



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

BRUNO LUIZ SANTANA VICENTIN

**PERDA DE COERÊNCIA DEVIDO A INTERAÇÕES LOCAIS
EM SISTEMAS QUÂNTICOS DE QUATRO QUBITS**

Londrina
2011

BRUNO LUIZ SANTANA VICENTIN

**PERDA DE COERÊNCIA DEVIDO A INTERAÇÕES LOCAIS
EM SISTEMAS QUÂNTICOS DE QUATRO QUBITS**

Dissertação orientada pela Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma e apresentada à Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma

Londrina
2011

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

V633p Vicentin, Bruno Luiz Santana.
Perda de coerência devido a interações locais em sistemas quânticos de quatro qubits / Bruno Luiz Santana Vicentin. - Londrina, 2011.
77 f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Ótica quântica - Tese. 2. Emaranhamento (Física) - Tese. 3. Mecânica quântica - Tese. I. Sharma, Santosh Shelly . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

BRUNO LUIZ SANTANA VICENTIN

**PERDA DE COERÊNCIA DEVIDO A INTERAÇÕES LOCAIS
EM SISTEMAS QUÂNTICOS DE QUATRO QUBITS**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Londrina, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 03 de agosto de 2011.

Agradecimentos

Primeiramente, à minha eterna companheira Fernanda, que me deu todo o apoio que precisei durante todo o tempo necessário.

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado e incentivaram minha luta.

À Professora Dra. Santosh Shelly Sharma, pela paciência e todo trabalho dedicado.

Aos colegas do Departamento de Física desta Universidade, em especial o Doutorando Paulo J. dos Reis, pelas valiosas conversas e orientações.

À CAPES, pelo apoio e suporte financeiro.

VICENTIN, Bruno L. S. **PERDA DE COERÊNCIA DEVIDO A INTERAÇÕES LOCAIS EM SISTEMAS QUÂNTICOS DE QUATRO QUBITS**. 2011. 88 p. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a dinâmica de um sistema de dois átomos de dois níveis em estado emaranhado interagindo com o campo eletromagnético quantizado de um modo em suas respectivas cavidades. A intenção é compreender o fenômeno de Morte Súbita de Emaranhamento que aparece neste sistema, e apresentar propostas para controlar o fenômeno. Cada subsistema átomo-campo é isolado um do outro e sua dinâmica é determinada pelo Modelo Jaynes-Cummings Duplo. Foram considerados num primeiro momento os casos ressonante, não ressonante e quando apenas um dos subsistemas está sob interação não ressonante. Utilizou-se como medida de emaranhamento a Negatividade Global para o estado reduzido dos átomos, com a qual verificou-se que a dessintonia do campo inibe ESD (do inglês *Entanglement Sudden Death*). Posteriormente aplicou-se uma transformação unitária em um dos átomos no instante inicial. Os resultados mostram que a transformação também bloqueia o fenômeno ESD, juntamente com o parâmetro de dessintonia. Para compreender melhor a dinâmica do sistema foram calculados também: a Negatividade Global do subsistema fotônico, o emaranhamento devido a interações de quatro corpos (*Four-Tangle*) e ainda o emaranhamento entre pares (*Negativity Fonts*, com o qual foi possível calcular a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico). O estudo mostra que o emaranhamento, inicialmente presente entre os átomos, é transferido para o resto do sistema após a interação local em suas cavidades, e que o subsistema fotônico apresenta Nascimento Súbito de Emaranhamento no período de ESD atômico.

Palavras-chave: Perda de Coerência, Interações Locais, Morte Súbita de Emaranhamento.

VICENTIN, Bruno L. S. **DECOHERENCE OF FOUR QUBITS STATES DUE TO LOCAL INTERACTIONS**. 2011. 88 p. Dissertation (Physics Graduate Program) – State University of Londrina, Londrina.

Abstract

In this paper we examine the dynamics of a two two-level atoms system in entangled state interacting with the quantized electromagnetic field inside its one mode optical cavity. The intention here is to understand the Entanglement Sudden Death phenomenon, which was saw on the evolution of system, and find ways to control its occurrence. Each atom-field subsystem is completely isolated from one another, in such a way that its dynamics is determined by de Double Jaynes-Cummings Model. Firstly, we considered the system in the resonant interaction. Later, the dynamics is examined considering the off-resonant interaction, and later the case when only the Aa subsystem is in resonant interaction. Global Negativity for the reduced state of atoms was used here to examine the effect caused by the introduction of the detuning parameter, which inhibits the ESD phenomenon. In addition, we performed a local unitary transformation in qubit A at initial time. The results show that it also can be used to control Entanglement Sudden Death, together the detuning parameter. Trying to have a better view of the whole system and the entanglement transfer, we also have calculated: Four-Tangle, to understand entanglement due to four qubits correlations; Global Negativity of the photonic subsystem; and the pairwise entanglement, by the negativity fonts, with wich it was possible to calculate the entanglement loss due to state reduction. The study reveals that the entanglement, initially concerned on the atomic subsystem, is transferred to the all parts after local interactions. Photonic subsystem shows Entanglement Sudden Birth while atomic dynamics show Entanglement Sudden Death.

Key-words: Decoherence; Local Interaction; Entanglement Sudden Death.

Lista de Figuras

4.1	Esquema representando um átomo A emaranhado com B isolado em sua cavidade a , onde não há interação com a cavidade b	29
4.2	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de θ , tendo como estado inicial $ \Psi_{atm}\rangle = \cos(\theta) 01\rangle + \sin(\theta) 10\rangle$	32
4.3	Negatividade Global versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de θ no caso ressonante, tendo como estado inicial $ \Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) 11\rangle + \sin(\theta) 00\rangle$	34
4.4	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/4$	37
4.5	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/6$	38
4.6	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/12$	39
4.7	Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb apresenta $\delta = 1$, para $\theta = \pi/6$	41
4.8	Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb possui $\delta = 2$, para $\theta = \pi/6$	42
4.9	Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb possui $\delta = 4$, para $\theta = \pi/6$	43

5.1	Dinâmica da Negatividade Global para diferentes valores de θ no caso ressonante para o subsistema do campo eletromagnético no interior das cavidades.	46
5.2	Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/4$ para diferentes valores de δ , para o subistema do campo eletromagnético.	47
5.3	Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/6$ para diferentes valores de δ , para o subsistema do campo eletromagnético.	48
5.4	Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/12$ para diferentes valores de δ , para o subsistema do campo eletromagnético.	49
5.5	Dinâmica da Negatividade Global do estado reduzido dos átomos e a Negatividade Global do estado reduzido do campo eletromagnético quantizado.	49
6.1	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/6$ e $\delta = 0$, em função dos parâmetros de transformação unitária a e b	55
6.2	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/6$, considerando os valores $\delta = 2$ e 4 , variando os parâmetros de transformação unitária a e b	56
6.3	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/12$ e $\delta = 0$, em função dos parâmetros de transformação unitária a e b	57
6.4	Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/12$, onde plotaram-se os resultados para quando $\delta = 0$ e $a = b = 0$; quando $a = b = 0$ e $\delta = 2$; e quando $\delta = 2$ associado à uma operação local em A , para verificar o efeito sobre ESD.	58
7.1	Dinâmica de Four-Tangle para os diferentes valores de $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$ no caso ressonante, plotados juntamente com o emaranhamento entre os átomos para o mesmo caso.	61
7.2	Dinâmica das curvas de τ_4 quando $\theta = \pi/6$ para o caso onde existe a operação local \hat{T} e o caso onde não operação local.	62
7.3	Comparação da evolução temporal das curvas de τ_4 para os casos $\delta = 0, 1, 2$ e 4 quando $\theta = \pi/6$	63

- 8.1 Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/4$ no caso ressonante. 67
- 8.2 Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/6$ no caso ressonante. 68
- 8.3 Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/12$ no caso ressonante. 69

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES ÓPTICAS	5
1	VARIÁVEIS DINÂMICAS E O ESPAÇO DE HILBERT	6
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	7
3	O MODELO JAYNES-CUMMINGS PARA ÁTOMOS EM CAVIDADES	11
4	DINÂMICA QUÂNTICA: O OPERADOR DE EVOLUÇÃO TEMPORAL	15
3	TEORIA DO EMARANHAMENTO	18
1	ESTADOS QUÂNTICOS E A TEORIA DO EMARANHAMENTO	18
2	DETECÇÃO DE EMARANHAMENTO	20
2.1	Decomposição de Schmidt	20
2.2	Critério de Peres	21
3	QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO	21
3.1	Entropia Linear	23
3.2	Negatividade Global	23
3.3	Fontes de Negatividade	24
3.4	Three e Four Tangle	25
4	DINÂMICA DE ESTADOS EMARANHADOS DE DOIS QUBITS	28
1	ESTADO INICIAL $ \Psi_{atm}\rangle = \cos(\theta) 01\rangle + \sin(\theta) 10\rangle$	29

2	ESTADO INICIAL $ \Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) 11\rangle + \sin(\theta) 00\rangle$: Morte Súbita de Emaranhamento	33
2.1	O Caso Ressonante	33
2.2	O Caso Não Ressonante	35
2.3	Subsistema Aa ressonante e Bb não ressonante	39
5	EMARANHAMENTO ENTRE AS CAVIDADES	44
1	O NASCIMENTO SÚBITO DE EMARANHAMENTO ENTRE OS FÓTONS	44
6	ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE ESD SOB OPERAÇÕES LOCAIS	50
1	TEORIA DE TRANSFORMAÇÕES	51
2	EFEITO DE TRANSFORMAÇÃO LOCAL GERAL SOBRE O EMARANHAMENTO ATÔMICO	53
7	ANÁLISE DO SISTEMA DE QUATRO QUBITS EM FUNÇÃO DE \hat{T} E δ	59
1	O EMARANHAMENTO DEVIDO A CORRELAÇÕES DE QUATRO CORPOS	60
8	EMARANHAMENTO ENTRE PARES E PERDA DE INFORMAÇÃO DO SISTEMA	65
1	Emaranhamento entre pares	65
9	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica é uma teoria no mínimo surpreendente, que causa um certo desconforto no primeiro contato devido à quebra de conceitos da Física Clássica que são inerentes aos sentidos e concepções humanas, formados desde o desenvolvimento inicial de sua percepção da natureza. Um exemplo deste "mal-estar" é a questão do determinismo, que é nada menos do que completamente destruído pela teoria quântica, e mexeu com a cabeça até mesmo das mentes mais brilhantes da física, como A. Einstein, por exemplo. A mecânica quântica explica diversos fenômenos não compatíveis com a física clássica, tais como o efeito foto-elétrico, o espectro de radiação do corpo negro, e a estabilidade atômica, e tem a surpreendente característica de tratar a matéria não como corpos, mas como ondas de matéria, dependendo do que se deseja medir. Esta dualidade, associada ao fato de toda a informação que se possa tirar de um sistema quântico ser puramente estatística e, ainda por cima, rodeada de incertezas, tem ainda adicionada a estranha propriedade de que um sistema não tem estado definido até que seja observado. Todas essas ideias levaram Einstein a criticar duramente a teoria durante toda a sua vida, dizendo que ela era uma teoria incompleta, no sentido de que falta a ela algo que inclua com exatidão as propriedades físicas dos objetos, tal qual a mecânica clássica. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram um artigo revolucionário, com o qual pretendiam mostrar que a mecânica quântica era incompleta, ainda vivia sua fase juvenil e que, por tanto, precisaria amadurecer como teoria [1]. Neste artigo, ele aponta uma propriedade muito estranha que é consequência da aplicação da teoria quântica a sistemas compostos, de forma "fantasmagórica" (em suas próprias palavras). Tal fenômeno ficou popularmente conhecido como Paradoxo EPR (devido às iniciais dos autores). E. Schroedinger [2] chamou tais partículas de "emaranhadas". Assim, surgiu o conceito

de emaranhamento quântico.

Por Meio de um experimento mental, os autores do artigo originário do Paradoxo EPR enfatizam que uma teoria que descreva a realidade deve obedecer ao Princípio da Localidade ¹ [3], o qual não é verificado na Teoria Quântica. O experimento consiste em considerar um par de partículas que interagem em algum ponto do espaço. Quando separadas espacialmente, tais partículas estão de tal maneira correlacionadas/entrelaçadas que ao medir-se uma das partes do sistema, automaticamente o estado da outra parte é conhecido, ou, em outras palavras, uma operação em uma parte do sistema resulta numa alteração do estado da outra parte "imediatamente", não importando a distância entre as partes, violando ao mesmo tempo os princípios da Localidade e da Relatividade [4]. Einstein *et al* consideraram então que a Teoria Quântica não era completa, ou que existiam *variáveis ocultas* responsáveis pela violação de tais princípios. Em 1964, Bell [5] mostrou, que existe uma incompatibilidade entre a mecânica quântica e o conceito de realismo local, mostrando que é impossível construir um modelo realístico-local que condiz com todas as previsões da mecânica quântica, matematicamente vistas como um conjunto de desigualdades (conhecidas como Desigualdades de Bell), que podem ser violadas apenas por sistemas emaranhados.

O emaranhamento é uma propriedade de sistemas quânticos compostos e é um destes conceitos que somente adquirem sentido no contexto da Mecânica Quântica, e pode ser tomado como uma característica definitiva da teoria, estabelecendo a fronteira entre a Física Clássica e a Física Quântica.

Em computação Quântica, utilizam sistemas quânticos emaranhados para armazenar e transmitir informação. A unidade básica de informação é o *qubit*, de forma que qualquer sistema quântico de dois estados possíveis, como um átomo de dois níveis, por exemplo, pode ser interpretado como *qubit*. O emaranhamento vem sendo usado como recurso físico para implementação de protocolos de comunicação quântica [6,7,8,9,10], e sua dinâmica tem sido tema de investigações recentes, e é a base da Teoria de Informação Quântica e Computação Quântica. No entanto, Yonaç, Yu e Eberly [11,12,13,14] mostraram que a quantidade de emaranhamento no sistema pode deteriorar-se num tempo finito mais rapidamente que o esperado, num fenômeno chamado Morte Súbita de Emaranhamento, ESD ², mesmo para um sistema não

¹A operação de uma entidade física não pode repercutir em alterações de estado em outro local espacial

²Do inglês Entanglement Sudden Death

muito complexo, como o caso do Modelo Jaynes-Cummings duplo [15]. ESD tem sido agora tema de muitos trabalhos que visam a compreender seu comportamento no contexto deste e outros sistemas quânticos [16,17,18,19,20,21,22,23,24,25] que apresentam esta forma inusitada de dinâmica das correlações entre suas partes. Zheg Qiang *et al* mostraram que é possível controlar o fenômeno por meio da introdução de meios Kerr não lineares [26], ao passo que Paternostro *et al* [27] mostraram ser possível preservar o emaranhamento modulando-se o parâmetro de dessintonia do campo eletromagnético na cavidade. Zhong-Xiao *et al* [28] mostraram que ESD sempre ocorre se o estado inicial a ser considerado for suficientemente impuro ou o número de fótons na cavidade for diferente de zero em pelo menos uma das cavidades para o modelo JC duplo.

O sistema a ser tratado neste trabalho consiste de um par de átomos de dois níveis idênticos, nomeados por A e B , gerados em estado emaranhado e interagindo com o campo eletromagnético quantizado de cavidades óticas diferentes, a e b , isoladas entre si por uma grande distância espacial. As cavidades podem abrigar apenas um único modo de campo eletromagnético quantizado, e os átomos decaem no processo de um único fóton. Tais cavidades são isoladas entre si, de tal forma que o átomo A confinado em a interage apenas com o campo em sua cavidade, enquanto que o átomo B interage apenas com o campo na cavidade b . Para um dado estado inicial do par de átomos emaranhados, considerando as cavidades preparadas no estado vácuo, pode-se analisar a dinâmica do emaranhamento do sistema. Neste caso, o estudo será feito primeiramente apresentando os resultados das Ref [11,12,13,14], como forma de introduzir e evidenciar o fenômeno de Morte Súbita, analisando os dois possíveis estados do sistema atômico. Posteriormente, tomando como base o estado cuja dinâmica apresenta ESD, será estendido o mesmo estudo para o caso em que o campo eletromagnético nas cavidades não esteja em ressonância com a frequência de transição entre níveis de energia nos átomos, como forma de verificar como se comporta o sistema com relação ao parâmetro de dessintonia do campo. Este estudo será feito levando em conta o emaranhamento entre os átomos e também o emaranhamento do sistema como um todo, no caso do estado reduzido ao subsistema do campo e o emaranhamento devido às interações de quatro corpos. Será analisado também o efeito de uma operação local sobre o átomo A com respeito à ESD do subsistema atômico.

Este trabalho está arranjado da seguinte maneira: No Capítulo II são apresentados os conceitos derivadas as relações da Eletrodinâmica Quântica, necessários para o tratamento teórico

da interação entre átomos e campo eletromagnético quantizado, com base na aproximação dipolar (Modelo JC). É também determinado o operador de evolução temporal do sistema. No Capítulo III é discutida brevemente a Teoria de Emaranhamento, e são apresentados os métodos de detecção e quantificação do emaranhamento aqui empregados. No Capítulo IV consideram-se os dois estados iniciais possíveis para os átomos. Após obtida a dinâmica do sistema é efetuada a redução para o subsistema atômico e calculada a Negatividade Global do estado misto de dois qubits resultante, onde verifica-se que para um dos estados iniciais há Morte Súbita de Emaranhamento [14]. Em seguida, toma-se como base o estado inicial que apresenta ESD. É obtida a dinâmica do sistema levando em conta o caso não ressonante, de modo a verificar sua relação com o parâmetro de dessintonia do campo, e se este tem algum efeito sobre ESD. No capítulo V o mesmo caso é estudado, entretando com relação ao estado reduzido do subsistema fotônico, para avaliar a transferência de emaranhamento e sua relação com ESD. No Capítulo VI aplica-se uma transformação unitária sobre o estado inicial em questão, e sua dinâmica é determinada para o caso não ressonante com a intenção de verificar o efeito da operação local sobre ESD. No Capítulo VII o sistema é estudado como um todo, olhando para o emaranhamento devido a interações de quatro partículas. No capítulo VIII estuda-se o emaranhamento entre os átomos com base nas fontes de negatividade, que levam em conta o estado puro, e é calculada a perda de informação devido à redução do sistema. Por fim, no Capítulo IX são apresentadas as conclusões e as considerações finais.

Capítulo 2

ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES ÓPTICAS

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos teóricos que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção são apresentados os conceitos fundamentais de mecânica quântica necessários ao entendimento do tratamento teórico apresentado neste trabalho, como a introdução do espaço de Hilbert e dos operadores de mecânica quântica. O sistema a ser estudado no trabalho é formado por dois átomos de dois níveis interagindo com campos eletromagnéticos quantizados em suas respectivas cavidades. O modelo adequado para a descrição da interação átomo-campo neste problema é o *Modelo Jaynes-Cummings* [15], ou JCM. Neste capítulo será reproduzido o procedimento adotado por Scully em seu livro *Quantum Optics* [29] para derivar a hamiltoniana de Jaynes-Cummings, através da quantização do campo eletromagnético, na seção dois, e da aproximação dipolar para o átomo, na seção 3. Posteriormente, utilizando a hamiltoniana obtida para a interação átomo-campo, determina-se o operador de evolução temporal. Tal operador será amplamente utilizado durante todo o decorrer deste trabalho para determinar a dinâmica do sistema para cada estado inicial a ser considerado do subsistema atômico.

1 VARIÁVEIS DINÂMICAS E O ESPAÇO DE HILBERT

As variáveis dinâmicas da física clássica como posição, momento, energia, entropia, etc., representam quantidades mensuráveis e são de simples interpretação e, muitas vezes, de fácil medição. Em mecânica quântica, entretanto, as coisas não são tão fáceis assim. Para começar, os sistemas são representados por sua função de onda complexa, a qual é determinada à partir da solução da Equação de Onda de Schroedinger e contém toda a informação possível de ser retirada do sistema. As variáveis dinâmicas são elementos do sistema que podem ser medidos. Em Mecânica Quântica tais variáveis são representadas por Operadores Quânticos, que atuam no espaço complexo das funções de onda, o *Espaço de Hilbert* [29,30,31,32]. No caso do operador hamiltoniano \hat{H} de um sistema conservativo, este representa a energia total do sistema. Aplicando \hat{H} sobre a função de onda do átomo de hidrogênio, por exemplo, encontram-se os autovalores de energia do átomo.

O fato de alguns destes operadores não serem comutativos indica que pode-se associá-los a matrizes. Assim, introduz-se a representação matricial da mecânica quântica, a qual é muito útil e tem muitas consequências práticas, no qual a função de onda é representada por uma matriz coluna de n linhas, e os operadores são matrizes quadradas $n \times n$, no espaço de Hilbert n -dimensional.

É importante diferenciar as matrizes segundo algumas propriedades, as quais são fundamentais para determinadas finalidades práticas, como, por exemplo, as matrizes Hermitianas, Unitárias e Ortogonais.

Definição 2.1. *O Hermitiano adjunto de um operador matricial \hat{O} é o resultado obtido na troca entre linhas e colunas tomando o conjugado complexo de cada elemento, e é representado por \hat{O}^\dagger . Um operador é hermitiano se $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$, enquanto que uma matriz unitária é definida por $\hat{O}^\dagger = \hat{O}^{-1}$.*

Definição 2.2. *Os operadores que representam variáveis dinâmicas de um sistema são hermitianos.*

Algumas relações matemáticas muito úteis em mecânica quântica são

$$Tr(ABC\dots Z) = Tr(BC\dots ZA); \quad (2.1)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B); \quad (2.2)$$

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}; \quad (2.3)$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1; \quad (2.4)$$

$$(ABC)^\dagger = A^\dagger B^\dagger C^\dagger. \quad (2.5)$$

2 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Neste trabalho trata-se da interação de átomos de dois níveis com fótons do campo eletromagnético quantizado no interior de cavidades óticas. Para compreender esta interação e poder traçar/identificar seus fenômenos e propriedades, é necessário ter um modelo que descreva esta interação. O modelo adequado para tal tratamento teórico é o Modelo de Jaynes-Cummings, o qual fornece o operador hamiltoniano para um átomo de dois níveis interagindo com o campo eletromagnético quantizado através da aproximação dipolar. Será utilizado o Modelo Jaynes-Cummings duplo, uma vez que o emaranhamento está presente apenas em sistemas compostos, e a intenção é analisar a correlação entre um par de átomos.

