



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

MATEUS DONEGÁ LÁZARO

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE UM GÁS IDEAL

LONDRINA-PR

2016

MATEUS DONEGÁ LÁZARO

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE UM GÁS IDEAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Bytsenko

LONDRINA-PR

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Lázaro, Mateus Donegá.

Aspectos Geométricos de um Gás Ideal / Mateus Donegá Lázaro. - Londrina, 2016.
113 f. : il.

Orientador: Andrey Bytsenko.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Formulação Geométrica - Teses. 2. Superfícies - Teses. 3. Operador de Beltrami - Teses. 4. Termodinâmica - Teses. I. Bytsenko, Andrey. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

MATEUS DONEGÁ LÁZARO

ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE UM GÁS IDEAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Andrey Bytsenko
Universidade Estadual de Londrina
Orientador

Prof. Dr. Antonio Edson
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Bruno Mendonça Rey dos Santos
Universidade Estadual de Londrina

Londrina-PR, 15/03/2016 de 2016

*Este trabalho é dedicado a Deus,
à família, à minha flor e também àqueles
que mesmo sem saber lutar, venceram a luta;
que mesmo sem ter forças, encontram A força
que mesmo sem saber, conheceram O Saber.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da Vida, permitindo que cada dia seja uma nova oportunidade, mas também me resgatando dos momentos escuros para assim ensinar que é necessário se lançar à meta principal.

Agradeço à Bárbara por estar comigo... "mesmo quando precisa dormir mas está comigo", aos meus pais e irmão por conterem as coisas, permitindo que fosse possível realizar esse trabalho.

Ao meu orientador, pela compreensão e dedicação sobre-humana para que o trabalho fosse concluído em meio a um período complicado.

Aos professores do Departamento de Física da UEL, pelos conselhos, exemplos e auxílios. Aos funcionários do CCE, que desempenhando sempre suas funções de forma íntegra e puderam também oferecer ajuda.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro através da bolsa de Mestrado.

*“What no eye has seen
and no ear has heard,
what the mind of man
cannot visualise; all
that God has prepared
for those who love him;
to us, though, God has
given revelation through
the Spirit, for the Spirit
explores the depths of
everything, even the depths of God.
(Holy Bible, ICoríntios 2, 9b-10)*

LÁZARO, MATEUS DONEGÁ. **Aspectos Geométricos de um Gás Ideal**. 113 p. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina–PR, 2016.

RESUMO

Descrever a termodinâmica na linguagem da geometria diferencial, utilizando o espaço de fase das variáveis termodinâmicas. Certamente que este é um objetivo de grande audácia entretanto o esperado é atingi-lo por etapas. Uma primeira etapa sendo justamente a verificação de sua viabilidade, para isso será feita principalmente uma discussão de fundamentos geométricos na abordagem desse trabalho.

Palavras-chave: Superfícies. Formulação Geométrica. Termodinâmica. Operador Beltrami. Gás Ideal.

LÁZARO, MATEUS DONEGÁ. **Geometric Aspects of a Ideal Gas**. 113 p. Master's Thesis (Master in Physics) – State University of Londrina, Londrina-PR, 2016.

ABSTRACT

Describe the thermodynamics in the context of the differential geometry, using the phase space of thermodynamics variables. Certainly this is a great audacity goal however is expected to accomplish it in stages. A first step is just to check it's viability, for this will be done primarily a discussion of geometric basics approach in this work.

Keywords: Surfaces. Geometric Formulation. Thermodynamics. Beltrami Operator. Ideal Gas.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação Geométrica da Equação de Estado	19
Figura 2 – Coordenadas Retangulares no Espaço Cartesiano 3-d	26
Figura 3 – A linha de mundo de um objeto	27
Figura 4 – Coordenadas Esféricas no Espaço Euclidiano 3-d	32
Figura 5 – Cone $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$	48
Figura 6 – Projeção Estereográfica: $(\theta, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
I	CONCEITOS BÁSICOS	23
2	SISTEMAS COORDENADOS	25
2.1	Coordenadas Cartesianas no espaço	25
2.2	Mudança de Coordenadas	26
3	ESPAÇO EUCLIDIANO	33
3.1	Curvas no Espaço Euclidiano	33
3.2	Formas Quadráticas e Vetores	38
4	ESPAÇO RIEMANNIANO E PSEUDO-RIEMANNIANO . .	43
4.1	Métricas Riemannianas	43
4.2	A Métrica de Minkowski	46
II	A TEORIA DAS SUPERFÍCIES	49
5	GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE NO ESPAÇO	51
5.1	Coordenadas na superfície	51
5.2	Planos Tangente	54
5.3	A métrica em uma superfície imersa no espaço Euclidiano . .	56
5.4	Área da Superfície	60
6	A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL	63
6.1	Curvatura das curvas na superfície no Espaço Euclidiano . . .	63
6.2	Invariantes de um par de formas quadráticas	65
7	AS MÉTRICAS: ESFÉRICA E PSEUDO-ESFÉRICA	67
7.1	Métrica na Esfera	67
7.2	Métrica na Pseudo-Esfera	69
8	A FORMA CONFORME DA MÉTRICA NA SUPERFÍCIE .	75
8.1	Coordenadas Isotermas. Curvatura Gaussiana em termos das coordenadas conforme	75
9	OPERADOR DE BELTRAMI	79

9.1	A construção do Operador de Beltrami	79
9.2	Aplicação Operador de Beltrami: Forma Conforme Esfera . .	83
9.2.1	Fator Integrante	93
9.2.2	A métrica induzida na foma conforme para a Esfera	93
9.3	Aplicação Operador de Beltrami: Forma Conforme Pseudoesfera	95
III	ASPECTOS GEOMÉTRICOS DO GÁS IDEAL	103
10	GEOMETRIA DO GÁS IDEAL	105
10.1	A métrica induzida do Gás Ideal	106
10.2	A curvatura Gaussiana do Gás Ideal	106
11	CONCLUSÃO	109
	REFERÊNCIAS	113

1 INTRODUÇÃO

Um sistema termodinâmico possui uma relação funcional entre os parâmetros termodinâmicos de um sistema em equilíbrio, essa relação é nomeada por equação de estado. Se P, V, T são os parâmetros termodinâmicos, a equação de estado tem a forma

$$f(P, V, T) = 0 \quad (1.1)$$

que reduz o número de parâmetros independentes de 3 para 2. A função f é parte da especificação do sistema, podendo haver outras relações envolvendo os parâmetros termodinâmicos. Costuma-se representar o estado do sistema como um ponto no espaço de fase 3-d e a equação de estado definindo uma superfície neste espaço, como esquematizado na figura Fig. 1.

A simples observação que a equação de estado de um sistema termodinâmico no espaço de fase P, V, T é uma superfície regular como esquematizado na figura Fig.1 induz a pergunta:

"Quais as propriedades geométricas dessa superfície no espaço de fase?"

A ideia de introduzir uma linguagem geométrica (ou descrição geométrica) da termodinâmica foi abordada inicialmente por Gibbs [3]. Ele considerava que a análise de sistemas em equilíbrio termodinâmico era facilitada com a ajuda de métodos gráficos ou geométricos, expressando a vantagem que utilizar a representação geométrica das propriedades termodinâmicas de alguns sistemas (termodinâmicos) simples através de superfícies no "espaço de Gibbs", consistindo de coordenadas retangulares tendo como eixos a energia interna, o volume e a entropia do sistema.

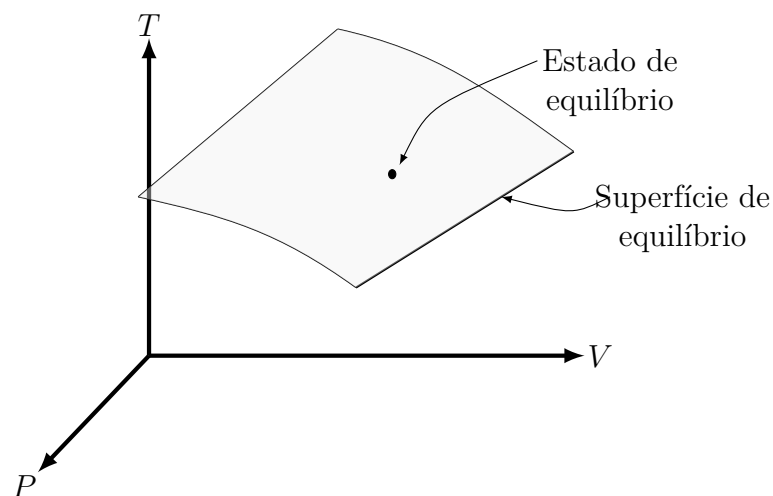


Figura 1 – Representação Geométrica da Equação de Estado

Posteriormente, este problema foi abordado sistematicamente por Frank Weinhold [13–18]. Nestes trabalhos o autor constrói um espaço vetorial linear de natureza abstrata (no contexto da termodinâmica) isomorfo ao espaço Euclidiano e possuindo uma estrutura métrica.

