Universidade Estadual de Londrina

KEYLA CRISTINA BORGATO

O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS:

UMA ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Londrina
2013

KEYLA CRISTINA BORGATO

O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS:

UMA ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B732eBorgato, Keyla Cristina.
O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios : uma articulação entre álgebra e geometria / Keyla Cristina Borgato. – Londrina, 2013.
149 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual deLondrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Álgebra – Teses. 3. Geometria – Teses. 4. Polinômios – Teses. 5. Educação matemática – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.
CDU 51:37.02

KEYLA CRISTINA BORGATO

O ENSINO DE PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS:

UMA ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

____

Profª. Drª. Karina Alessandra Pessôa da Silva
UTFPR – Cornélio Procópio - PR

____

Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
UEL – Londrina - PR

Londrina, 06 de agosto de 2013.

A Deus,por ter me guiado em todos os momentos.
À minha família, meu bem mais precioso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por seu amor incondicional e por indicar o melhor caminho a seguir.

À professora Doutora Lourdes MariaWerle de Almeida, pela forma competente, sábia, acessível, rigorosa e ao mesmo tempo amável, como orientou a execução deste trabalho.

Às professoras Doutoras Karina Alessandra Pessôa da Silva e Michele de Oliveira Alves pela atenção e sugestões que permitiram o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT – pólo UEL (Londrina) que com suas condutas nos fizeram crescer, tanto profissional quanto pessoalmente.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos colegas do Programa de Mestrado da turma 2011. Penso sempre que a seleção realizada para o ingresso da turma 2011 não mediu apenas conhecimento matemático, mas também caráter, amizade e companheirismo. Já sinto muitas saudades.

Aos amigos de todas as horas, Ed, Fábio, Fernando e suas esposas. Muito obrigada pela paciência, força, carinho e, principalmente, muita risada. Sem vocês, não sei se teria chegado até aqui.

Aos alunos do 8ºano do Ensino Fundamental, “meus” alunos desde o 6º ano, que colaboraram com sua participação no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus colegas de trabalho e demais alunos pela colaboração, incentivo e paciência.

Aos meus pais, Cleide e Pedro, pelo apoio incondicional e orações constantes.

Aos meus irmãos,Kenya e Kerlys, por se alegrarem comigo em minhas conquistas.

Ao meu esposo Diego, pelo amor, companheirismo, incentivo, paciência e colaboração nesta fase das nossas vidas.

Aos meus grandes amores, minhas filhas Ana Clara e Maria Fernanda, que mesmo sofrendo bastante, entenderam que a mamãe precisava estudar e colaboraram além do esperado.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Um homem saiu de sua casae descia o morro.
Quando chegou a cerca de 300 metros da casa
ele parou,voltou-se e olhou sua casa.
Aí ele viu sua casa.
Chesterton

BORGATO, Keyla Cristina. **O Ensino de Produtos Notáveis e Fatoração de Polinômios: uma articulação entre Álgebra e Geometria**. 2013. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este estudo descreve uma sequência didática, analisando, mediante critérios da Engenharia Didática, como a utilização de representações geométricas de áreas de retângulos contribui para a apreensão do objeto matemático produtos notáveis e fatoração de polinômios.Nos capítulos iniciais apresentamos nossos objetivos, motivações e referenciais teóricos. Na sequência, propomos a sequência didática que foi aplicada a alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do interior de São Paulo. Seguimos com uma análise da aplicação realizada. O confronto realizado entre a análise a priori e análise a posteriori mostrou que o desenvolvimento da sequência didática proposta possibilitou aos estudantes, sujeitos desta pesquisa, avançar e compreender, a partir de um conceito matemático conhecido – área de retângulos,um novo conceito matemático - produtos notáveis e fatoração de polinômios.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Álgebra. Geometria. Engenharia Didática.

BORGATO, Keyla Cristina. **The Teaching of Notable Products and Polynomial Factorization: an articulation between Algebra and Geometry**. 2013. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This study describes a didactic sequence, analyzing, by criteria of Didactic Engineering, like the use of geometric representation of rectangle areas contribute to the understanding of the mathematical object notable products and polynomial factorization. In the early chapters we present our aims, motivations and theoretical references. Later, we propose the didactic sequence that was applied to 8^{th} grade students from the junior hight school in a public school in São Paulo state. We proceed with a review of the performed application. The confrontation made between the previous and the after analysis showed that the development of the didactic sequence enabled the students to advance and understand, from a known mathematical concept – rectangle area, a new mathematical concept - notable products and polynomial factorization.

Key words: Teaching-learning. Algebra.Geometry.Didactic Engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\neq$	Diferente
$=$	Idêntico
$>$	Maior que
$\geq$	Maior ou igual a
$<$	Menor que
$\leq$	Menor ou igual a
$\in$	Pertence
$\forall$	Qualquer que seja ou para todo
$\leftrightarrow$	Se e somente se
$\sum$	Somatório
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais.
SEE –SP	Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por que ensinar Matemática?Existe um consenso entre as pessoas, ligadas ou não à área da educação, com relação à necessidade do ensino de Matemática. Mas será que todas estas pessoas saberiam enumerar as razões desta necessidade?

Reflexões sobre estas questões são apresentadas em Dante (2007). O autor,ao analisar os pressupostos teóricos que embasam a nova maneira de ensinar Matemática, destaca que a Matemática é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. De acordo com estas ideias, apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a formação do futuro cidadão, que se engajará no mundo do trabalho, nas relações sociais, culturais e políticas.

AMatemática, com maior ou menor intensidade, está presente em muitas situações que nos rodeiam. Perceber isso é compreender o mundo à nossa volta e poder atuar nele. Por isso, essa possibilidade de compreensão e de atuação como cidadãodeve ser dada a todos, indistintamente.

Pensando na importância da Matemática para a formação e atuação de cada cidadão na sociedade, podemos citar Dante (2007, p. 11):

> Para exercer plenamente a cidadania, é preciso saber contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, construir estratégias, comprovar e justificar resultados, argumentar logicamente, conhecer formas geométricas, organizar, analisar e interpretar criticamente as informações, conhecer formas diferenciadas de abordar problemas.

Estas considerações sobre “porque ensinar Matemática” nos levam a refletir sobre outra questão: como ensinar Matemática?

Ao fazer uma leitura do *Currículo do Estado de São Paulo“Matemática e suas tecnologias”*(São Paulo, 2010),percebemos que em todas as épocas, em todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares, havendo um razoável consenso relativo ao fato de que sem o desenvolvimento adequado de tal eixo linguístico/lógico-matemático a formação pessoal não se completa.

Mas as maneiras para desenvolver adequadamente o eixo linguístico/lógico-matemático citado anteriormente, mudaram muito ao longo das décadas. Nos últimos quarenta anos, repercutiram intensamente no ensino de Matemática, alguns avanços tecnológicos e mudanças sociais. Paralelamente, ganhou força um movimento internacional em torno da Educação Matemática, que acabou provocando mudanças curriculares em diversos países, inclusive no Brasil.

Em nosso país, uma expressão oficial desse movimento foi a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que trouxeram não só as referências do movimento de Educação Matemática, como também uma nova visão das demais disciplinas e da Educação como um todo.

O perfil curricular delineado pelos PCN é mais adequado à nossa realidade, envolvendo conteúdos, métodos de ensino e avaliação em sintonia com os estudos e práticas gerados na Educação Matemática. Consideraremos o que diz os Parâmetros Curriculares Nacionais – Introdução (1998, p. 60) sobre o ensino de Matemática.

> [...] se faz necessário desenvolver um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem.

Segundo este documento, o ensino-aprendizagem de Matemática deve possuir cinco características principais, a saber: ser construtivista, reconhecendo que a participação ativa dos alunos é essencial para que se atinja o conhecimento; buscar abordagens significativas dos conteúdos; ter a resolução de problemas como eixo, ou seja, usar esse método como meio para implementar sua proposta; organizar os conteúdos em espiral e com várias conexões; favorecer o uso das modernas tecnologias como recursos que favorecem a aprendizagem.

Podemos dizer que os estudos de Educação Matemática levaram a conceber novas propostas de ensino, que colocaram o aluno no centro do processo educativo, assumindo papel ativo na construção do seu conhecimento.

Segundo a pesquisadora D'Ambrósio (1989) essas novas propostas de ensino devem contemplar a resolução de problemas, normalmente propostos antes da teoria; a modelagem, partindo de situações motivadoras da realidade; as abordagens etnomatemáticas, valorizando a Matemática de diferentes grupos culturais ao explorar o universo de interesses e conhecimentos extraescolares dos alunos; abordagens históricas; uso de jogos e uso de computadores e tecnologias afins.

Este cenário de propostas metodológicas configura para o professor uma nova dimensão, passando a ser um mediador entre o conhecimento e o aluno, deixando de ser apenas um transmissor de informações. O professor deve agir como um facilitador, incentivador e avaliador tanto da aprendizagem como do ensino.

Cabe ao professor optar por situações que favoreçam a construção de conceitos e procedimentos, com base nos objetivos que se quer alcançar. Nestas situações, ele não expõe todo o conteúdo para o aluno, mas fornece as informações que dificilmente ele teria condições de obter sozinho, oferecendo as ferramentas necessárias para a construção do conhecimento; promove debates e reformulações; valoriza as soluções mais adequadas; estimula o trabalho coletivo entre os alunos; oportuniza a argumentação de ideias.

Estas considerações sobre o “por que” e o “como” ensinar Matemática, em certa medida, orientam nossas argumentações sobre um tópico do ensino de Matemática – o ensino de Álgebra.

Nossa experiênciacomo educadoras nos leva a crer que, na maioria dos casos, teoria e prática caminham em direções opostas. Sabemos que a Álgebra é uma poderosa ferramenta para resolver problemas e que está relacionada com diversas áreas do conhecimento.Desta forma, seu ensino não deveria se limitar aos cálculos de expressões algébricas descontextualizadas. Mas, mesmo assim, temos acesso a informações sobre as dificuldades que alunos e professores continuam enfrentando no ensino e na aprendizagem da Álgebra.

O pesquisador americano James Fey, resume estas dificuldades da seguinte maneira:

> Na Matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis enquanto nomes literais para números desconhecidos e com equações e inequações que impõem condições nestes números. O ensino de Álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis (FEY, 1990 apud MEIRA, 2013, p. 38 e 39).

Embora esse relato seja de 1990, acreditamos que continue sendo uma representação da realidade das nossas escolas na atualidade. Trabalhando há vários anos como professora do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, da rede particular e pública, percebemos que para os alunos, estudar Álgebra é considerado algo difícil e distante da realidade que os cerca.

De fato, é possível relacionar as dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem da Álgebra com um ensino que privilegia apenas procedimentos e regras, limitando a capacidade dos estudantes de compreender os conceitos, as representações e as atividades que são importantes neste domínio do conhecimento.

A experiência proporcionada por décadas dessa prática tem mostrado que, para a maioria dos alunos, não há aprendizado. No máximo, os estudantes mecanizam os procedimentos, ou seja, as técnicas de cálculo. Mas, mesmo assim, os resultados são muito insatisfatórios. Isto porque, quase sempre, boa parte destas habilidades desenvolvidas, "desaparece" após o término do ano letivo.

Segundo Imenes e Lellis (2009), estudos e práticas em Educação Matemática têm sinalizado que, em boa medida, esse fracasso pode ser atribuído ao fato de a maioria dos estudantes de 12 ou 13 anos não ver sentido algum nesses cálculos algébricos. Ou seja, para esses estudantes, a Álgebra carece de sentido[1].

Durante todos estes anos procuramos nos adequar ao novo modelo de ensino e romper com o paradigma de ensinar conforme fomos ensinados. Qual seria, então, uma forma de contribuir para o ensino e aprendizagem da Álgebra?

Ao ingressar no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), iniciamos um processo de reflexão sobre nossa prática docente. Sabíamos que nossa formação seria aprofundada e, ao mesmo tempo, articulada com o exercício da docência no Ensino Básico.

Lembramos que este programa visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente.

---

[1] Sentido, neste contexto, caracteriza-se como identificado na teoria de Vygostky.

Foram justamente estas inquietações e motivações que nos levaram àescolha do tema desta dissertação. Resolvemos fazer um recorte no assunto que nos inspirava – o ensino da Álgebra – e optamos por nos aprofundar no ensino e aprendizagem dos produtos notáveis e fatoração de polinômios. Afinal, estes conceitos são base para os estudos posteriores, inclusive em outros campos matemáticos além da Álgebra, assim como tem destaque em outras áreas do conhecimento como Física e Química.

Resolvemos utilizar uma ideia Matemática - a de área, para avançar na compreensão de outras ideias matemáticas - produtos notáveis e fatoração. Percebemos, pelas nossas pesquisas, que este método era utilizado desde a antiguidade na resolução de problemas que envolviam produtos entre polinômios.

Ao analisarmos os livros didáticos utilizados em escolas do Estado de São Paulo, a saber: Matemática – projeto Araribá – obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna (LEONARDO, 2010); Matemática, Imenes& Lellis (IMENES, LELLIS, 2009) e Vontade de Saber Matemática (SOUZA, PATARO, 2012), assim como o material sugerido pela SEE (Secretaria de Estado da Educação de São Paulo) para o ensino de Matemática – caderno do Professor e caderno do Aluno, percebemoso enfoque dado às representações geométricas no ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios.

Sendo assim, elaboramos e desenvolvemos uma sequência didática, baseada nos princípios da Engenharia Didática, abordando os conceitos de produtos notáveis e fatoração de polinômios por meio de atividades que levem em consideração esta forma de ensinar, isto é, através de representações geométricas de áreas de retângulos.

Objetivo da Pesquisa

Considerando este encaminhamento resolvemos investigar o papel das representações geométricas no processo de aprendizagem dos produtos notáveis e fatoração de polinômios. Para subsidiar nossas argumentações, foi elaborada uma sequência didática que foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Nossas análises seguiram os critérios da Engenharia Didática.

Estrutura do Trabalho

No presente capítulo que é a Introdução, apresentamos a problemática que envolve esta pesquisa, o tema propriamente dito, nossos objetivos, motivações e justificativas para a realização deste trabalho; apresentamos a seguir mais seis capítulos.

No capítulo 1 tratamos de parte do nosso referencial teórico abordando o conceito de polinômios, sua historicidade, definição, características, operações, culminando com os casos de produtos notáveis e suas respectivas fatorações. No capítulo 2, abordamos a outra parte do nosso referencial teórico que diz respeito à articulação entre Álgebra e Geometria, mostrando evidências históricas desta articulação, assim como suas vantagens para o processo de ensino-aprendizagem do tema proposto. No capítulo 3, descrevemos nossa opção metodológica – Metodologia da Engenharia Didática – proposta por Artigue (1996). No capítulo 4, apresentamos a sequência didática por nós elaborada e aplicada a uma sala de 8º ano do Ensino Fundamental, na qual privilegiamos o conceito produtos notáveis e fatoração de polinômios por meio de representações geométricas. No capítulo 5, relatamos o desenvolvimento da sequência didática, detalhando a experimentação, as análises a priori, a posteriori e a validação. Apresentamos também uma análise global. No capítulo 6, constam nossas considerações finais seguidas das referências bibliográficas citadas no decorrer do texto.

CAPÍTULO 1
POLINÔMIOS

Neste capítulo, iniciamos apresentando o contexto histórico relativo ao estudo dos Polinômios, lembrando que “A matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos...” (BRASIL, 1998a, p. 59). Na sequência, apresentamos um estudo mais formal dos Polinômios, suas propriedades e operações, enfatizando alguns casos de produtos (produtos notáveis), assim como suas respectivas fatorações – objetos desse trabalho. Achamos pertinente apresentar estes dois aspectos, contexto histórico e estudo formal, pois o foco deste estudo é justamente o ensino e a aprendizagem do conteúdo em questão.

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

O estudo de polinômios e equações polinomiais, tal como uma necessidade, data de épocas muito remotas. Indícios arqueológicos sugerem que os babilônicos (1950 a. C. a 1200 a. C.) já tinham o domínio de técnicas para resolução de equações do primeiro e segundo graus, associadas a problemas do cotidiano. Porém, de acordo com Oliveira e Fernández (2010), o estudo das equações polinomiais teve um grande avanço conforme surgia o Renascimento na Europa. Segundo estes autores, data do século XVI e deve-se a François Vièti(1540 – 1603), matemático francês que ficou conhecido como o pai da Álgebra, a introdução do uso de letras para representar quantidades desconhecidas.

Estudos históricos mostram que nesta mesma época, um grande desafio tomava conta e perturbava as mentes matemáticas da Europa – resolver explicitamente uma equação do terceiro grau utilizando operações elementares (soma, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação). De acordo com Oliveira e Fernández (2010), embora a história da solução dessas equações seja repleta de disputas e acusações, os historiadores devem a Tartaglia (gago, em italiano) –

Nicolo Fontana (1500 - 1557) - o mérito na descoberta da solução da equação do terceiro grau como a conhecemos hoje.

Segundo estudos de Lisboa (2007), no decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de outros grandes matemáticos como Ludovico Ferrari(1522-1560) e Isaac Newton (1642-1727),dentre muitos outros. Parte muito interessante dessa história envolve as equações polinomiais de 4º grau. Antigamente eram comuns disputas entre os matemáticos da época, nas quais se trocavam desafios.

De acordo com Lisboa (2007), numa dessas ocasiões Gregori Cardano(1501 - 1576) - grande “escritor” de Matemática da época - foi desafiado a resolver uma questão que envolvia a equação $x^4 + 6x^2 – 60x + 36 = 0$. Após várias tentativas e nenhuma solução, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que encontrou o método geral para a solução das equações de 4º grau. Segundo a autora, esse método foi publicado por Cardano no maior compendio algébrico (matemático) da época, *Ars Magna*.

Oliveira e Fernández (2010) enfatizam que muitos esforços foram também realizados a fim de se encontrar a solução geral para a equação do quinto grau, mas foi só em 1824 que Niels Abel (1802 - 1829) – um matemático norueguês – mostrou ser impossível resolver equações de grau cinco em sua forma geral. Apenas anos mais tarde, em 1830, o francês EvaristeGalois (1811 - 1832) propôs um método que determinava quando uma equação de grau qualquer teria solução por meio de operações elementares, encerrando mais um capítulo da história das equações polinomiais e da Matemática.

Atualmente, no âmbito do Ensino Fundamental, o estudo de polinômios e/ou equações polinomiais é introduzido de maneira mais formal a partir do 8º ano (7ª série) com ênfase em operações e fatorações polinomiais, sendo esse o tema que trataremos nessa dissertação.

1.2 Definição de Polinômio

Para Oliveira e Fernández (2010), um polinômio na variável x é uma expressão algébrica do tipo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, (1)$$

Onde $a_0, a_1, \dots, a_n$ são números reais[2]. Para $a_n \neq 0$, dizemos que n é o grau do polinômio e $a_0, a_1, \dots, a_n$ são seus coeficientes e, neste caso, o coeficiente a_n é chamado de coeficiente líder do polinômio. As parcelas a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, …, a_1x, a_0 são chamadas termos do polinômio $p(x)$ e x^n, x^{n-1}, ..., x são suas partes literais.

Um polinômio nulo é aquele que tem todos os coeficientes iguais a zero e não se define o grau deste polinômio.

Para auxiliarna compreensão de algumas denominações que utilizamos em nosso trabalho, vamos definir os termos monômios, binômios e trinômios.

Segundo Ribeiro (2010, p. 133) "Monômio é toda expressão algébrica formada por um único termo. Esse termo pode ser constituído por um número apenas ou pelo produto de um número por uma ou mais variáveis, que apresentam somente expoentes naturais".

O autor também define o termo "polinômios" de uma forma diferente e faz algumas distinções. Para ele "Polinômio é uma adição algébrica de monômios. Cada monômio que o compõe é chamado de termo do polinômio. De acordo com a quantidade de termos, cada polinômio recebe um nome especial". (RIBEIRO, 2010, p. 140).

Desta forma, podemos dizer que um binômio é um polinômio que possui dois termos; assim como um polinômio de três termos é denominado trinômio; já as expressões algébricas com quatro ou mais termos são chamadas polinômios. Os monômios também são um tipo de polinômio, porém, com um único termo.

Exemplos:

- $p(x) = 3x - 1$ é um binômio de grau 1;
- $q(x) = 4x^3 + 7x + 2$ é um trinômio de grau 3;
- $s(x) = \frac{\pi}{2}x^4$ é um monômio de grau 4;
- $v(x) = 7$ é um monômio de grau 0;
- $r(x) = y^5 - 2y^3 + y^2 + y + 1$ é um polinômio de grau 5.

1.3 Equações Polinomiais

[2] Neste trabalho consideraremos apenas polinômios cujos coeficientes são números reais.

Uma equação polinomial de grau n é uma sentença $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais, tal como definimos em (1).Exemplos:

- $3x - 8 = 0$ é uma equação do primeiro grau;
- $-x^5 + 4x^3 - 3x + 7 = 0$ é uma equação de grau 5.

De acordo com Oliveira e Fernández (2010), nem todos os coeficientes de um polinômio de grau n precisam ser diferentes de zero, neste caso o polinômio é denominado incompleto. Assim, $p(x) = 3x - 8$é denominado completo e$p(x) = -x^5 + 4x^3 - 3x + 7$ é denominado incompleto.

1.4 Valor Numérico de um Polinômio

Para obtermos o valor do polinômio $p(x)=a_nx^n+ a_{n-1} x^{n-1}+ \dots +a_1x + a_0$no número real r, devemos substituir x por r a fim de obter o número real

$$p(r) = a_n r^n+ a_{n-1} r^{n-1}+ \dots + a_1r + a_0$$

Por exemplo, o valor do polinômio $p(x) = 4x^3 - 7x+ 1$ em 2 é dado por

$$p(2) = 4.2^3 - 7.2 + 1 = 32 - 14 +1 = 19$$

1.5 Raiz de uma Equação Polinomial

Um número real r é uma raiz para a equação polinomial

$$a_nx^n+ a_{n-1} x^{n-1}+ \dots + a_1x + a_0= 0$$

se o valor de $p(x) =a_nx^n+ a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$em r é zero, isto é, se r verifica

$$a_nr^n+ a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

Por exemplo, o número 5 é uma raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 7x + 10$, pois ao determinamos o valor numérico deste polinômio para $x = 5$, encontramos $p(x) = 0$. Vejamos: $p(5) = 5^2 - 7.5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$

1.6 IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

Segundo Silva e Barreto (2005), considerando dois polinômios p(x) e q(x), dizemos que esses polinômios são idênticos se, e somente se, os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Assim, sejam

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2\,x^2 + ... + a_nx^n$ e

$q(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + ... + b_nx^n$,

Se $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_n = b_n$, então $p(x) \equiv q(x)$, ou seja, $p(x)$ e $q(x)$ são idênticos.

Os autores definem ainda: “sendo os dois polinômios idênticos, para qualquer valor de x eles assumem o mesmo valor numérico” (SILVA E BARRETO, 2005, p. 184), ou seja,

$$p(x) \equiv q(x) \leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

Podemos ainda, segundo Dante (2011), dizer que para que isso aconteça a diferença $p(x) - q(x)$ deve ser o polinômio identicamente nulo, isto é, $p(x) - q(x) \equiv 0$.

1.7 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Trataremosdas operações de soma e de multiplicação de polinômios usando definições apresentadas em Oliveira e Fernández (2010) e em Iezzi (2005).

1.7.1 Soma de Dois Polinômios

Dados os polinômios

$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + ... + a_nx^n$ e

$q(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + ... + b_mx^m$

Sendo $n \leq m$, para somar o polinômio $p(x)$ com o polinômio $q(x)$ devemos somar todos os monômios de mesmo grau que compõem os polinômios (também chamados de termos dos polinômios), de forma a obter o polinômio

$t(x) = p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_m x^m$

onde, $c_i = a_i + b_i$, para $0 \leq i \leq n$ e $c_i = b_i$ para $i > n$

Isso ocorre porque quando somamos dois monômios de mesmo grau $r(x) = a_s x^s$ e $s(x) = b_s x^s$, adicionamosseus coeficientes, obtendo o polinômio

$t(x) = p(x) + q(x) = (a_s + b_s)x^s$.

Exemplo: Somar $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

Podemos reescrever cada polinômio anterior da seguinte maneira:

$f(x) = 0x^4 + 0x^3 + x^2 + 3x + 4$

$g(x) = x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 5$

Então:

$(f + g)(x) = (0 + 1)x^4 + (0 + 0)x^3 + (1 + 3)x^2 + (3 + 0)x + (4 + 5)$

$= 1x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 3x + 9$

$= x^4 + 4x^2 + 3x + 9$

Na sequência, vamos enumeraralgumas propriedades da soma de polinômios, de acordo com Oliveira e Fernández (2010):

1) Associatividade: Dados os polinômios, $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$, vale

$$(p(x) + q(x)) + t(x) = p(x) + (q(x) + t(x))$$

2) Elemento neutro: Se denotarmos por zero (0) o polinômio nulo e por $p(x)$ um polinômio qualquer, então

$$0 + p(x) = p(x).$$

3) Elemento simétrico: se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ é um polinômio, então o polinômio $q(x) = - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_n x^n$ satisfaz:

$$p(x) + q(x) = 0$$

4) Comutatividade: Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

1.7.2 Produto de Dois Polinômios

Dadosdois polinômios

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + ... + a_nx^n$ e

$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_mx^m$,

Sendo$p(x)$ de grau ne $q(x)$ de grau m, com $n \leq m$, para efetuarmos o produto entre $p(x)$ e $q(x)$devemos completar a escrita de $p(x)$ e de $q(x)$ até o termo $n + m$ colocando $a_s = 0$ para $s>n$ e $b_s = 0$ para $s >m$.

Define-se o produto $p(x).q(x) = t(\text{x})$ como

$$t(\text{x}) = p(x).q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n+m}x^{n+m} (2)$$

onde,

$$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0 \text{ para } 0 \leq i \leq n+m$$

Podemos também dizer que obtemos o resultado do produto entre $p(x)$ e $q(x)$, multiplicando cada termo $a_i\ x^i$ de $p(x)$ por cada termo $b_i\ x^i$ de $q(x)$, segundo a regra:

“Se n,m são números naturais, o produto dos monômios $p(x) = a_nx^n$ e $q(x) = b_mx^m$ é definido como$p(x)q(x) = a_nb_mx^{n+m}$” (OLIVEIRA E FERNÁNDEZ, 2010, p. 257).

Isto que dizer que, de forma geral, para se obter o produto de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ que são formados por dois grupos de monômios, devemos fazer a multiplicação de cada monômio de $p(x)$ por cada um dos monômios de $q(x)$, somar os monômios obtidos aos monômios anteriores e repetir o processo até o último monômio de p(x).

Exemplos:

1) Multiplicação de monômio por monômio

$$7x^4y \,.\, 3xy^2 = (7.3).(x^4.y.x.y^2) = 21x^5y^3$$

De forma geral, calculamos o produto dos coeficientes e o das partes literais. Este último, utilizando a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, ou seja, conservamos a base e somamos os expoentes.

2) Multiplicação de monômio por polinômio

$$11x^2.(2x + 1) = 11x^2.2x + 11x^2.1 = 22x^3 + 11x^2$$

De forma geral, o monômio foi multiplicado por cada termo do polinômio, conforme visto anteriormente e utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

3) Multiplicação de polinômio por polinômio

$$(3x + 2y)(y + 4x - 8) = (3x.y + (3x).(4x) - (3x).8) + (2y.y + (2y).(4x) - (2y).8)$$
$$= 3xy + 12x^2 - 24x + 2y^2 + 8xy - 16y$$
$$= 12x^2 + 2y^2 + 11xy - 24x - 16y$$

De forma geral, todos os termos (monômios) do primeiro polinômio são multiplicados por cada termo do segundo polinômio, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ao final, os termos semelhantes são agrupados.

Proposição 1

Se o polinômio p(x) tem grau n e o polinômio q(x) tem grau m, então o polinômio $(p(x)).(q(x))$ *tem grau* $(m+n)$.

Demonstração:

De acordo com a definição citada em (2), temos que o coeficiente $c_0 = a_0b_0$. Da mesma forma, o coeficiente do termo x^{n+m} é $c_{n+m} = a_nb_m$. Como $p(x)$ tem grau n (ou seja, $a_n \neq 0$) e $q(x)$ tem grau m (ou seja, $b_m \neq 0$), o coeficiente $c_{n+m} = a_nb_m \neq 0$. Sendo assim, o polinômio$(p(x)).(q(x))$ *tem grau* $(m+n)$.

Propriedades do produto entre dois polinômios:

1) Associatividade: Dados polinômios $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$, vale

$$(p(x).q(x))t(x) = p(x)(q(x).t(x))$$

2) Elemento Neutro: Sendo o polinômio constante$q(x) = 1$ e sendo $p(x)$ um polinômio qualquer, então:

$$q(x).p(x) = 1.\ p(x) = p(x)$$

3) Comutatividade: Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, então:

$$p(x).q(x) = q(x).p(x)$$

4) Distributividade: Se $p(x)$, $q(x)$ e $t(x)$ são polinômios, então:

$$(p(x) + q(x))t(x) = q(x).t(x) + p(x).t(x)$$

De acordo com os fatos apresentados anteriormente, podemos chegar a uma conclusão interessante sobre inversos multiplicativos que é: a propriedade de existência de elementos inversos para a multiplicação de polinômios não vale.

De fato, podemos verificar que se $p(x)$ é um polinômio de grau n maior ou igual a um, então não existe um polinômio $q(x)$ tal que $p(x)q(x) = 1$.

Suponhamos que exista $q(x)$, um polinômio com grau $m \geq 0$ tal que $p(x).q(x) = 1$.

De acordo com a Proposição 1, temos que o grau de $p(x).q(x)$ é $(m+n)$ que é maior ou igual que um. Como o grau do polinômio constante 1 é zero, temos que a igualdade acima não pode valer, chegando então a um absurdo.

Resumindo, os únicos polinômios que podem ter inversos multiplicativos são os polinômios constantes não nulos.

1.8 Produtos de Polinômios Notáveis ou Produtos Notáveis

Segundo Imenes e Lellis (2009), os produtos notáveis podem ser definidos como alguns produtos entre polinômios que aparecem com muita frequência em cálculos algébricos (na dedução de fórmulas, na resolução de equações, etc.) e, por isso, os resultados desses produtos são chamados produtos notáveis.

Considerando nosso interesse neste trabalho em tratar de produtos notáveis com alunos do Ensino Fundamental, abordamos os conteúdos conforme constam em livros didáticos deste nível de escolaridade.

1.8.1 Quadrado da Soma Entre Dois Termos

Segundo Imenes e Lellis (2009), o quadrado da soma entre dois termos tem como forma geral $(a + b)^2$.

Utilizando a definição de potenciação e de produto entre dois polinômios, podemos escrever:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O produto notável obtido $a^2 + 2ab + b^2$ é chamado trinômio quadrado perfeito.

Tendo o objetivo de facilitar a compreensão por parte do aluno, Ribeiro (2010, p.148), ressalta que o resultado encontrado acima pode ser escrito como "*o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.*"

Vamos destacar alguns exemplos, mostrando a praticidade da escrita acima:

- $(x + 1)^2 = x^2 + 2.x.1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(2y + 5w)^2 = (2y)^2 + 2.2y.5w + (5w)^2 = 4y^2 + 20wy + 25w^2$

1.8.2 Quadrado da Diferença Entre Dois Termos

De acordo com Imenes e Lellis (2009) o quadrado da diferença entre dois termos é uma expressão do tipo $(a - b)^2$.

