciatura foi abordada, investigando se o foco dessas pesquisas foi no curso de formação inicial ou se ele foi um contexto de aplicação. Desse modo, construímos o Quadro 2:

Quadro 2 – Abordagem com a Licenciatura em Matemática nas teses e dissertações

Foco no curso de formação inicial	Foco no contexto de aplicação
D4, D6, D7, T1, T2, T5.	D1, D2, D3, D5, D8, T3, T4.

Fonte: a própria autora

De posse dos resultados presentes no Quadro 2, voltamos nosso olhar para as pesquisas com foco no curso de Licenciatura em Matemática (D4, D6, D7, T1, T2, T3 e T5) com vistas a conhecer os referencias teóricos adotados e os resultados obtidos. Desse modo, elaboramos o Quadro 3:

Quadro 3 – Teses e Dissertação com foco no curso de Licenciatura em Matemática

Código	Objetivo	Referencial teórico	Resultados
D4	Investigar as contribuições da elaboração de Projetos de Modelagem Matemática para a formação de Professores de Matemática.	Modelagem Matemática; Formação inicial de professores; Ensino de Álgebra Linear; Projetos de trabalho.	Constatou-se que o trabalho com Projetos de Modelagem Matemática possibilita ao futuro professor relacionar e ressignificar “[...] o objeto matemático a luz de suas aplicações” (RANGEL, 2011, p. 108). De modo geral, o autor vê nos Projetos de Modelagem Matemática “[...] uma alternativa

			propícia para a formação inicial de um Professor de Matemática" (RANGEL, 2011, p. 109)
D6	Levantar as características de um Curso de Serviço de Álgebra Linear voltado a alunos de Licenciatura em Matemática.	Modelos dos Campos Semânticos; Formação Matemática do Professor de Matemática.	O Curso de Serviço proposto pela autora tem como foco o estudo dos espaços vetoriais, o qual possui características relacionadas à metodologia de sala de aula, à expectativa quanto a postura do professor de matemática e, por fim, ao conteúdo de Espaços Vetoriais e sua relação com a formação do professor de Matemática. De modo geral, a autora visou indicar uma alternativa de curso de serviço que pode ser empregado nos cursos de Licenciaturas em Matemática.
D7	Investigar quais são as características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática.	Modelo dos Campos Semânticos; Teria da Atividade; Formação do Professor de Matemática.	O autor apresenta uma proposta de ensino do conteúdo de Transformação Linear para a formação matemática dos estudantes de licenciatura partindo da ideia da disciplina de Álgebra Linear como sendo um curso de Serviço. De modo geral, o autor considera que as "[...]propostas de Cursos de Serviço e de materiais didáticos específicos uma oportunidade de sugerir transformações na atual formação Matemática dos professores de Matemática em nossas universidades" (ALMEIDA, 2013, p. 139).
T1	Compreender o papel das tecnologias digitais (TD) nos processos educativos associados a disciplinas de Álgebra Linear de quatro cursos de Licenciatura em Matemática a distância vinculadas à Universidade Aberta do Brasil (UAB), no contexto de seus Ambientes Virtuais (AVA).	Ensino e aprendizagem de Álgebra Linear; Tecnologia digitais; Educação a distância.	Ao analisar quatro cursos de Licenciatura em Matemática à distância vinculados à Universidade Aberta do Brasil a autora construiu um modelo para identificar padrões de uso de tecnologias nas instituições a fim de validar a sua análise e provocar reflexões sobre a consistência entre as práticas observadas e os objetivos institucionais. Por meio da sua análise a autora percebeu a necessidade de estimular mais os modos de descrição (formal, algébrico e geométrico), sendo que esse pode ser feito por meio das tecnologias digitais.
T2	Compreender a Álgebra Linear ensinada para a Licenciatura em Matemática como um	Formação inicial do professor; Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear;	O autor analisou seis cursos de Licenciatura em Matemática e entrevistou oito professores, alguns já ministraram a

	saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica e buscar elementos e possibilidades para ressignificar a Álgebra Linear nessa formação, concebendo um conjunto de conhecimentos em Álgebra Linear, necessário para fundamentar a Álgebra a ser ensinada, na Educação Básica.	Pensamento Matemático Avançado.	disciplina de Álgebra Linear e outros foram coordenadores de curso. Com a pesquisa o autor pontua a importância de se refletir a respeito da Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.
T5	Elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência para se ensinar Álgebra Linear, voltada para o ensino básico, ou seja, utilizando-se objetos deste nível de ensino, como provedores de metodologias referente ao ensino, com impacto direto na formação de professores, tornando-se um modelo epistemológico alternativo para o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará.	Teoria Antropológica do Didático; Álgebra Linear	O autor elaborou um modelo epistemológico de referência alternativo para o ensino de Álgebra Linear e um percurso de estudo e pesquisa que foi utilizado como metodologia de ensino em um curso de Licenciatura em Matemática.

Fonte: a própria autora

Com base nas características das pesquisas presentes no Quadro 3, é possível notar o interesse em se investigar a disciplina de Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática (T1 e T2). Temos que T1 analisou o papel das tecnologias digitais em quatro cursos, na modalidade Ensino a Distância, vinculados a Universidade Aberta do Brasil. Já T2 analisa alguns cursos presenciais visando compreender como a Álgebra Linear voltada para a Licenciatura é concebida, além disso, vemos em T2 reflexão do modo como tal disciplina poderia ser abordada para os futuros professores de Matemática.

Outro aspecto que pode ser observado no Quadro 3 é referente a proposição de estratégias para o ensino de Álgebra Linear, levando em consideração as especificidades de um curso destinado à formação inicial de professores (D4, D6, D7 e T5). Nessa perspectiva os autores de D4, D6 e D7 comentam a respeito da necessidade de pensar nas disciplinas matemáticas, em específico a Álgebra Linear, com vistas a contribuir para a prática docente. T5 nessa mesma linha traz uma proposta de Modelo Epistemológico de Referência (MER)[20] com a finalidade de ensinar a Álgebra Linear voltada para a Educação Básica, tal modelo parte de Sistema de Equações Lineares e vai até Espaços Vetoriais.

É interessante ressaltar que nossa tese vai ao encontro do que T5 propõe, mas nos diferenciamos ao propor um diálogo da Teoria Antropológica do Didático com a APOE para a formação de professores. Além de destacarmos apenas um assunto, Sistema de Equações Lineares, enquanto Matos (2017) trata até Espaços Vetoriais.

Mediante esses últimos trabalhos (D4, D6, D7 e T5) podemos escrever que nossa pesquisa se enquadra nessa temática, isto é, de apresentar estratégias para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos abordados na disciplina de Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática, visando aproximar os conceitos da Educação Básica.

Sendo assim, nos próximos capítulos discutiremos a respeito da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, propondo um diálogo entre essas teorias na Licenciatura em Matemática.

[20] Trataremos detalhadamente a respeito do Modelo Epistemológico de Referência no Capítulo 3.

CAPÍTULO 2
TEORIA APOE

Neste capítulo apresentamos a Teoria APOE, trazendo suas características, com vistas a contemplar o objetivo dessa pesquisa, a saber: "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*". Vale salientar que em nosso trabalho optamos pelo uso do nome da teoria traduzido, ou seja, APOE, seguindo a nomenclatura utilizada por muitos países, como o México, e a Espanha, embora trabalhos em língua portuguesa utilizem a terminologia em inglês APOS.

Tendo em vista o objetivo da tese, dividimos esse capítulo em três seções: na primeira, apresentamos o Pensamento Matemático Avançado, uma vez que é nesse campo que a Teoria APOE foi desenvolvida. Na segunda seção, discorremos a respeito do desenvolvimento e das características da Teoria APOE. Na terceira e última seção, apresentamos a decomposição genética, que corresponde ao instrumento adotado para descrever e evidenciar as concepções acerca de um conceito matemático.

2.1 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

As discussões sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA), como apresenta Tall (2002), começaram no Grupo Internacional de Psicologia da Matemática[21] e em 1985 foi formado um grupo específico do PMA.

O PMA não possui uma definição, mas elementos que o caracterizam e há diversos autores que discorrem a seu respeito, como Tall (2002); Dreyfus (2002); Dubinsky (2002); Harel e Sowder (2005), dentre outros. Nos próximos parágrafos, apresentaremos as caracterizações adotadas por esses pesquisadores.

Tall (2002, p. 20, tradução nossa) considera que o PMA está relacionado à Matemática vista no Ensino Superior, já que para o autor a "[...] mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: a da descrição para a definição, do convencimento para a prova de

[21] The International Group for the Psychology of Mathematics.

uma maneira lógica com base nessas definições”[22] e esses aspectos mais formais são abordados nesse nível de ensino.

Dreyfus (2002) comenta que o PMA é caracterizado pela presença dos processos de representação e abstração. O processo de representação tem uma importante função na Matemática, sendo este central para aprendê-la e para pensá-la . Já o processo de abstração é um processo que necessita de dois pré-requisitos: os processos de generalização e de síntese.

Dubinsky (2002) traz uma discussão a respeito de uma extensão do estudo de Piaget no que tange às abstrações[23], relacionando-as a conceitos abordados no Ensino Superior. A abstração reflexionante envolve o conhecimento ou consciência das ações, além disso, “[...] o que quer que seja ‘abstraído’ é projetado em um plano superior de pensamento (1985, p. 29-31)[24], em que outras ações estão presentes, bem como modos de pensamentos mais poderosos” (DUBINSKY, 2002, p. 99, tradução nossa)[25].

Harel e Sowder (2005), para discorrerem acerca do PMA, esclarecem que o termo *avançado* está relacionado ao processo envolvido, mostrando que pode haver um pensamento matemático avançado e um pensamento relacionado a uma Matemática avançada. Além disso, os autores comentam que as maneiras de pensar levam em consideração obstáculos tanto didáticos quanto epistemológicos, sendo que esses últimos estão envolvidos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, no sentido que o “[...] nível de aquisição de uma maneira de pensar por um indivíduo é determinado pela extensão em que ele superou esses obstáculos”[26] (HAREL; SOWDER, 2005, p. 34-35, tradução nossa).

Para esclarecer como um obstáculo epistemólogico está presente no PMA, Harel e Sowder (2005) trazem o seguinte exemplo: um professor apresenta aos seus alunos um problema, no qual solicita que encontrem uma abscissa de um ponto na reta numérica cuja distância entre esse ponto e 1 seja metade da distância até -4. Nesse problema, os alunos conseguem representar algebricamente que essa abscissa será dada por $(x+4)/2$.

---

[22] The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: that from describing to defining, from convincing to proving in a logical manner based on those definitions.
[23] Na seção 2.2 apresentaremos mais detalhes a respeito das abstrações discutidas por Piaget.
[24] Dubinsky vale-se de Piaget para fazer essa citação.
[25] Whatever is thus “abstracted” is projected onto a higher plane of thought (1985, pp. 29–31) where other actions are present as well as more powerful modes of thought.
[26] […] level of acquisition of a way of thinking by an individual is determined by the extent to which the individual has overcome these obstacles.

Todavia, quando questionados a respeito de outra forma de representar a distância entre x e 1, não conseguem pensar de maneira diferente da exposta, uma vez que ainda encontram dificuldades em formar equações. Essa dificuldade, de acordo com Harel e Sowder (2005), ocorre devido ao x ser usado tanto para representar uma incógnita quanto para expressar uma variável e isso pode ser justificado como um obstáculo epistemológico, pois é "[...] uma afirmação que pode ser apoiada pelo desenvolvimento histórico da noção de 'variável' no século XVII"[27] (HAREL; SOWDER, 2005, p. 39, tradução nossa).

Aspectos com relação à diferenciação entre o PMA e o Pensamento Matemático Elementar (PME) são abordados por Gray *et al.* (1999). Os estudiosos comentam que no PMA os objetos são criados a partir de propriedades e que no PME as propriedades são deduzidas a partir dos objetos (manipulação). Com isso, segundo Gray *et al.* (1999, p. 6, tradução nossa), tem-se que "[...] uma perspectiva estrutural pode se referir a objetos visuais na Matemática elementar e a uma estrutura formal, ao estilo Bourbaki, na Matemática avançada"[28].

Ainda com relação à diferenciação do PMA e do PME temos que para Dreyfus (2002) não há uma distinção nítida entre eles. Para o autor, a diferença entre os pensamentos está relacionada à complexidade com que se tratam os processos de representação e abstração. Harel e Sowder (2005) e Edwards, Dubinsky e McDonald (2005) vão na mesma linha de Dreyfus, considerando aspectos relacionados ao desenvolvimento e a complexidade do pensamento.

Mediante o exposto, consideramos que o PMA pode ocorrer em qualquer nível de ensino, assim como, apresentam Dreyfus (2002), Harel e Sowder (2005). Além de admitirmos, como Dubinsky (2002), que a abstração reflexionante contribui para o desenvolvimento desse pensamento matemático. É interessante frisar que Edwards, Dubinsky e McDonald (2005) trazem uma definição do PMA, considerando o contexto do Ensino Superior, afirmando que este conceito pode ocorrer em qualquer idade do aluno, mas que para a definição são necessárias certas condições, como o raciocínio rigoroso e dedutivo, que só ocorrem no contexto por eles considerado.

---

[27] […] a claim that can be supported by the historical development of the notion of "variable" in the 17th century.

[28] Thus, a structural perspective may refer to visual objects in elementary mathematics and Bourbaki-style formal structure in advanced mathematics.

A caracterização apresentada a respeito do PMA visou mostrar como esse pensamento é entendido por diferentes estudiosos e o que assumimos para nosso trabalho, de acordo com Dubinsky, visto que esse autor junto com alguns colaboradores desenvolveu a Teoria APOE. Desse modo, na próxima seção apresentamos como se deu o desenvolvimento da referida teoria, bem como suas características.

2. 2 TEORIA APOE: DESENVOLVIMENTO E CARACTERÍSTICAS

A Teoria APOE trata como os conceitos matemáticos podem ser construídos a partir das estruturas mentais Ações, Processos, Objetos e Esquemas. A APOE começou a ser desenvolvida por Dubinsky e seus colaboradores, na década de 1980, e teve como inspiração os estudos de Jean Piaget a respeito das abstrações, mais especificamente da abstração reflexionante, que corresponde, de modo geral, à forma como o indivíduo lida com os objetos matemáticos (ARNON *et al.*, 2014).

Em 1984, de acordo com Arnon *et al.* (2014), houve a primeira publicação envolvendo as ideias de Dubinsky e seus colaboradores a respeito da construção de conceitos matemáticos. Essa publicação foi feita em um *proceedings* de uma conferência que aconteceu em Helsinki, na Finlândia, e discutiu as distinções das estruturas mentais (ação-processo-objeto-esquema), por meio do uso de um programa de computador. Nessa época, segundo os autores, Dubinsky tinha interesse em verificar como o uso de computadores poderia auxiliar os estudantes da graduação a construir conceitos matemáticos.

Arnon *et al.* (2014) trazem ainda que Dubinsky e seus colaboradores, durante os anos de 1985-1995, desenvolveram um método pedagógico baseado na decomposição genética[29], que corresponde a uma forma de descrever as estruturas mentais: ação-processo-objeto-esquema.

No período de 1995-2003, Dubinsky e seus colaboradores foram responsáveis por conduzir o desenvolvimento de um currículo para os cursos de graduação em Matemática, dos Estados Unidos da América. Visando esse desenvolvimento surgiu a *Comunidade de Pesquisa em Educação Matemática na*

---

[29] Abordaremos na seção 2.3 a decomposição genética.

Graduação[30] que intensificou os estudos envolvendo a Teoria APOE (ARNON *et al.*, 2014).

Os estudos relacionados à Teoria APOE continuam sendo realizados por grupos de pesquisa em diversos lugares, como no México e no Brasil. O grupo de pesquisadores do México, segundo Arnon *et al.* (2014), estuda as construções de conceitos matemáticos valendo-se da APOE e também sugere métodos pedagógicos para o estudo dos conceitos estudados empregando a referida teoria. Em relação ao Brasil, temos teses e dissertações que utilizam a APOE, de acordo com Messias e Brandemberg (2019), para investigar principalmente as concepções de estudantes acerca de algum conceito matemático.

Após essa descrição de como se deu o desenvolvimento da Teoria APOE, nas próximas subseções trataremos da abstração reflexionante e das características da Teoria APOE.

2.2.1 Abstração Reflexionante

Piaget e seus colaboradores (1995) diferenciaram três tipos de abstrações: empírica, pseudoempírica e reflexionante. Nos próximos parágrafos, discorreremos a respeito dessas abstrações e elucidaremos a importância da abstração reflexionante para a Teoria APOE.

A *abstração empírica* (*empirique*) é aquela que resulta do conhecimento das propriedades dos objetos ou de ações. Nessa abstração, as propriedades e características dos objetos (música, morango, peixe...) ou de ações (andar de bicicleta, falar...) são retiradas por meio da observação (DUBINSKY, 2002; BECKER, 2017).

Na *abstração reflexionante* (*réfléchissante*), de acordo com Becker (2017, p. 373), “[...] o sujeito retira qualidades das coordenações das ações que, por se realizarem internamente ao sujeito não são observáveis”. Segundo Piaget *et al.* (1995, p. 193):

> A abstração ‘reflexionante’ é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores e, como tal, tanto pode funcionar de maneira inconsciente como sob a direção de intenções deliberadas:

[30] Research in Undergraduate Mathematics Education Community

> particularmente, o sujeito de uma investigação ignora, por muito tempo, de que fontes ele tem haurido os mecanismos constitutivos de sua nova construção [...].

A *abstração pseudoempírica* (*pseudo-empirique*) é intermediária entre a abstração empírica e a reflexionante. Segundo Becker (2017, p. 374, grifo do autor), se “[...] retirarmos dos observáveis não mais suas características, mas o que nós, sujeitos, colocamos neles, teremos uma abstração *pseudoempírica* (*pseudo-empirique*)”. Para Piaget *et al.* (1995, p. 146), essa abstração é uma variante da reflexionante:

> [...] a abstração pseudoempírica apareceu bem como um caso particular de abstração reflexionante: o que o sujeito tira dos objetos (além, naturalmente, de suas qualidades físicas registradas por abstração empírica: diferença de cores e de tamanho) são as propriedades que é capaz de neles introduzir, de acordo com o nível de suas coordenações de ações.

A partir disso, notamos que os tipos de abstração não são completamente independentes:

> As ações que levam à abstração pseudoempírica e reflexionante são realizadas em objetos cujas propriedades o sujeito só conhece por meio da abstração empírica. Por outro lado, a abstração empírica só é possível por meio de esquemas de assimilação que foram construídos pela abstração reflexionante (PIAGET, 1985, p. 18-19, apud DUBINSKY, 2002, p. 98, tradução nossa)[31].

Mesmo que os tipos das abstrações não sejam independentes entre si, é possível inferir a respeito da importância do papel da abstração reflexionante, uma vez que ela é utilizada para descrever a construção de estruturas no desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Levando esse aspecto em consideração, Piaget, segundo Dubinsky (2002), comenta que as construções de estruturas matemáticas são advindas dessa abstração.

Dubinsky (2002), ao ponderar a respeito de aspectos utilizados nas construções das estruturas matemáticas apresentados por Piaget, separou quatro aspectos – interiorização, coordenação, encapsulação, generalização – e considerou

[31] The actions that lead to pseudo-empirical and reflective abstraction are performed on objects whose properties the subject only comes to know through empirical abstraction. On the other hand, empirical abstraction is only made possible through assimilation schemas which were constructed by reflective abstraction (Piaget, 1985, pp. 18–19).

um quinto – reversibilidade – que Piaget discutiu, mas que não considerou parte da abstração reflexionante.

A *interiorização* corresponde a uma forma de construir processos internos como uma maneira de entender o significado dos fenômenos observados (DUBINSKY, 2002). Como exemplo da interiorização, podemos pensar que, após o indivíduo refletir a respeito dos procedimentos realizados para verificar se um conjunto de vetores é linearmente dependente ou independente, ele compreende que, em um conjunto de vetores linearmente dependentes, um vetor pode ser escrito como combinação linear dos demais (SOUZA, 2016).

A *coordenação*, consoante a Dubinsky (2002), refere-se à forma de usar uma ou mais ações para construir novos conhecimentos. Um exemplo desse aspecto da abstração reflexionante relaciona-se à construção da ideia de número pelas crianças, na qual, segundo Dubinsky e Lewin (1986), é necessário o uso das ideias de seriação e classificação.

A *encapsulação*, de acordo com Dubinsky (2002), diz respeito às ações que se tornam tematizadas no pensamento ou são assimiladas. Como exemplo da encapsulação, temos o entendimento do conceito de transformação linear como um todo, no qual o indivíduo reconhece suas características e consegue realizar manipulações conscientes no conceito matemático em questão.

A *generalização*, segundo Dubinsky (2002), relaciona-se à aplicação de um esquema existente a uma coleção ampla de fenômenos. Para esse aspecto da abstração reflexionante, podemos pensar que um indivíduo que está estudando a comutatividade da adição de polinômios pode estender essa propriedade para a adição de matrizes.

A *reversibilidade* consiste em reverter o processo original (DUBINSKY, 2002). Como exemplo da reversibilidade, temos a situação de um indivíduo que, ao lhe ser solicitado que efetue $(x + 4)^2$, ele realiza a multiplicação e constata que se tem um trinômio quadrado perfeito. Esse processo pode ser revertido, isto é, apresenta-se o polinômio $x^2 + 8x + 16$ e se solicita que o indivíduo apresente a sua forma fatorada.

Com essa subseção podemos notar, assim como evidenciado por Piaget, como a abstração reflexionante é importante para a construção de conceitos matemáticos e esse aspecto foi considerado por Dubinsky e seus colaboradores ao refletirem sobre o desenvolvimento do pensamento de uma Matemática avançada. Mediante as informações apresentadas para esclarecer a abstração reflexionante, na próxima subseção discutiremos a respeito da Teoria APOE, trazendo as características dos elementos que a compõe.

2.2.2 Teoria APOE

Dubinsky e seus colaboradores, para desenvolver a Teoria APOE, relacionaram os aspectos da abstração reflexionante (interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade) com conceitos específicos da Matemática do Ensino Superior. Ao realizar essa relação, temos a construção de estruturas mentais – ação, processo, objeto e esquema – que caracterizam o uso da sigla APOE, tais estruturas serão explicitadas nos parágrafos que seguem.

A *ação* é uma transformação que um indivíduo realiza sobre um objeto matemático (ASIALA *et al.*, 1996). Essa transformação é executada explicitamente pelo indivíduo e precisa ser guiada por instruções externas, como seguir exemplos semelhantes ao que é solicitado. Além disso, as etapas usadas na ação sempre ajudam a invocar a próxima etapa necessária, visto que o indivíduo ainda não consegue identificar o que deve ser feito se "pular" alguma etapa. Dizemos que tem a *concepção-ação*[32], o indivíduo que evidencia a necessidade de apresentar o passo-a-passo, de seguir algum exemplo semelhante para realizar a transformação do que é solicitado.

A concepção-ação, de acordo com Dubinsky (1996), pode ser evidenciada da seguinte forma: quando um estudante não é capaz de interpretar uma situação obtendo uma função que a represente. Nesse caso, como o autor mostra, o estudante não consegue ir além de manipular fórmulas e encontrar pontos específicos.

Outro exemplo da concepção-ação é apresentado por Roa-Fuentes e Oktaç (2010). As autoras comentam que um indivíduo terá a concepção-ação de uma transformação linear se ele precisar de uma fórmula explicita que possibilite verificar as propriedades de linearidade partindo do seguinte questionamento: T é uma transformação linear?

Mesmo com a característica descrita a respeito da concepção-ação, Arnon *et al.* (2014, p. 20, tradução nossa) dizem que a "[...] ação é fundamental para a Teoria

---

[32] Na Teoria APOE concepção é entendida como a forma como o indivíduo lida com um objeto matemático. Assim temos: concepção-ação; concepção-processo; concepção-objeto.

APOE. Uma concepção-ação é necessária para desenvolver outras estruturas. Em particular, processos são ações interiorizadas, e objetos mentais surgem devido à aplicação de ações”[33]. Levando isso em consideração e refletindo a respeito do conceito de Sistemas de Equações Lineares, temos que no uso de um método de resolução, como o Escalonamento, podemos começar executando *ações* a fim de obter Sistemas de Equações Lineares equivalentes que possibilitem encontrar os valores das incógnitas.

Quando um indivíduo interioriza as ações evidencia-se a construção da estrutura mental *processo*. A interiorização acontece no momento em que o estudante após repetir as ações consegue refletir a respeito delas, percebendo que não é necessário executar explicitamente as etapas, além de ser capaz de pulá-las e revertê-las. A respeito disso, Dubinsky e McDonald (2002, p. 3, tradução nossa) comentam que “[...] um indivíduo pode pensar em realizar um processo sem realmente fazê-lo, e, portanto, pode pensar em invertê-lo e compô-lo com outros processos”[34]. Quando um indivíduo mostra indícios de realizar manipulações em conceitos matemáticos de forma mais “consciente” é dito que ele possui *concepção-processo*.

Dubinsky (1996) ressalta, que diferentemente da concepção-ação, na concepção-processo o indivíduo tem certo controle no que está realizando, sua atitude não é mais uma resposta a sinais externos, como, por exemplo, a dependência de seguir etapas para responder a uma questão.

Para exemplificar a concepção-processo, Dubinsky (1996) mostra que essa concepção permite ao indivíduo pensar no conceito função como algo que recebe uma ou mais entradas, isto é, os valores das variáveis independentes, nas quais são realizadas uma ou mais operações e que resulta nas saídas, os valores das variáveis dependentes. Outra situação relacionada à função é que na concepção-processo, o estudante consegue perceber que para construir um gráfico de uma Função Polinominal do 1º Grau pode-se usar apenas dois pontos.

Outro exemplo é dado por Stewart (2008) a respeito do conceito de autovalores e autovetores. A autora apresenta que para a concepção-processo é

---

[33] […] Actions are fundamental to APOS Theory. An Action conception is necessary for the development of other structures. In particular, Processes are interiorized Actions, and mental Objects arise because of application of Action.

[34] [...] An individual can think of performing a process without actually doing it, and therefore can think about reversing it and composing it with other processes.

necessário que o estudante perceba a existência de infinitos autovetores associados a cada autovalor e compreenda o processo de encontrá-los.

No momento em que o indivíduo toma consciência do processo como um todo temos a estrutura mental *objeto*. A respeito dessa estrutura mental, Dubinsky (2005, p. 339, *apud* ARNON *et al.*, 2014, p. 21, tradução nossa) comenta:

> Se alguém toma consciência do processo como uma totalidade, percebe que as transformações podem atuar nessa totalidade e pode realmente construir essas transformações (explicitamente ou na imaginação), então dizemos que o indivíduo encapsulou o processo em um objeto cognitivo. Para o conceito de função, o encapsulamento permite aplicar transformações de funções, como formar um conjunto de funções, definir operações aritméticas em um conjunto, equipá-lo com uma topologia, etc. [35]

Asiala *et al.* (1996) ressaltam que pode ser necessário que haja a desencapsulação do objeto no processo para que possam ser retiradas certas propriedades, que são necessárias para usar em outras manipulações de conceitos matemáticos. Em relação a essa observação, os autores a exemplificam recorrendo ao conceito de função, comentando que é necessário retirar certas propriedades para que sejam realizadas algumas operações, como a adição e a multiplicação de funções.

Quando um indivíduo consegue entender um conceito matemático em sua totalidade, convertendo um processo (dinâmico) em um objeto (estático) dizemos que ele possui a concepção-objeto. Nos parágrafos anteriores, trouxemos exemplos relacionados à concepção-objeto do conceito função.

Outro exemplo dessa concepção é apresentado por Stewart (2008) a respeito do conceito de base de um espaço vetorial. A autora comenta que um estudante manifesta a concepção-objeto quando opera em uma base, com certas transformações (por exemplo, rotação, reflexão) para fornecer outra base para o $\mathbb{R}^3$. Nesse caso, usando a nomenclatura adotada por Stewart (2008), o estudante apresenta a concepção-objeto-corporificado, a autora inclui o termo corporificado por

[35] If one becomes aware of the process as a totality, realizes that transformations can act on that totality and can actually construct such transformations (explicitly or in one's imagination), then we say the individual has encapsulated the process into a cognitive object. For the function concept, encapsulation allows one to apply transformations of functions such as forming a set of functions, defining arithmetic operations on such a set, equipping it with a topology, etc.

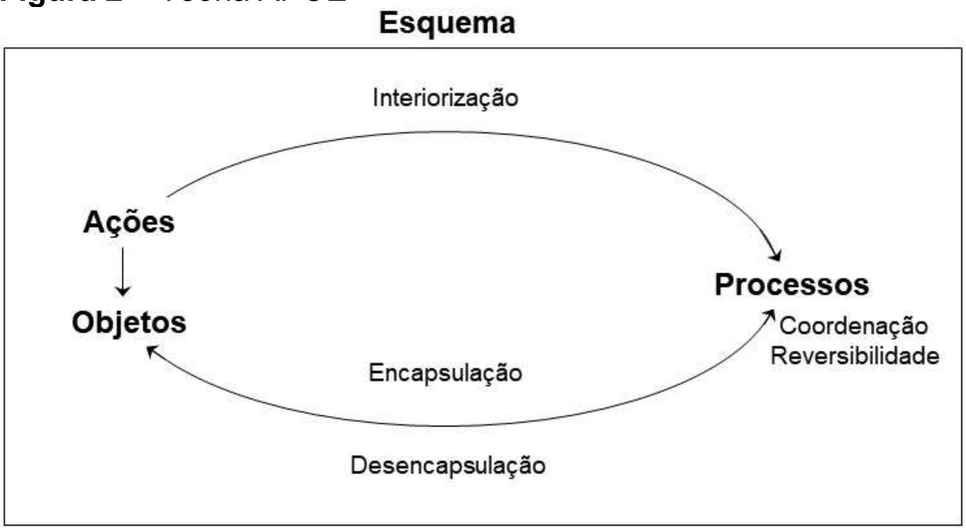
conta do uso dos Três Mundos da Matemática de Tall (2004), que se refere a forma como as coisas são percebidas e sentidas.

A estrutura mental *esquema* correspode a uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas (ARNON *et al.*, 2014). Dubisnky (2002) salienta que um esquema é caracterizado como uma estrutura dinâmica que está em constante reconstrução.

Ainda a respeito do esquema, Arnon *et al.* (2014) comentam que a coerência de um esquema está na capacidade do indivíduo saber quando essa estrutura mental pode ser utilizada para lidar com uma situação matemática específica.

As componentes da Teoria APOE podem ser ilustradas na Figura 2, a seguir:

Figura 2 – Teoria APOE



Fonte: ARNON *et al.*, 2014, p.18, tradução nossa.

Com a Figura 2 é possível observar que operamos *ações* nos *objetos*; as ações são interiorizadas em *processos* que podem ser coordenados e revertidos; esses processos são encapsulados em *objetos*; e os objetos podem ser, dependendo da necessidade, desencapsulados novamente em processos. Todas essas construções relacionadas à abstração reflexionante são partes de um *esquema*.

Do modo apresentado, seguindo uma perspectiva cognitiva, trouxemos como um conceito matemático pode ser construído, segundo a APOE. Essa característica de fragmentar um conceito levando em consideração a relação entre as estruturas mentais e os aspectos da abstração reflexionante recebe a denominação de *decomposição genética* que será discutida na próxima seção.

2.3 Decomposição genética

Uma decomposição genética (DG) é “[...] um modelo hipotético que descreve as estruturas mentais e os mecanismos que um estudante pode precisar construir para aprender um conceito matemático específico” (ARNON *et al.*, 2014, p. 27, tradução nossa)[36].

Arnon *et al.* (2014) salientam que uma DG pode ser construída com base nas experiências de ensino dos pesquisadores, em seus conhecimentos matemáticos, em pesquisas já publicadas e no desenvolvimento histórico do conceito.

Para construir uma DG é importante levar em conta aspectos das estruturas mentais e da abstração reflexionante, não a confundindo com uma descrição de uma sequência de ensino, usando inadequadamente os termos da Teoria APOE. O problema de realizar uma descrição desse tipo é considerar uma DG como uma simples lista de operações realizadas pelos estudantes (ARNON *et al.*, 2014).

Além disso, cabe ressaltar, de acordo com Arnon *et al.* (2014), que uma DG de um conceito não é única, por ser algo que sofre a influência de pesquisadores e até mesmo por meio de sua refinação, obtida pela observação da aplicação aos estudantes.

Em relação à refinação, García-Martínez e Parraguez-González (2015) comentam que depois de desenhada a DG é necessário revisá-la e/ou refiná-la. Para tanto, as autoras dizem que essa refinação pode ser feita por meio da observação na aplicação de atividades preparadas com base na decomposição genética ou na elaboração e na aplicação de instrumentos que comprovem se os estudantes analisados mostram as construções mentais pensadas na decomposição.

Arnon *et al.* (2014) mostram ainda que o refinamento de uma DG pode ser realizado por meio de um *ciclo de instrução → análise → refinamento*, o qual pode ser realizado quantas vezes o(a) pesquisador(a) achar necessário para descrever adequadamente como os estudantes constroem os conceitos matemáticos.

É interessante pensar que o refinamento é um ponto chave do ciclo de ensino desenvolvido por Dubinsky e seus colaboradores. Tal ciclo de ensino faz parte de um *framework* da Teoria APOE e foi proposto para o desenvolvimento curricular de

---

[36] [...] a hypothetical model that describes the mental structures and mechanisms that a student might need to construct in order to learn a specific mathematical concept.

cursos de graduação (DUBINSKY; MCDONALD, 2002). O *framework* proposto é discutido em Asiala *et al.* (1996), sendo mostrado que ele possui três componentes, como representado na Figura 3:

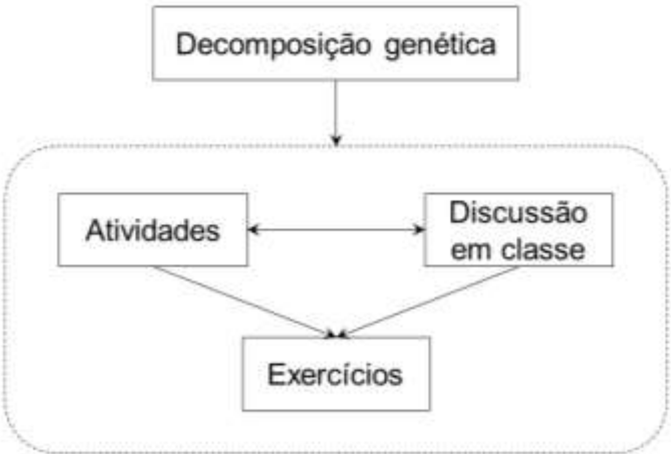
Figura 3 – Componentes do *framework* da Teoria APOE

Fonte: Asiala *et al.*, 1996, p. 5, tradução nossa

Na *análise teórica* busca-se compreender o significado de um conceito e como ele pode ser construído pelo estudante (ASIALA *et al.*, 1996). Como resultado dessa análise tem-se a decomposição genética de um conceito.

A outra componente do *framework*, *projetar e implementar instrução*, tem como base a análise teórica. Nessa parte, Dubinsky e seus colaboradores propõem uma possibilidade pedagógica denominada *ciclo de ensino ACE* que é constituído por três elementos: (A) atividades; (C) discussão em classe; e (E) exercícios. A DG é essencial para a realização do ciclo de ensino ACE (Figura 4), uma vez que por meio dela é possível elaborar tarefas que possibilitem ao aluno construções das concepções abordadas pela Teoria APOE.