Entende-se por campo uma função definida em todos os pontos do espaço. Por ser definido sobre um conjunto contínuo de pontos, um único campo detém infinitos graus de liberdade. O campo eletromagnético é o mais familiar destes objetos matemáticos. Em Teoria Quântica de Campos, a proposta é quantizar esses objetos matemáticos, assim como a Mecânica Quântica faz com a quantização das grandezas físicas relacionadas ao movimento das partículas, por exemplo. Faz-se isto escrevendo observáveis em termos de operadores, que atuam sobre quantidades físicas discretas (denominadas *quantums*). As propriedades de tais quantidades (como massa, *spin* e carga) se refletem nas propriedades do campo.

Para compreender melhor o processo de quantização antes de iniciar o tratamento teórico necessário para o caso a ser estudado aqui, vale considerar a ilustração do simples caso de um campo eletromagnético unidimensional fixado em um espaço finito e bem definido, com "nós" nas paredes da cavidade. Este caso pode ser interpretado como uma corda vibrante, sob o ponto de vista de que fixando-se a distância entre as paredes da cavidade, existem modos possíveis de vibração bem definidos e bastante específicos correspondentes à cada frequência e energia de oscilação da onda eletromagnética. Assim, ao campo eletromagnético confinado

em uma região adequada, pode ser associado com um conjunto de osciladores, com cada fóton de energia $h\nu$ correspondendo a uma dada energia de vibração do oscilador. Matematicamente, também é possível verificar-se que a estrutura das equações permite tal associação sem perda de generalidade.

Considere as equações clássicas para o campo eletromagnético de Maxwell no espaço livre de fontes [36,37],

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \nabla \cdot D = 0, \quad (2.8)$$

onde $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E$ e $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$. Tomando o rotacional de $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, encontra-se que $E(r, t)$ satisfaz à equação de onda

$$\nabla^2 E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Considerando primeiramente o caso mais simples de o campo elétrico ser linearmente polarizado na direção x , a expansão em modos do campo para uma cavidade de comprimento L é

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z), \quad (2.10)$$

onde q_j é o modo normal de amplitude com dimensão de comprimento, $k_j = j\pi/L$, com $j = 1, 2, 3, \dots$ e

$$A_j = \left(\frac{2\nu_j^2 m_j}{V\epsilon_0} \right)^2, \quad (2.11)$$

onde $\nu_j = j\pi c/L$ são as frequências na cavidade, e V é o volume da cavidade ressonante.

Utilizando a Eq.(2.6), encontra-se o campo \mathbf{H} , dado por

$$\mathbf{H}_y = \sum_j A_j \left(\frac{dq_j}{dt} \frac{\epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z). \quad (2.12)$$

Utilizando estas expansões para o campo eletromagnético, a hamiltoniana clássica para o campo, dado por

$$H = \frac{1}{2} \int_V d\tau (\epsilon_0 \mathbf{E}_x^2 + \mu_0 \mathbf{H}_y^2), \quad (2.13)$$

pode ser resolvido, encontrando-se

$$H = \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \nu_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right), \quad (2.14)$$

com p_j sendo o momento canônico do j -ésimo modo.

Observando a equação acima para o hamiltoniano do campo eletromagnético, vê-se que ele tem a mesma estrutura de um Oscilador Harmônico Clássico, que pode ser quantizado através do *método dos operadores* (quando associa-se à cada variável q e p um correspondente operador quântico). Com isso, cada modo do campo é dinamicamente equivalente a um oscilador harmônico mecânico.

Identificando q e p como operadores hermitianos, os quais devem obedecer às relações de comutação

$$[q_j, p_l] = i\hbar\delta_{j,l}; [q_j, q_l] = [p_j, p_l] = 0, \quad (2.15)$$

é possível definir, através de uma transformação canônica, os operadores não hermitianos

$$\hat{a}_j e^{-i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j\hbar\nu_j}} (m_j\nu_j q_j + ip_j), \quad (2.16)$$

e

$$\hat{a}_j^\dagger e^{i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j\hbar\nu_j}} (m_j\nu_j q_j - ip_j), \quad (2.17)$$

os quais obedecem às relações de comutação

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}; [\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}] = [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_{j'}^\dagger] = 0. \quad (2.18)$$

Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são conhecidos como operadores de aniquilação e criação de fótons, respectivamente, devido ao resultado da operação de tais operadores sobre estados quânticos do campo eletromagnético

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.19)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.20)$$

onde n é o número de fótons no campo, dado pelo operador número $\hat{a}^\dagger \hat{a} = n$. Utilizando os operadores de criação e aniquilação, o hamiltoniano da Eq.(2.14) pode ser escrito então como

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \nu_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (2.21)$$

e os campos como

$$E_x(z, t) = \sum_j \varepsilon_j \left(\hat{a}_j e^{-i\nu_j t} + \hat{a}_j^\dagger e^{-i\nu_j t} \right) \sin k_j z, \quad (2.22)$$

e

$$H_y(z, t) = -i\epsilon_0 c \sum_j \varepsilon_j \left(\hat{a}_j e^{-i\nu_j t} - \hat{a}_j^\dagger e^{-i\nu_j t} \right) \cos k_j z, \quad (2.23)$$

onde $\varepsilon_j = \left(\frac{\hbar\nu_j}{\varepsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$ tem dimensões de campo elétrico.

O tratamento apresentado até aqui foi para uma cavidade unidimensional finita. Pode-se fazer a quantização do campo para o espaço livre. Considere uma cavidade muito grande, porém finita, de lados L . Os campos elétricos e magnéticos clássicos podem ser expandidos em termos de ondas planas

$$E(r, t) = \sum_k \hat{\varepsilon}_k \varepsilon_k \alpha_k e^{-i\nu_k t + ik \cdot r} + c.c., \quad (2.24)$$

e

$$H(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_k \frac{k \times \hat{\varepsilon}_k}{\nu_k} \varepsilon_k \alpha_k e^{-i\nu_k t + ik \cdot r} + c.c.. \quad (2.25)$$

A soma é tomada sobre uma infinita série de valores discretos dos valores do vetor de onda $k \equiv (k_x, k_y, k_z)$, onde $\hat{\varepsilon}_k$ é o vetor unitário de polarização, α_k é uma amplitude adimensional e $\varepsilon_k = \left(\frac{\hbar\nu_k}{2\varepsilon_0 V}\right)^2$. As condições de contorno de periodicidade impõe que

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad (2.26)$$

onde $i = x, y$ ou z são inteiros positivos ou negativos, e um conjunto dos números (n_x, n_y, n_z) define um modo do campo eletromagnético, satisfazendo à condição de campo transversal $k \cdot \hat{\varepsilon}_k = 0$. Como antes, a quantização é feita ao identificar α_k e α_k^* com os operadores do oscilador harmônico \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger , respectivamente. Os campos elétrico e magnético quantizados são, então, definidos por

$$\hat{E}(r, t) = \sum_k \hat{\varepsilon}_k \varepsilon_k \hat{a}_k e^{-i\nu_k t + ik \cdot r} + H.c., \quad (2.27)$$

e

$$\hat{H}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_k \frac{k \times \hat{\varepsilon}_k}{\nu_k} \varepsilon_k \hat{a}_k e^{-i\nu_k t + ik \cdot r} + H.c., \quad (2.28)$$

onde H.c. é a conjugada hermitiana.

Um conjunto de matrizes muito útil é o conjunto das *Matrizes de Pauli*, que são matrizes 2×2 hermiteanas as quais atuam sobre estados de dois níveis, como estados de *spin* ou excitação e deexcitação de átomos. Tais matrizes são definidas por

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}; \hat{\sigma}_- = \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2}. \quad (2.30)$$

A aplicação das matrizes de Pauli leva, dependendo da operação, à aniquilação do estado ou à projeção em outro estado possível do sistema. Por exemplo: $\hat{\sigma}_+ |g\rangle \rightarrow |e\rangle$, onde $|g\rangle$ denota o estado fundamental, e $|e\rangle$ representa o estado excitado de um átomo de dois níveis.

3 O MODELO JAYNES-CUMMINGS PARA ÁTOMOS EM CAVIDADES

A Eq. de Schroedinger pode ser escrita como

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (2.31)$$

Para um potencial independente do tempo, verifica-se que a dinâmica do sistema é descrita pelo operador de evolução temporal $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$.

Considere um átomo A e um *campo quantizado de radiação* \vec{E} de vários modos de vibração ν_k , interagindo em um certo local do espaço. O hamiltoniano do sistema deve conter a parte referente às energias intrínsecas do átomo e do campo, adicionado do termo relativo à interação entre ambos ($A\vec{E}$), tal que

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_A + \hat{H}_{\vec{E}} + \hat{H}_{A\vec{E}}. \quad (2.32)$$

O sistema atômico pode ser aproximado para um dipolo elétrico, considerando o elétron da última camada como sendo a carga negativa do dipolo.

Sabe-se da teoria eletromagnética que a energia associada à interação de um dipolo elétrico com um campo elétrico \vec{E} é dado pela expressão

$$U_{int} = -e\vec{r} \cdot \vec{E}, \quad (2.33)$$

onde \vec{r} é o vetor posição do elétron, e e é a carga elétrica. O sinal negativo implica que para sistemas paralelos a energia de interação é mínima, enquanto que para sistemas antiparalelos

a energia de interação é máxima. Com isso, a expressão para o hamiltoniano total ¹ é escrita como

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_A + \hat{H}_{(E)} - e\vec{r} \cdot \vec{E}. \quad (2.34)$$

A energia do campo livre $\hat{H}_{\vec{E}}$ é dada em termos dos operadores de criação e aniquilação, já que pode-se associar ao campo um conjunto de osciladores harmônicos quânticos, cuja expressão é

$$\hat{H}_{\vec{E}} = \sum_k \hbar\nu_k \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.35)$$

\hat{H}_A e \vec{r} podem ser escritos em termos dos operadores de transição (projeção) $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Considere a aplicação deste operador em um autoestado atômico $|l\rangle$, sendo tais autoestados ortonormais,

$$\sigma_{ij} |l\rangle = |i\rangle\langle j||l\rangle = |i\rangle\delta_{jl}. \quad (2.36)$$

Assim, o operador σ_{ij} tira o estado de $|l\rangle$ e leva-o para o estado $|i\rangle$, se $l = j$. Pode-se dizer que o operador destrói um estado e cria o outro. Tal operador forma um Conjunto Completo de Funções Ortonormais, que obedecem à Relação de Fechamento $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$, e juntamente com a equação de autovalores

$$\hat{H}_A |i\rangle = \hbar\omega_i |i\rangle, \quad (2.37)$$

pode ser utilizada para encontrar a relação

$$\hat{H}_A = \sum_i |i\rangle\langle i| \hat{H}_A \sum_j |j\rangle\langle j|. \quad (2.38)$$

Entretanto, segue da equação de autovalores e da ortonormalidade dos autovalores de energia que $\langle i| \hat{H}_A |j\rangle = \hbar\omega_i \delta_{ij}$. Assim, a Eq. (2.38) reduz-se a

$$\hat{H}_A = \sum_i \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \hbar\omega_i \hat{\sigma}_{ii}. \quad (2.39)$$

¹Lembre-se que trata-se de um sistema conservativo

Também pode-se escrever $e\vec{r}$ em termos destes operadores: $e\vec{r} = \sum_{i,j} e|i\rangle\langle i|\vec{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \vec{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_{ij}$, com $\vec{\rho}_{ij} = \langle i|e\vec{r}|j\rangle$ e $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Identifica-se $\vec{\rho}_{ij}$ como sendo o elemento de matriz da transição de dipolo elétrico. O operador de campo elétrico é obtido através da aproximação dipolar, e considerando o átomo na origem, ele é escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação de fótons como

$$\hat{E} = \sum_k \hat{\epsilon}_k \epsilon_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger), \quad (2.40)$$

onde $\epsilon = \left(\frac{\hbar\nu_k}{2\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}}$. Então, finalmente, substituindo todas as relações obtidas para cada um dos termos do hamiltoniano, obtém-se

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar\nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_i \hbar\omega_i \hat{\sigma}_{ii} + \sum_{i,j} \sum_k \hbar \left[-\frac{\vec{\rho}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_k \epsilon_k}{\hbar} \right] \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger). \quad (2.41)$$

Identificando o termo $\left[-\frac{\vec{\rho}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_k \epsilon_k}{\hbar} \right]$ como a constante de acoplamento entre o átomo e o campo, g_k^{ij} , a Eq.(2.41) pode ser reescrita como

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar\nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_i \hat{E}_i \hat{\sigma}_{ii} + \sum_{i,j} \sum_k \hbar g_k^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger). \quad (2.42)$$

Aqui foi omitida a energia de ponto zero no primeiro termo, e assume-se $\vec{\rho}_{ij}$ sendo real. Esta equação é a forma geral para a interação entre um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético de K modos de vibração. O hamiltoniano assim obtido é conhecido como Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, ou Modelo JC, para interação entre átomo e campo eletromagnético.

Matrizes de Pauli e Átomo de Dois Níveis

Um conjunto de matrizes muito útil é o conjunto das *Matrizes de Pauli*, que são matrizes 2×2 hermiteanas as quais atuam sobre estados de dois níveis, como estados de *spin* ou excitação e deexcitação de átomos. Tais matrizes são definidas por

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}; \hat{\sigma}_- = \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2}. \quad (2.44)$$

A aplicação das matrizes de Pauli leva, dependendo da operação, à aniquilação do estado ou à projeção em outro estado possível do sistema. Por exemplo: $\hat{\sigma}_+ |g\rangle \rightarrow |e\rangle$, onde $|g\rangle$ denota o estado fundamental, e $|e\rangle$ representa o estado excitado de um átomo de dois níveis.

Considere um átomo de dois níveis de energia: o estado fundamental (ou *ground state*), onde o elétron está em sua órbita estável, e o estado excitado (*excited state*). Utilizando a Eq.(2.42) pode-se encontrar a hamiltoniana para este caso particular. Considere a constante de acoplamento, g_k^{ij} , como sendo simétrica, isto é, $g_k = g_k^{ij} = g_k^{ji}$. Associando $i \rightarrow \text{fundamental} \rightarrow a$ e $j \rightarrow \text{excitado} \rightarrow b$, a hamiltoniana da Eq.(2.42) pode ser reescrita como

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar\nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \left(\hat{E}_a \hat{\sigma}_{aa} + \hat{E}_b \hat{\sigma}_{bb} \right) + \hbar \sum_k g_k (\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba}) \left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \right). \quad (2.45)$$

Sabendo que a diferença de energia entre os dois estados do átomo é $\hbar\omega$, e utilizando a condição de fechamento $\hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb} = 1$, o segundo termo pode ser reescrito como

$$\hat{E}_a \hat{\sigma}_{aa} + \hat{E}_b \hat{\sigma}_{bb} = \frac{1}{2} \hbar\omega (\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}) + \frac{1}{2} (\hat{E}_a + \hat{E}_b), \quad (2.46)$$

onde o termo constante $\frac{1}{2} (\hat{E}_a + \hat{E}_b)$ pode ser ignorado, assim como feito com a energia de ponto zero. Definindo a notação

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb} = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|; \hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{ab} = |a\rangle\langle b|; \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ba} = |b\rangle\langle a|,$$

a hamiltoniana toma a forma

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar\nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_k g_k (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \left(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \right). \quad (2.47)$$

Segue da identidade $[\hat{\sigma}_{i,j}, \hat{\sigma}_{kl}] = \hat{\sigma}_{il} \delta_{jk} - \hat{\sigma}_{kj} \delta_{il}$ que $\hat{\sigma}_z$, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ possuem propriedades tais que pode-se associá-los aos operadores de Pauli, i.e. a álgebra dos operadores σ apresenta a mesma estrutura das matrizes de Pauli, $[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_+] = -\hat{\sigma}_z$, e $[\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\hat{\sigma}_-$.

A Aproximação de Onda Girante

A energia de interação $\sum_k g_k (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)$ na Eq. (2.47) consiste de quatro termos. O termo $\hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_-$ descreve o processo no qual o estado é levado do estado excitado para o estado fundamental e um fóton de modo k é criado. O termo $\hat{a}_k \hat{\sigma}_+$ descreve o caso em que o átomo vai do

estado fundamental para o excitado e um fóton é aniquilado. Os outros dois termos descrevem processos em que a energia não é conservada, havendo perda ou ganho de $2\hbar\omega$ de energia. Desprezando tais termos tem-se a chamada aproximação de onda girante. Esta aproximação é válida quando a frequência de oscilação do campo aplicado é próxima da frequência de transição do elétron, e quando a intensidade deste campo não é muito alta. Além do mais, tais termos oscilam muito rapidamente quando estudados em relação à dinâmica do sistema (evolução temporal), já que $\hat{\sigma}_+ \hat{a}_k^\dagger \approx e^{i(\omega+\nu)t}$. O hamiltoniano resultante é bastante simplificado, e é escrito como

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_k g_k \left(\hat{a}_k \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_- \right). \quad (2.48)$$

Considerando o caso em que a cavidade pode abrigar somente um modo de vibração do campo eletromagnético, ou seja, $k = 1$, o hamiltoniano da Eq.(2.47) pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z}{2} + \hbar g \left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ \right), \quad (2.49)$$

que é o hamiltoniano adequado para descrever o sistema a ser estudado neste trabalho. Como foi dito, o sistema total consiste de dois sistemas átomo-campo isolados de forma que não haja interação entre eles. Logo, o hamiltoniano total é simplesmente a soma das hamiltonianas individuais de cada subsistema átomo-campo, conhecida como Modelo Jaynes-Cummings Duplo, ou simplesmente JCM duplo.

4 DINÂMICA QUÂNTICA: O OPERADOR DE EVOLUÇÃO TEMPORAL

O hamiltoniano de um sistema formado por um átomo de dois níveis em interação com o campo quantizado é escrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z}{2} + \hbar g \left(\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+ \right). \quad (2.50)$$

A equação acima será usada para descrever o sistema a ser tratado neste trabalho, que consiste de dois átomos de dois níveis gerados em estado emaranhado, que são posteriormente confinados em cavidades óticas que abrigam o campo eletromagnético quantizado. Os dois subsistemas são completamente isolados entre si, de forma que o átomo A somente interage

com o campo na cavidade a , enquanto que o átomo B somente interage com o campo em sua cavidade b . O fato dos subsistemas serem independentes sugere que cada um evolua no tempo de acordo com seu respectivo operador de evolução unitária $\hat{U}^{(Ii)}(t)$, onde $I = A$ ou B e $i = a$ ou b . Com isto, o operador de evolução do sistema como um todo nada mais é que o produto tensorial dos operadores individuais de cada subsistema, os quais são idênticos. Logo, é possível encontrar o operador evolução para um caso genérico e aplicá-lo a cada subsistema.

O hamiltoniano acima pode ser escrito na forma matricial como

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} n\hbar\omega - \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega(n+1) - \frac{\hbar\omega_0}{2} & g\hbar \\ 0 & g\hbar & \hbar\omega n + \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

na base $|g, n\rangle$, $|g, n+1\rangle$, $|e, n\rangle$, onde e e g denotam os estados excitado e fundamental do átomo, respectivamente, e n é a quantidade inicial de fótons na cavidade. O elemento $\langle g, n | \hat{H} | g, n \rangle$ não se conecta a nenhum outro. Pode-se diagonalizar somente a submatriz que contém os elementos não nulos a_{22} , a_{23} , a_{32} e a_{33} . Para o caso em que as cavidades estão inicialmente no estado vácuo, ou seja, $n = 0$, tem-se a submatriz

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hbar\omega - \frac{\hbar\omega_0}{2} & g\hbar \\ g\hbar & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

a qual tem autovalores $\lambda_{\pm} = \frac{\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2g)^2 + (\omega - \omega_0)^2}$. Renomeando $\omega - \omega_0 = \delta$, $2g = G$ e $G^2 + \delta^2 = \Omega^2$, obtém-se os autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{\omega}{2} \pm \frac{\Omega}{2},$$

cujos autovetores são

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\Omega + \delta)^2}} [G |g, 1\rangle - (\Omega + \delta) |e, 0\rangle];$$

e

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\Omega + \delta)^2}} [(\Omega + \delta) |g, 1\rangle + G |e, 0\rangle].$$

$|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle$ é a base na qual o operador hamiltoniano é diagonal. Pode-se escrever a base antiga em termos da nova base, de tal forma que

$$|g, 1\rangle = \frac{\Omega + \delta}{\sqrt{G^2 + (\Omega + \delta)^2}} \left[|\phi^+\rangle + \frac{G}{\Omega + \delta} |\phi^-\rangle \right]; \quad (2.53)$$

e

$$|e, 0\rangle = \frac{G}{\sqrt{G^2 + (\Omega + \delta)^2}} \left[|\phi^+\rangle - \frac{\Omega + \delta}{G} |\phi^-\rangle \right]. \quad (2.54)$$

Aplicando o operador de evolução temporal $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ sobre os estados acima, e ainda sobre o estado $|g, 0\rangle$, obtém-se o *Operador de Evolução Temporal* para um átomo de dois níveis interagindo com o campo eletromagnético numa cavidade ótica no estado vácuo no instante inicial, que apresenta a forma

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= e^{-i\delta t/2} |g, 0\rangle \langle g, 0| + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |g, 1\rangle \langle g, 1| \\ &+ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |e, 0\rangle \langle e, 0| \\ &- \frac{iG}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [|e, 0\rangle \langle g, 1| + |g, 1\rangle \langle e, 0|]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Usando a notação $|g\rangle \rightarrow |0\rangle$, $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$, o operador de evolução temporal na base computacional pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= e^{-i\delta t/2} |00\rangle \langle 00| + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |01\rangle \langle 01| \\ &+ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |10\rangle \langle 10| \\ &- \frac{iG}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [|10\rangle \langle 01| + |01\rangle \langle 10|]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Capítulo 3

TEORIA DO EMARANHAMENTO

1 ESTADOS QUÂNTICOS E A TEORIA DO EMARANHAMENTO

A descrição matemática padrão de estados quânticos é feita através de operadores definidos num espaço vetorial complexo, que é o espaço de estados onde atuam os operadores quânticos correspondentes às variáveis dinâmicas da Mecânica Quântica. Toda informação possível que se pode obter de um sistema quântico está armazenada em seu vetor de estado. Um estado quântico é descrito por um operador hermitiano positivo ¹ e de traço unitário [38],

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger;$$

$$\hat{\rho} \geq 0;$$

$$Tr(\hat{\rho}) = 1.$$

Qualquer operador que satisfaça às condições acima pode ser representado por uma mistura estatística de projetores de estados

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (3.1)$$

tal que

$$\sum_i P_i = 1, \quad (3.2)$$

e $|\Psi_i\rangle$ é qualquer um dos estados possíveis do sistema.