Utilizando a definição de potenciação e de produto entre dois polinômios, podemos escrever:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

O produto notável obtido $a^2 - 2ab + b^2$ também é denominado trinômio quadrado perfeito.

Segundo Ribeiro (2010, p. 150), podemos representar o resultado encontrado como "*o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.*"

Para mostrar a praticidade do exposto anteriormente, resolvemos alguns exemplos:

- $(2x - y)^2 = (2x)^2 - 2.2x.y + y^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$
- $(3 - 4a)^2 = 3^2 - 2.3.4a + (4a)^2 = 9 - 24a + 16a^2$

1.8.3 Produto da Soma pela Diferença Entre Dois Termos

O produto da soma pela diferença entre dois termos é o nome dado à expressão do tipo$(a + b)(a - b)$ (IMENES; LELLIS, 2009).

De acordo com o conceito de produto entre dois polinômios, podemos escrever:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

O produto notável obtido $a^2 - b^2$é chamado diferença de dois quadrados.

De acordo com Ribeiro (2010, p.152), o resultado anterior pode ser resumido como "*o produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo.*"

Vejamos alguns exemplos:

- $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$
- $(3a + 2b)(3a - 2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

1.8.4 Cubo da Soma Entre Dois Termos

O cubo da soma de dois termos tem como forma geral $(a + b)^3$(Dante, 2007).

Usando a definição e propriedades do produto de polinômios, podemos escrever:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$
$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Segundo Dante (2007, p. 103), uma forma simples de "memorizar" o valor dessa soma é: "*o cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo termo."*

1.8.5 Cubo da Diferença Entre Dois Termos

O cubo da soma de dois termos, segundo Dante (2007), é uma expressão do tipo $(a - b)^3$.

Usando a definição e propriedades do produto de polinômios, assim como a resolução de quadrado da diferença entre dois termos, podemos escrever:

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$$
$$= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Para o autor, podemos "memorizar" o valor dessa diferença,reescrevendo-a como"*o cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro termo pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro termo pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo termo.*

Dando sequência ao nosso trabalho no campo da Álgebra, mas com enfoque no tema "Contagem", temos uma forma que generaliza alguns dos produtos notáveis vistos anteriormente. Esta generalização é conhecida como o *binômio de Newton* ou *fórmula binomial de Newton*, devido ao Matemático Isaac Newton (1642 – 1727).

1.9 TRIÂNGULO DE PASCAL, BINÔMIO DE NEWTON E OS PRODUTOS NOTÁVEIS

Para tratar das definições de triângulo de Pascal, Binômio de Newton, assim como suas relações com o tema produtos notáveis, retomamos alguns desses conceitos com base nas definições apresentadas por Oliveira e Fernández (2010) e por Schor e Tizziotti (1975).

1.9.1 Retomando Alguns Conceitos

- Fatorial

Dado um número natural qualquer *n*, sendo *n*>1, define-se fatorial de *n* e indica-se por *n*!,como sendo

$$n! = n.(n-1).(n-2).....(n-(n-1)).$$

Exemplo 5! = (5).(5 – 1).(5 – 2).(5 – 3).(5 – 4) = 5. 4. 3. 2. 1 = 120

Nos casos particulares *n* =1 e *n* = 0 define-se 1!=1 e 0!= 1, por convenção.

- Número Binomial

Dados dois números naturais *n* e *p*, com 0 ≤ *p* ≤ *n*, o número binomial de ordem *n* e classe *p*, $\binom{n}{p}$,dado por $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ é a combinação de *n* elementos tomados *p* a *p*, com $n \in \mathbf{N}$, 0 ≤ *p* ≤ *n*.

1.9.2 Triângulo de Pascal

Segundo relatos históricos, Pascal (1623-1662), um dos inspiradores da moderna teoria das probabilidades, foi o descobridor de algumas propriedades desse triângulo de números que representa um dispositivo prático para calcular os coeficientes de alguns binômios.

O triângulo de Pascal é um triângulo numérico infinito formado por coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$, onde *n* representa o número da posição vertical (linha) e *p*representa o número da posição horizontal (coluna)do triângulo.

A construção do triângulo se faz de forma que cada elemento do triângulo de Pascal é igual à soma dos elementos imediatamente acima e à direita com o elemento imediatamente acima e à esquerda. O elemento da primeira linha e primeira coluna é 1.

Sendo assim, temos as seguintes representações:

Figura 1 - Números Binomiais e o Triângulo de Pascal

p \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Fonte: Schor e Tizziotti (1975, p. 46)

Figura 2 - O Triângulo de Pascal

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Fonte: Schor e Tizziotti (1975, p. 46)

Schor e Tizziotti, (1975) destacam algumas propriedades do triângulo de Pascal da Figura 2.

Propriedade 1: Em cada linha, os termos equidistantes são iguais.

Para verificar essa propriedade, basta considerarmos uma das linhas no triângulo da Figura 1, como por exemplo a sexta linha, formada pelos números

$\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$, nessa ordem. É possível verificar os pares de números equidistantes 1, 1; 5,5; 10,10.

De fato, para cada *n*, *p* com $0 \leq p \leq n$, temos $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Demonstração:

Temos que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Já $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Portanto, $\binom{n}{n \quad p} = \binom{n}{p}$

Propriedade 2: Adicionando dois elementos consecutivos da mesma linha do triângulo de Pascal, encontramos o elemento imediatamente abaixo da parcela da direita.

Para verificar essa propriedade, vamos considerar duas linhas do triângulo de Pascalda Figura 1, a sexta e sétima linhas que são formadas pelos números

6ª linha : $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$

7ª linha : $\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{6}{3} = 20$, $\binom{6}{4} = 15$, $\binom{6}{5} = 6$, $\binom{6}{6} = 1$

Podemos observar que na sétima linha cada um dos números compreendidos entre os números 1 (do início e fim da linha) são o resultado da soma de cada número da linha anterior com seu consecutivo: 1+5, 5+10, 10+10, 10+5, 5+1.

De fato: $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

Esta igualdade corresponde à Relação de Stiffel que demonstraremos a seguir.

Temos que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\binom{n}{p-1} = n!/((p-1)!\,((n-(p-1))!) = \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!}$

Logo, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!} = \frac{n!}{p(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)(n-p)!} =$

$= \frac{n!\,(n-p+1) + n!\,p}{p(p-1)!\,(n-p+1)(n-p)!} = \frac{n!\,(n-p+1+p)}{p(p-1)!\,(n-p+1)(n-p)!} = \frac{n!\,(n+1)}{p!\,(n-p+1)!}$

Por outro lado, $\binom{n+1}{p} = \frac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!} = \frac{(n+1)n!}{p!\,(n+1-p)!}$

Então, $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

Propriedade 3: A soma dos elementos de uma linha qualquer do triângulo de Pascal é 2^n.

Consideremos as primeiras linhas do triângulo de Pascal e somemos seus elementos, escrevendo o resultado como uma potência de base 2.

1ª linha : $1 = 2^0$

2ª linha : $1 + 1 = 2 = 2^1$

3ª linha : $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

4ª linha : $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Ou seja

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Podemos mostrar essa igualdade utilizando o princípio da indução finita.

De fato:

Para $n = 1$ temos,

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

Também temos que $2^1 = 2$

Logo, para $n = 1$, vale $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 2^n$

Sendo a igualdade $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ verdadeira para $n = 1$, vamos supor sua validade para $n = k > 1$, $k \subset \mathbb{N}$ e mostrar que ela será verdadeira para$n = k + 1$.

Primeiro consideremos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad (3)$$

Logo, devemos mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$$

Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1}$$

Já que $\binom{n+1}{0}$ pode ser substituído por $\binom{n}{0}$, pois $\binom{n+1}{0} = 1$ e $\binom{n}{0} = 1$; assim como $\binom{n+1}{n+1}$ pode ser substituído por $\binom{n}{n}$,pois $\binom{n+1}{n+1} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1$; após fazermos essas substituições e utilizarmos a Relação de Stiffel nessa igualdade obtemos,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{n}$$

Substituindo (3) nessa igualdade encontramos

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{n} = 2^n + 2^n = 2^n\,(1+1) = 2^n.2 = 2^{n+1}$$

Sendo assim, mostramos que a igualdade

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$ é válida para qualquer n natural.

Desta forma, podemos utilizar esses resultados para efetuar o cálculo de alguns produtos binomiais, inclusive no cálculo de alguns dos produtos notáveis já mencionados nesse trabalho. Essa aplicação será mostrada a seguir.

1.9.3 Fórmula do Binômio de Newton

Segundo Schor eTizziotti (1975, p. 49, 50 e 51), dados$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Demonstração

A demonstração dessa igualdade pode ser realizada usando o princípio da indução finita.

De fato:

Para $n = 0$ temos,

$$(a+b)^0 = 1$$

Também

$$\binom{0}{0}a^0 b^0 = 1.1.1 = 1$$

Logo, para $n = 0$, vale $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0$, ou seja, $(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 b^0$

Para $n = 1$, temos:

$$(a+b)^1 = a + b$$

Também

$$\binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 = 1.a.1 + 1.1.b = a + b$$

Logo, para n = 1, vale $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1$, ou seja,

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1$$

Supomos então que a fórmula é verdadeira para $n = k > 1$, ou seja,que

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

Mostramos que será verdadeira para $n = k + 1$

Consideremos

$$(a + b)^k = \binom{k}{0}a^kb^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k$$

Multiplicando os dois membros da igualdade por $(a + b)$, encontramos:

$$(a + b).(a + b)^k = (a + b)\ \left(\binom{k}{0}a^kb^0 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \ldots + \binom{k}{k}a^0b^k\right)$$

$$(a + b)^{k+1} = \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{0}}\boldsymbol{a^{k+1}b^0} + \binom{k}{1}a^kb^1 + \ldots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}a^1b^k + \binom{k}{0}a^kb^1 + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}a^1b^k + \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{k}}\boldsymbol{a^0b^{k+1}}$$

Agrupando os termos dois a dois (exceto o primeiro e o último termo), podemos escrever

$$(a + b)^{k+1} = \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{0}}\boldsymbol{a^{k+1}b^0} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^kb^1 + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]a^1b^k + \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{k}}\boldsymbol{a^0b^{k+1}}$$

No entanto, temos que:

- $\binom{k}{0}$ pode ser trocado por $\binom{k+1}{0}$, pois $\binom{k}{0} = 1$ e $\binom{k+1}{0} = 1$

• $\binom{k}{k}$ pode ser trocado por $\binom{k+1}{k+1}$, pois $\binom{k}{k} = 1$ e $\binom{k+1}{k+1} = 1$

●Relação de Stiffel $\begin{cases} \binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1} \ldots \\ \ldots \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k} \end{cases}$

Desta forma:

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1}b^0 + \binom{k+1}{1}a^k b^1 + \ldots + \binom{k+1}{k}a^1 b^k + \binom{k+1}{k+1}a^0 b^{k+1}$$

O que demonstra que a igualdade

$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$. É válida para qualquer n natural.

De acordo com Schor e Tizziotti (1975), podemos fazer as seguintes observações:

● Os números $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ... , $\binom{n}{n}$ são os números de uma linha do triângulo de Pascal, portanto os eqüidistantes dos extremos são iguais;

● Os expoentes de **a** decrescem de ***n*** a **0** e os expoentes de ***b*** crescem de **0** a ***n***;

● Em cada termo, o expoente de ***b*** é igual à classe do número binomial;

● Em cada termo, a soma dos expoentes de ***a*** e ***b*** valem ***n***;

● A ordem de cada termo é uma unidade maior que o expoente de ***b***;

● O desenvolvimento de $(a + b)^n$ tem **(*n*+1)** termos.

1.9.4 Termo Geral do Binômio de Newton

Definindo, com base em Schor e Tizziotti, (1975, p. 54 e 55)

Se representarmos o binômio de Newton por $(a + b)^n$ e considerarmos T_{k+1} seu termo geral, para $0 \leq k \leq n$, temos

Termo geral de $(a + b)^n$ édado por $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Empregando o símbolo de somatória, a fórmula do binômio de Newton pode ser escrita como

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Aplicando esse conceito aos produtos notáveis já citados, podemos escrever:

● $(a + b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$

$= 1.a^2.1 + 2.a.b + 1.1.b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

● $(a - b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 - \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2$

$= 1.a^2.1 - 2.a.b + 1.1.b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

● $(a + b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$

$= 1.a^3.1 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + 1.1.b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

● $(a - b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 - \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 - \binom{3}{3}a^0b^3$

$= 1.a^3.1 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - 1.1.b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Pela observação das regularidades, podemos afirmar que no desenvolvimento de$(a + b)^n$ todas as parcelas são precedidas do sinal (+) enquanto no desenvolvimento de$(a - b)^n$ a parcela é precedida do sinal (+) ou (-), conforme o expoente de ***b***(no desenvolvimento) seja par ou ímpar, respectivamente.

1.10 Fatoração de Polinômios

Fatorar polinômios equivale a transformar esses polinômios em produtos de dois ou mais polinômios de graus menores, chamados fatores. Assim, quando falamos em fatoração, estamos dizendo que existe uma forma de isolar um fator para se chegar (em geral) a um resultado mais simples, porém equivalente.

Consideramos a " fatoração de polinômios" um tópico importante, pois muitas vezes permite a simplificação de cálculos algébricos e facilita a resolução de equações de graus iguais ou maiores que 2. Fazendo um apanhado geral dos livros analisados, podemos retomar algumas técnicas que nos permitem fatorar um polinômio.

1.10.1 Fatoração Pelo Fator Comum em Evidência

Dado o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Se ao analisar todos os monômios (termos) que compõem o polinômio $p(x)$ for possível encontrar:

- um divisor comum a todos os coeficientes de $p(x)$ e/ou,
- uma parte literal pela qual seja possível dividir cada termo do polinômio $p(x)$, esse divisor comum e/ou essa parte literal pode ser colocado em destaque ou evidência.

Exemplo: Seja o polinômio $15ab + 3ac$. O fator comum $\mathbf{3a}$ aparece nas duas parcelas, então podemos colocá-la em destaque ou em evidência.

Então, dividimos cada termo do polinômio pelo fator comum $\mathbf{3a}$. A forma fatorada de um polinômio quando colocamos o fator comum em evidência, será igual ao produto do fator comum em evidência pelo polinômio obtido da divisão de cada termo do polinômio. Assim, no exemplo em questão encontramos

$$15ab + 3ac = 3a(5b + c)$$

1.10.2 Fatoração Por Agrupamento

Dado o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

É possível que ao analisar todos os monômios (termos) que compõem o polinômio $p(x)$ não seja possível encontrar um divisor comum a todos os coeficientes de $p(x)$ e/ouuma parte literal pela qual seja possível dividir todos os termos do polinômio $p(x)$.

Mas, existem casos em que podemos fazer pequenos grupos de polinômios a partir do polinômio dado, observando que nesses pequenos grupos exista um divisor comum a todos os coeficientes do polinômio obtido neste pequeno grupo e/ou uma parte literal pela qual seja possível dividir todos os termos do polinômio obtido neste pequeno grupo.

Exemplo: Seja o polinômio $xy - y^2 + 2x - 2y$. Este polinômio não possui um fator comum que possa ser evidenciado para todos os seus termos.

Então, a técnica que empregamos consiste em fazer pequenos grupos de polinômios a partir do polinômio dado, desta forma:

$$xy - y^2 + 2x - 2y = (xy - y^2) + (2x - 2y).$$

Assim, podemos fatorar os pequenos grupos formados a partir do polinômio dado, utilizando a técnica de fatoração pelo fator comum em evidência:

$$(xy - y^2) = y(x - y) \text{ e } (2x - 2y) = 2(x - y)$$

Desta forma, obtemos a fatoração do polinômio dadoe podemos escrever

$$xy - y^2 + 2x - 2y = y(x - y) + 2(x - y).$$

Porém, nesta escrita fatorada notamos que os termos entre parênteses são iguais, permitindo uma nova fatoração na qual, novamente, utilizamos a fatoração pelo fator comum em evidência, ou seja:

$$y(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(y + 2)$$

Então, temos que:

$$xy - y^2 + 2x - 2y = (xy - y^2) + (2x - 2y) = y(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(y + 2)$$

1.10.3 Fatoração Pela Diferença de Dois Quadrados

Esse caso de fatoração se aplica a polinômios da forma $a^2 - b^2$, resultantes de produtos do tipo $(a + b)(a - b)$ – produto da soma pela diferença entre dois termos.

Considerando a igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, fatorar polinômios do tipo $a^2 - b^2$, significa escrevê-los na forma $(a + b)(a - b)$.

Exemplo: vamos analisar o polinômio $4x^2 - y^2$. Neste caso, devemos notar que o polinômio dado, nada mais é que o resultado de um produto notável do tipo “produto da soma pela diferença”. Desta forma, ao invés de escrever $4x^2 - y^2$, simplesmente escrevemos sua fatoração $(2x + y)(2x – y)$.

1.10.4 Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito

Esse caso de fatoração se aplica a polinômios da forma$a^2 + 2ab + b^2$ ou$a^2 - 2ab + b^2$, resultantes de produtos do tipo $(a +b)^2$ou $(a - b)^2$, respectivamente. Ou seja, são resultados de produtos notáveis do tipo “quadrado da soma entre dois termos” ou “quadrado da diferença entre dois termos”.

Considerando as igualdades $(a +b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2= a^2 - 2ab + b^2$, fatorar polinômios do tipo $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$, significa escrevê-los na forma $(a +b)^2$ ou $(a – b)^2$, respectivamente.

Exemplo: Consideremos os polinômios $x^2 +2xy + y^2$ e $x^2 - 2xy + y^2$. Percebemos que elessão, respectivamente, os resultados dos desenvolvimentos dos produtos notáveis $(x + y)^2$ e $(x – y)^2$. Desta forma, ao invés de escrever $x^2 +2xy + y^2$, escrevemos sua fatoração $(x + y)^2$ e ao invés de escrever $x^2 - 2xy + y^2$, escrevemos sua fatoração $(x – y)^2$.

1.10.5 Completamento de Quadrados e Fatoração de Trinômios do Segundo Grau

Analisamos dois exemplos:

1) Sendo o polinômio $x^2 + 10x + 9$.

Podemos notar que, com 25 unidades a mais, teremos um quadrado perfeito como uma parte do polinômio dado. Então, somando-se e subtraindo-se 25 ao polinômio e, usando a técnica da fatoração pela diferença de dois quadrados, teremos:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 10x + 9 &= x^2 + 10x + 9 + 25 – 25 \\
&= (x^2 + 10x + 25) + (9 – 25) \\
&= (x + 5)^2 – 16 \\
&= (x + 5 +4)(x + 5 – 4) \\
&= (x + 9)(x + 1)
\end{aligned}
$$

que é a forma fatorada do polinômio dado.

2) Vamos agora considerar o polinômio $x^2 - 8x + 15$. Podemos adicionar e subtrair$(\frac{8}{2})^2$ ao polinômio dado e, após utilizar a técnica da fatoração pela diferença de dois quadrados,teremos:

$$x^2 - 8x + 15 + (\tfrac{8}{2})^2 - (\tfrac{8}{2})^2 = (x - \tfrac{8}{2})^2 + 15 - (\tfrac{8}{2})^2$$
$$= (x - \tfrac{8}{2})^2 + 15 - \tfrac{64}{4}$$
$$= (x - \tfrac{8}{2})^2 - \tfrac{4}{4}$$
$$= (x - \tfrac{8}{2})^2 - 1$$
$$= ((x - \tfrac{8}{2}) + 1)((x - \tfrac{8}{2}) - 1)$$
$$= (x - 3)(x - 5)$$

que é a forma fatorada do polinômio dado.

Podemos considerar ainda que querendo determinar os valores de x que anulam ambos os polinômios fatorados anteriormente $x^2 + 10x + 9$ e$x^2 - 8x + 15$, podemos igualá-los a zero, obtendo suas raízes.

Desta forma:

$x^2 + 10x + 9 = 0$, determina $x = -9$ ou $x = -1$ como suas raízes e

$x^2 - 8x + 15 = 0$, determina$x = 3$ ou $x = 5$ como suas raízes.

Isto evidencia que a fatoração também está relacionada à determinação das raízes de um polinômio.

Desta forma, é possível observar que quando o coeficiente de x^2 é igual a 1, o coeficiente de x corresponde à soma das raízes do polinômio dado com o sinal trocado e o termo independente corresponde ao produto das raízes.

Dado um trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, onde b e $c \in \mathbb{R}$ e $a = 1$, se asoma das raízes do polinômio do tipo trinômio do segundo grau for denotada por $\boldsymbol{s}(x_1 + x_2)$e o produto dessas mesmas raízes for denotada por $\boldsymbol{p}\ (x_1.x_2)$**,** então o trinômio pode ser reescrito como:

$$x^2 - sx + p = x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2)$$

Para o polinômio da forma $ax^2 + bx + c$, onde a,b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) \\
&= a(x^2 - sx + p) \\
&= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2)) \\
&= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) \\
&= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \\
&= a(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}
$$

Que é a forma fatorada de $ax^2 + bx + c$.

O objetivo deste capítulo foi retomar a importância histórica do conteúdo abordado nesta pesquisa, assim como garantir uma revisão teórica desse conteúdo. Porém, neste trabalho, a abordagem do tema proposto irá além do já exposto anteriormente, pois faremos também uma abordagem geométrica, devido à sua importância para a aprendizagem, visto que a representação geométrica constitui-se numa importante ferramenta para o entendimento de determinados conceitos. Essa nova abordagem será tema do nosso próximo capítulo, no qual faremos uma reconstrução histórica do uso da geometria para resolver problemas algébricos, além de ressaltar sua importância para este trabalho.

CAPÍTULO 2
A GEOMETRIA NO ENSINO DA ÁLGEBRA

Vamos, inicialmente, refletir sobre o ensino da Álgebra no Ensino Fundamental. Para isso, consideraremos os autores Coxford e Shulte (1995, p. 23):

> A Álgebra "é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos". Esse comentário faz parte de um estudo, feito na Inglaterra, de recordações de adultos sobre suas experiências ao aprender matemática na escola (Universidade de Bath, 1982). Obviamente, é um sentimento que poderia muito bem ter sido expresso por qualquer professor de matemática. Não há dúvida de que muitos de seus alunos também concordariam. Uma das razões para esse estado de coisas é que os alunos parecem achar Álgebra difícil.

Pensando em nossa prática na sala de aula, podemos afirmar que é essa a situação com a qual nos deparamos ao ensinar Álgebra. Concordamos com Coxford e Shulte(1995), inclusive quando relatam as principais dificuldades dos alunos como sendo o uso da notação e da convenção em Álgebra, a natureza das respostas e o significado das letras e das variáveis.

Procurando uma alternativa a esse problema, buscamos uma forma de trabalho na qual os alunos principiantes encontrassem significado. Para isso, nossa proposta é ajudar os alunos a criar esse significado com base no conhecimento que já têm.

Nessa proposta, as expressões algébricas são introduzidas como respostas a problemas geométricos que envolvem conceitos aprendidos previamente, tais como o perímetro e a área de um retângulo. Escolhemos esse tipo de problema por comportarem uma fácil representação visual.

Além disso, ao fazer uma análise histórica, encontramos muitos relatos que evidenciam a importância de uma representação geométrica para a resolução de problemas algébricos e, sobretudo, para o estudo dos produtos notáveis e fatoração.

Segundo Eves (1992, p.68):

> A álgebra dos primitivos gregos (dos pitagóricos e Euclides, Arquimedes e Apolônio, 500-200 a. C.) era geométrica devido à sua difilcudade lógica com números irracionais e mesmo fracionários e suas dificuldades práticas com os numerais gregos, que eram algo semelhantes aos numerais romanos e igualmente canhestros. Era natural para os matemáticos gregos desse período usar um estilo geométrico, para o qual tinham gosto e habilidade.

Para Eves (2004), os gregos antigos (600 a. C. a 450 d. C.) querendo representar um número por meio de um comprimento, mas sem possuir uma notação algébrica adequada, idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas.

De acordo com esse autor, atribui-se aos pitagóricos parte considerável da Álgebra Geométrica que se acha espalhada por vários dos primeiros livros dos *Elementos* de Euclides. Podemos citar também a resolução geométrica de equações quadráticas como exemplo da Álgebra Geométrica utilizada pelos gregos.

É no livro II dos *Elementos* que encontramos várias proposições que na realidade são identidades algébricas envolvidas numa terminologia geométrica.

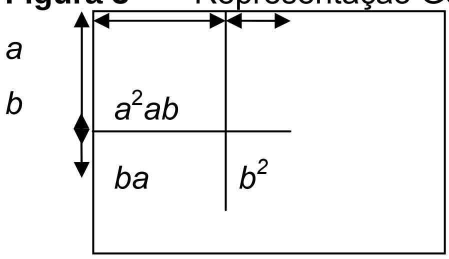
Segundo Eves (2004, p. 107 e 108) os primeiros pitagóricos teriam desenvolvido essas proposições por métodos de decomposição. Para ilustrar o método, vamos considerar uma das poucas proposições do Livro II dos *Elementos*.

A Proposição 4 do livro II estabelece geometricamente a identidade

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Decompõe-se o quadrado de lado (a + b) em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, ab e ba, respectivamente, como mostra a Figura 3.O enunciado de Euclides para essa proposição é: *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes justamente com o dobro do retângulo contido pelas partes*.

Figura 3 - Representação Geométrica do Quadrado de Uma Soma*a b*



Fonte: Eves (2004, p. 108)

Como teria então essa forma de resolução se diluído ao longo do tempo e acabado por tornar-se esquecida?

Miorim (2003) ao fazer um estudo sobre o ensino de Matemática no Brasil nos leva a entender as razões pelas quais houve uma ruptura com essa "forma grega" de pensar, levando-nos a enxergar a Matemática de forma fragmentada.

Para entender melhor a situação do ensino de Matemática em nosso país no século passado citamos Roxo (1940 apud MIORIM, 2003, p.92):

> Entre nós, até 1929, o ensino de aritmética, o de álgebra e o de geometria eram feitos separadamente. O Estudante prestava, pelo regime de preparatórios que vigorou até 1925, um exame distinto para cada uma daquelas disciplinas [...]. Em 1928, propusemos à Congregação do Colégio Pedro II a modificação dos programas de matemáticas, de acordo com a orientação do moderno movimento de reforma e a consequente unificação do curso em uma disciplina única sob a denominação de matemática [...]

De acordo com Miorim (2003), nessa mesma época, surgiram propostas para a atualização do ensino de Matemática nas escolas considerando os "motivos psicológicos". Sobre esse assunto citamos Klein (1927, apud MIORIM, 2003, p. 69):

> O professor deve ser, por assim dizer, algo diplomático; tem de conhecer a psicologia das crianças para poder captar o seu interesse, e isso só poderá conseguir se aceitar apresentar as coisas de uma forma facilmente assimilável. Dentro da escola, apenas nas classes superiores se pode revestir a doutrina de forma abstrata [...]. Mas isso [...] deveria também estender-se a todo ensino, mesmo o superior; a matemática sempre deveria ser apresentada relacionada com tudo aquilo que pudesse interessar ao homem e com o que utilizará em sua vida.

Desta forma, após um longo processo, tivemos uma modernização no ensino de Matemática. Essa modernização, curiosamente, muitas vezes passou pelo retorno à utilização de métodos desenvolvidos na Antiguidade.

Atualmente os documentos que norteiam nossa prática docente e constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático "propõem um novo enfoque para o tratamento da Álgebra, apresentando-a incorporada aos demais blocos de conteúdos, privilegiando o desenvolvimento do pensamento algébrico e não o exercício mecânico do cálculo”.(BRASIL, 1998a, p. 60).

O “novo enfoque” destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – Introdução aparece de forma detalhada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (BRASIL, 1998b, p. 121).

De acordo com este documento,

> Convém também salientar que a “visualização” de expressões algébricas, por meio do cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas [..]. A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões.

Autores de livros didáticos também ressaltam a importância do uso da representação geométrica no estudo da Álgebra. Para Ribeiro (2010, p.41) essa forma de representação merece destaque:

> A representação geométrica constitui-se em uma importante ferramenta utilizada para o entendimento de certos conceitos, como monômios e polinômios, utilizados para representar áreas e volumes, quadrado da soma e da diferença de dois termos, sendo, neste último caso, utilizada de maneira mais significativa.

De fato, “a geometria é um veículo para representar conceitos matemáticos” (LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 33). Todos nós conhecemos pelo menos um exemplo de representações geométricas de ideias não geométricas como a reta numerada ser utilizada para representar o conjunto dos números reais; os gráficos mostrando informações numéricas; uso de áreas no ensino de integrais.

De acordo com Lindquist e Shulte (1994) as propriedades elementares de objetos geométricos como retângulos, triângulos e círculos podem ser utilizados para justificar muitas fórmulas em outros ramos da matemática.

Para os autores essas justificativas baseiam-se em conceitos conhecidos e visam convencer o aluno da validade das fórmulas. Afinal, “as mentes dos alunos não são tábulas rasas quando eles começam a estudar Álgebra” (COXFORD; SHULTE, 2003, p. 137).

Com o intuito de ativar esses conhecimentos prévios, utilizamos a representação geométrica (pela decomposição em áreas retangulares) dos produtos notáveis e, consequentemente, de suas fatorações para a elaboração das atividades de uma sequência didática, construída mediante critérios da Engenharia Didática.

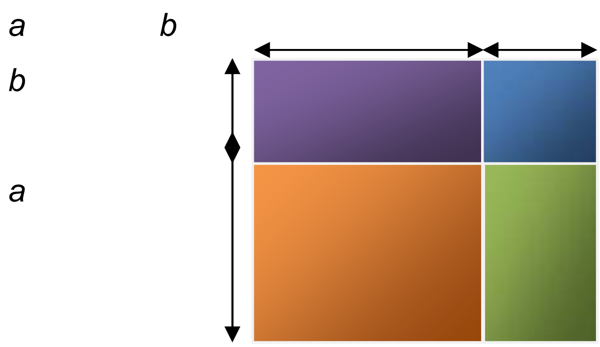
Sendo assim, os casos abordados nessa sequência didática, tema do próximo capítulo desse trabalho, foram geometricamente representados conforme listamos a seguir. Para esta listagem, consideramos novamente os livros didáticos analisados referentes ao 8º ano (7ª série) do Ensino Fundamental: Ribeiro (2010) e Souza e Pataro (2012).

2.1 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO QUADRADO DA SOMA ENTRE DOIS TERMOS

Consideramos um quadrado cuja medida do lado é (a + b), ou seja, com área $A = (a + b)^2$.

Em seguida, decompomos esse quadrado em quatro partes, conforme destacamos na figura 4.