Figura 4 – Relação entre o ciclo ACE e a decomposição genética



Fonte: ARNON *et al.*, 2014, p. 58, tradução nossa

As atividades propostas devem ser realizadas pelos alunos em equipes, nas quais eles resolverão tarefas projetadas visando às construções mentais sugeridas pela decomposição genética. Arnon *et al.* (2014) explicam que o foco desse primeiro elemento do ciclo é promover a abstração reflexionante. A discussão em classe envolve a discussão orientada pelo(a) professor(a) nas equipes a respeito das atividades para em seguida ser ampliada para a classe toda. Os exercícios são propostos para os estudantes realizarem em sua casa e consistem em problemas padronizados, com vistas a reforçar as atividades e a discussão em sala.

A terceira componente do *framework observações e avaliações* visa testar e refinar tanto a análise teórica quanto a instrução.

Considerando as características expostas, na subseção seguinte, apresentaremos a decomposição genética para o conceito Sistema de Equações Lineares.

2.3.1 Decomposição genética do conceito Sistema de Equações Lineares

A decomposição genética que descreveremos nos próximos parágrafos foi feita com base nos conhecimentos e na vivência como docente da professora pesquisadora e de sua orientadora, sendo refinada durante a aplicação do instrumento desenvolvido[37], no qual partimos da seguinte questão:

Que construções mentais são necessárias para aprender o conceito de Sistema de Equações Lineares?

Para a construção do conceito Sistema de Equações Lineares é necessário que o estudante tenha encapsulado o processo de Equações Lineares, isto é, tenha uma concepção-objeto acerca desse conceito, entendendo-o em sua totalidade.

A concepção-ação de Sistema de Equações Lineares pode ser evidenciada da seguinte forma: ao solicitar que um estudante classifique um Sistema de Equações Lineares, ele resolverá passo-a-passo, sem omitir etapa alguma, visto que essa é necessária para saber o que deve ser feito posteriormente. Além disso, algumas vezes, é necessário que o estudante recorra a exemplos de como aplicar algum método de resolução para resolver a situação proposta.

---

[37] Traremos mais detalhes do instrumento elaborado no capítulo 3 e no capítulo 5.

Após refletir e entender os procedimentos realizados, o estudante interioriza a ação descrita no parágrafo anterior em um processo. Desse modo, a concepção-processo de Sistema de Equações Lineares pode ser vista quando o estudante consegue perceber que um Sistema de Equações Lineares homogêneo é possível e indeterminado quando as equações são proporcionais, ou, quando ele consegue perceber o Sistema de Equações Lineares de duas equações e duas incógnitas não homogêneo será impossível se nas equações os coeficientes das incógnitas forem proporcionais e o termo independente não. O estudante nessa concepção consegue pular e reverter as etapas adotadas na resolução.

Uma outra situação que pode vir a caracterizar a concepção-processo é o entendimento e a relação da representação geométrica com a solução de Sistema de Equações Lineares, ou seja, o estudante compreende o porquê da solução de um sistema com duas equações e duas incógnitas ser representada pelas coordenadas do ponto em que as retas se interceptam, fazendo uso do conceito de retas concorrentes.

No momento em que o estudante encapsular os processos apresentados anteriormente como um todo, temos um objeto. Com isso, a concepção-objeto de Sistema de Equações Lineares pode ser notada na resolução de situações-problema, no momento em que o estudante consegue transcrever uma situação-problema valendo-se da linguagem algébrica e escolhendo o método de resolução mais adequado para a situação proposta.

Com essa DG descrevemos como o conceito de Sistema de Equações Lineares pode ser construído mediante a Teoria APOE. Desse modo, nesse capítulo trouxemos a Teoria APOE e no próximo capítulo discutiremos a Teoria Antropológica do Didático com vistas a contemplar o objetivo de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 3
TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo buscamos apresentar a Teoria Antropológica do Didático (TAD), trazendo os conceitos principais e que possibilitaram contemplar parte do objetivo dessa pesquisa, qual seja "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*".

Sendo assim, o capítulo foi organizado em três seções. Na primeira, apresentamos alguns elementos da TAD, de um modo geral, discutindo as noções primitivas e a noção de didático, para em seguida dar ênfase aos seguintes conceitos: praxeologia; objetos ostensivos e não ostensivos; noções de momentos didáticos e níveis de codeterminação. Na segunda seção, discorremos a respeito do modo como o Modelo Epistemológico de Referência (MER) pode ser entendido e apresentamos um MER para o conceito de Sistema de Equações Lineares. Por fim, na terceira seção, abordamos as Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) e o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), expondo uma proposta de PEP para a formação de professores de Matemática.

3.1 ELEMENTOS DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) busca estudar a atividade[38] matemática "[...] no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais[39]" (CHEVALLARD, 1999, p. 1, tradução nossa)[40]. Com isso, podemos pensar que a TAD almeja mostrar que a atividade matemática está inserida nos mais diversos contextos, mesmo que, segundo Chevallard (1999), estejamos acostumados a respeitar os limites feitos pelo mundo social, como, por exemplo, pensar que a atividade matemática é produzida apenas em instituições sociais.

Analisando os termos usados para nomear a teoria desenvolvida por Chevallard e seus colaboradores, temos que "didático" é utilizado para representar qualquer ação que pode ser adotada para contribuir para o ensino de alguma coisa

[38] Consideramos uma atividade como ato de se envolver com tarefas.
[39] Uma instituição social, como veremos ao longo dessa seção, pode-se referir a uma organização ou estabelecimento social.
[40] [...] em el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.

(CHEVALLARD, 2009, 2018). Podemos refletir a respeito dessa característica relacionando-a a situações do nosso cotidiano, como, por exemplo, encontrar uma bolacha no supermercado pela primeira vez.

No exemplo descrito, podemos identificar a existência de uma instância ($\hat{\imath}$), que pode ser uma pessoa ou uma instituição, que corresponde à gerência do supermecado, que disponibiliza placas indicando categorias de produtos nos corredores; a pessoa por meio dessas placas pode encontrar a bolacha, mas caso não consiga poderá buscar outras instâncias, como funcionários do supermercado, que auxiliarão na busca do item desejado.

Outro termo da teoria é "antropológico". Esse termo é empregado levando em consideração a forma como é proposto o estudo do didático, pois como Chevallard (2018, p. 23, grifo do autor) comenta

> [...] enquanto que as abordagens clássicas do *didático* tendem fingir explicar o que acontece na sala da aula, em um determinado sistema didático, quase exclusivamente pelo que os alunos realizam e pelo que o Professor desenvolve [*sic*], pelas condições e restrições *endógenas*, a TAD coloca que é necessário, para isso, considerar também condições e restrições *alienígenas*.

Com essa citação é possível entender que a TAD não olha apenas para os problemas evidenciados em uma sala de aula, sai desse contexto e considera outras instituições, como, por exemplo, a "instituição produtora do saber ensinado – a 'esfera acadêmica'" (CHEVALLARD, 2018, p. 23). No que tange às condições e restrições, comentadas tanto no aspecto endógeno quanto no aspecto alienígena, temos que

> [...] uma restrição é uma condição observada, de certa posição institucional a um certo instante, como *não modificável*, imutável (relativamente e provisoriamente); da mesma forma, uma condição é uma restrição modificável neste mesmo sentido (CHEVALLARD, 2018, p. 35).

Após tratarmos os termos que compõe a teoria desenvolvida por Chevallard e seus colaboradores, descreveremos nos próximos parágrafos os entes primitivos que são necessários para a TAD, a saber: os objetos (O); as pessoas (X) e as instituições (I).

Chevallard (1996, p. 197, tradução nossa) ressalta que os objetos têm uma posição privilegiada, visto que "[...] todas as coisas são objetos[41]", sendo que as pessoas e as instituições são objetos de um tipo particular. O autor comenta ainda que a existência de um objeto se dá "[...] a partir do momento em que uma pessoa X ou instituição I o reconhece como existente (para ela)" (CHEVALLARD, 1996, p. 127, tradução nossa)[42], ou seja, é necessário que a pessoa ou a instituição tenha alguma *relação* com o objeto.

Além disso, o estudioso comenta que nas primeiras análises da Transposição Didática, que corresponde às transformações adaptativas que uma obra sofre para ser ensinada (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997), os objetos eram restritos a aspectos matemáticos que são categorizados como:

> - paramatemáticos: ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos.
> - matemáticos: além de instrumentos úteis para estudar outros objetos matemáticos, tornam-se objetos de estudo em si mesmos.
> - protomatemáticos: apresentam propriedades utilizadas para resolver alguns problemas, sem contudo adquirir o *status* de objeto de estudo ou de ferramenta para o estudo de outros objetos (ALMOULOUD, 2007, p. 113).

A categorização descrita a respeito dos objetos pode ser exemplificada da seguinte forma: como objetos paramatemáticos temos a noção de demonstração; como objetos matemáticos ou noções matemáticas temos a noção de Sistema de Equações Lineares; e como objetos protomatemáticos temos a noção de padrão.

Com isso, é possível notar que a TAD ampliou a discussão acerca dos objetos, sendo que essa discussão fez com que Chevallard propusesse "[...] uma teorização em que qualquer 'objeto' pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto ('matemático'), mas existe igualmente o objeto 'escola', o objeto 'professor', [...], etc" (CHEVALLARD, 1996, p. 127, tradução nossa)[43].

---

[41] [...] *todas as coisas são objectos*.

[42] Um objecto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou instituição I o reconhece como existente (para ela).

[43] [...] uma teorização em que qualquer 'objecto' pudesse aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objecto ('matemático'), mas existe igualmente o objecto 'escola', o objecto 'professor' [...].

Desse modo, a didática passou a ocupar um campo mais amplo de discussão, o que corrobora para situar a "*didática no seio da antropologia*"[44] (CHEVALLARD, 1996, p. 128, tradução nossa, grifo do autor).

No que se refere às instituições (I), Chevallard (2018, p. 32) explica que elas são um dispositivo social que impõe a seus sujeitos a "implementação de maneiras de fazer e de pensar próprios". Além disso, Chevallard (1992, 1996) menciona que as instituições podem ser quase o que quer que sejam, como: uma escola, a sala de aula, trabalhos orientados, família, a vida cotidiana (em um dado meio social), dentre outros.

Todavia, Chevallard (1996) frisa que devido ao sentido corrente[45] pode haver estranheza ao dizer que objetos podem ser instituições, por exemplo, a escola pode ser um objeto, assim como, pode ser considerada uma instituição dependendo da abordagem realizada. Ainda, segundo o estudioso, "[...] cada instituição I está associada a um conjunto de objetos O_I, chamado conjunto dos objetos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional R_I (O)" (CHEVALLARD, 1996, p. 129, tradução nossa)[46].

Com relação à noção primitiva de pessoa (X), Chevallard (2018, p. 5, grifo do autor) argumenta que "*todo indivíduo é uma pessoa*". O autor traz essa informação para esclarecer outro conceito fundamental da TAD que se refere a noção de *relação pessoal* de um indivíduo (x) com um objeto, designada por $R(x, O)$, que representa todas as interações de x com O. É comentado também pelo estudioso que O existe para X, se a relação pessoal de x a O não é vazia, isto é, $R(x, O) \neq \emptyset$.

No que tange à aprendizagem de objetos (O) pela pessoa (X), Chevallard (1996) mostra que para ocorrer aprendizagem por X no momento que esse entra em uma instituição I é necessário que a relação de X com o objeto O se altere $R(X, O)$. Quando $R(X, O)$ não se altera diz-se que X nada aprendeu de novo com relação ao objeto O. Entretanto, o autor ressalta que não "[...] está pressuposto que a instituição I manifeste uma intenção de fazer com que as relações pessoais de X com determinados objetos se alterem [...]. É o fato de X se tornar um sujeito de I que

---

[44] [...] *didáctica no seio da antropologia*.

[45] De acordo com o dicionário Michaelis Online "instituição" pode ser entendida como: 1. Ato ou efeito de instituir ou estabelecer; instauração. 2. A própria coisa estabelecida. 3. (JUR) Designação de herdeiro por testamento. 4. (SOCIOL) Estrutura social, estabelecida por lei, que tem vigência em certo Estado ou para certo povo. 5. Estabelecimento de ensino; dentre outros significados.

[46] "[...] cada instituição I está associado um conjunto de objetos O_I, chamado conjunto dos objectos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional R_I (O)"

introduz, se for o caso, alterações cognitivas [...]" (CHEVALLARD, 1996, p. 131, tradução nossa)[47].

Após essa descrição dos entes primitivos da TAD, descreveremos a noção de praxeologia que, segundo Chevallard (2009), corresponde a um modelo único que descreve toda atividade humana regularmente realizada.

3.1.1 A noção de praxeologia

Chevallard (2006, p. 3, tradução nossa) traz uma discussão a respeito do que seria a praxeologia:

> Podemos nos basear na etimologia para nos orientar aqui – é possível analisar qualquer ação humana em dois componentes principais e inter-relacionados: *práxis*, ou seja, a parte prática, por um lado, e *logos*, por outro lado. "Logos" é uma palavra grega que, desde os tempos pré-socráticos, tem sido usada constantemente para se referir ao pensamento e raciocínio humano – particularmente sobre o cosmos[48].

A partir desse olhar etimológico para a palavra praxeologia o estudioso comenta que "práxis" e "logos" estão relacionados por meio de um princípio fundamental da TAD, que diz que: "[...] nenhuma ação humana pode existir sem ser, pelo menos, parcialmente 'explicada', tornada 'inteligível', 'justificada', 'explicada', em qualquer estilo de 'raciocínio'." (CHEVALLARD, 2006, p. 3, tradução nossa)[49]

Ainda a respeito da praxeologia, Bosch e Gascón (2014) comentam que ela é uma entidade composta por quatro componentes: tipos de tarefas, conjunto de técnicas, tecnologia e teoria.

Os *tipos de tarefa* (T), na maioria dos casos, são expressos por um verbo, por exemplo, *resolver os seguintes Sistemas de Equações Lineares*. Analisando o tipo de tarefa tem-se que o verbo é entendido como um gênero de tarefa, logo, no

---

[47] Não está pressuposto que a instituição I manifeste uma intenção de fazer com que as relações pessoais de X com determinados objectos se alteram [...]. É o facto de X se tornar um sujeito de I que introduz, se for o caso, alterações cognitivas [...]

[48] We can rely on etymology to guide us here – one can analyse any human doing into two main, interrelated components: *praxis*, i.e. the practical part, on the one hand, and *logos*, on the other hand. *"Logos"* is a Greek word which, from pre-Socratic times, has been used steadily to refer to human thinking and reasoning – particularly about the cosmos.

[49] The answer draws on one fundamental principle of ATD – the anthropological theory of the didactic – according to which no human action can exist without being, at least partially, "explained", made "intelligible", "justified", "accounted for", in whatever style of "reasoning" such an explanation or justification may be cast.

exemplo "*resolver os seguintes Sistemas de Equações Lineares*", tem-se que *resolver* é um gênero de tarefas, enquanto "*resolver os seguintes Sistemas de Equações Lineares*" é o tipo de tarefa.

As tarefas, tipos de tarefas e gêneros de tarefa, de acordo com Chevallard (1999, p. 9, grifo do autor, tradução nossa), "[...] não são dados da natureza, são 'artefatos', 'obras', *construções institucionais*, cuja reconstrução em uma instituição e, por exemplo, em uma classe, é um problema completo que *é o próprio objetivo do ensino*".

Para resolver os tipos de tarefas é necessária uma *técnica* (τ). No caso do exemplo "*resolver os seguintes Sistemas de Equações Lineares*", a técnica a ser adotada é a resolução empregando algum método (adição, substituição, comparação, representação gráfica, escalonamento, Cramer)[50] dos Sistemas de Equações Lineares propostos.

É válido ressaltar que Chevallard (1994) traz a discussão de tarefas rotineiras e tarefas problemáticas. As tarefas rotineiras são aquelas que possuem uma técnica eficiente para executar tarefas de um determinado tipo. Já as problemáticas são aquelas que ainda não possuem uma técnica, sendo necessário criá-la. Ainda em relação às tarefas, o estudioso comenta que elas deixam de ser tarefas quando na rotinização se tornam naturais.

Com relação à *tecnologia* (θ), essa se refere a um discurso racional a respeito da técnica. Tal discurso tem como objetivo justificar a técnica, assegurando que se possa realizar os tipos de tarefas. Todavia, nesse discurso tecnológico há afirmações que necessitam de um "[...] nível superior de justificação-explicação-produção" (CHEVALLARD, 2009, p. 5, tradução nossa)[51] que corresponde à *teoria* (Θ). Voltando ao exemplo do tipo de tarefa relacionado ao conceito abordado nessa tese, podemos pensar que a tecnologia associada a ele está fundamentada nas operações com Números Reais e Sistema de Equações Lineares e em relação à teoria temos os Espaços Vetoriais e os Anéis de Polinômios.

De modo geral, uma praxeologia é constituída por um bloco prático-técnico (*práxis*), que pode ser chamado de *saber-fazer*, e o bloco tecnológico-teórico (*logos*),

---

[50] Os métodos aqui descritos referem-se aos que são usualmente apresentados aos alunos até o Ensino Médio.

[51] […] a un nivel superior de justicación-explicación-producción […].

que, segundo Chevallard (1999), pode ser identificado como um “saber” no sentido usual do termo.

Na subseção seguinte trataremos dos objetos ostensivos e não ostensivos. A apresentação desses objetos auxilia no desenvolvimento das técnicas e das justificativas tecnológicas.

3.1.2 Objetos ostensivos e não ostensivos

Chevallard (1994, p. 4) traz a discussão a respeito do que seriam os objetos ostensivos e não ostensivos. Para tanto, começa apresentando alguns questionamentos: “[...] do que é feita uma técnica? De que ‘ingredientes’ ela é composta?” O estudioso afirma que por meio da observação da atividade humana é possível responder tais questionamentos, levando em consideração a distinção entre os chamados objetos ostensivos e não ostensivos que serão explicados nos próximos parágrafos.

Os objetos ostensivos, para Chevallard (1994), são aqueles objetos que possuem forma material, mas também são considerados objetos ostensivos: os gestos (ostensivo gestual), as palavras (ostensivo linguístico), os esquemas (ostensivo gráfico) e os formalismos (ostensivo escritural). Bosch e Chevallard (1999, p. 10, tradução nossa) comentam que esses objetos podem ser manipulados pelos indivíduos: “[...] um som pode ser emitido (e recebido), um gráfico pode ser desenhado (e lido), um gesto pode ser feito (e percebido), qualquer objeto material pode ser manipulado concretamente de várias maneiras”[52].

Já os não ostensivos são as noções, os conceitos, que, segundo Bosch e Chevallard (1999), são os objetos que existem institucionalmente, ou seja, é atribuída uma existência a eles, mas não é possível serem vistos, tocados, ouvidos ou ditos. Esses objetos não podem ser manipulados, sendo apenas evocados ou invocados por meio da manipulação de ostensivos associados (uma palavra, uma frase, uma escrita, um gesto, um gráfico, dentre outros) (CHEVALLARD, 1994; BOSCH, CHEVALLARD, 1999).

Como exemplo desses objetos, podemos considerar a tarefa T: Resolva o seguinte Sistema de Equações Lineares:

---

[52] [...] un son peut être émis (et reçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un geste peut être fait (et perçu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières.

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \tag{1}$$

É possível resolver (1) empregando algum método de resolução (não ostensivo), como o da adição. Com isso, o ostensivo linguístico apresenta um caminho a se seguir, auxiliando a entender o que é preciso ser feito, nesse caso, um possível ostensivo linguístico é o “método de resolução da adição”. Além disso, para realizar a ação correspondente, é preciso ter ostensivos escriturais adequados para um Sistema de Equações Lineares com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \cdot (-1) \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} -2x - y = -9 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{array}{r} -2x - y = -9 \\ 2x - 3y = 5 \\ \hline \end{array} + \tag{4}$$

Para realizar a adição das duas equações fazemos uso de um ostensivo gestual, pois indicamos que ao somar a primeira equação com a segunda “anularemos” o “x”:

$$\begin{array}{r} -\cancel{2x} - y = -9 \\ \cancel{2x} - 3y = 5 \\ \hline \end{array} +$$

$$-4y = -4 \tag{5}$$

$$y = 1 \tag{6}$$

Substituindo $y = 1$ na primeira equação de (1):

$$2x + 1 = 9 \tag{7}$$

$$2x = 8 \tag{8}$$

$$x = 4 \tag{9}$$

Logo, $S = \{(4,1)\}$.

Dessa forma, para resolver a tarefa proposta é necessário dispor de certo número de não ostensivos (Sistema de Equações Lineares e métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares) e de um sistema de ostensivos (linguístico, gestual e escritural). Vale ressaltar que ao resolver uma tarefa matemática há uma pluralidade de ostensivos que são adotados, não sendo possível ver um único ostensivo agindo independentemente dos demais.

Ainda a respeito desses objetos, Bosch e Chevallard (1999) comentam que a implementação de uma técnica é traduzida por uma manipulação de ostensivos regulados por não ostensivos. Os autores trazem ainda que os ostensivos constituem a parte perceptível da tarefa, sendo que a presença dos não ostensivos só pode ser verificada por meio da manipulação dos ostensivos associados. A partir do exposto, é possível notar que os objetos ostensivos constituem as praxeologias, visto que tais objetos são "[...] os ingredientes primários das técnicas, tecnologias e teorias (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 14, tradução nossa)[53]".

Bosch e Chevallard (1999) ao abordar as praxeologias a partir dos objetos ostensivos e não ostensivos, relatam que no nível tecnológico situam-se os conceitos e noções com vistas a controlar a atividade matemática. Os estudiosos comentam ainda que o discurso tecnológico é realizado pela manipulação de objetos ostensivos, em particular os discursivos (linguísticos) e os escriturais, visto que esses possibilitam materializar[54] as explicações e justificações necessárias. Concordamos com os autores quando esses relatam que a distinção dos objetos ostensivos e não ostensivos se faz presente no papel que eles desempenham na prática, pois ambos são usados tanto para explicar quanto para justificar a tarefa.

Após discorrer sobre os objetos ostensivos e não ostensivos, na subseção seguinte discutiremos as noções de momentos didáticos, pois tais momentos são necessários para o desenvolvimento de praxeologias.

3.1.3 Noções de momentos didáticos

Os momentos didáticos ou de estudo, de acordo com Chevallard (1999, 2002a), podem ser adotados para descrever uma organização matemática (OM) ou praxeologia matemática e uma organização didática (OD_θ). Uma organização didática pode ser entendida como a *maneira* pela qual se pode construir a realidade matemática que contribuirá para o estudo de um tema (θ). Vale ressaltar que,

[53] [...] les ingrédients premiers (et primaires) des techniques, des technologies et des théories [...].
[54] Entendemos por materializar como a ação de concretizar, de tornar visível.

conforme Chevallard (1999), uma realidade matemática é uma praxeologia matemática. Mediante a essas informações, entendemos que a organização didática corresponde a uma forma de organizar o estudo de um conceito matemático.

O estudioso, antes de descrever os momentos didáticos, ressalta que eles são uma realidade funcional e não cronológica do estudo, sendo assim, a ordem aqui exposta no decorrer de um estudo pode não acontecer na sequência apresentada, além de que tais momentos podem aparecer diversas vezes. A seguir descreveremos os seis momentos didáticos, segundo Chevallard (1999):

O *momento do primeiro (re)encontro* corresponde ao contato inicial com a organização matemática OM que está em estudo. De certo modo, refere-se ao primeiro (re)encontro com o objeto O, ou seja, o conteúdo matemático, no caso da nossa pesquisa o reencontro com o conceito de *Sistemas de Equações Lineares*. Esse primeiro encontro pode acontecer de várias maneiras, sendo que uma forma de ele ocorrer consiste em identificar ao menos um dos tipos de tarefas T_i que constituem a OM. O encontro com o tipo de tarefa pode acontecer várias vezes, devido aos ambientes matemáticos e didáticos no qual ele é produzido.

O *momento exploração do tipo de tarefa T_i e da elaboração de uma técnica* (τ_1) é o momento em que os alunos terão contato com tarefas problemáticas e por meio delas criarão técnicas de resolução a serem empregadas a problemas do mesmo tipo. Nesse segundo momento Chevallard (1999, p. 23, tradução nossa)[55] comenta que "[...] o estudo e a resolução de um problema de um tipo estará sempre atrelado a constituição de pelo menos um embrião de técnica, a partir do qual uma técnica mais desenvolvida poderá emergir". A partir desse comentário, é possível evidenciar que por meio da resolução de problemas poderemos chegar a uma técnica.

Um exemplo para esse segundo momento é a exploração da seguinte tarefa T_1 por estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, que pode evidenciar o uso da técnica "método da substituição":

T_1: *Resolva o seguinte Sistema de Equações Lineares* $\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ y = 2x \end{cases}$.

---

[55] […] el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado v siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual uma técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger […].

É possível notar que em T_1 a segunda equação do sistema linear tem apenas y no primeiro membro, e esse possui coeficiente igual a 1 (um). Dessa forma, é só realizar a substituição de y na primeira equação, deixando-a apenas com a incógnita x.

O *momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico* está, de certo modo, atrelado aos demais momentos. Com isso, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa há uma relação com um ambiente tecnológico-teórico elaborado que precisará de uma relação dialética com a emergência da técnica. Como exemplo para esse terceiro momento é possível explicitar que para a resolução de T_1 usamos a técnica "método da substituição".

O *momento de trabalho com a técnica* visa desenvolver a técnica envolvida tornando-a mais eficaz, o que, de acordo com Chevallard (1999), exige que a tecnologia elaborada anteriormente seja retocada. Para esse momento, ainda visando o 8º ano do Ensino Fundamental, podemos adotar mais tarefas semelhantes à T_1 e até mesmo tarefas que exijam encontrar e resolver um Sistema de Equações Lineares de uma situação-problema, como a seguinte tarefa T_2:

T_2: *Luiza precisa comprar cadernos e lápis para seus dois filhos. Para tanto, foi a uma papelaria e comprou* 3 *cadernos e* 4 *lápis pagando* $R\$\ 24{,}00$. *Ao verificar os preços, Luiza notou que o preço de um caderno é o quádruplo do preço de um lápis.*

Qual o preço de um caderno e de um lápis?

O *momento de institucionalização* tem por objetivo especificar a organização matemática elaborada, distinguindo os elementos que contribuíram para sua construção daqueles que serão integrados de maneira definitiva na organização matemática. A partir disso, podemos pensar que nesse momento os(as) alunos(as) buscam evidenciar, juntamente com o(a) professor(a), o que é necessário para realizar um procedimento, como o método de resolução para o Sistemas de Equações Lineares, que no caso do exemplo apresentado nessa subseção é o método da substituição.

O *momento de avaliação*, que se articula com o momento da institucionalização, é o momento de reflexão e também de verificar o que foi aprendido. Chevallard (1999) ressalta que mesmo parecendo que a avaliação é uma invenção da “escola”, ela participa de toda atividade humana.

Com os seis momentos descritos por Chevallard (1999) é possível analisar o funcionamento dos processos didáticos e até mesmo planejar de maneira clara a realização dos diferentes momentos de estudo. Após apresentar os momentos de estudo, na próxima seção, traremos a noção de níveis de codeterminação para auxiliar no estudo das condições e restrições envolvidas nas praxeologias.

3.1.4. Níveis de codeterminação

Ao analisar as condições e restrições envolvidas na difusão das praxeologias Chevallard (2002b) traz o conceito de níveis de codeterminação. Tal conceito, segundo Chevallard (2002b), possibilita verificar como os assuntos matemáticos vivem nas instituições e com isso, contribuir para o pesquisador em didática analisar em qual nível se encontram as condições e restrições para o desenvolvimento das praxeologias.

A questão de condições e restrições que podem ser analisadas pelos níveis de codeterminação refere-se à ideia de que em cada nível nos deparamos com algo que possa impulsionar ou limitar o processo educacional. Chevallard (2002b) argumenta que essas restrições ocorrem, pois uma organização matemática (praxeologia) não é feita no vácuo, há diversas interferências, como, por exemplo, a distorção de alguma orientação educacional apresentada pelo Ministério da Educação. Esse exemplo pode ser entendido como um limitante, ou seja, uma restrição, no processo educacional.

Levando em consideração essa questão das condições e restrições discutidas por Chevallard (2002b, 2007, 2013) apresentamos a seguir, na Figura 5, a escala dos níveis de codeterminação:

Figura 5 – Níveis de codeterminação

Humanidade
↕
Civilização
↕
Sociedade
↕
Escola
↕
Pedagogia
↕
Sistema didático
↕
Disciplina
↕
Domínios
↕
Setores
↕
Temas
↕
Tópicos

Fonte: Adaptado e traduzido de ARTAUD, 2019, p. 248

Vale ressaltar que a primeira escala de codeterminação apresentada por Chevallard (2002b) não continha os níveis “humanidade”, “civilização” e “sistema didático”. Em Chevallard (2002b) os níveis inferiores da escala eram: Disciplina ↔ Domínios ↔ Setores ↔ Temas ↔ Tópicos. Em Chevallard (2007) é apresentada a inserção do nível “civilização” e em Chevallard e Artaud (2016) e Chevallard (2013) a inserção do nível “humanidade” e do nível “sistema didático”. As modificações descritas ocorreram pela observação de que havia mais níveis, e até mesmo que os níveis poderiam ser fragmentados, com vistas a especificar as condições e restrições que poderiam ser encontradas no processo educacional.

O nível mais alto é o da *humanidade*, esse nível, segundo Chevallard (2002b), é único.

O nível *civilização* diz respeito ao modo como se olha para a realidade em que se vive. Assim, podemos refletir sobre a forma como as civilizações, seja ela ocidental ou oriental, definem o papel das Ciências e da Matemática, e a partir disso, notar a restrição existente na crença de que se pode encontrar uma ciência pronta e acabada, visto que isso não é possível, já que a ciência matemática ou didática está em aberto, há sempre algo a se refletir, complementar, ajustar com vistas a aperfeiçoá-las.

O nível *sociedade* é um dos níveis que mais apresenta restrições tanto limitantes quanto facilitadoras (CHEVALLARD, 2002b). O estudioso comenta que uma sociedade pode olhar para a mesma instrução dada em sua escola, a respeito de um assunto, a partir de vários pontos de vista, o que não contribui para que sejam criadas condições iguais para as salas de aula. Chevallard (2002b) traz dois pontos de vista para ilustrar as restrições para esse nível: o primeiro diz respeito às disciplinas que se têm nas escolas, as quais acabam sendo reduzidas a si mesmas deixando de ser notadas em sua totalidade, em matéria de conhecimento e de ação – esta abordagem é monumentalista[56] dos saberes e das obras –; o segundo refere-se à ideia de alguns projetos, dos anos 1990, que viam a escola diluída na sociedade civil, como uma rede de locais de difusão e validação de várias habilidades adquiridas sem referência aos conhecimentos “monumentais” e que seriam úteis na vida profissional dos estudantes.

O *nível escola*, de acordo Chevallard (2002b), é o nível de restrições e pontos de apoio que pertencem à própria instituição escolar, visto que podemos pensar nas inclusões das disciplinas abordadas nas escolas que são escolhidas em detrimento de outras. Ainda a respeito da escola, podemos pensá-la nas diferentes sociedades, pois se têm escolas de Educação Infantil, Ensino Fundamental (anos iniciais e/ou finais), Ensino Médio, Ensino Superior, dentre outras. Tendo em vista essas características, o estudioso, partindo da palavra grega “*skholé*”, comenta que escola pode ser entendida como instituição social dedicada ao estudo. Chevallard (2002b) explica ainda que por meio da escola há uma determinação de uma ecologia[57] e economia da disseminação do conhecimento na sociedade.

Ao encerrar a apresentação do nível escola, Chevallard e Artaud (2016, p. 16, tradução nossa) comentam que o próximo nível a se apresentar é o da *pedagogia*, sendo esse nível “[...] sede das condições e restrições essenciais ao destino do estudo escolar”[58]. Nesse nível, de acordo Chevallard (2002b), geralmente, as

---

[56] Chevallard (2004) traz nesse termo a ideia de que os estudantes são convidados a contemplar o que a sociedade construiu, isto é, os conceitos matemáticos que ao longo dos anos foram construídos pelos matemáticos.
[57] Chevallard em seus estudos costuma fazer analogias com termos das Ciências Biológicas como o caso de ecologia, que diz respeito ao estudo das relações de seres vivos com o meio em que habitam.
[58] […] siège de conditions et de contraintes essentielles au destin de l’étude scolaire.

retrições educacionais assumem a forma de um conjunto de métodos de estudo que precisa ser negociado com a autoridade pedagógica. Chevallard (2002b) traz que o nível pedagógico pode ser visto como uma fronteira entre os níveis mais elevados (humanidade, civilização, sociedade e escola) e os inferiores (sistema didático, disciplina, domínios, setores, temas e tópicos).

O *nível sistema didático* corresponde ao sistema definido em Chevallard (2007, 2011) representado simbolicamente por $S(X, Y, ♥)$, em que X corresponde aos alunos, Y à equipe de professores e ♥ a um desafio didático. Com relação à esse sistema, Chevallard (2011) afirma que há um caso particular representado por $S(X, \emptyset,$ ♥$)$ o que corresponde a um sistema autodidático, isto é, a equipe de professores é representada por um conjunto vazio ($Y = \emptyset$), visto que não há participação deles nesse sistema didático.

De acordo com Chevallard (2002b), a *disciplina* corresponde a um conjunto de *domínios* de estudo que se refere a uma organização matemática (OM) global formada de uma amálgama de várias OM regionais. As OM regionais correspondem a uma mistura de OM locais que admitem uma mesma teoria (Θ), que é associada ao *setor* de estudo. Um *tema* de estudo diz respeito a uma unidade em torno de uma tecnologia (θ), e quando temos isso estamos lidando com uma OM local. O nível *tópico* relaciona-se aos tipos de tarefas (T) e ao lidarmos com um tipo de tarefa temos uma OM local.

O estudioso comenta que o reconhecimento da hierarquia de níveis que vai da disciplina passando por domínios, setores e temas tem como objetivo permitir a identificação de uma ordenação das restrições que residem no estudo escolar, o que corrobora para evitar um desequilíbrio entre o que será levado em conta e o que será deixado para trás.

A seguir apresentamos o Quadro 4, no qual relacionamos os níveis de codeterminação didática com nossa pesquisa, com vistas a exemplificar sua aplicação:

Quadro 4 – Níveis de codeterminação didática em nossa pesquisa

Níveis de codeterminação	**Aspectos relacionados a nossa pesquisa**
Humanidade	Seres humanos modernos
Civilização	Ocidental
Sociedade	Ministério da Educação e Secretaria Estadual de Ensino
Escola	Ensino Superior
Pedagogia	Propostas de ensino
Sistema didático	Licenciandos em Matemática; Professora e Pesquisadora; Questão relacionada a como ensinar Sistema de Equações Lineares
Disciplina	Matemática
Domínio	Álgebra Linear
Setor	Sistema de Equações Lineares
Tema	O ensino de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio
Tópico	Tarefas envolvendo o ensino de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio

Fonte: a própria autora

Após essa descrição dos níveis de codeterminação e a relação deles com nossa pesquisa, abordaremos na próxima seção o modelo epistemológico de referência.

3.2 MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA

Bosch e Gascón (2010, p. 56, tradução nossa) discorrem que o modelo epistemológico se refere “a uma maneira particular de interpretar a Matemática”[59]. No estudo da Didática da Matemática podemos nos deparar com modelos epistemológicos *dominantes* e *alternativos* (GASCÓN, 2018). Os modelos epistemológicos dominantes são aqueles encontrados nas instituições, tais modelos

> [...] de certo domínio do saber matemático ensinado (numa determinada instituição) condiciona fortemente não apenas o tipo de atividades matemáticas que são possíveis de realizar nessa instituição em torno do campo matemático em questão, mas também as atividades didáticas correspondentes que são materializadas em um modelo *docente* (GASCÓN, 1994, 2001a apud GASCÓN, 2018, p. 60).