¹Um operador positivo definido é aquele que possui todos os autovalores maiores ou iguais a zero

Um caso especial é quando um estado quântico pode ser descrito por uma função de onda, que é o caso quando existe um $P_i = 1$ para algum i tal que

$$\hat{\rho} = |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (3.3)$$

que é chamado *estado puro*, de forma que o estado quântico possa ser descrito como um projetor unidimensional. Ou seja, um estado puro é descrito por uma função de onda, enquanto que um estado misto é definido como uma mistura estatística de estados puros, representado pelo *operador densidade*

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (3.4)$$

onde P_i são as probabilidades de ocorrência de cada estado.

O sistema quântico pode ser composto, ou seja, constituído de vários subsistemas (S_1, S_2, \dots, S_n) . Nesse contexto, o espaço de estados do sistema como um todo deve ser composto pelos espaços de estados individuais de cada subsistema componente do sistema total,

$$C^N = C_1 \otimes C_2 \otimes \dots \otimes C_N$$

onde C_1, C_2, \dots, C_N são os espaços de Hilbert nos quais os operadores densidade referentes a cada subsistema $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_N$ estão definidos.

A noção de emaranhamento surge da análise de tais sistemas compostos de forma que, para um estado puro, escrito na forma de produtos de estados individuais,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes |\Psi_3\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_N\rangle, \quad (3.5)$$

tem-se um estado dito fatorável, ou seja, separável. Os estados puros que não admitem fatoração são conhecidos como *estados quânticos puros emaranhados*. Em outras palavras, se um sistema quântico composto (formado por duas ou mais partes) não pode ser descrito separadamente com relação aos subsistemas, tal sistema é dito *emaranhado*. Isto significa dizer que, por exemplo, duas partículas formadoras de um sistema quântico que interagiram em algum momento estão de tal forma ligadas que operações sobre uma delas afetará imediatamente o estado da outra partícula. Este fenômeno foi motivo de grande discussão e reflexão no desenvolvimento da Mecânica Quântica. O próprio A. Einstein chegou a propor que a Mecânica Quântica não seria uma teoria completa com base na Teoria da Relatividade, levando em conta o fato de que a informação não pode propagar-se com velocidade acima da velocidade da luz. O paradoxo

EPR [1], como ficou conhecido, mostra uma característica não local da Mecânica Quântica, uma vez que não importa a distância espacial entre as duas partes do sistema, uma operação em uma delas resultará na alteração imediata do estado da outra parte do sistema. Einstein, Podolsky e Rosen diziam neste artigo que uma teoria não local não pode descrever a realidade. No entanto, Schroedinger [2] rebateu dizendo que dois sistemas que interagiram no passado não podem mais ser escritos como antes. Mais tarde, a teoria de Schroedinger foi provada experimentalmente, com a produção em laboratório de estados emaranhados [39].

2 DETECÇÃO DE EMARANHAMENTO

Muitas vezes não é trivial conseguir fatorar um estado quântico, de modo a determinar se ele é separável ou não. A teoria de emaranhamento busca *Crítérios de Emaranhamento* [40,41,42,43] para resolver este problema, que possam detectar conclusivamente e facilmente o emaranhamento.

2.1 Decomposição de Schmidt

O *Teorema de Schmidt* [44] diz que, dado um vetor qualquer $|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |ij\rangle \in C = C_A \otimes C_B$, pode-se sempre encontrar bases locais ortonormais para C_A e C_B , tais que $|\Psi\rangle$ seja escrito na forma

$$|\Psi\rangle = \sum_i^m \lambda_i |ii\rangle, \quad (3.6)$$

onde $m = \min[\dim(C_A), \dim(C_B)]$ e $\lambda_i \in \mathfrak{R}$. Diz-se que o estado acima está na forma de Schmidt, e λ_i são os coeficientes de Schmidt. A quantidade de coeficientes λ_i não nulos necessários para decompor $|\Psi\rangle$ na forma de Schmidt é o chamado *número de Schmidt*, e caso este número seja 1, este vetor de ondas pode ser escrito como um produto tensorial,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle. \quad (3.7)$$

Caso o número de coeficientes de Schmidt não nulos seja maior ou igual a dois, o estado é dito emaranhado. Se todos os coeficientes de Schmidt forem não nulos e iguais entre si, o estado é Maximamente Emaranhado.

2.2 Critério de Peres

Devido ao fato de a decomposição de Schmidt lidar apenas com estados puros *bipartites*, ela é bastante restrita como forma de detecção de emaranhamento. Na tentativa de encontrar formas mais gerais de detecção de emaranhamento, A. Peres [45] mostrou que a *transposição parcial* está diretamente ligada à condição de emaranhamento. Considerando um estado geral

$$\hat{\rho}^{AB} = \sum_{ij,kl} \lambda_{ij,kl} |ij\rangle \langle kl|, \quad (3.8)$$

define-se sua transposta parcial com relação ao qubit B, por exemplo, como

$$\hat{\rho}^{TB} = \sum_{ij,kl} \lambda_{ij,kl} |il\rangle \langle kj|. \quad (3.9)$$

Se $\hat{\rho}^{AB}$ for um operador separável, ou seja

$$\hat{\rho}^{AB} = \sum_i P_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}, \quad (3.10)$$

sua transposta parcial será um operador positivo. Assim, Peres enunciou seu *Critérios de Separabilidade* [45]:

Definição 3.1. *Se a matrix obtida da transposição parcial do operador densidade é positiva, o estado é dito separável.*

O enunciado acima ficou conhecido como **Critério PPT** (do inglês *Positive Partial Transpose*), ou Critério de Peres. P. Horodecki *et. al.* estendeu o critério de separabilidade para estados mistos [46]. Embora seja uma técnica que funcione bem, da maneira enunciada acima somente funciona para sistemas quânticos 2×2 e 2×3 (3×2). P. Horodecki estendeu o *critério de separabilidade PPT* para sistemas de mais qubits [47,48].

3 QUANTIFICAÇÃO DO EMARANHAMENTO

O emaranhamento é uma variável característica de sistemas quânticos compostos que pode ser utilizado como recurso físico para executar tarefas de computação quântica, e sabendo se um dado estado é emaranhado ou não, houve a necessidade de quantificar o emaranhamento

presente em tal sistema. Logo, a *Teoria do Emaranhamento* ocupa-se não apenas de detectar emaranhamento, mas também dizer o quão emaranhado está tal sistema.

Seja $E(\hat{\rho})$ uma função do operador densidade, a qual quantifica o emaranhamento presente no sistema. É desejável que tal medida de emaranhamento satisfaça às seguintes propriedades [49]:

- Ter valor zero para estados separáveis.
- Normalização

$$E(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \log_2 d, \quad (3.11)$$

para

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |i\rangle^A |i\rangle^B, \quad (3.12)$$

onde $|i\rangle^A, |i\rangle^B$ é uma base ortonormal.

- Não deve ser crescente por LOCC ².
- $E(\hat{\rho})$ deve ser contínua.
- Aditividade Parcial: Dado um estado $\hat{\rho}$, fazendo-se n cópias idênticas deste estado, o estado resultante tem n vezes o emaranhamento de $\hat{\rho}$.
- Subaditividade: Dois sistemas independentes $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ formam um sistema composto $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$, e as funções que quantificam o emaranhamento devem satisfazer

$$E(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}) \leq E(\hat{\rho}) + E(\hat{\sigma}). \quad (3.13)$$

- Convexidade: $E(\hat{\rho})$ deve ser convexa.

$$E\left(\sum_i P_i \hat{\rho}_i\right) \leq \sum_i P_i E(\hat{\rho}_i), \quad (3.14)$$

se $\hat{\rho} = \sum_i P_i \hat{\rho}_i$.

Não é nada trivial encontrar um quantificador que satisfaça a todas estas condições. G. Vidal [50] propôs, então, que para uma boa medida de emaranhamento é suficiente que se satisfaçam apenas tres condições:

²Do inglês *Local Operation and Classical Communication*.

- A medida $E(\hat{\rho})$ deve ser um mapeamento de uma matriz densidade para um número real positivo.
- $E(\hat{\rho}) = 0$ para estados separáveis.
- A medida não deve ser crescente por LOCC.

Tais medidas são chamadas *monótonos de emaranhamento*.

3.1 Entropia Linear

Analogamente à entropia da Termodinâmica, na Teoria de Emaranhamento existem diversas propostas de quatificadores derivados da definição de entropia, como a *entropia de von Neumann* [50,51,52],

$$S = -Tr(\hat{\rho}_{red} \ln(\hat{\rho}_{red})), \quad (3.15)$$

e a entropia linear,

$$S_L = \frac{d}{d-1} (1 - Tr(\hat{\rho}_{red}^2)), \quad (3.16)$$

onde $\hat{\rho}_{red}$ é obtido fazendo-se um traço parcial sobre o operador, de forma a reduzi-lo ao subsistema a que se deseja calcular o emaranhamento, e d é a dimensão do sistema. A *Entropia linear* é uma medida de pureza do sistema, onde $S_L = 1$ mostra que tem-se um estado maximamente misto, enquanto que um estado puro tem *Entropia Linear* nula.

3.2 Negatividade Global

A *Negatividade Global* [53] é uma extensão do critério de separabilidade de Peres, e baseia-se nos autovalores negativos do operador densidade transposto com relação a um de seus subsistemas. A Negatividade é uma medida de emaranhamento para estados puros ou mistos quaisquer de um sistema *bipartite* (com duas partes), e é definida como

$$N(\hat{\rho}_{AB}) = \|\hat{\rho}_{AB}^{T_B}\| - 1, \quad (3.17)$$

onde $\|\hat{\rho}_{AB}^{T_B}\|$ é a norma do traço do operador transposto parcialmente com respeito ao subsistema B, ou seja, a soma dos módulos de seus autovalores.

Sabendo que $\sum_i \lambda_i = 1$, e que o traço de um operador densidade é igual à unidade, $Tr(\hat{\rho}_{AB}^{TB})$, podemos separar os autovalores positivos dos negativos,

$$\sum_m \lambda_m^+ + \sum_n \lambda_n^- = 1,$$

$$\sum_m \lambda_m^+ - \sum_n |\lambda_n^-| = 1 \Rightarrow \sum_m \lambda_m^+ = 1 + \sum_n |\lambda_n^-|.$$

Utilizando a definição da norma do traço,

$$\|\hat{\rho}_{AB}^{TB}\| = \sum_m \lambda_m^+ + \sum_n |\lambda_n^-|, \quad (3.18)$$

logo,

$$\|\hat{\rho}_{AB}^{TB}\| = 2 \sum_n |\lambda_n^-| + 1. \quad (3.19)$$

Substituindo na equação da Negatividade, temos então

$$N_G^B = 2 \sum_n |\lambda_n^-|, \quad (3.20)$$

onde $N_G^B = 1$ implica num estado maximamente emaranhando, enquanto que $N_G = 0$ representa um estado separável. Há importantes resultados quanto ao modo de observação do sistema que devem ser lembrados aqui. O ato de fazer a redução do sistema para um dos *qubits* produz como saída um estado misto, que contém informação das correlações apenas daquele subsistema, perdendo toda a informação relevante de emaranhamento de tal subsistema com o todo.

3.3 Fontes de Negatividade

Um estado puro geral de N -*qubits* é definido como

$$|\psi^{ABC\dots}\rangle = \sum_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle, \quad (3.21)$$

onde $|i_1 i_2 \dots i_N\rangle$ são os vetores de base geradores do espaço de Hilbert de 2^N dimensões, os coeficientes $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$ são números complexos que representam a amplitude de probabilidade de encontrar-se cada estado, com $i_m = 0$ ou 1 , onde $m = 1, 2, \dots, N$. Neste contexto, o estado geral de dois qubits é

$$|\psi^{AB}\rangle = a_{00}|00\rangle_{AB} + a_{10}|10\rangle_{AB} + a_{01}|01\rangle_{AB} + a_{11}|11\rangle_{AB}. \quad (3.22)$$

O operador densidade deste estado é obtido fazendo-se $\hat{\rho}^{AB} = |\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|$. A transposta parcial de $\hat{\rho}^{AB}$ com relação a A fornece a seguinte expressão para o quadrado da *Negatividade Global* [53]

$$(N_G^A)^2 = 4 \left| \det \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \right|, \quad (3.23)$$

a qual é invariante sobre transformações unitárias em qualquer um dos *qubits*. Considerando o Critério de Peres [45] e o Critério de Sylvester [54], que diz que *uma matriz Hermitiana é positiva definida se e somente se a matriz e todos os seus menores principais são positivos*³, pode-se presumir que o emaranhamento é detectado demonstrando que existe ao menos um *menor principal* de ρ^{T_p} que é negativo. Assim, voltando para o caso do estado geral de dois *qubits*, a matriz ν^{00} definida por

$$\nu^{00} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

representa a única *fonte de negatividade* [55] de tal estado, de modo que se $\nu^{00} = 0$, o estado é separável. Analisando uma submatriz 2×2 de ρ^{T_p} no espaço gerado pelos vetores de base $|i_1 i_2 \dots i_N\rangle$, $|j_1 j_2 \dots j_N\rangle$, $|i_1 i_2 \dots j_p \dots i_N\rangle$ e $|j_1 j_2 \dots i_p \dots j_N\rangle$, para o caso de $\hat{\rho}$ sendo um estado puro, a submatriz deve ter um autovalor do tipo

$$|\lambda^-| = |a_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N} - a_{i_1 i_2 \dots j_p \dots i_N} a_{j_1 j_2 \dots i_p \dots j_N}| \quad (3.25)$$

de forma que seja uma fonte possível de negatividade. Em analogia com o caso do estado geral de dois *qubits*, define-se uma fonte de negatividade presente em ρ^{T_p} como

$$\nu = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_2 \dots i_N} & a_{j_1 j_2 \dots i_p \dots j_N} \\ a_{i_1 i_2 \dots j_p \dots i_N} & a_{j_1 j_2 \dots j_N} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

que fornece todas as possíveis fontes de negatividade do sistema quando se interpolam os índices.

3.4 Three e Four Tangle

A Negatividade Global é invariante sobre transformações unitárias, e fornece uma medida de emaranhamento entre duas partes do sistema. Nesta seção são apresentados dois invariantes que

³seja uma matriz $n \times n$. Para $1 \leq k \leq n$, a k -ésima submatriz principal de A é a matriz $k \times k$ formada pelas primeiras k linhas e k colunas, e seu determinante é o k -ésimo *menor principal*.

fornecem o grau de emaranhamento devido a correlações de três e quatro qubits para estados puros: a Three-Tangle [55], e a Four-Tangle [56], respectivamente.

Considere um estado geral puro de três qubits, escrito como

$$|\Psi^{ABC}\rangle = |\Psi_{000}^{ABC}\rangle + |\Psi_{001}^{ABC}\rangle, \quad (3.27)$$

onde

$$|\Psi_{000}^{ABC}\rangle = a_{000}|000\rangle + a_{111}|111\rangle + a_{100}|100\rangle + a_{011}|011\rangle, \quad (3.28)$$

$$|\Psi_{001}^{ABC}\rangle = a_{001}|001\rangle + a_{110}|110\rangle + a_{101}|101\rangle + a_{010}|010\rangle. \quad (3.29)$$

Define-se three-tangle como

$$\tau_3 = 4 \left| (T^{001} - T^{000})^2 - 4P_{B_1}{}^{00}P_{B_0}{}^{00} \right|, \quad (3.30)$$

onde

$$P_{B_0}{}^{00} = \det \begin{bmatrix} a_{000} & a_{001} \\ a_{100} & a_{101} \end{bmatrix}, P_{B_1}{}^{00} = \det \begin{bmatrix} a_{010} & a_{011} \\ a_{110} & a_{111} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$T^{000} = \det \begin{bmatrix} a_{000} & a_{011} \\ a_{100} & a_{111} \end{bmatrix}, T^{001} = \det \begin{bmatrix} a_{001} & a_{010} \\ a_{101} & a_{110} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

τ_3 é uma medida que fornece informação sobre o emaranhamento devido a interações de três partículas. Se uma partícula for removida do sistema, τ_3 desaparece. τ_3 Varia de 0 a 1, de forma que para $\tau_3 = 1$ é o máximo emaranhamento entre as três partículas, enquanto que $\tau_3 = 0$ revela que não há emaranhamento devido a interações de três corpos no sistema.

Considere agora um estado puro geral de quatro qubits $|\Psi^{ABCD}\rangle = \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} |i_1 i_2 i_3 i_4\rangle$, cujo operador de estado é $\rho^{ABCD} = |\Psi^{ABCD}\rangle \langle \Psi^{ABCD}|$. Define-se a medida de emaranhamento devido às interações de quatro qubits chamada de Four-Tangle como

$$\tau_4 = 4 \left| (F^{0000} + F^{0011} - F^{0010} - F^{0001})^2 \right|, \quad (3.33)$$

onde

$$F^{00i_3 i_4} = \det \begin{bmatrix} a_{00i_3 i_4} & a_{01i_3+1i_4+1} \\ a_{10i_3 i_4} & a_{11i_3+1i_4+1} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

τ_4 é uma medida que fornece informação sobre o emaranhamento devido a interações de quatro qubits, e se, como anteriormente discutido, uma partícula for removida do sistema, $\tau_4 = 0$. Seu valor varia de 0 a 1, de forma que para $\tau_3 = 1$ é o máximo emaranhamento entre os quatro corpos, enquanto que $\tau_4 = 0$ revela que não há tais correlações.

Capítulo 4

DINÂMICA DE ESTADOS

EMARANHADOS DE DOIS QUBITS

Neste capítulo serão empregados os conhecimentos até agora adquiridos para estudar como evolui no tempo o emaranhamento de um estado quântico. Particularmente, será estudado um estado cuja dinâmica já foi verificada por T. Yu e J. Eberly na referência [14], na qual os autores detectaram a perda repentina de coerência e evolução descontínua do emaranhamento entre os átomos, fenômeno que ficou conhecido como ESD (do inglês *Entanglement Sudden Death*, ou Morte Súbita de Emaranhamento). O sistema estudado consiste de um par de átomos emaranhados de dois níveis, os quais serão denominados por átomo A e átomo B . Cada átomo é confinado em uma cavidade óptica diferente, a e b , respectivamente. As cavidades devem ser preparadas no estado vácuo e ambas podem conter somente um modo de vibração do campo eletromagnético. Devem ser também isoladas entre si para garantir que não haja comunicação entre os subsistemas Aa e Bb . A Fig. (4.1) representa esquematicamente o sistema. Será utilizado o Modelo Jaynes-Cummings duplo (JCM duplo) para descrever o sistema, já que tratam-se de dois subsistemas átomo-campo. A dinâmica do emaranhamento do estado reduzido dos átomos será estudada através da Negatividade Global, apresentada na seção 3.2 deste trabalho, levando em conta a diferença entre frequência de transição atômica e de campo eletromagnético quantizado na respectivas cavidades (parâmetro de dessintonia δ), de modo a analisar os efeitos da introdução de δ na dinâmica do emaranhamento do sistema e o comportamento de ESD segundo tal parâmetro.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na primeira seção, serão apresentados os resultados obtidos por T. Yu e J. Eberly na Ref. [14] para o caso ressonante ¹ em ambos subsistemas átomo-campo. Já na segunda seção, são apresentados resultados obtidos durante esta pesquisa para o caso em que os átomos não estão em ressonância com o campo nas cavidades ($\delta \neq 0$). A terceira seção trata do caso no qual o subsistema Aa está em ressonância, ao passo que o subsistema Bb apresenta $\delta \neq 0$. O estado inicial dos átomos pode ser escrito de duas formas:

$$|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |11\rangle + \sin(\theta) |00\rangle,$$

e

$$|\Psi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |10\rangle + \sin(\theta) |01\rangle.$$

Neste trabalho a intenção é analisar o fenômeno ESD, que aparece somente para o estado inicial $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |11\rangle + \sin(\theta) |00\rangle$, como será mostrado.

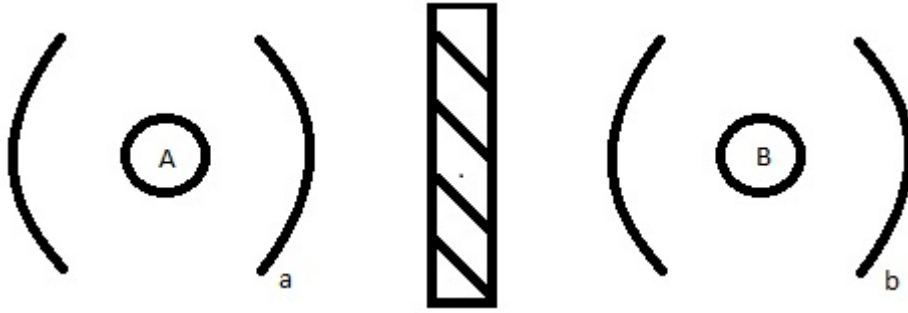


Figura 4.1: Esquema representando um átomo A emaranhado com B isolado em sua cavidade a , onde não há interação com a cavidade b .