Devido a todos estes aspectos geométricos dos sistemas termodinâmicos, espera-se naturalmente pela possibilidade de se encontrar uma estrutura métrica intrínseca ou uma métrica induzida na superfície de equilíbrio de sistemas termodinâmicos. De fato este é um dos objetivos deste trabalho, ou seja o de encontrar uma métrica para sistemas termodinâmicos em equilíbrio, porém este problema será abordado considerando-se inicialmente a métrica associada ao sistema termodinâmico mais simples: o gás ideal. Tal procedimento justifica-se pela dificuldade da construção de uma métrica para um sistema geral, dado que todas as tentativas realizadas até então levam a resultados contraditórios [4, 7, 9, 11] relacionados a, pelo menos, duas possibilidades consideradas até então: da superfície de Gibbs, a qual consideraremos neste trabalho e da construção de um espaço métrico abstrato pelo método de Weinhold. Na abordagem do problema via Gibbs, não há, em princípio nada que determine em geral a escolha de uma métrica no espaço de fase, a não ser certamente a consistência das leis da termodinâmica [2], entretanto quando consideramos um sistema em particular podemos construir a métrica induzida na superfície utilizando a equação de estado Eq.(1.1). Por outro lado, utilizando a construção do espaço métrico de Weinhold [13] o qual tem definido um produto interno e portanto uma estrutura métrica, a qual utilizada para calcular algumas propriedades geométricas, como por exemplo curvatura e geodésica de um dado sistema termodinâmico, gera resultados contraditórios com aqueles obtidos via espaço de Gibbs, como já mencionado anteriormente. A motivação para Weinhold introduzir uma outra abordagem geométrica para a descrição de sistemas termodinâmicos é devido a arbitrariedade na possibilidade de escolha das diversas grandezas termodinâmicas (potenciais termodinâmicos) para os eixos de coordenadas na descrição de Gibbs. Observamos que esta possibilidade não é necessariamente um problema dado que estes potenciais estão relacionados via transformações de Legendre, que no contexto dos parênteses de Poisson no espaço de fase do sistema pode ser relacionados via transformações canônicas, portanto esperamos que métricas induzidas obtidas com diferentes representações dos eixos no espaço de fase, estejam relacionadas via transformações conforme. De fato este é um outro problema, inicialmente consideraremos a geometria de um gás ideal no contexto do espaço de Gibbs.

Em virtude de esclarecimento, esse trabalho será separado em três partes, as quais:

1. Parte I - Conceitos Básicos - são introduzidos os conceitos fundamentais sobre Sistemas Coordenados (coordenadas no espaço e mudança de coordenadas), Espaço Euclidiano (curvas, formas quadráticas e vetores), Espaços Riemanniano e Pseudo-Riemanniano (métrica Riemanniana e de Minkowski) com objetivo de fundamentar

as ferramentas que serão utilizadas. [8]

2. Parte II - Teoria de Superfícies - começando a aplicar será introduzidos os conceitos às superfícies ao definir a Geometria da superfície no Espaço (coordenadas na superfície, planos tangente, a métrica em uma superfície e a área de uma superfície), em seguida definida e discutindo sobre a Segunda forma Fundamental (curvatura das curvas na superfície e invariantes de um par de formas quadráticas), o cálculo das métricas da esfera e da pseudo-esfera utilizando métodos usuais a definição de forma conforme e para fechar a parte com chave de ouro deduz-se de um teorema o Operador de Beltrami e aplica-se o método de Beltrami para a obtenção da métrica na forma conforme. [8]
3. Parte III - Aspectos Geométricos de um Gás Ideal - são apresentados os resultados e uma discussão sobre aspectos calculados, como a Métrica e a curvatura Gaussiana.

Parte I

Conceitos Básicos da Geometria em Regiões do Espaço

2 SISTEMAS COORDENADOS

O objetivo principal da geometria analítica é descrever figuras geométricas por meio da formulação algébrica referente ao sistema Cartesiano de coordenadas do plano espacial 3-dimensional. Os objetos estudados são os mesmos da geometria Euclidiana elementar: a única diferença reside na metodologia. Novamente, a geometria diferencial é o mesmo que geometria analítica comum porém com a exceção de que as técnicas aplicadas do cálculo diferencial e álgebra linear são utilizadas em sua totalidade. Ao ser aplicáveis a objetos geométricos "suaves" gerais, essas técnicas provém acesso a uma classe mais ampla de tais objetos.

2.1 Coordenadas Cartesianas no espaço

Os conceitos mais básicos de geometria se fundamentam em dois parágrafos:

- (i) A geometria é feita em um certo espaço que se consiste de pontos, como em exemplo: P, Q, R, \dots
- (ii) Em geometria analítica, é introduzido um sistema de coordenadas para o espaço. Isso é feito por simples associação de cada ponto no espaço a um n-upla ordenado (x^1, \dots, x^n) de números reais - que são as coordenadas de um ponto, ou também "endereço- no qual é necessário que sejam satisfeitas as condições:
 - (a) Pontos distintos são assimilados com n-uplas distintas. Ou seja, os pontos P e Q de coordenadas (x^1, \dots, x^n) e (y^1, \dots, y^n) são o mesmo ponto se e somente se $x^i = y^i, i = 1, \dots, n$.
 - (b) Todo n-upla (x^1, \dots, x^n) possível é assimilado a algum ponto do espaço.

Definição 1. (*Espaço Cartesiano n-dimensional*). Um espaço configurado à um sistema de coordenadas Cartesiano satisfazendo as condições (a) e (b) é nomeado um espaço Cartesiano n-dimensional, é denotado por \mathbb{R}^n . O número inteiro n é chamado dimensão do espaço.

Usualmente é possível se referir livremente à uma n-uplas (x^1, \dots, x^n) como um ponto do espaço. O exemplo mais simples do espaço Cartesiano é o conjunto dos números reais. Aqui cada ponto tem apenas uma coordenada x^1 , então necessariamente $n = 1$, assim sendo é um espaço Cartesiano 1-d. Outros exemplos familiares da geometria analítica são os espaços Cartesianos 2-d e 3-d (Figura 1). Esses espaços Cartesianos são completamente adequados para a solução de problemas da geometria escolar, abrange todo o necessário para o ensino médio.

Um modelo menos familiar, mas extremamente importante entre os exemplos de espaço Cartesiano. A física moderna ensina que tempo e espaço não são separados, conceitos não sobrepostos, mas intrínsecos em um 4-d espaço-tempo contínuo. A seguinte formulação matemática do ordenamento natural dos fenômenos acaba por ser extremamente conveniente.

Os pontos do espaço-tempo contínuo são tomados como eventos. Designa-se a cada evento um 4-upla ordenado (t, x^1, x^2, x^3) de números reais, onde t é o tempo do instante em que o evento ocorre, e x^1, x^2, x^3 são coordenadas da localização espacial do evento. Com essa coordenização, o espaço-tempo contínuo torna um espaço Cartesiano 4-d, e então define nossa interpretação de coordenadas (t, x^1, x^2, x^3) como tempos e locais dos determinados eventos. O espaço 3-d da geometria clássica é então basicamente o hiper-espaço 4-d definido pela equação $t = \text{constante}$. O trajeto ou caminho, no espaço-tempo, de um objeto o qual pode ser reconhecido abstratamente em todo instante de tempo como um ponto (o então conhecido por "ponto-partícula"), é então identificado com uma curva segmentada (ou arco) $x^a(t)$, $a = 1, 2, 3, t_1 \leq t \leq t_2$, no espaço 4-d. Essa curva é chamada de linha de mundo do ponto-partícula (Figura 2). Eventualmente, podem ser considerados inclusive espaço-tempo contínuos 3-d ou 2-d, coordenados por trios (t, x^1, x^2) e pares (t, x^1) respectivamente, o que é de interesse justamente pelo fato de que para esses espaços é mais fácil de desenhar figuras inteligíveis.