Gascón (2018, p. 61) ressalta que a pesquisa em didática tem avançado no sentido de buscar apresentar modelos epistemológicos alternativos que são usados como “[...] *sistema de referência* para construir fenômenos didáticos e para formular e abordar os problemas didáticos associados”. O estudioso comenta que tais

[59] [...] en una manera particular de interpretar las matemáticas.

modelos epistemológicos alternativos foram chamados explicitamente de *modelos epistemológicos de referência* a partir do ano 2000.

Bosch e Gascón (2007) comentam que os modelos epistemológicos são elaborados para encontrar respostas a perguntas relacionadas a qual matemática cujo ensino e aprendizagem se quer melhorar, no caso de nossa pesquisa "o ensino e aprendizagem de Sistema de Equações Lineares". Ainda, segundo os estudiosos em didática os MER são modelos teóricos básicos para o investigador e que, geralmente, são construídos a partir de dados empíricos de três instituições consideradas, a saber: "a comunidade matemática, o sistema educativo e a escola" (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 7, tradução nossa)[60].

Com base nas afirmações apresentadas nos parágrafos anteriores, é possível notar que o MER não é algo pronto e acabado, que é possível ao longo do estudo realizar adequações e complementações. Essa característica também é reforçada por Lucas, Bosch e Gascón (2014) que destacam que para construir um MER é necessário considerar uma hipótese provisória que será testada quando aplicada e com isso podem ocorrer modificações, além do fato do MER ser revisado constantemente. Tendo em vista nossa pesquisa, cabe ressaltar que no MER elaborado levamos essa característica em consideração, ou seja, sabíamos que dependendo da necessidade poderíamos revisitá-lo e realizar as modificações necessárias.

Referente à elaboração do MER, Sierra (2006) salienta que ele deve ser confeccionado com base nas praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas (OM) e que é necessário levar em consideração a evolução histórica[61] dessas OM, no caso da nossa pesquisa nossa OM é elaborada com base no objeto O matemático Sistema de Equações Lineares. Além disso, para o autor é preciso na construção do MER refletir sobre as restrições que podem existir nas instituições escolares que a OM será ensinada.

Mediante as características apresentadas anteriormente, bem como nos livros didáticos para o Ensino Médio e nos documentos oficiais (BRASIL, 2006; BRASIL, 2018), consideramos como ponto de partida a seguinte questão[62]:

[60] [...] la comunidad matemática, el sistema educativo y la escuela […].
[61] Para a evolução histórica de Sistema de Equações Lineares nos inspiramos no trabalho de LUCCAS (2004).
[62] Cabe salientar que a construção de nosso MER foi inspirada no trabalho de Sierra (2006).

Como expressar um problema que envolve várias equações lineares, por meio de uma representação escrita que pode se tornar uma ferramenta útil para a Álgebra Linear?

Uma resposta para esse tipo de questão é o uso de Sistema de Equações Lineares. Todavia, assim como ressalta Sierra (2006), poderia existir alguém que não dispunha da técnica para representar um problema com várias equações lineares, usando sistema de equações e com isso essa questão se torna um problema a ser resolvido, gerando um tipo de tarefa (T), que precisará de técnicas (τ) ou procedimentos para resolvê-lo, além de necessitar de definições, propriedades e teoremas que permitirão descrever e justificar o trabalho realizado.

Analisando a questão utilizada como ponto de partida é possível realizar outros questionamentos, tais como:

(1) Como resolver um Sistema de Equações Lineares?

(2) O que é possível dizer com relação à quantidade de soluções de um Sistema de Equações Lineares?

Analisando a questão *(1)* e verificando elementos históricos para encontrar a solução de Sistemas de Equações Lineares é possível notar, como salienta Luccas (2004), que os métodos da comparação e o da eliminação[63] são oriundos dos métodos da substituição e da adição.

O método da comparação consiste em isolar a mesma incógnita nas equações e, em seguida, realizar a "comparação", isto é, igualar os segundos membros das igualdades. Para elucidar o método descrito, apresentaremos a resolução do seguinte Sistema de Equações Lineares:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \tag{10}$$

Isolando a incógnita x nas equações de (10), temos:

[63] O método da Eliminação foi sistematizado pelo matemático Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e devido a isso esse método também é conhecido por Eliminação de Gauss.

$$\begin{cases} x = 4 - 2y \\ x = 3 - y \end{cases} \tag{11}$$

Realizando a comparação da primeira equação com a segunda, temos:

$$4 - 2y = 3 - y \tag{12}$$

Resolvendo a igualdade expressa em (12), obtemos o seguinte valor para y:

$$y = 1 \tag{13}$$

Uma vez encontrado o valor da incógnita y é possível, por substituição, encontrar o valor de x:

$$x = 2 \tag{14}$$

Outro método que pode ser empregado na resolução de sistema de equações lineares é o método de Eliminação, que é conhecido por Escalonamento. Esse método consiste em fazer uso de operações elementares nas equações[64] a fim de obter Sistemas de Equações Lineares equivalentes e a partir da comparação chegar a um sistema na forma escalonada, que apresenta o formato do exemplo a seguir:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad - 5y + 4z = 7 \\ \qquad -4z = -12 \end{cases} \tag{15}$$

Seguindo o desenvolvimento histórico, apresentado por Luccas (2004), chegamos a um método que se vale da ideia de Determinante e que foi sistematizado no método que conhecemos atualmente como Cramer[65]. A regra de Cramer consiste em calcular o determinante da matriz dos coeficientes do Sistema de Equações Lineares, desde que tenhamos a mesma quantidade de incógnitas e

[64] As operações elementares são: trocar a posição de duas equações; multiplicar uma equação por um escalar não nulo; somar à uma equação outra multiplicada por um escalar não nulo.
[65] Vale ressaltar que as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006) sugerem que não se use mais a regra de Cramer para a resolução de sistemas de equação 3x3. Todavia, trazemos esse método de solução, pois esse ainda se faz presente em alguns livros adotados nas escolas, já que no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2018 apresenta livros que trazem esse método.

equações, em seguida substitui-se os termos independentes em cada coluna da matriz dos coeficientes e calcula-se os seus respectivos determinantes, uma vez que os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}; x_3 = \frac{D_3}{D}; \dots x_n = \frac{D_n}{D} \quad (16)$$

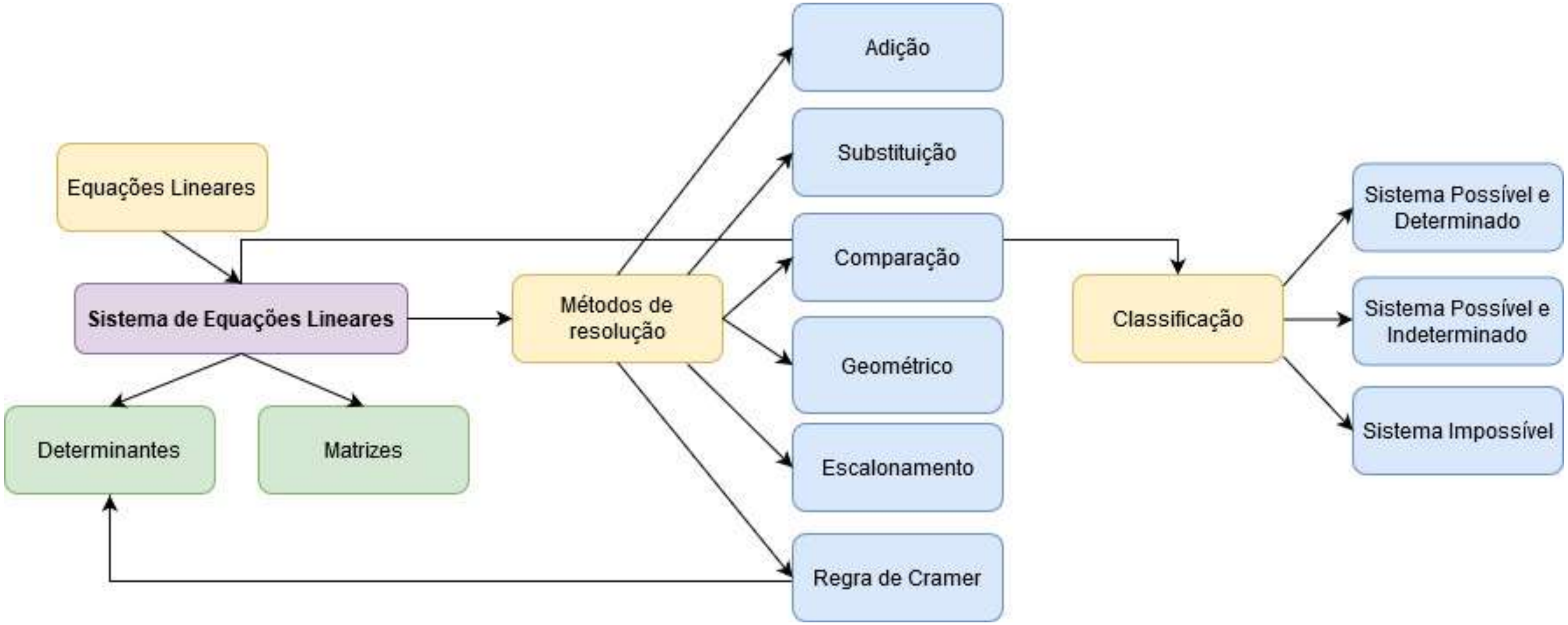
Em que $D \neq 0$.

Cabe ressaltar que inicialmente os conceitos de Determinantes e Matrizes estavam associados à Sistema de Equações Lineares, mas depois seus estudos foram feitos de forma independente: Determinantes no século XVIII e Matrizes no século XIX (LUCCAS, 2004).

Considerando a questão (*2*), “O que é possível dizer com relação à quantidade de soluções de um Sistema de Equações Lineares?”, vemos que essa ideia está relacionada à classificação de um Sistema de Equações Lineares, isto é, se o sistema linear pode ser possível e determinado (única solução) ou possível e indeterminado (infinitas soluções) ou impossível (não possui solução).

Levando em consideração o que foi exposto nessa seção, apresentamos na Figura 6 o MER elaborado para nossa pesquisa:

Figura 6 – Modelo Epistemológico de Referência para o conceito de Sistemas de Equações Lineares



Fonte: a própria autora

Para o MER, apresentado na Figura 6, escolhemos a cor alaranjada para destacar o conceito “equações lineares”, pois a partir dele chegamos à ideia de Sistema de Equações Lineares. As demais informações na cor alaranjada remetem aos questionamentos: “(*1*) Como resolver um Sistema de Equações Lineares?[66] (*2*) O que é possível dizer com relação à quantidade de soluções de um Sistema de Equações Lineares?”

As informações na cor azul referem-se a possíveis respostas aos questionamentos feitos e na cor verde temos os conceitos atrelados ao estudo de Sistemas de Equações Lineares. A ordem que colocamos tais conceitos leva em conta o caráter histórico, descrito por Luccas (2004), no qual temos primeiro a ideia de Determinante e em seguida de Matriz.

Após a descrição do MER, apresentamos, na sequência, o que seria o percurso de estudo e pesquisa (PEP) e as atividades de ensino e pesquisa (AEP), bem como sua adoção em nosso trabalho.

3.3 O Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e as Atividades de Ensino e Pesquisa (AEP)

O percurso de estudo e pesquisa (PEP) pode ser entendido, segundo Parra e Otero (2018), como um dispositivo didático que possibilita gerar relações pessoais de indivíduos com os saberes, visto que no PEP são colocadas perguntas como ponto de partida dos processos de estudo. As autoras comentam ainda que as perguntas utilizadas no PEP são questões que não possuem resposta em uma simples busca de informações, “[...] é necessário a construção ou reconstrução de uma obra matemática ou de um conjunto delas. As perguntas que possuem essas características se denominam perguntas geratrizes”[67] (p. 2). Considerando essa característica da pergunta geratriz utilizamos em nossa pesquisa a seguinte questão[68]:

---

[66] Os métodos de resolução apresentados como possíveis respostas são os que são utilizados no Ensino Médio.

[67] […] que sea necesaria la construcción o reconstrucción de una obra matemática o de un conjunto de ellas. Las preguntas que poseen estas características se denominan preguntas generatrices.

[68] A escolha por essa questão se deu a partir da necessidade de fazer com o que os futuros professores de Matemática refletissem sobre uma situação que poderia aparecer em sua prática. Essa constatação foi realizada em uma conversa com a Profa. Dra. Marlene Alves Dias e com a minha orientadora Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Q_0: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*

Em torno dessa questão é formado um sistema didático $S(X, Y, Q)$, em que X é turma de estudantes, no nosso caso os estudantes do 4º ano da Licenciatura em Matemática, Y uma equipe de professores, em nossa pesquisa a minha orientadora e eu. De acordo com Chevallard (2009), o objetivo desse sistema didático é estudar a questão Q com vistas a encontrar uma resposta R, com isso, como resultado do trabalho esperado de X sob a orientação e supervisão de Y, temos a seguinte representação:

$$S(X, T, Q) \hookrightarrow R$$

A seta ($\hookrightarrow$) significa que a resposta será produzida pelo sistema didático. Ainda é interessante ressaltar, assim como apresentado em Chevallard (2009), que essa investigação em torno da questão mobiliza ferramentas praxeológicas de várias disciplinas.

Chevallard (2009) comenta que para elaborar a resposta R é necessário organizar um meio de trabalho M. Tal meio reunirá recursos antigos e novos que X poderá usar. O estudioso discorre a respeito desses recursos, mostrando que alguns desses serão respostas prontas para a questão geratriz proposta (Q). Essas respostas são validadas por instituições e são denotadas por $R^{\Diamond}$ ("R punção"), porque elas deveriam ter recebido um "carimbo" institucional.

A partir da análise da $R^{\Diamond}$, Chevallard (2009) explica que elas fornecerão materiais para a construção da resposta esperada, agora denotada por $R^{\heartsuit}$ (R coração). Por meio da descrição de como chegar a resposta esperada, Chevallard (2009, p. 2) traz um esquema que a representa, que é chamado de *esquema herbartiano*[69]:

$$(S(X, Y, Q) \curvearrowright M) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

[69] O esquema possui esse nome em homenagem a Johann Friedrich Herbart (1776 – 1841) um filósofo, psicólogo, pedagogo alemão.

Com esse esquema notamos que o sistema didático constrói e organiza ($\curvearrowright$) o meio de trabalho M com o qual se gerará ou produzirá ($\hookrightarrow$) a resposta $R^{\heartsuit}$. Parra e Otero (2018), baseadas nos textos de Chevallard, comentam que o meio M é o conjunto de todos os recursos úteis para a construção de $R^{\heartsuit}$, desse modo:

$$M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge},\ O_{n+1}, \dots, O_m\}$$

A partir disso, Chevallard (2009) traz o seguinte *esquema herbartiano desenvolvido*, considerando tais recursos:

$$[S(X, Y, Q) \curvearrowright \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge},\ O_{n+1}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Santos Júnior (2017, p. 104) realiza uma ressalva com relação à gênese do PEP comentando que a TAD inicialmente havia proposto um sistema didático “[...] voltado a organizações praxeológicas pontuais, que é a Atividade de Estudo e de Pesquisa (AEP)”.

Levando em consideração as AEP, Chevallard (2009) comenta que o primeiro princípio é tentar não criar AEP isoladas, visando explorar apenas um conteúdo. Todavia, o autor diz que pode haver AEP “pequenas”, mas que essas não sejam tão fechadas. A partir dessas considerações, o teórico aponta que um programa educacional pode ser estudado por um número finito de AEP que podem ser chamadas de PEP. Com isso, podemos notar que um PEP pode resultar de um conjunto de AEP elaboradas para discutir os conceitos matemáticos de forma diferenciada.

Com base no exposto nessa seção e tendo em vista que nossa proposta é destinada a formação de professores, buscamos realizar certas adaptações em nosso PEP (PARRA; OTERRO, 2018, BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2019), inicialmente com relação à questão geratriz que busca colocar os futuros professores em contato com um assunto que lecionarão na Educação Básica. Desse modo, na próxima subseção apresentamos uma proposta de PEP para licenciandos em Matemática.

3.3.1 Proposta de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

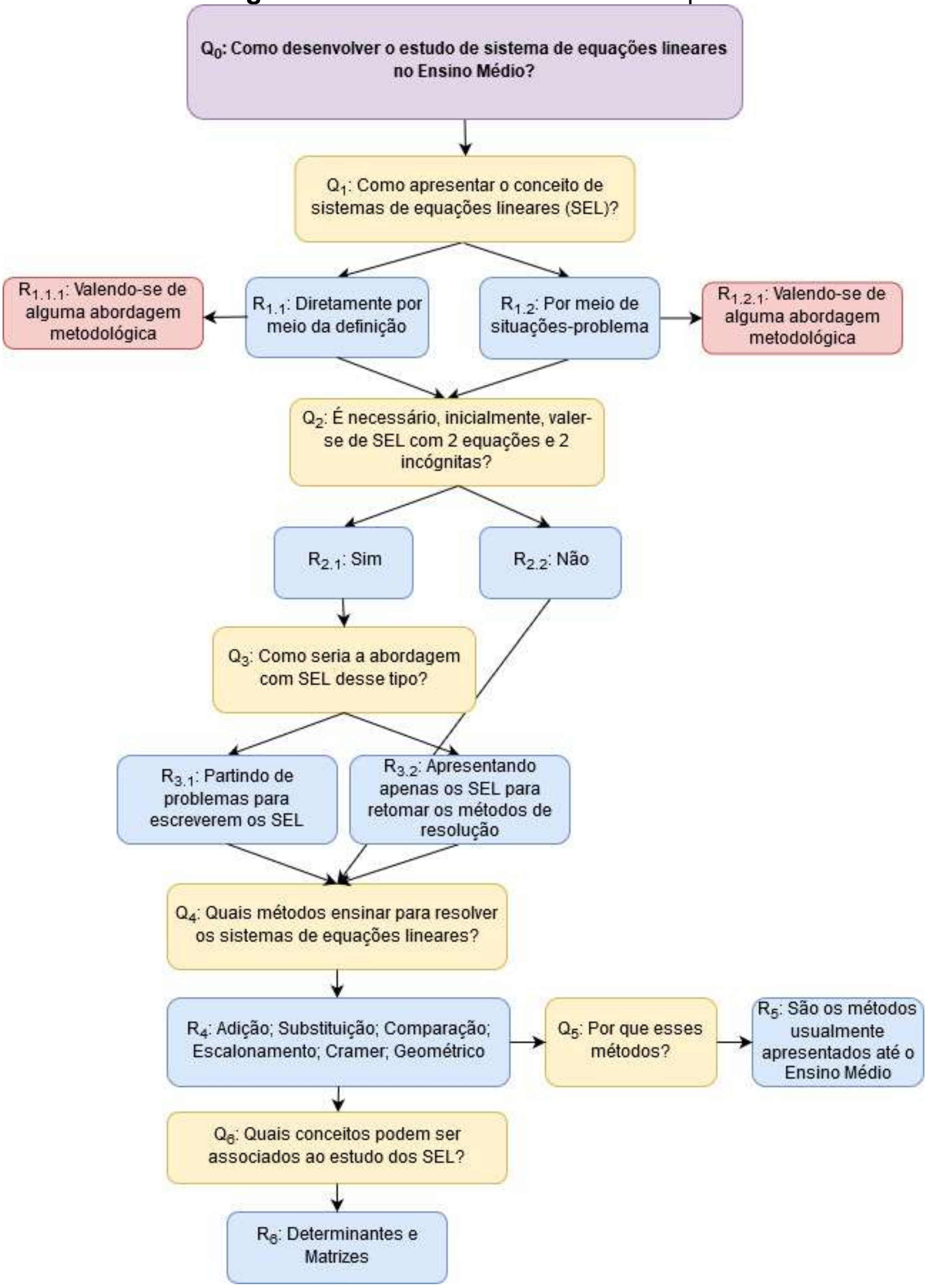
A proposta de um PEP para a formação de professores (PEP-FP) buscou colocar os licenciandos em contato com uma questão direcionada a sua futura prática profissional, valendo-se de um conceito, especificamente, Sistema de Equações Lineares, com vistas a proporcionar a reflexão da importância desse conceito em sua graduação. Tendo em vista essa característica, esse seria o primeiro módulo de um PEP-FP de acordo com Barquero, Bosch e Romo (2019), ou seja, nosso ponto de partida foi uma questão relacionada à profissão docente referente a certo conhecimento matemático a ser ensinado.

Desse modo, considerando o *esquema herbartiano desenvolvido* apresentado em Chevallard (2009):

$$[S(X,Y,Q) \curvearrowright \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge},\ O_{n+1}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

propomos a Figura 7, na qual expomos Q_0, a saber: *"Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?"*, e uma primeira organização das questões e respostas validadas por uma ou mais instituições ($R^{\lozenge}$) que correspondem aos possíveis caminhos a serem seguidos por X, isto é, a turma de licenciandos em Matemática participantes da pesquisa. Cabe ressaltar que esses possíveis caminhos foram elaborados com base nas experiências da docência da professora pesquisadora e de sua orientadora.

Figura 7 – Percurso de Estudo e Pesquisa



Fonte: a própria autora

Assim, como exposto antes de apresentar o PEP proposto, é interessante ressaltar que ele traz uma previsão de caminhos que os licenciandos podem seguir.

Todavia, tais caminhos podem não ser os mesmos que traçamos no nosso PEP e nesse caso, como advertido por Santos Júnior (2017, p. 322), “[...] é importante levá-los em consideração, avaliar como este novo caminho irá ajudar na busca da resposta $R^{♥}$ e reestruturar os caminhos no mapa exposto [...]”. Considerando essa característica, no PEP-FP apresentado na Figura 7 inserimos a resposta “abordagem metodológica”.

O PEP-FP dessa pesquisa pode ser explicado à luz dos módulos propostos por Barquero, Bosch e Romo (2019). O primeiro módulo já foi exposto antes da Figura 6, todavia, o traremos novamente para compor os aspectos que adotamos em nosso PEP-FP:

1 – *Explicitação da razão de ser do PEP-FP*: adotamos uma questão aberta com foco na prática profissional (Q_0). Nesse primeiro módulo os licenciandos são convidados a buscar respostas disponíveis em diferentes materiais (livros didáticos; orientações curriculares, dentre outras).

2 – *Viver um PEP*: propõe que os licenciandos atuem como alunos diante da proposta. Esse módulo não foi adotado em nossa pesquisa da forma como descrito pelas pesquisadoras, visto que não apresentamos um PEP de Sistema de Equações Lineares para o Ensino Médio, para que os licenciandos pudessem viver essa experiência.

3 – *Analisar o PEP vivido*: “Uma vez que os professores em formação tenham vivido esta proposta do ponto de vista dos estudantes, eles podem começar a analisar a atividade desenvolvida centrando principalmente em realizar uma análise espistemológica e didática do PEP vivido [...]”[70] (BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2019, p. 494, tradução nossa). Esse módulo também não foi adotado em nossa pesquisa.

4 – *Desenho de um PEP*: os licenciandos serão colocados como “desenhadores” e eles podem propor adaptações ou desenhar a sua própria versão de atividade para um grupo específico de estudantes.

5 – *Experimentação, gestão e análise do PEP adaptado*: é solicitado, posteriormente, que os licenciandos experimentem e descrevam sua proposta didática em condições escolares reais. “O objetivo desta etapa é desenvolver uma

---

[70] Una vez los profesores en formación han vivido esta propuesta desde el rol de estudiantes, se les pide empezar a analizar la actividad desarrollada, centrándonos principalmente en realizar un análisis epistemológico y didáctico del REI vivido.

análise *a priori* e a *posteriori* da proposta”[71] (BARQUERO, BOSCH; ROMO, 2019, p. 494, tradução nossa). A partir dessa análise pretende-se que os futuros professores conduzam análises críticas das práticas de ensino tradicional[72] e o estudo das potencialidades de se adotar novas propostas.

Com esse capítulo buscamos apresentar aspectos relacionados à TAD e à forma como esses fizeram-se presentes em nossa pesquisa. No próximo capítulo versaremos a respeito da relação entre a Teoria APOE e a TAD na formação de professores.

[71] El objetivo de esta etapa es desarrollar un análisis *in vivo* y *a posteriori* de dicha propuesta.
[72] Entendemos por ensino tradicional aquele em que os alunos são passíveis frente ao ensino e aprendizagem dos conteúdos.

CAPÍTULO 4
TEORIA APOE E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: UM DIÁLOGO PARA A FORMAÇÃO INICIAL EM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos uma possibilidade de diálogo entre a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) com vista a contemplarmos o objetivo geral dessa tese, a saber: *desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*.

Desse modo, dividimos este capítulo em duas seções: a primeira discute aspectos gerais relacionados aos diálogos possíveis com as duas teorias. Na segunda seção apresentamos a nossa proposição de diálogo voltado para a formação inicial de professores de Matemática.

4.1 Diálogos possíveis entre a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático

Ao longo dos anos várias teorias e modelos foram desenvolvidos para compreender os fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. Sendo que, atualmente, os pesquisadores em Educação Matemática começaram também a realizar um processo de comparação entre as teorias desenvolvidas, pretendendo articulá-las para criar um novo referencial teórico (TRIGUEROS; BOSCH; GASCÓN, 2011).

A respeito da articulação de teorias, Bosch, Gascón e Trigueros (2017) comentam, com base em Artigue *et al.* (2011), que é necessário ter um modelo epistemológico a respeito do que é pesquisa científica e como ela evolui. A ideia sobre a articulação ou interação entre teorias necessita de ferramentas para questionar a epistemologia assumida, afetando, assim, vários aspectos das teorias, como: as questões abordadas, os tipos de resultados considerados aceitáveis, dentre outros.

Com base nas ferramentas para questionar a epistemologia assumida nas teorias e considerando que as teorias científicas devem respeitar a coerência entre seus compromissos ontológicos e suas normas metodológicas[73], Trigueros, Bosch e Gascón (2011) apresentaram um artigo intitulado “Três modalidades de diálogo entre APOE e TAD”[74]. Depois desse artigo publicado em 2011 há mais três (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015; TRIGUEROS, 2016; BOSH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017) que tratam desse diálogo, porém, cabe salientar que um diálogo entre as teorias foi parcialmente apresentado em Gascón (2003).

Inicialmente Trigueros, Bosch, Gascón (2011, p. 82-83, tradução nossa) comentam que poderia ser feito um diálogo partindo dos tipos de problemas, porém isso não é possível, visto que, tendo como base o princípio epistemológico, “[...] os fatos empíricos não constituem uma base objetiva (e independente da PP [praxeologia de pesquisa]) da qual os problemas surgirão”[75]. Mesmo com essa restrição os estudiosos ponderam que é possível criar problemas próximos que levam em consideração os aspectos das *praxeologias de pesquisa* (PP) ou das teorias científicas, mas que é mais interessante e proveitoso envolver todos os componentes das duas PP.

Tanto a APOE quanto a TAD questionam como “[...] programas, livros didáticos e instituições de ensino descrevem a Matemática a ser ensinada. Para resolver esse questionamento, elas constroem alternativas como parte de sua metodologia de pesquisa”[76] (TRIGUEROS, BOSCH, GASCÓN, 2011, p. 90, tradução nossa). Desse modo, notamos que as PP usam a Matemática Escolar como parte de seu estudo.

Partindo do questionamento da Matemática Escolar temos a primeira modalidade de diálogo entre as PP (TRIGUEROS; BOSCH; GASCÓN, 2011; BOSH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017). Nessa primeira modalidade temos uma aproximação entre a decomposição genética (DG) de um conceito matemático e o modelo epistemológico de referência (MER).

Para essa aproximação, os estudiosos comentam que na DG considera-se um “aluno genérico” para construir conceitos matemáticos levando em conta as

---

[73] *Compromissos ontológicos* referem-se ao tipo de entidade que deve ser levada em consideração na pesquisa e *normas metodológicas* relacionam-se a como realizar uma investigação (LAUDAN, 1977 *apud* TRIGUEROS; BOSCH; GASCÓN, 2011).
[74] Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD.
[75] [...] los hechos empíricos no constituyen una base objetiva (e independiente de las PI) de donde surgirían los problemas.
[76] [...] la forma en que los programas, los libros de texto y las instituciones docentes describen las matemáticas a enseñar. Para llevar a cabo este cuestionamiento, construyen alternativas a las mismas como parte de su metodología de investigación.

ações, os processos, os objetos e os esquemas e esse aluno genérico pode ser entendido como “sujeito na posição de estudante” e a partir dele temos o ponto de aproximação entre as PP:

> O diálogo no nível teórico estendeu essa noção de ambos os lados: na APOE, a referência a um aluno não significa necessariamente um indivíduo específico, mas qualquer aluno que seja capaz de construir o conceito ou tópico em consideração; na TAD, a posição institucional do aluno deve ser descrita de maneira mais detalhada[77]. (BOSCH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017, p. 44, tradução nossa)

Desse modo, temos a noção de “estudante genérico de uma instituição”[78] (TRIGUEROS, 2016, p. 31, tradução nossa) que amplia as noções tratadas na APOE e na TAD e com isso “[...] a dimensão institucional de análise com a TAD pode ser trabalhada por meio da noção de aluno genérico da APOE e a descrição cognitiva da APOE pode ser integrada à da TAD, desenvolvendo a posição do aluno em uma determinada instituição”[79] (TRIGUEROS, 2016, p. 32, tradução nossa).

Essa ideia do estudante genérico de uma instituição possibilita elaborar uma DG considerando a instituição a qual o aluno genérico pertence, visto que não propomos atividades baseadas em uma DG iguais para o Ensino Médio e para o Ensino Superior. A situação descrita pode ser exemplificada da seguinte forma: ao levar em conta a construção do conceito de Matrizes, as atividades do Ensino Médio não se referirão a Espaços Vetoriais; no entanto, no Ensino Superior as construções associadas a Espaços Vetoriais aparecerão de maneira relevante. Sendo assim, “[...] incluir a relatividade institucional à DG de um conceito ampliará a problemática da APOE sem contradizer qualquer de suas bases”[80] (BOSCH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017, p. 49, tradução nossa).

A segunda modalidade integra componentes técnicos e tecnológicos (TRIGUEROS, BOSCH, GASCÓN, 2011; TRIGUEROS, 2016; BOSH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017). Nessa modalidade de diálogo é evidenciado que ambas

---

[77] The dialogue at the theoretical level has extended this notion on both sides: in APOS, the reference to a student does not necessarily mean a specific individual, but any student who is able to construct the concept or topic under consideration; in the ATD, the student’s institutional position has to be described in a more detailed way.
[78] “estudiante en una posición institucional”.
[79] […] la dimensión institucional del análisis con TAD se puede trabajar a través de la noción del estudiante genérico de APOE y la descripción cognitiva de APOE puede integrarse a la de la TAD mediante el desarrollo de la posición del estudiante en una institución determinada.
[80] [...] including the institutional relativity of the GD of a concept will broaden the APOS problematic without contradicting any of its bases.

praxeologias de pesquisa podem se beneficiar da reinterpretação dos resultados e da metodologia, assim, nos próximos parágrafos abordaremos as reinterpretações propostas para esse diálogo.

Partindo da Teoria APOE, da diferenciação das concepções, é possível reformular a TAD no sentido das técnicas adotadas na execução de tipos de tarefas (ou problemas). Desse modo, temos, de acordo com Trigueros, Bosch e Gascón (2011):

(1) *técnica-ação*: quando há uma sucessão de ações arbitrarias que justificam o uso de uma técnica em uma instituição, pelo simples fato dessa funcionar; ou quando não há variação da técnica na instituição, ela não se mistura e nem compõe outras técnicas, pois são aplicadas para executar tarefas específicas, predefinidas e isoladas.
(2) *técnica-processo*: quando uma técnica pode ser descrita, interpretada e justificada por um discurso teórico-tecnológico; é flexível, existindo variações da técnica, sendo articulada ou coordenada com outras técnicas para formar técnicas mais complexas.
(3) *técnica-objeto*: quando em uma instituição I uma técnica é efetivamente tomada como objeto de estudo. Na instituição aparecem tarefas que permitem responder questões relacionadas à validade da técnica e a relação dela com outras técnicas.

Ainda partindo da APOE é possível usar os níveis de desenvolvimento de um esquema – intra, inter e trans – relacionando-os à dinâmica de construção e desenvolvimento de praxeologias, contribuindo para mostrar o papel desempenhado pelas técnicas e tecnologias (TRIGUEROS, BOSCH, GASCÓN, 2011; TRIGUEROS, 2016; BOSH, GASCÓN, TRIGUEROS, 2017).

Agora, usando elementos da TAD para reinterpretar a APOE é possível estabelecer relações entre o ciclo ACE (Atividade – discussão em Classe – Exercícios) e os momentos didáticos, no sentido que esse último possa contribuir para analisar as atividades de ensino projetadas pelo ciclo ACE. Além disso, os momentos podem ajudar a sugerir novas atividades que sejam congruentes com a DG associada, sendo interpretadas na TAD como a produção de novas relações entre praxeologias (momento teórico-tecnológico). Com isso, “[...] os benefícios da aplicação da análise metodológica da TAD ao ciclo ACE poderiam ser incorporados tanto no equilíbrio dos momentos didáticos quanto na necessidade de declarar explicitamente a lógica de toda a atividade”[81] (BOSCH; GASCÓN; TRIGUEROS, 2017, p. 49), fornecendo uma emancipação institucional da APOE.

A terceira modalidade parte da consideração de problemas comuns, sendo deixada como uma fase futura da pesquisa. Trigueros, Bosch e Gascón (2011, p. 108, tradução nossa) sugerem:

> [...] retomar um trabalho que, com base em um problema de pesquisa didática construído por uma das PP, seja possível reformulá-lo com as ferramentas teóricas e metodológicas fornecidas pela outra PP, ampliando e aprofundando a prática científica de ambos[82].

E a partir dessa retomada reconhecer novas funcionalidades, bem como os problemas e as dificuldades desse diálogo.

Após essa descrição de diálogos entre a Teoria APOE e a TAD, na próxima seção descreveremos uma proposta de diálogo para a formação inicial de professores de Matemática, em específico, para o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, tomando como exemplo, o conceito Sistema de Equações Lineares.

4.2 Um diálogo entre a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático voltado à formação inicial de professores de Matemática

Para apresentar o diálogo que propomos, é necessário, inicialmente, pontuar que para a elaboração tanto da nossa decomposição genética (DG) quanto do nosso modelo epistemológico de referência (MER) realizamos adaptações necessárias no que tange às componentes teóricas e metodológicas relacionadas às duas teorias na seguinte questão levantada em nossa pesquisa:

Como ensinar o conceito de Sistema de Equações Lineares?

---

[81] […] the benefits of applying the ATD’s methodological analysis to the ACE cycle could be to incorporate both the equilibrium of the didactic moments and the need to explicitly state the rationale of the whole activity.

[82] [...] retomar un trabajo que, partiendo de un problema de investigación didáctica construido por una de las PI, sea posible reformularlo con las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona la otra PI ampliando así y profundizando la práctica científica de ambas.

A partir das adaptações necessárias levando em consideração aspectos das teorias tratadas nesse estudo apresentamos as seguintes questões[83]:

APOE: *Que construções mentais são necessárias para aprender o conceito de Sistema de Equações Lineares?*

TAD: MER: *Como expressar um problema que envolve várias equações lineares por meio de uma representação escrita que pode se tornar uma ferramenta útil para a Álgebra Linear?* E em nosso PEP usamos a questão: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*

Essas questões visam auxiliar a identificar as condições e restrições que podem estar presentes no diálogo proposto, assim como sugere a terceira modalidade de diálogo. Cabe ressaltar que em cada adaptação realizada respeitamos as características das praxeologias de pesquisa (PP).