1 ESTADO INICIAL $|\Psi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |01\rangle + \sin(\theta) |10\rangle$

Considere a Hamiltoniana da Eq. (2.47), que descreve o sistema, segundo o Modelo JC, de um átomo de dois níveis interagindo com o campo eletromagnético quantizado,

$$\hat{H}_{tot} = \sum_k \hbar \nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_k g_k \left(\hat{a}_k \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_k^\dagger \hat{\sigma}_- \right). \quad (4.1)$$

¹Por ressonância, entende-se que a frequência de transição atômica é a mesma frequência do campo eletromagnético quantizado, representado por $\delta = 0$

Lembrando que o sistema aqui tratado assume apenas um modo de vibração do campo eletromagnético quantizado, o hamiltoniano adequado é

$$\hat{H} = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (4.2)$$

O sistema total tratado neste trabalho consiste de dois subsistemas, idênticos entre si, o subsistema Aa e o subsistema Bb . Logo, como ambos subsistemas não interagem e são completamente independentes, a hamiltoniana que descreve o sistema total nada mais é que a soma de duas hamiltonianas do Modelo JC, ou simplesmente o JCM duplo, da forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_{tot} &= \hat{H}_{Aa} + \hat{H}_{Bb} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z^A + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+^A + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-^A) \\ &+ \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z^B + \hbar g(\hat{b}\hat{\sigma}_+^B + \hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_-^B), \end{aligned} \quad (4.3)$$

Na Eq.(4.3), ω é a frequência de transição atômica², ν é a frequência de vibração do campo eletromagnético³, e \hat{a}^\dagger (\hat{b}^\dagger) e \hat{a} (\hat{b}) são os operadores de criação e aniquilação de campo eletromagnético, respectivamente. O operador de evolução temporal para Modelo JC é dado pela Eq. (2.55)

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= e^{-i\delta t/2} |00\rangle\langle 00| + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |01\rangle\langle 01| \\ &+ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |10\rangle\langle 10| \\ &- \frac{iG}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|], \end{aligned} \quad (4.4)$$

e para o Modelo JC duplo é apenas necessário aplicar o operador sobre um subsistema, Aa por exemplo, e então tomar este resultado e aplicar o mesmo operador sobre o outro subsistema, no caso Bb . Para o caso ressonante, $\delta = 0$, o operador reduz-se a

$$\begin{aligned} \hat{U}(t)|_{\delta=0} &= |00\rangle\langle 00| + \cos(gt) |01\rangle\langle 01| + \cos(gt) |10\rangle\langle 10| \\ &- i \sin(gt) [|10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10|]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O estado inicial do sistema átomos-cavidades é

$$\begin{aligned} |\Psi_{tot}\rangle^{ABab} &= [\cos(\theta) |10\rangle + \sin(\theta) |01\rangle] \otimes |00\rangle_{ab} \\ &= \cos(\theta) |1000\rangle + \sin(\theta) |0100\rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

²Os átomos são idênticos, portanto a frequência de transição atômica é a mesma em ambos, ω .

³As cavidades são idênticas, portanto a frequência do campo em ambas é a mesma, ν .

Seguindo o que foi dito acima, aplica-se o operador da Eq.(4.5) sobre Aa , e sobre o resultado, aplica-se sobre Bb , de forma que o estado total dependente do tempo é

$$\begin{aligned} \hat{U}(t)^{Bb} \left[\hat{U}(t)^{Aa} |\Psi(t)\rangle^{ABab} \right] &= |\Psi(t)_{tot}\rangle^{ABab} = \cos(\theta) [\cos(gt) |1000\rangle - i \sin(gt) |0010\rangle] \\ &+ \sin(\theta) [\cos(gt) |0100\rangle - i \sin(gt) |0001\rangle]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A intenção é estudar como varia o emaranhamento entre os átomos A e B . Para reduzir o sistema e tirar informações apenas da parte atômica, faz-se o traço no operador densidade $\hat{\sigma} = |\Psi(t)_{tot}\rangle^{ABab} \langle \Psi(t)_{tot}|^{ABab}$ sobre os graus de liberdade dos fótons, da forma $\hat{\sigma}^{AB} = tr_{ab}(\hat{\sigma}^{ABab})$. Assim, na base atômica AB escolhida como $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$, o operador densidade reduzido para o subsistema atômico é

$$\hat{\sigma}^{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) \cos^2(gt) & \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) & \sin^2(\theta) \cos^2(gt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2(gt) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Utilizando a Negatividade Global como medida de emaranhamento, é necessário obter a transposta parcial da Eq.(4.8) com relação ao *qubit* A ,

$$\hat{\sigma}_{AB}^{TA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) \\ 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\theta) \cos^2(gt) & 0 \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) & 0 & 0 & \sin^2(gt) \end{bmatrix}.$$

Como os termos a_{22} e a_{33} não se conectam com nenhum outro termo, automaticamente vê-se que estes são dois dos autovalores da matriz 4×4 . Os outros dois podem ser encontrados a partir da submatriz 2×2

$$\nu = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) & \sin^2(gt) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

que fornece o autovalor negativo $\lambda_- = \frac{\sin^2(gt) - \sqrt{\sin^4(gt) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \cos^4(gt)}}{2}$. A negatividade é definida como $N_G^A = 2 |\sum_i \lambda_i^-|$, e, portanto, para o estado inicial da Eq.(4.6) a expressão da negatividade em função dos parâmetros t e θ é

$$N_G^A = 2 \left| -\frac{\sin^2(gt)}{2} + \frac{\sqrt{\sin^4(gt) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \cos^4(gt)}}{2} \right|. \quad (4.10)$$

A dinâmica do emaranhamento pode ser analisada em um gráfico admitindo diferentes valores para a constante θ , construído utilizando cálculo numérico em linguagem *fortran* no programa *Force 2.0* para obter os dados, os quais foram analisados através do software *Origin 8.0*. As curvas de Negatividade Global do subsistema atômico como função da quantidade adimensional $2gt/\pi$ para diferentes valores de θ são mostrados na Fig.(4.2).

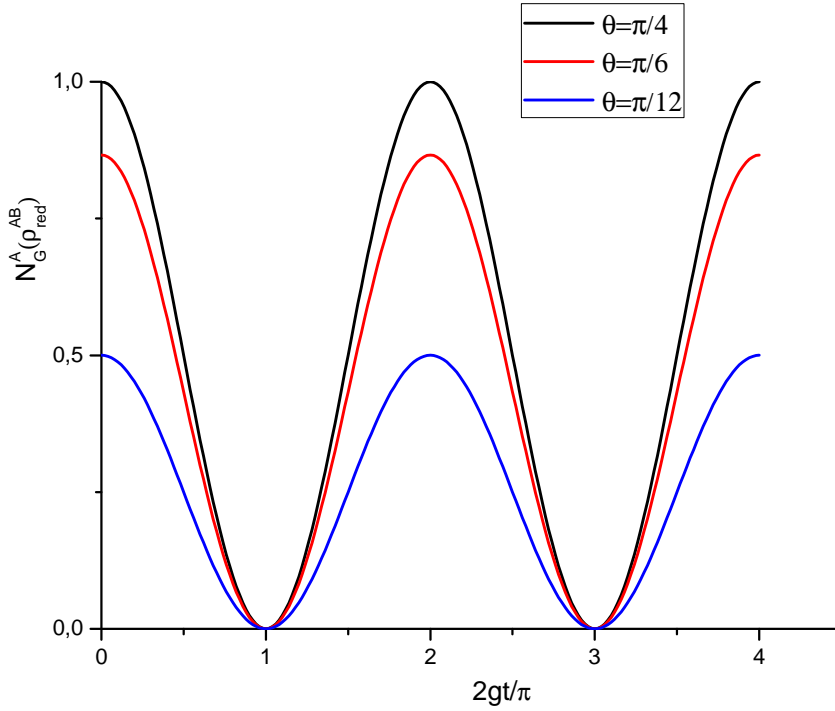


Figura 4.2: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de θ , tendo como estado inicial $|\Psi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |01\rangle + \sin(\theta) |10\rangle$.

O gráfico da Fig.(4.2) mostra a evolução unitária e periódica do emaranhamento entre os átomos, e que o grau de emaranhamento máximo do sistema depende apenas do estado inicial atômico, que é função do parâmetro θ . O parâmetro θ tem influencia somente sobre a quantidade inicial de emaranhamento, não afetando o ponto de mínimo e nem mesmo a fase da curva de Negatividade Global.

2 ESTADO INICIAL $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta)|11\rangle + \sin(\theta)|00\rangle$: Morte Súbita de Emaranhamento

2.1 O Caso Ressonante

Realizando o mesmo procedimento, mas agora utilizando o estado inicial para o par de átomos emaranhados na forma

$$|\Phi_{atm}\rangle^{AB} = \cos(\theta)|11\rangle + \sin(\theta)|00\rangle, \quad (4.11)$$

e considerando as cavidades no estado vácuo, o estado total é

$$|\Phi_{tot}\rangle^{ABab} = \cos(\theta)|1100\rangle + \sin(\theta)|0000\rangle, \quad (4.12)$$

que fornece, após a aplicação sucessiva do operador de evolução temporal sobre Aa e Bb com $\omega = \omega_0$, o estado no instante t

$$\begin{aligned} |\Phi_{tot}(t)\rangle^{ABab} &= \cos(\theta) [\cos^2(gt)|1100\rangle - i\sin(gt)\cos(gt)|1001\rangle] \\ &+ \cos(\theta) [-i\sin(gt)\cos(gt)|0110\rangle - \sin^2(gt)|0011\rangle] \\ &+ \sin(\theta)|0000\rangle. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Novamente, o foco é sobre o comportamento do emaranhamento entre os átomos. Fazendo o traço sobre os graus de liberdade dos fótons, o operador densidade reduzido para o subsistema atômico com transposta parcial com relação ao qubit A , na base $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$, é

$$\hat{\rho}_{red}^{TA}(t) = \begin{bmatrix} X(t)_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X(t)_{22} & X(t)_{14} & 0 \\ 0 & X(t)_{41} & X(t)_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X(t)_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned} X(t)_{11} &= \cos^2(\theta)\cos^4(gt), \\ X_{22}(t) &= X_{33}(t) = \cos^2(\theta)\sin^2(gt)\cos^2(gt), \\ X(t)_{41} &= X(t)_{14} = \cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(gt), \\ X(t)_{44} &= \sin^4(gt)\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta), \end{aligned} \quad (4.15)$$

e cuja transposta parcial com relação ao *qubit* A tem como um de seus autovalores

$$\lambda_- = \cos^2(\theta) \sin^2(gt) \cos^2(gt) - \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt), \quad (4.16)$$

que somente será negativo quando $\sin(gt) < \sqrt{\tan(\theta)}$. Com isso, usando a Eq.(4.16) quando $\sin(gt) < \sqrt{\tan(\theta)}$, a expressão da Negatividade Global do subsistema atômico no estado $|\Phi_{tot}\rangle^{ABab}$ é

$$N_G^A = 2 \left| \cos^2(\theta) \sin^2(gt) \cos^2(gt) - \cos(\theta) \sin(\theta) \cos^2(gt) \right|. \quad (4.17)$$

Com esta relação, pode-se plotar um gráfico utilizando cálculo numérico.

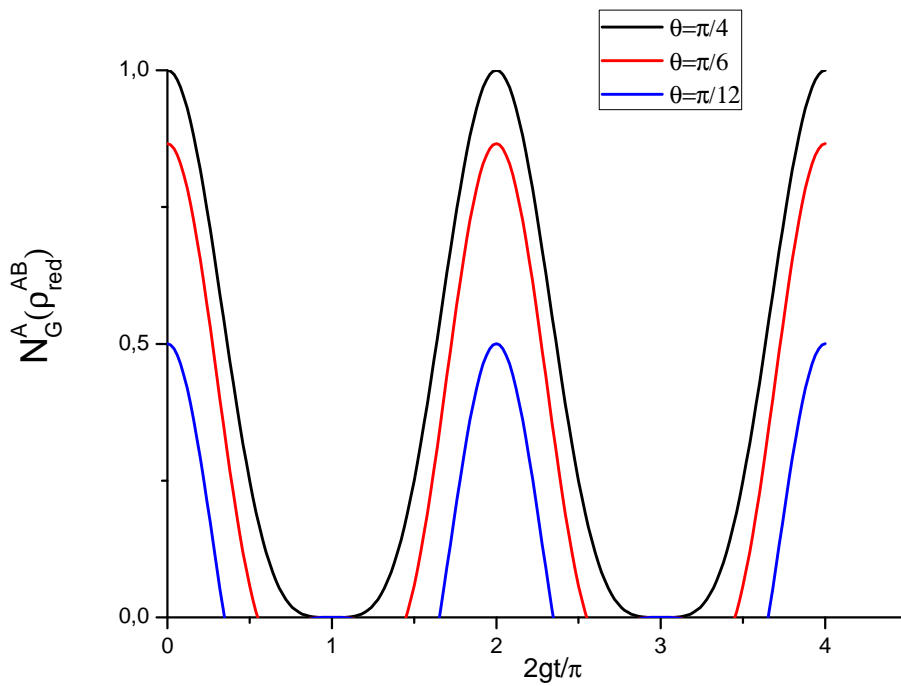


Figura 4.3: Negatividade Global versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de θ no caso ressonante, tendo como estado inicial $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |11\rangle + \sin(\theta) |00\rangle$.

O gráfico da Fig.(4.3) mostra uma repentina e rápida queda no grau de emaranhamento, até um ponto de descontinuidade, a partir do qual o emaranhamento entre os átomos é nulo. O emaranhamento reaparece após um período inversamente proporcional à quantidade inicial de emaranhamento no subsistema AB . Tal fenômeno foi verificado por T. Yu e J. Eberly no artigo "Etanglement Sudden Death of Two Jaynes-Cummings atoms"(Ref. [14]), e ficou conhecido como fenômeno ESD. Vê-se que para $\theta = \pi/6$, a curva do emaranhamento começa no ponto

0,866 da Negatividade Global e vai rapidamente a zero, no ponto onde $2gt/\pi = 0,54$. A partir daí, o autovalor passa a ser positivo, o que resulta em negatividade nula no decorrer do tempo até o ponto $2gt/\pi = 1,46$ no qual o autovalor volta a ser negativo. Esta descontinuidade na dinâmica é a característica fundamental da ESD. Verifica-se também o Nascimento Súbito do Emaranhamento (ESB, do inglês Entanglement Sudden Birth) no ponto $2gt/\pi = 1,46$. Já quando o estado inicial é tomado com $\theta = \pi/12$, o ponto inicial da Negatividade Global é 0,5 e atinge o valor zero em $2gt/\pi = 0,34$. A partir daí, o autovalor passa a ser positivo, o que resulta em negatividade nula no decorrer do tempo até o ponto $2gt/\pi = 1,66$ onde o autovalor volta a ser negativo, evidenciando ESB, assim como no caso $\theta = \pi/6$ mas com taxa de queda e crescimento visivelmente maior. Esta taxa é a mesma para o crescimento e a queda. Analisando estes números chega-se à conclusão que o tempo durante o qual o emaranhamento é nulo, ou "período de ESD", varia conforme a quantidade de emaranhamento inicial no sistema, que é função do parâmetro de normalização θ . Quanto maior for o grau de emaranhamento inicial do subsistema atômico, menor será o período de ESD e menor será a velocidade com que este vai a zero. Vale notar também que sempre que o emaranhamento ressurgir ele vai crescer até um pico que é sempre constante, no mesmo ponto do instante inicial.

2.2 O Caso Não Ressonante

Para tentar entender melhor o que acontece no estado que apresenta ESD, deve-se levar em conta todos os parâmetros do operador evolução, de forma a verificar o seu comportamento sob o ponto de vista da variação da dessintonia do campo, δ .

Considere o caso em que o átomo não esteja em ressonância com o campo na cavidade ($\delta \neq 0$). Portanto, o estado evoluído de tal sistema é obtido a partir do operador evolução para $\delta \neq 0$ da Eq.(2.55),

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) = & e^{-i\delta t/2} |00\rangle \langle 00| + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |01\rangle \langle 01| \\ & + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |10\rangle \langle 10| \\ & - \frac{iG}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [|10\rangle \langle 01| + |01\rangle \langle 10|], \end{aligned} \quad (4.18)$$

o qual pode ser aplicado separadamente para cada subsistema átomo-campo, que gera o estado

dinâmico

$$\begin{aligned}
\hat{U}^{Bb} \left(\hat{U}^{Aa} |\Phi_{tot}\rangle^{ABab} \right) &= |\Phi_{tot}(t)\rangle^{ABab} = \cos(\theta) \left\{ \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 |1100\rangle \right\} \\
&+ \cos(\theta) \left(-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right)^2 |0011\rangle \\
&+ \cos(\theta) \left\{ \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] |1001\rangle \right\} \\
&+ \cos(\theta) \left\{ \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] |0110\rangle \right\} \\
&+ e^{-i\delta t} \sin(\theta) |0000\rangle.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

É conveniente reescrever a equação acima como

$$|\Phi_{tot}(t)\rangle^{ABab} = X_1 |1100\rangle + X_2 |0011\rangle + X_3 |1001\rangle + X_4 |0110\rangle + X_5 |0000\rangle, \tag{4.20}$$

onde

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2, \\
X_2 &= \cos(\theta) \left(-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right)^2, \\
X_3 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right], \\
X_4 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right], \\
X_5 &= e^{-i\delta t} \sin(\theta).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A transposta parcial do operador densidade reduzido para o subsistema atômico é, na base $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$,

$$\rho_{redAB}^{TA} = \begin{bmatrix} |X_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |X_3|^2 & X_5 X_1^* & 0 \\ 0 & X_1 X_5^* & |X_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |X_5|^2 + |X_2|^2 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

onde somente a submatriz

$$\begin{bmatrix} |X_3|^2 & X_5 X_1^* \\ X_1 X_5^* & |X_4|^2 \end{bmatrix},$$

pode gerar algum autovalor que seja negativo. Diagonalizando a matriz acima, encontram-se os autovalores $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[2|X_3|^2 \pm 2\sqrt{|X_1|^2 |X_5|^2} \right]$, a qual somente terá valores negativos quando

$|X_3|^2 > \sqrt{|X_1|^2|X_5|^2}$. Utilizando então λ_- quando $|X_3|^2 > \sqrt{|X_1|^2|X_5|^2}$, pode ser calculada a Negatividade Global, que é função do autovalor negativo, que toma a forma

$$N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB}) = 2 \left| |X_3|^2 - \sqrt{|X_1|^2|X_5|^2} \right|. \quad (4.23)$$

Foram plotados gráficos que representam a variação temporal da Negatividade Global do subsistema atômico, agora tendo como base diferentes valores da dessintonia do campo, tais como $\delta = 0, 1, 2, 3$ e 4 para os valores de $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$.

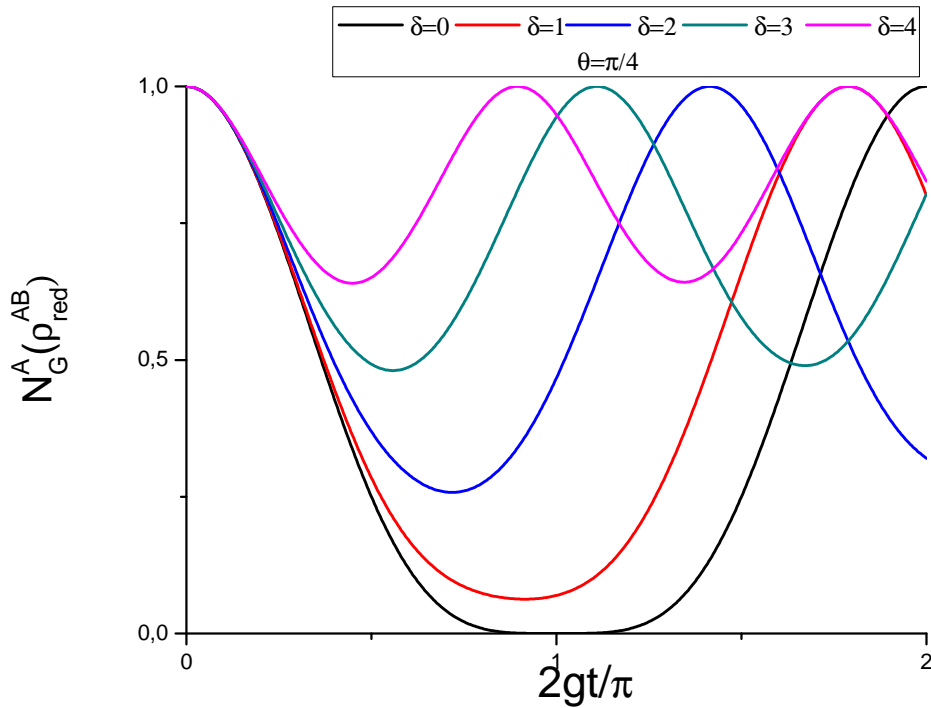


Figura 4.4: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/4$.

Vê-se pelos gráficos das Fig.(4.5) e (4.6) que o ponto de máximo emaranhamento depende fortemente do estado inicial do subsistema atômico, e o período de ESD é inversamente proporcional à quantidade inicial de emaranhamento, assim como esperado, já que no caso ressonante estes comportamentos foram verificados. Analisando a Fig.(4.4) verifica-se que a introdução do parâmetro de dessintonia do campo, δ , causa efeito de "levantamento" do ponto de mínimo emaranhamento, ao passo que o pico fica inalterado. Quanto maior o valor de δ , maior o efeito sobre o ponto de mínimo da curva. Na fig. (4.5), que mostra o resultado dos cálculos para

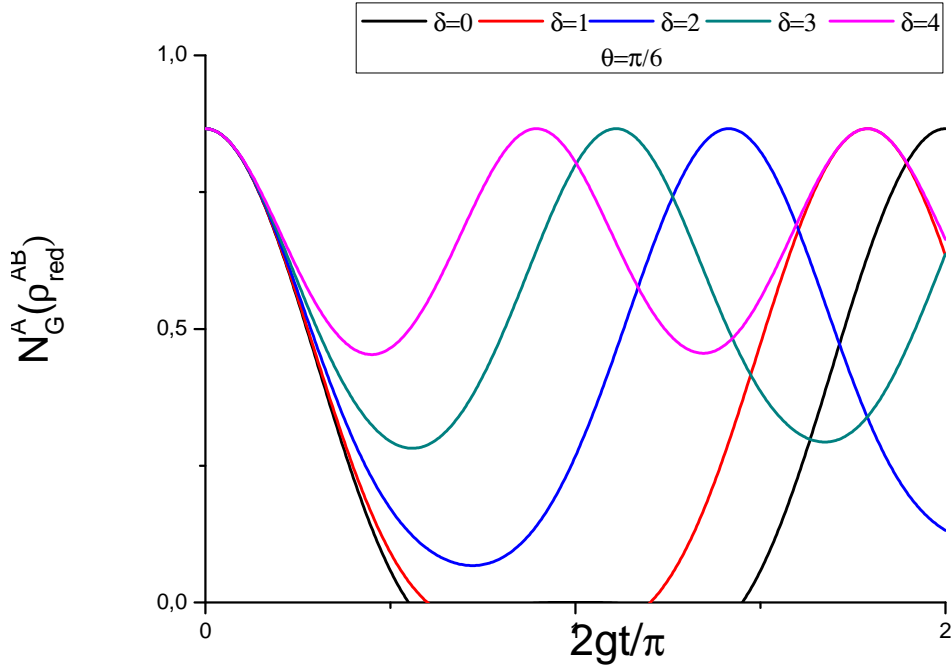


Figura 4.5: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/6$.