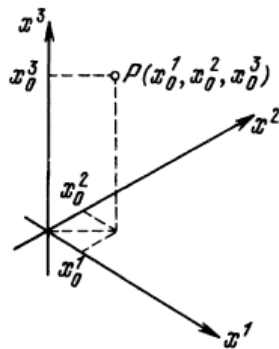


Figura 2 – Coordenadas Retangulares no Espaço Cartesiano 3-d [8].

2.2 Mudança de Coordenadas

Supondo um espaço Cartesiano n -dimensional, é dada uma função real $f(P)$, tal que ela esteja atribuindo um número real a cada ponto P do espaço. Desde que cada ponto do espaço apareça com suas n coordenadas é possível pensar f como uma função de variáveis reais: se $P = (x^1, \dots, x^n)$, então $f(P) = f(x^1, \dots, x^n)$. O olhar deve estar voltado às funções $f(x^1, \dots, x^n)$ contínuas (por vezes inclusive sua diferencial é contínua).

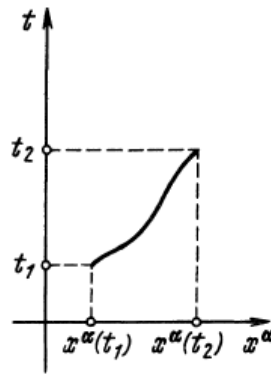


Figura 3 – A linha de mundo de um objeto [8].

Por vezes as funções consideradas não serão definidas para todos os pontos do espaço \mathbb{R}^n , mas apenas em porções, ou, mais precisamente, regiões do espaço.

Definição 2. (*Região*). Uma região, ou uma região sem borda (ou também, conjunto aberto em outra terminologia), é um conjunto D de pontos em \mathbb{R}^n tal que junto com cada ponto P_0 , D também contém todos os pontos suficientemente próximos a P_0 ; mais precisamente, para cada ponto $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ na região D , existe um número $\epsilon > 0$ tal que todos os pontos $P = (x^1, \dots, x^n)$ os quais satisfazem a inequação

$$|x^i - x_0^i| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

também estão em D .

Definição 3. (*Região com Borda*). Uma região com borda é obtida de uma região D (sem borda) ao simplesmente juntar a todos os pontos da borda. Sendo a borda da região em questão o conjunto dos pontos da borda.

O exemplo mais simples de uma região sem borda é todo o espaço \mathbb{R}^n . Outro exemplo simples é o conjunto de pontos (x_1, x_2) do plano tal que $x_1^2 + x_2^2 < \rho^2$ (disco aberto de raio $\rho < 0$). A mesma região mas agora com borda é formada pelos pontos (x_1, x_2) satisfazendo $x_1^2 + x_2^2 \leq \rho^2$. O modo de definição dessa região é típico no sentido específico indicado no teorema a seguir.

Teorema 1. Seja $f_1(P), \dots, f_m(P)$ ($P = (x^1, \dots, x^n)$) funções contínuas definidas no espaço \mathbb{R}^n . Então o conjunto D de todos os pontos P satisfazendo as inequações

$$f_1(P) < 0, f_2(P) < 0, \dots, f_m(P) < 0$$

é uma região sem borda.

Prova. Supondo $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ esteja em D , no caso $f_1(P) < 0, f_2(P) < 0, \dots, f_m(P) < 0$. Pela propriedade da preservação do sinal de funções contínuas tem-se que para cada j existe um número $\epsilon_j > 0$ tal que $f_j(P) < 0 \forall P = (x^1, \dots, x^n)$

satisfazendo $|x^i - x_0^i| < \epsilon_j, i = 1, \dots, n$. Colocando $\epsilon = \min(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$, então é visto que D certamente contenha todos os pontos (x^1, \dots, x^n) satisfazendo $|x^i - x_0^i| < \epsilon$. Por consequência D é uma região sem borda.

Aqui é mencionado o frequente encontro e a ideia de uma região com borda do espaço, uma região na qual todos os seus pontos são menores que uma certa distância da origem do sistema de coordenadas.

Coordenadas Cartesianas (x^1, \dots, x^n) assimilado a \mathbb{R}^n obviamente construído, em particular, uma coordenação de cada região D , exceto se D não é o espaço todo \mathbb{R}^n , então com certeza os n-uplas correspondentes ao ponto D não tomará todos valores possíveis; isso ainda faz sentido com certeza para falar sobre a continuidade e diferenciabilidade de funções definidas apenas na região D .

Supondo outro sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) que é dado para a mesma região em questão. Pode ser escrito:

$$x^i = x^i(z^1, \dots, z^n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$z^j = z^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Essas equações significam simplesmente que cada ponto da região tem uma associação com ambos, tanto como as "antigas" coordenadas (x^1, \dots, x^n) , e as "novas" (z^1, \dots, z^n) , então é possível entender as novas coordenadas como funções das antigas, e o inverso também.

Primeiro investigando *mudanças lineares de coordenadas* do espaço:

$$x^i = \sum_{j=1}^n a_j^i z^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

(ou mais compactamente $x^i = a_j^i z^j$, onde aqui e sequencialmente será entendido na repetição de índices, para um índice em cima e um embaixo como sendo a soma sob esses índices). De álgebra linear sabe-se que z_i é bem expresso em termos de x_i se e somente se a matriz $A = (a_{ij})$ tem uma inversa $B = A^{-1} = (b_j^i)$. Essa matriz inversa é definida pelas equações $b_j^i a_k^j = \delta_k^i$, onde novamente a soma sobre o índice repetido j foi utilizada, e o *Símbolo de Kronecker* δ_k^i é definido por

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k, \\ 0 & \text{para } i \neq k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Na Eq. (2.3) as coordenadas cartesianas x^1, \dots, x^n do ponto P são expressas em termos das novas coordenadas z^1, \dots, z^n por meio da matriz $A = (a_j^i)$; a equação Eq. (2.3) pode ser reescrita mais compactamente como:

$$X = AZ, \quad X = (x^1, \dots, x^n), \quad Z = (z^1, \dots, z^n)$$

(onde na primeira equação, X e Z são escritos como vetores coluna). A equação Eq. (2.3) diz que se x^1, \dots, x^n são as coordenadas relativas a P no sistema de coordenadas original

(inicial), então no novo sistema de coordenadas, P é assimilado às coordenadas z^1, \dots, z^n satisfazendo tais equações. Foi visto que A precisa ser inversível (ou em outras palavras, não singular, ou ainda em outras palavras, ter determinante não nulo), então as novas coordenadas podem ser expressas em termos das antigas:

$$Z = BX, \quad z^j = b_k^j x^k \quad (2.5)$$

(onde a soma sobre k está implícita).

Voltando para uma situação geral onde $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$, exceto que agora pode assumir-se que as funções $x^i(z^1, \dots, z^n)$ são continuamente diferenciáveis (isso é, tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, ou, mais brevemente, são "suaves").

Ao assumir que de todo ponto em uma região podem ser escrutinadas novas coordenadas, ou, em outras palavras, para cada n -upla (x_0^1, \dots, x_0^n) da região há pelo menos uma n -upla (z_0^1, \dots, z_0^n) correspondente tal que

$$x_0^i = x^i(z_0^1, \dots, z_0^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Definição 4. (*Ponto Ordinário*). Um ponto $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ é chamado ordinário ou não-singular de um sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) se a matriz

$$A = (a_j^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right)_{z^1=z_0^1, \dots, z^n=z_0^n} \quad (2.6)$$

(onde z_0^1, \dots, z_0^n satisfazendo $x^i(z_0^1, \dots, z_0^n)$, $i = 1, \dots, n$) possui determinante não nulo (é não singular, em outras palavras).

A matriz A é chamada de *matriz Jacobiana* de uma dada transformação de coordenadas, e é denotado por $\hat{J} = (\partial x / \partial z)$. O determinante da matriz Jacobiana é chamado simplesmente de *Jacobiano*, e é denotado por J :

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) = \det(\hat{J}).$$

O teorema a seguir, conhecido como "Teorema da Função Inversa" (um caso particular do mais geral, "Teorema da Função Implícita").