Com essas questões e considerando a instituição e o curso, Licenciatura em Matemática, investigados sugerimos alguns ciclos de pesquisa para o diálogo por nós proposto:

- Identificar as referências básicas adotadas na disciplina de Álgebra Linear da instituição a ser pesquisada.

- Analisar aspectos de um livro didático, olhando para as praxeologias e para as tarefas propostas com base na DG elaborada, no sentido de explorar os componentes técnicos e tecnológicos das PP.

- Desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP) levando em conta uma questão geratriz relacionada à prática profissional, possibilitando, assim, o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

- Analisar as produções escritas obtidas pela aplicação do PEP seguindo a DG elaborada em nossa pesquisa.

Nessa seção apresentaremos os dois primeiros pontos do ciclo, visto que o terceiro foi exposto no capítulo 3 e o quarto será discutido no capítulo 6. Assim, na próxima subseção discutiremos um livro didático de Álgebra Linear sugerido nas referências básicas da instituição pesquisada.

---

[83] As questões estão expressas, respectivamente, no capítulo 2 e 3.

4.2.1 Análise de um livro didático de Álgebra Linear

Para analisar um livro didático por meio dos componentes técnicos e tecnológicos das praxeologias de pesquisa, a saber: a APOE e a TAD, verificaremos, assim como Trigueros e Martinez-Planell (2015), os *momentos didáticos do ciclo ACE*, o que possibilitará ter uma ideia das oportunidades da construção dos conceitos matemáticos, no nosso caso Sistema de Equações Lineares. Sendo assim, traremos uma análise, nos próximos parágrafos, a respeito do livro didático *Álgebra Linear* da autoria de Boldrini *et al.* (1986).

Vale salientar que o livro de Boldrini *et al.* (1986) é o primeiro a ser apresentado na bibliografia básica do plano de ensino do ano letivo de 2018 do curso de Licenciatura Matemática investigado. Além disso, cabe destacar que a escolha desse livro e não um da Educação Básica foi feita com o intuito de analisar a construção do conceito Sistema de Equações Lineares na Licenciatura em Matemática.

O conceito Sistemas de Equações Lineares é apresentado no segundo capítulo do livro, sendo o primeiro capítulo o de Matrizes. Aqui é possível notar que o autor seguiu, de certo modo, o caráter estrutural dos conceitos adotado pela maioria dos autores, até mesmo de livros voltados ao Ensino Médio (LUCCAS, 2004). Como comentado, Boldrini *et al.* (1986) não seguiu totalmente o caráter estrutural, pois eles apresentam o conceito de determinante de uma matriz no terceiro capítulo aliado ao estudo de Matrizes Inversas, como é possível notar no sumário do livro (Figura 8):

Figura 8 – Sumário do livro Álgebra Linear

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986.

Pelo exposto no parágrafo anterior vemos que os autores do livro analisado em questão tomaram um rumo de acordo com a conveniência por eles considerada, ou seja, usaram a relação entre sistemas e matrizes para explorar o método de resolução que será tratado no livro, a saber, o escalonamento. Falaremos, nos próximos parágrafos, especificamente, do modo como esse método de resolução é apresentado nesse livro.

No momento do primeiro encontro (ou reencontro) é apresentada uma situação-problema envolvendo um contexto da Química, em que se relaciona a sua solução a um Sistema de Equações Lineares com duas equações e duas incógnitas (Figura 9):

Figura 9 – Situação-problema usada na introdução do capítulo

Na natureza, as coisas estão sempre mudando, se transformando, e o ser humano, para garantir sua sobrevivência e melhorar sua existência, precisa conhecer e dominar estes processos de mudança. Um dos métodos encontrados para se descrever estas transformações foi o de procurar nestas o que permanece constante durante a mudança. Por exemplo, sabemos que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O). Mas, quanto de hidrogênio e de oxigênio precisamos? Esta é uma mudança que podemos descrever do seguinte modo: x moléculas de H_2 reagem com y moléculas de O_2 produzindo z moléculas de H_2O, ou esquematicamente:

$$xH_2 + yO_2 \longrightarrow zH_2O.$$

O que permanece constante nessa mudança? Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento, no fim da reação. Assim, para o hidrogênio devemos ter $2x = 2z$, e para o oxigênio, $2y = z$. Portanto, as as nossas incógnitas x, y e z devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 29

Em seguida, no momento da exploração, expõe-se um exemplo com um sistema de três equações e três incógnitas para ilustrar o método do escalonamento. Nesse exemplo também são utilizadas matrizes, colocando-as ao lado dos Sistemas de Equações Lineares, como pode ser observado na Figura 10:

Figura 10 – Exemplo utilizado no livro didático

Comecemos com o seguinte exemplo. (Para efeito de visualização, colocaremos ao lado de cada sistema uma matriz a ele associada.)

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 30

As tarefas são apresentadas ao final do capítulo. Relacionando-as aos momentos didáticos do ciclo ACE encontramos tarefas que possibilitam a exploração da técnica por meio de ações, caracterizando a técnica-ação, como é evidenciado na Figura 11 a seguir:

Figura 11 – Exemplo de tarefa do tipo técnica-ação

1. Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 49

No momento da constituição, como está atrelado aos demais, é possível comentar que nas resoluções apresentadas usa-se o método do escalonamento. Os autores fazem uma ressalva comentando que o objetivo deles no capítulo é apresentar uma técnica de resolução que sempre poderá ser aplicada, além dela ser "facilmente mecanizada" (BOLDRINI et al, 1986, p. 30).

No momento da institucionalização traz-se a definição de Sistema de Equações Lineares e sua relação com o conceito de Matrizes. Em seguida, são formalizados os procedimentos relacionados ao método do escalonamento, e, no momento que trata da matriz $m \times n$ linha reduzida na forma de escada, são apresentados os conceitos de posto e de nulidade.

Nas seções do capítulo do livro didático que retratam o momento da institucionalização são expostos exemplos, sendo que dentre esses, alguns mostram tipos de tarefas que possibilitam a apresentação da técnica adotada. Na última seção do capítulo são exploradas as soluções dos Sistemas de Equações Lineares, apresentando também vários exemplos para ilustrar tais soluções. É interessante ressaltar que nessa seção são expostas as interpretações geométricas de sistemas com duas incógnitas e duas linhas (Figura 12):

Figura 12 – Interpretação geométrica de um sistema de equações linear 2×2

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Lembramos que o conjunto de pontos $(x_1, x_2) \in R \times R$, que satisfaz cada equação deste sistema, representa uma reta no plano. Para resolver este sistema devemos então encontrar os pontos comuns a estas duas retas.

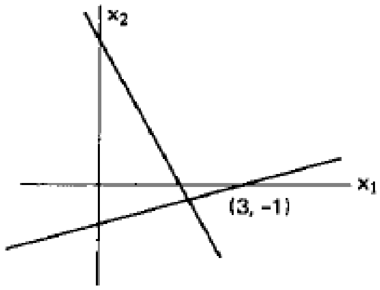


Figura 2.5.1

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 41

No momento do trabalho com a técnica, podemos recorrer às tarefas propostas ao final do capítulo que possibilitam a manifestação de ações, processos e objetos e a relação desses com a técnica. Com isso, a seguir, apresentaremos exemplos de tarefas que possibilitam a construção do conceito de Sistema de Equações Lineares seguindo a nossa DG.

Na Figura 13 temos um exemplo de tarefa que contribui para evidenciar a concepção-processo. Relacionando essa concepção com a técnica, temos a técnica-processo, pois pode ser descrita, interpretada e justificada por um discurso teórico-tecnológico.

Figura 13 – Exemplo tarefa (técnica-processo)

19. Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

b) Encontre os valores de $k \in R$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial $(x = y = z = 0)$.

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 52

Na Figura 14, a seguir, expomos um exemplo de tarefa que pode possibilitar a concepção-objeto e relacionando-a à técnica, temos a técnica-objeto, que permite responder questões referentes à validade da técnica e a relação dela com outras.

Figura 14 – Exemplo tarefa (técnica-objeto)

9. Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.

ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.

iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr$ 1,00?

Fonte: BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 51

Por meio dessa análise do livro didático *Álgebra Linear* de Boldrini *et al.* (1986) podemos notar que o uso do componente técnico e tecnológico das PP pode contribuir para análise dos materiais a serem utilizados nas disciplinas, evidenciando a possibilidade de diálogo entre as PP.

CAPÍTULO 5
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICO

Neste capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos desta investigação, bem como o contexto em que foi desenvolvida. Desse modo, dividimos o capítulo em quatro seções: na primeira, dissertamos a respeito da natureza da pesquisa; na segunda seção, abordamos o contexto no qual este trabalho se desenvolveu, evidenciando o perfil do curso e dos estudantes que dele participaram; na terceira seção, apresentamos como realizamos as coletas de dados; na quarta e última seção, discutiremos o recurso metodológico adotado para a análise dos dados.

5.1 NATUREZA DA PESQUISA

O presente estudo é de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, possuindo algumas das características citadas por Bogdan e Biklen (1994), sendo essas referentes:

1) À coleta de dados que ocorreu por meio dos registros escritos, dos áudios e das filmagens dos estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática, ao participarem dos quatro encontros feitos para a pesquisa.

2) Aos registros escritos que serão analisados de forma minuciosa, tomando-se como base o referencial teórico adotado no trabalho, buscando atingir nosso objetivo geral, a saber: "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*".

3) Ao levarmos em consideração todo o processo de coleta de dados, uma vez que podem surgir indícios por meio das atitudes dos participantes que poderão vir a contribuir para a análise.

Depois de apresentarmos a natureza do nosso estudo, trataremos do contexto da pesquisa.

5.2 CONTEXTO DA PESQUISA

Nessa seção, apresentaremos como é o curso de Licenciatura em Matemática pesquisado, por meio da descrição do perfil do curso e dos estudantes participantes da pesquisa. Sendo assim, mostraremos, a seguir, duas subseções que discorrem sobre os aspectos citados.

5.2.1 Perfil do curso de Licenciatura em Matemática

A pesquisa foi desenvolvida em uma universidade pública situada no norte do estado do Paraná, no curso de Licenciatura em Matemática. A escolha por essa instituição se deu pelo fato de ela ser situada na cidade da pesquisadora e por sua orientadora lecionar nesse local, o que contribuiu para o acesso à turma de licenciandos em Matemática.

O referido curso é ofertado no período noturno e tem duração mínima de quatro anos e máxima de oito anos, com uma carga horária total de 2 825 horas distribuídas entre disciplinas obrigatórias, optativas, estágio curricular obrigatório e atividades complementares.

A disciplina de Álgebra Linear, que é objeto de estudo dessa pesquisa, conta com uma carga horária de 60 horas e é ofertada, no segundo semestre, do 1º ano do curso. Sendo que no primeiro semestre é ofertada a disciplina de Geometria Analítica.

Em relação aos conteúdos contemplados na disciplina têm-se a seguinte ementa: Sistemas de equações lineares e matrizes. Espaços vetoriais. Bases. Subespaços. Transformações lineares. Autovalor e autovetor. Diagonalização.

Dentre os conteúdos contemplados, optamos por trabalhar apenas com o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, devido à sua importância no desenvolvimento de outros conceitos de Álgebra Linear e por esse ser um conceito também visto no Ensino Fundamental – anos finais e no Ensino Médio, o que corrobora com o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino (SHULMAN, 1987, BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Na próxima subseção, comentaremos acerca do perfil dos licenciandos que participaram da pesquisa.

5.2.2 Perfil dos licenciandos em Matemática

Esta pesquisa foi realizada com estudantes concluintes do curso de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de Seminários de Matemática e Educação Matemática, sendo essa disciplina anual e ministrada pela orientadora desse estudo.

Os licenciandos foram convidados a participar deste estudo pela pesquisadora e sua orientadora no dia 10 de abril de 2019. No momento do convite, explicamos aos estudantes o objetivo da pesquisa, bem como a forma que seria realizada; nesse momento, comentamos que se manteria o compromisso ético de não divulgar os nomes dos participantes e solicitamos que estes assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B), permitindo a análise e divulgação dos registros obtidos na aplicação. Juntamente com o termo de consentimento, entregamos um documento para coletar algumas informações (Apêndice C), como: formação acadêmica; quantidade de vezes que cursaram a disciplina de Álgebra Linear e a opinião a respeito das aulas da disciplina.

No dia da primeira aplicação havia dez estudantes e todos se prontificaram a participar da pesquisa e assinaram o termo de consentimento. Na semana seguinte, no próximo encontro, mais dois estudantes, que haviam faltado na semana anterior, aceitaram participar da pesquisa. Totalizando, assim, doze participantes. Desses participantes 2 cursaram mais de uma vez a disciplina de Álgebra Linear.

Após esta breve caracterização dos participantes da pesquisa, na próxima seção descreveremos como ocorreu a coleta dos dados.

5.3 COLETA DOS DADOS

Bogdan e Biklen (1994) comentam que os dados de uma investigação qualitativa incluem registros feitos pelos investigadores, como transcrições de entrevistas e notas de campo, e aquilo que foi produzido por terceiros e é encontrado pelo investigador, como fotografias, diários, documentos oficiais, entre outros.

Levando em conta essa característica, os dados coletados para essa investigação compreenderam as notas de campo da pesquisadora, áudios, filmagem[84] e a produção escrita dos estudantes. Os dados foram obtidos durante os

[84] As filmagens foram realizadas com vistas a captar alguma informação que pudesse contribuir para a tese, entretanto, utilizamos nas análises apenas os áudios dos encontros.

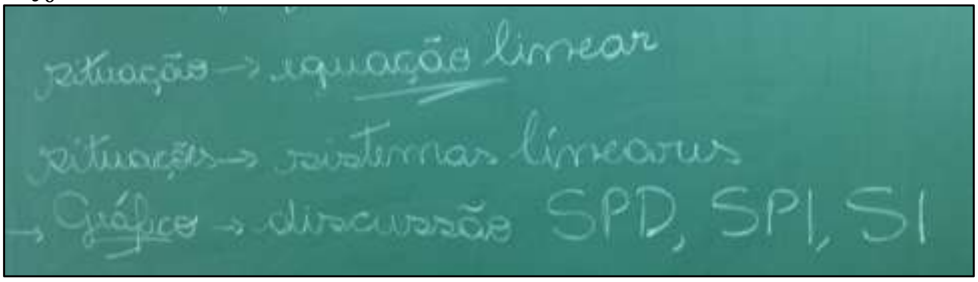
quatro encontros, com duração de duas horas aula cada, utilizado para a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) que propomos em nosso estudo.

O primeiro encontro ocorreu no dia 10 de abril de 2019. Nesse encontro, lemos e explicamos o termo de consentimento e em seguida propomos que em duplas os licenciandos refletissem sobre a questão do PEP-FP elaborado, a saber: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?* Esse primeiro momento pode ser entendido como e*xplicitação da razão de ser do PEP-FP*, de acordo com Barquero, Bosch e Romo (2019).

No período que estavam em duplas, solicitamos aos licenciandos que gravassem suas discussões. Outro ponto a se comentar a respeito do momento em que os licenciandos estavam discutindo a respeito de Q_0 é que a professora-pesquisadora estava à disposição das duplas para esclarecer eventuais dúvidas.

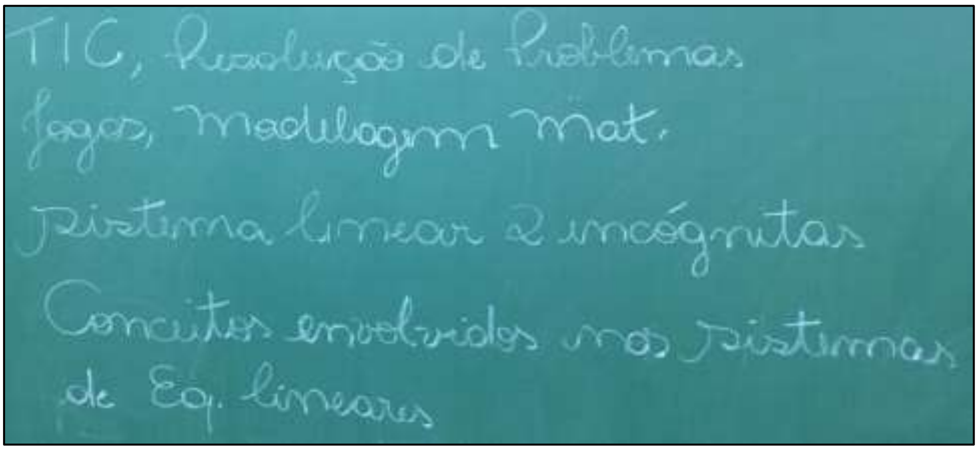
Após certo tempo, cada dupla comentou os principais pontos que consideravam importante para desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares e a professora-pesquisadora registrou na lousa o que era dito, como é possível observar nas Figuras 15 e 16:

Figura 15 – Registro de alguns pontos discutidos nos grupos a respeito da questão Q_0 do PEP-FP



Fonte: a autora

Figura 16 – Registro de alguns pontos discutidos nos grupos a respeito da questão Q_0 do PEP-FP



Fonte: a autora

O segundo encontro aconteceu no dia 17 de abril de 2019, nele retomamos a questão geratriz do PEP-FP e solicitamos que as mesmas duplas se reunissem e que continuassem gravando as discussões, porém como o companheiro de um estudante faltou, ele se juntou com uma dupla e formaram um trio, e além disso, tivemos uma nova dupla, com os alunos que faltaram ao primeiro encontro. Nesse encontro, pedimos que os alunos começassem a pensar em justificativas para os pontos por eles levantados no primeiro encontro, por exemplo, “por que começar com uma situação-problema?” e para tanto levamos livros didáticos do Ensino Médio para que pudessem consultar, além de que poderiam recorrer a outros livros e à internet para buscar informações que achassem pertinentes.

Cabe ressaltar que nesse dia formaram-se dois trios, visto que no início desse encontro quatro duplas estavam sem os integrantes originais, o que possibilitou a formação de novas duplas, porém dois licenciandos chegaram atrasados e como os demais licenciandos já estavam discutindo, eles se juntaram a suas duplas originais, formando assim trios.

Ao final desse segundo encontro, pedimos que os licenciandos comentassem as justificativas elaboradas e a professora-pesquisadora discorreu de modo geral aspectos relacionados a essas justificativas e também acerca da forma como os livros didáticos apresentam o conceito de Sistema de Equações Lineares relacionando esses aspectos aos pontos levantados no primeiro encontro.

O terceiro encontro foi realizado no dia 24 de abril de 2019 e pedimos que os estudantes elaborassem um plano de aula para o conceito de Sistema de Equações

Lineares, com base nas discussões e reflexões realizadas nos encontros anteriores. Esse plano foi elaborado pelas mesmas equipes formadas no segundo encontro e solicitamos que continuassem gravando as discussões. Nesse encontro, podemos inferir que os estudantes começaram, de certo modo, a *desenhar um PEP*, segundo Barquero, Bosch e Romo (2019), visto que foram começaram a desenhar a sua própria versão de atividade para um grupo específico de estudantes.

O quarto e último encontro ocorreu no dia 08 de maio de 2019, nele os licenciandos finalizaram seus planos de aula e os entregaram para professora-pesquisadora e sua orientadora. Por fim, apresentaram os planos para os demais estudantes da turma. Sendo assim, cada equipe comentou de modo geral como desenvolveriam o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio.

No final das apresentações, refletimos sobre aspectos que podem ser encontrados em salas de aula reais, corroborando para que haja uma análise crítica por parte dos licenciandos em relação às práticas de ensino e com isso, contemplamos, em partes, a e*xperimentação, gestão e análise do PEP adaptado*, de acordo com Barquero, Bosch e Romo (2019).

Após discorrermos acerca da coleta de dados, e da forma como se deram os encontros, apresentaremos os procedimentos de análise adotados.

5.4 Procedimentos de análise

Nesta seção discorremos a respeito dos procedimentos adotados nas análises dos dados. Para tanto, dividimos a análise em duas etapas.

Na primeira etapa o objetivo é evidenciar as possibilidades de relações entre o diálogo da APOE com a TAD em um livro didático adotado na disciplina de Álgebra Linear[85]. Para essa análise fizemos uso da análise documental, de acordo com Lüdke e André (2012).

A análise documental, segundo Caulley (1981) citado em Lüdke e André (2012, p. 38), refere-se à identificação de “[...] informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse”. No caso de nossa pesquisa, buscamos evidenciar aspectos do diálogo entre as teorias por nós estudadas. É interessante ressaltar que a busca por evidências, para fundamentar afirmações e

[85] Análise apresentada no capítulo 4.

declarações do pesquisador, é uma das vantagens ao se utilizar esse tipo de análise.

Para selecionar o livro, recorremos ao plano de ensino da disciplina de Álgebra Linear da instituição pesquisada. Vale salientar que o plano de ensino foi obtido via contato por e-mail no dia 22 de outubro de 2018 com a coordenação do curso de Licenciatura em Matemática. De posse desse documento, selecionamos o primeiro livro adotado como bibliografia básica para a disciplina, a saber, Boldrini *et al.* (1986), e em seguida realizamos uma análise qualitativa de cunho interpretativo, trazendo à tona características do diálogo entre a APOE e a TAD.

A segunda etapa de análise refere-se ao tratamento dos dados coletados nos quatro encontros com a turma de Licenciatura em Matemática. Para analisarmos os dados obtidos, inicialmente, decidimos que analisaríamos todos os protocolos dos estudantes, visto que desde o primeiro encontro as discussões no grande grupo influenciaram os nossos caminhos e adaptações necessárias no nosso PEP-FP. Adiante, transcrevemos os áudios obtidos nos quatro encontros a fim de obtermos a primeira impressão sobre os dados.

Visando manter o anonimato dos participantes da pesquisa recorremos a códigos para a análise dos encontros e dos diálogos. Sendo assim, utilizamos a letra “L” para indicar os licenciandos seguida de um número, ou seja, L1, L2, ..., L12.

Com as transcrições dos áudios das discussões e com os planos de aulas elaborados pelos licenciandos olhamos para aspectos relacionados ao diálogo proposto entre as teorias, seguindo o PEP e a DG construídas nessa tese. É importante ressaltar que no momento das análises voltamos nosso olhar inicialmente para as discussões realizadas nos encontros, selecionando transcrições que corroborassem para destacar o diálogo proposto, bem como aspectos relacionados ao conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) que poderiam ser mobilizados.

Por fim, observamos o plano de aula entregue visando identificar aspectos relacionados às tarefas propostas e o que elas poderiam oportunizar em relação à construção do conceito de Sistema de Equações Lineares.

Sendo assim, no próximo capítulo dissertaremos sobre as análises dos dados coletados nos encontros com os licenciandos.

CAPÍTULO 6
TEORIA APOE E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO: O QUE SE REVELA A PARTIR DO PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA?

Neste capítulo, com vistas a contemplar nosso objetivo geral, a saber: "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*", apresentaremos as análises dos dados coletados durante a aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP), no nosso caso, para a formação inicial. Em relação aos dados coletados nos encontros, traremos a análise por grupo. Nessa análise mostraremos as discussões realizadas e o produto final elaborado, isto é, o plano de aula.

Tendo em mente essas características, o capítulo terá seis seções. Nas cinco primeiras, abordaremos os grupos e na sexta e última seção, traremos uma síntese dos resultados obtidos, com intuito de observar o que se revelou por meio do PEP-FP.

6.1 GRUPO 1

O Grupo 1 (G1) é constituído por três licenciandos (L1, L2 e L3). Sendo que L3 integrou o grupo a partir do segundo encontro.

No primeiro encontro, os licenciandos tiveram contato com a questão inicial de nosso Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP): "Q_0: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*" L1 e L2 voltaram sua reflexão a respeito da adoção de uma tendência metodológica de ensino, como é possível observar no trecho do diálogo dos licenciandos:

> **L2** – Então, L1... Eu pensei na hora por conta do estágio... Pensei em utilizar a Resolução de Problemas para abordar sistema de equações lineares no Ensino Médio.
> **L1** – Mas daí você sabe que tipo de exercício usaria?
> **L2** – Aí eu, assim, como esses anos todos, alguma temática do dia a dia deles para resolverem, entendeu?!... aborda com problema e depois vai desenvolvendo e montando os sistemas talvez fazendo

> daquela maneira intuitiva... tentar ver que os alunos estão caminhando, porque pode surgir a resolução intuitiva, porque na resolução de problemas podem ter várias maneiras né?! intuitiva, é... por método que você estava pensando aí de já saber fazer equação... né?! O que acontecer, abordar se for por intuição tentar colocar isso num sistema linear, que dá uma praticidade para chegar numa resolução mais rápida. Tem, são várias maneiras, né?! O que você pensou?
> **L1** – É que na primeira vez quando eu vi equações lineares, assim, sistema de equações lineares, a primeira coisa que eu pensei foi usar o GeoGebra...
> **L2** – Ah o GeoGebra, é uma tecnologia, é uma TI muito interessante...

Ao longo dessa discussão, L1 e L2 mostram suas inquietações diante do modo de ensinar um conceito, no caso, Sistema de Equações Lineares. Tentando vislumbrar a melhor forma possível que eles podem utilizar, L2 até ressalta que: "É porque é aquele negócio, não... até hoje pelo que eu vi isso daí na parte de didática, não tem uma fórmula, uma regra: 'oh segue isso aqui, que isso aqui é o melhor que existe!'"

Com isso, eles comentam, de modo geral, a necessidade de partir de uma situação que provoque curiosidade no aluno. Além de frisarem que há várias condicionantes na questão do ensino, como a turma a qual se leciona e o modo como isso interfere nas estratégias que podem ser adotadas. Notamos, assim, o uso do conhecimento especializado do conteúdo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 400, tradução nossa), visto que avaliam "[...] se uma abordagem fora do padrão funcionaria em geral [...][86]" para o ensino de Sistema de Equações Lineares.

Esse caminho traçado por L1 e L2 na busca da resposta para Q_0 não havia sido pensando por nós no PEP-FP. Sendo assim, após conversar com todos os licenciados, refletimos e vimos a necessidade de adequar o PEP-FP, inserindo essa parte relacionada a "Q_1: *como apresentar o conceito de sistemas de equações lineares?*", sendo assim, o uso de uma tendência metodológica apareceu como uma possível resposta à Q_1.

No segundo encontro, agora com a contribuição de L3, o grupo G1 continuou a refletir sobre a questão norteadora do nosso PEP-FP, buscando nesse momento justificar o porquê de usar situações-problema e, para tanto, recorreram a livros didáticos do Ensino Médio e à internet.

---

[86] […] in sizing up whether a nonstandard approach would work in general […].

Ao discutirem a respeito do uso de situações-problema, temos o seguinte diálogo:

> **L1** – Você começaria com um problema, como era a atividade?
> **L3** – Ah sim...
> **L1** – Com um problema contextualizado?
> **L3** – Isto...
> **L1** – E por que você começaria assim?
> **L3** – Porque... uma coisa que eu lembro de mim e de toda criança, né?!
> **L1** – Aham...
> **L3** – Ah... mas por quê? Pra que eu vou estudar isso?
> **L1** – Aham...
> **L3** – 'Pra' que... Todo mundo pergunta, por que eu vou estudar matemática ou fazer direito?
> [...]
> **L3** – Eu acho que... Que... Uma coisa que eu sempre penso "por que a gente está estudando? Por que está estudando Matemática?" Daí né, eu lembro de um professor, [...] e ele sempre em toda matéria ele falava o porquê... Onde você estudava mesmo uma coisa de Cálculo, Análise, onde vai usar isso aí, então eu lembro disso, uma coisa que eu lembro. E aqui independente se ele vai fazer direito, é uma coisa importante fazer, um dia ele pode comprar um terreno...

É interessante observar por meio desse trecho que L1 busca instigar seu colega a refletir sobre o uso de situações-problema e, assim, L3 comenta sobre a necessidade de mostrar os conceitos matemáticos de forma aplicada, fazendo uso de contextos interdisciplinares, ou seja, contextos que extrapolam a Matemática.

Ao refletir sobre o questionamento e ao observar os livros didáticos e alguns *sites* da internet L2 frisa: "O legal de sempre partir de um tema atual é que dá pra fazer várias coisas [...]". Essa fala do estudante vai ao encontro da discussão de L1 e L3 apresentada anteriormente. Cabe ressaltar que no momento da discussão mostrada, L2 ainda não tinha chegado na sala de aula, assim, quando ele ingressou no grupo, seus colegas o situaram sobre o que foi solicitado e a respeito do que haviam discutido.

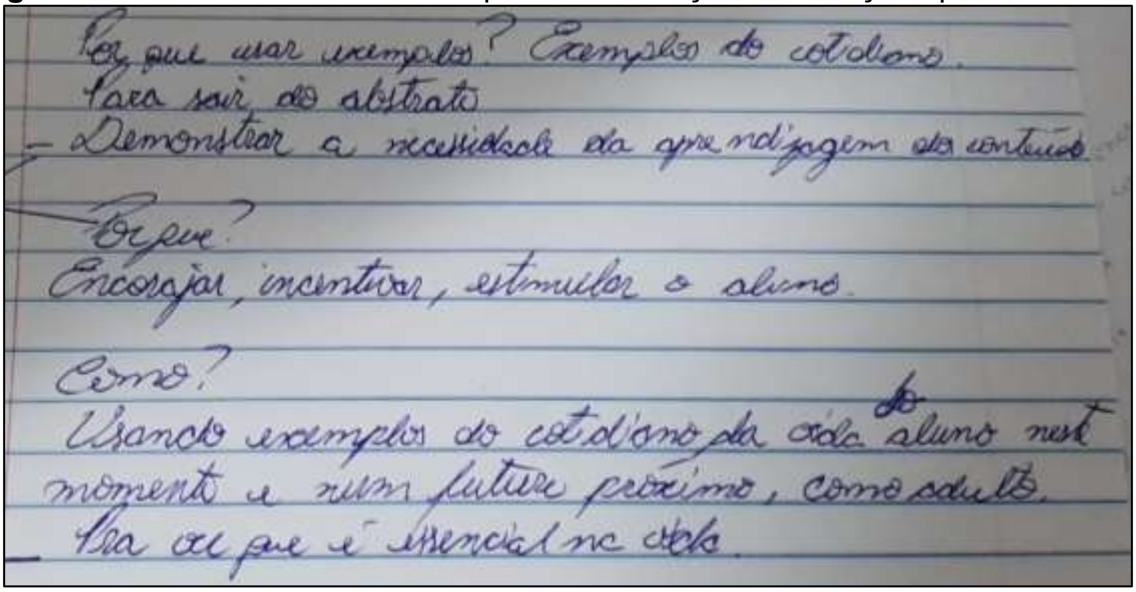
Ainda em relação ao uso de situações-problema para introduzir o conceito de Sistema de Equações Lineares, temos as seguintes falas:

> **L1** – Eu acho que como você tinha falado né? Por que eu vou usar isso? Para que eu tenho de estudar isso daqui? Acho que seria mais isso, né?
> **L3** – Demonstrar a necessidade, né?! Desse estudo...
> **L2** – Necessidade de aprendizagem...

E para “demonstrar a necessidade de aprendizagem” os licenciados chegaram à constatação da utilização de problemas contextualizados e, para tanto, discutiram a ideia de cotidiano, partindo de uma reflexão feita durante as aulas de uma disciplina pedagógica.

De modo geral, nesse encontro, os licenciandos chegaram à seguinte conclusão a respeito do porquê utilizar situações-problema e do modo como usá-las, como é possível observar na Figura 17:

Figura 17 – Conclusão do G1 a respeito da utilização de situações-problema[87]


Por que usar exemplos? Exemplos do cotidiano.
Para sair do abstrato
- Demonstrar a necessidade da aprendizagem dos conteúdos
Por que?
Encorajar, incentivar, estimular o aluno.
Como?
Usando exemplos do cotidiano da vida do aluno nest momento e num futuro próximo, como adulto.
Pra oi que é essencial na vida.

Fonte: Registro escrito do G1

As reflexões do G1 foram além de pensar no porquê do uso de situações-problema para introduzir um assunto. Elas trataram também da interpretação geométrica, que para eles, em especial para L1, é importante. Para suas considerações, G1 recorreu a situações vivenciadas por eles e ao que lembravam do que haviam visto no Ensino Médio:

> **L1** – [...] eu nunca tinha visto o significado geométrico.
> **L3** – Aham.

[87] Transcrição da Figura 17: Por que usar exemplos? Exemplos do cotidiano. Para sair do abstrato;
Demonstrar a necessidade da aprendizagem dos conteúdos.
Por quê? [Sic]
Encorajar, incentivar, estimular o aluno.
Como?
Usando exemplos do cotidiano da vida do aluno neste momento e num futuro próximo, como adulto.
‘Pra’ oi que é essencial na vida.

> **L1** – De um sistema linear 3 por 3. Nem 2 por 2. Nem sabia que existia, na verdade. Só descobri isso aqui no Ensino Superior.
> **L3** – Aham.
> **L1** – Única coisa que eu sabia do significado dos sistemas lineares é que quando você encontrava um valor quer dizer que a igualdade era verdadeira, só isso que eu sabia.
> **L3** – Acho que eu também.

Esse excerto mostra que os alunos não conheceram a interpretação geométrica de um Sistema de Equação Linear no Ensino Médio e isso os fez refletir sobre as escolhas que precisam ser feitas por um(a) professor(a):

> **L3** – Observando no livro que não tem e eu mesmo não estou lembrando de ter visto isso no Ensino Médio, [...], o professor tem tempo, tem as emergências que acontecem, o negócio de greve, é algo a se pensar...
> **L2** – Tirando o contexto da greve, o tempo do professor é curto mesmo. Além do tempo, não são todos os alunos 100% que tem aquela afinidade e querem aprender mais sobre matemática...
> **L3** – Verdade...
> **L2** – Tem aqueles alunos que não tem afinidade e querem aprender o mínimo possível e isso atrapalha... O ritmo não é... é difícil ter um ritmo rápido, tem que ser no ritmo da turma e o ritmo da turma nem é do melhor e nem do pior... é o ritmo... a média de todos né? Porque os que não vão tão rápido e são devagar, um puxa o outro e acaba sendo aquela média e acaba sendo geral e é difícil você abordar tudo e muitas vezes o professor tem que decidir o que ele vai fazer ou não. Se você pega uma turma boa, de poucos alunos e que tem muita aptidão com a matemática ou mostra interesse ou consegue despertar o interesse deles, aí é outro caso né?
> **L1** – Aham
> **L2** – Por isso que eu não julgo ninguém, é difícil estar lá... Eu acho importante, mas será que tem tempo? Mas quem faz o tempo? Tem todas...
> **L3** – Tem que perguntar, ver o lugar...

Em relação aos alunos, G1 faz o seguinte comentário:

> **L2** – [...] o que acontece é que tem dois tipos de aluno, aquele que entende e aquele que consegue desenvolver, fazer... quer dizer que ele nem entende nada, mas ele consegue...
> **L3** – Abstrair?
> **L2** – ele aprendeu por repetição, daí ele memorizou por repetição ali e ele não sabe o significado daquilo, mas ele sabe desenvolver, utilizar o algoritmo...

Tal comentário de L2 elucida um tipo de estudante que manifesta a concepção-ação, de acordo com a APOE (ASIALA *et al.*, 1996), uma vez que sabe utilizar o algoritmo que decorou, mas não entende o procedimento que fez e o objeto matemático como um todo.

Trouxemos esses fragmentos para evidenciar que os licenciandos refletiram, por meio de Q_0: *Como desenvolver o estudo de sistema de equações lineares no Ensino Médio* e de Q_1: *Como apresentar o conceito de sistemas de equações lineares*, a respeito de muitas questões que mostram um certo conhecimento de situações atreladas ao ensino de Matemática, partindo de suas experiências enquanto estudantes da Educação Básica e das vivências da docência oportunizadas pelas disciplinas pedagógicas do curso.