$\theta = \pi/6$, verifica-se que $\delta = 1$ não é suficiente para inibir ESD, ao passo que $\delta = 2$ já preserva o emaranhamento no sistema. Outro efeito notado é que δ está relacionado também com a mudança na fase da curva e com o período de ESD. O emaranhamento ressurgente antecipadamente e vai mais depressa até o ponto de máximo. Para $\delta = 2, 3$ e 4 é possível além de reverter a Morte Súbita preservar ainda uma quantidade significativamente maior de emaranhamento no subsistema atômico. Já a Fig. (4.6), a qual mostra os resultados para $\theta = \pi/12$ vê-se que é preciso maior valor da dessintonia do campo para que se obtenha a inibição da Morte Súbita, sendo aqui igual a 4.

Escolhendo corretamente a diferença entre as frequências de transição atômica e do campo, pode-se diminuir a taxa com a qual o emaranhamento cai para zero, acelerar ESB e diminuir o período de Morte Súbita, e até mesmo evitar, dependendo do valor de δ , a ocorrência do fenômeno ESD. O valor adequado de δ para isto depende diretamente do parâmetro θ , o qual dá as amplitudes de probabilidade dos vetores de base do estado inicial atômico.

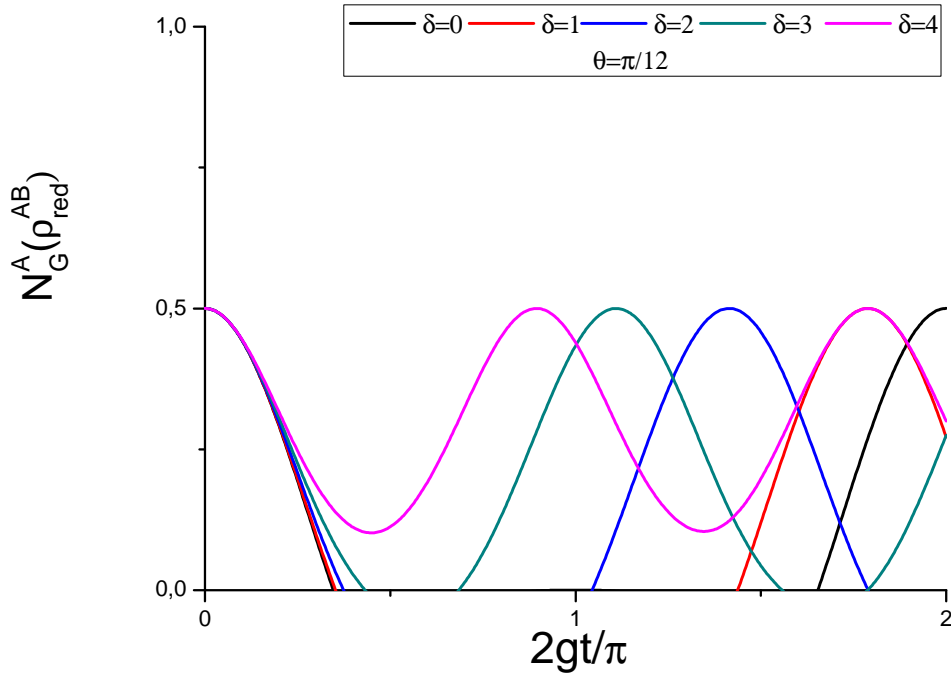


Figura 4.6: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para diferentes valores de δ , considerando $\theta = \pi/12$.

2.3 Subsistema Aa ressonante e Bb não ressonante

O mesmo tratamento pode ser feito para o caso em que apenas uma das cavidades não é ressonante. Considere que $\delta|_{Aa} = 0$ e $\delta|_{Bb} \neq 0$, e o estado inicial total $|\Psi_{tot}\rangle^{ABab} = \cos(\theta) |1100\rangle + \sin(\theta) |0000\rangle$. Levando em conta a Eq.(2.55) para o subsistema Bb , o operador de evolução temporal é

$$\begin{aligned}
\hat{U}^{Bb}(t) &= e^{-i\delta t/2} |00\rangle \langle 00| + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |01\rangle \langle 01| \\
&+ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{i\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] |10\rangle \langle 10| \\
&- \frac{iG}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) [|10\rangle \langle 01| + |01\rangle \langle 10|], \tag{4.24}
\end{aligned}$$

ao passo que o operador de evolução temporal para o subsistema Aa , cujo $\delta|_{Aa} = 0$, é escrito como

$$\hat{U}^{Aa}(t, \delta_{Aa} = 0) = |00\rangle \langle 00| + \cos(gt) [|10\rangle \langle 10| + |01\rangle \langle 01|] - i \sin(gt) [|01\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 01|]. \tag{4.25}$$

Aplicando os operadores nos respectivos subsistemas do estado inicial, tem-se a dinâmica governada por

$$|\Phi(t)\rangle^{ABab} = X_1 |1100\rangle + X_2 |0011\rangle + X_3 |1001\rangle + X_4 |0110\rangle + X_5 |0000\rangle, \quad (4.26)$$

onde

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos(\theta) \cos(gt) \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right], \\ X_2 &= -i \left[-i\frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \sin(gt) \cos(\theta), \\ X_3 &= \left[-i\frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \cos(gt) \cos(\theta), \\ X_4 &= -i \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] \sin(gt) \cos(\theta) \\ X_5 &= e^{-i\delta t/2} \sin(\theta). \end{aligned} \quad (4.27)$$

A transposta parcial do operador densidade reduzido para o subsistema AB com relação ao *qubit A* tem como um de seus autovalores

$$\lambda_- = |X_3|^2/2 + |X_4|^2/2 - 1/2 \left(|X_3|^4 + |X_4|^4 - 2|X_3|^2|X_4|^2 + 4|X_1|^2|X_5|^2 \right)^{1/2},$$

que somente será negativo quando $|X_1|^2 > \frac{|X_3|^2|X_4|^2}{|X_5|^2}$. Utilizando a Eq.(4.27) quando $|X_1|^2 > \frac{|X_3|^2|X_4|^2}{|X_5|^2}$, pode-se calcular Negatividade Global, que tem a forma

$$N_G^A(\hat{\rho}^{AB}) = \left| |X_3|^2 + |X_4|^2 - \sqrt{|X_3|^4 + |X_4|^4 - 2|X_3|^2|X_4|^2 + 4|X_1|^2|X_2|^2} \right|. \quad (4.28)$$

Foram plotados gráficos para valores de $\delta = 0, 1, 2$ e 4 para o parâmetro $\theta = \pi/6$, a fim de verificar a dinâmica do sistema focando no fenômeno ESD.

Os gráficos das Fig.(4.7), (4.8) e (4.9) mostram que quando $\delta|_{Bb} \neq 0$ e $\delta|_{Aa} = 0$, o efeito sobre ESD é bastante diferente do apresentado quando ambas as cavidades tem o mesmo valor da dessintonia do campo. A Fig. (4.7) mostra que o efeito de $\delta = 1$ é a modulação do ponto de máximo emaranhamento, que tem uma significativa queda e volta a seu valor inicial depois de um certo período de interação. O mesmo é verificado na Fig. (4.8), que mostra ainda que mesmo para $\delta = 2$ pode ser observado ESD, em contraste com o que foi verificado na seção anterior (Seção 4.2.2, Fig.(4.5)), onde mostrou-se que $\delta = 2$ já é suficiente para evitar a Morte

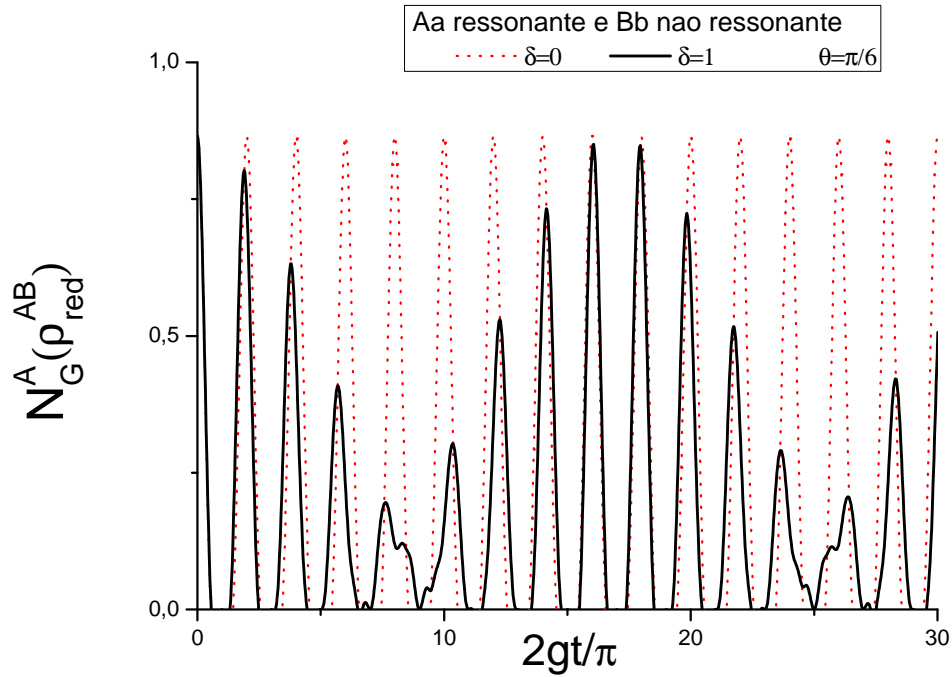


Figura 4.7: Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb apresenta $\delta = 1$, para $\theta = \pi/6$

Súbita, no caso onde ambos subsistemas apresentam iguais valores da dessintonia. O gráfico da Fig. (4.9) mostra que para $\delta = 4$ a amplitude da variação no ponto de máximo é menor, e o sistema não mais apresenta o fenômeno ESD.

Conclui-se então que quando apenas uma das cavidades está sob interação ressonante, é necessário um maior valor da dessintonia do campo para barrar a ocorrência de Morte Súbita de Emaranhamento quando comparado ao resultado obtido quando ambas as cavidades apresentam a mesma diferença entre as frequências de transição atômica e de campo eletromagnético.

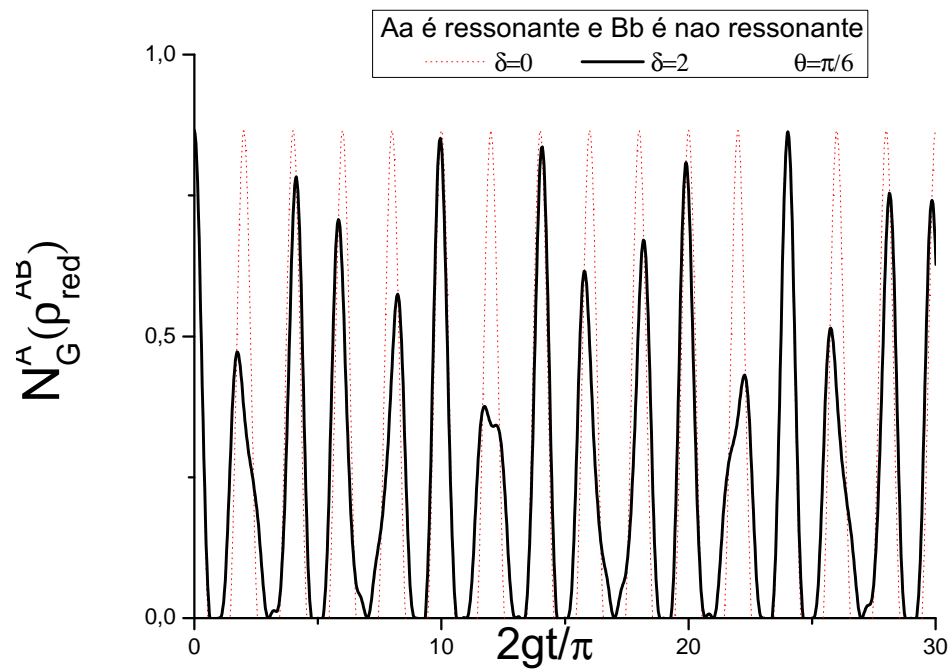


Figura 4.8: Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb possui $\delta = 2$, para $\theta = \pi/6$.

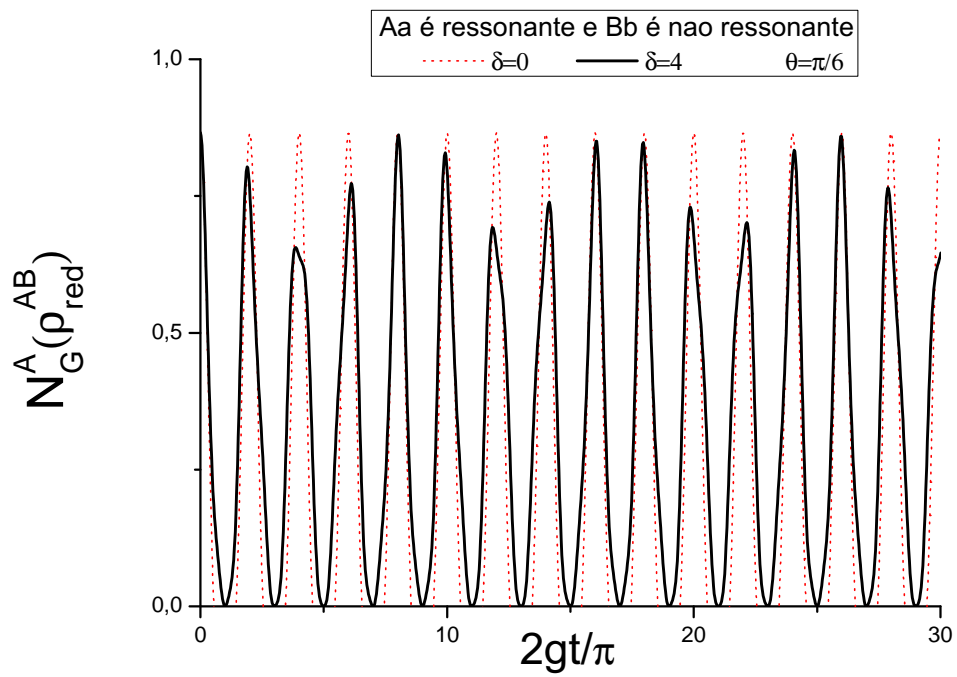


Figura 4.9: Dinâmica da Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para o caso das cavidades em ressonância, e quando apenas o subsistema Bb possui $\delta = 4$, para $\theta = \pi/6$.

Capítulo 5

EMARANHAMENTO ENTRE AS CAVIDADES

Este capítulo tem como objetivo estudar o emaranhamento do subsistema dos fótons do campo eletromagnético quantizado. Será analisada a dinâmica da Negatividade Global do estado reduzido para ab para o modelo JC duplo. Desse modo será possível estabelecer um paralelo entre a dinâmica da Negatividade Global dos subsistemas atômico e fotônico e analisar a relação entre os mesmos. Os pontos principais são: verificar se acontece com o subsistema fotônico o fenômeno ESD; analisar e compreender o que acontece com o subsistema fotônico quando o emaranhamento entre os átomos está sob regime de ESD; analisar as causas e consequências de tais relações.

1 O NASCIMENTO SÚBITO DE EMARANHAMENTO ENTRE OS FÓTONS

Como foi verificado que a morte súbita do emaranhamento dos átomos ocorre somente para o estado $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta) |11\rangle + \sin(\theta) |00\rangle$, pode-se verificar, para este estado, se tal fenômeno também ocorre para o emaranhamento entre os fótons. Utilizando mais uma vez o operador de evolução temporal da Eq.(2.55), o estado no instante t é escrito como

$$|\Phi(t)\rangle^{ABab} = X_1 |1100\rangle + X_2 |0011\rangle + X_3 |1001\rangle + X_4 |0110\rangle + X_5 |0000\rangle, \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2; \\
X_2 &= \cos(\theta) \left(-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right)^2; \\
X_3 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]; \\
X_4 &= \cos(\theta) \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[\frac{-iG}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]; \\
X_5 &= e^{-i\delta t} \sin(\theta).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

A transposta parcial do operador densidade $\hat{\rho}^{ab}(t)$ tem como um de seus autovalores

$$\lambda_- = |X_3|^2 - \sqrt{|X_5|^2 |X_2|^2}, \tag{5.3}$$

que somente será negativo quando $|X_2|^2 |X_5|^2 > |X_3|^4$. Usando a Eq.(5.3) quando $|X_2|^2 |X_5|^2 > |X_3|^4$, tem-se

$$\begin{aligned}
N_G^a(\hat{\rho}_{red}^{ab}) &= 2\sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 \left(\frac{G^2}{\Omega^2} \sin(\Omega t/2)^2 \right)^2 \\
&\quad - 2 \cos(\theta)^2 \left(\cos(\Omega t/2)^2 + \frac{\delta^2}{\Omega^2} \sin(\Omega t/2)^2 \right) \frac{G^2}{\Omega^2} \sin(\Omega t/2)^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Foram plotados gráficos que representam a variação temporal da Negatividade Global do subsistema dos fótons, tendo como base $\delta = 0, 1, 2, 3$ e 4 , para $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$.

Para o caso não ressonante, pode-se comparar a dinâmica da Negatividade Global sob o ponto de vista dos diferentes valores possíveis do parâmetro δ , conforme os resultados a seguir

Analisando os gráficos vê-se claramente pela Fig.(5.1), que representa o caso ressonante, que o ponto de máximo emaranhamento depende fortemente de θ , assim como o ponto onde o emaranhamento surge no gráfico. Para $\theta = \pi/6$ o emaranhamento surge repentinamente no gráfico em $2gt/\pi = 0,46$, e cresce muito rapidamente até o pico, em $0,5$. O mesmo fenômeno ocorre para $\theta = \pi/12$, com o emaranhamento surgindo em $2gt/\pi = 0,66$ e crescendo muito rapidamente até o ponto de máximo em $0,86$ da Negatividade Global. Após chegar no pico, para todos os casos o emaranhamento cai numa taxa bastante forte até um ponto de descontinuidade, exatamente como na morte súbita do emaranhamento entre os átomos. O surgimento repentino do emaranhamento no gráfico, desta maneira, é conhecido como *Entanglement Sudden Birth* (ESB, Nascimento Súbito de Emaranhamento) [58]. Se a intensão é obter um estado que tenha

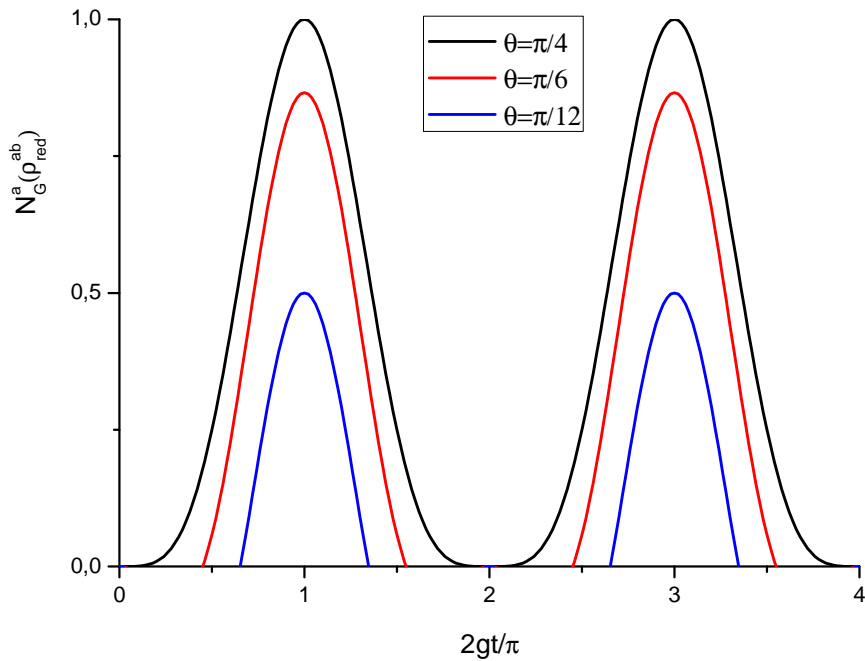


Figura 5.1: Dinâmica da Negatividade Global para diferentes valores de θ no caso ressonante para o subsistema do campo eletromagnético no interior das cavidades.

maior correlação entre os fótons dos campos eletromagnéticos quantizados, é conveniente utilizar $\theta = \pi/4$. Já os gráficos das Fig.(5.2), (5.3) e (5.4), revelam que a introdução do parâmetro de dessintonia do campo causa rebaixamento do ponto de máximo da Negatividade Global para cada θ , e antecipação da ESD para os fótons. A relação é inversamente proporcional, de forma que quanto maior for o valor do parâmetro δ menor será o pico, ao passo que mais depressa acontecerá ESD para tal subsistema. Agora analisando o gráfico da Fig.(5.5), conclui-se que o emaranhamento está sendo transferido do subsistema atômico para o subsistema fotônico, devido à interação entre os átomos e os campos eletromagnéticos quantizados no interior da cavidade ótica. Dessa forma, conclui-se dos gráficos que a introdução de δ para este caso tem o resultado coerente de rebaixar o grau de emaranhamento do sistema e antecipar sua morte súbita, já que, como visto no capítulo anterior, para o subsistema atômico ele tende a preservar o emaranhamento. Assim, o parâmetro de dessintonia afeta a interação átomo-campo, de forma a evitar a perda de coerência em um dos subsistemas sob a pena de degradá-la para outro subsistema, no caso, dos fótons.

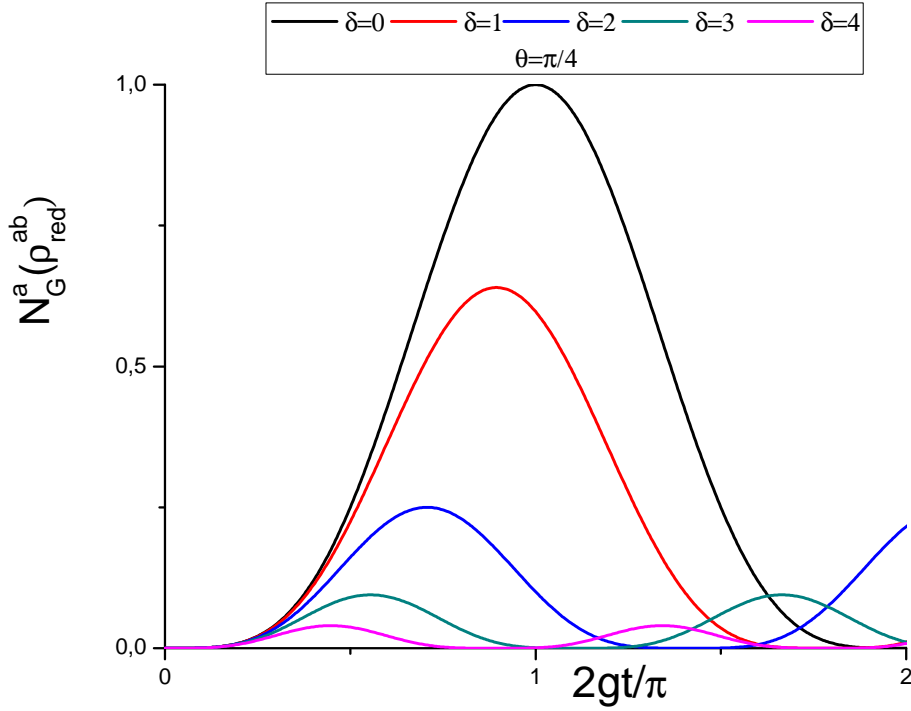


Figura 5.2: Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/4$ para diferentes valores de δ , para o subistema do campo eletromagnético.