Teorema 2 (Função Inversa). *Supõe-se uma mudança de sistema de coordenadas onde, como acima, as antigas coordenadas são expressas em termos das novas por $x^i = x^i(z)$, $i = 1, \dots, n$, e seja $x_0^i = x^i(z_0^1, \dots, z_0^n)$, $i = 1, \dots, n$, seja as coordenadas de um ponto com a propriedade $J = \det(\partial x / \partial z) \neq 0$ em $z^1 = z_0^1, \dots, z^n = z_0^n$. Então para uma vizinhança suficientemente pequena do ponto (x_0^1, \dots, x_0^n) deve-se encontrar que: as coordenadas z^1, \dots, z^n dos pontos dessa vizinhança são expressos em termos de x^1, \dots, x^n ,*

dizendo-se $z^i = z^i(x)$, onde, em particular, $z_0^i = z^i(x_0^1, \dots, x_0^n)$, $i = 1, \dots, n$; e em cada ponto da vizinhança a matriz $(b_j^i) = (\partial z^i / \partial x^j)$ (a matriz Jacobiana da transformação inversa) é a inversa da matriz $(a_l^k) = (\partial x^k / \partial z^l)$; isso é

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \delta_k^i \quad (2.7)$$

(novamente há a soma sob os índices repetidos).

Para o caso $n = 1$ isso se torna um exemplo simples como segue a declaração: se $x = x(z)$, e se $x_0 = x(z_0)$ é tal que $dx/dz \neq 0$ em $z = z_0$, então em algum intervalo suficientemente pequeno sobre x_0 , z pode ser expresso em termos de x , dizendo $z = z(x)$, com a particularidade $z_0 = z(x_0)$, e, através do intervalo, $(dz/dx)(dx/dz) = 1$.

O que o Teorema 2 transmite no caso especial, já considerado, onde a transformação de coordenadas é linear? Aqui a transformação é dada por $X = AZ$, isso é $x^i = a_j^i z^j$, então desde que $\partial x^i / \partial z^k = a_k^i$, a matriz Jacobiana $\partial x / \partial z$ é basicamente uma matriz constante A . Então nesse caso o Teorema ?? reduzi para o previamente mencionado fato bem conhecido que se o $\det A \neq 0$, então a transformação é inversível em todo o espaço, e $Z = BX$ onde B é a inversa de A .

Os três exemplos a seguir que seguem são todos tomados da geometria analítica de duas ou três dimensões.

- (a) É usualmente conveniente o uso de coordenadas polares r, φ , do plano. Coordenadas Cartesianas retangulares são expressas em termos dessas por

$$X^1 = r \cos(\varphi), \quad x^2 = r \sin(\varphi). \quad (2.8)$$

(Aqui permite-se apenas $r \geq 0$.) Então para todos inteiros k os pares (r, φ) e $(r, \varphi + 2k\pi)$ representam o mesmo ponto $P = (x^1, x^2)$. Assim segue-se que aja um φ único para cada P impõe-se o requerimento de que $0 \leq \varphi < 2\pi$. Note também que os pares $(0, \varphi)$ representam um ponto singular, que é a origem; porém na origem deve-se esperar que a transformação Eq. (2.8) tenha um mal comportamento. Devido a isso faz-se uma verificação se a origem é de fato um ponto não ordinário do sistema de coordenadas polares. A matriz Jacobiana é:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Em consequência o Jacobiano é

$$J = \det A = r \geq 0,$$

então esse é zero apenas na origem. Expressando r como uma função de x^1 e x^2 , tem-se $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, o qual é não diferenciável em $x^1 = x^2 = 0$. Por outro lado, na região $\{(r, \varphi) | r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$, não há pontos singulares, e as novas coordenadas correspondem uma a uma aos pontos.

- (b) As coordenadas Cartesianas retangulares x^1, x^2, x^3 do espaço 3-d "Euclidiano" são expressas em termos de coordenadas cilíndricas $z^1 = r, z^2 = \varphi, z^3 = z$ por

$$x^1 = r \cos(\varphi), \quad x^2 = r \sin(\varphi), \quad x^3 = z. \quad (2.10)$$

Aqui a equação $r = 0$ define o eixo z , e é ao longo dessa linha reta que as coordenadas do sistema se comportam mal, no sentido em que a matriz Jacobiana é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

tem determinante zero na origem (e só nela). Na região $r > 0$ esse sistema de coordenadas não possui pontos singulares. Assim como em (a) a coordenada φ possui valor único para um P desde que imposta a restrição $0 \leq \varphi < 2\pi$.

- (c) Finalmente são consideradas as coordenadas esféricas $z^1 = r, z^2 = \theta, z^3 = \varphi$ no espaço Euclidiano 3-d (Figura 3). Nesse caso

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos(\varphi) \sin(\theta), & x^2 &= r \sin(\varphi) \sin(\theta), \\ x^3 &= r \cos(\theta); & r &\geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Consequentemente a matriz Jacobiana é

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & r \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

e o Jacobiano $J = \det A$ é $J = r^2 \sin(\theta)$. Correspondentemente o Jacobiano é zero apenas quando $r = 0$, ou $\theta = 0, \pi$. Concluindo-se que na região $r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$, as coordenadas esféricas possuem valores únicos e assim não há pontos singulares do sistema. Os pontos definidos por $r = 0(\theta, \varphi$ arbitrários), e por $\theta = 0, \pi(r, \varphi$ arbitrários) são pontos singulares das coordenadas esféricas.

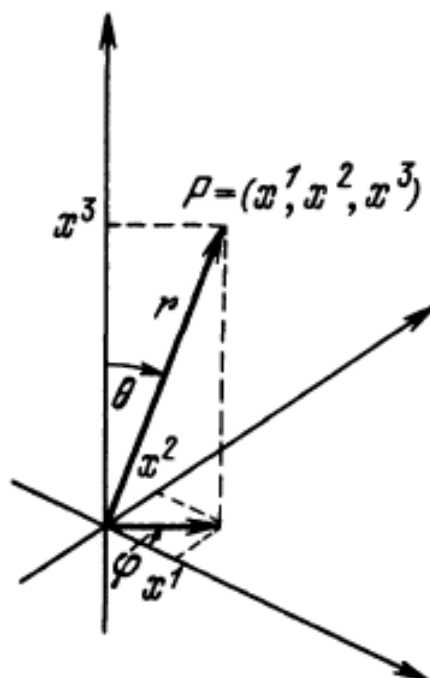


Figura 4 – Coordenadas Esféricas no Espaço Euclidiano 3-d [8].

3 ESPAÇO EUCLIDIANO

Agora suplementando a ideia rudimentar da geometria considerada anteriormente com os dois conceitos básicos da geometria, nomeando o comprimento de um segmento de curva no espaço, e o ângulo entre duas curvas em um ponto onde elas são interceptadas uma à outra. O pensamento intuitivo de comprimento e ângulo são determinados pelo fato de que a vida diária acontece (aproximadamente) em um espaço Euclidiano 3-d. Mas vale a pena bem estruturar esses conceitos.

3.1 Curvas no Espaço Euclidiano

Seja suposto um espaço Cartesiano 3-d onde o quadrado de um comprimento l de um segmento de linha reta que une qualquer ponto $P = (x^1, x^2, x^3)$ a qualquer ponto $Q = (y^1, y^2, y^3)$ é dado por

$$l^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2.$$

Esse espaço Cartesiano é chamado Euclidiano (de 3 dimensões) e chama-se essas coordenadas Cartesianas de coordenadas Euclidianas.

Em álgebra linear é usualmente conveniente associar vetores com os pontos do espaço Euclidiano. Com cada ponto P associa-se o vetor com sua calda iniciando em O (a origem do sistema de coordenadas), e sua ponta em P . Esse vetor é chamado raio vetor do ponto P , e suas coordenadas (x^1, x^2, x^3) de P são as coordenadas ou componentes do vetor. Vetores $\xi = (x^1, x^2, x^3)$, $\eta = (y^1, y^2, y^3)$ podem ser adicionados em suas coordenadas um ao outro para formar o vetor $\xi + \eta$ com coordenadas $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$. Um vetor pode ser também multiplicado por qualquer número real (chamado de escalar nesse contexto). Os vetores unitários (versores) e_1, e_2, e_3 com coordenadas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ respectivamente, claramente tem comprimento 1; mais a diante será visto que eles são perpendiculares entre si. Qualquer vetor $\xi = (x^1, x^2, x^3)$ pode ser expresso por uma combinação linear desses vetores unitários: $\xi = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$.

Define-se um espaço Euclidiano n -dimensional analogamente. Então um espaço Euclidiano n -dimensional será considerado como um espaço linear (isso é espaço vetorial) para o qual o quadrado da distância l entre quaisquer dois pontos $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ é dado por

$$l^2 = \sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2.$$

Como visto, no caso de $n = 3$ correspondendo a um espaço Euclidiano ordinário. O caso $n = 2$ corresponde a um plano Euclidiano, enquanto que espaços Euclidianos de dimensão $n > 3$ são simplesmente generalizações para dimensões maiores.