No terceiro encontro do PEP-FP, foi solicitado aos licenciandos que iniciassem a elaboração de um plano de aula, com vistas a sistematizar as discussões realizadas nos dois primeiros encontros. Sendo assim, os licenciados começaram a pensar a respeito das situações-problema que adotariam para introduzir o conceito de Sistema de Equações Lineares.

Num primeiro momento, pensaram em tratar de uma situação-problema utilizando tipos de tinta, como ressalta L2: “que a tinta ela é fosca, acetinada, semibrilho e brilho...”, para assim, obter mais de duas incógnitas. Além dessa situação-problema, os licenciandos pensaram também em utilizar algo relacionado ao tipo de combustível.

Ao longo da discussão do tipo de situação-problema, eles decidiram criar uma estratégia para otimizar a construção do plano de aula:

> **L2** – Realmente, se você quiser pode deixar para desenvolver isso de o que vai ser, deixar a ideia, né?
> **L1** – Uhum
> **L2**– De iniciar aí e montar tudo e depois a gente finaliza no sentido “o problema é assim e assado”. A gente resolve primeiro o problema de contextualização, você pode tirar uma foto aí... exercício como base, vamos adaptar esse exercício, adaptação desse exercício, tirar uma foto e coloca aí como imagem, como fala...
> **L1** – Uhum
> **L2** – Adianta o serviço.
> [...]
> **L2** – [...] só estou só falando para montar o esqueleto, para deixar tipo ele pronto e a gente...
> **L1** – Arruma
> **L2** – É... colocar todas as ideias...

Após traçar essa estratégia os integrantes do G1 refletiram a respeito dos objetivos e da ordem que tratariam os tópicos do estudo dos Sistemas de Equações Lineares, como os tipos de soluções, que para L1: “[...] estou pensando agora que não faz sentido eu apresentar uma solução sendo [que] o cara não sabe resolver um sistema.”

A partir da inquietação de L1, os licenciados refletem e discutem a respeito de estratégias de como fazer essa abordagem, como é possível notar no trecho a seguir:

> **L2** – Oh... Eu sou daquele que vai gradativo, por exemplo, eu tenho que resolver com eles situações-problema, resolver junto com eles...
> **L1** – Aham...
> **L2** – Aí depois que eu resolver aquilo ali. Aí que eu vou colocar que tipo resolve se escalonado ou se é... Olha a gente resolveu dessa forma, certo? Mas você sabe que existe outras maneiras de resolver? Tem o escalonado, tem a substituição... Aí a gente mostra a partir daquele exemplo, a gente pode utilizar aquele exemplo fazer... olha poderia ser feito dessa maneira ou dessa ou dessa.
> **L1** – Tá...
> **L2** – Porque daí você... já mata, já faz, já consegue é... abranger tudo. A gente resolve... O professor resolve junto com os alunos.

Com isso observamos que os licenciandos usaram uma situação-problema para apresentar os diferentes métodos e como as soluções podem ser classificadas. É interessante reparar que, durante sua fala, L2 traz possíveis questionamentos que podem ser feitos durante uma aula de Sistema de Equações Lineares, o que evidencia o conhecimento do conteúdo e do ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), pois L2 escolheu com qual exemplo começaria e quais exemplos usaria para aprofundar o conteúdo. Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401, tradução nossa) comentam que essa tarefa “requer uma interação entre métodos matemáticos específicos e compreensão pedagógica de questões que afetam a aprendizagem dos alunos”[88].

Diante do exposto nos parágrafos anteriores e voltando nosso olhar para a Teoria Antropológica do Didático (TAD), poderíamos considerar algumas aproximações com o desenvolvimento de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), uma vez que integrantes do G1 apresentaram uma situação-problema e

[88] […] requires an interaction between specific mathematical understanding and an understanding of pedagogical issues that affect student learning.

seguiram um caminho para encontrar sua resposta. Além de apresentar outras atividades que propiciaram o estudo do conceito Sistema de Equações Lineares.

Ao longo desse terceiro encontro da nossa aplicação, os integrantes do G1 discutiram os tipos de tarefas que seriam propostas, os objetivos e os encaminhamentos metodológicos do plano de aula solicitado.

No quarto encontro, o G1 entregou o plano de aula elaborado e nos próximos parágrafos o analisaremos com base nas componentes do diálogo entre a TAD e a APOE, em específico verificando os *momentos didáticos do ciclo Atividade, discussão em Classe e Exercícios* (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015).

No momento do primeiro encontro (ou reencontro) será apresentada a Tarefa 1: "situação-problema contextualizada no saque de uma determinada quantia no caixa eletrônico" (Quadro 5). Essa situação como descrevem os licenciandos será utilizada para "[...] retomar e definir esse conteúdo para servir de base para trabalharmos com sistemas de equações lineares".

Quadro 5 – Tarefa 1 proposta por G1

Tarefa 1 **Objetivo:** Formalizar equação linear Uma pessoa precisa fazer um saque, no caixa eletrônico, de R$200,00. Encontre uma maneira de representar as possibilidades de acontecimentos das seguintes situações: (a) Se no caixa eletrônico tiver apenas notas de R$20,00; (b) Se no caixa eletrônico tiver apenas notas de R$20,00 e de R$50,00; (c) Se no caixa eletrônico tiver notas de R$20,00, de R$50,00 e de R$ 10,00.

Fonte: Registro do G1

Em seguida, no momento da exploração, os alunos buscaram uma técnica para resolver equações lineares. Em relação a essa tarefa, podemos observar que ela pode ser entendida como técnica-objeto, visto que permitirá responder questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas. Todavia, cabe ressaltar que a APOE em seu ciclo ACE aborda tarefas, mas que essas, mesmo objetivando a mobilização de um tipo de concepção, pode evidenciar outro.

No momento da constituição tem-se a técnica adotada para resolver esse tipo de tarefa, isto é, que procedimentos podem ser adotados para resolver uma equação linear. No momento da institucionalização traz-se a definição de equações lineares relacionando-a à resolução da tarefa.

No momento de trabalho com a técnica, o grupo não traz mais tarefas, relacionadas a equações lineares, para serem feitas.

O conceito de Sistemas de Equações Lineares é explorado com a Tarefa 2 exposta no Quadro 6:

Quadro 6 – Tarefa 2 proposta por G1

Tarefa 2 **Objetivo:** Formalizar sistemas lineares
Em uma loja de tintas, uma máquina mistura látex e corante conforme o pedido do consumidor. Calcule a quantidade de litros de látex e de corante para que a máquina, preenchendo latas de 20 litros obtenha latas de R$100,00, sendo o preço do litro do látex R$ 4,00 e do litro de corante R$ 8,00.

Fonte: Registro do G1

Essa tarefa, olhando para os momentos (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015), refere-se ao primeiro momento do encontro ou reencontro com o objeto Sistema de Equações Lineares.

Já no momento da exploração os alunos do Ensino Médio buscarão uma técnica para resolver sistemas de equações lineares. Em relação a essa tarefa, podemos observar que ela, assim como a Tarefa 1, pode ser entendida como técnica-objeto, uma vez que possibilitará responder a questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No que diz respeito às outras tarefas propostas, evidenciamos a técnica-ação nas Tarefas 3 e 4 (Quadro 7 e Quadro 8, respectivamente) e a técnica-processo na Tarefa 6 (Quadro 9).

Quadro 7 – Tarefa 3 proposta por G1

Tarefa 3

Objetivo: Apresentar o método da substituição e depois na sequência dar exemplos e explicar os métodos da adição e da comparação

Encontre uma solução para o sistema a seguir, de modo que a solução seja válida para as duas equações simultaneamente.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Fonte: Registro do G1

Quadro 8 – Tarefa 4 proposta por G1

Tarefa 4

Objetivo: Nesta atividade temos como objetivo formalizar o Escalonamento.

Observe a resolução do sistema de equações a seguir e discuta com seu grupo o procedimento realizado para encontrar a sua resolução.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Rightarrow L_2 = 3.L_1 - L_2 \\ L_3 = 2.L_1 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -8y + 7z = 6 \\ -3y + z = -1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \\ L_3 = \frac{3}{8}.L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -8y + 7z = 6 \\ \frac{13z}{8} = \frac{26}{8} \Rightarrow z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{a}\text{ Equação}: -8y + 7(2) = 6 \Rightarrow y = \frac{6-14}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1 \\ 3^{a}\text{ Equação}: x = 2(1) - (2) + 2 = 2 \end{cases}$$

Fonte: Registro do G1

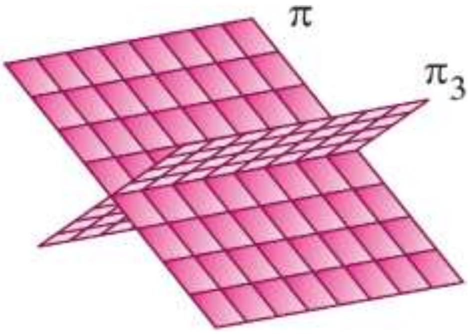
A técnica-ação pode ser observada nas tarefas descritas, pois visa à exploração da técnica por meio de ações, no caso, o uso dos diferentes métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Quadro 9 – Tarefa 6 proposta por G1

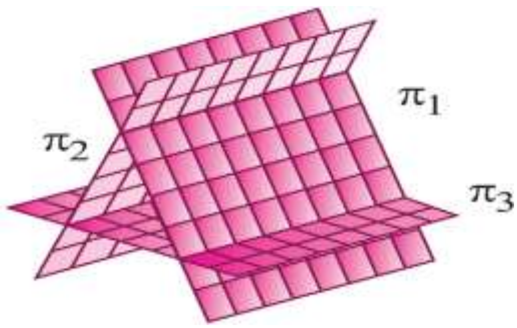
Tarefa 6

Objetivo: Fazer a abordagem da interpretação geométrica de sistemas de equações lineares, assim como também discutir com os alunos suas possíveis dúvidas.

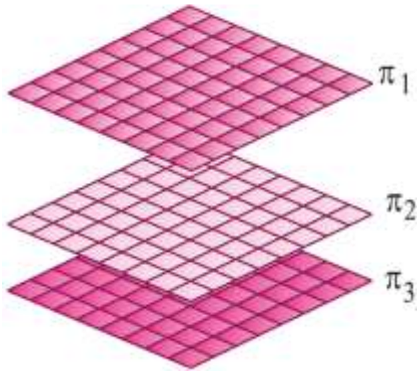
Classifique os sistemas representados geometricamente em SPI, SPD e SI.



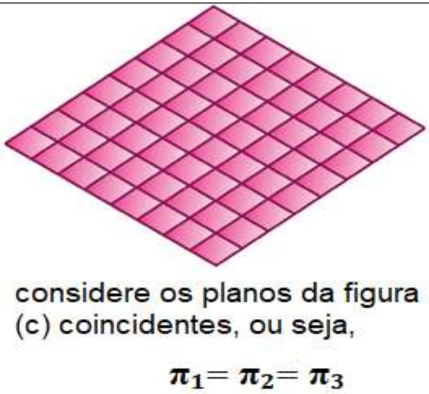
a)



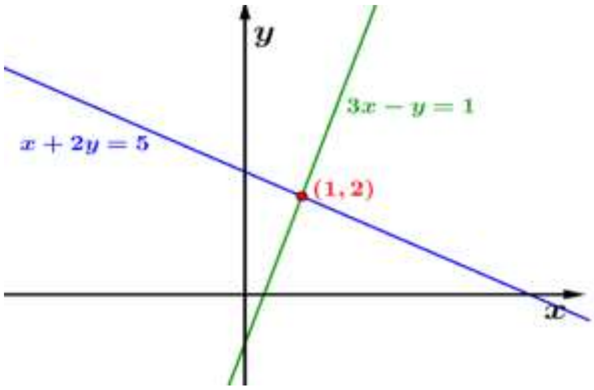
b)



c)



d)



e)

Fonte: Registro do G1

A técnica-processo é evidenciada na Tarefa 6, pois a técnica pode ser descrita, interpretada e justificada por meio de um discurso teórico-tecnológico, conseguindo justificar a relação da representação geométrica com a solução de um Sistema de Equações Lineares.

No momento da constituição do bloco tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 2009), há a presença de um discurso racional a respeito das técnicas que podem ser adotadas na resolução das tarefas, dentre elas: método da adição, da substituição, da comparação, e o escalonamento.

No momento da institucionalização, traz-se a definição de Sistema de Equações Lineares e são formalizados os procedimentos adotados para sua resolução algébrica. Em relação ao trabalho com a técnica, os integrantes do G1 trazem apenas uma tarefa, a Tarefa 5 (Quadro 10), sendo que está evidencia a técnica-objeto.

Quadro 10 – Tarefa 5 proposta por G1

Tarefa 5
Objetivo: Verificar se entenderam como aplicar o escalonamento num problema contextualizado.
A tarefa a seguir foi retirado e adaptado da dissertação de Aparecida Santana Chiari:

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova, foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respetivamente, aos 1º, 2º, e 3º lugares. As quantidades de medalhas de três escolas, ao final da competição, bem como a pontuação geral de cada escola e de cada modalidade são apresentadas nas tabelas. Quantos pontos valem cada medalha, ouro, prata e bronze, para cada tabela?

Escola	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	2	4	4	44
B	4	1	1	39
C	2	3	1	33

Fonte: Registro do G1

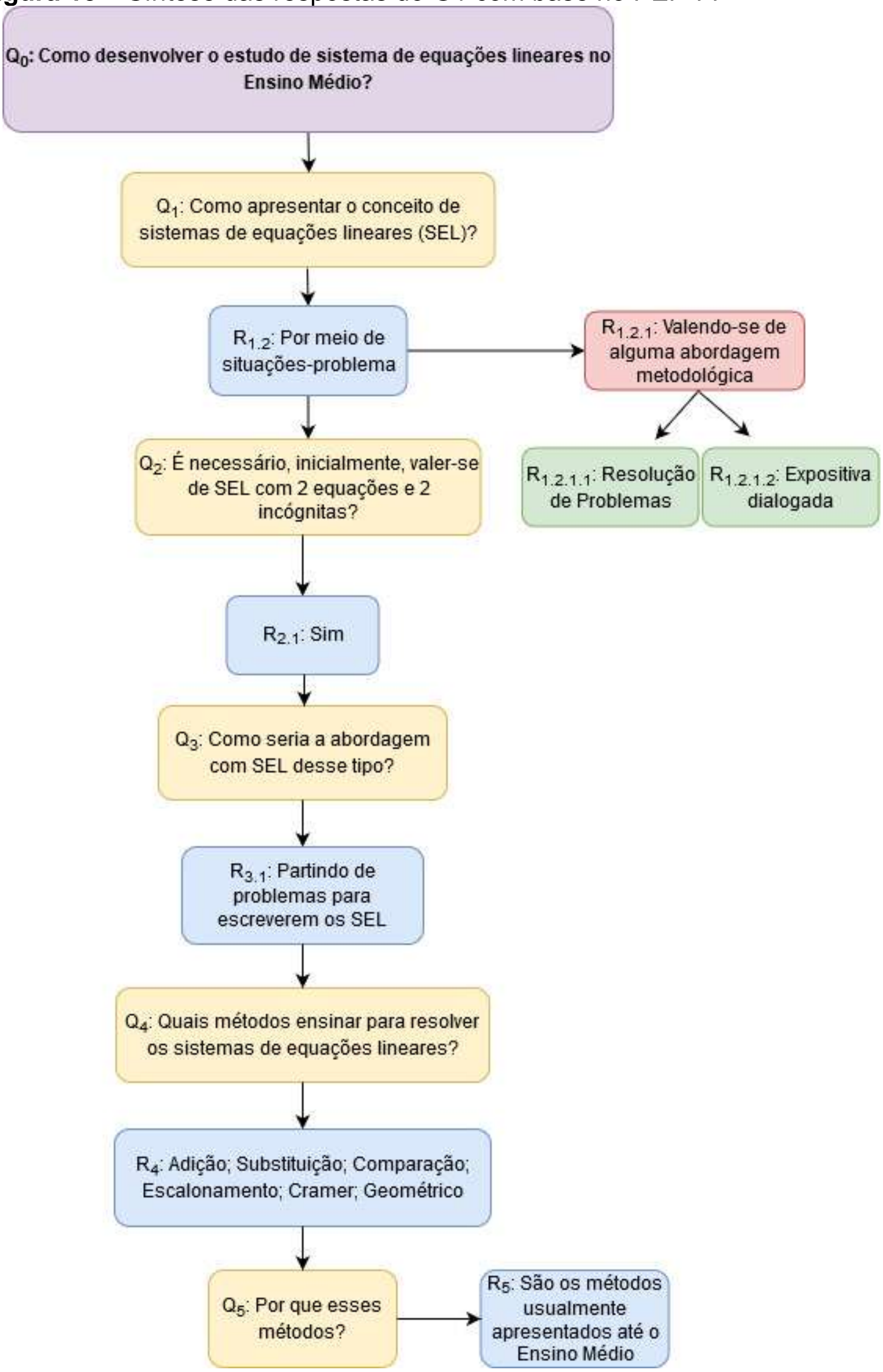
O momento da avaliação não é apresentado no plano de aula do G1.

Com o exposto nessa seção, observamos a mobilização do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e podemos inferir que as técnicas atreladas às concepções (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015) podem ser evidenciadas se forem trabalhadas tarefas como as propostas no plano de aula.

Além disso, por meio das discussões feitas durante os encontros do nosso PEP-FP, os licenciandos do G1 se preocuparam com vários aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de um conceito, refletindo no modo como esse conceito foi ensinado a eles, para assim, proporem a ideia de como gostariam de ensinar Sistemas de Equações Lineares.

A seguir, apresentaremos a Figura 18 que sintetiza o que foi discutido pelos integrantes do G1, com base, em nosso PEP-FP.

Figura 18 – Síntese das respostas do G1 com base no PEP-FP



Fonte: a própria autora

Em nosso PEP-FP, exposto no capítulo 3, apresentamos diferentes possibilidades de respostas e o trouxemos, por meio da Figura 18, para sintetizar as respostas do G1, mostrando as respostas do grupo para os questionamentos feitos. É interessante notar que inserimos a resposta do grupo frente a abordagem metodológica que adotaram e em nosso PEP-FP deixamos em aberto, isto é, não citamos todas as abordagens que poderiam surgir como respostas.

Após a descrição e análise do G1 vamos tratar na próxima seção do Grupo 2.

6. 2 GRUPO 2

O Grupo 2 (G2) é constituído por dois licenciandos (L4 e L5), sendo que esse grupo permaneceu inalterado desde o primeiro encontro.

Em relação ao primeiro encontro, no qual os integrantes do grupo tiveram contato com a questão inicial de nosso Percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores (PEP-FP): "Q_0: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*" L4 e L5 buscaram entender o sentido da questão proposta:

> **L4** – Primeiro vamos a pergunta: "Como desenvolver o estudo" o que significa isso?
> **L5** – Você quer saber o sentido de como desenvolver o estudo?
> **L4** – É.
> **L5** – Deixa eu pensar um pouco. Desenvolver o estudo, a matéria já vai tá...
> **L4** – Então...
> **L5** – Já vai ter lidado com isso. Daí a gente vai melhorar o estudo, é isso?
> **L4** – Na questão de desenvolvimento?
> **L5** – Melhorar uma coisa, não é?
> **L4** – Pode ser.

Nesse primeiro momento, L4 até pensou nas abordagens, todavia L5 comenta:

> **L5** – Como assim diferentes abordagens? Tipo sistema de equação linear é uma coisa só. Tipo é sempre a mesma coisa, são equações que estão relacionadas, equações de grau 1 que elas estão relacionadas ali, tipo... Sistemas de equações lineares são sempre a mesma coisa, agora tem tipo métodos de resolução de sistema de equações lineares tem vários, entendeu?

Observa-se por meio desse trecho que os licenciandos estavam com pensamentos diferentes, um focado em abordagens de ensino e outro no conteúdo em si.

Com vistas a entender melhor o questionamento, G2 decidiu chamar a professora-pesquisadora para esclarecer suas dúvidas, em seguida voltaram suas reflexões a respeito de Q_0:

> **L4** – Dá para começar a partir... mencionando a tendência que gente utilizaria?
> **L5** – A gente pode usar um monte de regras assim, tipo... Vamos pensar primeiro nas resoluções, nos métodos de resoluções.
> **L4** – Pode ser.

Novamente nota-se que L4 quer refletir a respeito de abordagens de ensino e L5 a respeito do conteúdo. Contudo, chegam ao consenso de discutirem sobre Sistemas de Equações Lineares, assim, eles listam os diferentes métodos de resolução que podem ser adotados.

Ao discorrem a respeito dos métodos, L4 mostra-se inquieto em relação aos conhecimentos prévios:

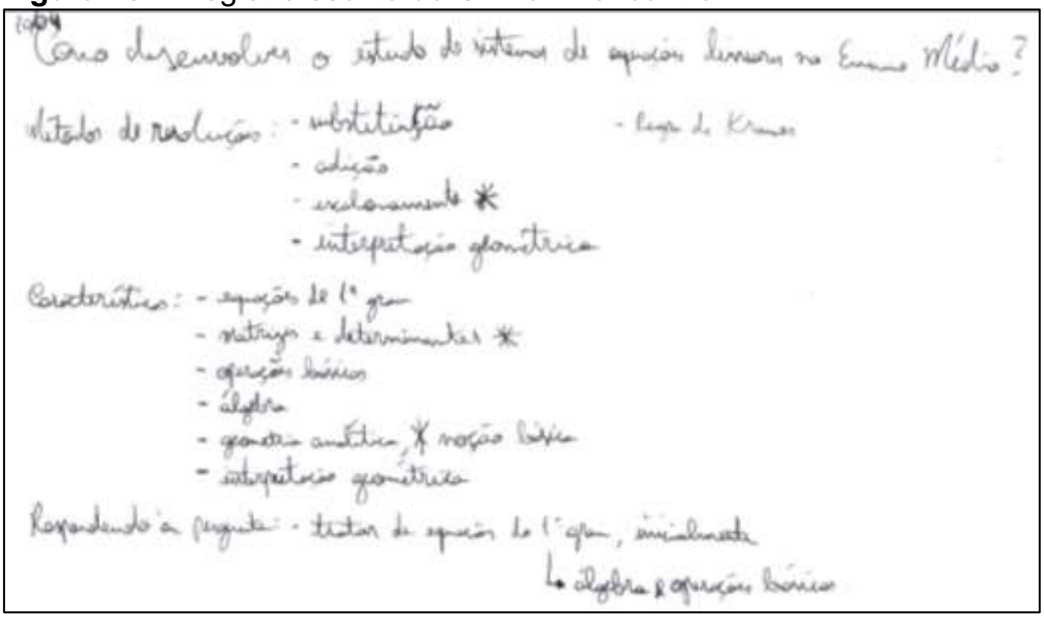
> **L4** – ‘Tô’ pensando num negócio aqui. Acho que tipo: para a gente desenvolver o estudo desse conteúdo, pensando que eles já viram isso, acho que uma ideia boa é tipo relembrar, sabe?!
> **L5** – Relembrar?
> **L4** – É, relembrar os conteúdos que eles aprenderam no ano anterior, quer dizer no 8º ano. Que, tipo, pensa o aluno vai chegar no Ensino Médio daí ele vai ver equações, sistema de equações lineares, mas ele não vai lembrar disso, raramente o aluno que lembra...
> **L5** – Então, a gente tem que fazer tipo abre aspas uma retomada do conteúdo? Então, essa retomada seria de que forma?
> **L4** – Então, aí que vem a questão: como a gente vai trabalhar com ela?
> **L5** – Eu pensei na gente fazer agora... levantar características, coisas que estão dentro disso... porque tipo a gente estuda em sistema de equações lineares, a gente estuda como resolver eles, não é?
> **L4** – Aham...
> **L5** – E ‘pra’ resolver eles têm várias coisas, vários outros conteúdos que ‘tá’ dentro disso, não é? Então, a gente poderia listar esses conteúdos, essas coisas que estão presentes no...
> **L4** – Ah... você quer tipo listar tudo... tudo as características dos negócios para depois...
> **L5** – Isso.
> **L4** - ... pensar em aplicar.

L5 – Isso... Como a gente pode lidar com isso. Pode ser?
L4 – 'Tá'... Equações, né?!
L5 – Equações... de primeiro grau; matrizes; determinantes.

Por meio dos excertos trazidos até aqui é possível inferir que os licenciandos manifestam o conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), evidenciando o conhecimento do conteúdo no horizonte, visto que os licenciandos apresentam "[...] uma consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da extensão da matemática incluída no currículo"[89] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa).

De modo geral, no primeiro encontro, G2 discutiu a respeito dos métodos de resolução, dos conhecimentos atrelados ao estudo de Sistema de Equações Lineares – na discussão L5 chama de conteúdos básicos e no registro escrito está como características –, e comentam que iniciariam o estudo por meio de equações de 1° grau. É possível notar tais informações na Figura 19:

Figura 19 – Registro escrito do G2 no 1° encontro[90]



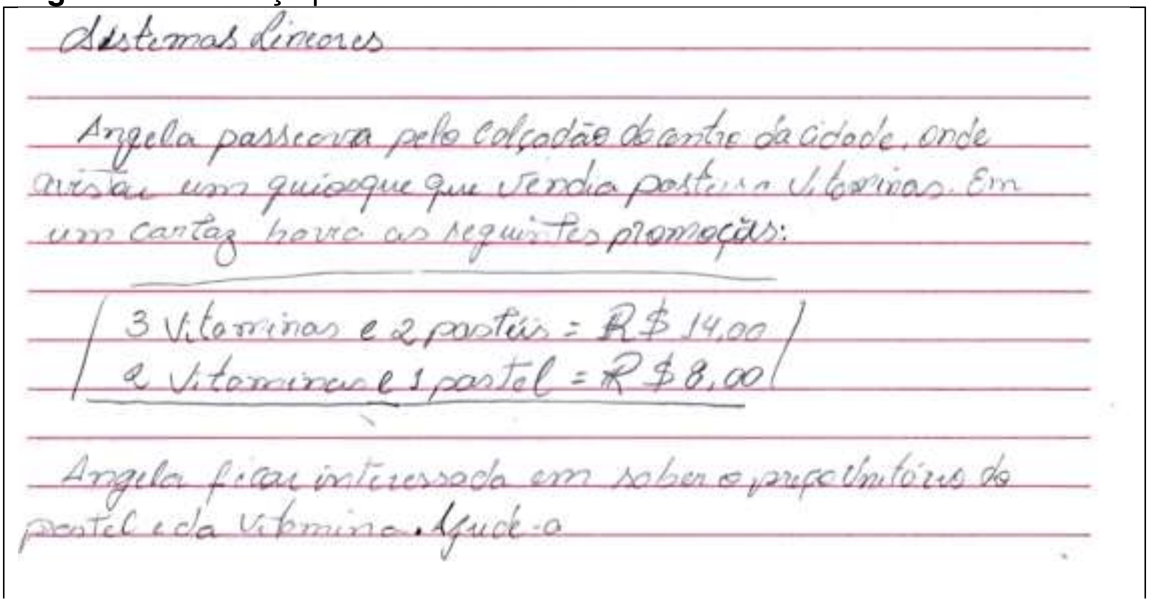
Fonte: Registro escrito G2

[89] [...] an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum.
[90] Transcrição Figura 19: "Como desenvolver o estudo de sistemas de equações lineares no Ensino Médio?
Métodos de resolução: - substituição; - adição; - escalonamento*; - interpretação geométrica; - Regra de Cramer.
Características: - equação de 1° grau; - Matrizes e Determinantes*; - Operações básicas; Álgebra; Geometria Analítica * noção básica; interpretação geométrica.
Respondendo à pergunta: tratar de equações do 1° grau, inicialmente. Álgebra e operações básicas.

É interessante observar que L4 e L5 colocaram asteriscos em alguns assuntos, uma vez que consideraram que esses conceitos serão abordados apenas no Ensino Médio, como constatado pelo áudio entregue pelos licenciandos. O que corrobora para nossa inferência em relação ao conhecimento do conteúdo no horizonte (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

No 2° encontro, G2 esqueceu de gravar o áudio, mas entregaram os registros escritos feitos nesse dia, o que evidencia um esboço de um plano de aula, apresentando a construção de uma situação-problema que seria utilizada para introduzir Sistema de Equações Lineares, os objetivos que seriam adotados (Figura 20) e as etapas que poderiam ser utilizadas para o ensino de Sistema de Equações Lineares (Figura 21):

Figura 20 – Esboço plano de aula do G2[91]

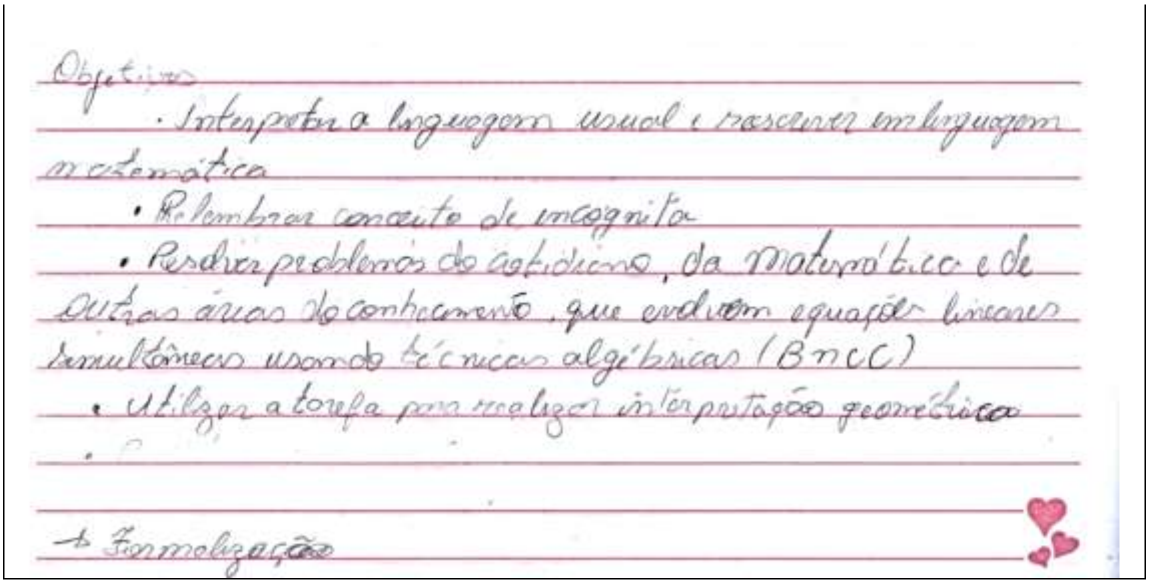

Sistemas Lineares

Angela passeava pelo calçadão do centro da cidade, onde avistou um quiosque que vendia pastéis e vitaminas. Em um cartaz havia as seguintes promoções:

3 vitaminas e 2 pastéis = R$ 14,00
2 vitaminas e 1 pastel = R$ 8,00

Angela ficou interessada em saber o preço unitário do pastel e da vitamina. Ajude-a

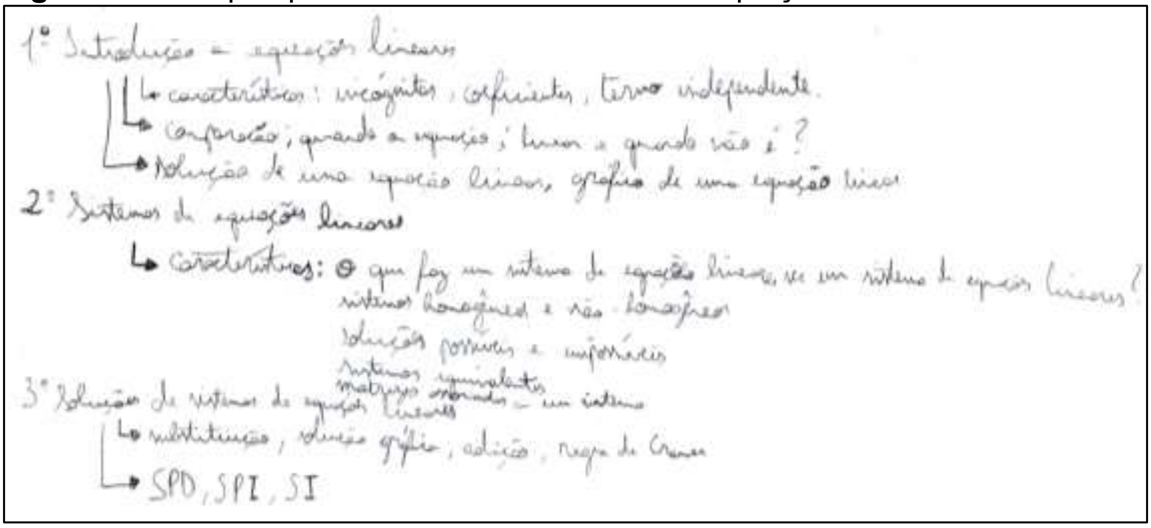
[91] Transcrição Figura 20: Sistemas Lineares
Angela passeava pelo calçadão do centro da cidade. Onde avistou um quiosque que vendia pastéis e vitaminas. Em um cartaz havia as seguintes promoções:
3 vitaminas e 2 pastéis = R$ 14,00
2 vitaminas e 1 pastel = R$ 8,00
Angela ficou interessada em saber preço unitário do pastel e da vitamina. Ajude-a.
Objetivos:
- Interpretar a linguagem usual e reescrever em linguagem matemática.
- Relembrar conceito de incógnita.
- Resolver problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento que envolvem equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas (BNCC).
- Utilizar a tarefa para realizar interpretação geométrica.
Formalização.



Objetivos
· Interpretar a linguagem usual e rescrever em linguagem matemática
• Relembrar conceito de incógnita
• Resolver problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas usando técnicas algébricas (BNCC)
• Utilizar a tarefa para realizar interpretação geométrica
→ Formalização

Fonte: Registro escrito G2

Figura 21 – Etapas para o ensino de Sistema de Equações Lineares[92]



1° Introdução a equações lineares
→ características: incógnitas, coeficientes, termo independente.
→ comparação; quando a equação é linear e quando não é?
→ solução de uma equação linear, gráfico de uma equação linear
2° Sistemas de equações lineares
→ características: o que faz um sistema de equações lineares ser um sistema de equações lineares?
sistemas homogêneos e não-homogêneos
soluções possíveis e impossíveis
sistemas equivalentes
matrizes associadas a um sistema
3° Solução de sistemas de equações lineares
→ substituição, solução gráfica, adição, regra de Cramer
→ SPD, SPI, SI

Fonte: Registro escrito G2

Esses registros escritos evidenciam que, assim como G1, G2 iniciaria sua aula utilizando uma situação-problema, retomando equações lineares para em seguida tratar de Sistema de Equações Lineares.