Quando se tem um átomo de dois níveis no estado excitado, uma vez que ele retorna ao estado fundamental, deve emitir um fóton de energia igual à diferença de energia entre os níveis nos quais efetuou a transição. Porém, deve-se considerar ainda uma certa incerteza nesse valor de energia devido a flutuações quânticas. Do mesmo modo, para que o átomo absorva um fóton de energia da cavidade ótica ressonante, a energia do fóton deve ser o mais próximo quanto for possível da energia de transição atômica. Quanto mais perto da energia de transição, maior será a probabilidade de o átomo interagir com o campo na forma de absorção. Se a diferença entre as frequências for suficientemente grande, não ocorrerá a transição, ou seja, a interação entre o átomo e o campo eletromagnético na cavidade. Quanto menor for esta diferença, maior será a probabilidade de interação. Assim, ajustando o parâmetro de dessintonia, é possível ter uma modulação da probabilidade de interação átomo-campo de forma a reduzir a probabilidade de interação, que é o fator fundamental para a perda de coerência neste sistema.

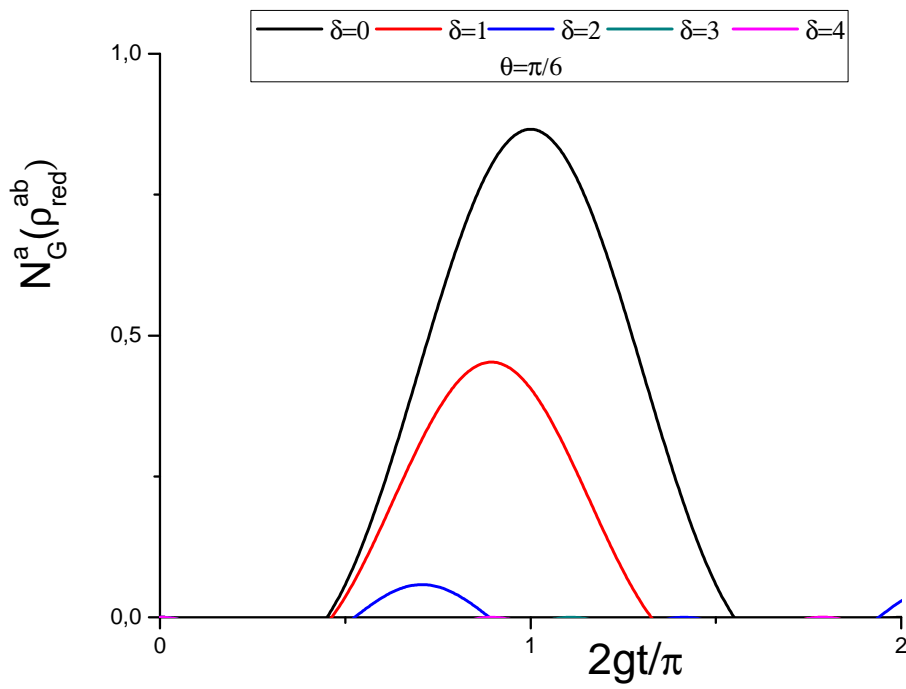


Figura 5.3: Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/6$ para diferentes valores de δ , para o subsistema do campo eletromagnético.

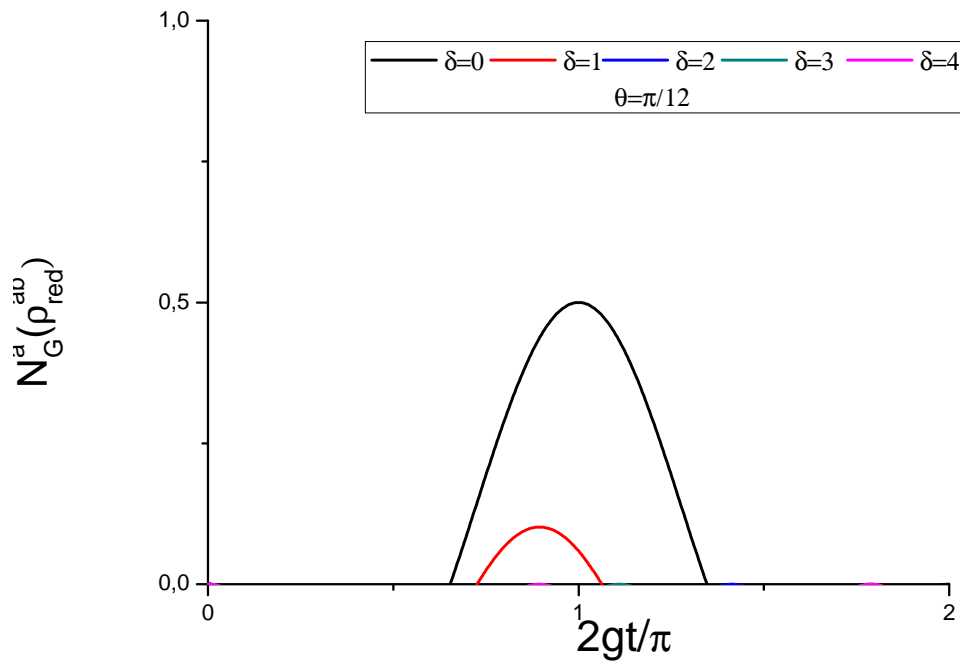


Figura 5.4: Dinâmica da Negatividade Global considerando $\theta = \pi/12$ para diferentes valores de δ , para o subsistema do campo eletromagnético.

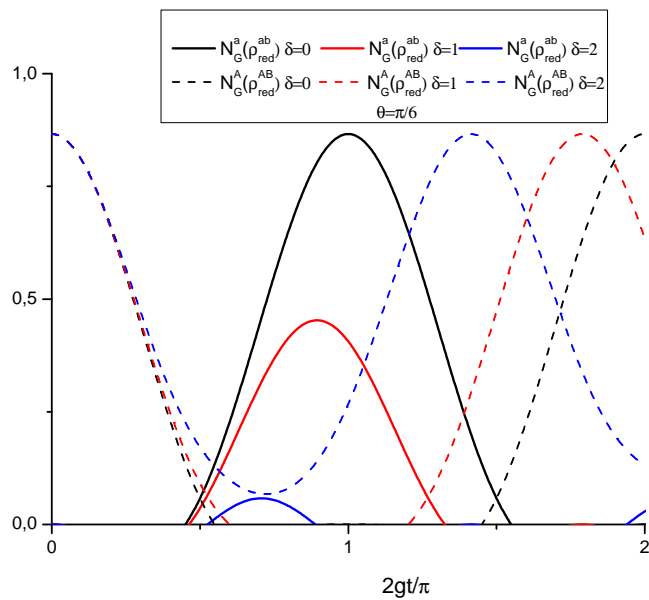


Figura 5.5: Dinâmica da Negatividade Global do estado reduzido dos átomos e a Negatividade Global do estado reduzido do campo eletromagnético quantizado.

Capítulo 6

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE *ESD* SOB OPERAÇÕES LOCAIS

Neste capítulo será verificado como a atuação de uma transformação unitária local em uma das partes de um sistema emaranhado pode influenciar na sua dinâmica.

Será considerado o mesmo JCM duplo, com sua hamiltoniana e operador de evolução temporal para $\delta \neq 0$ já conhecidos, e o estado inicial $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta)|11\rangle + \sin(\theta)|00\rangle$ para o par de átomos emaranhados. Este estado foi escolhido por apresentar *ESD*, objeto de estudo deste trabalho. Sobre este estado será aplicada uma transformação unitária geral complexa sobre o *qubit* A , e então verificada a dinâmica do emaranhamento entre os átomos através da Negatividade Global do estado reduzido para os átomos. Este estudo será feito da seguinte forma: utilizando $\theta = \pi/4$ e $\pi/12$ para o estado dinâmico, determina-se o autovalor negativo do operador densidade reduzido para os átomos através de cálculo numérico em *fortran* para diagonalizar a matrix. Com este autovalor é então possível calcular a Negatividade. Fixa-se um valor de δ e varia-se o parâmetro de transformação unitária geral, $x = a + ib$, para diferentes valores de a e b de forma que se possa analisar a variação da curva quando a operação local é realizada, comparando para o caso em que $x = 0$, ou seja, a transformação não ocorreu. Este procedimento é feito para $\delta = 0, 2$ e 4 .

1 TEORIA DE TRANSFORMAÇÕES

Define-se transformação de uma matriz quadrada A em uma matriz quadrada A' com o auxílio de uma matriz não singular (uma matriz singular é aquela que não possui inversa) S , pela seguinte equação

$$SAS^{-1} = A'. \quad (6.1)$$

Note que a forma de uma equação matricial não é afetada por uma transformação:

$$AB + CDE = F, \quad (6.2)$$

$$SABS^{-1} + SCDES^{-1} = SFS^{-1}, \quad (6.3)$$

$$SAS^{-1}SBS^{-1} + SCS^{-1}SDS^{-1}SES^{-1} = SFS^{-1}, \quad (6.4)$$

$$A'B' + C'D'E' = F', \quad (6.5)$$

onde vê-se que a estrutura da equação matricial ficou inalterada. Esta invariância de equações matriciais frente às transformações torna possível trabalhar com qualquer transformação conveniente para um dado problema, sem afetar sua validade ou qualquer informação obtida destas matrizes, como, por exemplo, a conservação das probabilidades.

Em mecânica quântica as matrizes de transformação são amplamente utilizadas, mais especificamente as *Transformações Unitárias*,

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}. \quad (6.6)$$

Transformações unitárias são operações matriciais que mantém a natureza hermitiana da matriz transformada, assim como preservam seus autovalores e traço. Conhecidas em computação quântica como *portas quânticas*, as transformações são de grande utilidade para implementação de protocolos de comunicação quântica, tal qual o teletransporte de um estado quântico. Uma porta quântica com n entradas e saídas pode ser representada por uma matriz de grau 2^n .

Considere dois sistemas, X e Y , geradores dos espaços complexos C_X^2 e C_Y^2 de forma que o espaço total seja $C_X^2 \otimes C_Y^2 = C_{XY}^4$. Como ambos os sistemas são separados e independentes, é possível que haja uma matriz de transformação \hat{U}_X que atua no subespaço gerado pelo subsistema X e uma operação \hat{V}_Y que atua no subespaço gerado por Y . A operação de \hat{U}_X é local em X por que atua independentemente do subsistema Y , sem afetá-lo, do mesmo

modo que a operação \hat{V}_Y é local em Y . Existe uma transformação sob o sistema total que é $\hat{T}_{XY} = \hat{U}_X \otimes \hat{V}_Y$. Trazendo para o contexto da computação quântica, considere um sistema formado por dois elétrons, X e Y , em estado emaranhado e separados por uma grande distância. O elétron X está no laboratório de Alice, e o elétron Y está no laboratório de Bob. O estado de cada partícula é completamente desconhecido, de forma que o estado pode ser representado por $|\psi\rangle = a|10\rangle_{XY} + b|01\rangle_{XY}$. Pode-se atuar com uma transformação unitária, por exemplo, somente sobre o *qubit* Y . Assim, uma transformação sobre um único *qubit*, representado por um vetor

$$|Y\rangle = \alpha|0\rangle_Y + \beta|1\rangle_Y, \quad (6.7)$$

onde

$$|0\rangle_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

e

$$|1\rangle_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

pode ser representada por uma matriz 2×2 . Por exemplo, uma operação local amplamente utilizada é a porta *NOT*, que é realizada pela atuação de uma das Matrizes de Pauli¹. Considere o operador de Pauli $\hat{\sigma}_x$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Atuando sobre os qubits que representam o elétron Y , por exemplo, $|1\rangle_Y$ e $|0\rangle_Y$, tem-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x |1\rangle_Y &\longrightarrow |0\rangle_Y, \\ \hat{\sigma}_x |0\rangle_Y &\longrightarrow |1\rangle_Y, \end{aligned}$$

que leva então ao estado

$$|\psi\rangle = a|11\rangle_{XY} + b|00\rangle_{XY}. \quad (6.11)$$

Tal operação local é comumente conhecida como porta *NOT*, e é uma operação local sob o ponto de vista que atua somente no qubit localizado no laboratório de Alice, mantendo as propriedades do sistema. Poderia ser atuada também $\hat{\sigma}_x$ sobre o *qubit* X , ou então $\hat{\sigma}_x \otimes I$, da

¹Lembre-se que as Matrizes de Pauli são hermiteanas.

forma

$$\hat{\sigma}_x \otimes I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

sobre o sistema total.

Uma propriedade interessante de sistemas quânticos compostos é que as propriedades de não localidade não mudam sob transformações locais, i.e. as operações unitárias atuam independentemente em cada um dos subsistemas. Uma transformação não local é aquela que afeta as outras partes do sistema. Por exemplo, considere a matriz

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Esta transformação não é uma transformação local porque não pode ser colocada sob a forma $\hat{W}_{XY} = \hat{U}_X \otimes \hat{V}_Y$, o que levaria a operações locais.

Transformações unitárias são também utilizadas para mudar a base na qual um operador matricial está escrito, como, por exemplo, passar para uma base na qual o operador em sua representação matricial seja diagonal.

2 EFEITO DE TRANSFORMAÇÃO LOCAL GERAL SOBRE O EMARANHAMENTO ATÔMICO

Considere uma transformação unitária geral

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -x^* \\ x & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

na base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, onde x é uma variável complexa. Aplicando sobre o estado inicial $|\Phi_{tot}\rangle^{ABab} = \cos(\theta)|1100\rangle + \sin(\theta)|0000\rangle$, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{T}|\Phi\rangle^{ABab} &= |\Phi\rangle^{A'Bab} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} [\cos(\theta)|1100\rangle + x\cos(\theta)|0100\rangle] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} [\sin(\theta)|0000\rangle - x^*\sin(\theta)|1000\rangle].\end{aligned}\quad (6.15)$$

Aplicando o Operador Evolução Temporal do modelo JC para cada subsistema, tem-se que a dinâmica do sistema é dada por

$$\begin{aligned}|\Phi(t)\rangle^{A'Bab} &= X_1|1100\rangle + X_2|0011\rangle + X_3|0110\rangle + X_4|1001\rangle + X_5|0000\rangle \\ &+ X_6|1000\rangle + X_7|0100\rangle + X_8|0010\rangle + X_9|0001\rangle,\end{aligned}\quad (6.16)$$

onde

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[\cos(\Omega t/2) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ X_2 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[-i\frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ X_3 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[\cos(\Omega t/2) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[-i\frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_4 &= X_3 \\ X_5 &= \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} e^{-i\delta t} \\ X_6 &= -\frac{\sin(\theta)e^{-i\delta t/2}}{\sqrt{1+|x|^2}} x^* \left[\cos(\Omega t/2) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_7 &= e^{-i\delta t/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} x \left[\cos(\Omega t/2) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_8 &= -\frac{x^*\sin(\theta)e^{-i\delta t/2}}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[-i\frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_9 &= e^{-i\delta t/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} x \left(-\frac{iG}{\Omega} \sin \Omega t/2 \right)\end{aligned}$$

Calculando o operador densidade reduzido para o subsistema dos átomos e efetuando a trans-

posta parcial com relação ao *qubit A*, tem-se

$$[\hat{\rho}^{AB}]^{T_A}(x, t) = \begin{bmatrix} |X_2|^2 + |X_5|^2 + |X_8|^2 + |X_9|^2 & X_7X_5^* + X_3X_8^* & X_5X_6^* + X_9X_4^* & X_7X_6^* \\ X_5X_7^* + X_8X_3^* & |X_3|^2 + |X_7|^2 & X_5X_1^* & X_7X_1^* \\ X_6X_5^* + X_4X_9^* & X_1X_5^* & |X_4|^2 + |X_6|^2 & X_6X_1^* \\ X_6X_7^* & X_1X_7^* & X_6X_1^* & |X_1|^2 \end{bmatrix}.$$

Como x é um número complexo, pode ser representado como $x = a + ib$ no programa *fortran* para diagonalizar a matriz acima e gerar os autovalores negativos para que se possa calcular a Negatividade Global do subsistema atômico.

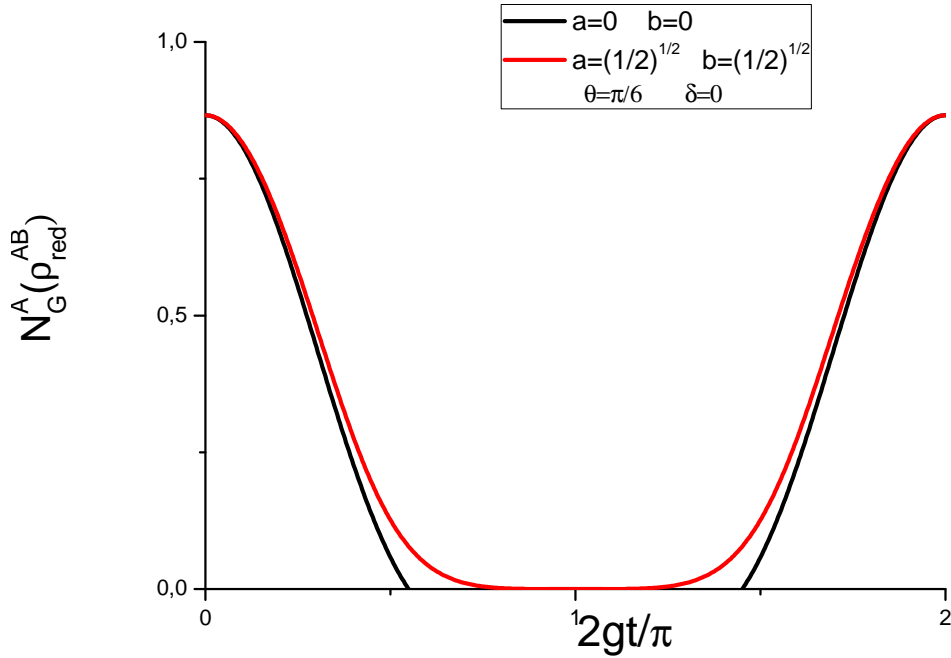


Figura 6.1: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/6$ e $\delta = 0$, em função dos parâmetros de transformação unitária a e b .

Analisando a Eq.(6.15), verifica-se que o estado inicial após a atuação de \hat{T} sobre o *qubit A* contém os vetores de base do estado que não apresenta ESD, de forma que o estado inicial agora é uma mistura dos estados $|\Psi_0\rangle$ e $|\Phi_0\rangle$. A dinâmica do emaranhamento do subsistema atômico mostrada na Fig.(6.1) revela um resultado bastante significativo, onde nota-se que uma transformação unitária \hat{T} na forma da Eq.(6.14) com $x = \frac{1}{\sqrt{(2)}} + \frac{i}{\sqrt{(2)}}$ pode (para $\theta = \pi/6$)

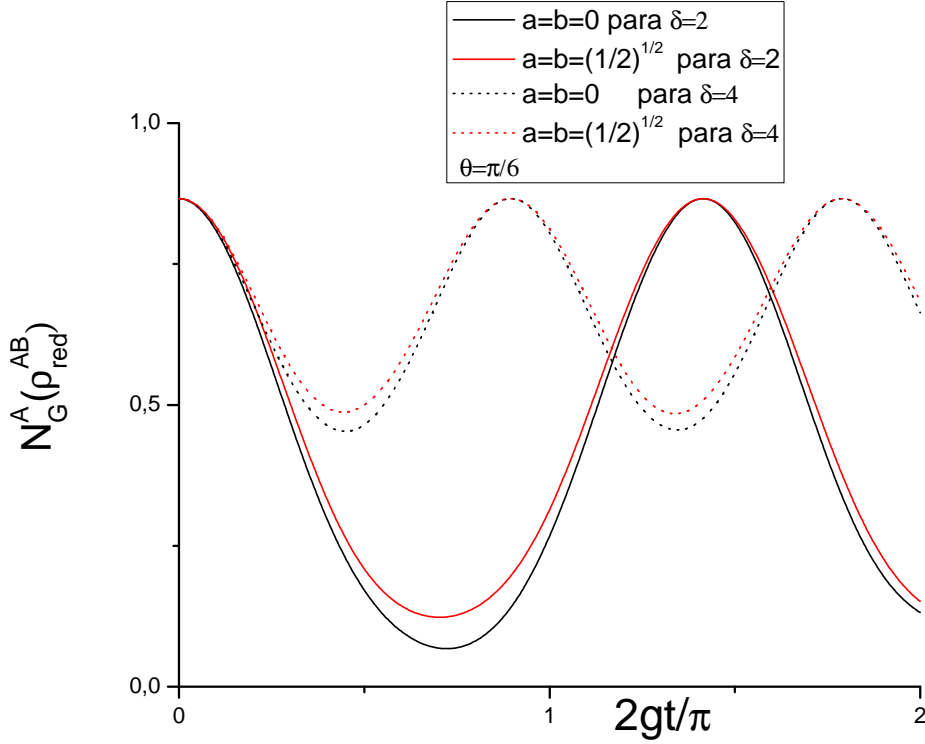


Figura 6.2: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/6$, considerando os valores $\delta = 2$ e 4 , variando os parâmetros de transformação unitária a e b .

bloquear o fenômeno de Morte Súbita para o caso de interação ressonante, ou seja, sem necessidade da introdução do parâmetro de dessintonia. Na Fig.(6.2) analisa-se o caso não ressonante, e nota-se que a transformação unitária causa um "levantamento" adicional no ponto de mínimo. A Fig.(6.3) é o resultado dos cálculos quando $\theta = \pi/12$, e mostra que a operação não foi suficiente para inibir ESD. Entretanto, pode-se depreender da Fig.(6.4) que, associando-se $\delta = 2$ à operação local, não se observa o Fenômeno de Morte Súbita (ao contrário do que mostra a Fig.(4.6) da Seção 4.2.2, onde foi visto que somente para $\delta = 4$ o sistema não apresenta ESD).