De fundamental importância é o produto escalar de um par de vetores no n -espaço Euclidiano.

Definição 5. (*Produto escalar Euclidiano*). O produto escalar Euclidiano de dois vetores reais $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ é o número

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (3.1)$$

As propriedades essenciais do produto escalar são as seguintes:

- (i) $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$;
- (ii) $\langle \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta \rangle = \lambda_1 \langle \xi_1, \eta \rangle + \lambda_2 \langle \xi_2, \eta \rangle$ para qualquer número real λ_1, λ_2 ;
- (iii) $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ se $\xi \neq 0$.

Como observado acima, coordenadas Cartesianas x^1, \dots, x^n em termos do qual o produto escalar tem a forma da Eq. (3.1), são chamadas coordenadas Euclidianas.

Agora, olhando para os comprimentos e ângulos no n -espaço Euclidiano são termos expressivos em termos do produto escalar. Então o comprimento (ou norma) de um vetor ξ , o qual será denotado por $|\xi|$, é dado por $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Semelhantemente o quadrado da distância entre os pontos P e Q com raio vetor $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\eta = (y^1, \dots, y^n)$ respectivamente é apenas o produto escalar do vetor $\xi - \eta$ com ele mesmo, $\langle \xi - \eta, \xi - \eta \rangle$. Consequentemente a propriedade (iii) pode ser interpretada como dizendo que o produto escalar sendo possuidor de um comprimento positivo para qualquer vetor não nulo.

Pela geometria analítica com a fórmula para o ângulo entre dois vetores $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ e $\eta = (y^1, \dots, y^n)$, sendo

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\sqrt{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle}} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (3.2)$$

Concluindo disso que dois conceitos geométricos básicos, nomeados por comprimento e ângulo, podem ser expressos em termos de um único conceito, que é o produto escalar. Subsequentemente, quando trata-se de espaços generalizados, deve-se tomar o produto escalar satisfazendo (i), (ii) e (iii) como o conceito básico, em termos do qual a estrutura geométrica é definida.

Supondo agora que se tem o segmento de curva no n -espaço Euclidiano dado na forma paramétrica:

$$x^1 = f^1(t), \dots, x^n = f^n(t) \quad (3.3)$$

onde o parâmetro t varia de a a b , e a função $f^i(t)$ são funções suaves de t . A *tangente* ou *vetor velocidade* da curva no instante t é o vetor

$$v(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, \frac{df^n}{dt} \right). \quad (3.4)$$

Definição 6. (*Comprimento*). O comprimento de um segmento de curva (ou arco) é

$$l = \int_a^b \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle} dt = \int_a^b |v(t)| dt. \quad (3.5)$$

Isso é, o comprimento de um arco é definido como a integral de a até b da norma do vetor velocidade.

Agora definindo ângulo entre duas curvas em um ponto onde elas se interceptam. Supondo que as curvas sejam dadas por $x^i = f^i(t), i = 1, \dots, n$, e $x^i = g^i(t), i = 1, \dots, n$, e que elas possuem intersecção quando $t = t_0$, ou seja, $f^i(t_0) = g^i(t_0), i = 1, \dots, n$. Denotando os respectivos vetores tangentes às curvas por

$$v = \left(\frac{df^1}{dt}, \dots, \frac{df^n}{dt} \right) \Big|_{t=t_0} \quad (3.6)$$

$$w = \left(\frac{dg^1}{dt}, \dots, \frac{dg^n}{dt} \right) \Big|_{t=t_0}$$

Definição 7. (*Ângulo*). O ângulo entre duas curvas no ponto de intersecção (em $t = t_0$) é o ângulo φ que satisfaz $0 \leq \varphi \leq \pi$ e

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} \quad (3.7)$$

Alguns exemplos agora para mostrar que tais definições de comprimento e ângulo são coerentes:

- (a) *O segmento de linha reta.* Por simplicidade supondo (como acima) que um fim de segmento seja a origem. Essas equações serão então $x^i = y^i t, i = 1, \dots, n, 0 \leq t \leq 1$. Quando $t = 0$ as coordenadas x^i são todas zero, enquanto quando $t = 1$ se tem $x^i = y^i \forall i$, isso é na ponta do vetor. De acordo com a Definição 6, o comprimento l da linha reta é dado por

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^n}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}$$

o qual é a fórmula usual para comprimento de um segmento de linha reta.

- (b) *O Círculo.* As equações paramétricas usuais do círculo (no plano) de raio R e com centro na origem, são: $x^1 = R \cos(t), x^2 = R \sin(t)$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$. Aqui o vetor tangente $v(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$, e então pela Definição 6, a circunferência é:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2(t) + R^2 \cos^2(t)} dt = 2\pi R \quad (3.8)$$

Portanto para o círculo, a definição de comprimento dá a resposta prevista.

É claro que a definição também satisfaz o requerido para o comprimento de um arco inventado de muitos segmentos não sobrepostos, será a soma desses segmentos.

A Eq. (3.5) tem um parâmetro defeituoso: parece depender da parametrização $x^i = f^i(t), i = 1, \dots, n, a \leq t \leq b$, de um segmento da curva. Para colocar isso cinematicamente, se $(f^1(t), \dots, f^n(t))$ representa a posição na curva num instante t , então a velocidade em um tempo t é $|v(t)|$, o qual entra na formulação da Eq. (3.5). O que vai acontecer se for traçado do mesmo segmento de curva (do ponto $P = (f^1(a), \dots, f^n(a))$ para o ponto $Q = (f^1(b), \dots, f^n(b))$) com diferentes velocidades? A equação para o comprimento de arco (Eq. (3.5)) vai fornecer o mesmo número?

Para manter uma boa precisão, supondo que haja um novo parâmetro τ variando de a' para b' ($a' \leq \tau \leq b'$), e que o antigo parâmetro t é expresso como uma função $t = t(\tau)$ de τ , onde $t(a') = a, t(b') = b$, e que $dt/d\tau > 0$. A condição de derivada positiva é justamente para indicar que t e τ estão na mesma direção. Então a curva em questão possui a nova parametrização:

$$x^i = f^i(t) = f^i(t(\tau)) = g^i(\tau), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

A taxa na qual a curva relativa ao parâmetro τ é traçada é:

$$w(\tau) = \left(\frac{dg^1}{d\tau}, \dots, \frac{dg^n}{d\tau} \right), \quad a' \leq \tau \leq b'. \quad (3.10)$$

Com a nova parametrização a equação para o comprimento de arco Eq. (3.5) deve ficar:

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau. \quad (3.11)$$

A norma do vetor $w(\tau)$ é:

$$|w(\tau)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dg^i}{d\tau} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2} = \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt} \right)^2} = \frac{dt}{d\tau} |v(t)|,$$

como $dt/d\tau > 0$. Em consequência

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau = \int_{\tau=a'}^{\tau=b'} |v(t(\tau))| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{t=a}^{t=b} |v(t)| dt = l,$$

ou seja, $l = l'$. Concluindo que: o comprimento de um arco de uma curva é independente da velocidade a qual o arco é traçado.

De fato, a definição de comprimento adotada, absorveu todos requerimentos impostos intuitivamente desse conceito.

- (c) Supondo uma curva no plano tal como um gráfico da função $x^2 = f(x^1)$. Então x^1 vai se comportar como parâmetro: $x^1 = t$, $x^2 = f(t)$. O vetor tangente é então $v = (1, df/dx^1)$, e o comprimento do segmento do gráfico em questão no intervalo $a \leq x^1 \leq b$ é

$$l = \int_a^b |v| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^1}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^1}\right)^2} dx^1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx^1}\right)^2} dx^1. \quad (3.12)$$

Uma curva dada por $x^1 = x^1(t), \dots, x^n = x^n(t)$ será chamada de suave se $x^1(t), \dots, x^n(t)$ possuir derivadas contínuas e $v(t) \neq 0 \forall t$ em um intervalo específico de valores de t . Para qualquer arco suave há um parâmetro natural, chamado de comprimento l traçado a partir de algum ponto. Desde que para um par de número a, b no intervalo de valores de l tem-se que $\int_a^b |v(t)| dl = b - a$, disso segue que $|v(l)| = 1$.