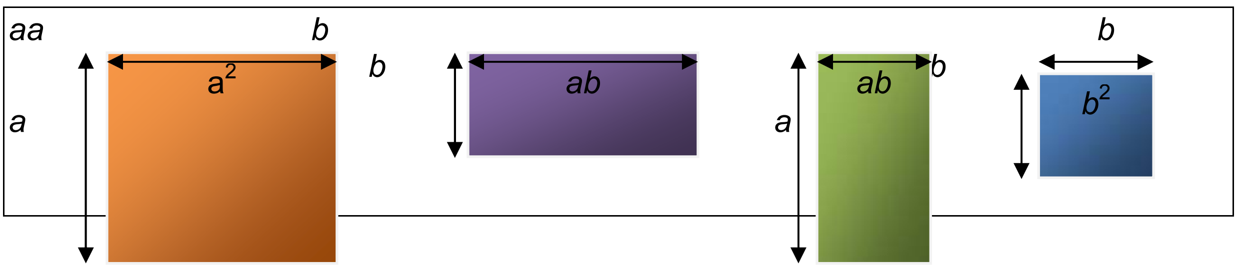
Figura 4 - Representação geométrica do quadrado da soma entre dois termos (1)



Fonte: Ribeiro (2010, p. 148)

As áreas das partes obtidas a partir da figura 4 estão representadas na figura 5 e são dadas por:

Figura 5 - Representação geométrica do quadrado da soma entre dois termos (2)



Fonte: Ribeiro (2010, p. 148)

Podemos obter a área do quadrado inicial, representado na figura 4, adicionando as áreas de cada parte obtida, conforme representação da figura 5.

$$A = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

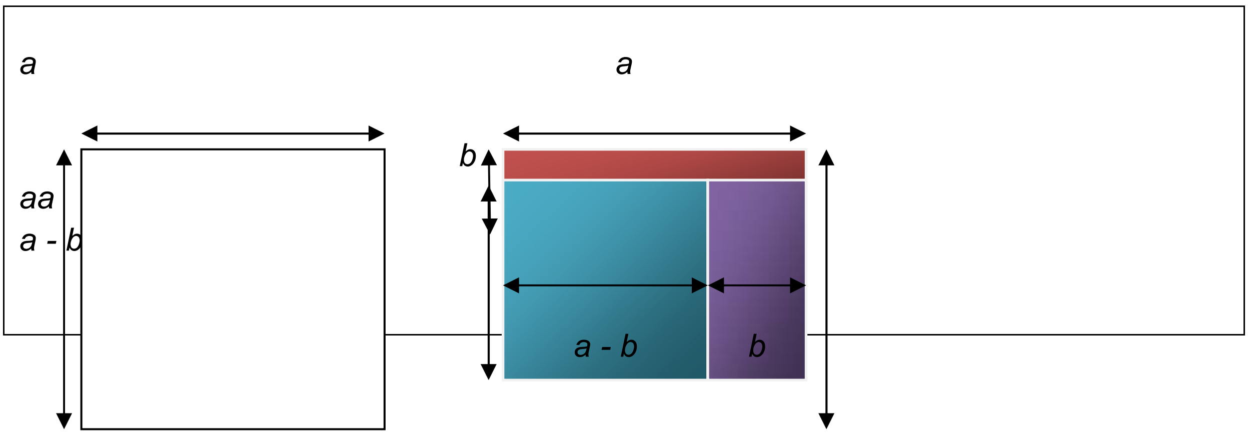
Mas temos também que $A = (a + b)^2$.

Desta forma justificamos geometricamente a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.2 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO QUADRADO DA DIFERENÇA ENTRE DOIS TERMOS

Consideramos um quadrado cuja medida do lado é *a*, ou seja, com área $A = a^2$. Em seguida, decompomos esse quadrado em três partes, conforme destacado na figura 6.

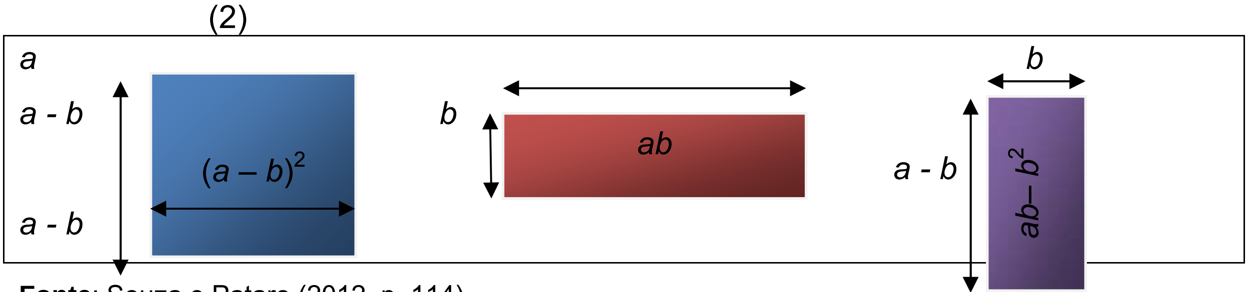
Figura 6 - Representação geométrica do quadrado da diferença entre dois termos (1)



Fonte: Souza e Pataro (2012, p. 114)

De acordo com a figura 7, as áreas das partes obtidas são dadas por:

Figura 7 - Representação geométrica do quadrado da diferença entre dois termos (2)



Fonte: Souza e Pataro (2012, p. 114)

Podemos observar que:

- A área do quadrado de lados ($a – b$), representado na figura 6, pode ser expressa por A = $(a – b)^2$;
- Outra maneira de se obter a área desse quadrado é subtrair as áreas do retângulo de dimensões *a* e *b*e do retângulo de dimensões (a - b) e b, da área do quadrado inicial de lado *a,* conforme representação na figura 7.

Assim temos que

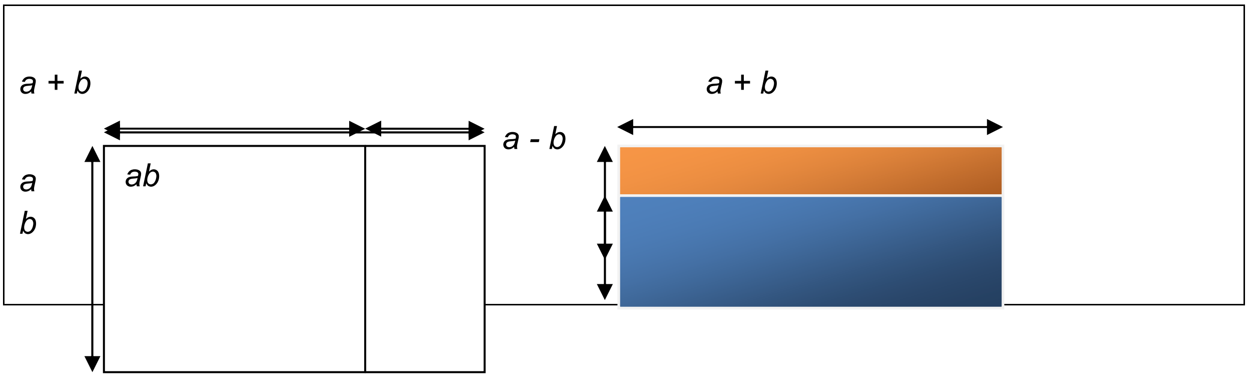
$$A = a^2 – ab – (ab – b^2) = a^2 – ab – ab + b^2 = a^2 – 2ab + b^2$$

Desta forma justificamos geometricamente a igualdade $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$.

2.3 Representação Geométrica do Produto da Soma Pela Diferença Entre Dois Termos

Consideramos um retângulo cujas medidas dos lados são ($a + b$) e a, ou seja, com área $A = a^2 + ab$. Em seguida, decompomos esse retângulo em outros dois retângulos como vemos na figura 8.

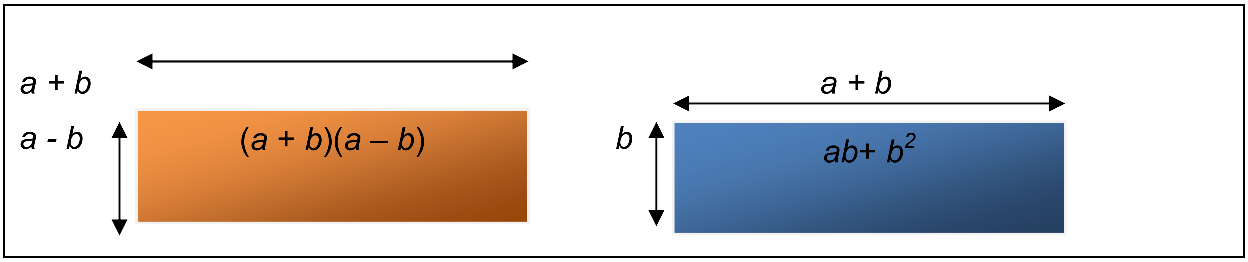
Figura 8 - Representação geométrica do produto da soma pela diferença entre dois termos (1)



Fonte: Souza e Pataro (2012, p. 115)

As áreas dos retângulos obtidos estão representadas na figura 9 e são dadas por:

Figura 9 - Representação geométrica do produto da soma pela diferença entre dois termos (2)



Fonte: Souza e Pataro (2012, p. 115)

Podemos observar que a área do retângulo de lados (a + b) e (a – b) é dada por

A = (a + b)(a – b),

Conforme verificamos na figura 8.

Outra maneira de determinar a área desse retângulo é subtrair a área do retângulo de lados (a + b) e b, representado na figura 9, da área do retângulo inicial, representado na figura 8. Desta forma, temos que:

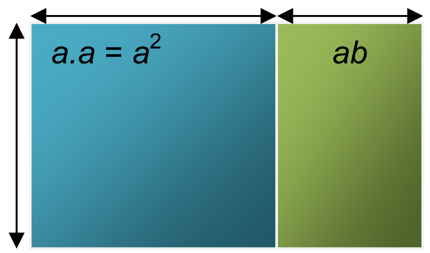
$$A = a^2 + ab - (ab + b^2) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Assim, justificamos geometricamente a igualdade $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

2.4 Representação Geométrica da Fatoração Pelo Fator Comum em Evidência

Consideramos um retângulo cujas medidas dos lados são (a + b) e a, ou seja, com área $A = a^2 + ab$. Em seguida, decompomos esse retângulo em dois retângulos de áreas a^2 e ab.O retângulo e a decomposição citada constam na figura 10.

Figura 10 - Representação geométrica da fatoração pelo fator comum em evidência



Fonte: Próprio autor

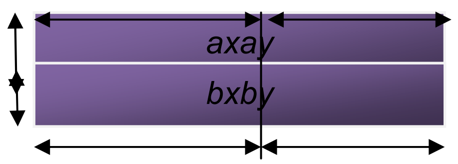
Podemos observar na figura 10 que a medida *a* do lado do retângulo inicial é comum aos retângulos obtidos pela decomposição feita anteriormente e que a área do retângulo inicial pode ser representada por $A = a(a + b)$.

Desta forma, justificamos geometricamente a igualdade $a(a + b) = a^2 + ab$.

2.5 Representação Geométrica da Fatoração por Agrupamento

Consideramos um retângulo cujas medidas dos lados são $(a + b)$ e $(x + y)$, ou seja, com área $A = (a + b)(x + y)$. Em seguida, decompomos esse retângulo em quatro partes, conforme visualização na figura 11.

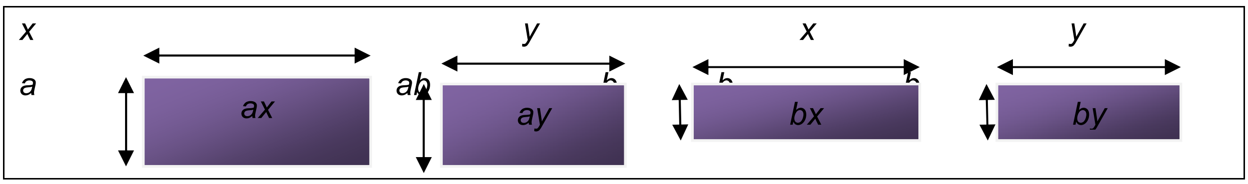
Figura 11 - Representação geométrica da fatoração por agrupamento (1)



Fonte: Próprio autor

De acordo com a figura 12, as áreas das partes obtidas são dadas por:

Figura 12 - Representação geométrica da fatoração por agrupamento (2)



Fonte: Próprio autor

Podemos observar que:

- De acordo com a figura 11, a área do retângulo inicial de lados (a + b) e (x +y), pode ser expressa por$A$ = (a + b)(x +y);
- Outra maneira de se obter a área desse retângulo é adicionar as áreas de cada parte obtidas, conforme observamos na figura 12.

Desta forma, temos que:

$$A = ax + ay + bx + by$$

Nesta expressão, ao utilizarmos a fatoração pelo fator comum em evidência, encontramos:

$$A = ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

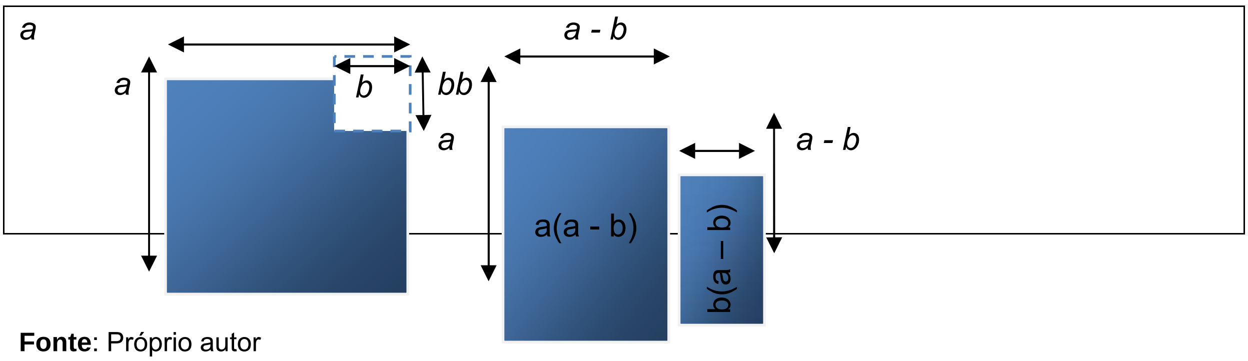
Mas temos também que $A = (a + b)(x +y)$.
Desta forma justificamos geometricamente a igualdade $ax + ay + bx + by = (a + b)(x +y)$.

2.6 Representação Geométrica da Fatoração Pela Diferença de Dois Quadrados

Consideramos um quadrado cuja medida do lado é a, ou seja, com área $A = a^2$. Em seguida, retiramos da área desse quadrado a área de outro quadrado de lado b, cuja área *será* $A = b^2$.

Assim, de acordo com a figura 13, podemos fazer as seguintes representações geométricas:

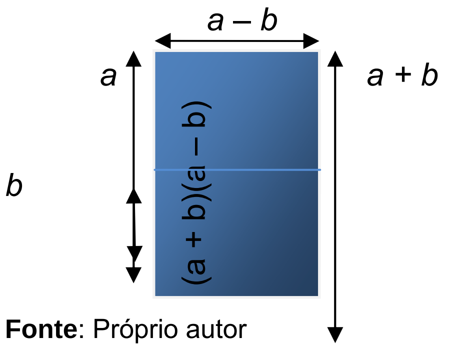
Figura 13 - Representação geométrica da fatoração pela diferença de dois quadrados (1)



Fonte: Próprio autor

Reorganizando as partes da segunda figura, encontramos a representação apresentada na figura 14:

Figura 14 - Representação geométrica da fatoração pela diferença de dois quadrados (2)



Fonte: Próprio autor

Sendo assim, temos um retângulo cujos lados são (a + b) e (a – b) - figura 14. Mas, a área desse retângulo é equivalente à área do quadrado inicial de lado a, cuja área é dada por$A = a^2$, subtraindo-se dela a área do quadrado de lado b, cuja área é dada por$A = b^2$.

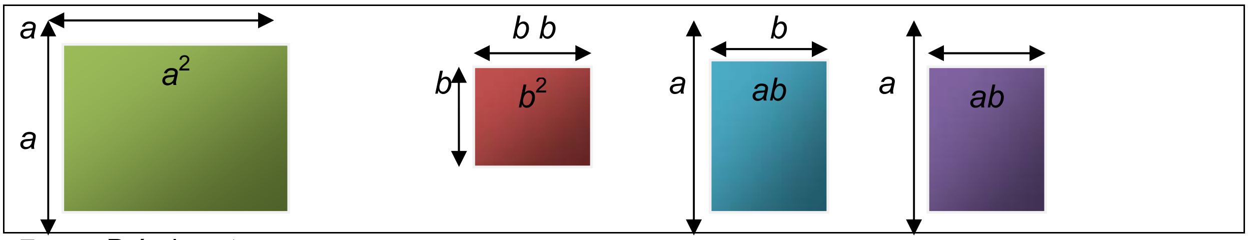
Desta forma justificamos geometricamente a igualdade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

2.7 Representação Geométrica da Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito da Forma $A^2 + 2AB + B^2$

A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ sugere a soma de quatro áreas. A área de um quadrado de lado a, cuja área é dada por $A = a^2$; a área de um quadrado de lado b, cuja área é dada por $A = b^2$; duas vezes a área de um retângulo de lados a e b, cuja área é dada por ab.

Essas áreas podem ser representadas de acordo com a figura 15:

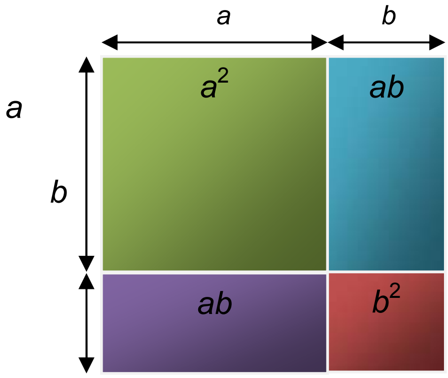
Figura 15 - Representação geométrica da fatoração do trinômio quadrado perfeito da forma $a^2 + 2ab + b^2$ (1)



Fonte: Próprio autor

Mas, essas áreas podem ser reunidas num único retângulo, ou melhor, quadrado de lado ($a + b$) como mostramos na figura 16:

Figura 16 - Representação geométrica da fatoração do trinômio quadrado perfeito da forma $a^2 + 2ab + b^2$ (2)



Fonte: Próprio autor

Temos então que a somas das áreas a^2, b^2, ab e ab, representadas na figura 15,equivale à área do quadrado de lado ($a + b$) que é dada por $A = (a + b)^2$, representada na figura 16. Ou seja, justificamos geometricamente a igualdade

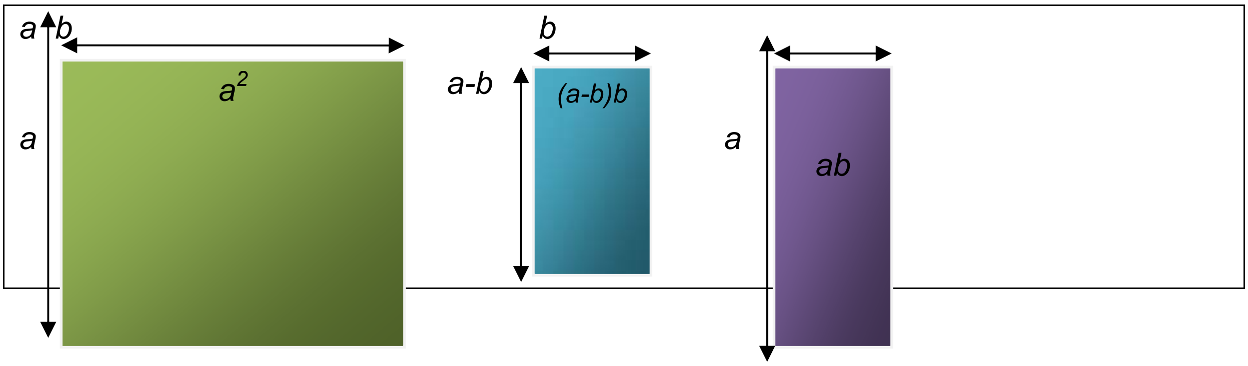
$$a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

2.8 Representação Geométrica da Fatoração do Trinômio Quadrado Perfeito da Forma $A^2 - 2AB + B^2$

Notamos que $b(a - b) + ab = ab - b^2 + ab = 2ab - b^2$. Desta forma, podemos reescrever $a^2 - 2ab + b^2$ como $a^2 - (b(a - b) + ab)$.

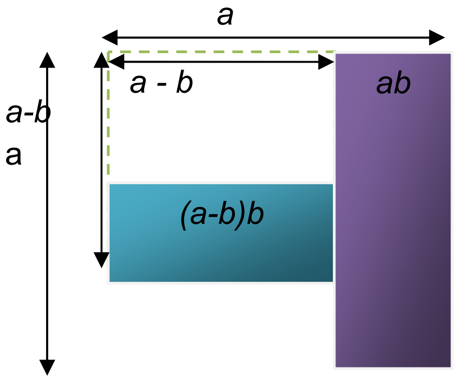
Assim, a expressão $a^2 - (b(a - b) + ab)$ sugere três áreas. A área de um quadrado inicial de lado a, cuja área é dada por $A = a^2$; a área de um retângulo de lados a e b, cuja área é dada por ab; a área de um retângulo de lados be ($a - b$), cuja área é dada por $A = b(a - b)$, representadas na figura 17, sendo que as duas últimas áreas devem ser subtraídas da área do quadrado inicial, conforme destacado na figura 18.

Figura 17- Representação geométrica da fatoração do trinômio quadrado perfeito da forma $a^2 - 2ab + b^2$ (1)



Fonte: Próprio autor

Figura 18 - Representação geométrica da fatoração do trinômio quadrado perfeito da forma $a^2 - 2ab + b^2$ (2)



Fonte: Próprio autor

Temos então que ao subtrair as áreas $b(a - b)$ e ab da área do quadrado inicial de lado a que é dada por $A = a^2$, encontramos um quadrado de lado $(a - b)$, cuja área é dada por $(a - b)^2$. Ou seja, justificamos geometricamente a igualdade $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Nesta pesquisa, procuramos elaborar uma sequência didática para o ensino e aprendizagem dos produtos e fatoração de polinômios. Sendo a análise anterior referencial para a elaboração e desenvolvimento desta sequência didática, no próximo capítulo trataremos dos aspectos metodológicos desta pesquisa, abordando todas as fases da Metodologia da Engenharia Didática, assim como seu desenvolvimento.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada neste trabalho é a Engenharia Didática, proposta por Artigue (1996). Escolhemos esta metodologia por considerá-la adequada ao estudo que pretendíamos realizar acerca da funcionalidade da utilização das representações geométricas para o ensino e aprendizagem de produtos notáveis e fatoração de polinômios. A adequação à qual nos referimos anteriormente existe na medida em que essa metodologia nos oferece meios para inferir, a partir dos resultados alcançados, sobre a consistência e coerência da sequência didática aplicada para a aprendizagem dos alunos.

3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

As pesquisas em Didática da Matemática da escola francesa de Didática da Matemática, no início da década de 1980, permitiram o desenvolvimento de uma metodologia do tipo experimental que, além de submeter o fenômeno à experimentação, intervém nele a partir da organização sistemática de sua observação.

É nesse contexto que, segundo Almouloud (2007), emerge a noção de Engenharia Didática. Enquanto metodologia de pesquisa "é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino" (ARTIGUE,1996, p. 196).

Além dessa caracterização, os registros próprios dessa prática, assim como os modos de validação associados a ela (análise a priori e a posteriori) permitem que ela seja considerada uma pesquisa experimental.

Para Dominoni (2005), a Engenharia Didática tem o objetivo de articular a investigação e a ação da prática educativa. Segundo a autora, esse método apresenta "uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa contemplando tanto a dimensão teórica quanto a experimental." (DOMINONI, 2005, p. 42).

Segundo Machado (1999 apud PIZA, 2009, p. 41) “torna-se importante ressaltar que a singularidade da Engenharia Didática não repousa sobre seus objetivos, mas sobre suas características de funcionamento metodológico.”

Considerando essa discussão, podemos afirmar que o papel do professor é evidenciado nessa metodologia, pois cabe a ele escolher e elaborar as atividades da sequência didática (conjunto de atividades que serão desenvolvidas pelos alunos), levando em consideração o conteúdo a ser estudado, o conhecimento prévio do aluno e as funções de cada uma das partes no processo (aluno e professor), isso tudo aliado ao seu papel de mediador durante a realização das atividades.

De acordo com Dominoni (2005), o desenvolvimento da sequência didática se dá através de um processo interativo entre professor e alunos com o intuito de desenvolver estratégias mais efetivas de aprendizagem.

Com relação à forma de validação, Artigue (1996) enfatiza que é interna e fundamentada no confronto entre as análises a priori e as análises a posteriori; sendo que a primeira análise (a priori) se baseia no quadro teórico, já a segunda (a posteriori) nos resultados da experimentação.

Segundo Almouloud (2007), sendo a pesquisa fundamentada nos pressupostos da Engenharia Didática, podemos identificar algumas fases de seu desenvolvimento que têm como base um quadro geral da didática. As fases apresentadas pelo autor são:

- Primeira fase: as análises preliminares;
- Segunda fase: concepção e análise a priori;
- Terceira fase: experimentação;
- Quarta fase: análise a posteriori e validação.

3.2 FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA ESUAS APLICAÇÕES NESSA PESQUISA

As análises preliminares

Sendo a pesquisa feita de acordo com o modelo da Engenharia Didática, nessa primeira fase identificamos os problemas de ensino e aprendizagem do objeto em estudo, delineando questões, hipóteses, assim como fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa.

As análises desse primeiro momento devem ser feitas considerando-se o quadro teórico sobre o qual o pesquisador se apóia, juntamente com os conhecimentos didáticos já adquiridos por ele sobre o tema em estudo. Além disso, essa análise inicial também pode se basear em outros fatores que, para Almouloud (2007) são:

- Estudo da organização matemática que compreende os estudos relativos à gênese histórica do saber contemplado pelo ensino; análise da estrutura matemática do conceito investigado e evidenciação dos saberes e conhecimentos matemáticos relacionados com o saber visado.
- Análise da organização didática do objeto matemático escolhido que compreende uma análise das propostas curriculares e dos PCN, assim como de livros didáticos; estudo das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução; levantamento de referências bibliográficas sobre fatores que interferem no processo de ensino e de aprendizagem do objeto em questão.
- Definição das questões da pesquisa que deve se basear nos dois fatores citados anteriormente, levando-se em consideração os problemas relacionados com o ensino e a aprendizagem da noção estudada.

Segundo Artigue (1996, p. 201) as análises preliminares podem ser "retomadas e aprofundadas ao longo do trabalho de pesquisa [...]. Essas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem"

No nosso trabalho, as análises preliminares compreendem a gênese histórica, evidenciada nos estudos relativos ao contexto histórico dos Polinômios, assim como a fundamentação teórica, sobre as quais discorremos no capítulo 1 desse trabalho.

Ainda nesse momento inicial, optamos e justificamos nossa escolha pela utilização da representação geométrica no estudo dos produtos notáveis e fatoração de polinômios, tendo como referência principal as dificuldades apresentadas pelos alunos no que diz respeito ao estudo do conteúdo em questão, fatos sobre os quais discorremos no capítulo 2.

Além disso, foi possível estabelecer uma relação entre nossa experiência como educadoras com a análise de materiais norteadores (como Propostas Curriculares e PCN) e de livros didáticos diversos; relação essa que permeia todos os capítulos dessa pesquisa.

Encerramos essa primeira fase, definindo quais tipos de questões gostaríamos que compusessem a sequência didática.

Concepção e análise a priori

Tendo como base as análises preliminares e o referencial teórico, é nesta fase que o pesquisador elabora a sequência didática que será aplicada, por esse motivo é considerada uma fase fundamental dentro do processo. Segundo Dominoni (2005), é neste momento que se decidem quais variáveis serão investigadas e quais variáveis poderão apontar o encaminhamento ou solução do problema estudado.

Para Artigue (1996) o objetivo desta fase é determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido de cada um destes comportamentos.

Desta forma, Almouloud (2007) enfatiza que esta escolha deve levar em consideração os seguintes fatos: os alunos devem entender facilmente os dados do problema dado; os conhecimentos prévios dos alunos devem ser insuficientes para a resolução completa do problema; os conhecimentos tidos como objeto de aprendizagem devem ser mobilizados, em última instância, para obter a solução final; preferencialmente o problema deve envolver vários domínios de conhecimento como Álgebra, Geometria, domínio numérico, entre outros.

Concordamos com o autor ao levar em consideração, na concepção das atividades, o desenvolvimento de certas competências e habilidades que permitem ao aluno construir conhecimentos e saberes de forma construtiva e significativa; saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, assim como desenvolver o raciocínio dedutivo; agir, expressar-se, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo novos conhecimentos.

Segundo Dominoni (2005), esta fase comporta uma parte descritiva e uma parte de previsão, baseadas nas características de uma situação-problema que se pretende criar e desenvolver com os alunos. Nela, são previstas as ações e comportamentos desses alunos durante a experimentação, de forma a controlar e explicar o sentido destes comportamentos, além de assegurar que se tais comportamentos ocorrerem, resultarão no conhecimento visado pela aprendizagem.

Da qualidade da análise a priori depende o sucesso da situação–problema. É ela que permite ao professor controlar a realização das atividades dos alunos, além de identificar e compreender os fatos observados.

Em linhas gerais, a *concepção e análise a priori* em uma pesquisa matemática devem contemplar uma análise matemática que se faz presente quando identificamos os métodos de resolução de cada situação, evidenciando os saberes matemáticos envolvidos e uma análise didática que envolve aspectos como a pertinência das situações propostas, a previsão das dificuldades que os alunos poderão enfrentar, a identificação de novos conhecimentos que os alunos podem adquirir e a previsão de saberes e/ou conhecimentos que deverão ser institucionalizados.

No nosso trabalho a *concepção e análise a priori* consistem no estudo, com fundamentação teórica, das situações-problema tendo como base os resultados das análises preliminares, assim como na elaboração das questões que compõem a sequência didática, explicitadas no capítulo 4.

Neste momento do processo, também fazemos uma análise individual dessas questões, considerando as dimensões epistemológicas (associadas às características do saber), dimensões cognitivas (associadas aos conhecimentos dos alunos, sujeitos da aprendizagem) e dimensões didáticas (associadas ao sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos). Esses aspectos são analisados no próximo capítulo.

Experimentação

“A fase da experimentação é clássica: é o momento de se colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade [...].” (ALMOULOUD, 2007, p. 177).

De acordo com Dominoni (2005), o início desta fase é marcado pelo contato entre pesquisador/professor/observador com a população de alunos. Para a autora, nesta fase são explicitados ao grupo de alunos que participarão da experimentação, os objetivos e condições em que será realizada a pesquisa, alémdo estabelecimento do contrato didático[3], seguido da aplicação do instrumento de pesquisa e realização das observações pertinentes relativas às atitudes e produções dos alunos.

É nesse momento que se escolhe os meios de registros dos dados colhidos que podem ser relatórios, questionários, vídeos, anotações do pesquisador, entrevistas, entre outros.

Durante a aplicação das atividades, devemos considerar algumas condições. Dentre estas condições está provocar um debate de confrontação dos resultados dos alunos, visto que diversas formas de saber podem aparecer e desta maneira o saber da classe é homogeneizado e construído. Após o debate, as descobertas dos alunos devem ser selecionadas e organizadas para que assim melhor compreendam os novos objetos matemáticos e, além disso, deve-se fazer a institucionalização[4] dos novos saberes estudados.

Neste contexto, "o papel do professor é o de mediador e orientador. Suas intervenções devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem" (ALMOULOUD, 2007, p. 174 e 175).