---

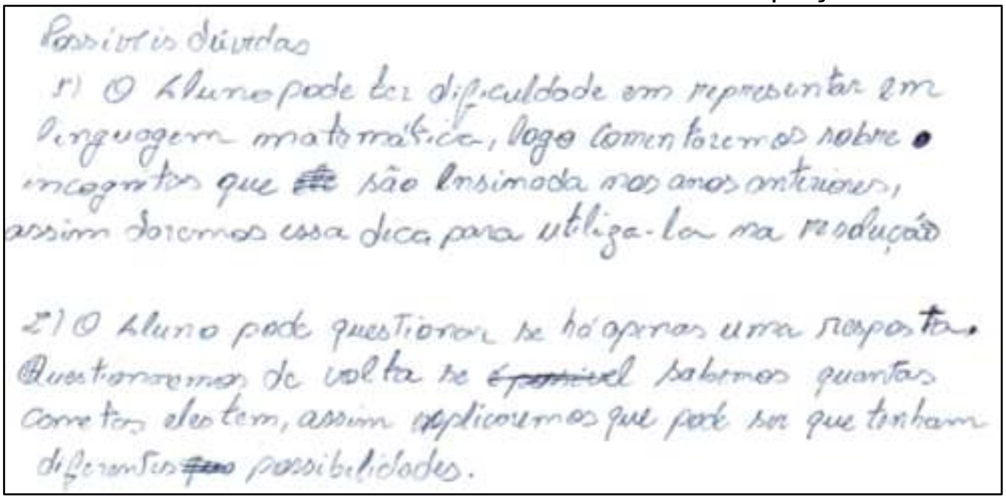
92 Transcrição Figura 21: 1ª Introdução a equações lineares
- características: incógnitas, coeficientes, termo independente.
- comparação: quando uma equação é linear e quando não é?
- solução de uma equação linear, gráfico de uma equação linear
2ª Sistemas de equações lineares
- características: o que faz um sistema de equações lineares ser um sistema de equações lineares?; sistemas homogêneos e não-homogêneos; soluções possíveis e impossíveis; sistemas equivalentes; matrizes associadas a um sistema.
3ª soluções de sistemas de equações lineares
- substituição, solução gráfica, adição, regra de Cramer
- SPD, SPI, SI

No terceiro encontro, L4 e L5 que já haviam iniciado a construção de um plano de aula, no segundo encontro, o retomam para sistematizar as ideias que possuem para desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio. A princípio L4 sugere começar por equações lineares, utilizando uma situação-problema:

> **L4** – O problema que eu pensei, aquele lá, tipo assim, não sei quem, não sei quem tem tantas figurinhas, quantas cada um pode ter? Tipo, juntos eles têm tantas figurinhas, quantas eles podem ter no total cada um?
> **L5** – Ah primeiro você quer pensar sobre equações lineares?
> **L4** – Isso.
> [...]
> **L4** – Através disso a gente define equação linear.

A partir dessa ideia, G2 elabora a situação-problema a ser utilizada em seu plano de aula, colocando as possíveis respostas e as possíveis dúvidas que poderiam surgir na aula (Figura 22):

Figura 22 – Possíveis dúvidas elencadas no estudo de equações lineares[93]


Possíveis dúvidas
1º) O aluno pode ter dificuldade em representar em linguagem matemática, logo comentaremos sobre incógnitas que são ensinada nos anos anteriores, assim daremos essa dica para utiliza-la na resolução
2º) O aluno pode questionar se há apenas uma resposta. Questionaremos de volta se sabemos quantas canetas eles tem, assim explicaremos que pode ser que tenham diferentes possibilidades.

Fonte: Registro escrito G2

Por meio desse registro escrito, podemos inferir que os licenciandos apresentam o conhecimento do conteúdo e do estudante (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401), uma vez que conseguiram prever, com base em sua

[93] Transcrição Figura 22: Possíveis dúvidas:
1ª) O aluno pode ter dificuldade em representar em linguagem matemática, logo comentaremos sobre incógnitas que são ensinada [Sic] nos anos anteriores, assim daremos essa dica para utiliza-la na resolução
2) O aluno pode questionar se há apenas uma resposta. Questionaremos de volta se sabemos quantas canetas eles tem, assim explicaremos que pode ser que tenham diferentes possibilidades.

vivência enquanto alunos da Educação Básica e da Licenciatura em Matemática, "[...] o que os alunos provavelmente pensam e o que acharão confusos"[94] e com isso, previram uma possível explicação para sanar os questionamentos que podem surgir em sala de aula.

Em seguida, começaram a discutir como se daria a formalização do conceito equações lineares, sendo que esse ocorreria por meio dos possíveis questionamentos dos estudantes, para em seguida apresentar a definição formal.

Para ensinar Sistema de Equações Lineares, G2 decidiu mudar a situação-problema proposta no segundo encontro (Figura 20), pois de acordo com L5 "Aquela outra que a gente tinha pegado, eu não gosto daquilo lá". Dessa forma, refletiram a respeito de um tipo de situação-problema que possibilitaria a resolução sem Sistema de Equações Lineares e depois utilizando tal conteúdo. Por fim, recorreram a uma situação envolvendo a ideia de população.

Em relação à discussão feita por G2 na elaboração do plano de aula, é interessante notar que L5 reflete sobre a utilidade do conceito de Sistema de Equações Lineares: "Para mim, Sistema de Equações Lineares se resume em métodos. Métodos de resolver sistemas e daí o que é mais importante nisso? Como você estuda um método? Para mim, é através de repetição". Nota-se por meio dessa fala, que L5 vê a necessidade de se entender bem as técnicas, ou seja, os métodos, que podem ser adotados e assim, possivelmente para L5 seria necessário realizar várias tarefas recorrendo, principalmente, à "técnica-ação".

Ainda a respeito da fala apresentada anteriormente, observamos uma noção restrita do conceito de Sistema de Equações Lineares, por parte de L5, o que pode interferir, de algum modo, no conhecimento de conteúdo e do ensino, no sentido das escolhas que L5 faria, visto que enquanto professor avaliaria "[...] as vantagens e desvantagens instrucionais das representações usadas para ensinar uma idéia específica e identificar o que os diferentes métodos e procedimentos proporcionam instrucionalmente"[95] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa)

No quarto encontro, apenas L4 foi, desse modo, não houve áudio e como combinado no terceiro encontro o licenciando entregou o plano de aula elaborado por seu grupo. Sendo assim, analisaremos o que foi proposto por G2 utilizando os

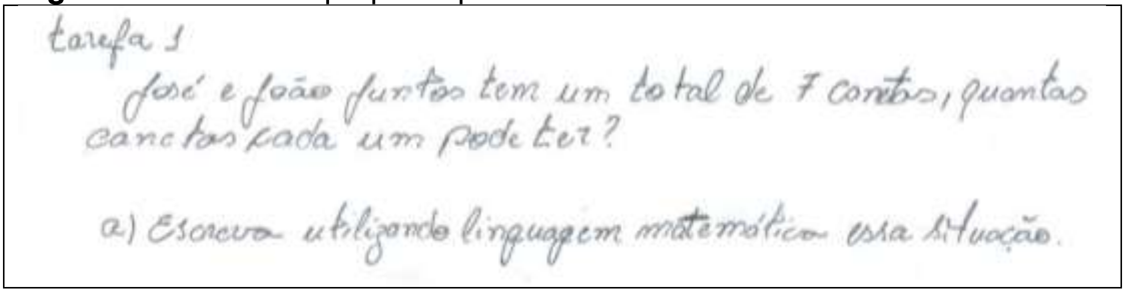
---

[94] [...] anticipate what students are likely to think and what they will find confusing.
[95] […] evaluate the instructional advantages and disadvantages of representations used to teach a specific idea and identify what different methods and procedures afford instructionally.

momentos didáticos do ciclo Atividade, discussão em Classe e Exercícios (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015).

No momento do primeiro encontro ou reencontro com o objeto equação linear é apresentada a tarefa 1 que representa uma situação-problema envolvendo o contexto de canetas (Figura 23):

Figura 23 – Tarefa 1 proposta por G2[96]


tarefa 1
José e João juntos tem um total de 7 canetas, quantas canetas cada um pode ter?
a) Escreva utilizando linguagem matemática esa situação.

Fonte: Registro escrito G2

Em seguida, no momento da exploração, os alunos serão instigados a buscar uma técnica para resolver equações lineares. Os integrantes do G2 dizem que após isso mostrarão aos alunos equações que não são lineares e explicarão o motivo, entretanto não trazem exemplos desse tipo de equação.

A Tarefa 1, apresentada na Figura 23, pode ser entendida como técnica-objeto, visto que permitirá responder questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No momento da constituição do bloco tecnológico-teórico justifica-se e explica-se a respeito da técnica adotada para resolver esse tipo de tarefa. Já no momento da institucionalização traz-se a definição de equações lineares relacionando-a à resolução da tarefa.

No momento do trabalho com a técnica o grupo não traz mais tarefas para serem feitas relacionadas a equações lineares.

Para o primeiro momento com Sistema de Equações Lineares, G2 apresenta a Tarefa 2 (Figura 24):

[96] Transcrição Figura 23: Tarefa 1
José e João juntos tem um total de 7 canetas, quantas canetas cada um pode ter?
a) Escreva utilizando linguagem matemática essa situação

Figura 24 – Tarefa 2 proposta por G2[97]

Tarefa 2
A população de uma cidade A é três vezes maior que a população da cidade B.
Somando a população das duas cidades, temos o total de 200 000 habitantes. Qual a população da cidade A?

Fonte: Registro escrito de G2

No momento da exploração, os licenciandos apresentaram possíveis resoluções que poderiam surgir, evidenciando o método da substituição. A Tarefa 2, assim como a Tarefa 1, pode propiciar a técnica-objeto.

No momento da constituição do bloco tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 2009), há a presença de um discurso racional a respeito das técnicas que podem ser adotadas na resolução das tarefas, dentre elas: método da adição e da substituição.

No momento da institucionalização traz-se a definição de Sistema de Equações Lineares e são formalizados, com base na resolução da Tarefa 2, os procedimentos adotados para a resolução.

O G2, no momento de trabalho com a técnica, apresentou apenas mais uma tarefa, a Tarefa 3 (Figura 25), por meio dela sendo possível evidenciar a técnica-ação, uma vez que os alunos podem praticar a aplicação das técnicas por meio de ações, isto é, podem utilizar os diferentes métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Figura 25 – Tarefa 3 proposta por G2[98]

tarefa
Descubra quais são os dois números em que o dobro do maior somado com o triplo do menor da 15, e o maior somado com o quíntuplo do menor da 1.

Fonte: Registro escrito do G1

O momento da avaliação não é apresentado no plano de aula do G2.

[97] Transcrição Figura 24: Tarefa 2
A população de uma cidade A é três vezes maior que a população da cidade B. Somando a população das duas cidades, temos o total de 200 000 habitantes. Qual a população da cidade A?
[98] Transcrição Figura 25: Tarefa 3
Descubra quais são os dois números em que o dobro do maior somado com o triplo do menor dá 15, e o maior somado com o quíntuplo do menor da 1.

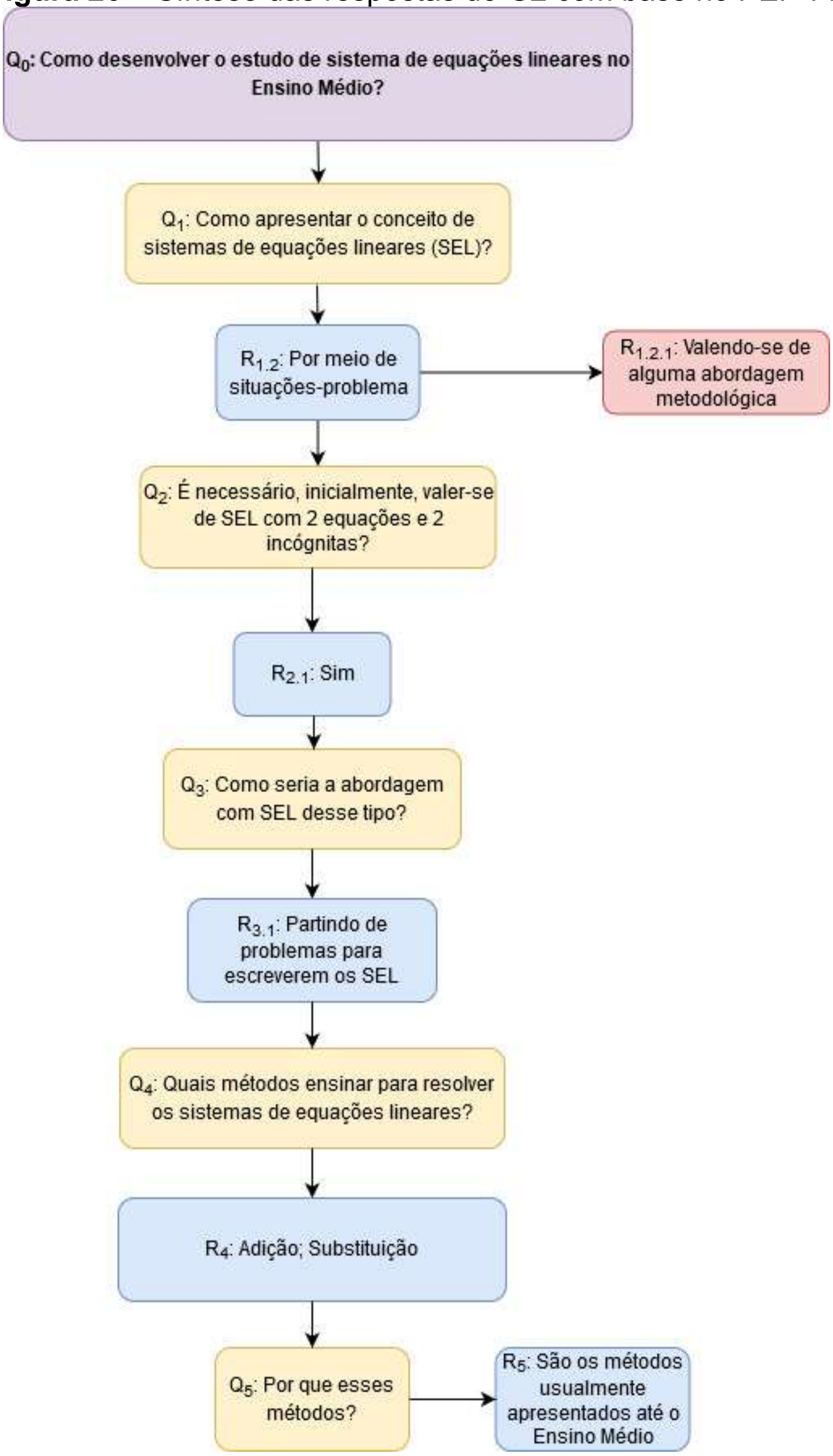
Por meio dessa seção, notamos que os licenciandos mobilizaram o conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e inferimos a respeito dos momentos didáticos, seguindo o ciclo Atividade, Discussão em Classe e Exercícios (ACE) (TRIGUEROS, MARTINEZ-PLANELL, 2017).

Foi possível observar ainda que os licenciandos não deixaram claro qual abordagem metodológica adotariam, mas, seguindo as características das tarefas, pode-se inferir o uso de alguns aspectos da Resolução de Problemas. Outro ponto a se destacar é que G2 decidiu apresentar apenas o estudo de um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas e mesmo dizendo em um de seus objetivos elencados, no segundo encontro, que realizaria a interpretação geométrica, essa não foi apresentada no plano de aula entregue no quarto encontro.

Além desses aspectos, é interessante ressaltar que no primeiro encontro G2 discutiu a respeito de conceitos relacionados à Sistema de Equações Lineares, mas em seu plano, como trabalhou apenas com um sistema 2×2 não os explorou. O G2, também, não apresentou como as soluções podem ser classificadas, isto é, em possível determinada, possível indeterminada e impossível, sendo que no registro escrito do segundo encontro indicaram que abordariam as classificações.

Sendo assim, notamos que o plano de aula entregue no quarto encontro foi bem elementar, não explorando muitas das características que os licenciandos do G2 comentaram no primeiro e segundo encontro, as quais evidenciavam indícios do conhecimento do conteúdo no horizonte (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Todavia, mesmo com essas lacunas, notamos como dito anteriormente elementos do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e do diálogo proposto para a APOE e a TAD, no sentido de analisar os momentos atrelado ao ciclo ACE (TRIGUEROS, MARTINEZ-PLANELL, 2017). Na figura 26, apresentamos a síntese das respostas do G2 obtidas por meio de seu plano de aula, com base em nosso PEP-FP:

Figura 26 – Síntese das respostas do G2 com base no PEP-FP



Fonte: a própria autora

No PEP-FP que propomos, no capítulo 3, apresentamos diferentes possibilidades de respostas e o trouxemos aqui para sintetizar as respostas do G2, mostrando as respostas do grupo para os questionamentos feitos, com base no plano de aula elaborado.

A seguir traremos a análise e a descrição do Grupo 3.

6.3 GRUPO 3

O Grupo 3 (G3) possui como integrantes três licenciandos (L6, L7 e L8), sendo que L8 ingressou no G3 no segundo encontro.

No primeiro encontro, da aplicação do PEP-FP os licenciandos L6 e L7 não enviaram o áudio da sua discussão. Sendo assim, nossa análise se dará por meio dos dados fornecidos a partir do segundo encontro.

Ao discutir a respeito das justificativas das escolhas frente a questão proposta no PEP, a saber "Q_0: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*", G3 inicia sua discussão falando a respeito de qual método apresentaria primeiro, como é possível notar no trecho a seguir:

> **L8** – Então a gente concorda que o [método] da substituição é o mais simples?
> **L7** – Eu acho... A gente combinou na semana passada, L6 e eu. A gente chegou em um consenso que isolar uma equação e substituir na outra seria uma coisa mais natural deles entenderem, porque já estão vindo da equação do 1° grau.
> **L8** – Sim.

Por meio desse trecho, observamos que G3, em específico L7, tomou como referência o conhecimento prévio dos alunos acerca de equações do 1° grau para justificar o porquê de se apresentar primeiro o método da substituição, e com isso evidenciamos uma mobilização do conhecimento do conteúdo no horizonte, uma vez que mostram "[...] uma consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo da extensão da matemática incluída no currículo"[99] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403, tradução nossa). Além de evidenciar o conhecimento do conteúdo e do estudante, por prever "[...] o que os alunos provavelmente pensam e o que acharão confusos"[100] (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401).

---

[99] [...] an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum.
[100] […] anticipate what students are likely to think and what they will find confusing.

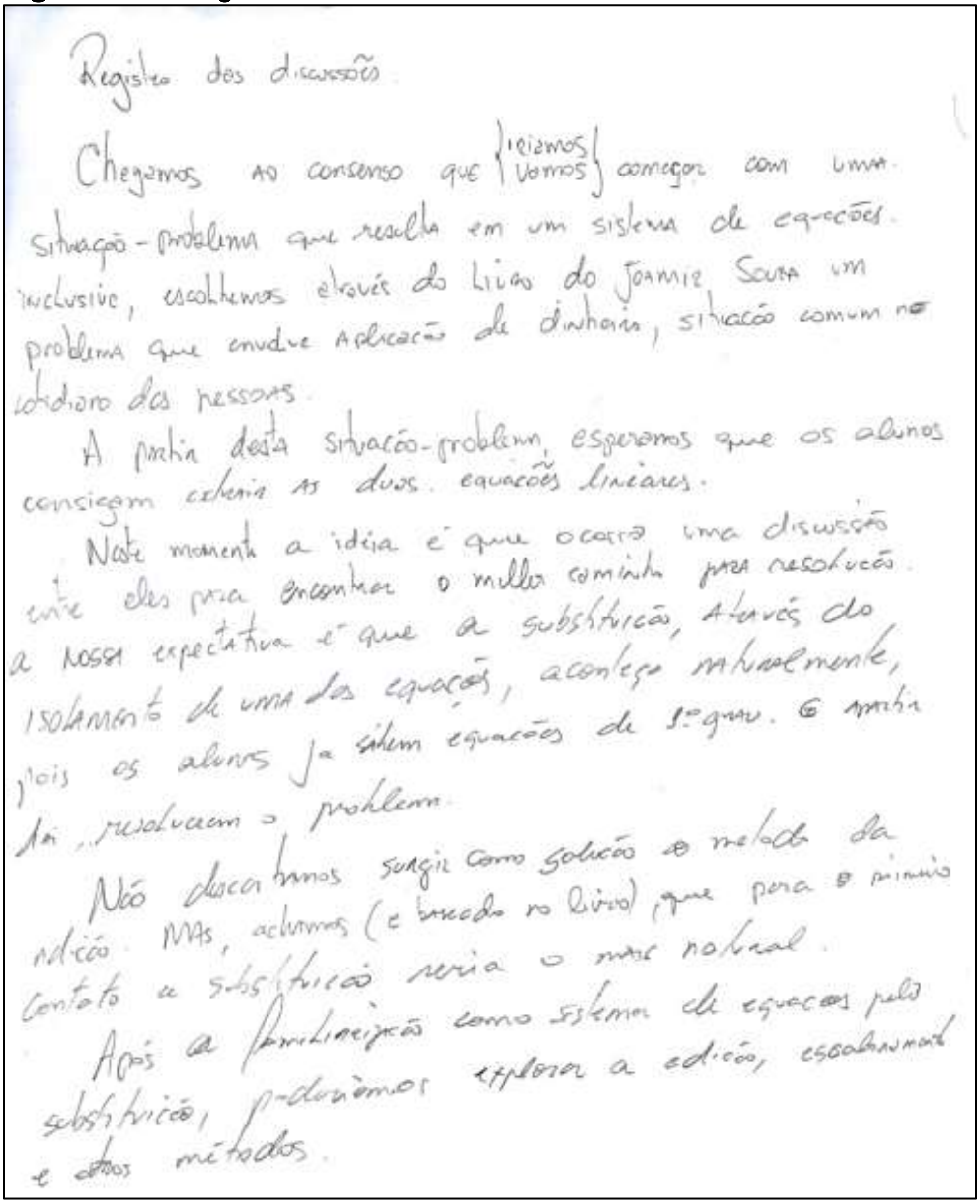
Outro ponto a ser considerado na discussão de G3, é que os integrantes se preocuparam em verificar em livros didáticos e na internet como o conceito de Sistema de Equações Lineares é introduzido e qual método é mostrado primeiro.

> **L8** – Então... vou tirar uma conclusão do que eu observei aqui no livro, ele começa pela adição certo?
> **L7** – Aham
> **L8** – Mas os tipos de problema que o livro começa, ele sempre cai numa coisa do estilo que está aqui... -3y + 3y. É mais visual quando já está montado o sistema, -3y + 3y, junta as duas que dá zero.
> **L7** – Por isso que eu acho que o da adição, não importa isso daí...
> **L8** – É... então...
> **L7** – Pela adição não, pela substituição.
> **L8** – Da substituição não importa o valor...
> **L7** – O aluno tem que saber o que está acontecendo, são duas equações com duas incógnitas que ele tem de achar a solução. Quando ele isola e substitui sai natural, porque ele já trabalhou com equação do 1° grau, não vai ser um negócio de outro mundo para ele. Depois que ele pega o ritmo do sistema você começa a mostrar várias ferramentas para ele resolver. Porque se você vê a adição, ele automaticamente vai cair no escalonamento, porque às vezes quando não está assim mais 3 e menos 3, você tem que multiplicar...
> [...]
> **L7** – Se eu fosse dar uma aula hoje, eu partiria de uma situação-problema montaria as duas equações e diria “e agora para resolver isso?” E substituiria uma na outra.

Esse excerto mostra novamente o argumento de L7 ao considerar mais interessante trazer inicialmente o método da substituição, por conta do conhecimento prévio do aluno. Tal comentário corrobora para nossa inferência a respeito do conhecimento matemático para o ensino.

De modo geral, no segundo encontro, G3 buscou situações-problema que possibilitariam a abordagem que considera mais coerente para o ensino de Sistema de Equações Lineares (Figura 27):

Figura 27 – Registro escrito do 2°encontro do G3[101]


Registro das discussões

Chegamos ao consenso que {iríamos vamos} começar com uma situação-problema que resulta em um sistema de equações. inclusive, escolhemos através do Livro do Joamir Souza um problema que envolve aplicação de dinheiro, situação comum no cotidiano das pessoas.

A partir desta situação-problema, esperamos que os alunos consigam extrair as duas equações lineares.

Neste momento a idéia é que ocorra uma discussão entre eles para encontrar o melhor caminho para resolução a nossa expectativa é que a substituição, através do isolamento de uma das equações, aconteça naturalmente, pois os alunos já sabem equações de 1° grau. e a partir daí, resolverem o problema.

Não descartamos surgir como solução o método da adição. MAS, achamos (e baseado no livro) que para o primeiro contato a substituição seria o mais natural.

Após a familiarização como sistema de equações pela substituição, poderíamos explorar a adição, escalonamento e outros métodos.

Fonte: Registro escrito G3

[101] Transcrição Figura 27: Registro das discussões
Chegamos ao consenso que {iríamos vamos} começar com uma situação-problema que resulta em um sistema de equações. Inclusive, escolhemos através do Livro do Joamir Souza um problema que envolve aplicação de dinheiro, situação comum no cotidiano das pessoas.
A partir desta situação-problema esperamos que os alunos consigam extrair as duas equações lineares.
Neste momento a ideia é que ocorra uma discussão entre eles para encontrar o melhor caminho para resolução a nossa expectativa é que a substituição, através do isolamento de uma das equações, aconteça naturalmente, pois os alunos já sabem equações de 1° grau e a partir daí resolverem o problema.
Não descartamos surgir como solução o método da adição, MAS, achamos (e baseado no livro) que para o primeiro contato a substituição seria o mais natural.
Após a familiarização como sistema de equações pela substituição, poderíamos explorar a adição, escalamento e outros métodos.

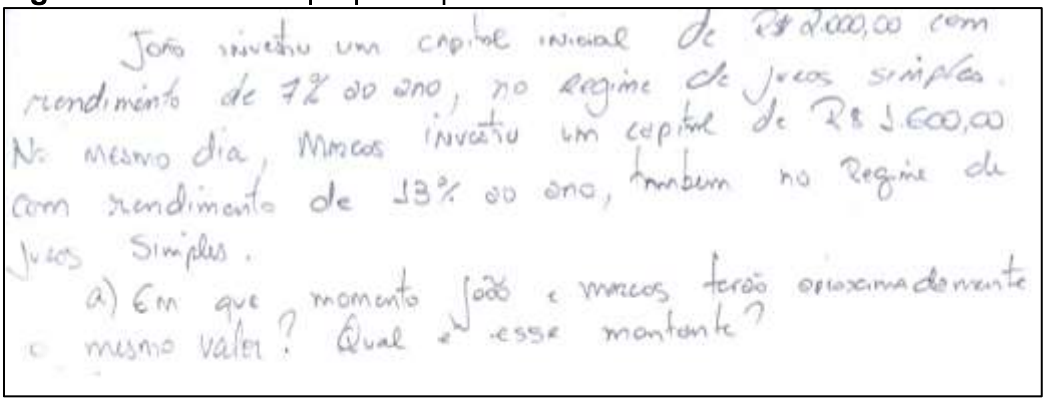
Uma questão interessante a ressaltar, por meio da Figura 27, é o fato dos integrantes do G3 partirem de uma situação-problema que envolve algo, de certo modo, comum ao aluno. Tal situação vem reforçar nossa inferência a respeito do conhecimento do conteúdo e do estudante (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

No terceiro encontro do nosso PEP-FP foi solicitada a elaboração de um plano de aula com base nas discussões feitas nos dois primeiros encontros. Como apenas L7 participou do encontro não temos áudio. Todavia, tal licenciando iniciou a elaboração do plano, finalizado no quarto encontro com a participação de L6 e L8.

No quarto encontro, G3 discutiu a respeito de tarefas que seriam utilizadas e entregou o plano de aula por ele elaborado. Sendo assim, o analisaremos com base nos *momentos didáticos do ciclo Atividade, discussão em Classe e Exercícios* (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015), visando evidenciar um aspecto do diálogo entre a TAD e a APOE.

No momento do primeiro encontro (ou reencontro) com o conceito de Sistema de Equações Lineares será apresentada a Tarefa 1 (Figura 28):

Figura 28 – Tarefa 1 proposta por G3[102]


João investiu um capital inicial de R$ 2.000,00 com rendimento de 7% ao ano, no regime de juros simples. No mesmo dia, Marcos investiu um capital de R$ 1.600,00 com rendimento de 13% ao ano, tambem no Regime de Juros Simples.

a) Em que momento João e Marcos terão aproximadamente o mesmo valor? Qual é esse montante?

Fonte: Registro escrito do G3

No momento da exploração com a técnica, G3 comenta que os alunos do Ensino Médio buscarão uma técnica para resolver Sistema de Equações Lineares e evidencia nas possíveis resoluções o método da substituição e a técnica da "tentativa", isto é, os alunos vão atribuindo valores aleatórios até chegar à resposta

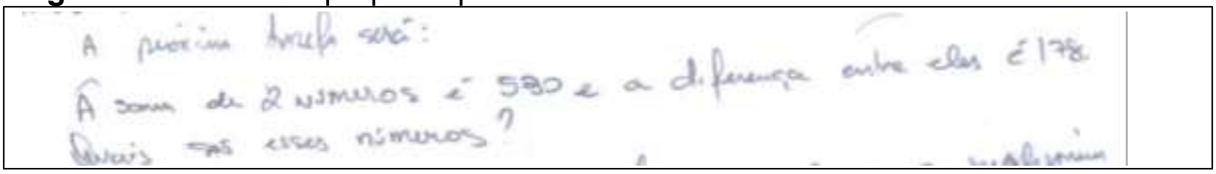
[102] Transcrição Figura 28: João investiu um capital inicial de R$ 2 000,00 com rendimento de 7% ao ano, no regime de juros simples. No mesmo dia, Marcos investiu um capital de R$ 1 600,00 com rendimento de 13% ao ano, também no regime de juros simples.

a) Em que momento João e Marcos terão aproximadamente o mesmo valor? Qual é esse montante?

desejada. Em relação a Tarefa 1, podemos comentar que ela pode ser entendida como técnica-objeto, já que os alunos terão de encontrar um sistema que representa a situação para, então, resolvê-lo, além disso, tal tarefa possibilita que sejam respondidas questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No que diz respeito a outra tarefa proposta, evidenciamos a técnica-ação na Tarefa 2 (Figura 29), pois esta visa a exploração da técnica por meio de ações:

Figura 29 – Tarefa 2 proposta por G3[103]


A próxima tarefa será:
A soma de 2 números é 530 e a diferença entre elas é 178.
Quais são esses números?

Fonte: Registro escrito do G3

No momento da constituição do bloco tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 2009), é possível comentar que os licenciandos utilizaram diferentes técnicas, como o método da substituição e da adição.

No momento da institucionalização, os licenciandos trouxeram as definições de Equações Lineares e de Sistema de Equações Lineares e formalizaram os procedimentos adotados para sua resolução algébrica. Em relação ao trabalho com a técnica, os integrantes do G3 frisaram que iriam propor uma lista com problemas diversos, porém não apresentaram essa lista.

O momento da avaliação não é apresentado por G3.

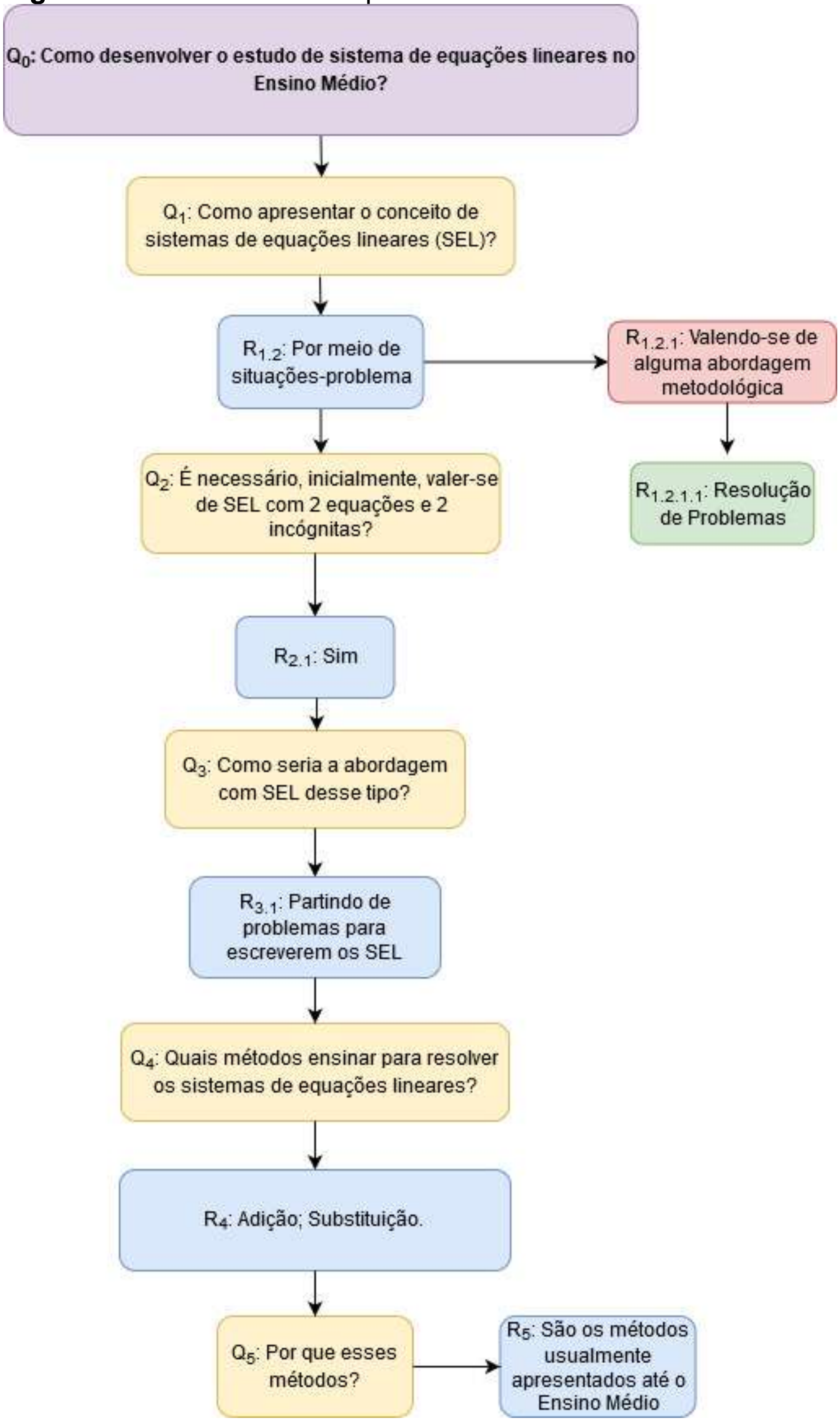
Com o exposto nessa seção, observamos a mobilização do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e notamos aspectos que do diálogo entre a TAD e a APOE, no qual inferimos que as técnicas atreladas às concepções (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015) podem ser evidenciadas nas tarefas propostas por G3.

Além disso, é interessante ressaltar alguns aspectos relacionados ao plano de aula entregue por G3, que pode ser entendido como algo a ser realizado em uma ou duas aulas, ou seja, um plano para introduzir o conceito de Sistema de Equações Lineares, visto que não avançou para sistemas com mais de duas equações e duas incógnitas, sendo que isso é explorado no Ensino Médio. Esse aspecto também foi

103 Transcrição Figura 29: A próxima tarefa será:
A soma de 2 números é 530 e a diferença entre eles é 178. Quais são esses números?

evidenciado em G2. A seguir, apresentaremos a Figura 30 que sintetiza o que foi discutido pelos integrantes do G3, com base em nosso PEP-FP.

Figura 30 – Síntese das respostas do G3 com base no PEP-FP



Fonte: a própria autora

Cabe frisar, novamente, que no nosso PEP-FP não evidenciamos uma abordagem metodológica específica, porém o G3 faz isso, sendo assim, inserimos como resposta à Q_1.

Na próxima seção, traremos a descrição e a análise do Grupo 4.

6. 4 GRUPO 4

O Grupo 4 (G4) é formado por dois licenciandos (L9 e L10) que não foram ao primeiro encontro da aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP). Desse modo, no segundo encontro explicamos o objetivo da pesquisa e o que havia sido realizado na semana anterior para situá-los a respeito do que seria feito naquele momento.