Supondo que no n -espaço Euclidiano com coordenadas Euclidianas (x^1, \dots, x^n) , dado o novo sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) (não necessariamente Euclidiano), e que $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$. Supondo também que uma curva a qual as equações paramétricas em termos das novas coordenadas são: $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \dots, n$. Então é possível dessas parametrizações da curva em termos da original, Euclidiana, coordenadas nomeadas

$$x^j = x^j(z(t)) = h^j(t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Define-se o vetor tangente da curva relativa ao sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) a ser um vetor $v_z(t) = (v_z^1, \dots, v_z^n)$, onde

$$v_z^j = \frac{dz^j}{dt}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Relativo às coordenadas originais (x^1, \dots, x^n) , o vetor tangente é $v = v_x = (dh^1/dt, \dots, dh^n/dt)$. Os vetores $v_z(t)$ e $v_x(t)$ são por hora o mesmo vetor desde que cada um deles seja a velocidade (em relação a t) na qual a curva é traçada, analisando no ponto P , representado por $(z^1(t), \dots, z^n(t))$ no novo sistema de coordenadas, e por $(h^1(t), \dots, h^n(t))$ nas coordenadas antigas.

As n -uplas $(dz^1/dt, \dots, dz^n/dt)$ e $(dh^1/dt, \dots, dh^n/dt)$ são simples representações desse vetor relativo a dois diferentes sistemas de coordenadas (z) e (x) . Agora verificando como as coordenadas do vetor velocidade se transforma sob a dada mudança de variáveis. Sendo

$$v_x^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{dz^j}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j, \quad (3.14)$$

onde, naturalmente, fica entendido que há a soma sobre o índice repetido j . Em consequência o quadrado do comprimento do vetor tangente é

$$|v^x|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j\right)^2 = g_{jk} v_z^j v_z^k, \quad (3.15)$$

onde o símbolo g_{jk} é definido por

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \quad (3.16)$$

Fechando a ideia: para qualquer sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) , onde $x = x(z)$ (x sendo uma coordenada Euclidiana), o escalar que é o quadrado do vetor tangente $v_z = (dz^1/dt, \dots, dz^n/dt)$ a curva $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, é dado por

$$|v_z|^2 = |v_x|^2 = g_{jk} \frac{dz^j}{dt} \frac{dz^k}{dt}, \quad (3.17)$$

onde $g_{jk} = (\partial x^i / \partial z^j) (\partial x^i / \partial z^k)$. A Definição 6 do comprimento de arco e a Eq. (3.17), juntas produzem a equação geral para qualquer sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) :

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{jk} \frac{dz^j}{dt} \frac{dz^k}{dt}} dt. \quad (3.18)$$

3.2 Formas Quadráticas e Vetores

Foi mostrado na Eq. (3.14) que as componente do vetor tangente de a uma curva se transforma sobre a mudança de variável $x = x(z)$ de acordo com a regra

$$v_x^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j,$$

ou, mais brevemente,

$$v_x = A v_z,$$

onde $A = \partial x / \partial z$ é a matriz Jacobiana da mudança de coordenada, definida anteriormente na Eq. (2.6). Nota-se que ao chegar na Eq. (3.18) não foi usado o fato de se ter assumido que as coordenadas (x^1, \dots, x^n) são Euclidianas. Utilizando Eq. (3.18) como modelo, é possível dar uma definição que sobreponha todas as anteriores, de o que se quer dizer ao falar de vetor.

Definição 8. (*Vetor*). Um vetor no ponto $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ é, em relação a um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , um n -upla (ξ^1, \dots, ξ^n) de números, os quais se transformam sobre uma mudança de coordenadas $x = x(z)$ das coordenadas (x^1, \dots, x^n) para as coordenadas (z^1, \dots, z^n) , de acordo com a regra

$$\xi^i = \left. \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \right|_{z^k=z_0^k} \zeta^j, \quad (3.19)$$

onde $x^i(z_0^1, \dots, z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, \dots, n$, e $(\zeta^1, \dots, \zeta^n)$ é a representação de um vetor relativo às coordenadas (z^1, \dots, z^n) .

A parte que mais interessa dessa definição está na forma da regra de transformação (Eq. (3.19)).

Para obter um contraste, considerando outro objeto geométrico frequentemente encontrado, chamado de gradiente (tomado no sistema de coordenadas k) de uma função f , é denotado por $\nabla_k f$. Tomando a definição usual de gradiente de uma função real $f(x^1, \dots, x^n)$ é o "vetor" representando por

$$\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \quad (3.20)$$

em coordenadas cartesianas x^1, \dots, x^n . Já a cara do gradiente em termos das coordenadas z^1, \dots, z^n , onde $x = x(z)$ como ficaria? Tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_x f(x^1(z), \dots, x^n(z)) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z^n} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial z^i} &= \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Ao escrever $\xi_j = \partial f / \partial x^j$, $\eta_i = \partial f / \partial z^i$, $i = 1, \dots, n$, será assim obtido

$$\eta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j. \quad (3.21)$$

Porém fica perceptível que sobre uma mudança de coordenada o gradiente de uma função se transforma de forma diferente de um vetor; tal entidade é chamada de *covetor*.

Agora olhando para as formas quadráticas. Seja suposto um sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) Euclidiano, e que $\xi_1 = (\xi_1^1, \dots, \xi_1^n)$ e $\xi_2 = (\xi_2^1, \dots, \xi_2^n)$ são dois vetores ambos originados no ponto $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Se em um novo sistema de coordenadas (z^1, \dots, z^n) com $x = x(z)$, $x(z^0) = x_0$, esses vetores possuem componentes $(\eta_1^1, \dots, \eta_1^n)$ e $(\eta_2^1, \dots, \eta_2^n)$ respectivamente, então a relação entre as antigas e novas componentes é, pela Definição 8, dada pelas equações

$$\xi_1^i = a_j^i \eta_1^j, \quad \xi_2^i = a_j^i \eta_2^j,$$

onde (a_j^i) é o matriz Jacobiana tomada em $z^k = z_0^k$, $k = 1, \dots, n$. O produto escalar do vetor ξ_1 e ξ_2 no sistema de coordenadas inicial (Euclidiano) é

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \quad (3.22)$$

Em termos das componentes relativas ao novo sistema de coordenadas a Eq. (3.22) fica

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^n (a_j^i \eta_1^j) (a_j^i \eta_2^j) = g_{jk} \eta_1^j \eta_2^k, \quad (3.23)$$

onde

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^n a_j^i a_k^i = \delta_{lm} a_j^l a_k^m. \quad (3.24)$$

Os coeficientes g_{jk} em questão aqui são os mesmos quais encontrados na Eq. (3.15) enquanto se resolvia o problema de calcular o comprimento de arco em qualquer sistema de coordenadas. Não é surpresa o fato de uma matriz $G = (g_j^i)$ aparecer numa expressão para o escalar que é o quadrado de um certo vetor em termos das novas coordenadas; afinal uma transformação linear pode ser expressa por uma matriz. Na linguagem de matrizes a Eq. (3.24) pode ser escrita como:

$$G = A^T A, \quad (3.25)$$

onde T denota a operação de transposição da matriz. Agora analisando como as componentes g_{ij} da matriz G se transformam sobre mudanças de coordenadas. Assim, tomando y^1, \dots, y^n sendo um outro sistema de coordenadas para a mesma região, e deixando $z^j = z^j(y^1, \dots, y^n)$, $j = 1, \dots, n$. Escreve-se $C = (c_j^i) = (\partial z^i / \partial y^j)$. Então pela Definição 8 as componentes $(\zeta_1^1, \dots, \zeta_1^n)$, $(\zeta_2^1, \dots, \zeta_2^n)$ dos vetores ξ_1, ξ_2 relativos às coordenadas y^1, \dots, y^n , satisfazem

$$\eta_1^i = c_j^i \zeta_1^j, \quad \eta_2^i = c_j^i \zeta_2^j. \quad (3.26)$$

Denotando por (h_{kl}) a matriz que surge na expressão do produto escalar $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ em termo das novas coordenadas, então

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l,$$

Nas coordenadas antigas

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j,$$

De modo que

$$h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l = g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j \quad (3.27)$$

Substituindo para η_1^i, η_2^j de Eq. (3.26) ficará

$$h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l = g_{ij} c_m^i \zeta_1^m c_n^j \zeta_2^n \quad (3.28)$$

Reescrevendo de maneira comparável

$$h_{kl} \left(\zeta_1^k \zeta_2^l \right) = \left(c_k^i g_{ij} c_l^j \right) \left(\zeta_1^k \zeta_2^l \right)$$

Então conseqüentemente

$$h_{kl} = \left(c_k^i g_{ij} c_l^j \right), \quad (3.29)$$

a partir da Eq. (3.28) que é para quaisquer dois vetores ξ_1, ξ_2 (originando em P). Na linguagem matricial é possível enxergar Eq. (3.29) se tornar $H = C^T G C$.