Em suma, quando o sistema está sob a operação de uma transformação unitária tal qual a da Eq.(6.1), cujo parâmetro de transformação complexo seja $x = \frac{1}{\sqrt{(2)}} + \frac{i}{\sqrt{(2)}}$, uma operação sobre o átomo A é suficiente para desaparecer o fenômeno ESD quando $\theta = \pi/12$. Também conclui-se que é necessário menor valor de δ quando $\theta = \pi/12$ para que o sistema passe a ter evolução contínua e não sofra Morte Súbita de Emaranhamento. Logo, a transformação unitária da Eq.(6.14) é bastante útil para os propósitos de Computação Quântica, sob o ponto de vista de manipular o sistema para que este evolua sem Morte Súbita de Emaranhamento.

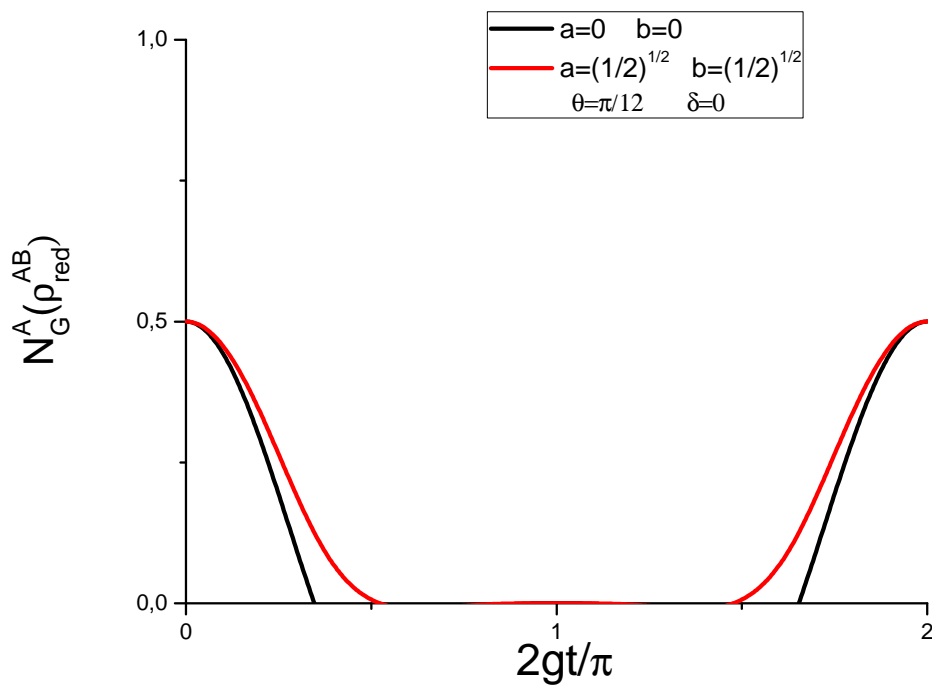


Figura 6.3: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/12$ e $\delta = 0$, em função dos parâmetros de transformação unitária a e b .

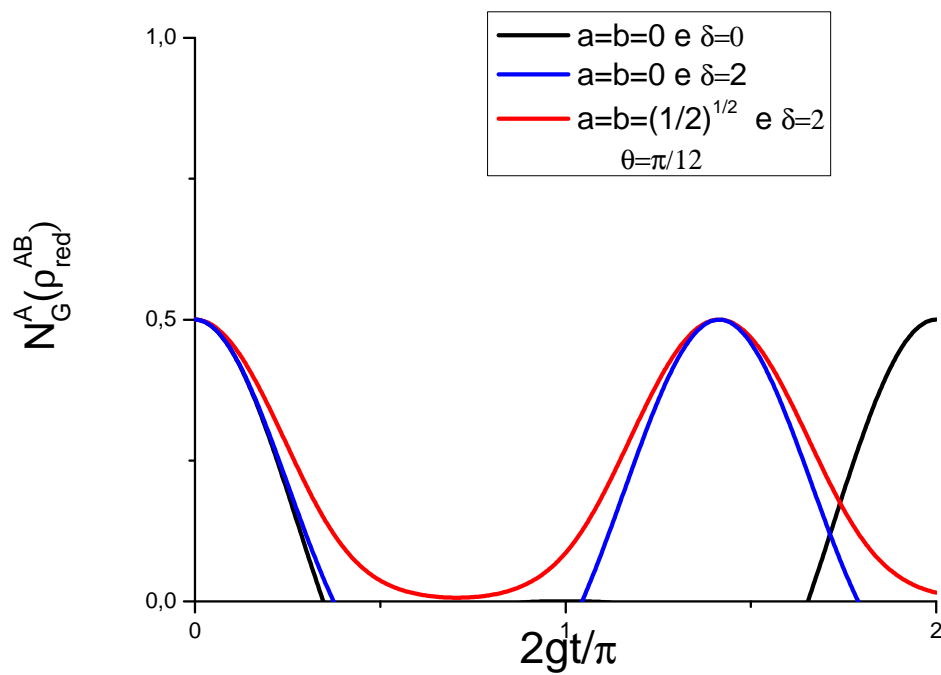


Figura 6.4: Negatividade Global do subsistema atômico versus $2gt/\pi$ para $\theta = \pi/12$, onde plotaram-se os resultados para quando $\delta = 0$ e $a = b = 0$; quando $a = b = 0$ e $\delta = 2$; e quando $\delta = 2$ associado à uma operação local em A , para verificar o efeito sobre ESD.

Capítulo 7

ANÁLISE DO SISTEMA DE QUATRO QUBITS EM FUNÇÃO DE \hat{T} E δ

Nos capítulos anteriores foi estudada a dinâmica do emaranhamento para os subsistemas atômico e fotônico separadamente, através da redução do sistema, sem se preocupar com o que acontece no sistema como um todo. Neste capítulo, será utilizado o mesmo JCM em função dos parâmetros δ , dessintonia do campo, e x , transformação unitária, para o estado $|\Phi_{atm}\rangle = \cos(\theta)|11\rangle + \sin(\theta)|00\rangle$, exatamente como no *Cap. 6*. Será fixado $\theta = \pi/6$.

A proposta é analisar a dinâmica do sistema devido à interação dos quatro corpos através da medida *Four-Tangle* [56], que fornece informação sobre o emaranhamento de quatro corpos. Tal medida vai dar uma boa noção do que ocorre com o emaranhamento do sistema total com o passar do tempo. Pode-se traçar um paralelo com o que já foi calculado para os subsistemas AB e ab .

Considere novamente a transformação unitária geral

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -x^* \\ x & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

atuando sobre o estado inicial

$$|\Phi_{tot}\rangle^{ABab} = \cos(\theta)|1100\rangle + \sin(\theta)|0000\rangle,$$

o estado dinâmico é descrito pela Eq.(6.16)

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle^{A' Bab} &= X_1 |1100\rangle + X_2 |0011\rangle + X_3 |0110\rangle + X_4 |1001\rangle + X_5 |0000\rangle \\ &+ X_6 |1000\rangle + X_7 |0100\rangle + X_8 |0010\rangle + X_9 |0001\rangle, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ X_2 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right]^2 \\ X_3 &= \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \left[-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_4 &= X_3 \\ X_5 &= \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} e^{-i\delta t} \\ X_6 &= -\frac{\sin(\theta) e^{-i\delta t/2}}{\sqrt{1+|x|^2}} x^* \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_7 &= e^{-i\delta t/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} x \left[\cos(\Omega t/2) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_8 &= -\frac{x^* \sin(\theta) e^{-i\delta t/2}}{\sqrt{1+|x|^2}} \left[-i \frac{G}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right] \\ X_9 &= e^{-i\delta t/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+|x|^2}} x \left(-\frac{iG}{\Omega} \sin \Omega t/2 \right). \end{aligned}$$

1 O EMARANHAMENTO DEVIDO A CORRELAÇÕES DE QUATRO CORPOS

Nesta seção, estuda-se o emaranhamento devido a correlações de quatro qubits. A definição de *Four-Tangle*,

$$\tau_4 = 4 \left| (F^{0000} + F^{0011} - F^{0010} - F^{0001})^2 \right|, \quad (7.3)$$

fornece, para o sistema de dois átomos interagindo com o campo eletromagnético segundo o modelo JCM duplo, a dinâmica do emaranhamento devido à interação dos quatro corpos, A , B , a e b , e tem a forma

$$\tau_4 = 4|(X_1X_2 + X_3X_4)^2|. \quad (7.4)$$

Com este resultado, pode-se estudar mais aprofundadamente o sistema de modo que se tenha informação sobre o emaranhamento devido às interações dos quatro corpos (átomos A e B , e campo a e b) presentes no sistema, e analisar a transferência do emaranhamento do subsistema atômico para o sistema como um todo. Utilizando a Eq.(7.4), foram efetuados os cálculos numéricos que possibilitaram a construção dos gráficos para esta análise, representados pelas Figuras (7.1), (7.2) e (7.3).

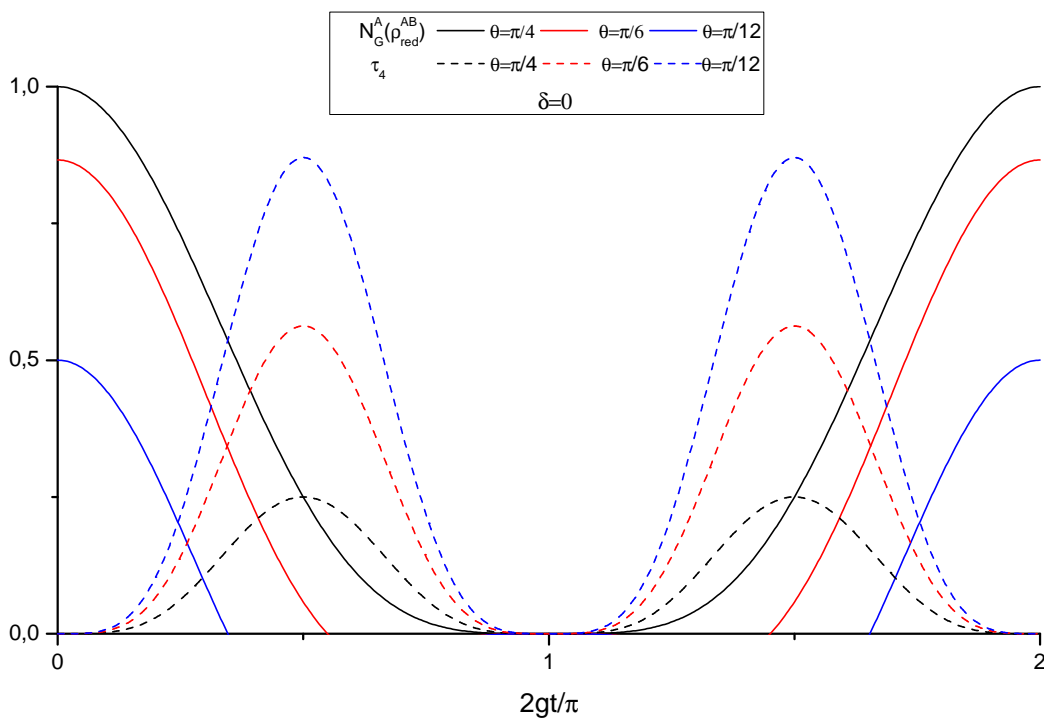


Figura 7.1: Dinâmica de Four-Tangle para os diferentes valores de $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$ no caso ressonante, plotados juntamente com o emaranhamento entre os átomos para o mesmo caso.

A Fig.(7.1) mostra, para valores de $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$ uma comparação da dinâmica de Four-Tangle com a Negatividade Global do subsistema atômico para o estado $|\Phi_0\rangle$ quando $\delta = 0$ e não há transformação unitária no sistema. Vê-se que o ponto de máximo para τ_4 depende do parâmetro θ , assim como a Negatividade Global, mas de maneira inversa, de modo

que quanto maior a quantidade emaranhamento inicial no subsistema atômico, que na verdade é o emaranhamento total do sistema no instante inicial, menor será o valor máximo de τ_4 . Por exemplo, para $\theta = \pi/4$, o emaranhamento inicial entre os átomos é máximo. Durante a interação, o emaranhamento é compartilhado com o resto do sistema, mas repare que, para este caso (onde não é observada Morte Súbita), é baixa a correlação entre os quatro corpos. Entretanto, para $\theta = \pi/12$, onde verifica-se claramente a ocorrência de ESD, as correlações entre os quatro corpos apresentam um pico bastante elevado. Verifica-se também que quando $2gt/\pi = 1$ $\tau_4 = 0$, que é o ponto onde o emaranhamento entre os fótons é máximo. Dividindo o período de interação em quatro partes, fica claro aqui que o emaranhamento está sendo transferido com o passar do tempo para os diversos subsistemas, de forma que no primeiro e terceiro quartos do período de interação, grande parte do emaranhamento é transferido para o sistema de quatro corpos, ao passo que na metade do período é totalmente transferido para o subsistema dos fótons. A própria quantidade inicial de emaranhamento do sistema determina se haverá ou não ESD na dinâmica do emaranhamento.

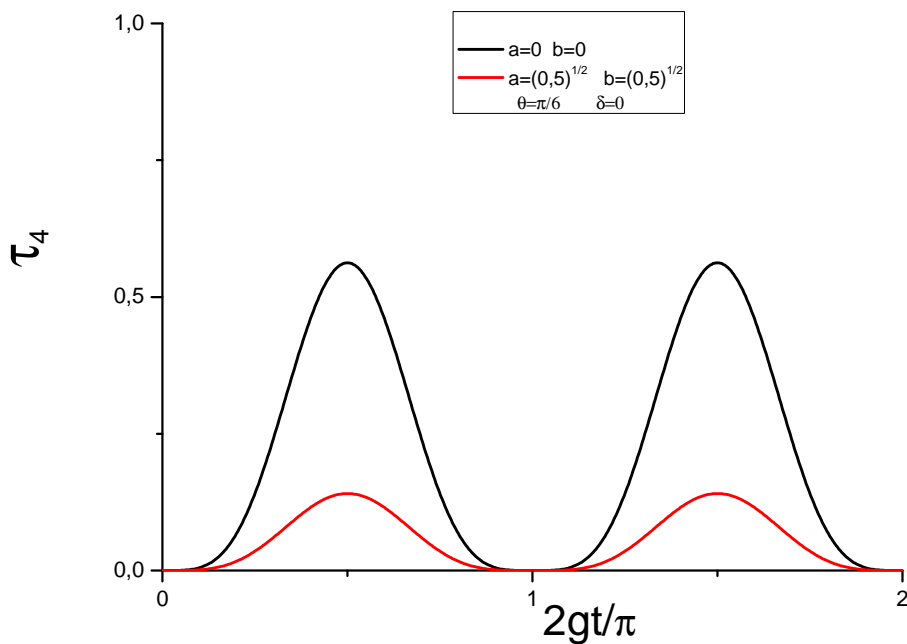


Figura 7.2: Dinâmica das curvas de τ_4 quando $\theta = \pi/6$ para o caso onde existe a operação local \hat{T} e o caso onde não operação local.

A Fig.(7.2) mostra o efeito de uma operação local, na forma da Eq.(6.14) quando $a = b = 1/\sqrt{2}$, sobre as correlações de quatro partidos. Relembrando da Fig.(6.1), a qual mostra que a operação foi capaz de reverter ESD no subsistema atômico para $\theta = \pi/6$ e $\delta = 0$, nestas mesmas condições τ_4 mostra que a quantidade de emaranhamento medida no sistema diminui consideravelmente. Conclui-se daí que a operação local atua de modo a preservar o emaranhamento no subsistema atômico evitando a transferência para as outras partes do sistema.

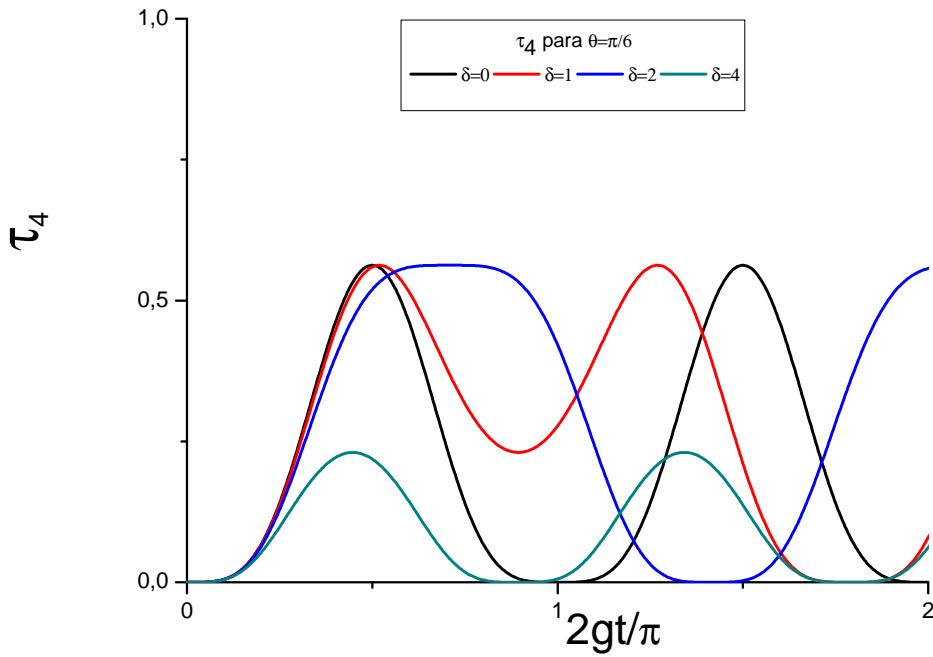


Figura 7.3: Comparação da evolução temporal das curvas de τ_4 para os casos $\delta = 0, 1, 2$ e 4 quando $\theta = \pi/6$.

A Fig.(7.3) mostra os resultado para τ_4 quando são feitas variações no parâmetro de dessintonia do campo, com $\theta = \pi/6$. O resultado mostra que δ também pode ser utilizado para evitar a transferência para o sistema de quatro corpos, mas revela que é necessário um valor maior do que o esperado para a dessintonia para que seja reduzido o pico e a quantidade de emaranhamento no sistema. Inicialmente, δ tem efeito visível no ponto de mínimo de τ_4 na metade do período de interação, levando-o até o ponto de máximo quando $\delta = 2$. A partir daí, conforme o aumento de δ observa-se menor correlação de quatro corpos, diminuindo consideravelmente o valor máximo de τ_4 . É interessante notar que δ inicialmente prolonga o período

onde as correlações de quatro corpos é diferente de zero, em particular para $\delta = 2$. Logo, se a intenção é obter uma configuração na qual se deseja uma maior correlação entre as quatro partes do sistema, $\delta = 2$ proporciona este efeito. Entretanto, para maiores valores de δ tais correlações deterioram-se.

Capítulo 8

EMARANHAMENTO ENTRE PARES E PERDA DE INFORMAÇÃO DO SISTEMA

Neste capítulo foram calculados os invariantes para o sistema de quatro qubits com relação ao átomo A , dados por P^{AB} , P^{Aa} , P^{Ab} , com base nas Fontes de Negatividade para diferentes valores do parâmetro δ . Desta forma, pode-se ter informação do emaranhamento do átomo A com cada par possível, como por exemplo o par AB , para o estado puro, sem a necessidade de redução para o subsistema atômico. Com isto, foi calculado o quanto de informação é perdida devido à redução para o subsistema atômico, para o cálculo da Negatividade Global.

1 Emaranhamento entre pares

Relembrando que as fontes de negatividade são, para um estado geral de N qubits

$$\hat{\rho}^{ABC\dots N} = |\Psi^{ABC\dots N}\rangle \langle \Psi^{ABC\dots N}| = \sum_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} a_{j_1 j_2 \dots j_N}^\dagger |i_1 i_2 \dots i_N\rangle \langle j_1 j_2 \dots j_N|, \quad (8.1)$$

determinadas pela relação

$$\nu = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_2 \dots i_N} & a_{j_1 j_2 \dots j_N} \\ a_{i_1 i_2 \dots j_p \dots i_N} & a_{j_1 j_2 \dots j_N} \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Para um estado geral de quatro *qubits*

$$|\Phi^{ABCD}\rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4}^4 a_{i_1, i_2, i_3, i_4} |i_1, i_2, i_3, i_4\rangle, \quad (8.3)$$

o emaranhamento entre pares é determinado da seguinte maneira: suponha que deseja-se calcular o emaranhamento entre os pares de *qubits* A e B . Será então calculado o determinante da matriz ν , mantendo nela fixos os índices relativos aos *qubits* C e D , para cada combinação possível dos estados, já que C e D podem assumir valores 0 e 1. Em outras palavras, $P_2^{AB} = P_{C_0D_0}^{AB} + P_{C_0D_1}^{AB} + P_{C_1D_0}^{AB} + P_{C_1D_1}^{AB}$. Por exemplo, para $P_{C_0D_0}^{AB}$, a fonte de negatividade é calculada da seguinte maneira.

$$P_{C_0D_0}^{AB} = 4 \left| \begin{bmatrix} a_{1100} & a_{1000} \\ a_{0100} & a_{0000} \end{bmatrix} \right|^2. \quad (8.4)$$

Assim sendo, considerando o nosso sistema de quatro *qubits* representado pelo estado

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle^{A' Bab} &= X_1 |1100\rangle + X_2 |0011\rangle + X_3 |0110\rangle + X_4 |1001\rangle + X_5 |0000\rangle \\ &+ X_6 |1000\rangle + X_7 |0100\rangle + X_8 |0010\rangle + X_9 |0001\rangle, \end{aligned} \quad (8.5)$$

pode-se substituir C por a e D por b , para calcular $P_{a_0b_0}^{AB}$

$$P_{a_0b_0}^{AB} = 4 \left| \begin{bmatrix} a_{1100} & a_{1000} \\ a_{0100} & a_{0000} \end{bmatrix} \right|^2 = 4|X_1X_5 - X_6X_7|^2. \quad (8.6)$$

Já para $P_{a_0b_1}^{AB}$

$$P_{a_0b_1}^{AB} = 4 \left| \begin{bmatrix} a_{1101} & a_{1001} \\ a_{0101} & a_{0001} \end{bmatrix} \right|^2 = 0, \quad (8.7)$$

e assim para as outras variações de P_2^{AB} . O átomo A pode estar emaranhado também com o campo na cavidade a . Logo, é necessário calcular P_2^{Aa} , assim como pode estar emaranhado com o campo na cavidade b , que é analisada calculando-se P_2^{Ab} . Abaixo, são apresentados os resultados dos cálculos para cada caso.

$$P_2^{AB} = P_{a_0b_0}^{AB} = 4|X_1X_5 - X_6X_7|^2; \quad (8.8)$$

$$P_2^{Aa} = P_{B_0b_0}^{Aa} + P_{B_1b_0}^{Aa} + P_{B_0b_1}^{Aa} = 4|-X_6X_8|^2 + 4|X_3X_1|^2 + 4|X_4X_2|^2; \quad (8.9)$$

$$P_2^{Ab} = P_{B_0a_0}^{Ab} = 4|X_4X_5 - X_9X_6|^2. \quad (8.10)$$

Foi calculado então, à partir do emaranhamento entre pares, a perda de emaranhamento devido à redução ao sistema atômico [58], expresso pela relação

$$E_{(lost)} = P_2^{AB} - (N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB}))^2. \quad (8.11)$$

Foi utilizado cálculo numérico, e os dados foram utilizados para plotar os gráficos a seguir.