Na nossa pesquisa a fase de experimentação ocorrerá na medida em que aplicarmos as atividades da sequência didática ao grupo de alunos selecionados para a experimentação, seguindo as orientações descritas anteriormente e coletando os dados através de observações sistemáticas (realizadas pela observadora durante o desenvolvimento desta sequência didática) e pelas produções dos alunos.

Análise a posteriori e validação

Segundo Almouloud (2007, p. 177) temos que

> A análise a posteriori de uma sessão[5] é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo.

---

[3] Contrato didático, segundo Brousseau (1980, apud ALMOULOUD, 2007, p. 89) "é o conjunto de comportamentos específicos do professor esperado pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor".

[4] "Uma situação de institucionalização é aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Uma vezconstruído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe." (ALMOULOUD, 2007, p. 40)

[5] A aula pode ser assim denominada por ser específica para pesquisa.

Para que isso ocorra de forma satisfatória a produção dos alunos deve ser organizada e analisada e as diferentes interações dos alunos (aluno-situação, aluno-aluno, aluno-professor) com os meios didáticos[6] e adidáticos[7] deve ser considerada.

Neste momento, o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori permite validar ou refutar as hipóteses levantadas na análise a priori. Esse processo de validação é interno, permanecendo no âmbito da experiência realizada (PIZA, 2009, p. 42). Em Engenharia Didática é desta forma que realizamos a validação da metodologia e isso acaba por ser seu diferencial.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

De acordo com as fases previstas pela Engenharia Didática, iniciamos nossa pesquisa por um levantamento teórico sobre propriedades e características dos produtos notáveis, utilizando propriedades de polinômios e operações com polinômios.

Um aspecto fundamental neste contexto diz respeito à identificação de relações entre Álgebra e Geometria, quando se trata do estudo dos produtos notáveis. A articulação entre aspectos algébricos e geométricos, embora seja indicada por diretrizes para o ensino de Matemática, como é o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais, ainda é incipiente nas atividades de sala de aula.

Assim, elaboramos uma sequência didática considerando esse estudo anterior e objetivando a apropriação, por parte do aluno, do conceito de produtos notáveis e fatoração de polinômios por meio de representações geométricas.

Essa sequência didática foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

3.3.1 Público Alvo da Pesquisa

---

[6] Onde ocorre um conjunto de relações entre os alunos, o professor e o meio para que os alunos adquiram um saber constituído.

[7] Onde a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor a fim de permitir a apropriação do novo saber por parte do aluno.

O grupo de alunos que participou desta pesquisa pertence a uma escola estadual, localizada numa cidade do interior do estado de São Paulo, na qual ministramos aula. São alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e têm entre 12 e 15 anos. Como o grupo é composto por 30 alunos, conseguimos formar 10 trios que foram devidamente orientados quanto ao desenvolvimento das atividades. Para a análise das atividades estes trios foram denominados T1, T2, T3 e assim sucessivamente. A falta de algum integrante do trio, acarretou na formação de duplas que, de maneira similar, foram identificadas como D1, D2, D3, ..., D10, considerando a relação com o número do trio correspondente. Ficou esclarecido que a identidade de todos seria preservada e que seria necessária a autorização, conforme consta no anexo 1, dos responsáveis para que pudessem participar da pesquisa.

A experimentação foi realizada durante dez aulas sequenciais de Matemática, já que o conteúdo estudado faz parte do Quadro de Conteúdos e Habilidades de Matemática[8] prevista para o 8º ano. Os dados foram coletados mediante análise dos registros escritos dos alunos.

No capítulo seguinte, apresentamos e discorremos sobre as atividades da sequência didática.

---

[8] Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias (2010, p. 61)

CAPÍTULO 4
A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 INTRODUÇÃO

As atividades selecionadas para compor essa sequência didática estão relacionadas aos conceitos de produtos notáveis (entre polinômios) e fatoração de polinômios. A seleção foi feita tendo como objetivo permitir que o aluno conheça os produtos notáveis básicos - quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença - e, além disso, permitir que o aluno identifique a fatoração como uma escrita na forma de produto que se relaciona com cada um dos casos de produtos notáveis estudados.

Devemos salientar que as atividades da sequência didática são baseadas em conceitos geométricos conhecidos pelo aluno que, ao serem ativados, “contribuem para uma compreensão dos fatos e relações algébricas que vai muito além da simples memorização e utilização de técnicas para resolução de exercícios ou problemas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 71).

Decidimos por esta forma de trabalho porque as atividades se direcionam a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e, nesta etapa, a prioridade é proporcionar um primeiro contato com o assunto, destacar padrões e praticar um pouco de cálculo, sempre procurando explorar geometricamente os conceitos estudados. Afinal, devemos considerar que esse conteúdo será retomado nos anos seguintes permitindo, inclusive, uma maior aplicabilidade. Um exemplo dessa aplicabilidade é a resolução de equações do 2º grau, estudadas no 9º ano (8ª série).

Refletindo sobre o ensino de Álgebra num contexto mais geral, podemos citar Polya (1995 apud RIBEIRO, 2010, p. 42):

> Não apenas os piores alunos da turma, mas até estudantes bem inteligentes, podem ter aversão à Álgebra. Há sempre alguma coisa de arbitrário e artificial numa notação e o aprendizado de uma nova notação constitui uma sobrecarga para a memória. O estudante inteligente recusará a aceitar esse ônus se ele não notar nisso nenhuma compensação. A sua aversão pela álgebra se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio. Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefas do professor.

Elaboramos a sequência didática de acordo com as considerações de Polya e consideramos também que os alunos que colaboraram com a pesquisa ainda não haviam tido contato com o conteúdo desenvolvido nesse trabalho.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – Introdução (BRASIL,1998a, p.10), “o sentido e o significado da aprendizagem precisam estar evidenciados durante toda a escolaridade, de forma a estimular nos alunos o compromisso e a responsabilidade com a própria aprendizagem”. Pensando no sentido e no significado da aprendizagem, justificamos a busca de uma conexão com a Geometria na seleção das atividades que compõem a sequência.

Esperamos que, ao final da aplicação da sequência didática, os alunos sejam capazes de:

- retomar o conceito de áreas de polígonos;
- reconhecer a igualdade entre uma expressão algébrica e sua forma fatorada;
- reconhecer os produtos notáveis básicos e dominar o seu cálculo, tanto ao utilizar a representação geométrica, quanto ao utilizar a propriedade distributiva;
- compreender a relação entre produtos notáveis e fatoração;
- realizar a fatoração de determinadas expressões algébricas.

Conforme cita Almouloud (2007, p. 174), ao utilizarmos a metodologia da Engenharia Didática, devemos garantir que:

> As situações-problema devam ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos. O papel do professor é o de mediador e orientador; suas intervenções devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem.

Com base nesse conceito, dividimos a aplicação da sequência em duas etapas.

Etapa 1

A primeira etapa da sequência didática, composta por 9 questões, foi aplicada em sete encontros: seis de cinquenta minutos (equivalente a 1 hora-aula) e um de cem minutos (equivalente a 2 horas-aula).

Em cada um desses encontros os alunos que estavam organizados em trios, recebiam o material preparado com as questões da sequência didática. As atividades eram desenvolvidas e, ao final do encontro, devolvidas. Conforme havia necessidade, provocávamos um debate.

No desenvolvimento dessas atividades os alunos foram levados a mobilizar os objetos de saber disponíveis como ferramenta para resolver os problemas propostos. Para isso, receberam orientações da professora que socializava o saber da classe, promovendo a construção individual dos conhecimentos; as descobertas dos alunos foram organizadas e sistematizadas e os novos saberes estudados foram institucionalizados.

Devemos esclarecer que os alunos puderam recorrer ao nosso auxílio sempre que necessário.

Etapa 2

A segunda etapa da sequência didática, composta por 9 questões, foi aplicada em um único encontro de cem minutos (equivalente a duas horas-aula). Os alunos trabalharam com o material proposto de forma individual, sem acesso a anotações anteriores e sem auxílio ou interferência do professor/observador.

Nesta etapa, novos conhecimentos foram consolidados, através da resolução de outras situações que permitiram uma familiarização e generalização do objeto matemático estudado.

4.2 ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos agora as atividades da sequência didática, etapa 1 e etapa 2.

Etapa 1

Atividade 1(consta de Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 12, adaptada).

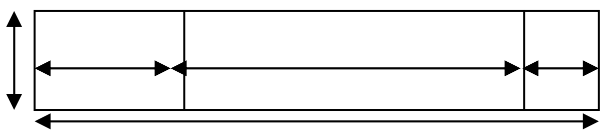
Observe as figuras a seguir e represente a área de cada quadrilátero por duas expressões algébricas equivalentes.

Dica: Considere primeiramente os quadriláteros como se **não** tivessem divisões, ou seja, utilize a medida total dos seus lados para o cálculo da área. Depois, considere as partes nas quais cada quadrilátero foi dividido, calcule cada área em separado e some todas elas para obter a área total procurada.

a) *x*

a7

a + 7 + y

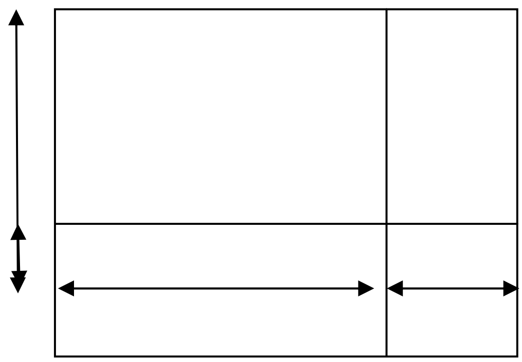


Modo 1 Modo 2

b)

y

2



Modo 1 Modo 2

c) Quais conclusões podemos tirar ao observar os resultados dos modos 1 e 2? Comente no espaço a seguir:

d) Registre a sua conclusão nos espaços abaixo de forma a completar a igualdade proposta:

Retângulo 1: ___(___ + ____ + ___) = _____ + _____ + _____

Retângulo 2: (___ + ____) (___ + ___) = _____ + _____ + _____ + _____

Atividade 2(consta de Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 12 e 13, adaptada).

As expressões dadas a seguir referem-se a áreas de retângulos. Represente geometricamente essas expressões e encontre outra expressão algébrica que seja equivalente a cada uma delas.

a) *3a + 3b*
b) *x(y – 3)*

Atividade 3(consta de Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 13 e 14, adaptada).
Represente geometricamente os produtos $(x + a)(x + b)$ e $(x – a)(x – b)$, depois encontre uma expressão algébrica equivalente a cada um deles.

a) $(x + a)(x + b)$
b) $(x – a)(x – b)$

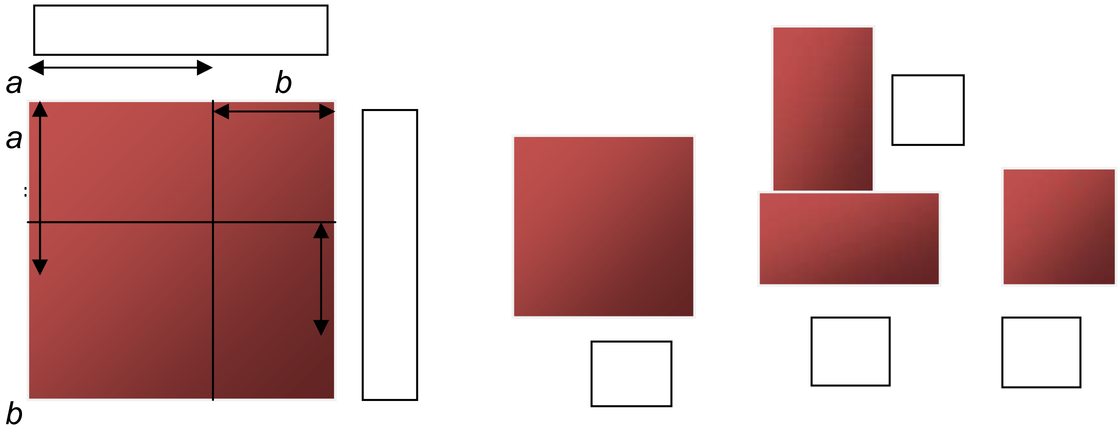
Atividade 4 Utilizando a representação geométrica como referência, desenvolva os produtos a seguir. Você também pode utilizar a propriedade distributiva, se julgar necessário.

a) $(x + 3)(x + 5) =$
b) $(x + 1)(x + 1) =$
c) $(y – 3)(y – 3) =$
d) $(a + 6)(a – 6) =$
e) $(a + b)(a + b) =$
f) $(a – b)(a – b) =$
g) $(a + b)(a – b) =$

Atividade 5(esta atividade foi baseada em uma situação problema do Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 15).

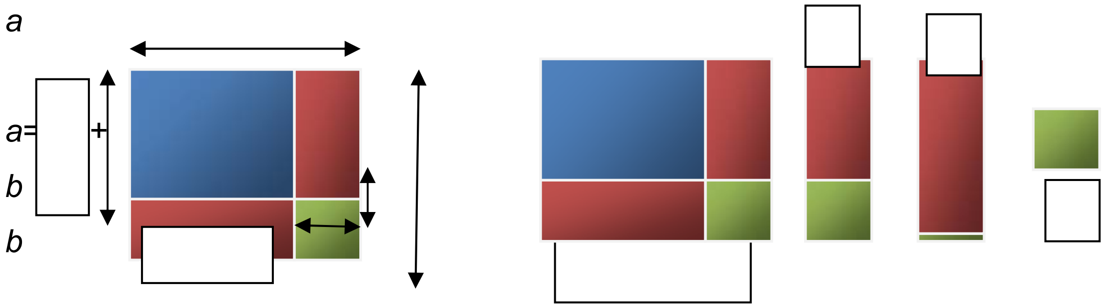
Os resultados que você encontrou nos itens **b**, **c**, **e**, **f**, da atividade anterior são chamados **trinômios quadrados perfeitos**. Trinômios porque representam a soma de três termos; quadrados perfeitos porque suas medidas de base e altura são iguais, que é o que faz esses retângulos serem denominados quadrados. Baseado nessas informações observe as figuras representadas a seguir e complete os quadrados em branco com letras, indicando as medidas dos lados no 1º membro e as áreas no 2º membro.

a) Qual a área do quadrado colorido, apresentado na figura a seguir?



Conclusão: $(a + b)^2 = a^2 +$ $\quad$ $+$

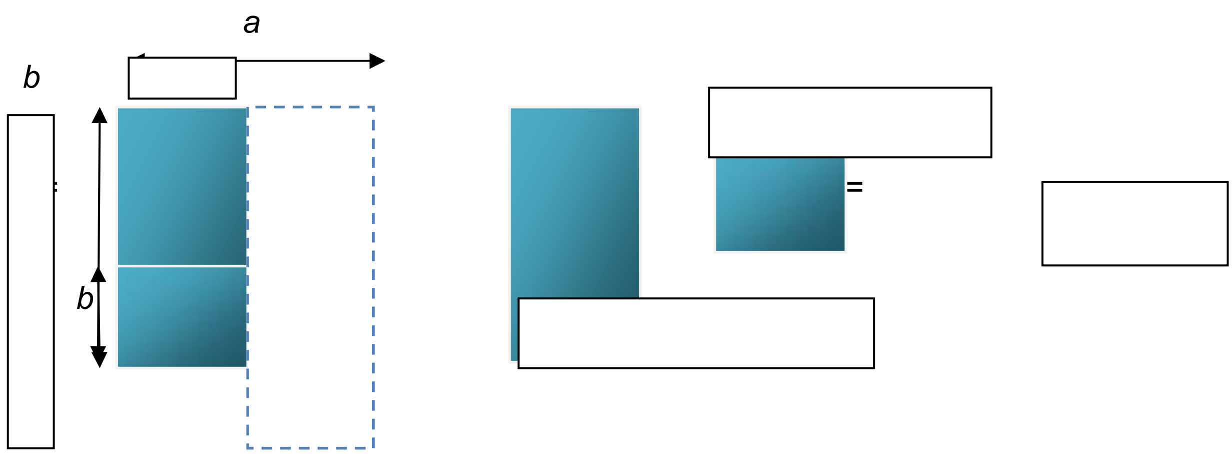
b) Qual a área do quadrado azul?



Conclusão: $(a – b)^2 = a^2 -+$

Atividade 6

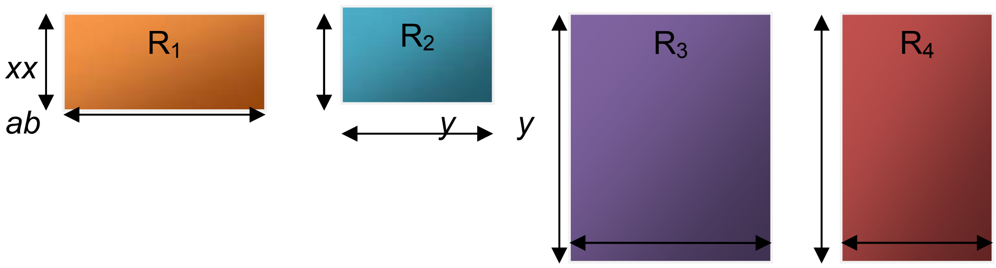
Com relação à atividade 4, itens **d** e **g**, os resultados que você encontrou recebem o nome de **produto da soma pela diferença de dois termos**. Produto, pois temos uma multiplicação e, além disso, também podemos observar que a soma e diferença (subtração) indicadas são dos mesmos termos. Pensando em suas respostas a esses itens (**d** e **g**, atividade 4), observe as figuras representadas a seguir e novamente complete os quadrados em branco com letras, indicando as medidas dos lados no 1º membro e as área no 2º membro.



Conclusão: $(a + b)(a - b) = \boxed{} - \boxed{}$

Atividade 7

Dados quatro retângulos, conforme representados a seguir:



Após observar suas medidas, determine:

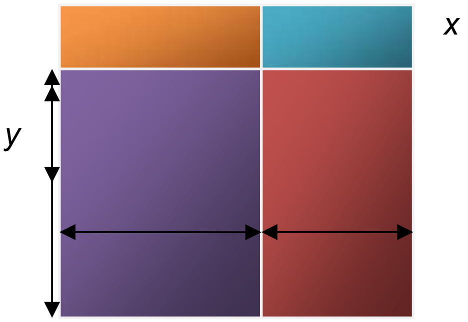
a) A área de cada retângulo.

RETÂNGULOS	R_1	R_2	R_3	R_4
ÁREAS				

b) Escreva a expressão algébrica que representa a área total de um retângulo formado a partir da junção destes quatro retângulos iniciais:

Área do novo retângulo ____ + ____ + ____ + ____

c) Veja como ficou esse novo triângulo na representação a seguir:



d) Identifique e escreva as novas medidas dos lados desse retângulo.

Base: ____________

Altura: _____________

e) Utilizando as medidas que você encontrou no item anterior, represente a área do retângulo do item **c**.

(____ + ____)(____ + ____)

f) Como os itens **b**e **e**tratam da mesma figura, as áreas expressas em cada uma delas são iguais. Sendo assim, preencha a igualdade a seguir:

____ + ____ + ____ + ____ = (____ + ____)(____ + ____)

Atividade 8 (consta de Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 24).

Observe os seis polinômios seguintes, nomeados de **A**a**F**, e as áreas 1 e 2 dos retângulos representados nas figuras abaixo:

A = $x^2 - 16$

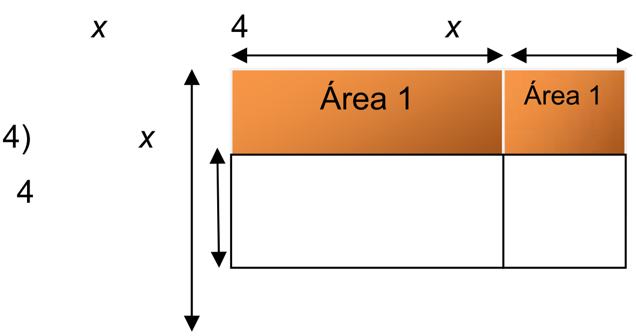
B = $x^2 - 4x + 4$

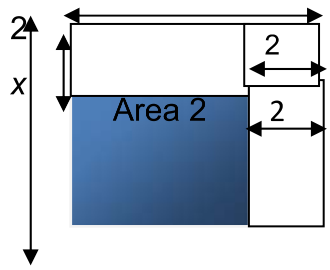
C = $(x + 4)(x - 4)$

D = $(x - 2)^2$

E = $2x(3 + 2x)$

F = $4x^2 + 6x$





Agora, responda:

a) Quais desses polinômios podem representar o cálculo da área 1?

b) Quais desses polinômios podem representar o cálculo da área 2?

c) Verifique que os polinômios**E**e**F** são idênticos (calcule o valor numérico de cada um para, pelo menos três valores diferentes de *x*).

Dica: dois polinômios são **idênticos** quando possuem valores numéricos iguais para qualquer valor atribuído à variável.

Atividade 9

Quando nos deparamos com resultados do tipo:

- $y(y + 3) = y^2 + 3y$,
- $(y - 3) = y^2 - 3y$,
- $2(2y + 3) = 4y + 6$,
- $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$
- $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
- $2x(3 + 2x) = 4x^2 + 6$

Dizemos que todas as expressões presentes no 1º membro (multiplicação de polinômios) de cada igualdade acima representam a forma fatorada (onde existe multiplicação) de cada polinômio do 2º membro.

Pensando nisso, mostre **geometricamente** que valem as igualdades:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

b) $(a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$

Etapa 2-Atividade 1 (consta de Imenes e Lellis,2009, p. 197)**-**

Vamos examinar o quadrado da soma de dois termos.

a) Efetue os cálculos e complete a tabela a seguir:

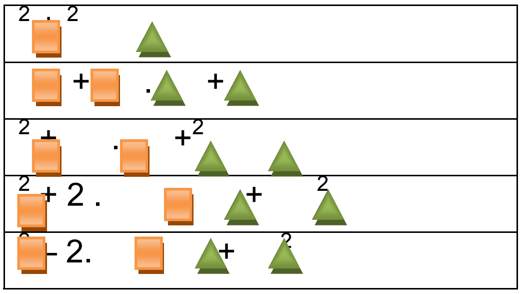
Tabela 1- Quadrado da Soma entre Dois Termos

CÁLCULO	RESULTADO
$(a + b)^2$	
$(x + y)^2$	
$(x + 3)^2$	
$(x + 4)^2$	

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

b)Preenchendo a tabela, você deve ter notado que os resultados obtidos têm sempre um mesmo padrão. Dos padrões do quadro abaixo, qual é o que corresponde a (+ $)^2$?

Tabela 2 - Padrão Observado - Quadrado da Soma Entre Dois Termos



Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

c)Com suas palavras, descreva o padrão escolhido. Comece assim:

Elevando ao quadrado uma soma de dois termos, vamos obter ...

Atividade 2 (consta de Imenes e Lellis, 2009, p. 197)

Na atividade anterior, nos referimos ao quadrado de uma soma. O padrão do quadrado de uma diferença é muito parecido. Sendo assim, responda: qual é o padrão para

(- $)^2$? Responda usando esses pequenos quadrados e triângulos.

Atividade 3 (consta de Imenes e Lellis, 2009, p. 197, adaptada)

As multiplicações seguintes também têm um padrão interessante. Observe e complete a tabela:

Tabela 3 - Produto da Soma Pela Diferença Entre Dois Termos

Multiplicação	Resultado
$(a + b)\ (a - b)$	
$(x + 1)\ (x - 1)$	$x^2 - 1$
$(x + 5)\ (x - 5)$	
$(x + y)\ (x - y)$	

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

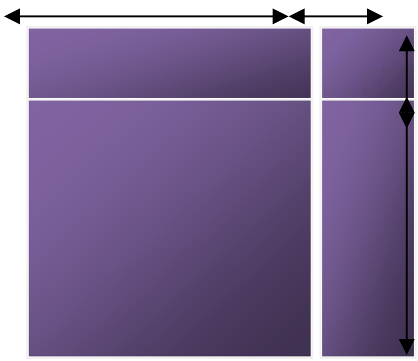
Atividade 4 (consta de Ribeiro, 2010, p. 149)

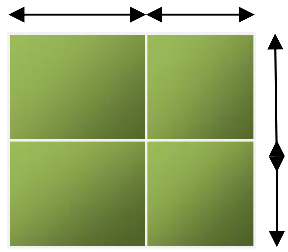
Associe os quadrados aos trinômios que representam as suas áreas. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes.

2a *ba* *6b*

a) *b*b)

a



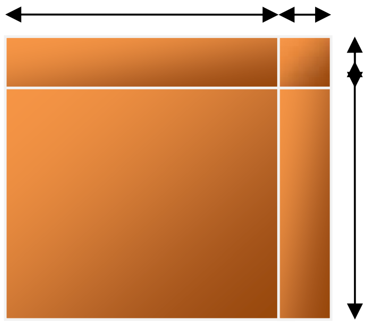


2a *6b*

c) *a* *2b*

2b

a



I) II) III)

$a^2 + 12ab + 36b^2$

$a^2 + 4ab + 4b^2$

$4a^2 + 4ab + b^2$

Atividade 5 (consta de Ribeiro, 2010, p. 151)

Associe cada quadrado azul ao trinômio quadrado perfeito que representa sua área. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes.

I) $x^2 - 4xy + 4y^2$

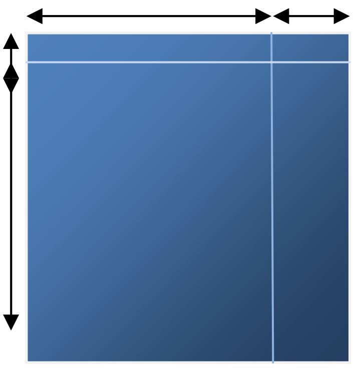
II) $4x^2 + 4xy + y^2$

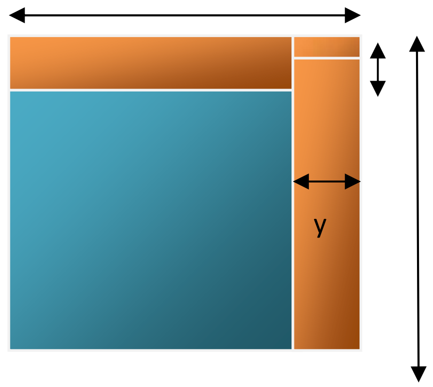
III) $4x^2 - 4xy + y^2$

a) $2xy$b)$2x$

yy

$2x2x$

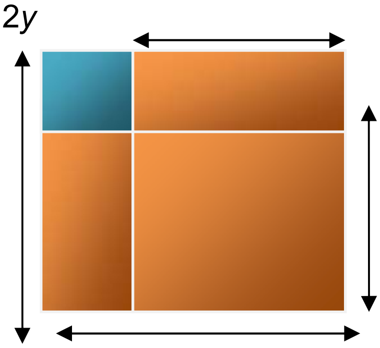




c) $2y$

$x2y$

x



Atividade 6

Com base no que foi estudado até agora, complete cada quadrinho abaixo com o termo adequado:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + \square$

b) $(x + 4)^2 = x^2 + \square + 16$

c) $(3x + 6)^2 = \square + 36x + 36$

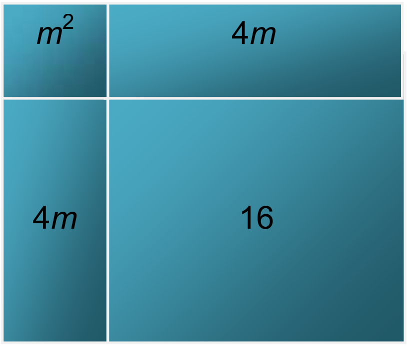
d) $(2a - b)^2 = 4\square - 4ab + b^2$

$(a - 3b)^2 = \square - \square ab + 9b^2$

e) $(x + y)(x - y) = \square - y^2$

Atividade 7 (consta de Imenes e Lellis, 2009, p. 198)

Abaixo temos um quadrado cuja área é $m^2 + 8m + 16$.



Observando a figura atentamente, diga quanto mede o lado desse quadrado:

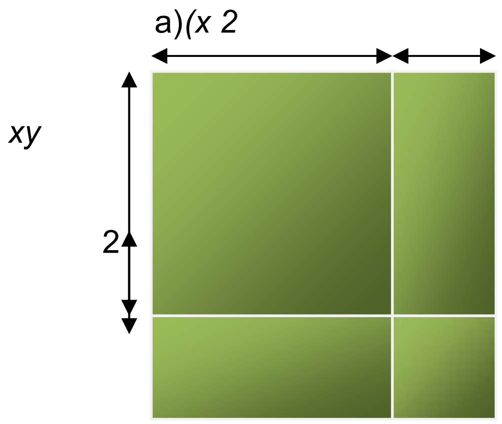
Atividade 8 (consta de Ribeiro, 2010, p. 154)

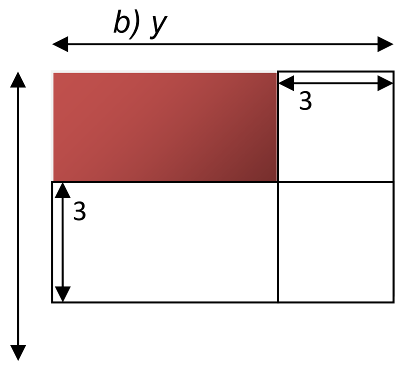
Associe os polinômios à sua forma fatorada, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.

A) $12x^2 + 8x$	I) $4x(2x + 3)$
B) $8x^2 + 12x$	II) $4x(3x - 2)$
C) $12x^2 - 8$	III) $4(2x^2 + 3)$
D) $8x^2 + 12$	IV) $4x(3x + 2)$
E) $12x^2 - 8x$	V) $4(3x^2 - 2)$

Atividade 9

Dadas as figuras a seguir, determine a área destacada em cada uma e depois apresente o resultado na forma fatorada:





a) Área =_________________ b) Área = ______________

Forma fatorada = ________________ Forma fatorada = __________

CAPÍTULO 5
ANÁLISES DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos as questões tanto da primeira quanto da segunda etapa da sequência didática, descritas no capítulo 4 e desenvolvidas com uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, seguidas de suas análises a priori e a posteriori.

Queremos esclarecer que um dos alunos desta turma é laudado como D. I. (deficiente intelectual) e, por não conseguir desenvolver as atividades solicitadas, não foi incluído na pesquisa. Porém, isso não implicou na sua exclusão do ambiente de desenvolvimento da pesquisa. Ele ficou conosco, porém desenvolvendo as atividades com as quais está familiarizado.

Fizemos um detalhamento de cada questão, buscando explicitar seus objetivos, os conhecimentos necessários à sua resolução, os caminhos e/ou dificuldades encontrados pelos estudantes na resolução destas atividades e demais observações necessárias. Essa análise inicial compõe nossa análise a priori.

Num segundo momento, norteadas pelos princípios da Engenharia Didática, passamos a uma análise geral da experimentação realizada (análise a posteriori), seguida de um confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori, ou seja, uma validação a fim de verificar a eficácia das atividades desenvolvidas para a aprendizagem do conceito produtos notáveis e fatoração de polinômios.

5.1 EXECUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Como descrito no capítulo anterior, as atividades que compõe a sequência didática abrangem o conceito de produtos notáveis e fatoração de polinômios, trabalhados a partir de uma interpretação geométrica. Ao final da experimentação, esperava-se que os alunos dominassem os conceitos abordados nessa sequência de atividades.