Definição 9. (*Forma Quadrática*). Seja z^1, \dots, z^n as coordenadas de uma região no espaço. A forma quadrática dos vetores em um ponto $P = (z_0^1, \dots, z_0^n)$ dessa região, relativa a essas coordenadas z^1, \dots, z^n , é uma família de números g_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, que satisfazem $g_{ij} = g_{ji}$, e se transformam sobre a mudança de coordenadas y^1, \dots, y^n onde $z = z(y)$ e $z_0^i = z^i(y_0^1, \dots, y_0^n)$, de acordo com

$$h_{kl} = \frac{\partial z^i}{\partial y^k} \Big|_{y^s=y_0^s} g_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial y^l} \Big|_{y^s=y_0^s} \quad (3.30)$$

onde o h_{kl} , $k, l = 1, \dots, n$, $h_{kl} = h_{lk}$, são os coeficientes da forma quadrática para as novas coordenadas y^1, \dots, y^n . (Como já notado, Eq. (3.30) pode ser reescrita na notação matricial como $H = C^T G C$.)

Dado um ponto P a forma quadrática g_{ij} na qual se transforma de acordo com (3.30), então é possível definir uma forma bilinear $\{\xi, \eta\}$ em pares de vetores originados em P , tomando

$$\{\xi, \eta\} = g_{ij} \xi^i \eta^j.$$

É possível disso obter a forma quadrática de vetores individuais, que é dado por $\xi, \xi = g_{ij} \xi^i \xi^j$. E segue da transformação dada pela Eq. (3.30) que essa forma bilinear não depende da escolha do sistema de coordenadas, mas apenas do ponto P e do par ξ, η dos vetores (conforme Eq. (3.27)).

4 ESPAÇO RIEMANNIANO E PSEUDO-RIEMANNIANO

4.1 Métricas Riemannianas

O arco de uma curva suave do tipo $x^i = x^i(t)$ em um espaço n -dimensional com coordenadas (x^1, \dots, x^n) é definido por

$$l \equiv \int_a^b |\dot{x}(t)| dt, \quad \dot{x} \equiv v \equiv \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

Essa definição assume de antemão que é sabido o que se quer significar com o comprimento do vetor tangente $\dot{x} = \dot{x}(t)$ à curva em cada ponto da curva. Para a métrica ser considerada Riemanniana é necessário primeiro que o comprimento do quadrado do vetor ξ originário de um ponto P tenha a forma

$$|\xi|^2 = g_{ij} \xi^i \xi^j \quad (4.2)$$

onde ξ^1, \dots, ξ^n sejam as componentes do vetor ξ em relação ao dado sistema de coordenadas, e os números g_{ij} dependem de P e do sistema de coordenadas. Entretanto $|\xi|^2$ é a forma quadrática do vetor ξ , de modo que o comprimento de um vetor não deve depender da escolha do sistema de coordenadas, o g^{ij} deve persistir sob transformações de coordenadas, mudando como os coeficientes da forma quadrática, assim define-se:

Definição 10. (*Métrica Riemanniana*). A métrica Riemanniana em uma região do espaço \mathbb{R}^n , relativa a coordenadas arbitrárias (z^1, \dots, z^n) , é uma família de funções suaves $g_{ij} = g_{ji}(z^1, \dots, z^n)$, $i, j \in [1, n]$ com duas propriedades: a matriz (g_{ij}) é positivo definida; e $i = [1, n]$, então relacionado a essas novas coordenadas a métrica Riemanniana é representada pela família de funções $g'_{ij} = g'_{ji}(y^1, \dots, y^n)$, $i, j \in [1, n]$, dado por

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}. \quad (4.3)$$

Uma matriz positiva definida significa simplesmente que $g_{ij} \xi^i \xi^j > 0$ para vetores ξ não nulos, a forma quadrática é um exemplo de positivo definido. Dada uma métrica Riemanniana, é possível definir o comprimento de arco de uma curva $z^i = z^i(t)$ como:

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} dt \quad (4.4)$$

Agora definindo o produto escalar entre dois vetores que originam num mesmo ponto.

Definição 11. (*Produto Escalar*) Sejam dois vetores $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ e $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$ no ponto $P = (z_0^1, \dots, z_0^n)$. Seu produto escalar é definido como:

$$\langle \xi, \eta \rangle \equiv g_{ij}(z_0^1, \dots, z_0^n) \xi^i \eta^j \quad (4.5)$$

Nota-se que as regras de transformação Eq. (3.19) e Eq. (3.30) garantem que o produto escalar de dois vetores em um ponto é independente da escolha do sistema de coordenadas. Agora a definição de ângulo toma a forma familiar: Se temos duas curvas $z^i = f^i(t)$ e $z^i = h^i(t)$ os quais se interceptam quando $t = t_0$, então o angulo entre as curvas nesse ponto é único, satisfazendo $0 \leq \varphi \leq \pi$, e assim podendo ser escrito como:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|}, \quad (4.6)$$

onde ξ, η são vetores tangentes a respeito da curva no ponto $t = t_0$, e $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Olhando para φ e percebendo que ele deve ser real desde que $|\langle \xi, \eta \rangle| \leq |\xi||\eta|$ (uma forma da "desigualdade de Cauchy-Bunjakovskii"). Para perceber isso, primeiro nota-se que para qualquer número real a ,

$$\langle a\xi + \eta, a\xi + \eta \rangle = a^2 \langle \xi, \xi \rangle + 2a \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \eta \rangle,$$

então como a forma quadrática é positiva com uma pequena manipulação é possível levantar o discriminante

$$\begin{aligned} |\langle \xi, \eta \rangle| &\leq |\xi||\eta|, \\ \langle \xi, \eta \rangle^2 &\leq \left(\sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} \sqrt{\langle \eta, \eta \rangle} \right)^2, \end{aligned}$$

que leva ao discriminante

$$\langle \xi, \eta \rangle^2 - \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle \leq 0,$$

o qual é o mesmo que

$$\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2 \geq 0.$$

Qual a forma que a métrica toma nos variados sistema de coordenadas para um espaço Euclidiano?

(i) $n = 2$. Relativo a coordenadas Euclidianas $x^1 = x, x^2 = y$, tem-se:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}; \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Relativo a coordenadas polares $z^1 = r, z^2 = \varphi$, onde, como usualmente $x^1 = r \cos(\varphi), x^2 = r \sin(\varphi)$, utilizando (4.3), rapidamente sem complicação alguma se obtém

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente o comprimento l de um arco dado por $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a \leq t \leq b$, é

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt$$

(ii) $n=3$. Relativo às coordenadas Euclidianas x^1, x^2, x^3 , como anteriormente $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Relativo às coordenadas cilíndricas $y^1 = r, y^2 = \varphi, y^3 = z$ (como dado pela Eq. (2.10)) se obtém:

$$(g'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

consequentemente

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Já para as coordenadas esféricas $y^1 = r, y^2 = \theta, y^3 = \varphi$ (como Eq. (2.12)), se tem

$$(g'_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix},$$

E o comprimento de um arco na esfera será

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

Frequentemente a métrica é dada via formula para o quadrado do diferencial dl , que seria

$$dl^2 = g_{ij} dz^i dz^j. \quad (4.7)$$

(Falando estritamente, dz^i é definido por $dz^i = \dot{z}^i dt$ (similarmente para dl), onde $z^i = z^i(t)$ é a curva em estudo.)