Inicialmente G4 discutiu a questão Q_0, a saber: "*Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*", do nosso Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP), pensando a respeito dos objetivos, como é possível notar no diálogo a seguir:

> **L9** – 'Tá'... Tipo... Como ela definiu para gente do ponto de vista do professor eu acho que assim primeiro a gente teria que definir o material que a gente vai utilizar para fazer os estudos referentes a isso e quais objetivos que a gente pretende em cima desses estudos. Se é... eu separei em dois objetivos: o primeiro que é uma possibilidade de objetivo que é reconhecer e montar um sistema de equações lineares, ou seja, eles tentarem transformar da linguagem que a gente tem ali se a gente for partir de uma situação-problema.
> **L10** – Aham
> **L9** – Para que eles consigam escrever na linguagem matemática. A outra segunda possibilidade de objetivo é resolver o sistema de equações lineares por um tipo de método. Eu coloquei de escalonamento, mas pode ser pela regra de Cramer.
> **L10** – Uhum
> **L9** – Enfim...
> **L10** – 'Tá'... Eu acho que como ela deixou livre, quando eu falar em equação linear no Ensino Médio eu ia fazer a primeira possibilidade... de objetivo, o primeiro objetivo...

A partir da ideia de "reconhecer e montar um sistema de equações lineares", G4 começou a refletir a respeito de como faria isso, se utilizaria uma situação-problema:

> **L10** – É... E agora a questão é como a gente vai levar isso daqui para o aluno. Vai chegar com o quê? Vai chegar direto com um problema? Como a maioria fez ou existe alguma outra possibilidade diferente? Como apresentar isso? Entendeu? Para os alunos.
> **L9** – Entendi. A tem como tipo tacar lá, vamos dizer assim, calcule, resolva o sistema.
> **L10** – Mesmo sem o aluno não saber...
> **L9** – Então. É aí que entra a questão tipo de extrair. Eu não vejo outra alternativa. Sei lá. Se... Tentar mostrar. Tentar fazer o aluno identificar onde esse conteúdo matemático ou essa expressão...
> **L10** – se encaixa?
> **L9** – ... se encaixa
> **L10** – Sem ele saber resolver antes.
> **L9** – É... sem ter visto antes ou tipo... dá sentido daquilo para ele.
> **L10** – Então você acha primeiro ele aprende a técnica, né? A parte teórica...
> **L9** – Isso.
> **L10** – Não teórica, na verdade é a parte assim... é a técnica mesmo. Saber resolver e depois a gente vai identificar em um problema?
> **L9** – Eu acho que não. Primeiro ele tem que resolver... identificar no problema, mas como identificar isso em um problema? Primeiro tipo tem uma situação lá, que sei lá, um probleminha do... do... não é do conteúdo... é do contexto que ele vive, sei lá, que tenha mais sentido.
> [...]
> **L10** – Tá... Então a proposta é a gente chegar com o quê? Chegar na sala e fazer o quê?
> **L9** - Ah eu gosto de resolução de problemas...
> **L10** – Você gosta de resolução de problemas?
> **L9** – É, então... tipo pegar alguma tarefa que induza ele a pelo menos montar isso...
> **L10** – 'Tá'.
> **L9** – Mas aí a gente tem que analisar e verificar alguma tarefa que tenha...
> **L10** – Fácil
> **L9** – ... um mais valor simbólico para ele.

O diálogo evidencia uma preocupação do G4 em encontrar uma situação com "valor simbólico" para o estudante, visto que considera complicado apresentar direto uma tarefa do tipo "resolva", sem os estudantes conhecerem o conceito a ser trabalhado. Desse modo, os integrantes do G4 começam a pensar até mesmo no uso de uma abordagem metodológica, no caso a Resolução de Problemas.

Com base no exposto no parágrafo anterior, podemos olhar para o conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), em específico para o conhecimento do conteúdo e do estudante (p. 401, tradução nossa), pois "ao escolher um exemplo, os professores precisam prever o que os alunos acharão interessante e motivador"[104] e G4 mostra indício dessa preocupação.

O G4 continua pesquisando uma situação-problema que pode ser utilizada e refletindo sobre como chegar na sala de aula para abordar o conceito. Nessa reflexão recorre à Base Nacional Comum Curricular e começa a pensar na habilidade que é exposta, que relaciona os verbos "resolver e elaborar". Na questão do "elaborar", os integrantes voltam seu olhar para outra abordagem metodológica, como é possível notar na fala de L9: "[...] tipo trabalhar alguma coisa de modelagem com eles, se eles conhecem algum comportamento ou relação através de uma expressão de algum contexto que tem uma relação de igualdade com valor simbólico-numérico".

Com base em suas discussões, G4 começa a fazer um esboço de um plano de aula para auxiliar a responder à questão Q_0 proposta por nós. No terceiro encontro apenas L9 foi, com isso, continuou a elaborar o plano de aula que havia iniciado no segundo encontro com L10.

No quarto encontro, G4 finalizou alguns detalhes do plano de aula, que foi entregue. Sendo assim, o analisaremos observando aspectos do diálogo das teorias APOE e TAD, especificamente, dos *momentos didáticos do ciclo Atividade, discussão em Classe e Exercícios* (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015).

No momento do primeiro encontro com Sistema de Equações Lineares, G4 propôs uma situação, a qual denominaremos de Tarefa 1 (Quadro 11):

Quadro 11 – Tarefa 1 proposta por G4

Mostrar a balança (já providenciada pelo professor), questionar os alunos se conhecem o instrumento. Se sim, pedir ao aluno para explicar, se não, explicar a funcionalidade da balança. Diante do reconhecimento do objeto, o professor deverá estimular o pensamento dos alunos sobre como seria possível aferir a medida ou a aproximação da massa de um corpo, sem o uso do mesmo. Diante da discussão, o professor deve apresentar 4 tipos de frutas das quais tenha preferência em abordar em sala e com quantias diferentes de cada tipo (de tal modo que o professor deva selecionar cada tipo de fruto com propriedades semelhantes, "peso, tamanho, etc"). O professor irá explicar como seria uma situação, como a questionada anteriormente, visando a desafiar o grupo a descobrir a massa média de cada unidade de fruta selecionada pelo grupo diante da situação proposta.

Fonte: Registro do G4

[104] When choosing an example, teachers need to predict what students will find interesting and motivating.

Em relação a Tarefa 1, é possível observar aspectos que a caracterizam como técnica-objeto, visto que permitirá responder a questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No momento da exploração da Tarefa 1 e da elaboração de uma técnica, G4 comenta que "o professor desafia os alunos a descobrirem a massa média de cada uma das frutas selecionadas pelo grupo, pensando em estratégias diferentes e criativas para cada resolução". Desse modo, os alunos criarão técnicas de resolução a serem empregadas no mesmo tipo de problema.

No que se refere ao momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 1999), é possível explicitar que para a resolução da Tarefa 1 pode-se utilizar o método do escalonamento.

Para o momento de trabalho com a técnica, G4 propõe outra situação, a qual denominaremos Tarefa 2 (Quadro 12), que, assim como a Tarefa 1, pode ser entendida como técnica-objeto:

Quadro 12 – Tarefa 2 proposta por G4

[...] iremos propor um problema aos alunos descrevendo uma situação onde uma nutricionista precisa determinar o peso de cada fruto para fazer o balanço nutricional de sua dieta diária, porém o pacote de frutas que ela comprou vem com o peso total de todas elas dispostas conforme os alunos selecionaram. Perante essa situação como eles poderiam solucionar esse problema e ajudar a nutricionista a encontrar o peso individual de cada fruta para calcular a quantidade mínima de frutose (carboidrato presente nas frutas, açúcar) que deve ser ingerida em uma refeição diária, sabendo que a dose indicada pela Organização Mundial da Saúde é de 25g de açúcar por dia. Nesse caso deverá ser apresentado uma tabela informando a relação da massa e a quantidade de frutose para cada fruta. Utilizaremos um exemplo conforme mostrado na possível resolução. Considere que cada 100 gramas de banana contém 6,2 gramas de frutose e que a cada 100 gramas de maçã contém 7,6 gramas de frutose e que a cada 100 gramas de uva contém 7,8 gramas de frutose.

Fonte: Registro do G4

No momento da institucionalização, G4 formaliza o conceito de Sistema de Equações Lineares, bem como o método do escalonamento, apresentando um roteiro para aplicar esse método.

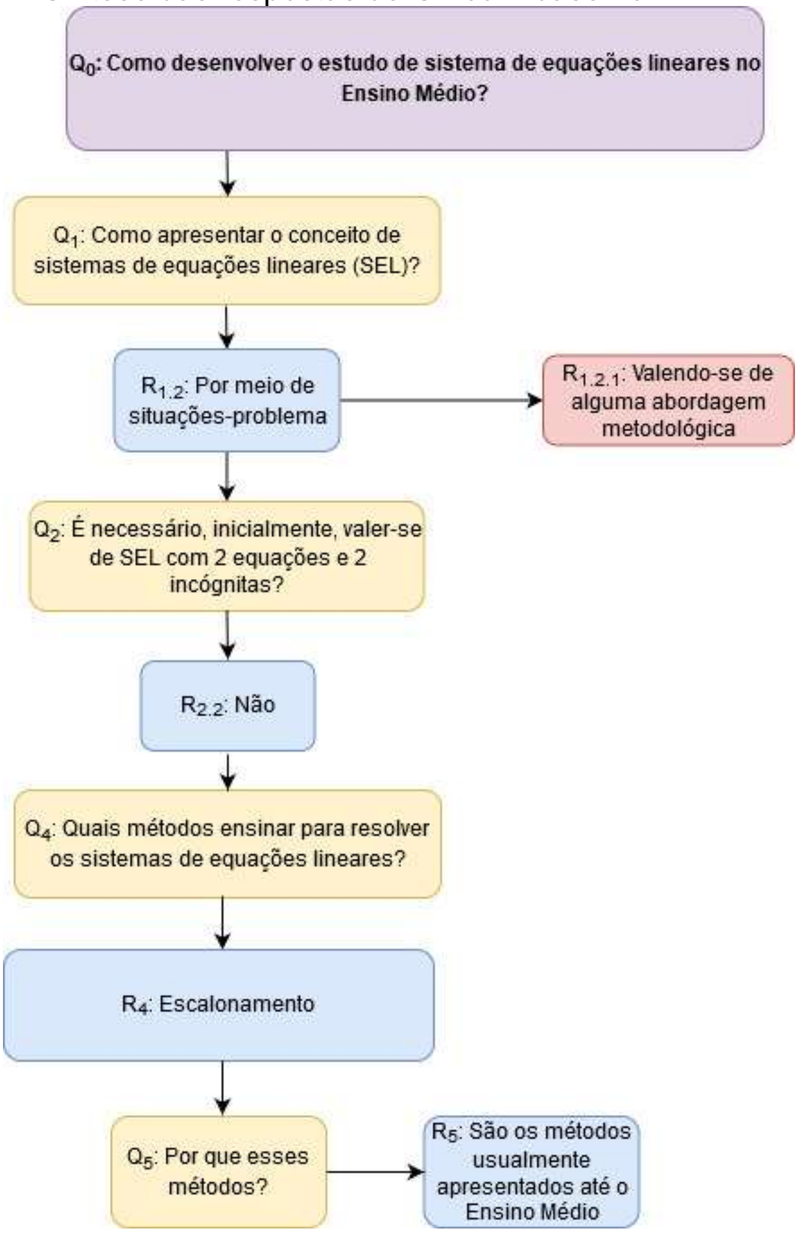
O momento de avaliação não é exposto no plano de aula do G4.

Por meio do que analisamos nessa seção, conseguimos notar a mobilização do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e inferimos a respeito das técnicas atreladas às concepções (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015), com vistas a evidenciar um aspecto do diálogo entre a APOE e a TAD.

Além disso, notamos que o plano apresentado por G4 não explora outros conceitos relacionados à Sistema de Equação Lineares, como a classificação com base no conjunto solução e outros métodos, por exemplo, o geométrico. Percebemos também que mesmo não sendo explicitado no plano de aula há aspectos relacionados à Modelagem Matemática.

A seguir, apresentaremos a Figura 32 que sintetiza o que foi discutido e mostrado no plano de aula por G4, com base, em nosso PEP-FP exposto no capítulo 3.

Figura 31 – Síntese das respostas do G4 com base no PEP-FP



Fonte: a própria autora

Cabe ressaltar que as respostas apresentadas por meio do nosso PEP-FP referem-se, principalmente, ao que foi tratado no plano de aula entregue por G4, por isso não inserirmos “Modelagem Matemática” como resposta a $R_{1.2.1}$.

Na próxima seção, traremos a descrição e análise das discussões, registros escritos e do plano de aula do Grupo 5.

6.5 Grupo 5

O Grupo 5 (G5), constituído apenas no 3° encontro, é formado por dois licenciandos (L11 e L12). Cabe ressaltar que os licenciandos estavam presentes no primeiro encontro do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP), mas esses eram duplas de L3 e de L8, respectivamente.

Assim, para falar desse grupo é interessante observar a discussão feita no primeiro encontro, porém traremos a discussão de L8 e L12 por esses terem nos enviado o áudio, algo que não aconteceu com L3 e L11. Consideramos importante analisar a discussão feita no primeiro encontro, mesmo não sendo com os integrantes do G5, por auxiliar a entender a tomada de decisão na elaboração de seu plano de aula.

Ao refletirem a respeito da questão inicial do PEP-FP, a saber “Q_0: *Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio?*”, L8 e L12 apresentam o seguinte diálogo:

> **L8** – Para começar é sempre bom a gente dá um problema para situar o aluno de alguma... da situação e a partir disso ele conseguir pensar em alguma coisa.
> **L12** – Mas e daí a gente podia começar como você disse com um problema para ele relembrar equações, porque, às vezes, nem todos os alunos lembram conteúdos passados. Então, às vezes, é bom dar um problema que volte ao conteúdo de equações para depois a gente dar um problema que seja sistema de equações.
> **L8** – É... porque se ele não relembrar equações, fica difícil na hora de trabalhar, né?! O aluno vai ficar ali patinando na equação e daí não consegue desenvolver o próximo conteúdo.
> **L12** – Eu realmente não consigo pensar em outro desenvolvimento, é porque acho que a gente está tão... é tão recente essa parte de Resolução de Problema que eu não consigo pensar. [...]

Esse trecho mostra a preocupação de retomar o conceito de Equações Lineares para em seguida apresentarem Sistema de Equações Lineares, pois como ressalta L12 “[...] nem todos os alunos lembram [de] conteúdos passados”. Essa preocupação relacionada ao que o aluno sabe, pode ser vista como o conhecimento do conteúdo e dos estudantes (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa), por “prever o que os alunos provavelmente pensam [...]”[105].

Ao longo desse primeiro encontro, L8 e L12 falaram também do uso da interpretação geométrica de Sistema de Equações Lineares e para tanto, L8 comenta a sua experiência em uma oficina proposta em seu estágio:

> **L8** – E eu achei que foi uma parte legal! Não sei se todos os alunos conseguiram é... entender isso...
> **L12** – Aham.
> **L8** – Mas porque a gente...
> **L12** – Nem eu entendi isso...
> **L8** – É, então, a gente teve uma aula de quatro horas, tipo que nem são as quatro aulas completas, para explicar isso daí. Então, acabou que tipo não sei se os alunos conseguiram captar.
> [...]
> **L8** – [...] Mas... eu acho que é um bom desenvolvimento, porque daí eles enxergam, né?! Além da parte algébrica que eles só encontram o valor de x, né?! O de y. A parte gráfica eles conseguem ver tipo: “Oh está acontecendo alguma coisa aqui!”.
> **L12** – E sai do tradicional também, né?!

Notamos por meio desse excerto a busca por algo diferente para desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares não ficando também apenas na parte algébrica. Dessa forma, os licenciandos mostraram o conhecimento do conteúdo e do ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa), uma vez que avaliaram “[...] as vantagens e desvantagens instrucionais das representações usadas para ensinar uma ideia específica e identificar o que os diferentes métodos e procedimentos proporcionam instrucionalmente”[106].

Como L12 faltou no segundo encontro do PEP-FP, L8 integrou o G4 e a partir do terceiro encontro se juntou com L11, que também havia faltado no segundo encontro, e, assim, temos o G5. Durante esse encontro, o grupo discutiu como desenvolveria o estudo de Sistema de Equações Lineares, comentando que iniciaria por equações lineares, como é possível notar no trecho a seguir:

---

[105] [...] anticipate what students are likely to think […].
[106] […] the instructional advantages and disadvantages of representations used to teach a specific idea and identify what different methods and procedures afford instructionally.

> **L11** – Antes de começar não só falar da incógnita, mas jogar uma equação.
> **L12** – Sim. Tipo assim: dar um resumo do que é equação e voltar um pouquinho e...
> **L11** – É... Isso!
> **L12** – Ah entendi... Que nem... Ah entendi. Tá! A gente pode começar falando primeiro o que que é equação, como se monta equação, essas coisas.
> **L11** – A gente monta ou a gente dá um problema e eles se viram? Tem que fazer eles buscarem isso?
> **L12** – É... Se a gente vai trabalhar com a resolução de problemas a gente já pode começar com...
> **L11** – Com um problema.
> **L12** – Com um problema...

Por meio do excerto apresentado observamos que além de decidir com qual conceito começaria, G5 comenta a respeito da metodologia que iria adotar, no caso, a Resolução de Problemas. Na busca pelo problema, os licenciandos falaram de utilizar algo relacionado a um problema real:

> **L11** – A gente poderia partir de uma situação assim, de corrida de UBER, de como é calculado o preço.
> **L12** – Ah legal! Tipo, é um problema real que nem eles falam, da realidade da pessoa.
> **L11** – Mas como é calculado quem sabe? Se é por tempo ou por quilometragem? Aí esse aqui tem tudo.
> **L12** – Legal, gostei!
> [...]
> **L11** – Estava procurando esse aqui, exatamente por ser algo que está na realidade...
> **L12** – Sim.
> **L11** – A todo momento, porque hoje não tem ninguém que não pega UBER.
> **L12** – Sim...

Esse trecho evidencia que G5 almejou encontrar uma situação-problema que fosse atrativa aos estudantes, uma vez que, a ideia de solicitar carro por aplicativo é algo que se tornou, de certo modo, comum, mas o modo como é calculado o preço passa, algumas vezes, despercebido. Sendo assim, podemos inferir a respeito do conhecimento do conteúdo e dos estudantes (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa), já que "ao atribuir uma tarefa, os professores precisam prever o que os alunos acharão interessante e motivador"[107].

[107] When choosing an example, teachers need to predict what students will find interesting and motivating.

Ainda a respeito dos estudantes, ao longo da discussão do 3° encontro, constatamos outros elementos que corroboram com nossa inferência acerca do conhecimento do conteúdo e dos estudantes (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), como as seguintes falas:

> **L12** – Mas você sabe que tem muito aluno que não sabe, né? Tipo assim, montar isso daqui e "um número" [...].
> [...]
> **L12** – Não precisa ser uma coisa super complexa, mas também não pode ser uma coisa que eles vão fazer assim... né? Porque perde a graça.
> **L11** – De equações eles vão fazer rápido
> **L12** – Sim... É, isso é verdade. Mas, assim, para...
> **L11** – Para esse... com esse objetivo, acho que não tem problema, nesse caso.
> **L12** – É, então, isso que eu ia falar agora, para esse, se o nosso objetivo só for relembrar...
> **L11** – Só relembrar
> **L12** – O que é equação
> **L11** – a gente sabe que eles saem rápido mesmo.
> **L12** – Sim... Exatamente... Então não precisa ser uma coisa muito complexa.

Outro ponto a se destacar dessa fala refere-se à possibilidade de inferir a mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 401, tradução nossa), porque sequenciaram "determinado conteúdo para obter instruções" e escolheram "[...] quais exemplos começar e quais exemplos usar para levar os alunos mais a fundo no conteúdo"[108].

De modo geral, nesse terceiro encontro G5 fez um esboço do que abordaria no seu plano de aula e discutiu quais problemas usaria. No quarto encontro, L12 não foi e L11 finalizou alguns detalhes do plano de aula, em seguida o enviou por e-mail. Sendo assim, analisaremos esse plano de aula, observando aspectos do diálogo das teorias APOE e TAD, especificamente, dos *momentos didáticos do ciclo Atividade, discussão em Classe e Exercícios* (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015).

No primeiro momento do encontro (ou reencontro) com o conceito de equações lineares, G5 propôs a Tarefa 1 (Quadro 13)

---

[108] [...] sequence particular content for instruction. […] choose which examples to start with and which examples to use to take students deeper into the content.

Quadro 13 – Tarefa 1 proposta por G5 para a aula 1

2.1 PRIMEIRA TAREFA

Leia a tirinha com atenção.

TIRINHA DA TURMA DA MÔNICA COM UM DIÁLOGO ENTRE CASCÃO E MARCELINHO.

Para comprar a chuteira, cujo preço era R$ 85,00 à vista, Marcelinho guardou por 3 meses uma mesma quantia por mês e juntou com R$ 10,00, que seu avô lhe deu para inteirar. Quantos reais Marcelinho guardou por mês?[109]

2.1.1 Objetivos específicos
Relembrar os conceitos de equações de 1º grau com uma incógnita;

Fonte: Registro do G5

No momento da exploração com a técnica, como é comentado no plano de aula, os alunos do Ensino Médio terão um tempo para resolver, buscando técnicas que poderão ser utilizadas. Em relação a Tarefa 1, é possível observar aspectos que a caracterizam como técnica-objeto, visto que permitirá responder questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico (CHEVALLARD, 2009) podemos explicitar que para a resolução da Tarefa 1, G5 apresentou a técnica adotada para resolvê-la. No momento da institucionalização, G5 traz a definição de equações lineares, relacionando-a à tarefa apresentada.

O momento de trabalho com a técnica, assim como nos demais grupos, não é evidenciado no plano de aula proposto, visto que G5 não traz mais tarefas de equações lineares para serem realizadas.

O conceito de Sistemas de Equações Lineares começa a ser explorado com a Tarefa 2 (Quadro 15). Com essa tarefa temos o momento de reencontro com a organização matemática que está em estudo. No que tange a essa tarefa, é possível, assim, como na Tarefa 1, considerar que ela se caracteriza como técnica-objeto.

Quadro 14 – Tarefa 2 proposta por G5 para a aula 1

2.2 SEGUNDA TAREFA

Célia sacou R$ 110, 00 em um caixa eletrônico. Essa quantia era composta apenas por cédulas de 10 e de 20 reais, em um total de 8 cédulas. Quantas cédulas de cada valor Célia sacou?[110]

2.2.1 Objetivos específicos

[109] SOUZA, J. R. Matemática realidade & tecnologia. 8º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. p. 73.
[110] Fonte: Souza, Joamir R.; Pataro; Patrícia R. M. Vontade de saber Matemática. 8º ano. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. p.144. (Adaptado)

• Utilizar a linguagem algébrica para expressar dados de um problema; • Obter sistema de equações algébricas de 1º grau com duas incógnitas; • Resolver sistema de equações algébricas de 1º grau com duas incógnitas pelo método da substituição.

Fonte: Registro do G5

Esse momento de reencontro com o conceito pode ser evidenciado em outras tarefas propostas por G5, uma vez que em seu plano de aula o grupo sugeriu utilizar 3 aulas. Assim, cada tarefa possibilita a análise de um tópico do conceito que está sendo revisitado, isso no caso da Tarefa 3 (Quadro 15) da aula 1 e da Tarefa 1 (Quadro 16) da aula 2. Já a Tarefa 1 (Quadro 17) da aula 3 possibilita um primeiro contato com um sistema com três equações e três incógnitas.

Quadro 15 – Tarefa 3 proposta por G5 para a aula 1

2.3 TERCEIRA TAREFA Em uma turma de 8º ano estudam 25 alunos, sendo a maioria meninos. A diferença entre o número de meninos e o de meninas é 7 alunos. Escreva um sistema de equações e determine o número de meninos e meninas dessa turma.[111] 2.3.1 Objetivos específicos • Utilizar a linguagem algébrica para expressar dados de um problema; • Obter sistema de equações algébricas de 1º grau com duas incógnitas; • Resolver sistema de equações algébricas de 1º grau com duas incógnitas pelo método da adição.

Fonte: Registro do G5

Quadro 16 – Tarefa 1 proposta por G5 para a aula 2

3.1 PRIMEIRA TAREFA João Pedro convidou seus amigos para comer pizza em sua casa. Ele encomendou 6 pizzas, sendo 4 salgadas e 2 doces e teve que pagar R$ 160,00. Mais tarde percebeu que o número de pizzas que comprara era insuficiente para aquela quantidade de pessoas e retornando à pizzaria comprou mais 2 salgadas e 1 doce, pagando mais R$ 80,00. a) Escreva um sistema de duas equações para representar a situação. b) Resolva o sistema que você escreveu no item anterior, determinando o preço de cada pizza salgada e de cada pizza doce.[112] 3.1.1 Objetivos específicos • Utilizar a linguagem algébrica para expressar dados de um problema; • Obter um sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas; • Sistematizar a classificação de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas;

Fonte: Registro do G5

[111] Fonte: Souza, Joamir R.; Pataro; Patrícia R. M. Vontade de saber Matemática. 8º ano. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. p.144. (Adaptado)
[112] Adaptado de SOUZA, J. R. Matemática realidade & tecnologia. 8º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

Quadro 17 – Tarefa 1 proposta por G5 para a aula 3

4.1 PRIMEIRA TAREFA

Na disciplina de Matemática de certo curso, o professor aplicou 3 provas com pesos diferentes. Abaixo estão apresentadas as notas dos alunos que obtiveram o melhor desempenho nessas provas e suas médias ponderadas.

Aluno	Prova			Nota final
	1ª	2ª	3ª	
Natália	9,7	8,4	8,9	9,2
Eduardo	9,5	8,3	8,3	8,9
Vanessa	8,4	9,4	8,4	8,6

De acordo com as informações, determine o peso de cada prova, sabendo que a soma deles é 10.[113]

4.1.1 Objetivos específicos

- Utilizar a linguagem algébrica para expressar dados de um problema;
- Obter e resolver sistemas de equações do 1º grau com três incógnitas;

Fonte: Registro do G5

Ao olhar para essas tarefas com os "óculos" do ciclo ACE relacionado à TAD, podemos inferir que essas tarefas, assim como a Tarefa 1 e 2, proporcionam a técnica-objeto por permitir responder questões relacionadas à técnica e à relação dela com outras técnicas.

No momento da exploração, os alunos criarão técnicas de resolução a serem empregadas a problemas do mesmo tipo, isto é, que envolvam Sistema de Equações Lineares.

Em relação à constituição do ambiente tecnológico-teórico, é possível comentar que ele é desenvolvido nos demais momentos, visto que desde o primeiro momento está sendo feita uma relação dialética com a emergência de uma técnica, no caso das tarefas propostas na aula 1, temos: na Tarefa 2, o método da substituição e na Tarefa 3, o método da adição. Na Tarefa 1, da aula 2, o método geométrico. Já na Tarefa 1, da aula 3, G5 expõe apenas que os alunos poderiam resolvê-la utilizando tentativa, isto é, escolhendo valores aleatórios para as incógnitas até achar uma que satisfaça o Sistema de Equações, representado na situação-problema.

No momento da institucionalização, G5 traz a definição de Sistema de Equações Lineares e são formalizados os procedimentos adotados na técnica da

[113] SOUZA, J. R. GARCIA, J. S. R. # Contato Matemática. 2º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. p. 92.

substituição, da adição e do método geométrico. Além disso, os licenciandos mostram como um sistema pode ser classificado com base no seu conjunto solução.

Para trabalhar com as técnicas apresentadas o grupo traz uma tarefa, Tarefa 2, da aula 2 (Quadro 18):

Quadro 18 – Tarefa 2 proposta por G5 para a aula 2

3.2 SEGUNDA TAREFA

Classifique cada sistema de equações lineares em SPD, SPI ou SI e, resolva-o, se possível.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$ [114]

3.2.1 Objetivos específicos

- Analisar a forma geométrica de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas com do GeoGebra;
- Classificar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas;
- Determinar, quando possível, soluções de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas;

Fonte: Registro do G5

Por meio da tarefa apresentada no Quadro 18 e dos procedimentos que o G5 expõe em seu plano de aula, a técnica a ser empregada é a geométrica, sendo que ela será explorada pelo uso do *software* GeoGebra. Em relação a essa tarefa é possível comentar que ela possibilita a manifestação da técnica-ação, pois visa à exploração da técnica por meio de ações.

O momento da avaliação não é trazido no plano de aula do G5.

Com o exposto nessa seção, observamos a mobilização do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) e inferimos a respeito das técnicas atreladas às concepções (TRIGUEROS; MARTINEZ-PLANELL, 2015), com vistas a evidenciar um aspecto do diálogo entre a APOE e a TAD.

Outro aspecto observado foi em relação a não presença de um método para a resolução de um Sistema de Equações Lineares com três equações e três incógnitas, como o Escalonamento ou Cramer. Tal fato pode ser justificado pela insegurança de L12 com o método do escalonamento: "[...] eu não sou boa em escalonamento, eu me perco".

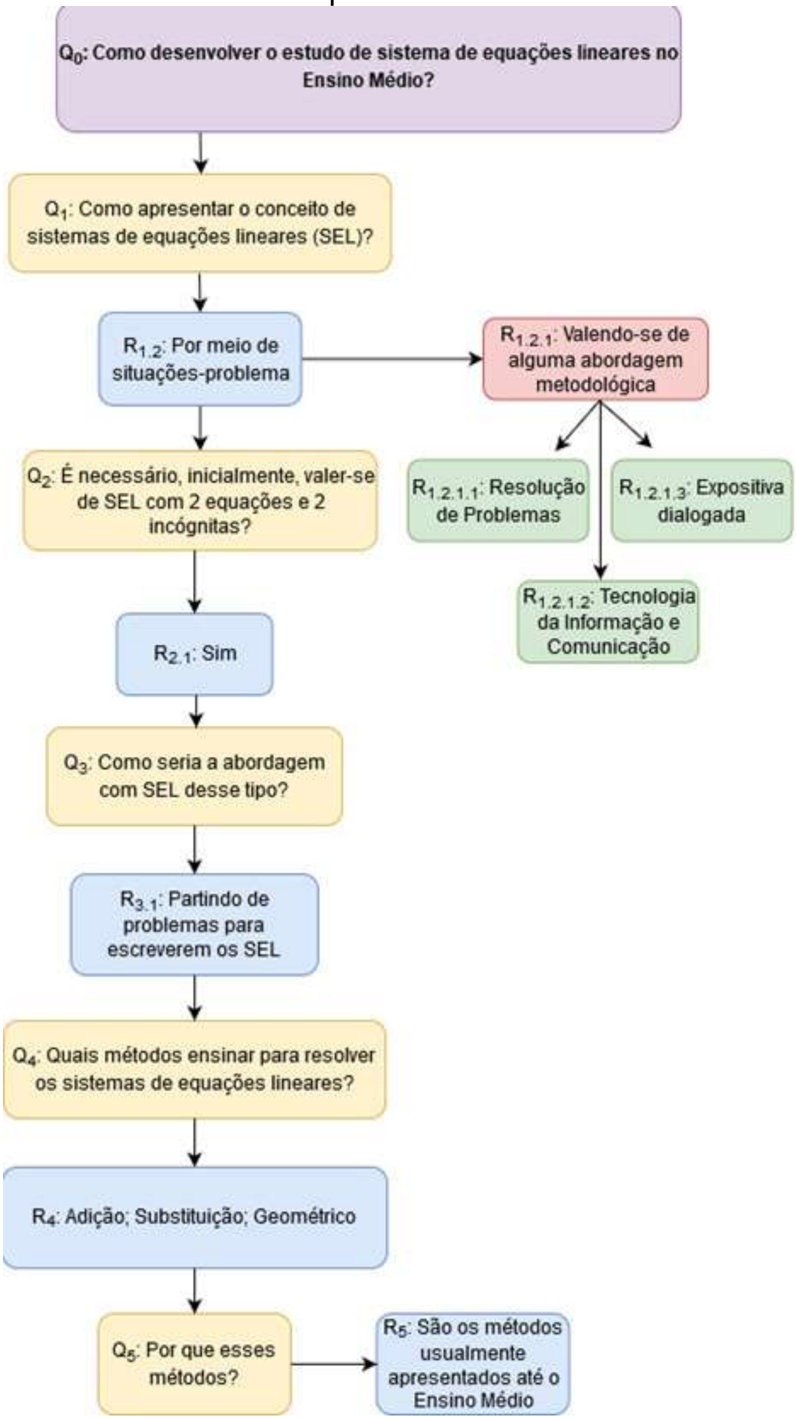
Essa situação pode ser evidenciada no dia a dia do professor de Matemática, ou de outra disciplina, que por não se sentir seguro com um conteúdo, ou até

[114] SOUZA, J. R. GARCIA, J. S. R. # Contato Matemática. 2º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

mesmo com uma abordagem metodológica diferente do que está acostumado, opta por não apresentar a seus alunos.

A seguir, apresentaremos a Figura 32, que sintetiza o que foi discutido pelos integrantes do G5, com base, em nosso PEP-FP, exposto no capítulo 3.

Figura 32 – Síntese das respostas do G5 com base no PEP-FP



Fonte: a própria autora

Após descrever e analisar os registros obtidos por cada grupo, na próxima seção faremos algumas considerações a respeito da aplicação do PEP-FP.

6.6 Considerações a respeito da aplicação do PEP-FP

Ao longo dos quatro encontros realizados para aplicar o Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP) buscamos constituir um *milieu* de trabalho possibilitando aos licenciandos (X) reunir recursos antigos e novos para encontrar a resposta para a questão geratriz proposta (Q_0) e, com isso, formamos um sistema didático $S(X, Y, Q)$ (CHEVALLARD, 2009) que contribuiu para a mobilização de conhecimentos matemáticos para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

É interessante salientar que como nosso foco é a formação inicial de professores, levamos em consideração os módulos propostos por Barquero, Bosch e Romo (2019), a saber: explicitação da razão de ser do PEP-FP; viver um PEP; analisar o PEP vivido; desenhar um PEP e experimentar e analisar o PEP adaptado, para pensar em nosso PEP-FP.

Com os módulos expostos anteriormente, mesmo não os seguindo em sua totalidade, visto que fizemos adaptações vislumbrando atingir nosso objetivo, que se refere a "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*", notamos a preocupação dos licenciandos em refletir em formas de ensino sobre o conceito de Sistemas de Equações para o Ensino Médio, o que favoreceu a inferência aspectos relacionados ao conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Um aspecto que observamos ao longo da aplicação do PEP-FP e de nossa análise foi que os grupos buscaram partir de situações-problema para introduzir o estudo de Sistema de Equações Lineares, respondendo à questão levantada após a questão geratriz, a saber: "Q_1: Como apresentar o conceito de Sistema de Equações Lineares (SEL)?". Esse fato se dá, principalmente, pela formação inicial que o curso de Licenciatura em Matemática da universidade analisada prioriza, além de ser algo adotado em muitos materiais didáticos, seja em livros da Educação Básica seja no livro analisado no capítulo 4.

Outro ponto a se destacar é que os grupos, mesmo alguns não deixando explícito, valer-se-iam de alguma tendência metodológica, no caso em questão, a maioria utilizou aspectos da Resolução de Problemas, complementando, assim, a resposta a Q_1.