A sequência didática foi aplicada em duas etapas. Na primeira, composta por 9 atividades, os alunos trabalharam em trios, podendo recorrer aoprofessor/pesquisador quando precisasse e tendo como suporte os momentos de debate e institucionalização.

Na segunda etapa, composta também por 9 atividades, os alunos trabalharam individualmente, sem auxílio do professor/pesquisador e sem consulta às anotações anteriores.

A seguir, iniciamos a descrição de cada atividade proposta para cada das etapas desenvolvidas.

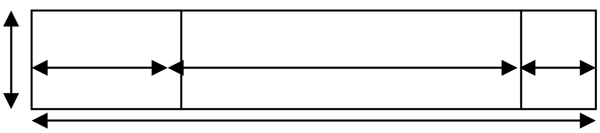
5.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA ETAPA 1

5.2.1 Atividade 1(consta de Caderno do Aluno – 8º Ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 12, Adaptada)

Observe as figuras a seguir e represente a área de cada quadrilátero por duas expressões algébricas equivalentes.

Dica: Considere primeiramente os quadriláteros como se **não** tivessem divisões, ou seja, utilize a medida total dos seus lados para o cálculo da área. Depois, considere as partes nas quais cada quadrilátero foi dividido, calcule cada área em separado e some todas elas para obter a área total procurada.

a)*x*

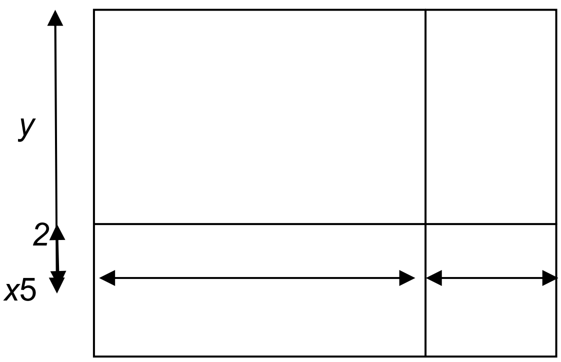


a 7

a + 7 + y

Modo 1 Modo 2

b)



Modo 1 Modo 2

c) Quais conclusões podemos tirar ao observar os resultados dos modos 1 e 2? Comente no espaço a seguir:

d) Registre a sua conclusão nos espaços abaixo de forma a completar a igualdade proposta:

Retângulo 1: ___(___ + ____ + ___) = _____ + _____ + _____

Retângulo 2: (___ + ____) (___ + ___) = _____ + _____ + _____ + _____

5.2.1.1 Análise a priori da atividade 1

Inicialmente, queremos destacar que os conceitos que buscamos desenvolver com a aplicação da sequência didática são totalmente desconhecidos pelos alunos observados.

Por isso, essa atividade foi escolhida para iniciar a sequência didática, pois esperamos que ao realizá-la o aluno retome o conceito de área de retângulos e, em casos particulares, de áreas de quadrados.

Logo no início, o aluno deverá perceber que não se trata de uma questão apenas geométrica, afinal as medidas das figuras apresentadas são representadas utilizando expressões algébricas, neste caso, polinômios.

O objetivo específico desta atividade é levar o aluno a perceber que $x(a + 7 + y) = ax + 7x + xy$ e que $(y + 2)(x + 5) = xy + 5y + 2x + 10$, ou seja, perceber a igualdade entre um produto de polinômios e seu desdobramento, após efetuarmos os cálculos necessários, em um único polinômio. Além disso, espera-se que o aluno desenvolva a ideia de fatoração implicitamente, através da percepção dessas igualdades.

Para que esse objetivo seja alcançado, além de retomar o conceito de área já mencionado anteriormente, o aluno precisará ter noções iniciais de expressões algébricas e de suas representações. Como exemplo dessas noções iniciais, podemos citar a representação do produto por um ponto ou até mesmo pela ausência de representação, ao invés de representá-lo pela utilização da letra *x* (que neste momento poderá confundir-se com a incógnita ou variável); podemos citar também a utilização de parênteses quando se quer representar um produto que envolve uma soma indicada.

De acordo com as orientações do próprio enunciado, que foi elaborado de forma a permitir que o aluno desenvolva as atividades com a mínima intervenção do professor/observador, esperamos que os alunos estabeleçam as relações mencionadas no parágrafo anterior.

Acreditamos que será necessária nossa intervenção para retomar o conceito de área de retângulo e de quadrado, este último sendo um caso especial de retângulo. Além disso, esperamos certa estranheza pela utilização das letras na representação das medidas.

Afim de amenizar esta estranheza, acrescentamos uma dica e uma separação para as respostas, deixando claro o que se espera como resposta a esta atividade.

Comparando os itens **a**e **b,** embora tenham o mesmo objetivo, procuramos deixar o primeiro item mais simples, com apenas a base da figura sendo dividida em partes de tamanhos diferentes. Já no segundo item, exploramos uma divisão da figura em quatro partes, sendo que tanto o lado que representa a base como o lado que representa a altura do retângulo foram divididos em partes de tamanhos diferentes.

Com os itens **c** e **d,** pretendemos criar um momento de generalização, de forma que cada aluno consiga fixar as ideias trabalhadas nos itens anteriores.

5.2.1.2 Análise a posteriori da atividade 1

Para a resolução desta atividade, os alunos se organizaram em trios seguindo o critério da afinidade, ou seja, os trios não foram determinados previamente pelo professor/observador. Neste dia, nenhum aluno da turma faltou, então foi possível formar dez trios.

Como se tratava de uma resolução inicial, isto é, um primeiro contato com o conteúdo abordado nesta pesquisa e como os grupos de trabalho ainda não estavam determinados, o primeiro encontro foi destinado apenas à resolução desta atividade, o que quer dizer que levaram cerca de 40 minutos para concluí-la.

Primeiramente, permitimos uma discussão e familiarização com a atividade dentro de cada subgrupo formado. Conforme previsto na análise a priori, foi necessária nossa intervenção para retomar o conceito de área de retângulo e de quadrado como um caso especial de retângulo, com o grupo todo. Para isso, utilizamos a exposição oral, o quadro de giz, exemplos numéricos e algébricos, além da colaboração dos alunos que se lembravam desse conceito.

Com relação ao item **a**, podemos dizer que alguns trios conseguiram resolver facilmente (apenas dois deles), pois se apoiaram nos exemplos discutidos anteriormente eque foram deixados no quadro de giz. Conseguiram representar a área do retângulo dado de duas formas diferentes, através das expressões algébricas $x.(a + 7 + y)$ e $x.a + x.7 + x.y$.

Os oito trios restantes precisaram da nossa intervenção, pois tiveram dificuldades ao generalizar os exemplos discutidos, nos quais utilizamos apenas duas divisões no retângulo inicial e não três como na questão a ser respondida. Neste momento, circulamos pela classe, passando de grupo em grupo, esclarecendo as dúvidas e incentivando os alunos a relacionarem os exemplos dados com as situações que deveriam resolver.

Também demonstraram confusão com relação à representação das operações indicadas; não identificavam quando deveriam somar ou multiplicar os termos encontrados.Mesmo contando com nosso apoio e intervenção, dois trios que vamos chamar de T3 e T7, apresentaram respostas equivocadas. Um destes trios,T3 encontrou como resposta ao modo 1, do item **a**, a expressão algébrica ($a + 7 + y + x$) e como resposta ao modo 2, do mesmo item, a expressão algébrica ($a + x . 7 + x. y + x$) nas quais não introduziram parênteses algum. A resposta apresentada pelo trioT7 ao modo 2 do item **a**, foi $x.a.7.y$.

Percebemos que para estes alunos, as representações apresentadas não estavam tendo significado. Passamos a um novo momento de institucionalização, pedindo a colaboração dos colegas que haviam resolvido de maneira satisfatória a questão. Permitimos que utilizassem o quadro de giz e mostrassem como procederam para resolver o problema proposto. Ao final, todos conseguiram responder e compreender este item da atividade.

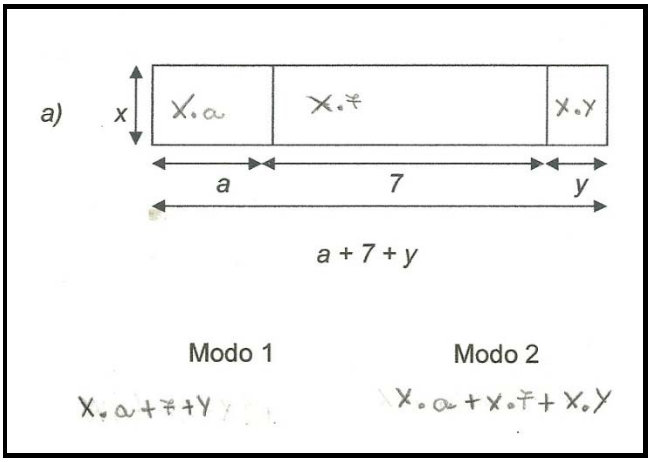
Após a realização do item **a**, resolver o item **b** se tornou um pouco mais fácil. A maior dificuldade dos alunos surgiu quando precisaram considerar o retângulo como um todo, ou seja, desconsiderando suas divisões. Apenas um,dos dez trios que estavam realizando a atividade, conseguiu resolver a questão sem nossa intervenção.

O problema encontrado pela maioria dos alunos (nove trios) foi na utilização dos parênteses e, para alguns, a dificuldade foi perceber que as medidas

das partes de cada lado deveriam ser somadas para indicar a medida total da base ou da altura; pensaram em multiplicar essas medidas.

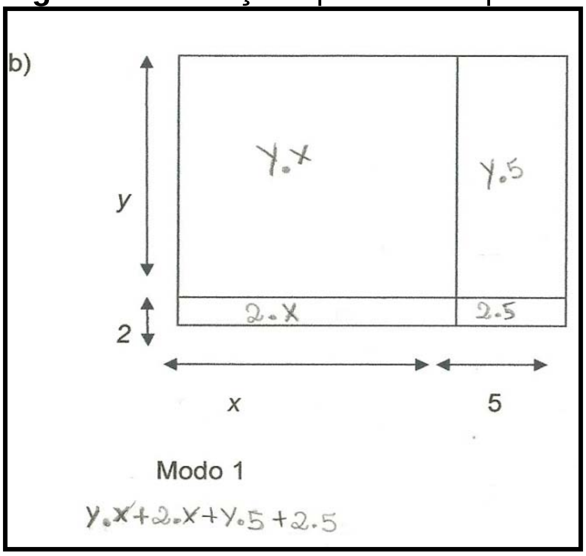
Nas figuras 19 e 20, apresentamos a solução encontrada por um dos trios (T3)aos itens **a** e **b** e, a partir dela, iremos comentar erros comuns atodos os estudantes.

Figura 19 - Solução apresentada pelo trio T3 - atividade 1 (item **a**) – etapa1



Fonte: Relatório do aluno

Figura 20 - Solução apresentada pelo trio T3 - atividade 1(item b) – etapa1



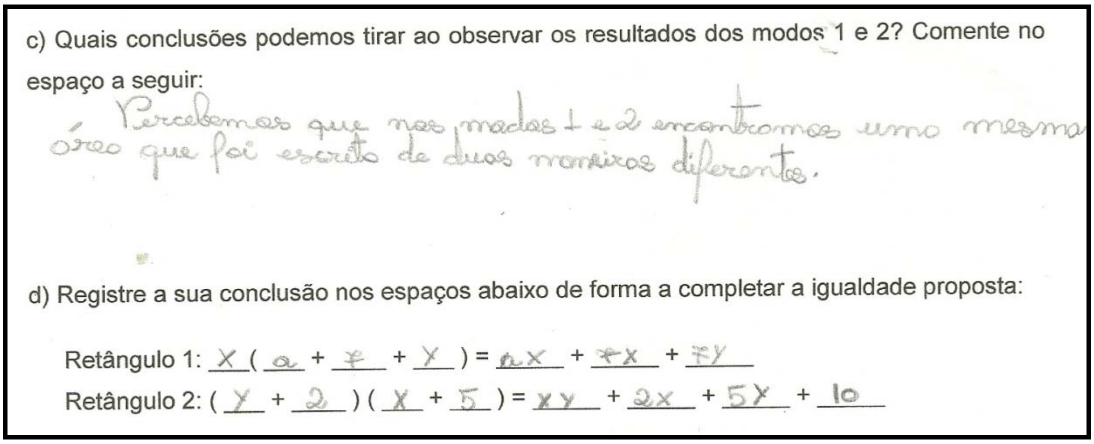
Fonte: Relatório do aluno

Podemos observar que todos os alunos ainda escrevem *x*.2 ou *y*.*x*e deixam produtos como 2.5 apenas indicados, quando poderiam resolvê-los; chamamos atenção da sala para as convenções sobre a escrita de expressões algébricas e para a necessidade de efetuarem os cálculos possíveis. Houve novo momento de institucionalização. Aproveitamos para retomar a propriedade distributiva e como ela se aplica nessa situação.

A resolução dos itens **c** e **d**ocorreu de forma tranquila. Poucos trios – apenas três (T3, T7 e T9) - precisaram pedir nosso auxílio. Conforme previsto na análise a priori, conseguiram generalizar as ideias dos itens anteriores.

Apresentamos, na figura 21, a forma como um dos trios, T4, finalizou esta atividade.

Figura 21 - Solução apresentada pelo trio T4 - atividade 1(itens **c** e **d**) – etapa 1



c) Quais conclusões podemos tirar ao observar os resultados dos modos 1 e 2? Comente no espaço a seguir:

Percebemos que nos modos 1 e 2 encontramos uma mesma área que foi escrita de duas maneiras diferentes.

d) Registre a sua conclusão nos espaços abaixo de forma a completar a igualdade proposta:

Retângulo 1: x (a + 7 + y) = ax + 7x + 7y

Retângulo 2: (y + 2) (x + 5) = xy + 2x + 5y + 10

Fonte: Relatório do aluno

5.2.2 Atividade 2(Consta de Caderno do Aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 12 e 13, Adaptada)

As expressões dadas a seguir referem-se a áreas de retângulos. Represente geometricamente essas expressões e encontre outra expressão algébrica que seja equivalente a cada uma delas.

a) $3a + 3b$

b) $x(y - 3)$

5.2.2.1 Análise a priori da atividade 2

Esta atividade foi pensada para complementar o estudo desenvolvido na atividade anterior. Esperamos que o aluno consiga fazer o caminho inverso, ou seja, dada a área de um retângulo, que ele consiga representar essa área geometricamente, reforçando a relação entre um produto de polinômios e sua resolução.

Acreditamos que resolvam com facilidade o item **a**, tomando como referência a atividade anterior.

No item **b**, pensamos que será necessária uma intervenção por parte do professor/observador, já que nesta questão introduzimos a subtração entre as medidas indicadas como base ou altura do retângulo dado. Esperamos que percebam que, no caso da subtração, não trabalharão com a figura toda; neste caso deverão pintar parte dela, a fim de obterem melhor compreensão.

5.2.2.2 Análise a posteriori da atividade 2

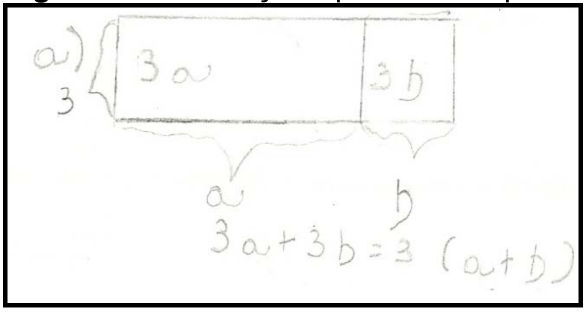
Novamente os alunos se reuniram em trios; os mesmos do encontro anterior. Quatro alunos faltaram, fazendo surgir quatro duplas. Os encaminhamentos foram os mesmos da aula anterior: primeiramente formaram os grupos de trabalho, receberam a folha com as questões e iniciaram a sua resolução.

Quando começaram a resolver o item **a**, sentiram necessidade de consultar os “desenhos” (forma como chamam as representações geométricas) da atividade anterior. Mesmo assim, encontraram dificuldades. Apenas quatro trios, T2, T5, T6 e T8, perceberam que deveriam desenhar um retângulo de dimensões 3 e ($a + b$). Os outros trios precisaram da nossa intervenção que, neste momento, ocorreu de forma individualizada, quer dizer, passando de grupo em grupo.

Depois de 15 minutos, todos haviam concluído o primeiro item e percebido a igualdade $3a + 3b = 3(a + b)$.

Asolução de um dos trios (T1), apresentada na figura 22, nos permite inferir que os alunos já estabelecem a relação entre área de um retângulo, produto de polinômios e fatoração, mesmo que ainda não dominem toda esta nomenclatura.

Figura 22 - Solução apresentada pelo trio T1 - atividade 2 (item **a**) – etapa 1

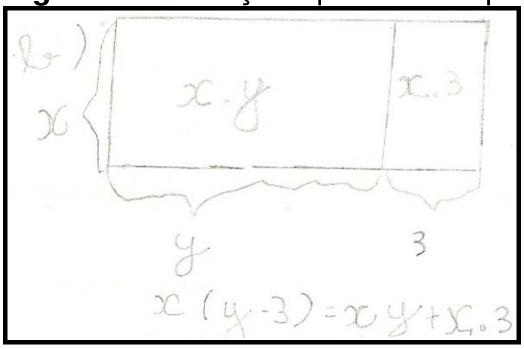


Fonte: Relatório do aluno

Iniciaram a resolução do item **b**. Nenhum grupo conseguiu representar a expressão algébrica (*y* – 3),como sendo a medida do lado de um retângulo,sem a nossa intervenção.

Na figura 23, apresentamos a solução elaborada pelo trio T10. Podemos perceber que os alunos ainda não identificam a diferença entre uma soma de monômios e uma subtração de monômios para a representação geométrica.

Figura 23 - Solução apresentada pelo trio T10 - atividade 2 (item **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Passamos a um momento de institucionalização oral, utilizando quadro de giz. Feitos os esclarecimentos necessários, a partir de um exemplo diferente do que havia sido pedido nesta questão, passaram a resolvê-la. Conseguiram identificar o retângulo pedido como parte da figura geométrica obtida e verificar que a expressão algébrica (*xy* – 3*x*), corresponde à área da parte que destacaram.

Com mais vinte minutos esta atividade estava concluída e verificamos que o conceito de produto entre polinômios havia sido desenvolvido de maneira satisfatória.

5.2.3 Atividade 3 (Consta de Caderno do Aluno – 8º Ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 13 e 14, Adaptada)

Represente geometricamente os produtos $(x + a)(x + b)$ e $(x - a)(x - b)$, depois encontre uma expressão algébrica equivalente a cada um deles.

a) $(x + a)(x + b)$

b) $(x - a)(x - b)$

5.2.3.1 Análise a priori da atividade 3

Esta atividade foi selecionada com o objetivo de fortalecer o conceito de produto entre polinômios que já vinha sendo desenvolvido nas atividades anteriores.

Propositadamente o termo “produto” aparece no enunciado da questão e substitui a expressão “área de retângulo”. Ao redigir a questão desta maneira e pedir que o aluno encontre uma expressão algébrica equivalente à expressão algébrica dada, introduzimos essa nomenclatura e esclarecemos qual é o assunto tratado neste estudo.

Considerando o item **b** já resolvido na questão 1, esperamos que os alunos não tenham dificuldade ao resolver o item **a**desta questão. Devem perceber que se trata de um retângulo de dimensões $(x + a)$ e $(x + b)$.

Com relação ao item **b**, pensamos que encontrarão dificuldades, visto que deverão utilizar subtração na representação das duas dimensões do retângulo que irão construir. Essa situação foi pensada para que encontrassem essa dificuldade, sendo uma preparação para situações do tipo “quadrado da diferença”, um dos focos deste trabalho.

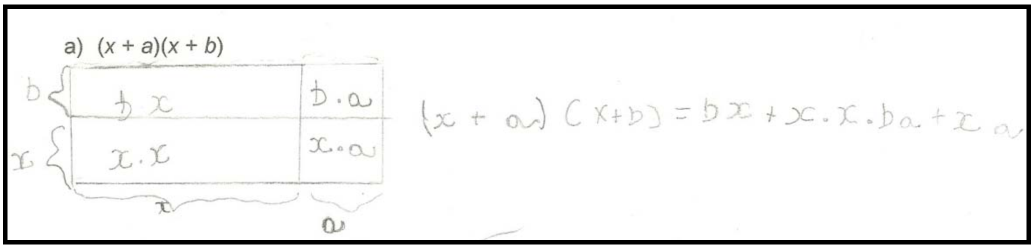
Esperamos que ao concluir a resolução desta atividade saibam resolver produtos entre binômios e produtos entre polinômios de forma geral.

5.2.3.2 Análise a Posteriori da Atividade 3

O desenvolvimento desta atividade ocorreu assim que os alunos concluíram a atividade anterior. Conforme iam terminando a atividade 2, iniciavam a resolução desta questão. Até o final do encontro, todos os trios e duplas formados nesse dia, haviam terminado a atividade.

Realmente a maioria dos grupos não encontrou dificuldades ao responder o item **a**. Conseguiram perceber a igualdade $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$. Tivemos que relembrar a todos que $x.x$ equivale a x^2 e que aorepresentar o produto de duas ou mais variáveis, elas devem ser escritas em ordem alfabética. Também ressaltamos que deveriam imprimir certa ordem na escrita dos termos da expressão algébrica, afinal a "estética" da escrita auxilia a compreensão. Ainda encontramos um trio (T5) realizando a troca entre os símbolos de multiplicação e adição, conforme mostra a figura 24.

Figura 24 - Solução apresentada pelo trio T5 - atividade 3 (item **a**) - etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Apenas dois trios solicitaram nossa ajuda, portanto, nossa intervenção ocorreu "individualmente", retomando o desenvolvimento da atividade do encontro anterior (atividade **1**, item **b**).

Os alunos encontraram muita dificuldade para responder o item **b** desta atividade. Dificuldade maior do que a prevista na análise a priori.

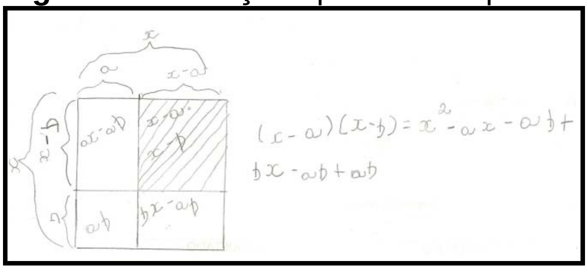
Foi necessário que fizéssemos juntos a construção do quadrado. Aliás, não haviam percebido que este item da questão abordava um quadrado. Indicamos suas medidas e destacamos a área pedida. Conseguiram compreender a "montagem" geométrica do produto de polinômios para casos como este.

Passaram para a escrita de uma expressão algébrica equivalente à expressão algébrica dada. Novamente encontraram muitas dificuldades, pois deveriam calcular algumas áreas para depois subtraí-las da área inicial. Sendo assim, duas das quatro duplas (que vamos denominar como D3 e D4) e cinco (T1, T5, T6, T8 e T10) dos seis trios formados neste dia, tiveram problemas com a representação algébrica da área a ser determinada no item **b** desta atividade. Para responderem de maneira satisfatória,deveriam encontrar a escritax^2 – [(ax – ab) +

(bx –ab)+ab] e depois deveriam efetuar os cálculos necessários e apresentarem como resposta $x^2 – ax – bx + ab$.

Uma dupla (D4) e três trios (T1, T6 e T8) apresentaram como resposta x^2 – [ax + ab + bx +ab + ab], ou seja, $x^2 – ax – bx + 3ab$. A outra dupla (D3) e os dois trios (T5 e T10) que também erraram, o fizeram por não utilizar o parênteses, encontrando como resposta $x^2 – ax – ab + bx –ab+ ab$, ou seja, $x^2 – ax + bx – ab$. A figura 25 mostra a solução apresentada pelo trio T5:

Figura 25 - Solução apresentada pelo trio T5 - atividade 3 (item **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Tivemos que retomar questões como operações com números inteiros (“regra de sinais”), uso dos parênteses e propriedade distributiva. Para isso, fizemos uso do quadro de giz e contamos com a participação dos alunos. A partir deste momento, mais um saber ficou institucionalizado.

Desta forma, conseguiram perceber que $(x – a)(x – b) = x^2 – ax – bx + ab$ e mais um caso de produto entre polinômios ficou conhecido pela turma.

Devemos observar que nenhum dos alunos pensou em subtrair da área inicial, representada por x^2, as áreas representadas por ax e bx, dos retângulos formados a partir da divisão do quadrado inicial em quatro partes e, em seguida adicionar a área do quadrado menor (também formado a partir da divisão do quadrado inicial em quatro partes), representada por ab, pois esta área, neste caso, é subtraída duas vezes, quando deveria ser subtraída apenas uma vez. Mesmo assim, optamos por não discutir esta possibilidade com a turma, pois este modelo de resolução aparecerá em atividades posteriores e pretendemos observar a reação dos alunos.

5.2.4 ATIVIDADE 4

Utilizando a representação geométrica como referência, desenvolva os produtos a seguir. Você também pode utilizar a propriedade distributiva, se julgar necessário.

a) $(x + 3)(x + 5) =$
b) $(x + 1)(x + 1) =$
c) $(y - 3)(y - 3) =$
d) $(a + 6)(a - 6) =$
e) $(a + b)(a + b) =$
f) $(a - b)(a - b) =$
g) $(a + b)\,(a - b) =$

5.2.4.1 Análise a priori da atividade 4

Continuando o estudo dos produtos entre polinômios, elaboramos esta questão para que os alunos possam generalizar os saberes adquiridos até aqui. Desta forma, para que eles consigam resolvê-la, deverão disponibilizar alguns dos conhecimentos já adquiridos nas questões anteriores, principalmente nas questões 2 e 3.

Acreditamos que nos depararemos com diversas formas de resolução. Alguns podem representar geometricamente todos os itens da atividade, o que não é o mais adequado neste momento, afinal esperamos que tenham percebido algumas regularidades que facilitam a resolução dos cálculos indicados.

Outros podem apenas imaginar a disposição geométrica destes fatores e, assim, conseguir encontrar as respostas procuradas, sem necessariamente fazer as construções geométricas. Podem ainda fazer uso, como o próprio enunciado sugere, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Caso utilizem um processo diverso dos que aqui apresentamos, indagaremos sobre o método utilizado e socializaremos com o grupo todo.

Os itens de **b** a **g** desta questão foram pensados de forma a introduzir o conceito de produtos notáveis, permitindo que o estudante comece a ter contato com ele, já observando determinadas regularidades.

5.2.4.2 Análise a posteriori da atividade 4

Esta questão foi resolvida em nosso terceiro encontro. Porém, não iniciamos a aula com sua resolução. Antes de formarmos os trios, pois neste dia não houveram faltas, entregamos uma cópia para cada aluno de um conjunto de definições trabalhadas ao longo dos dois encontros anteriores. Neste resumo que podemos chamar de sistematização, definimos expressões algébricas; variáveis; monômios; semelhança, adição e subtração entre monômios; polinômios; adição, subtração e multiplicação de polinômios. O resumo, de linguagem acessível aos alunos, foi feito com base em livro didático (Souza e Pataro, 2012) conforme consta no apêndice 1 deste trabalho . Fizemos uma leitura compartilhada, esclarecemos as dúvidas que surgiram e, então, passamos à resolução da atividade 4.

Foi dito a eles que poderiam, conforme o enunciado, resolver as questões como desejassem. De forma geral, todos os trios conseguiram resolver os produtos indicados. Precisaram da nossa intervenção para melhorar a resposta, pois inicialmente não reconheciam a necessidade de agrupar monômios semelhantes. Convém destacar que, de fato, este agrupamento ocorreu apenas uma veznas atividades anteriores.

Antes da nossa intervenção, os estudantes apresentaram respostas como:

$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 3x + 5x + 15$ (não agrupando os termos semelhantes);

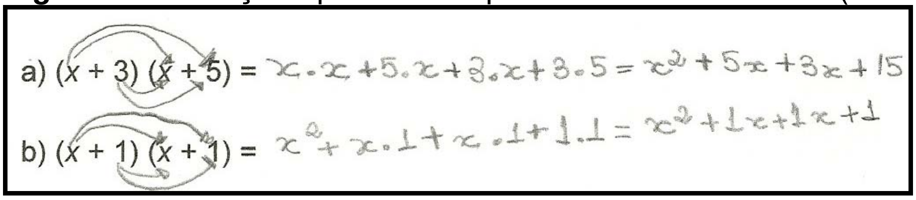
$(y – 3)(y – 3) =y^2 – 3y – 3y – 9$ (erro no sinal do último termo, além de não agrupamento dos termos semelhantes);

$(a + 6)(a – 6) =a^2 + 6a + 6a – 36$ (erro no sinal do segundo termo, além de não agrupamento dos termos semelhantes);

$(a + b)(a – b) = a^2 – ab + ba – b^2$ (não identificação de termos semelhantes, principalmente quando escritos em ordens diferentes).

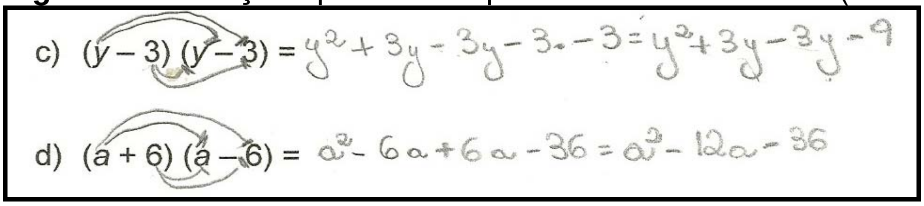
Podemos identificar alguns desses erros em partes destacadas nas soluções apresentadas pelos trios T4 e T7, respectivamente, conforme mostramos nas figuras 26 e 27.

Figura 26 - Solução apresentada pelo trio T4 - atividade 4 (itens **a** e **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Figura 27 - Solução apresentada pelo trio T7 - atividade 4 (itens **c** e **d**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Percebemos que apenas um dos trios (T1) optou por fazer a representação geométrica de cada item desta atividade. Os outros utilizaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme havíamos previsto na análise a priori.

Mesmo após nossa intervenção inicial, a maioria dos trios (sete dos dez formados neste encontro – T2, T3, T5, T6, T8, T9 e T10) recorreu a nós para esclarecer dúvidas com relação ao sinal de cada termo do polinômio resposta. Em vários casos, o erro na adição, causado pelo erro no sinal do termo, passou despercebido por eles. Também demonstraram estranheza ao perceber que termos do polinômio resposta, ao serem somados, poderiam zerar e, desta forma, não precisariam figurar na resposta.