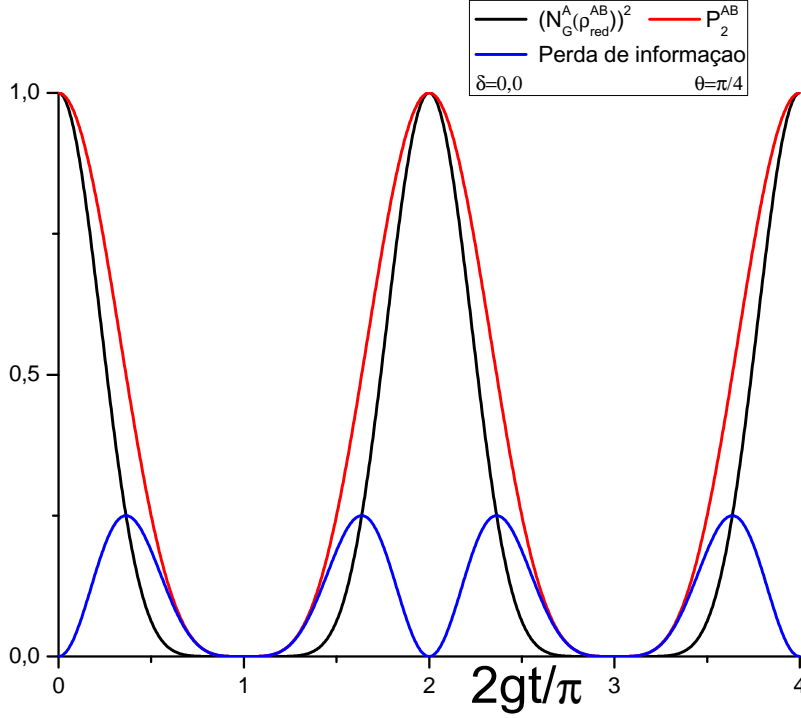


Figura 8.1: Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/4$ no caso ressonante.

As Figuras (8.1), (8.2) e (8.3) mostram o quadrado da Negatividade Global para o estado reduzido ao subsistema atômico, na linha negra, o emaranhamento no estado puro dos átomos, e a quantidade de informação que é perdida devido à redução para o estado misto de dois qubits, para $\theta = \pi/4, \pi/6$ e $\pi/12$, respectivamente. É possível ver que em todos os casos certa quantidade de emaranhamento é perdida devido à redução do estado. Em particular, quando $\theta = \pi/12$ uma grande quantidade de emaranhamento é perdida proporcionalmente à quantidade de emaranhamento inicial no sistema. Uma relação de proporção inversa é percebida entre a perda de emaranhamento e a quantidade de emaranhamento inicial no subsistema AB . Quanto maior a quantidade inicial de emaranhamento, menos emaranhamento é perdido proporcionalmente.

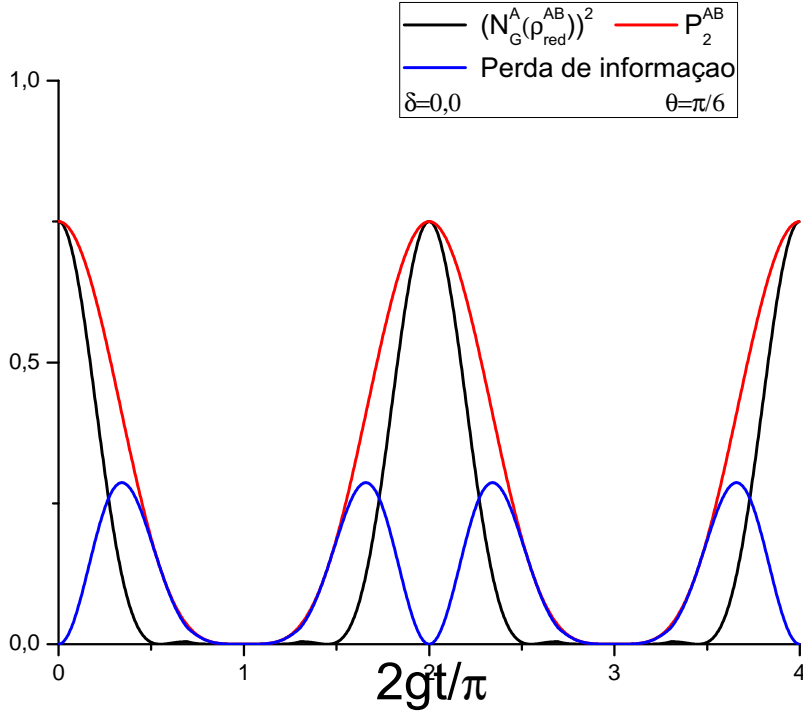


Figura 8.2: Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/6$ no caso ressonante.

Por outro lado, quanto maior for esta proporção de perda, maior será o período durante o qual o estado permanece desemanhado, ou seja, o período de ESD. Por exemplo, para $\theta = \pi/6$, o pico da perda de informação é em aproximadamente 0,29, que corresponde a 38,7 por cento do valor do emaranhamento inicial no sistema, sendo que este permanece desemanhado durante 50 por cento do período de interação. Para $\theta = \pi/12$, o pico da perda de emaranhamento é em aproximadamente 0,15, que representa 60 por cento do total de emaranhamento no sistema no instante inicial, que por sua vez permanece desemanhado por 64 por cento do período de interação. Entretanto, quando se mede o emaranhamento entre os átomos pelas fontes de negatividade (estado puro), nenhuma informação é perdida e o sistema evolui de forma contínua e unitária, sem Morte Súbita de Emaranhamento.

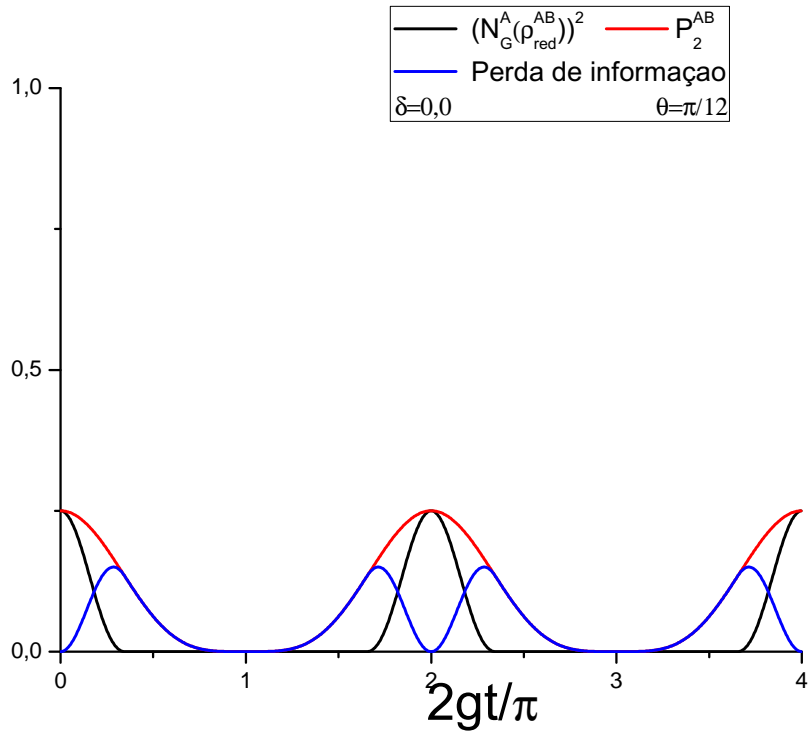


Figura 8.3: Dinâmica de $[N_G^A(\hat{\rho}_{red}^{AB})]^2$ e P_2^{AB} , plotados juntamente com a curva que fornece a perda de informação devido à redução para o subsistema atômico para $\theta = \pi/12$ no caso ressonante.

Capítulo 9

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudou-se um sistema formado por um par de átomos idênticos de dois níveis gerados em estado emaranhado, espacialmente separados e isolados em cavidades óticas diferentes de tal maneira que não haja nenhuma forma de interação de um subsistema átomo-cavidade com o outro, conforme mostra a Fig. [4.1]. Tal sistema, estudado através do Modelo Jaynes-Cummings, apresenta, segundo a ref [14] e como foi mostrado neste trabalho, o fenômeno de Morte Súbita de Emaranhamento (ESD). A intenção neste trabalho foi estudar a dinâmica do emaranhamento deste sistema levando em conta alguns fatores que podem interferir na sua evolução temporal, tal como a dessintonia do campo e uma operação local em um dos qubits do sistema, de forma a verificar se há algum efeito sobre ESD, assim como entender melhor o fenômeno em si, como e porquê ocorre.

No Cap. 4, num primeiro momento verificou-se que o ponto de máximo emaranhamento do sistema estudado depende fortemente do emaranhamento do estado inicial adotado para o subsistema atômico, ou seja, é função do parâmetro θ , verificado para ambas configurações do estado inicial, $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$. No entanto, foi verificado que o fenômeno ESD ocorre somente para o estado $|\Phi\rangle$, e tem comportamento tal que o período durante o qual o subsistema atômico permanece desemaranhado é inversamente proporcional à quantidade inicial de emaranhamento no sistema, conforme mostrado na Fig.(4.3). Desta forma, quanto maior o emaranhamento no sistema, menor o período de ESD, como verificado na Ref[14]. Na outra etapa do mesmo capítulo, foi considerado o mesmo sistema, porém para o caso onde existe uma diferença entre a frequência de transição atômica e a frequência do campo na cavidade, a dessintonia do campo.

A introdução da dessintonia do campo causa retardo no ponto onde o emaranhamento é nulo, ou seja, diminui a taxa com que a curva vai a zero, e antecipa seu ressurgimento, mostrando então que a dessintonia pode ser utilizada para controlar o emaranhamento de forma a evitar ESD. Verifica-se que quanto maior o período de morte súbita (que por sua vez é função do parâmetro θ , como foi mostrado), maior será a dessintonia necessária para evitar a ocorrência de ESD, como se pode verificar na Fig. [4.5] e Fig. [4.6], onde para $\theta = \pi/6$, $\delta = 2$ já é suficiente para preservar o emaranhamento, enquanto que para $\theta = \pi/12$, $\delta = 2$ e 3 não são suficientes. Foi verificado, ainda no Cap. 4, como é a dinâmica do emaranhamento do subsistema atômico quando apenas o subsistema Aa é ressonante, variando o parâmetro de dessintonia do subsistema Bb . Tal configuração mostrou uma dinâmica bastante diferente, onde o parâmetro de dessintonia remove a descontinuidade do emaranhamento, entretanto o ponto de mínimo será sempre constante e igual a zero, ao passo que é evidente que afeta o ponto de máximo da curva, que tem um comportamento modulado por uma função cosseno. Entretanto, este fenômeno somente é verificado para maiores períodos de interação.

O fenômeno de ESD do subsistema atômico é melhor compreendido quando é analisada a dinâmica do emaranhamento do subsistema do campo eletromagnético, ab . A Fig.(5.2) revela que enquanto o subsistema atômico está sob ESD, o subsistema fotônico tem um comportamento oposto, mostrando o surgimento repentino do emaranhamento (ESB), atingindo o máximo emaranhamento durante o período de ESD do subsistema atômico, de forma periódica. A análise mostra que o emaranhamento entre os átomos está sendo transferido para o campo eletromagnético de forma constante, o que causa a degradação do emaranhamento atômico, devido às interações locais entre os *qubits* A e a , e entre os *qubits* B e b . Variando a dessintonia do campo neste caso, verifica-se que o emaranhamento vai caindo gradualmente a zero no subsistema ab , de forma oposta ao que ocorre com o emaranhamento atômico. Mais especificamente, para a configuração inicial que apresenta ESD, ou seja $\theta = \pi/6$, o valor de $\delta = 3$ já é suficiente para "aniquilar" o emaranhamento entre os fótons, enquanto que para o subsistema dos átomos, já não é observado ESD. O mesmo ocorre para $\theta = \pi/12$ quando $\delta = 2$ já não existe emaranhamento entre os fótons. Enquanto δ tem efeito sobre o ponto de mínimo no emaranhamento entre os átomos, para os fótons o efeito é sobre o ponto de máximo, de forma que quanto maior o ponto de máximo da curva de Negatividade Global do subsistema fotônico, mais próximo de zero ficará a curva para o subsistema atômico. O parâmetro de dessintonia tem este efeito de

atenuar ESD porque atua diretamente na interação entre o campo eletromagnético e o átomo, de forma que quanto maior for seu valor, menor a probabilidade de interação.

No Cap 6. foi estudado o comportamento do sistema quando existe a atuação de uma operação local em um dos qubits do sistema, especificamente neste caso sobre o qubit A. Levando em conta como estado inicial para o sistema atômico o estado que apresenta ESD, $|\Phi\rangle$, o estudo mostrou que o emaranhamento, que inicialmente estava concentrado em dois vetores de base, foi distribuído para outros dois vetores de base possíveis, na forma de uma mistura dos estados $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$. A operação local se revelou eficiente, já que foi verificado que requer menor valor da dessintonia do campo para evitar ESD.

Foi analisado o emaranhamento devido às interações de quatro corpos pela medida de Four-Tangle, que dá informação do sistema como um todo. Verificou-se que o emaranhamento devido a quatro corpos aparece somente depois de um período suficiente para que o par de átomos emaranhados transfira emaranhamento para o sistema total $ABab$, mais uma evidência que o emaranhamento presente inicialmente nos átomos está sendo transferido ao sistema devido à interação local em suas cavidades. A interação dos átomos emaranhados com o campo é a fonte da perda repentina de emaranhamento entre tal subsistema devido à transferência do emaranhamento.

Como todo tratamento teórico aqui realizado foi feito utilizando como medida de emaranhamento a Negatividade Global, que leva em conta a transposta parcial do estado, foi necessário efetuar a redução do sistema total $ABab$ para o subsistema atômico, AB , e o subsistema dos fótons, ab . Esta redução acarreta uma perda de informação sobre o sistema que pôde ser verificada no Cap. 8. através do cálculo do emaranhamento entre os pares pelas fontes de negatividade,

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. *Can quantum mechanical description of reality be considered complete?* Phys. Rev. 47, 777–780 (1935)
- [2] E. Schrödinger, *The present situation in quantum mechanics*. Naturwissenschaften (1935)
- [3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge (2000)
- [4] A. Einstein *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17: 891–921. (1905)
- [5] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge (1987)
- [6] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal 27 379–423 (1948)
- [7] C.E. Shannon *Communication Theory of Secrecy Systems*, Bell System Technical Journal, 28 656–715, (1949)
- [8] Y. Zhao, Chi-Hang F. Fung, Bing Q., Hoi-Kwong Lo. *Quantum hacking: Experimental demonstration of time-shift attack against practical quantum-key-distribution systems*, Physical Review A. 78 042333 (2008)
- [9] Ding S. C., Jin Z. *Review on the study of entanglement in quantum computation speedup*. Chinese Sci. Bull. 52 2161-2166, (2007)
- [10] M. O. Terra Cunha. *Emaranhamento: do gato de schroedinger a algebra multilinear*. Minicurso, Salvador, BA (2005)

- [11] M. Yonaç, J. H. Eberly. *Qubit entanglement driven by remote optical fields* Optics Letters, Vol. 33, Issue 3, pp. 270-272 (2008)
- [12] T. Yu, J. H. Eberly. *Finite-Time Disentanglement Via Spontaneous Emission* Phys. Rev. Lett. 93, 140404 (2004)
- [13] T. Yu, J. H. Eberly, *Sudden death of entanglement: classical noise effects*. Opt. Commun. 264, 393-397 (2006)
- [14] M. Yönaç, T. Yu, J. H. Eberly, *Sudden death of entanglement of two Jaynes–Cummings atoms*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39** S621 (2006)
- [15] E.T. Jaynes, F.W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE 51: 89–109. (1963)
- [16] I. Sainz, G. Bjork. *Entanglement invariant for the double jaynes-Cummings model*. Physical Review A, vol. 76 042313 (2008)
- [17] H. Feng *Entanglement dynamics and transfer in a double Jaynes-Cummings model*. Chin. Sci. Bul. **55** 1758-1762 (2010)
- [18] L. Wei-Ci, W. Fa-Qiang, L. Rui-Sheng, *Concurrence evolution of two qubits coupled with one-mode cavity separately*. Chin. Phys. B **19** 094204 (2010)
- [19] Ying-Jie Zhang, *Entanglement sudden death in band gaps*. Eur. Phys. J. D **58**, 397-401 (2010)
- [20] Ying-Jie Zhang, *Atomic entanglement sudden death in a strongly driven cavity QED system*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 42 095503 (2009)
- [21] K. Rosak, P. Horodecki, R. Horodecki. *Sudden death of effective entanglement*. Physical Review A, vol. 81, 042308 (2009)
- [22] J. H. Cole *Understanding entanglement sudden death through multipartite entanglement and quantum correlations*. J. Phys. A: Theor 43 135301 (2010)
- [23] Chen Li, S. Xiao-Qiang, Z. Shou *Entanglement sudden death of two atoms interacting with a cavity via the two-photon process in a strong-driving-assisted system*. Chin Phys. B 18 4676 (2009)

- [24] O. Xi- Cheng, F. Mao-Fa, K. Guo-Dong, D. Xiao-Juan, H. Li-Yuan *Entanglement dynamics of a two-photon Jaynes-Cummings model with Kerr-like medium*. Chin. Phys. B 19 (2010)
- [25] W. Cui, Z. Xi, Y. Pan *The entanglement dynamics of bipartite quantum system: Towards entanglement sudden death*. J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009)41447
- [26] Z. Qiang, Z. Xiao-Ping, R. Zhong-Zhou. *Control of entanglement sudden death by Kerr medium*. Chinese Phys. B 17 3553 (2008)
- [27] M. Paternostro, M. S. Tame, G. M. Palma, M. S. Kim, *Entanglement generation and protection by detuning modulation* Phys. Rev. A 74, 052317 (2006)
- [28] Zhong-Xiao Man, Yun-Jie Xia, N. Ba An. *On conditions for atomic entanglement sudden death in cavity QED*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 41, 085503 (2008)
- [29] M. O. Scully, M. S. Zubairy **Quantum Optics**. Cambridge University Press, Cambridge (1997)
- [30] C. Cohen-Tanoudji, B. Diu, F. Laloe. Quantum Mechanics V.II. Collection Enseignement des Sciences. Paris (1998)
- [31] J. J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, New York (1994)
- [32] S. Gasiorowicz *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., New York (1986)
- [33] L. I. Schiff *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York (1949)
- [34] E. Schrödinger *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften 23 807-812; 823-828; 844-849 (1935)
- [35] W. Heisenberg *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*. Ann. Physik Volume 74 577-627 (1924)
- [36] W. Gerlach, O. Stern *Das magnetische Moment des Silberatoms*. Zeitschrift für Physik 9: 353–355 (1922)
- [37] D. F. Walls, G. J. Milburn *Quantum Optics*. John Willey and Sons, New York (1994)

- [38] W. Wolnei *Mecânica Quântica*. EDUEFG, Goiâniz (2005)
- [39] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*. Physical Review Letters 49 (2): 91–94 (1982)
- [40] D. C. Santos, *Em busca de um entendimento completo acerca do emaranhamento*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 95p. (2006)
- [41] P. J. dos Reis, *Emaranhando um qubit remoto com um par de Bell através da interação com um campo comprimido de dois modos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 104p. (2008)
- [42] E. Almeida, *Dinâmica de estados emaranhados de íons de dois níveis, modos vibracionais e fótons*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 164p. (2008)
- [43] B. L. S. Vicentin, *Concentração de emaranhamento de estados quânticos de dois qubits*. Monografia, Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, Brasil 56p. (2008)
- [44] E. Schimdt, *Math Ann* **63**, 433 (1907)
- [45] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*. Phys Rev Lett **77**, 1413 (1996)
- [46] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [47] P. Horodecki, *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition*, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997).
- [48] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Mixed-state entanglement and distillation: is there a “bound” entanglement in nature?*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5239 (1998).
- [49] M. B. Plenio e S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*. quant-ph/0504163 (2006).
- [50] G. Vidal *Entanglement monotones*, J. Mod. Opt. 47, 355 (2000).

- [51] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1955).
- [52] F. A. A. El-Orany, *Relationship between the linear entropy the von neumann entropy and the atomic wehrl entropy for the jaynes cummings model*. quant-ph/0705.4373 (2007).
- [53] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, and M. Lewenstein *Volume of the set of separable states*, Phys. Rev. A 58, 883-892 (1998).
- [54] Gilbert, George T. "Positive definite matrices and Sylvester's criterion", The American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America) 98 (1): 44-46(1991)
- [55] S. S. Sharma and N. K. Sharma, *Partial K-way Negativities of Pure Four-Qubit Entangled States* Phys. Rev. A 79, 062323(2009)
- [56] S. S. Sharma and N. K. Sharma *Four-Tangle for pure states*, Phys. Rev. A 82, 012340 (2010)
- [57] Jian-Song Zhang, Jing-Bo Xu *Controlling entanglement sudden death and birth in cavity QED* Opt. Commun. , vol. 282, no. 17, pp. 3652-3655 (2009)
- [58] S. Shelly Sharma, N. K. Sharma, and B. L. S. Vicentin. *Dynamics of Four-tangle and Pairwise Entanglement of Two Atoms Coupled to Cavity Field*. Latin America Optics and Photonics. OCIS codes: 270.0270, 270.5585