No que tange aos tipos de Sistemas de Equações Lineares e os métodos adotados para sua resolução a maioria (G2, G3, G5) aborda sistemas com duas equações e duas incógnitas, contemplando assim a resposta a "Q_2: É necessário, inicialmente, valer-se de SEL com 2 equações e 2 incógnitas?". Todavia, com isso os grupos não expandiram para métodos (escalonamento ou Cramer) que comumente são explorados no Ensino Médio e outros conceitos (Matrizes e Determinante de uma Matriz) que podem ser associados ao estudo de Sistemas de Equações Lineares. Vale salientar que G2 até comenta nos dois primeiros encontros a respeito de outros conceitos, mas esses não estavam presentes em seu plano de aula.

Com os pontos levantados no parágrafo anterior, temos uma resposta limitada a questão "Q_4: Quais métodos ensinar para resolver os sistemas de equações lineares?", visto que fica restrita a métodos associados a um sistema 2×2. Além de não ter uma resposta para "Q_6: Quais conceitos podem ser associados ao estudo dos SEL?", levando em consideração o que foi apresentado no plano de aula entregue.

Novamente cabe frisar que na discussão realizada ao final do primeiro encontro foram levantadas respostas mais completas para Q_4 e Q_6, favorecendo as possíveis respostas que apresentamos para o PEP-FP por nós elaborado.

Em relação às tarefas propostas, analisando as concepções que poderiam ser mobilizadas, segundo a decomposição genética sugerida por nós, temos a concepção-objeto (ARNON *et al.*, 2014) e atrelando à técnica temos a técnica-objeto (TRIGUEROS; BOSCH; GASCÓN, 2011). Cabe ressaltar que mesmo sendo a concepção almejada nesse tipo de tarefa, podemos ter a mobilização de outra concepção, como a processo ou a ação.

Ainda no que diz respeito às tarefas, notamos que alguns grupos, como G2, G3 e G4, não apresentaram tarefas em seus planos de aula, além da utilizada para introduzir o conceito de Sistema de Equações Lineares, tal fato não contribuiu, por exemplo, com o momento de trabalho com a(as) técnica(s). No caso de G3, o grupo até comenta que proporia uma lista de tarefas, mas não a coloca em seu plano de aula.

Outro elemento evidenciado nos planos de aulas e nas discussões realizadas pelos grupos é a não presença de como se daria a avaliação dos(as) alunos(as) do Ensino Médio. O momento da avaliação, como destacado por Chevallard (1999), é parte de toda atividade humana. Sendo assim, podemos dizer que a avaliação possibilita os(as) professores(as) investigar, por exemplo, se a abordagem metodológica adotada está cumprindo o que se esperava. Essa questão nos leva a refletir no porquê de tal momento não ser mostrado nos planos de aulas.

No que diz respeito ao conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), podemos inferir que ele necessita de uma mobilização maior por parte dos licenciandos em relação ao conhecimento do conteúdo e do ensino. Todavia, é importante frisar que os licenciandos estão em formação inicial e que tal conhecimento é mais evidenciado na prática docente.

Um ponto observado na análise das discussões e dos planos de aulas entregues no último encontro é certa falta de interesse por parte de alguns grupos em discutir e até mesmo em elaborar um plano de aula. Com relação a isso, alguns elementos poderiam ser conjecturados, como: o fato da professora-pesquisadora, não ser professora da turma; o fato da disciplina cedida para ser realizada a aplicação do PEP-FP não ser de Álgebra Linear ou não possuir um caráter pedagógico, como as disciplinas de Estágio ou Didática. Esse aspecto observado corrobora com a reflexão do porquê a avaliação não ter sido evidenciada nos planos de aulas.

De modo geral, a aplicação do PEP-FP, mesmo com alguns problemas, como os destacados nos parágrafos anteriores e a falta de alguns licenciandos durante a aplicação, revela que pode ser uma possibilidade frutífera para discutir elementos da formação inicial de professores de Matemática, recorrendo a aspectos da TAD e da APOE, principalmente no que diz respeito aos momentos didáticos do ciclo ACE (TRIGUEROS, MARTINEZ-PLANELL, 2017), e do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

A seguir, passamos às considerações finais de nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este momento da tese é dedicado a tratar das conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento dessa pesquisa e das nossas perspectivas futuras. Para tanto, é necessário, inicialmente, voltar nosso olhar para o objetivo geral do trabalho: "*desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa, valendo-se da Teoria APOE e da Teoria Antropológica do Didático, para o ensino da Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática*".

Para efetivar nosso objetivo, realizamos um estudo do referencial teórico que nos auxiliaria a pensar em como desenvolver uma proposta para o ensino de Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática. Tal referencial corresponde à Teoria APOE (ASIALA *et al.*, 1991), à Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1992, 1996) e ao conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Cada referencial contribuiu para que elaborássemos nosso Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP), no qual partimos de uma questão geratriz (Q_0) que está relacionada à prática do futuro professor de Matemática. Porém, é importante destacar que a base para o desenvolvimento da proposta levou em conta, principalmente, elementos da TAD, visto que a proposição de um PEP vem dessa teoria. Sendo assim, nos debruçamos para entender cada elemento da teoria e como poderíamos propor um diálogo entre a TAD e a APOE, visando mobilizar o conhecimento matemático para o ensino.

Nesse movimento de pensar em como propor esse diálogo, levantamos algumas questões em relação aos conceitos abordados na disciplina de Álgebra Linear e no papel deles para a formação inicial de professores de Matemática. Aqui voltamos nosso olhar para o conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Dentre as questões, que nos auxiliaram na elaboração do PEP, temos o porquê de estudar, por exemplo, Sistema de Equações Lineares ou Espaços Vetoriais em Álgebra Linear na formação inicial de professores de Matemática.

É interessante observar que questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, não é algo novo, pesquisas, como a de Dorier e Sierpinska (2002), Harel (2018), dentre outras que foram elencadas no capítulo 1, tratam desse aspecto. Mas e o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear para a formação inicial de professores, como essa pode ser feita? Ela deve ser diferente? Se sim, em que aspectos se dá essa diferença?

Por meio dessas reflexões e da leitura de trabalhos sobre a Álgebra Linear com foco na Licenciatura (Quadro 3) e de referências que tratam da formação de professores, chegamos à constatação de que é importante a disciplina de Álgebra Linear tratar, também, de elementos que o futuro professor vai se deparar na Educação Básica, contribuindo, assim, para o conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Tendo em mente essa característica, que consideramos importante, nos debruçamos sobre duas teorias, a APOE e a TAD, que possibilitaram pensar no desenho do nosso PEP. Cada uma dessas teorias, possuem características específicas, como as discutidas nos capítulos 2 e 3, respectivamente, e para propor um diálogo entre elas é necessário ponderar tais características, como evidenciado no capítulo 4. Vale salientar que a ideia de diálogo entre as teorias foi realizada inicialmente por Trigueros, Bosch e Gascón (2011).

Ao refletir a respeito do diálogo sugerido pelos os estudiosos, vislumbramos aspectos que poderiam contribuir para o PEP que queríamos propor para a disciplina de Álgebra Linear voltada à formação inicial de professores de Matemática. Sendo assim, sugerimos alguns ciclos de pesquisa para o diálogo por nós realizado:

- Identificar as referências básicas adotadas na disciplina de Álgebra Linear da instituição a ser pesquisada;

- Analisar aspectos de um livro didático olhando para as praxeologias e para as tarefas propostas com base na decomposição genética (DG) elaborada, no sentido de explorar os componentes técnicos e tecnológicos das praxeologias de pesquisa (PP).

- Desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores (PEP-FP) levando em conta uma questão geratriz relacionada à prática profissional, possibilitando, assim, o desenvolvimento/mobilização do conhecimento matemático para o ensino;

- Analisar as produções escritas obtidas pela aplicação do PEP seguindo a DG elaborada em nossa pesquisa.

Ao identificar as referências básicas adotadas no curso de Licenciatura em Matemática pesquisado, por meio do plano de ensino da disciplina de Álgebra

Linear, notamos uso de livros ditos clássicos de Álgebra Linear, como Boldrini *et al.* (1986). Depois dessa identificação, analisamos o livro citado observando os momentos didáticos do ciclo ACE (TRIGUEROS, MARTINEZ-PLANELL, 2017) e verificamos que as tarefas desse livro possibilitam a mobilização da técnica-ação, técnica-processo e técnica-objeto, isso referente ao conceito de Sistema de Equações Lineares. Se pensarmos na formação do professor, tais técnicas atreladas às concepções, segundo a APOE, permitem o desenvolvimento do conhecimento comum do conteúdo (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 399, tradução nossa) que também é necessário ao professor, uma vez que "[...] a compreensão da matemática no currículo do aluno desempenha um papel crítico no planejamento e na execução das instruções"[115].

Ao analisar a aplicação do nosso PEP-FP, que ocorreu em 4 encontros, observamos a manifestação do conhecimento matemático para o ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), especificamente, o conhecimento especializado do conteúdo; conhecimento do conteúdo e do ensino; o conhecimento do conteúdo e dos estudantes e o conhecimento do conteúdo no horizonte.

As mobilizações dos conhecimentos descritos no parágrafo anterior são por nós consideradas como um ponto positivo obtido por meio da aplicação do PEP-FP, visto que com isso ponderamos a respeito da potencialidade do uso desse diálogo na formação inicial de professores de Matemática. Outro ponto positivo da nossa aplicação, é que ela foi realizada com formandos do curso de Licenciatura, assim, eles já tinham tido alguma vivência com a sala de aula na posição de professor, o que enriqueceu as discussões.

Entretanto, cabe frisar que por conta do fato dos licenciandos terem tido alguma experiência em sala de aula, criamos algumas expectativas no que diz respeito aos planos de aula entregues, pois supomos que todos os grupos entregariam algo mais completo, o que não aconteceu (G2, G3 e G4), e que esses planos de aula conteriam alguns elementos essenciais, como a avaliação, porém nenhum grupo a apresentou no registro final e nem nas discussões feitas ao final de cada encontro, e como as referências que adotaram, apenas G5 se preocupou em trazer esse elemento.

[115] [...] an understanding of the mathematics in the student curriculum plays a critical role in planning and carrying out instruction.

O fato expresso no parágrafo anterior nos fez refletir que se fôssemos aplicar novamente o PEP-FP discutiríamos quais elementos seriam necessários a um plano de aula e com isso contribuiríamos para o desenvolvimento/mobilização do conhecimento do conteúdo e do ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Além disso, podemos destacar o fato de alguns grupos (G2, G3, G4) se preocuparem apenas em como introduzir o conceito de Sistemas de Equações Lineares. No caso de G2 e G3, eles focaram em equações lineares e em sistemas com duas equações e duas incógnitas não expandindo para sistemas 3 por 3 como sugerem alguns documentos oficiais (BRASIL, 2002; BRASIL, 2006).

O PEP-FP foi aplicado em um momento no qual as escolas do país encontram-se em transição para a efetivação da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) para o Ensino Médio, e nesse documento não é comentado, especificamente, que tipo de Sistema de Equações Lineares será trabalhado, apenas a habilidade necessária aos alunos desse segmento de ensino:

> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 528).

Porém, ao pensar que no Ensino Fundamental (8° ano) é trabalhado com sistemas 2 por 2 espera-se que no Ensino Médio se discuta Sistemas de Equações Lineares de outros tipos (2×3, 3×3, dentre outros) e se aborde técnicas de resoluções para tais sistemas.

Outro aspecto a se levar em consideração, no que diz respeito aos planos de aula, é que alguns grupos apresentaram a resolução geométrica (G1 e G5), o que vai ao encontro da habilidade esperada pela BNCC.

Um ponto negativo que observamos na aplicação do PEP-FP refere-se exatamente ao fato de alguns grupos não terem avançado no plano de aula, mesmo tendo trazido nas discussões alguns elementos, por exemplo, a relação de Sistema de Equações Lineares com outros conceitos, como, Determinantes e Matrizes (G2).

Além do mais, consideramos como ponto negativo o fato de a aplicação não ter sido feita em uma disciplina de Álgebra Linear, e com isso não foi possível dimensionar com precisão como seria o desenho dessa disciplina, já que escolhemos somente um conceito, Sistema de Equações Lineares, para exemplificar o diálogo por nós sugerido.

Mesmo com os aspectos negativos citados, é possível dizer que os licenciandos, pelos caminhos traçados em seus planos de aula e nas discussões feitas durante os encontros do PEP-FP, chegaram à resposta da nossa questão geratriz (Q_0), a saber: "*Como desenvolver o estudo de Sistema de Equações Lineares no Ensino Médio*?"

Para finalizar a nossa conclusão, gostaríamos de salientar que todo percurso realizado para atingir o objetivo do nosso trabalho corroborou com a ideia da necessidade de pensar na disciplina de Álgebra Linear para formação inicial de professores de forma diferenciada, levando em conta aspectos da futura prática profissional dos licenciandos em Matemática e que essa "forma diferenciada" pode ser realizada utilizando o diálogo entre a APOE e a TAD.

Ademais, esse trabalho possibilitou a pesquisadora refletir ainda mais sobre seu papel enquanto professora de Matemática da Educação Básica e também sobre o papel que poderá desenvolver enquanto professora formadora de professores de Matemática.

Por fim, esperamos que esse trabalho suscite questionamentos que possam ser empregados na formação inicial de professores, sempre com vistas a melhorá-la e ressignificá-la.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Patrícia Cristiana Albieri de; *et al.* Categorias teóricas de Shulman: revisão integrativa no campo da formação docente. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, v. 19, n. 174, p. 130-149, out/dez. 2019. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0100-15742019000400130&script=sci_arttext&tlng=pt. Acesso em: 20 jan. 2020.

ALMEIDA, Vitor Rezende. *Álgebra Linear como um Curso de Serviço*: o Estudo das Transformações Lineares. 2013. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ALVES, Aretha Fontes. *Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática*: o estudo dos Espaços Vetoriais. 2013. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

ARNON, Ilana; *et al. APOS Theory*: a framework for research and curriculum development in Mathematics Education. Nova Iorque: Springer International Publishing, 2014.

ASIALA, Mark E.; *et al.* A framework for research and curriculum development in undergraduate Mathematics Education. In: KAPUT, J., *et al.* (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics* education, 2. Washington: American Mathematical Society, 1996, p. 1-32. Disponível em: http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf. Acesso em: 08 jul. 2014.

BARQUERO, Berta.; BOSCH, Mariana.; ROMO, Avenilde. El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 21, n.4, p. 493-509, 2019.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, n. 59, p. 389-407, 2008.

BECKER, Fernando. Abstração Pseudoempírica: significado epistemológico e impacto metodológico. *Educação & Realidade*. Porto Alegre, v. 42, n. 1, p. 371-393, jan./mar. 2017. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-62362017000100371&lng=en&nrm=iso. Acesso em: 25 maio 2019.

BERTOLAZI, Kátia Socorro. *Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares*. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BOLDRINI, J. L.; *et al.* Álgebra Linear. 3. Ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN Sari K. Investigação qualitativa em educação. Tradução: ALVAREZ, Maria J., SANTOS, Sara B., BAPTISTA, Telmo M. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. *25 años de Transposición Didáctica*. In: Ruiz-Higueras, L.; Estepa, A.; Garcia, F. J. (Eds.). *España*: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2006. Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoria Antropológica de lo Didáctico, p. 385-406, 2007.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". In : BRONNER, A.; *et al.* (Ed.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, Francia: Université de Montpellier, p. 55-91, 2010. Disponível em: http://www.atd-tad.org/documentos/bosch-m-gascon-j-2010-fundamentacion-antropologica-de-las-organizaciones-didacticas-de-los-talleres-de-practicas-matematicas-a-los-recorridos-de-estudio-e-investig/. Acesso em: 29 set. 2018.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: BIKNER-AHSBAHS, Angela; PREDIGER, Susanne (Eds.). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Suiça: Springer International Publishing, 2014.

BOSCH, Marianna ; CHEVALLARD, Yves. La Sensibilité de l´Activité Mathématique aux Ostensifs*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35. Acesso em: 02 jun. 2018.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph, TRIGUEROS, María. Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*. v. 95, n. 1, p.39-52, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CP n.º 9, de 8 de maio de 2001. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília: MEC/CNE, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 24 de out. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura, Secretária de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação. 2002.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Volume 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base. Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

CHEVALLARD, Yves. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une aproche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12, n. 1, p 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Yves. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Séminaire de l'Associazione Mathesis. *Anais...* 1994.
Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/. Acesso em: 02 jun. 2018.

CHEVALLARD, Yves. Conceitos fundamentais da didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 115-153.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Tradução de Ricardo Barroso Campos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/237274102_El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_teoria_antropologica_de_lo_didactico1. Acesso em: 20 mar. 2018.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l'etude: 1. Structures & Fonctions. In: *Cours donné à la Xie école d'eté de didactique des mathématiques* (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002a, p. 3-32. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52. Acesso em: 22 mar. 2018.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l'etude: 3. Ecologie & régulation. In: *Cours donné à la Xie école d'eté de didactique des mathématiques* (Corps, 21-30 août 2001). Paru dans les actes correspondants, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002b, p. 41-56. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf. Acesso em: 22 mar. 2018.

CHEVALLARD, Yves. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; JAVIER GARCÍA F. (Eds.). *Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Sociedad, Escuela y Matemáticas., Universidad de Jaén, 2007, p. 705-746. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134. Acesso em: 01 jun. 2018.

CHEVALLARD, Yves. La notion de PER : problèmes et avancées. UMRADEF. Toulouse, Canadá, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. Acesso em: 04 set. 2018.

CHEVALLARD, Yves. *Didactique fondamentale* M1 2011-2012. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=185. Acesso em: 14 jan. 2019.

CHEVALLARD, Yves. *Journal du Seminaire TAD/IDD*. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. 2013. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/PDF?journal-tad-idd-2012-2013-5.pdf. Acesso em: 8 dez. 2018.

CHEVALLARD, Yves. Prólogo: Uma ruptura epistemológica em ato. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso (Orgs). *A Teoria Antropológica do Didático*: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018a. p. 21-29.

CHEVALLARD, Yves. A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de Matemática. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso (Orgs). *A Teoria Antropológica do Didático*: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. p. 31-50.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudiar Matemáticas*: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. ICE – HORSORI, Universitat Barcelona: Barcelona, 1997.

CHIARI, Aparecida Santana de Souza. *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância*: possibilidades, limites e desafios. 2015. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciência Exatas do *Câmpus* de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

DORIER, Jean-Luc; ROBERT, Aline; ROBINET, Jacqueline; ROGALSKI, Marc. The Meta Lever. In: DORIER, Jean-Luc (Ed). *On the teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. p.151-176

DORIER, Jean-Luc; SIERPINSKA, Anna. Research into the teaching and learning of Linear Algebra. In: HOLTON, Derek (Ed). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*: an ICMI study. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 255-273.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DUBINSKY, Ed. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, v. 8, n. 3, p. 24-41, dez. 1996.

DUBINSKY, Ed. Some thoughts on a first course in linear algebra at college level. In: CARLSON, David; *et al.* (Eds.). *Resources For Teaching Linear Algebra* (MAA Notes), 42, 1997. p. 85-106. Disponível em: http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf. Acesso em: 27 jul. 2014.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 95-123.

DUBINSKY, Ed; MCDONALD, Michael A. APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: HOLTON, Derek (Ed.) *The teaching and learning of Mathematics at University Level*: an ICMI study. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 275-282.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012.

EDWARDS, Barbara; DUBINSKY, Ed; MCDONALD, Michael A. Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking & Learning*: An International Journal, v. 7, n. 1, p. 15-25, 2005.

ELIAS, Henrique Rizek. *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática*. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

FRANÇA, Michele Viana Debus de. *Conceitos fundamentais de Álgebra Linear*: uma abordagem integrando Geometria Dinâmica. 2007. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

GARCÍA-MARTÍNEZ, Isabel; PARRAGUEZ-GONZÁLEZ, Marcela. Validación de una descomposición genética del concepto de inducción matemática. *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*. p. 277-283, 2015. Disponível em: http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2019.pdf. Acesso em: 18 set. 2018.

GASCÓN, Josep. From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the Learning of Mathematics*, Ontario/Canadá, v. 23, n. 2, p. 44-55, jul. 2003.

GASCÓN, Josep. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da Didática e da História da Matemática. In: ALMOULOUD, Saddo Ag; FARIAS, Luiz Marcio Santos; HENRIQUES, Afonso (Orgs). *A Teoria Antropológica do Didático*: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. p. 11-76.

GOES, Luciane Fernandes de; FERNANDEZ, Carmem. Reflexões metodológicas sobre pesquisas do tipo estado da arte: investigando o conhecimento pedagógico do conteúdo. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, Vigo, v. 17, n. 1, p. 94-118, 2018. Disponível em: http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen17/REEC_17_1_5_ex1117.pdf. Acesso em: 20 jan. 2020.

GONÇALVES, Jeferson da Silva. *Análise da qualidade de Sistemas Lineares*: um estudo sobre conversões de registros com auxílio do software Winplot. 2012. 287 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

GRAY, Eddie; *et al.* Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* – Revista da Springer, Switzerland, v. 38, mar. 1999. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999k-ed-dem-marcia-esm.pdf. Acesso em: 15 nov. 2016.

HAREL, Guershon. The learning and teaching of Linear Algebra through the lenses of intellectual need and epistemological justification and their constituents. In: STEWART, Sepideh; *et al.* (Eds). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Switzerland: Springer International Publishing, 2018. p. 3 - 27

HAREL, Guershon; SOWDER, Larry. Advanced mathematical-thinking at any age: its nature and its development. *Mathematical thinking and learning* – Lawrence Eribaum Associates, Inc, USA, n. 7, v. 1, p. 27-50, 2005. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.128.5199&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 15 nov. 2016.

JAKOBSEN, Arne, *et al.* Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In: International Congress in Mathematics Education, 12, 2012, Seoul (Coreia). *Proceedings…* Seoul (Coreia): ICME, 2012, p. 4635-4644.

LUCCAS, Simone. *Abordagem histórica-filosófica na Educação Matemática*: apresentação de uma proposta pedagógica. 2004. 224 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

MACHADO, Silvia Dias Alcantara.; BIANCHINI, Barbara Lutaif. A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD. Revemat, 07, 2, p.69-89, 2012.

MATOS, Fernando Cardoso de. *Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais*: o caso da Álgebra Linear. 2017. 323 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

MESSIAS, Maria Alice de Vasconcelos Feio. BRANDEMBERG, João Cláudio. A Teoria APOS nas teses e dissertações defendidas em Programas de Pós-Graduação nas áreas de Educação Matemática ou Ensino de Ciências e Matemática. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 14, n. 2, p. 1-14, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e58229/40930. Acesso em: 20 set. 2019.

PARRA, Verónica. OTERO, María Rita. Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *REIEC*: Revista Electrónica de investigación en Educación en Ciencias, Buenos Aires, v. 13, n. 2, p. 1-18, dez. 2018. Disponível em: http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/reiec/article/view/14425/45454575759173. Acesso em: 02 fev. 2019.

PRADO, Eneias de Almeida. *Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática*: contribuições para a formação profissional da Educação Básica. 2016. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

PIAGET, Jean; *et al. Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PONTE, João Pedro da. CHAPMAN, Olive. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: LYN, D (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Nova Iorque: Routledge, 2008, p. 233-261.

RANGEL, Walter Sérvulo Araújo. *Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares*: contribuições para a formação de Professores de Matemática. 2011. 138 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ROA-FUENTES, Solange; OKTAC, Asuman. Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. *Relime*, México, v. 15, n. 2, p. 199-232, jul. 2012. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200004&lng=es&nrm=iso. Acesso em: 27 fev. 2015.

RODRIGUES, José Renato Fialho. *Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear*: Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. 2009. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

SANTOS JÚNIOR, Valdir Bezerra dos. *Juros simples e compostos*: análise ecológica, praxeológica e um percurso de estudo e pesquisa. 2017. 494 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-22, fev. 1987. Disponível em: https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf. Acesso em: 03 out. 2019.

SHULMAN, Lee S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. Tradução de Leda Beck. *Cadernos Cenpec*, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 196-229, dez. 2014. Disponível em: http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293/297. Acesso em: 03 out. 2019.

SIERRA, Tomás Ángel. *Lo Matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. 2006. 477 f. Tese (Doutorado em Didática) – Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2006. Disponível em: https://eprints.ucm.es/7373/. Acesso em: 12 jan. 2019.

SILVA, Eliza Souza da. *Transformações Lineares em um curso de Licenciatura em Matemática*: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais. 2015. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, Maria Eliana Santana da Cruz. *Concepção de Transformação Linear por estudantes de Licenciatura em Matemática*. 2016. 127 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, Amarildo Melquiades; ALVES, Aretha; ALMEIDA, Vitor. Um olhar sobre os processos de ensino e aprendizagem da disciplina Álgebra Linear. In: BIANCHINI, Barbara Lutaif; MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Orgs). *Álgebra Linear*: sob o ponto de vista da Educação Matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 50-63.

SIMIÃO, Fábio. *A noção de Matriz na Transição entre o Ensino Médio e o Superior*. 2010. 324 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010.

SOUZA, Mariany L. *Dependência e independência linear*: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática. 2016. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

STEWART, Sepideh. Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal words of mathematical thinking. 2008. 300f. Tese (Doctor of philosophy of science in mathematics education) – University of Auckland, Auckland, 2008. Disponível em: https://researchspace.auckland.ac.nz/bitstream/handle/2292/2912/02whole.pdf?sequence=2. Acesso em: 21 maio 2015.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v.12, n. 2, p. 151-169, 1981.

TALL, David. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: ______ (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 3-23.

TALL, David. Introducing the three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Fredericton, Canadá, v. 23 n. 3, p. 29-33, 2004.

TRIGUEROS, María. Tendiendo puentes entre teorias: ¿qué puede lograrse? In: WOOD, M. B. *et al.* (Eds). Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 38., 2016, Tucson, AZ. *Proceedings…* Tucson: The University of Arizona, 2016. p. 28-55. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED583665.pdf. Acesso em: 18 set. 2018.

TRIGUEROS, María. Learning Linear Algebra using models and conceptual activities. In: STEWART, Sepideh; *et al.* (Eds). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Switzerland: Springer International Publishing, 2018. p. 29-50.

TRIGUEROS, María; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. Três modalidades de diálogo entre APOS y TAD. In: BOSCH, Mariana *et al.* (Eds.). *Un panorama de la TAD*. CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica. 2011, p. 77-116. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/306153161_Tres_modalidades_de_dialogo_entre_APOS_y_TAD_Three_modalities_of_dialogue_between_APOS_and_ATD. Acesso em: 21 jun. 2017.

TRIGUEROS, María; MARTINEZ-PLANELL, Rafael. Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. *Enseñanza de las ciencias*: revista de investigación y experiencias didácticas, v. 33, n. 2, p. 157-171, 2015. Disponível em: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/293270. Acesso em: 22 jun. 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TESES E DISSERTAÇÕES DEFENDIDAS ENTRE OS ANOS 2006-2017 RELACIONADAS À ÁLGEBRA LINEAR

D/T	Ano da defesa	Título	Autor(a)	Instituição de Ensino Superior
D	2012	Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares	Kátia Socorro Bertolazi	Universidade Estadual de Londrina
D	2014	Pensamento Matemático avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares	Alessandra Senes Marins	Universidade Estadual de Londrina
D	2016	Dependência e independência linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática	Mariany Layne de Souza	Universidade Estadual de Londrina
T	2015	O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear a distância: possibilidades, limites e desafios	Aparecida Chiari	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, campus Rio Claro
D	2006	Articulação entre Álgebra Linear e Geometria-um estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica	Monica Karrer	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2006	Conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear	André Lúcio Grande	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2007	Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando Geometria	Michele Viana Debus de França	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2008	Sistemas lineares na segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos	Carla dos Santos Moreno Battaglioli	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2008	Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas instituições	Joelma Iamac Nomura	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2010	Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre Base de um Espaço Vetorial	Eneias de Almeida Prado	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2011	Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio	Ana Lucia Infantozzi Jordão	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2011	Sistema de Equação Linear: um estudo de sua abordagem nos cadernos do professor de matemática de 2008 e 2009 da rede pública de ensino do estado de São Paulo	Emerson Pereira Rodrigues	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2013	Sistemas de Equações Lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes Registros de Representação	Nilza Aparecida de Freitas	Pontifícia Universidade Católica de São

		Semiótica		Paulo
T	2014	Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático Autovalor e Autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro	Joelma Iamac Nomura	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2014	A aprendizagem significativa de Sistemas De Equações do 1º grau por meio da Resolução de Problemas	Andreza Martins Antunes Goulart	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
T	2015	Transformações lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais	Eliza Souza da Silva	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
T	2016	Álgebra linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica	Eneias de Almeida Prado	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
T	2016	Concepção de Transformação Linear por estudantes de Licenciatura em Matemática	Maria Eliana Santana da Cruz Silva	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
D	2011	O processo de construção dos conceitos de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares no Ensino Médio, utilizando a planilha como recurso: um estudo comparativo	Aroldo César Steinhorst,	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
D	2009	Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear: Base e Dimensão de um Espaço Vetorial	José Renato Fialho Rodrigues	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
D	2013	Uma abordagem para o estudo de Sistemas Lineares integrando diferentes linguagens	Cristiane Dias Rodrigues	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
D	2013	A produção de significado das Transformações Lineares planas em um curso de Engenharia Civil: uma sequência didática com recurso computacional associado a múltiplas representações	Leandro Teles Antunes dos Santos	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
D	2016	Objeto de Aprendizagem para o Ensino Médio e Educação Profissional: Sistemas de Equações Algébricas Lineares aplicadas em circuitos	Fábio Mendes Ramos	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
D	2017	Sistemas de Equações Lineares: Uma análise de livros didáticos publicados no Brasil (1930 a 1970)	Célio Moacir dos Santos	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
T	2017	Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: o caso da Álgebra Linear	Fernando Cardoso de Matos	Universidade Federal do Pará
D	2009	Um Exemplo de Transposição Didática: o caso das Matrizes	Késia Caroline Ramires Neves	Universidade Estadual de Maringá
D	2008	O Ensino-Aprendizagem de Matrizes e Determinantes por meio de Resolução de Problemas.	Lucilene Dal Medico	Centro Universitário Franciscano
D	2010	Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da Álgebra Linear	Ana Luisa Carvalho Furtado	Universidade Federal do Rio de Janeiro
D	2012	Matrizes: história de um conteúdo escolar	Marcelo dos	Universidade

			Reis Lopes	Federal do Rio de Janeiro
D	2012	Uma tecnologia para redação matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear	Rodrigo Gomes Devolder	Universidade Federal do Rio de Janeiro
D	2011	Planilha Eletrônica Excel e a Matemática desenvolvimento de aplicativo para o ensino de Matrizes	Hélder Alves de Oliveira	Universidade Estadual da Paraíba
D	2011	Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: Contribuições para a formação de Professores de Matemática	Walter Sérvulo Araújo Rangel	Universidade Federal de Ouro Preto
D	2017	Vetores e suas Representações em livros didáticos de Engenharia	Celso Luiz Andreotti	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2013	Uma sequência didática sobre Transformações Lineares em um ambiente de Geometria Dinâmica	Odilthom Elias da Silva Arrebola	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2012	O ensino de Matrizes: um desafio mediado para aprendizes cegos e aprendizes surdos	Gerciane Gercina da Silva	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2012	Análise da qualidade de Sistemas Lineares: um estudo sobre conversões de registros com auxílio do software Winplot	Jeferson da Silva Gonçalves	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2012	Os Sistemas de Equações Lineares nos livros didáticos do Ensino Médio e os Registros de Representação Semiótica	Mercedes Regina Soares Ramires	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2010	A noção de Matriz na transição entre o Ensino Médio e o Superior	Fábio Simião	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2010	Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares	Sérgio Destácio Faro	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2008	Possibilidades de articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas	Mariza Canjirano da Costa	Universidade Anhanguera de São Paulo
D	2010	Vetores: interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear	Juliana Pereira Gonçalves de Andrade	Universidade Federal de Pernambuco
D	2013	Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais	Aretha Fontes Alves	Universidade Federal de Juiz de Fora
D	2013	Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o Estudo das Transformações Lineares	Vitor Rezende Almeida	Universidade Federal de Juiz de Fora
D	2013	Álgebra Linear a distância para licenciandos em Química: análise de um curso oferecido no modelo UAB	Wallace Nascimento Pinto Junior	Universidade Federal de Juiz de Fora
D	2017	O ensino e aprendizagem de matrizes no contexto da resolução de problemas e da plataforma WhatsApp	Michel Silva dos Reis	Universidade Federal do Pará
D	2017	Transformações geométricas: aplicação de matrizes na computação gráfica	Luana Pereira Villa Real	Centro Universitário Franciscano
D	2008	O Ensino-Aprendizagem de Matrizes e Determinantes por meio de Resolução de Problemas	Lucilene Dal Medico	Centro Universitário Franciscano
D	2016	Uma proposta para o ensino do conceito de	Nilce Maria de	Universidade

		matrizes em ambiente computacional	Oliveira Pereira	Federal de São Carlos
D	2016	Resolução de Problemas e o ensino de Sistema De Equações do 1° grau: o trabalho colaborativo como estratégia de formação continuada de professores	Adriano Santos Lago	Universidade Estadual de Santa Cruz
D	2015	Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no 2º ano do Ensino Médio em um Colégio de São Sepé/RS	Marinela da Silveira Boemo	Universidade Federal de Santa Maria
D	2011	Planilha Eletrônica Excel e a Matemática Desenvolvimento de Aplicativo para o ensino de Matrizes	Hélder Alves de Oliveira	Universidade Estadual da Paraíba
D	2014	O uso dos recursos didáticos no ensino de Matemática para alunos surdos: uma proposta de material voltado para o ensino de matrizes e das relações métricas no triângulo retângulo	Orleinilson Agostinho Rodrigues Batista	Universidade Federal do Acre

Fonte: a própria autora

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Com o objetivo de investigar a potencialidade de utilizar a Teoria APOE e a Teoria Antropológica do Didático na Licenciatura em Matemática, gostaríamos de contar com sua participação, que se dará da seguinte forma: resolução das atividades propostas e entrevista, quando necessário, a respeito dos registros escritos obtidos na resolução, bem como com sua autorização para analisar os registros das resoluções das atividades propostas e gravações de áudio e vídeo – com foco em registrar as discussões emergentes durante as sessões de aula.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade.

Eu, ____,
tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa e autorizo por meio do presente termo a estudante **Mariany Layne de Souza**, do doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar integralmente ou em partes meus registros escritos, áudios e imagem para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-los em publicações científicas, com a condição de que estará garantido meu direito ao anonimato.

Assinatura:____________________________

Data:___________________

APÊNDICE C

CARACTERIZAÇÃO DOS LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

<table>
<tr><td colspan="6">1) Dados pessoais do respondente:
(Os dados preenchidos nesta página não serão divulgados. Servem apenas para esclarecimento para eventuais dúvidas do pesquisador).</td></tr>
<tr><td colspan="6">Nome:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Endereço:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Telefone:</td><td colspan="3">E-mail:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Data de Nascimento:</td><td colspan="3">Idade:</td></tr>
<tr><td colspan="6">2) Formação Acadêmica</td></tr>
<tr><td colspan="6">(   ) Outro curso de graduação:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ano de conclusão:</td><td colspan="2">(   ) Instituição Pública</td><td colspan="2">(   ) Instituição Privada</td></tr>
<tr><td colspan="6">3) Disciplina de Álgebra Linear</td></tr>
<tr><td colspan="6">Quantidade de vezes que cursou a disciplina de Álgebra Linear: ___________</td></tr>
<tr><td colspan="6">Qual a sua opinião a respeito das aulas da disciplina de Álgebra Linear? Comente.</td></tr>
<tr><td colspan="6">4) Para uso do pesquisador</td></tr>
<tr><td colspan="3">Local:</td><td colspan="3">Data:</td></tr>
<tr><td colspan="6">Código do respondente (para controle do pesquisador):</td></tr>
</table>