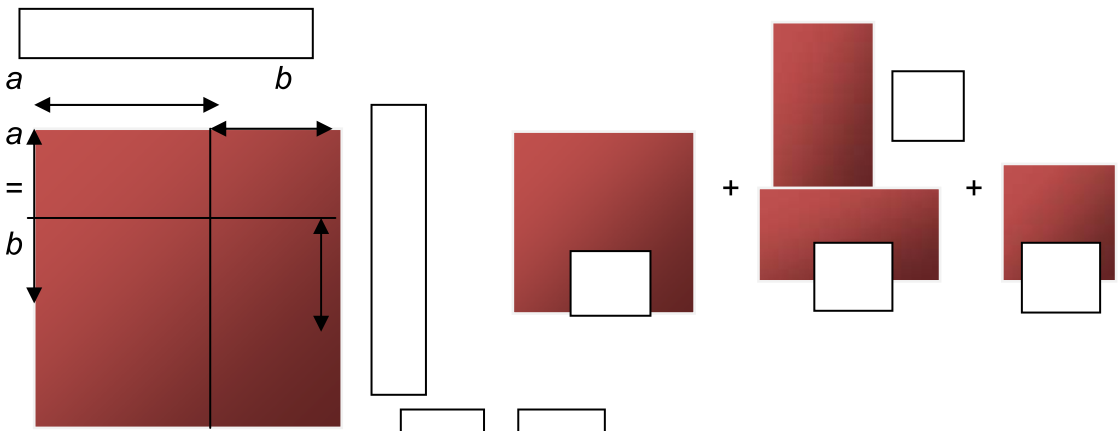
O trio (T1) que optou por representar geometricamente todos os itens da atividade, não conseguiu representar os casos de produto da soma pela diferença de dois termos e, neste momento, foi orientado a resolvê-los utilizando a propriedade distributiva, pois o assunto será retomado na atividade 6.

Foi necessário todo o tempo final do encontro para que concluíssem a atividade. Acreditamos que a turma, após a realização desta atividade, conseguirá identificar e resolver os casos de produtos entre polinômios com os quais entraram em contato, ou seja, quadrado da soma e quadrado da diferença entre dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos.

5.2.5 Atividade 5(Esta Atividade foi Baseada em uma Situação Problema do Caderno do Aluno – 8º Ano – Ensino Fundamental II – v.2 – Matemática, 2013, p. 15)

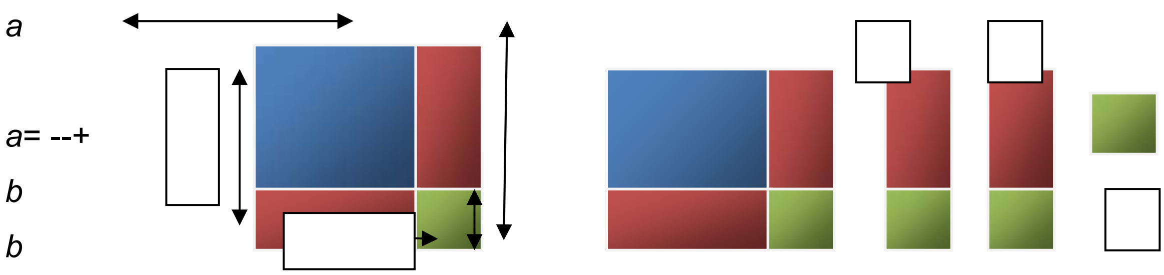
Os resultados que você encontrou nos itens **b**, **c**, **e**, **f**, da atividade anterior são chamados **trinômios quadrados perfeitos**. Trinômios porque representam a soma de três termos; quadrados perfeitos porque suas medidas de base e altura são iguais, que é o que faz esses retângulos serem denominados quadrados. Baseado nessas informações observe as figuras representadas a seguir e complete os quadrados em branco com letras, indicando as medidas dos lados no 1º membro e as áreas no 2º membro.

a) Qual a área do quadrado colorido, apresentado na figura a seguir?



Conclusão: $(a + b)^2 = a^2 +$ $\square$ + $\square$

b) Qual a área do quadrado azul?



Conclusão: $(a - b)^2 = a^2 - +$ $\square$ $\square$ $\square$

5.2.5.1 Análise a priori da atividade 5

Elaboramos essa atividade pensando na capacidade que o aluno tem de construir seu próprio conhecimento. O objetivo desta questão é sistematizar o conceito de trinômios quadrados perfeitos, partindo da observação de algumas respostas da atividade anterior (itens **b**, **c**, **e**, **f**). Após leitura do enunciado, esperamos que o aluno identifique um trinômio e um trinômio quadrado perfeito.

Acreditamos que até este momento ele não encontre dificuldades, afinal o texto da questão está redigido de forma a ser facilmente interpretado. Após resolver toda a atividade, queremos que o estudante tenha percebido a forma geral de um trinômio quadrado perfeito.

Embora o aluno já tenha a resposta a essas duas questões nos itens **e**e**f**da atividade anterior, temos sua apresentação sob um novo enfoque. Temos uma representação geométrica, mas será ele que completará o esquema, acrescentando as medidas que foram omitidas. Temos também a representação de cada área formada, mas o aluno deverá relacioná-las a cada termo da resposta. A conclusão também está no formato complete, pois pretendemos facilitar a apreensão do conceito de trinômios quadrados perfeitos.

Nossa intenção é que todos dominem as identidades $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, para que posteriormente possamos generalizá-las.

Pretendemos também que compreendam melhor a razão pela qual agrupamos *ab* com *ab* no primeiro caso. De fato, geometricamente, percebemos que esses termos representam as áreas de retângulos idênticos. No segundo caso, queremos que relacionem o termo $-2ab$ com a subtração (da área inicial), por duas vezes, da área *ab*. Queremos também que percebam que o fato de realizarmos essa dupla subtração, geometricamente, nos leva à necessidade de somar a área b^2, pois ela foi retirada duplamente da área inicial.

5.2.5.2 Análise a posteriori da atividade 5

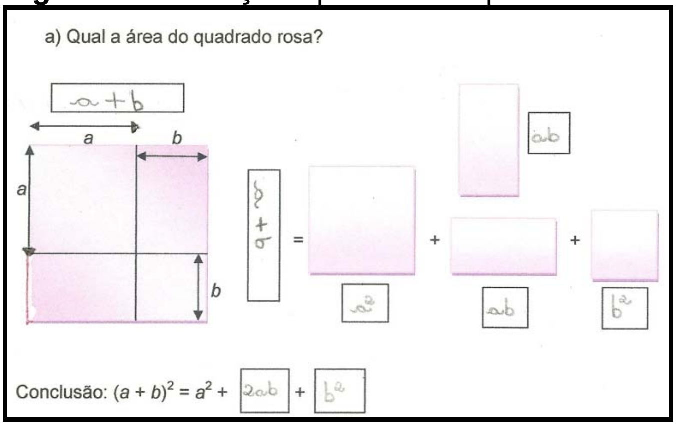
Estávamos no nosso quarto encontro. Notamos que alguns alunos faltaram – dois, por isso trabalhamos com duas duplas além dos oito trios. Demos um tempo para que os alunos lessem o enunciado da questão. Depois aguardamos mais um pouco, a fim de que discutissem com seus colegas de trabalho.

Passados esses dois momentos, iniciamos uma discussão com a turma sobre as definições identificadas na questão, ou seja, trinômios e trinômios quadrados perfeitos, retomando os exemplos de atividades anteriores.

Conforme previsto na análise inicial (a priori), os alunos gostaram da atividade e a consideraram fácil. Perceberam rapidamente quais expressões algébricas preenchiam corretamente as lacunas no item **a**. Devido à discussão realizada no encontro anterior, não demonstraram dificuldades ao somar as duas áreas representadas por *ab*e todos os alunos completaram corretamente a conclusão relativa a este item.

Na figura 28, mostramos a solução apresentada pelo trio T2. Com ela, pretendemos destacar a facilidade demonstrada pelos alunos em geral.

Figura 28 - Solução apresentada pelo trio T2 - atividade 5 (item **a**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

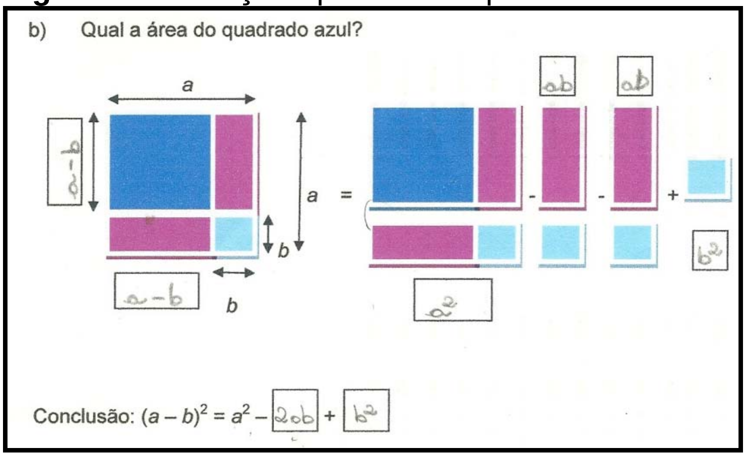
De maneira geral, a resolução do item **b** foi mais problemática. Quatro trios (T3, T4, T7 e T9) e uma dupla (D1) demoraram um pouco para perceber que da área inicial do quadrado cuja medida do lado era representada por *a*, foi realizada, por duas vezes, uma subtração da área do retângulo de dimensões *a e b*. Também tiveram dificuldades para perceberem que o fato de realizarmos geometricamente essa dupla subtração, nos levava à necessidade de somar a área b^2.

Para que esses fatos fossem esclarecidos a todos os alunos utilizamos momentos de aula expositiva, no quadro de giz. Conseguiram identificar esta solução como sendo uma alternativa muito mais fácil de resolução ao item **b** da atividade 3 e ficaram surpresos com a facilidade do raciocínio empregado nesta solução.

Após pouco mais da metade do tempo destinado a este encontro, ou seja, trinta minutos, os alunos concluíram a atividade e a nossa experimentação alcançou os objetivos propostos, pois os estudantes mostraram dominar as identidades $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

A solução apresentada pelo trio T7 para o item **b** desta atividade, após estes momentos de discussão, é mostrada na figura 29.

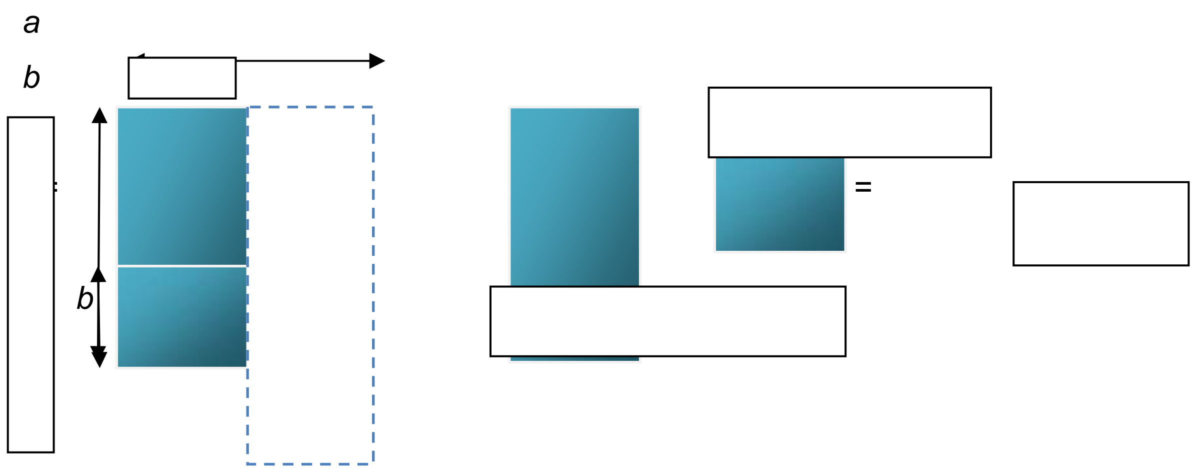
Figura 29 - Solução apresentada pelo trio T7 - atividade 5 (item **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

5.2.6 Atividade 6

Com relação à atividade 4, itens **d** e **g**, os resultados que você encontrou recebem o nome de **produto da soma pela diferença de dois termos**. Produto, pois temos uma multiplicação e, além disso, também podemos observar que a soma e diferença (subtração) indicadas são dos mesmos termos. Pensando em suas respostas a esses itens (**d** e **g**, atividade 4), observe as figuras representadas a seguir e novamente complete os quadrados em branco com letras, indicando as medidas dos lados no 1º membro e as áreas no 2º membro.



Conclusão: (a + b)(a – b) = $\boxed{}$ - $\boxed{}$

5.2.6.1 Análise a priori da atividade 6

Nesta atividade pretendemos que os alunos desenvolvam a partir da leitura do enunciado, a identificação de um produto da soma pela diferença entre dois termos e, além disso, compreendam seu significado.

Ao concluir o preenchimento de todos os campos determinados, esperamos que ele perceba a identidade $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$, concluindo o ciclo de apresentação dos produtos notáveis, previsto para ser desenvolvido mediante a aplicação desta sequência didática.

Acreditamos que a turma tenha dificuldades ao completar o segundo membro da igualdade, pois os dados que preenchem corretamente estes espaços não são obtidos explicitamente. Para encontrá-los, os estudantes deverão realizar cálculos, utilizando os conhecimentos que adquiriram ao realizar as atividades 1 e 2.

5.2.6.2 Análise a Posteriori da Atividade 6

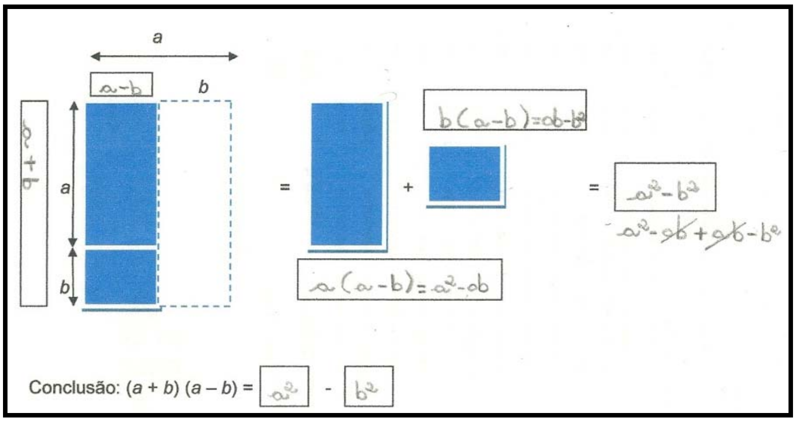
A realização desta atividade durou vinte minutos. Foi realizada em nosso quarto encontro, depois que concluíram a atividade 5. Lembramos que neste dia estávamos organizados em oito trios e duas duplas. Como cada dupla e cada trio iniciaram a resolução destas atividades em momentos distintos, pois esse tempo dependia do término da resolução da atividade anterior, fizeram a leitura do enunciado com seus companheiros. Quando apareciam dúvidas, nos chamavam para esclarecer de forma individualizada.

De acordo com a análise a priori, todos os alunos tiveram dúvidas ao completar o segundo membro da igualdade. Foi necessário fazermos uma pausa e retomarmos o uso da propriedade distributiva nos cálculos de $a(a - b)$ e $b(a - b)$, novamente através da exposição em quadro de giz.

Após essa explanação, quase todos os presentes conseguiram completar a conclusão. Apenas um trio (T3) e uma dupla (D1) recorreram a nós para poder perceber que $ab - b^2 + a^2 - ab$ equivale a $a^2 - b^2$; o trio esqueceu que $ab - ab$ equivale a zero e, por isso, não figura na resposta; a dupla não percebeu a inversão realizada que fez com que $- b^2 + a^2$ fosse escrito como $a^2 - b^2$ na conclusão.

Na figura 30, destacamos a solução final apresentada pela dupla D1, formada por causa da ausência de um integrante do trio T1. Eles estavam aguardando, desde a resolução da atividade 4, uma solução para a representação geométrica deuma expressão algébrica da forma produto da soma pela diferença entre dois termos.

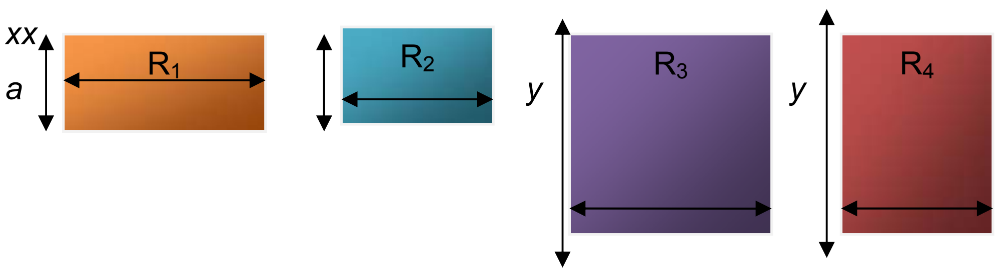
Figura 30 - Solução apresentada pela dupla D1 - atividade 6- etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

5.2.7 Atividade 7

Dados quatro retângulos, conforme representados a seguir:



Após observar suas medidas, determine:

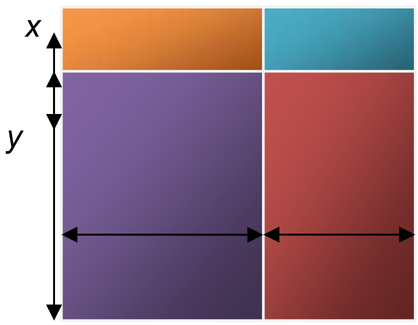
a) A área de cada retângulo.

RETÂNGULOS	R_1	R_2	R_3	R_4
ÁREAS				

b) Escreva a expressão algébrica que representa a área total de um retângulo formado a partir da junção destes quatro retângulos iniciais:

Área do novo retângulo ____ + ____ + ____ + ____

c) Veja como ficou esse novo triângulo na representação a seguir:



d) Identifique e escreva quais são as novas medidas dos lados desse retângulo.

Base: ____________

Altura: _____________

e) Utilizando as medidas que você encontrou no item anterior, represente a área do retângulo do item **c**.

(____ + ____)(____ + ____)

f) Como os itens **b**e **e**tratam da mesma figura, as áreas expressas em cada uma delas são iguais. Sendo assim, preencha a igualdade a seguir:

____ + ____ + ____ + ____ = (____ + ____)(____ + ____)

5.2.7.1 Análise a priori da atividade 7

O objetivo desta questão é levar o aluno a conhecer a fatoração de polinômios, utilizando habilidades e conhecimentos adquiridos ao longo da resolução das atividades precursoras desta.

No item **a** pedimos que o aluno preencha uma tabela de acordo com as figuras geométricas apresentadas na atividade. Como já fez nos exercícios iniciais, o aluno indicará cada uma das quatro áreas destacadas.

No item **b**, os estudantes deverão preencher as lacunas de forma a determinar a soma das áreas determinadas no item anterior.

O item **c** é apenas de observação. No próximo item, o aluno apenas representará a área da nova figura apresentada no item **c**. É no último item que o aluno deverá perceber a identidade $ax + bx + ay + by = (x + y)(a + b)$.

Pretendemos que o aluno identifique essa nova situação como o inverso do que vinha fazendo até agora, ou seja, ele terá um polinômio e deverá escrevê-lo como um produto.

Acreditamos que para a resolução dos itens **a**,**b**, **d**e **e** os alunos não terão dificuldade alguma, pois apenas utilizarão conhecimentos prévios.

Ao final da experimentação desta atividade, pretendemos chamar a atenção de todos para o fato de que o que acabaram de fazer se chama fatoração.

5.2.7.2 Análise a posteriori da atividade 7

Esta atividade foi realizada em nosso quinto encontro. Neste dia não houve faltas. Trabalhamos com dez trios. Ao iniciar a aula desse dia, fizemos uma nova institucionalização dos saberes apreendidos até então.

Como no encontro anterior desenvolvemos a última atividade sobre produtos notáveis, decidimos entregar a cada um deles uma cópia contendo um resumo de tudo o que havia sido discutido sobre este assunto nas aulas anteriores, conforme consta no apêndice 2.

Desta vez realizamos uma leitura silenciosa e, após todos concluírem suas leituras, promovemos um debate sobre o conteúdo do resumo.

Então, todos iniciaram a resolução da questão 7. Conforme havíamos previsto, a turma resolveu todos os itens sem necessidade de interferência do professor/observador. Não podemos deixar de comentar que sempre nos chamavam em suas mesas para que confirmássemos se os resultados encontrados estavam corretos. Isso demonstra que a turma está insegura com relação ao tema proposto. De fato, isto é muito comum, visto que grande parte dos assuntos abordados era desconhecida por todos eles.

Ao final da atividade e de nossas discussões, conseguiram compreender fatoração e, segundo os estudantes, fatorar é "*fazer o contrário do que estavam fazendo até agora.*" Sabemos que precisaremos desenvolver com mais rigor este conceito junto à turma, mas ficamos satisfeitas com os resultados apresentados até o presente momento.

Selecionamos a solução encontrada pelo trio T10 e mostramosnas figuras 31, 32, 33 e 34. A partir destes fragmentos conseguimos perceber o encadeamento das ideias propostas nesta questão com relação à construção dos conceitos de produto entre polinômios e fatoração por agrupamento.

Figura 31 - Solução apresentada pelo trio T10 - atividade 7 (item **b**) – etapa 1

Área do novo retângulo ax + bx + ay + by

Fonte: Relatório do aluno

Figura 32 - Solução apresentada pelo trio T10 - atividade 7 (item **d**) – etapa 1

d) Identifique e escreva quais são as novas medidas dos lados desse retângulo.

Base: $a+b$

Altura: $x+y$

Fonte: Relatório do aluno

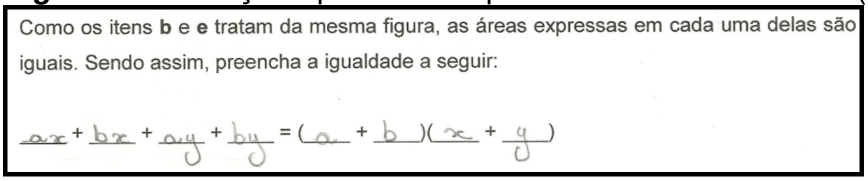
Figura 33 - Solução apresentada pelo trio T10 - atividade 7 (item **e**) – etapa 1

e) Utilizando as medidas que você encontrou no item anterior, represente a área do retângulo do item **c**.

$(a + b)(x + y)$

Fonte: Relatório do aluno

Figura 34 - Solução apresentada pelo trio T10 - atividade 7 (item **f**) – etapa 1


Como os itens **b** e **e** tratam da mesma figura, as áreas expressas em cada uma delas são iguais. Sendo assim, preencha a igualdade a seguir:

$ax + bx + ay + by = (a + b)(x + y)$

Fonte: Relatório do aluno

5.2.8 Atividade 8(consta de caderno do aluno – 8º ano – Ensino Fundamental II – v.2 – matemática, 2013, p. 24)

Observe os seis polinômios seguintes, nomeados de **A**a**F**, e as áreas 1 e 2 dos retângulos representados nas figuras abaixo:

A = $x^2 - 16$

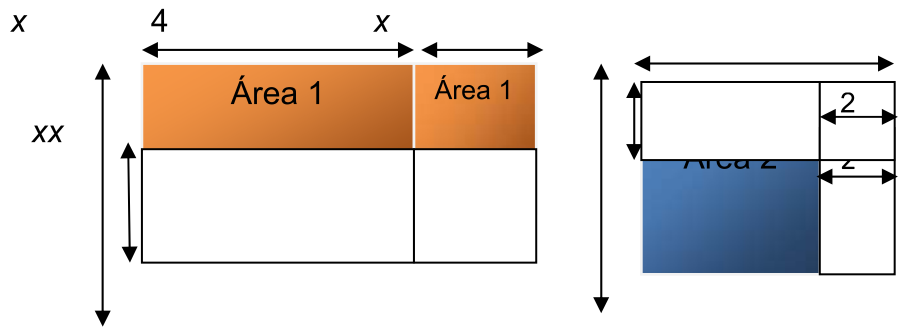
B = $x^2 - 4x + 4$

C = $(x + 4)(x - 4)$

D = $(x - 2)^2$ 4

E = $2x(3 + 2x)$

F = $4x^2 + 6x$



Agora, responda:

a) Quais desses polinômios podem representar o cálculo da área 1?

b) Quais desses polinômios podem representar o cálculo da área 2?

c) Verifique que os polinômios**E**e**F** são idênticos (calcule o valor numérico de cada um para, pelo menos três valores diferentes de *x*).

Dica: dois polinômios são **idênticos** quando possuem valores numéricos iguais para qualquer valor atribuído à variável.

5.2.8.1 Análise a priori da atividade 8

Escolhemos esta atividade com o objetivo de que, após experimentar vários cálculos de produtos de polinômios e verificar seus resultados e generalidades, o aluno possa relacionar este conhecimento com a fatoração de polinômios.

Esperamos que ao concluir a resolução dos itens**a**e **b**, ele perceba as igualdades $(\boldsymbol{x}^2 - 16) = (\boldsymbol{x} + 4)(\boldsymbol{x} - 4)$ e $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2$, através da utilização da interpretação geométrica, ou seja, efetuando o cálculo da área pedida de dois modos distintos. Mesmo que o estudante ainda não domine a nomenclatura fatoração, o conceito estará sendo desenvolvido ao longo da experimentação desta atividade.

O item **c** introduz os conceitos de valor numérico de um polinômio e de identidade de polinômios. Valendo-se dessas duas ideias, o aluno poderá perceber mais uma igualdade: $4x^2 + 6x = 2x(3 + 2x)$ e consolidar esse novo saber matemático.

Para o desenvolvimento dos itens **a** e **b**, acreditamos que os estudantes não precisarão recorrer a nós e que os resolverão com facilidade. Já para a resolução do último item, estamos prevendo um momento de institucionalização. Apesar de precisarmos lançar mão deste artifício anteriormente à resolução, acreditamos que será muito interessante que o aluno perceba a igualdade entre o resultado de um produto e sua forma fatorada, através de cálculos numéricos.

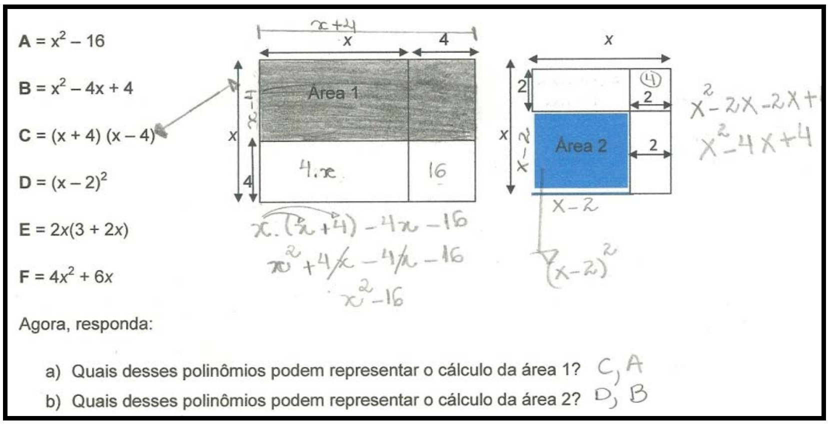
5.2.8.2 Análise a posteriori da atividade 8

A resolução desta atividade aconteceu em nosso sexto encontro. Percebemos que a turma já estava bem familiarizada com o tema desenvolvido. Neste dia, trabalhamos com nove trios. Curiosamente, todos os integrantes de um deles faltaram.

De acordo com nossa análise a priori, todos conseguiram desenvolver, sem grandes intervenções do professor/observador, os itens **a** e **b**. Demoraram um pouco para chegarem às respostas corretas, mas conseguiram encontrá-las quando avisávamos que haviam errado.

Através do recorte de uma solução mostrado na figura 35, pertencente ao trio T8, podemos verificar que os alunos demonstram certo domínio com relação ao conteúdo produto entre polinômios. Acreditamos que esta facilidade se deve ao fato de estes produtos estarem representados geometricamente.

Figura 35 - Solução apresentada pelo trio T8 - atividade 8 (itens **a** e **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

Os erros mais comuns aconteceram ao determinar as medidas dos lados da figura inicial – dois trios (T3 e T7) não analisaram adequadamente a primeira figura e pensaram que se tratava de um quadrado, indicando a medida do seu lado por (x + 4), deixando de observarem que se tratava de um retângulo de dimensões (x +4) e (x – 4)– item **a**.

Também apresentaram erros na subtração de áreas. Dois trios (T4 e T9) esqueceram – se que deveriam adicionar uma área de valor 4 à área que estavam determinando (item **b**). Este procedimento se fazia necessário por haverem subtraído duas vezes da área do quadrado inicial, a área do quadrado de lado dois.

Após vinte minutos, todos haviam concluído a resolução destes itens. Passamos ao momento de discussão sobre o que seria valor numérico de um polinômio e identidade de polinômios. Os alunos contribuíram com seus conhecimentos prévios e, após utilizarmos exemplos em quadro de giz, construímos esses conceitos com a turma.

Iniciaram a resolução do item **c** de acordo com o que havíamos discutido anteriormente. Três trios (T3, T4 e T7) encontraram dificuldades com a potenciação e com o uso dos parênteses no momento da resolução dos cálculos. Dois trios (T5 e T9) que escolheram os valores 1 e 5 para x, erraram ao efetuar o cálculo da seguinte maneira:

$4x^2 + 6x = 4.1^2 + 6.1 = 4.2 + 6 = 8 + 6 = 14$ (calcularam 1^2, como sendo 1.2); ou

$4x^2 + 6x = 4.5^2 + 6.5 = 4.10 + 30 = 40 + 30 = 70$ (calcularam 5^2, como sendo 5.2)

Outro trio (T6) encontrou dificuldades ao substituir os valores escolhidos para x na expressão $2x(3 + 2x)$. Ao substituírem, por exemplo,x por 2nesta expressão, encontraram $2.2(3 + 2.2) = 4.3 + 4 = 12 + 4 = 16$ (não se lembraram de efetuar primeiramente a adição que estava nos parênteses).

Como os problemas apresentados eram poucos e se tratavam de pequenas intervenções, conversamos apenas com os alunos destes trios, retomando os conceitos de potenciação e de expressões numéricas. Os próprios alunos identificaram e corrigiram seus erros.

Ao finalizar a resolução da questão, todos os estudantes conseguiram visualizar,mais uma vez, a igualdade entre uma expressão algébrica e a sua forma fatorada.

5.2.9 Atividade 9

Quando nos deparamos com resultados do tipo:

- $y(y + 3) = y^2 + 3y$,
- $(y – 3) = y^2 – 3y$,
- $2(2y + 3) = 4y + 6$,
- $(x + 4)(x – 4) = x^2 – 16$
- $(x – 2)^2 = x^2 - 4x +4$
- $2x(3 + 2x) = 4x^2 + 6$

Dizemos que todas as expressões presentes no 1º membro (multiplicação de polinômios) de cada igualdade acima representam a forma fatorada (onde existe multiplicação) de cada polinômio do 2º membro.

Pensando nisso, mostre **geometricamente** que valem as igualdades:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$
b) $(a – 3)^2 = a^2 - 6a + 9$

5.2.9.1 Análise a priori da atividade 9

Como se trata da última questão desta etapa, nosso objetivo é proporcionar ao aluno um momento de retomada de todos os conceitos que foram desenvolvidos até o momento. No enunciado apresentamos uma definição de fatoração para que o estudante vá se familiarizando com os textos e termos matemáticos.

Novamente utilizamos a representação geométrica e pretendemos fixar a relação entre a área de retângulos e o produto de polinômios, assim como revisar dois casos de produtos notáveis e generalizar o assunto fatoração.

Acreditamos que os alunos terão facilidade para desenvolver esta atividade.

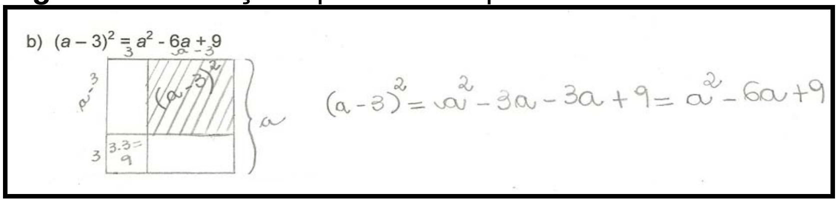
5.2.9.2 Análise a Posteriori da Atividade 9

Mais uma vez a turma estava completa, trabalhamos com 10 trios. Este foi nosso sétimo encontro e nele finalizamos a experimentação da etapa 1.

Fizemos uma leitura compartilhada do enunciado e seis trios colaboraram lendo e comentando os exemplos.

Conforme acreditávamos, os alunos tiveram muita facilidade na resolução desta atividade, mesmo porque montamos um “caderno” com todas as questões desenvolvidas até então e eles puderam consultar neste momento. Como este nosso encontro era de 2 horas/aula, quando todos os trios concluíram suas atividades, promovemos uma socialização dos “desenhos”, isto é, das representações geométricas encontradas.Na figura 36, reproduzimos a solução apresentada pelo trio T1 que desde o início da resolução desta sequência didática, mostrou preferência pela representação geométrica no desenvolvimento de todas as questões.

Figura 36 - Solução apresentada pelo trio T1 - atividade 9 (item **b**) – etapa 1



Fonte: Relatório do aluno

A partir do próximo encontro, verificaremos os conhecimentos de fato adquiridos, pois aplicaremos as atividades da etapa 2.

5.3 ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA ETAPA 2

Como já mencionado no capítulo anterior, a experimentação das questões desta etapa ocorreu em único encontro com duração de cem minutos, ou seja, duas horas-aula. Na aula anterior havíamos finalizado a aplicação das atividades da etapa 1, discutindo e esclarecendo as eventuais dúvidas.

Dos trinta alunos que foram observados durante a experimentação da etapa 1, apenas quatro faltaram neste dia, isto quer dizer que analisamos os resultados de vinte e seis alunos com relação às atividades da etapa 2.

Sendo assim, iniciamos o encontro dizendo como seria a aplicação das atividades desta nova etapa: o tempo disponibilizado para resolvê-la; a resolução realizada individualmente; o não acesso a fontes de consultas (escritas, colegas, professor/observador) e os motivos pelos quais decidimos proceder assim.

Como já citado anteriormente, esta etapa de aplicação da sequência didática difere da anterior, pois neste momento os alunos realizaram as atividades propostas individualmente, não recorrendo ao nosso auxílio e nãoacessando fontes de consulta como caderno, sistematizações ou exercícios resolvidos.

Foi neste momento que verificamos quais conceitos foram eficazmente construídos, ou seja, qual o real aprendizado da turma.

5.3.1 Atividade 1(Consta de Imenes e Lellis,2009, p. 197)

Vamos examinar o quadrado da soma de dois termos.

a) Efetue os cálculos e complete a tabela a seguir:

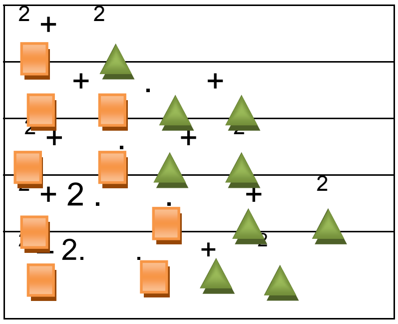
Tabela 4- Quadrado da Soma entre Dois Termos

CÁLCULO	RESULTADO
$(a + b)^2$	
$(x + y)^2$	
$(x + 3)^2$	
$(x + 4)^2$	

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

b) Preenchendo a tabela, você deve ter notado que os resultados obtidos têm sempre um mesmo padrão. Dos padrões do quadro abaixo, qual é o que corresponde a (+)²?

Tabela 5 - Padrão Observado - Quadrado da Soma Entre Dois Termos



Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

c) Com suas palavras, descreva o padrão escolhido. Comece assim: *Elevando ao quadrado uma soma de dois termos, vamos obter...*

5.3.1.1 Análise a priori da atividade 1

Oobjetivo desta atividadeé verificar se os alunos conseguem identificar o quadrado da soma entre dois termos, se percebem uma padronização nas respostas a este tipo de cálculo e se conseguem registrar de diversas maneiras este conceito.

Para responderem satisfatoriamente esta questão, os estudantes deverão saber:

- Com relação ao item **a**: calcular $(a + b)^2$, $(x + y)^2$, $(x + 3)^2$ e $(x + 4)^2$. Para isso, esperamos que o aluno utilize os conhecimentos adquiridos ao longo da resolução das atividades da etapa 1, neste caso específico, atividades 4 (itens **b**e **e**) e 5 (item **a**), assim como os saberes institucionalizados, nos quais evidenciamos o padrão presente nos quadrados da soma entre dois termos. Pode ser que algum (ou alguns) aluno recorra à representação geométrica para conseguir resolver esta questão.

- Com relação ao item **b**: identificar a igualdade

$$(\square + \triangle)^2 =^2 + 2\square \;.\; \square + \triangle^2 . \triangle$$

Mais uma vez reforçamos o padrão de resolução dos quadrados da soma entre dois termos.

- Com relação ao item **c**: relacionar o registro de representação algébrico e simbólico com o registro na linguagem natural; esperamos verificar a compreensão matemática do conceito abordado através da mudança de registro.

Alguns alunos poderão encontrar dificuldades para resolver esta questão por não se lembrarem dos padrões de resolução abordados nesta questão. Acreditamos que os estudantes demonstrarão certa estranheza ao responder o item **c**, pois terão que utilizar uma forma de registro diferente da habitual.

Porém, de forma geral, esperamos que resolvam com facilidade e rapidez, sem necessidade de recorrer às representações geométricas ou à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

5.3.1.2 Análise a posteriori da atividade 1

Descreveremos a seguir nossas considerações sobre as respostas apresentadas ao item **a** da questão 1.

Dentre os vinte e seis alunos que realizaram esta atividade, vinte e três deles conseguiram responder corretamente a questão, ou seja, escreveram os trinômios pedidos: $a^2 + 2ab + b^2$; $x^2 + 2xy + y^2$; $x^2 + 6x + 9$ e$x^2 + 8x + 16$. Desses vinte e três alunos que acertaram, dezesseis deles realizaram a atividade sem registro de cálculo algum, ou seja, utilizaram a técnica já descrita no capítulo 2: "*o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.*"

Os outros sete alunos que também responderam corretamente esta questão procederam da seguinte maneira:

- Cinco alunos utilizaram a técnica descrita anteriormente, porém fazendo uma passagem intermediária, ou seja,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2.x.y + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + 3)^2 = x^2 + 2.3.x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$
$$(x + 4)^2 = x^2 + 2.4.x + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$

- Um aluno recorreu à representação geométrica. Fez um esboço dessa representaçãoao lado da tabela e conseguiu identificar os resultados pedidos. Quando fizemos a devolutiva desta etapa da sequência didática, ele nos explicou os motivos pelos quais resolveu a questão desta forma - elenão conseguiu relembrar o formato da resposta.
- Um aluno utilizou a propriedade distributiva da multiplicaçãoem relação à adição, transformando cada potência dada em um produto de dois binômios.

Três estudantes (que vamos representar por E3, E4 e E7), responderam incorretamente esta atividade. Dois alunos (E4 e E7) apresentaram como respostas “trinômios” incompletos; colocaram apenas os resultados de cada termo do binômio inicial ao quadrado. Isto quer dizer que suas respostas à questão dada foram: $a^2 + b^2$; $x^2 + y^2$; $x^2 + 9$ e $x^2 + 16$.

A solução apresentada pelo estudante E4 está destacada na figura 37.

Figura 37- Solução apresentada pelo estudante E4 - atividade 1 – etapa 2

CÁLCULO	RESULTADO
$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$
$(x + y)^2$	$x^2 + y^2$
$(x + 3)^2$	$x^2 + 9$
$(x + 4)^2$	$x^2 + 16$

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

Fonte: Relatório do aluno

Um deles (E3) resolveu a questão utilizando de forma inapropriada a representação“*o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro* *termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.”*

De acordo com as respostas dadas pelos alunos a este item, observamos que de uma forma geral, as respostas foram adequadas.

Com relação ao item **b**, vinte e quatro alunos responderam corretamente. Os dois alunos (E4 e E7) que na resposta ao item anterior apresentaram “trinômios” incompletos (na realidade, outros binômios), colocando apenas os resultados de cada termo do binômio inicial ao quadrado, erraram novamente, pois escolheram como resposta a este item, a primeira opção da tabela:

$\square^2 + \triangle^2$.

Já no item **c**, a quantidade de acertos foi menor. Do total de alunos observados, vinte completaram corretamente a frase “*Elevando ao quadrado uma soma de dois termos, vamos obter...”*

Dos seis alunos (E4, E5, E7, E8, E9 e E10)que responderam de forma inadequada, dois deles (E4 e E7) já haviam errado as questões anteriores e, pelo mesmo motivo, completaram a frase erroneamente escrevendo que “[...] *vamos obter o primeiro termo ao quadrado, somado com o segundo termo ao quadrado.”*

Os outros quatro alunos (E5, E8, E9 e E10) erraram por se confundirem na escrita do termo central do trinômio quadrado perfeito. Completaram a frase de duas formas distintas, porém erradas: “[...] *vamos obter o primeiro termo ao quadrado, somado com o dobro dos termos dados, somado com o segundo termo ao quadrado.”*Ou “[...] *vamos obter o primeiro termo ao quadrado, mais duas vezes cada termo dado, mais o segundo termo ao quadrado.”*

De forma geral, podemos afirmar que a turma sabe resolver produtos da forma quadrado da soma entre dois termos, afinal foram poucos os alunos que não conseguiram responder corretamente todos os itens desta atividade, mas, mesmo estes alunos demonstraram possuir certas noções sobre o assunto estudado, necessitando apenas de pequenas intervenções.

5.3.2 Atividade 2(Consta de Imenes e Lellis, 2009, p. 197)

Na atividade anterior, nos referimos ao quadrado de uma soma. O padrão do quadrado de uma diferença é muito parecido. Sendo assim, responda: qual é o padrão para(- $\square$)^2?$\triangle$

Responda usando esses pequenos quadrados e triângulos.

5.3.2.1 Análise a priori da atividade 2

Assim como na atividade anterior,oobjetivo desta atividadeé verificar se os alunos conseguem identificar o quadrado da diferença entre dois termos e se percebem a padronização existente nas respostas a este tipo de cálculo, de acordo com os saberes abordados nas atividades 4 (itens **c** e **f**) e 5 (item **b**) da etapa 1 desta sequência didática

Para ter êxito nesta questão, o estudante deverá identificar a igualdade

$$(\square - \triangle)^2 = \square^2 - 2.\ \square\ . + \triangle^2$$

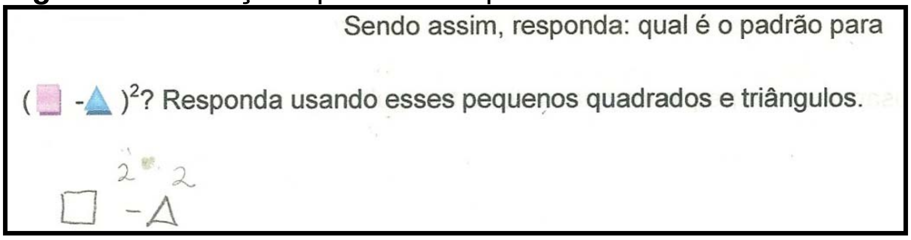
Acreditamos que os alunos não terão problemas para responder esta questão. Poderão utilizar sua resposta à questão anterior, desde que verifiquem a mudança de sinal do termo central do trinômio quadrado perfeito de forma geral $a^2 - 2ab + b^2$querepresenta o formatoda resposta esperada para esta atividade.

5.3.2.2 Análise a posteriori da atividade 2

Conforme havíamos previsto na análise anterior(a priori), os alunos não apresentaram dificuldades para responder esta questão. Dos vinte e seis alunos participantes desta etapa, apenas dois (E4 e E7 - os mesmos já citados na análise a posteriori da atividade 1) cometeram o mesmo tipo de erro apresentado na questão anterior, apontando como resposta ($\square^2$ - $\triangle^2$). Todos os outros identificaram a igualdade ($\square$ - $\triangle$)^2 =^{2}$\square$2. . $\square$+^{2}$\triangle$ $\triangle$

A resposta equivocada apresentada pelo estudante E7 está reproduzida na figura 38. Ele e o estudante E4 precisarão participar de uma retomada e reconstrução do saber envolvendo quadrado da soma e quadrado da diferença entre dois termos.

Figura 38 - Solução apresentada pelo estudante E7 - atividade 2 – etapa 2



Fonte: Relatório do aluno

Acreditamos que a quantidade de erros tenha diminuído, ao compararmos com as análises relativas às atividades 1 e 2, por utilizarmos nesta questão uma forma de registro mais simples (representações de quadrados e triângulos coloridos) ao invés da representação em linguagem natural.

5.3.3 Atividade 3(Retirada de Imenes e Lellis, 2009, p. 197, Adaptada)

As multiplicações seguintes também têm um padrão interessante. Observe e complete a tabela:

Tabela 6 - Produto da Soma Pela Diferença Entre Dois Termos

Multiplicação	Resultado
$(a + b)(a - b)$	
$(x + 1)(x - 1)$	$x^2 - 1$
$(x + 5)(x - 5)$	
$(x + y)(x - y)$	

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

5.3.3.1 Análise a priori da atividade 3

Elaboramos esta questão com o objetivo de averiguar os conhecimentos adquiridos pelos alunos com relação ao conceito de produto da soma pela diferença entre dois termos.

O estudante deverá perceber a mudança na forma de representação dos produtos de polinômios presentes nesta questão quando comparadas às formas de representação das atividades anteriores. Isto quer dizer que deverá estabelecer a diferença entre quadrados da soma ou da diferença entre dois termos e produto da soma pela diferença entre dois termos.

Esperamos que identifiquem a igualdade $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ e que consigam aplicá-la aos demais produtos presentes nesta atividade que são $(x + 5)\ (x - 5)$ e $(x + y)\ (x - y)$, de forma a conseguir completar a tabela.

Para facilitar a resolução desta atividade, os estudantes poderão observar um exemplo, pois a segunda linha da tabela já está preenchida. A atividade foi elaborada desta forma para ajudá-los a relembrar o conceito de produto da soma pela diferença entre dois termos, já abordado nas questões 4 (itens **d** e **g**) e 6 da etapa 1 desta sequência didática.

5.3.3.2 Análise a posteriori da atividade 3

Do total de vinte e seis alunos, vinte e cinco tiveram êxito ao responder esta questão, conseguindo preencher corretamente a tabela apresentada. Incluímos neste grupo os dois alunos que, nas duas atividades anteriores, responderam incorretamente por apresentarem binômios ao invés de trinômios (só se lembraram de que deviam elevar ao quadrado o primeiro e o segundo termo de cada binômio dado). O único aluno (E9) que não respondeu de forma totalmente satisfatória esta atividade, deixou de resolver 5^2 na terceira linha da tabela, porém completou de forma totalmente correta todas as outras linhas da tabela. A solução apresentada por este aluno é destacada na figura 39.

Figura 39 - Solução apresentada pelo estudante E9 - atividade 3 – etapa 2

Multiplicação	Resultado
$(a + b)\ (a - b)$	$a^2 - b^2$
$(x + 1)\ (x - 1)$	$x^2 - 1$
$(x + 5)\ (x - 5)$	$x^2 - 5^2$
$(x + y)\ (x - y)$	$x^2 - y^2$

Fonte: Imenes e Lellis, 2009, p. 197

Fonte: Relatório do aluno

5.3.4 Atividade 4(Consta de Ribeiro, 2010, p. 149)

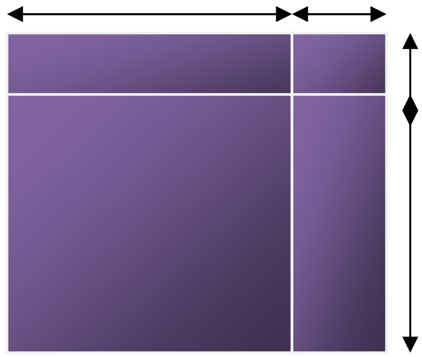
Associe os quadrados aos trinômios que representam as suas áreas. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes.

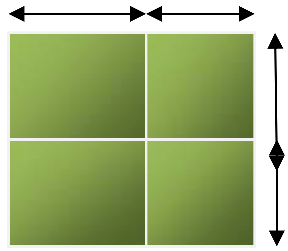
2a *ba* *6b*

a)*b* b)

a

2a

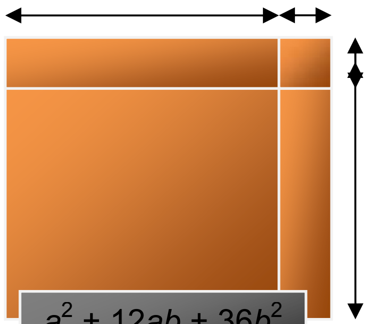




c) *a* *2b*

2b

a



II) II) III)

$a^2 + 12ab + 36b^2$ $a^2 + 4ab + 4b^2$ $4a^2 + 4ab + b^2$

5.3.4.1 Análise a priori da atividade 4

Esta questão foi elaborada com o objetivo de possibilitar ao aluno expandir seus conhecimentos sobre quadrado da soma entre dois termos. Ao resolvê-la, os alunos entram em contato com situações diferentes das já vivenciadas, pois os binômios apresentados nesta atividade têm complexidade maior que os utilizados nas questões anteriores.

Esperamos que cada estudante seja capaz de generalizar os conhecimentos adquiridos até este momento e relacione corretamente cada produto que está representado geometricamente com sua respectiva resposta.

Para que isto ocorra o aluno poderá utilizar diferentes artifícios, como calcular as áreas de quadrados de lados $2a + b$(item **a**), $a + 6b$(item **b**), $a + 2b$ (item **c**) e assim encontrar a três respostas apresentadas na questão; calcular as áreas de cada retângulo formado a partir do quadrado inicial em cada item e facilmente relacionar estes valores com as três respostas apresentadas; utilizar apenas a observação e concluir que valem as igualdades $(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$, $(a + 6b)^2 = a^2 + 12ab + 36b^2$ e $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$.

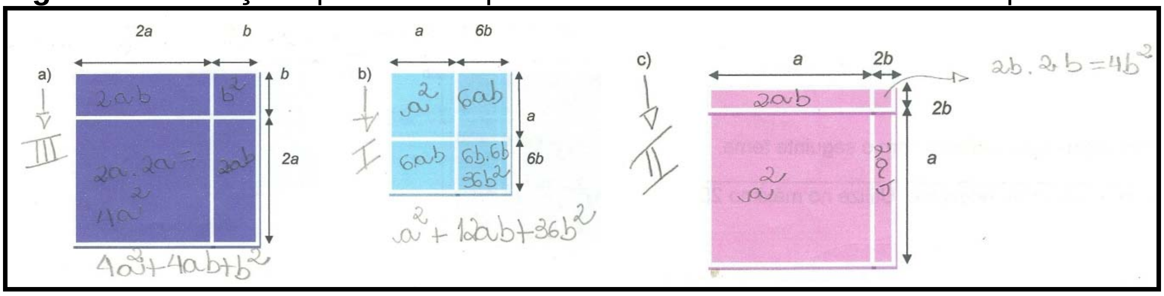
Acreditamos que os alunos resolverão facilmente esta questão.

5.3.4.2 Análise a posteriori da atividade 4

Todos os alunos observados responderam de maneira correta esta atividade, encontrando as associações **a – III**; **b – I**; **c – II**.

Mostramos na figura 40, o método de resolução empregado pelo estudante E1, evidenciando como conseguiu responder com êxito a questão.

Figura 40 - Solução apresentada pelo estudante E1 - atividade 4 – etapa 2



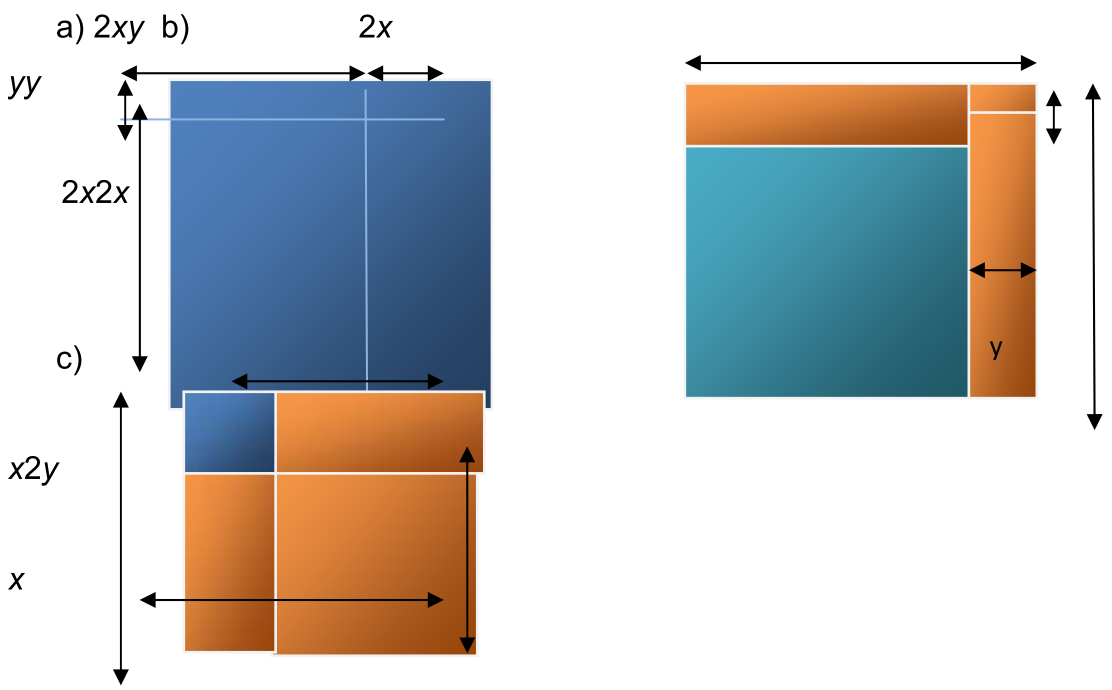
Fonte: Relatório do aluno

Acreditamos que o fato de poder utilizar a exclusão, já que tinham acesso a todas as respostas, funcionou como um facilitador para esta atividade.

5.3.5 Atividade 5 (Consta de Ribeiro, 2010, p. 151)

Associe cada quadrado azul ao trinômio quadrado perfeito que representa sua área. Para isso, escreva a letra e o símbolo romano correspondentes.

I) $x^2 - 4xy + 4y^2$ $\qquad$ $4x^2 + 4xy + y^2$ $\qquad$ $4x^2 - 4xy + y^2$



5.3.5.1 Análise a priori da atividade 5

Assim como na questão anterior, o objetivo desta questão é propiciar aos alunos o contato com quadrados da soma ou quadrados da diferença entre dois termos, diferentes daqueles já abordados nas atividades anteriores.

Pretendemos que o aluno generalize os conhecimentos adquiridos até agora e relacione corretamente $(2x + y)^2$ com $4x^2 + 4xy + y^2$; $(2x – y)^2$ com $4x^2 – 4xy + y^2$; $(x – 2y)^2$ com $x^2 – 4xy + 4y^2$.

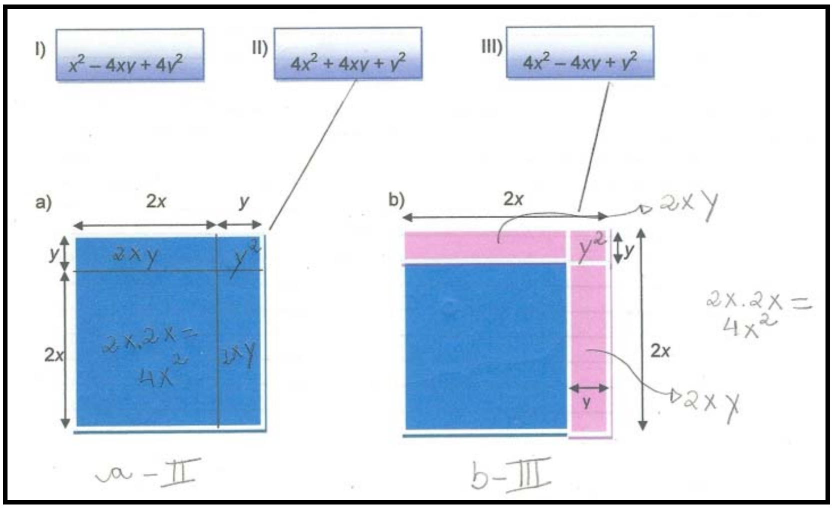
Esperamos que o estudante resolva com facilidade esta questão pois, mais uma vez, retomamos o conceito de área de retângulos para a resolução de produtos entre dois polinômios. Neste momento, o aluno deverá estar familiarizado com esta representação, afinal ela vem sendo utilizada durante toda a sequência didática.

5.3.5.2 Análise a posteriori da atividade 5

Mais uma vez o êxito foi geral. Todos identificaram as associações **I – c**; **II – a**; **III – b**. Acreditamos que, novamente, o fato de poder utilizar a exclusão, já que tinham acesso a todas as respostas, funcionou como um facilitador também para esta atividade. Associado a este fato, temos a possibilidade dos alunos terem relacionado a ideia de área total da figura (todo o quadrado estar pintado de azul) com um trinômio com termos exclusivamente positivos e área parcial da figura (parte do quadrado inicial estar pintado de azul) com trinômios que possuem termo central negativo.

A forma como o estudante E24 respondeu os itens **a** e **b** desta questão, conforme apresentamos na figura 41, demonstra a facilidade encontrada pela turma ao resolver esta atividade.

Figura 41 - Solução apresentada pelo estudante E24 - atividade 5 (itens **a** e **b**) – etapa 2



Fonte: Relatório do aluno

5.3.6 Atividade 6

Com base no que foi estudado até agora, complete cada quadrinho abaixo com o termo adequado:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + \square$

b) $(x + 4)^2 = x^2 + \square + 16$

c) $(3x + 6)^2 = \square + 36x + 36$

$(2a – b)^2 = 4 \square - 4ab + b^2$

d) $(a - 3b)^2 = \boxed{} - \boxed{}\ ab + 9b^2$

$(x + y)(x - y) = \boxed{} - y^2$

5.3.6.1 Análise a priori da atividade 6

Considerando o estudo já realizado, esta questão foi elaborada para permitir que o aluno, novamente, entre em contato com os três casos de produtos notáveis abordados nesta sequência didática, porém em uma mesma atividade.

Até o presente momento, abordamos apenas dois casos de uma única vez, quadrado da soma entre dois termos e quadrado da diferença entre dois termos, pois suas formas gerais são bem próximas.

Desta maneira, pretendemos verificar se o aluno identifica cada um desses casos, encontrando suas respectivas resoluções, inclusive nocaso do produto da soma pela diferença entre dois termos.

Optamos por colocar parte da resposta, criando uma atividade de completar, pois queríamos facilitar esta identificação por parte do aluno, assim como ajudá-lo na percepção das regularidades também existentes em binômios mais complexos (designamos por binômios mais complexos, os binômios que possuem um ou os dois termos representados através de um monômio que, obrigatoriamente, tem coeficiente e parte literal diferentes de um).

Esperamosque os estudantes apresentem domínio do conteúdo “produtos notáveis”, mostrando facilidade para completar as igualdades propostas.

5.3.6.2 Análise a posteriori da atividade 6

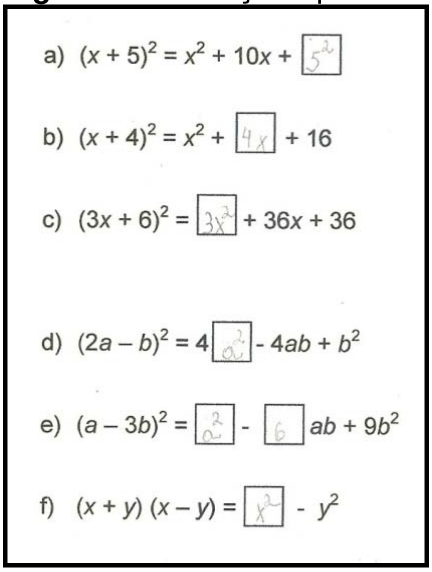
Na realização desta atividade observamos que vinte alunos responderam corretamente todos os itens desta atividade.

Como a atividade era uma questão de completar, não houve problemas com relação ao número de termos do polinômio resposta.

Os outros seis (E3, E4, E5, E7, E13, E21)erraram poresquecer de incluir o número 9, deixando apenas x^2 no primeiro termo do trinômio do item **c** (dois alunos) ou por completarem o termo central do item **e** com 3*ab* e não 6*ab* que seria a resposta correta (dois alunos).Dois alunos deixaram as potências apenas indicadas, como por exemplo, no item **a** completaram com 5^2 ao invés de 25.

Podemos perceber os erros citados e a falta do cálculo de potências na resolução apresentada pelo estudante E7 que reproduzimos na figura 42.

Figura 42 - Solução apresentada pelo estudante E7 - atividade 6 – etapa 2



a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + \boxed{5^2}$

b) $(x + 4)^2 = x^2 + \boxed{4x} + 16$

c) $(3x + 6)^2 = \boxed{3x^2} + 36x + 36$

d) $(2a - b)^2 = 4\boxed{a^2} - 4ab + b^2$

e) $(a - 3b)^2 = \boxed{a^2} - \boxed{6}\,ab + 9b^2$

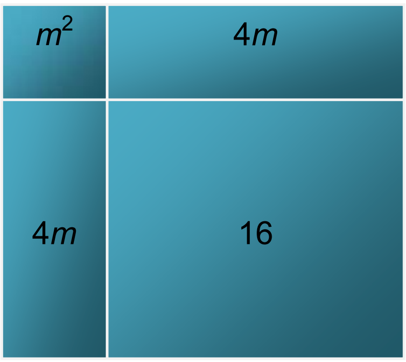
f) $(x + y)(x - y) = \boxed{x^2} - y^2$

Fonte: Relatório do aluno

Ao refletir sobre os resultados da turma com relação às respostas dadas às questões de números 1 a 6, podemos afirmar que os alunos, no geral, compreenderam e assimilaram o conceito de produtos notáveis, no que diz respeito aos três casos estudados: quadrado da soma entre dois termos, quadrado da diferença entre dois termos, produto da soma pela diferença entre dois termos.

5.3.7 Atividade 7(Consta de Imenes e Lellis, 2009, p. 198)

Abaixo temos um quadrado cuja área é $m^2 + 8m + 16$



Observando a figura atentamente, diga quanto mede o lado desse quadrado:

5.3.7.1 Análise a priori da atividade 7

Com esta atividade iniciamos a verificação da aprendizagem sobre fatoração. Através dela, poderemos perceber se o aluno conseguiu desenvolver a ideia de fatorar relacionada à ideia de encontrar as medidas do lado de um retângulo cuja área é conhecida.

Para resolver esta questão esperamos que o aluno reconheça (m^2 + 8m + 16) como um trinômio quadrado perfeito, resultante de um produto do tipo quadrado da soma entre dois termos. Desta forma, o produto procurado é (m + 4)^2, então o estudante encontrará como medida do lado do quadrado (m + 4).

O aluno poderá também determinar a medida do lado de cada retângulo formado a partir da divisão do retângulo inicial em quatro partes, sendo eles dois quadrados e dois retângulos. Ou seja, encontrará as medidas "m"para o lado do quadrado menor; "4" para o lado do quadrado maior; "m" e "4" para as bases e alturas dos dois retângulos. Em seguida, será possível determinar a medida do lado do retângulo (quadrado) inicial que será(m+ 4).

Acreditamos que, mais uma vez, a turma não terá dificuldades para encontrar a solução pedida.

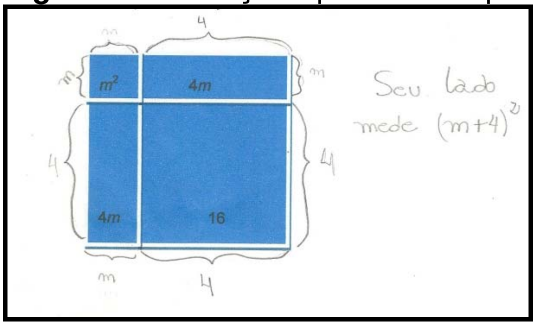
5.3.7.2 Análise a posteriori da atividade 7

Durante a observação da realização desta atividade, foi possível perceber que os alunos a desenvolveram com facilidade, isto é, conseguiram se apropriar da ideia de fatorar relacionada à ideia de encontrar as medidas do lado de um retângulo cuja área é conhecida.

Dentre os estudantes observados, vinte e quatro deles responderam adequadamente à questão 7, escrevendo que o lado do quadrado deveria medir (m + 4). Parte deles (oito alunos) deixaram como registro de sua resposta, a identidade $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$, os alunos restantes (num total de 16), deixaram como registro de sua resposta, as medidas indicadas em cada parte dos lados do quadrado inicial, ao somar estas medidas chegaram à resposta (m + 4).

Os dois alunos restantes E1 e E4, não responderam adequadamente esta questão, pois deixaram como registro de sua resposta, apenas a identidade $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2$, marcando $(m + 4)^2$ como sendo a expressão algébrica que representa a medida do lado do quadrado dado. Na figura 43, verificamos como o aluno E1 respondeu esta atividade.

Figura 43 - Solução apresentada pelo estudante E1 - atividade 7 – etapa 2



Fonte: Relatório do aluno

Mesmo assim, percebemos que não houve um erro de fatoração. O erro, provavelmente, se deve a uma falta de atenção com relação ao enunciado da questão.

5.3.8 Atividade 8(retirada de Ribeiro, 2010, p. 154)

Associe os polinômios à sua forma fatorada, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes.

A)	$12x^2 + 8x$	I)	$4x(2x + 3)$
B)	$8x^2 + 12x$	II)	$4x(3x - 2)$
C)	$12x^2 - 8$	III)	$4(2x^2 + 3)$
D)	$8x^2 + 12$	IV)	$4x(3x + 2)$
E)	$12x^2 - 8x$	V)	$4(3x^2 - 2)$

5.3.8.1 Análise a priori da atividade 8

Nesta atividade listamos vários binômios e esperamos que o aluno associe cada um deles à sua forma fatorada que também é dada.

Ao observar cada binômio dado e cada fatoração existente, cada um listado separadamente, pensamos que o aluno consiga fazer a associação pedida na questão. Para chegar a essa conclusão o estudante poderá fazer cada fatoração dada, de **A** até **E**, utilizando a técnica da *fatoração pelo fator comum em evidência*. Ou ainda, poderá resolver cada produto de **I** até **V,** através da utilização da *propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.*

Acreditamos que alguns alunos tenham dificuldades para encontrar as associações corretas, principalmente devido à falta de acesso aos registros das aulas anteriores. Mas, esperamos que a maioria encontrará como resposta os pares: **A – IV; B – I; C – V; D – III; E – II.**

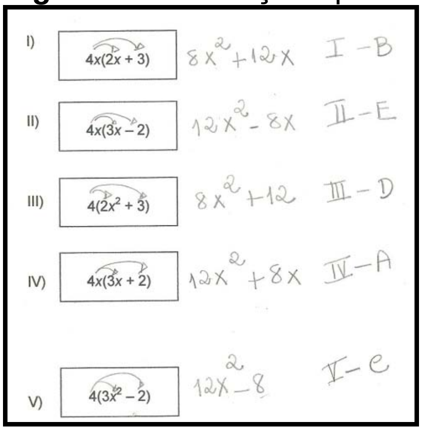
5.3.8.2 Análise a posteriori da atividade 8

Com esta questão, pretendíamos verificar se aluno era capaz de associar cada um dos binômios apresentados à sua forma fatorada.

Todos os alunos que resolveram a atividade, ou seja, os vinte e seis alunos observados conseguiram responder a questão exatamente como esperávamos, isto é, encontraram as associações **A – IV; B – I; C – V; D – III; E – II.**

Um fato que nos chamou atenção, ao observarmos os registros dos alunos, foi que apenas dois desses alunos (E2 e E15) utilizaram a fatoração pelo fator comum em evidência. Os demais estudantes utilizaram apropriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme podemos verificar nos registros do aluno E17, destacados na figura 44.

Figura 44 - Solução apresentada pelo estudante E17 - atividade 8 – etapa 2



I) $4x(2x + 3)$ $8x^2 + 12x$ I - B

II) $4x(3x - 2)$ $12x^2 - 8x$ II - E

III) $4(2x^2 + 3)$ $8x^2 + 12$ III - D

IV) $4x(3x + 2)$ $12x^2 + 8x$ IV - A

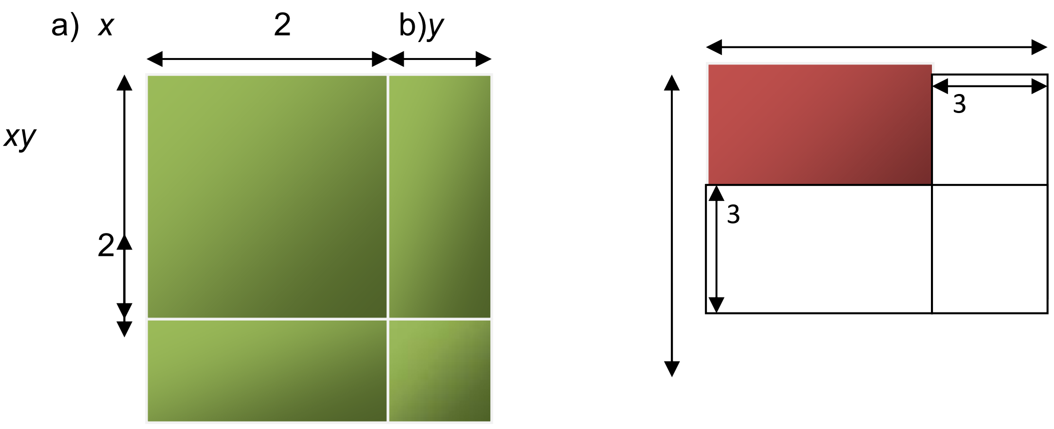
V) $4(3x^2 - 2)$ $12x^2 - 8$ V - C

Fonte: Relatório do aluno

Desta forma, foi possível constatar que os conteúdos *fatoração pelo fator comum em evidência* e *fatoração por agrupamento*, embora tenham sido abordados indiretamente nas atividades 1, 2 e 3 da etapa 1 desta sequência didática, deverão ser retomados com a turma.

5.3.9 Atividade 9

Dadas as figuras abaixo, determine a área destacada em cada uma e depois apresente o resultado na forma fatorada:



a) Área =__________________ b) Área = _______________

Forma fatorada = ___________ Forma fatorada = ________

5.3.9.1 Análise a priori da atividade 9

Como esta atividade será o fechamento, tanto da etapa 2 quanto da sequência didática como um todo, ela englobará os conceitos de produtos notáveis (quadrado da soma e quadrado da diferença entre dois termos) e de fatoração (trinômios quadrados perfeitos).

Portanto, para resolvê-la, o aluno deverá retomar estes dois conceitos e suas respectivas representações geométricas.

Esperamos que, para o cálculo da área destacada, o estudante considere as divisões feitas no quadrado inicial, ou ainda, que resolva os produtos $(x + 2)^2$ – item **a** e $(y – 3)^2$ – item **b**. Num caso ou no outro deverá encontrar como respostas $x^2 + 4x + 4$ e $y^2 – 6y + 9$, para os itens **a** e **b**, respectivamente.

Já para escrever os resultados encontrados anteriormente em sua forma fatorada, bastará que o aluno se recorde que isto significa escrevê-los na forma de produto, ou seja, deverá reconhecer e utilizar as identidades $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ e $(y – 3)^2 = y^2 – 6y + 9$, deixando como respostas $(x + 2)^2$ e $(y – 3)^2$, para os itens **a** e **b**, respectivamente.

5.3.9.2 Análise a posteriori da atividade 9

Vamos analisar cada item desta questão separadamente.

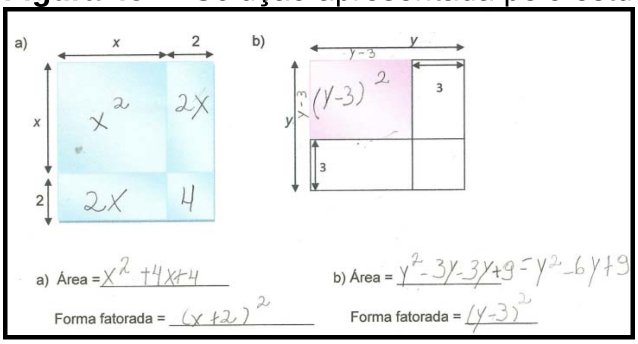
Com relação ao item **a**, o êxito foi geral. Todos os alunos observados responderam adequadamente à questão. Pelos registros individuais, conseguimos constatar que todos marcaram na figura dada as áreas de cada parte destacada no quadrado inicial, depois somaram estas áreas chegando à resposta $(x^2 + 4x + 4)$. Para escrever a expressão algébrica que representa esta área em sua forma fatorada, os alunos podem ter recorrido à igualdade $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$, ou observado o binômio que indica a medida do lado do quadrado que é o binômio $(x + 2)$.

Já no item **b**, embora apenas dois estudantes (E4 e E7) não tenham correspondido às nossas expectativas, dos vinte e quatro alunos que responderam corretamente esta questão, dezoito partiram da forma fatorada para poder determinar a área da figura dada. Fizemos esta constatação pela ausência de registro de cálculos de subtração entre as expressões algébricas que representavam cada área formada a partir do quadrado inicial e a área inicial total. Ao mesmo tempo, percebemos que os estudantes denominaram os lados do quadrado do qual deveriam encontrar a área, utilizando a expressão algébrica (y – 3) e a área procurada, pela expressão algébrica $(y – 3)^2$.

Os dois estudantes (E4 e E7) que não obtiveram êxito total nesta questão, conseguiram identificar a forma fatorada da expressão algébrica que indicava a área procurada como sendo $(y – 3)^2$, mas não chegaram à resposta esperada, pois escreveram esta expressão algébrica como $y^2 – 9$, ou seja, admitiram de forma equivocada a igualdade $(y – 3)^2 = y^2 – 9$, repetindo um erro apresentado por eles nas respostas às primeiras questões desta etapa.

Os seis alunos restantes utilizaram, para o cálculo da área, as técnicas já desenvolvidas em outras atividades da primeira etapa, conforme destacamos na figura 45, resolução do aluno E2.

Figura 45 - Solução apresentada pelo estudante E2 - atividade 9 – etapa 2



Fonte: Relatório do aluno

5.4 UMA ANÁLISE GLOBAL

A sequência didáticaque elaboramose desenvolvemos com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental segue os princípios da Engenharia Didática.

Desta forma, as análises descritas neste capítulo se referem a uma validação interna da metodologia que utilizamos. O objetivo destas análises é relacionar as análises a priori com as análises a posteriori para cada uma das atividades, a fim de verificar como os alunos estabelecem relações entre Álgebra e Geometria.

Nesta seção, fazemos uma análise mais abrangente considerando os aspectos motivadores da pesquisa,já mencionados na Introdução deste trabalho.

Com esta análise mais geral, buscamos destacar algumas particularidades identificadas no desenvolvimento da sequência didática e nas análises realizadas até então e que estejam de acordo com o objetivo desta pesquisa.

Considerando nossa prática e experiência como professoras percebemos que, além dos estudos sobre Álgebra serem desenvolvidos quase que exclusivamente nos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental (de acordo com o currículo tradicional), estes estudos normalmente se limitam a um amontoado de cálculos sem sentido para os alunos.

Pensando em uma abordagem diferenciada, optamos por elaborar uma sequência didática, segundo os princípios da Engenharia Didática, mas que ao mesmo tempo contemplasse uma articulação entre Álgebra e Geometria. Desta forma, esta sequência didática deveria permitir aos nossos alunos identificar e resolver determinados produtos entre polinômios, assim como conseguirfatoraros polinômios resultantes destes produtos, através da utilização da representação geométrica de áreas de retângulos.

No caso deste trabalho, focamos nossas atividades nos produtos notáveis quadrado da soma entre dois termos, quadrado da diferença entre dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos com suas respectivas fatorações.

De forma geral, podemos inferir que os alunos perceberam relações entre aspectos algébricos e geométricos e ficaram maravilhados ao identificar as igualdades determinadasnas diferentes questões da sequência didática.

Podemos citar as igualdades determinadas pela questão 1, da primeira etapa da sequência didática, como exemplo. As igualdades identificadas foram $x(a + 7 + y) = ax + 7x + xy$ e $(y + 2)\ (x + 5) = xy + 5y + 2x + 10$. Até o momento da primeira institucionalização, os alunos nem haviam pensado em utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para encontrar estas igualdades. Conseguiram percebê-lasfacilmente através da representação geométrica.

Ao iniciarmos a experimentação, os estudantes não se lembravam de como calcular áreas de retângulos, especialmente de retângulos cujas medidas dos lados fossem expressas algebricamente. Mas, após uma breve revisão, como o conceito de área já havia lhes sido apresentado, conseguiram ampliar este conceito e utilizá-lo para a obtenção de novos saberes que se consolidaram ao longo do desenvolvimento das atividades seguintes (2, 3 e 4).

As atividades de números 5 a 7 da primeira etapa da sequência didática, são questões nas quais os alunos devem observar as representações geométricas e preencher lacunas relativas a essas figuras. Citamos esta característica como um facilitador para estas questões, pois o estudante que, neste momento ainda demonstra insegurança com relação aos novos conteúdos trabalhados, apresentachances mínimas de erro, pois é levado implicitamente às respostas adequadas. Constatamos que a turmaresolveu com facilidade estas atividades.

Ainda com relação à primeira etapa de atividades da sequência didática, podemos afirmar que na resolução das duas últimas atividades (números 8 e 9) os alunos, de maneira geral, demonstraram domínio na representação geométrica dos produtos notáveis quadrado da soma entre dois termos, quadrado da diferença entre dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos, tanto em situações nas quais deveriam fazer a representação geométrica, como em situações nas quais deveriam analisar uma representação geométrica dada.

Conforme já mencionado neste capítulo, as atividades pertencentes à segunda etapa da sequência didática foram realizadas pela turma de forma individual e sem consulta. Num contexto geral os estudantes demonstraram que, de fato, construíram os novos conhecimentos e saberes pretendidos.

Após esta análise inicial faremos uma reflexão sobre as principais dificuldades encontradas pelos alunos durante toda a experimentação da sequência didática. Começaremos listando algumas destas dificuldades:

- representar geometricamente uma medida de comprimento expressa algebricamente por uma subtração de monômios;
- representar geometricamente uma medida de área de retângulo cujas dimensões estejam expressas algebricamente por uma subtração de monômios;
- dominar o cálculo com números inteiros;
- resolver cálculos que envolvam potenciação;
- agrupar termos semelhantes em expressões algébricas;

- utilizar, em situações específicas, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- fatorarexpressões algébricas, utilizando os casos de fatoração *fator comum em evidência* e *agrupamento*.

Devemos observar que as duas primeiras dificuldades listadas, foram sanadas ao longo da aplicação da sequência didática. Com relação aos problemas enfrentados para cálculo com números inteiros e para resolução de potências, vale ressaltar que são situações comuns que se resolvem com rápidas intervenções, ou seja, breves momentos de retomadas.

Já as dificuldades relativas às operações com expressões algébricas como: agrupar monômios semelhantes; aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em situações mais específicas, como no item **b**da atividade 3 da primeira etapa, na qual quase todos apresentaram dificuldades; e fatorar expressões algébricas não representadas geometricamente são dificuldades que já prevíamos e contávamos não superar totalmente.

Nossa proposta para esta pesquisa era permitir aos alunos um primeiro contato com o tema desenvolvido neste trabalho, criando uma familiaridade com este tema. A ideia não era apresentar o cálculo entre expressões algébricas como um objetivo único, as técnicas de cálculo foram sendo abordadas aos poucos, na medida em que isso se fazia necessário. Sendo assim, a não superação destas dificuldades não significa uma fragilidade da nossa metodologia e sim um indício de que estes conceitos deverão ser retomados no ano posterior, isto é, no 9º ano, pois neste ano o aluno terá condições de aplicar estes novos saberes, imprimindo significado ao estudo desenvolvido.

Para uma análise final, vamos recordar que a hipótese levantada inicialmente e que norteou nossa pesquisa, foi sugerir que uma articulação entre Álgebra e Geometria facilitaria o acesso aos conhecimentos relativos ao produto entre polinômios e suas respectivas fatorações.

Nosso objetivo era investigar se o desenvolvimento de uma sequência didática que considerasse a representação geométrica dos casos de produtos entre polinômios a serem estudados, permitiria ao aluno compreender, identificar e resolver os diversos casos de produtos entre polinômios, assim como efetuar a fatoração de cada um dos resultados encontrados nestes produtos.

Podemos concluir, com base nos resultados obtidos, que os alunos que participaram da experimentação da sequência didática proposta adquiriram novos conhecimentos sobre produto e fatoração polinomiais, através de representações geométricas de áreas de retângulos. Desta forma, se tornaram capazes de identificar, compreender e operar com polinômios, sobretudo nos casos de produtos notáveis.

CAPÍTULO 6
CONSIDERAÇÕES FINAIS

As nossas reflexões, na Introdução deste texto, sobre o porquê e como ensinar Matemática, indicam que o ensino tem como objetivo não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos, mas também a preparação para o exercício da cidadania, para o viver em sociedade.

Neste contexto, a escola de hoje não pode mais servir exclusivamente ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. Nossa prática deve considerar um amplo conjunto de competências e habilidades que deverão ser desenvolvidas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo As Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2008, p. 80), “falar de ensino e aprendizagem implica a compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é objeto de estudo.”

Concordando com estes apontamentos, iniciamos uma reflexão sobre o ensino de Álgebra na atualidade. As questões levantadas por nós foram: como se desenvolve, na prática, o ensino de Álgebra? Qual seriauma forma eficaz de contribuir para o ensino e aprendizagem da Álgebra?

Neste sentido, propusemos um estudo sobre o tema Polinômios, especificamente, produtos notáveis e fatoração. Considerando estes tópicos de Álgebra, buscamos através de pesquisas, inclusive na história da Matemática, o melhor caminho para que o estudante construísse o conhecimento acerca deste tema e pudesse desenvolver as habilidades e competências ligadas a ele para poder avançar matematicamente.

Percebemos que uma forma interessante de abordagem dos conceitos produtos notáveis e fatoração de polinômios, seria utilizar representações geométricas de áreas de retângulos. Para escolhermos esta abordagem, nos baseamos na evolução histórica destes conceitos, nos materiais norteadores do ensino de Matemática nopaís e, especificamente, no estado de São Paulo, nos livros didáticos atuais e na nossa prática em sala de aula.

Reformulamos nosso questionamento sobre o ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios. Nossa motivação era pesquisar porque a articulação entre Álgebra e Geometria é deixada de lado na prática de sala de aula, embora tenha sido uma prática de nossos antepassados e seja incentivada por quase todos os materiais relativos ao ensino de Matemática para este tema, conforme discutimos no capítulo 2 deste trabalho.

Desta forma, o objetivo deste nosso estudo era investigar o papel das representações geométricas no processo de ensino aprendizagem dos produtos notáveis e fatoração de polinômios, ou seja, qual a eficácia da articulação entre Geometria e Álgebra e qual a sua contribuição para a apreensão dos objetos matemáticos destacados.

Para atingirmos este objetivo, elaboramos e aplicamos uma sequência didática, com o intuito de propiciar aos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental compreender o conceito produtos notáveis e fatoração de polinômios. A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática. Analisamos trinta alunos que participaram da aplicação das atividades desta sequência didática.

A partir das produções dos alunos e também de nossas observações no desenvolvimento da sequência didática, pudemos destacar algumas considerações.

Percebemos que, no atual quadro de ensino, os professores de forma geral evitam este tipo de abordagem ao ensinar produtos notáveis e fatoração de polinômios. Seja porque sempre aprenderam e ensinaram este tópico através de listas imensas de exercícios da forma observe o modelo e reproduza; seja porque acreditam que o aluno encontrará dificuldades com esta forma de abordagem, pois trabalhará com outro campo da Matemática simultaneamente.Consideremos a reflexão dos autores Coxford e Shulte (1995, p. 37):

> Com frequência, as expressões algébricas são introduzidas com a afirmação de que elas envolvem variáveis e de que “uma variável é uma letra que representa um ou mais números”. Definições como essas podem ser adequadas para professores de Matemática, mas muitas vezes carecem de significado para os alunos principiantes. Para que os iniciantes construam um significado para as expressões algébricas, é necessário que tenham em sua formação uma base cognitiva que o alicerce. Ajudar os alunos a criar esse significado com base no conhecimento que já tem deve ser o nosso objetivo primordial.

De fato a articulação entre Álgebra e Geometria facilitou a apropriação, por parte do aluno, dos conceitos abordados neste estudo. Após análise geral da turma, verificamos que a maioria atendeu nossa análise a priori, ou seja, corresponderam às nossas expectativas, mostrando domínio do tema proposto.

O fato de trabalhar duas ideias matemáticas ao mesmo tempo – áreas e produtos entre polinômios – só favorece o aprendizado, pois o aluno verdadeiramente enxerga as respostas às questões propostas.

Com relação à sequência que elaboramos, também temos algumas considerações. Como no desenvolvimento das atividades, ou seja, na experimentação desta sequência, encontramos algumas dificuldades, acreditamos que poderíamos tê-las minimizado se incluíssemos mais itens às atividades iniciais que abordavam a representação do quadrado da diferença entre dois termos. Também poderíamos ter proposto a execução de uma atividade de recorte de peças representando as áreas formadas a partir de uma área inicial dada (na representação dos produtos notáveis e suas respectivas fatorações). Provavelmente os alunos que ainda não demonstraram total domínio do conteúdo trabalhado, poderiam ter tido avanços mais significativos.

Nesta pesquisa nos propomos a refletir sobre o papel da articulação entre Álgebra e Geometria para o ensino de Polinômios, mas esta é uma reflexão inicial. A Educação continua seu movimento de transformação e melhoria e, desta forma, faz-se necessária a realização de mais pesquisas sobre este assunto. Em relação a essas futuras pesquisas sugerimos que procurem testar nossa sequência didática, inclusive com as alterações citadas anteriormente. Sugerimos também o uso da tecnologia, através de softwares específicos sobre este tema e que permitem a manipulação das figuras.

Finalmente, esperamos que este estudo possa provocar reflexões sobre o ensino da Matemática em diferentes níveis da Educação e ofereça subsídios para o trabalho docente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In. BRUN, J. (Org.). Trad.Maria José Figueiredo **Didactica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193 – 217.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC; SEMT, 2008.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução**. Brasília: MEC; SEF, 1998a.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC;SEF, 1998b.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. Trad.Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBRÓSIO, B. Como ensinar Matemática hoje? **Temas & Debates**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 2, 1989.

DANTE, L. R.**Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2011. Vol. 3.

______. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2007.

DOMINONI, N. R. F. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais.**2005, 120 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

______. **Tópicos de História da Matemática Para Uso Em Sala de Aula**. Trad.Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v. 4.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2005. v. 6

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática :Imenes& Lellis**. São Paulo: Moderna, 2009.

LEONARDO, F.M. **Matemática: Projeto Araribá**. São Paulo: Moderna, 2010.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Trad.Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LISBOA, V. de J. **Polinômios com coeficientes da sequência de Fibonacci**. 2007. Disponível em<http://www2.uefs.br/sigma/arquivos/COP/COP022008_Viviane_Lisboa.pdf>. Acesso em 15 mar. 2013.

MATEMÁTICA. Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Fundamental II, 8º ano/ 7ª série, Vol. 2. Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2013.

MEIRA, L. **Significados e modelagem na atividade algébrica**. Disponível em <htpp://www.ufrj.br>. Acesso em 16 jan. 2013.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 2003.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Matemática: um curso com problemas e soluções**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PIZA, C. A. M. **Registros de representação semiótica e uso didático da história da Matemática: um estudo sobre parábola.** 2009, 110 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RIBEIRO, J. **Matemática: Projeto Radix – raiz do conhecimento**. São Paulo: Scipione, 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2010.

SCHOR, D.; TIZZIOTTI; J. G. **Matemática:Segundo grau**. São Paulo: Ática, 1975. v. 2.

SILVA, C. X.; BARRETO, B. F. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2005. v. 3.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. São Paulo: FTD, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Materialutilizadoem nossos encontros com os alunos - terceiro encontro

Conforme citamos na análise a posteriori da atividade 4 (etapa 1), apresentamos as sistematizações relativas aos conceitos abordados nas atividades iniciais da sequência didática, baseadas no livro de Souza e Pataro (2012, p. 96 a 110).

As expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas **expressões algébricas**. Nessas expressões, as letras são chamadas **variáveis**.
Quando substituímos a variável de uma expressão algébrica por um número e efetuamos os cálculos, obtemos o **valor numérico** da expressão.
Por exemplo, o valor numérico da expressão $2x + y^2 – 5$, para $x = 8$ e $y= -2$, é dado por: $2x + y^2 – 5 = 2.8 + (-2)^2 – 5 = 16 + 4 – 5 = 15$

Os monômios são expressões algébricas formadas por um único termo. Esse termo, em geral é constituído de duas partes:um número, chamado **coeficiente**, e uma variável ou um produto de variáveis, chamado **parte literal**.
Exemplos:
$2x$ parte literal
coeficiente

Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados **monômiossemelhantes**.
Podemos simplificar uma expressão algébrica em que aparecem monômios semelhantes adicionando ou subtraindo os coeficientes e preservando a parte literal.
Exemplos:
- $12ab^2 + 3ab^2 – 6ab^2 = (12 + 3 – 6).ab^2 = 9ab^2$
- $xyz^5 - xyz^5 + 0{,}5xyz^5 + 1{,}8\ xyz^5 = (1 – 1 + 0{,}5 + 1{,}8).xyz^5 = 2{,}3\ xyz^5$

Para determinar o produto de monômios, multiplicamos os coeficientes e, depois, as variáveis da parte literal. Exemplos:
- $8a^7.\ 3 = 8.3.a^7 = 24a^7$
- $5ab^2.\ 4a^3b = 5.4.a.a^3.b^2.b = 20a^4b^3$

Para determinar uma potência cuja base é um monômio, elevamos o coeficiente e cada uma das variáveis da parte literal ao expoente dado. Exemplos:
- $(3x^5)^2 = 3^2.(\ x^5)^2 = 9.x^{5.2} = 9x^{10}$
- $(2x^3y^4)^5 = 2^5.(x^3)^5.(y^4)^5 = 32.x^{3.5}.y^{4.5} = 32x^{15}y^{20}$

Os **polinômios** são expressões algébricas formadas pela adição de monômios, sendo cada monômio um **termo** do polinômio.

Dependendo do número de termos, um polinômio recebe um nome particular. Os polinômios que possuem um termo são chamados **monômios**, os que possuem dois termos são chamados **binômios**, e os que possuem três termos, são chamados**trinômios**.
As expressões algébricas que possuem mais de três termos não recebem nomes particulares.

Para determinar o produto de dois polinômios, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação. Para isso, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro e adicionamos os resultados obtidos. Exemplos:

$3y^3.(4y^2 - 2xy + 8) = 3y^3.4y^2 + 3y^3.(-2xy) + 3y^3.8 = 12y^5 - 6xy^4 + 24y^3$

Nas multiplicações que envolvem mais de dois polinômios, devemos calcular o produto dos dois primeiros e depois multiplicar o resultado obtido pelo terceiro, e assim por diante. Exemplo:

$\underbrace{(y + 1).(y + 3)}_{(y^2 + 4y + 3)}.(2y + 1) = (y^2 + 4y + 3).(2y + 1) = 2y^3 + 9y^2 + 10y + 3$

APÊNDICE B

Material utilizado em nossos encontros com os alunos - quinto encontro

Conforme citamos na análise a posteriori da atividade 7 (etapa 1), apresentamos as sistematizações relativas ao conceito de produtos notáveis, baseadas no livro de Souza e Pataro (2012, p. 113 a 115).

Quadrado da soma entre dois termos
O quadrado da soma entre dois termos é um produto notável que pode ser indicado por$(a + b)^2$ ou $(a + b).(a + b)$.
Podemos desenvolver esse produto notável utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:
$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
A expressão algébrica $a^2 + 2ab + b^2$ tem três termos e é chamada**trinômio quadrado perfeito.**
A igualdade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pode ser escrita como:
"*O quadrado da soma entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo."*

Quadrado da diferença entre dois termos
O quadrado da diferença entre dois termos é um produto notável que pode ser indicado por $(a - b)^2$ ou $(a - b).(a - b)$.
Podemos desenvolver esse produto notável utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:
$(a - b)^2 = (a - b).(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
A expressão algébrica $a^2 - 2ab + b^2$ tem três termos e é chamada**trinômio quadrado perfeito.**
A igualdade $(a -b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, pode ser escrita como:
"*O quadrado da diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo."*

Produto da soma pela diferença entre dois termos
O produto da soma pela diferença entre dois termos também é um produto notável, e é indicado por $(a + b).(a - b)$.
Podemos desenvolver esse produto notável utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:
$(a + b).(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$
A expressão algébrica $a^2 - b^2$é chamada **diferença de quadrados.**
A igualdade $(a + b).(a - b) = a^2 -b^2$, pode ser escrita como:
"*O produto da soma pela diferença entre dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos o quadrado do segundo termo."*

ANEXOS

ANEXO A

Termo de consentimento

Eu, ____,

portador (a) do RG nº ____________________, SSP/______, autorizo a professora Keyla Cristina Borgato a utilizar, parcial ou integralmente minhas anotações, respostas a questionários, bem como registros de entrevistas, para fins de pesquisa, sem restrições de prazo e citações, desde a presente data. Estes dados também poderão ser divulgados integralmente ou em partes em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome seja citado apenas como participante da pesquisa, garantindo o anonimato no relato desta.

Declaro ainda que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Assis, 18 de maio de 2013.

____