Voltando aos exemplos de sistemas de coordenadas no plano Euclidiano e no espaço, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coordenadas retangulares, } dl^2 = \sum^n (dx^i)^2; \\ \text{Coordenadas polares, } dl^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2; \\ \text{Coordenadas cilíndricas, } dl^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + (dz)^2; \\ \text{Coordenadas esféricas, } dl^2 = (dr)^2 + r^2 [(d\theta)^2 + \text{sen}^2(\theta) (d\varphi)^2]. \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

Definição 12. (*Métrica Euclidiana*). Uma métrica $g_{ij} = g_{ji}(z)$ é chamada de *Euclidiana* se existem coordenadas $x^1, \dots, x^n, x^i = x^i(z)$, tais que

$$\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^i} \right) \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^k}{\partial z^j}.$$

Segue da Eq. (4.3) relativa às coordenadas x^1, \dots, x^n , é necessário que todos os pontos da região $g'_{ij} = \delta_{ij}$. Essas coordenadas são nomeadas *Euclidianas*. Nos exemplos mostrados anteriormente foi meramente representada a métrica *Euclidiana* relativa a vários sistemas de coordenadas. Uma pergunta que pode surgir: mas existem só métricas *Euclidianas*? A resposta é: não, existem também métricas *Riemannianas*, por exemplo.

4.2 A Métrica de Minkowski

Na Definição 10 o que foi feito para a obter foi mudar o requerimento quanto a matriz (g_{ij}) exigindo que essa fosse positiva definida por condições que em todos os pontos a forma quadrática $g_{ij}\xi^i\xi^j$ fosse indefinida, mas tinha índice de inércia fixo e ainda tinha classe n (isso é, $\det(g_{ij}) \neq 0$), então chegamos na definição da métrica *pseudo-Riemanniana*.

Seja g_{ij}^0 o valor de g_{ij} no ponto $P = (z_0^1, \dots, z_0^n)$, isso é $g_{ij}^0 = g_{ij}(z_0^1, \dots, z_0^n)$. Da álgebra linear uma "mudança de variáveis" $\xi^i = \lambda_k^i \eta^k$, na qual a forma quadrática $g_{ij}^0 \xi^i \xi^j$ toma a forma canônica

$$\eta_1^2 + \dots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \dots - \eta_n^2,$$

onde p depende apenas da forma quadrática $g_{ij}^0 \xi^i \xi^j$. Por considerações de continuidade o inteiro p , será chamado índice de inércia da forma quadrática, é o mesmo para todos os pontos P da região considerada, então há como definir sem ambiguidade o tipo da forma quadrática $g_{ij}\xi^i\xi^j$ a ser um par (p, q) onde $p + q = n$. Nota-se que em geral assim não vai ser possível uma mudança de variáveis em termos dessas coordenadas, $g_{ij}\xi^i\xi^j$ está na forma canônica em todos os pontos da vizinhança de P .

Definição 13. (*Métrica pseudo-Euclidiana*). Seja $g_{ij} = g_{ji}(z)$ uma métrica *pseudo-Riemanniana*. Essa métrica é *pseudo-Euclidiana* se existe coordenadas $x^1, \dots, x^n, x^i = x^i(z)$, $\det(\partial x^i / \partial z^j) \neq 0$ tal que

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i} \frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \dots + \frac{\partial x^p}{\partial z^i} \frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i} \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - \dots - \frac{\partial x^n}{\partial z^i} \frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

Segue de (4.3) que, relativo a essas coordenadas,

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= 0 \quad \text{para } i \neq j, \\ g'_{ij} &= 1 \quad \text{para } i \leq j, \\ g'_{ii} &= -1 \quad \text{para } i \geq p + 1. \end{aligned}$$

As coordenadas x^1, \dots, x^n chamam-se coordenadas pseudo-Euclidianas do tipo (p, q) , onde $q = n - p$. Pode-se definir uma métrica pseudo-Euclidiana do tipo (p, q) no espaço \mathbb{R}^n de n -uplas (x^1, \dots, x^n) reais ordenadas tomando

$$\langle \xi, \eta \rangle_{p,q} = \xi^1 \eta^1 + \dots + \xi^p \eta^p - \xi^{p+1} \eta^{p+1} - \dots - \xi^n \eta^n \quad (4.9)$$

para os vetores $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ e $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$; as coordenadas "usuais" x^1, \dots, x^n serão então pseudo-Euclidianas. O espaço \mathbb{R}^n que possui essa métrica é também referenciado como pseudo-Euclidiano, e denotado por $\mathbb{R}_{p,q}^n$.

Vale notar que podemos supor $p \leq [n/2]$ afinal para nosso uso a forma quadrática $-g_{ij}$ essencialmente não difere de g_{ij} .

O espaço $\mathbb{R}_{1,3}^4$ tem um significado especial. É o espaço de Minkowski da teoria especial da relatividade. Nessa teoria é postulado o contínuo espaço-tempo, o qual já visto anteriormente (na Sessão 2.1), lá foi utilizado: $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$. Portanto o quadrado de um elemento de comprimento é dado por

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (4.10)$$

Dados dois eventos (isso é, pontos no espaço-tempo) $P_1 = (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ e $P_2 = (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, define-se a separação no espaço-tempo, para ser a quantidade

$$|P_1 - P_2|^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2. \quad (4.11)$$

A separação espaço-temporal de dois eventos distintos P_1, P_2 pode ser positiva, negativa ou inclusive zero.

Para conclusão dessa sessão considera-se a a coordenalização de uma região do espaço $\mathbb{R}_{1,2}^3$, nomeada de coordenadas pseudo-esféricas, as quais define-se como segue. Seja x^0, x^1, x^2 denota-se coordenadas pseudo-Euclidianas em $\mathbb{R}_{1,2}^3$. Então coordenadas pseudo-esféricas ρ, χ, φ são definidas por

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \rho \cosh(\chi), \\ x^1 &= \rho \sinh(\chi) \cos(\varphi), \\ x^2 &= \rho \sinh(\chi) \sin(\varphi), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\infty &< \rho < \infty, \\ 0 &\leq \chi < \infty, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Consequentemente

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = \rho^2 \geq 0$$

Consequentemente coordenadas ρ, χ, φ são assimiladas unicamente a pontos de uma região definida por $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 > 0$, isso é no interior do cone $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ (Figura 4.2). Todos os pontos dessa região exceto aqueles que estão no eixo x^0 são pontos ordinários do sistema de coordenadas pseudo-esféricas. Nessa região (com o eixo x^0 removido) o quadrado de um elemento de comprimento é dado por

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2 [(d\chi)^2 + \sinh^2(d\varphi)^2]. \quad (4.13)$$

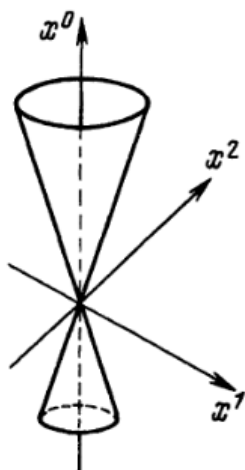


Figura 5 – Cone $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ [8].

Por curiosidade expondo o caso em que se assimila as coordenadas pseudo-esféricas a pontos fora

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \rho \cosh(\chi), \\ x^1 &= \rho \sinh(\chi) \cos(\varphi), \\ x^2 &= \rho \sinh(\chi) \sin(\varphi). \end{aligned} \right\} \rho > 0 \quad (4.14)$$

Porém, só curiosidade essa situação.

Parte II

A Teoria das Superfícies

5 GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE NO ESPAÇO

5.1 Coordenadas na superfície

Uma superfície no espaço 3-d é basicamente um objeto que possui sua própria geometria (intrínseca), isso é, quantidades internas que sejam invariantes à métrica.

Já uma curva é um objeto geométrico contrário à superfície, nesse caso possui geometria extrínseca. Uma curva $r = r(t)$ não possui invariantes métricos, afinal essencialmente o único parâmetro desse tipo que possui é o comprimento de arco l , definido por

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |v_t| dt, \quad v_t = \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

e claramente isso é em si inadequado para a distinção de uma curva, por exemplo, à uma linha reta, isso é, é possível escolher coordenadas para uma linha reta com o mesmo parâmetro l de tal forma que as distâncias ao longo tanto da curva quanto da linha reta sejam mensuradas à mesma maneira.

Para superfícies a situação é diferente: é impossível escolher coordenadas para a esfera (ou até uma parte da esfera) tais que a formula da distância na esfera em termos dessas coordenadas sejam a mesma da formula no plano Euclidiano.

Superfícies no espaço Cartesiano 3-d são dados em três diferentes maneiras:

- (i) (mais simples) como um gráfico de uma função de duas variáveis

$$z = f(x, y);$$

- (ii) (mais geral) como um gráfico para a equação

$$F(x, y, z) = 0;$$

- (iii) através de equações paramétricas

$$r = r(u, v);$$

que em mais detalhes

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

onde o par (u, v) abrange uma região do plano, o domínio dos valores dos parâmetros u, v . É necessário frequentemente se referir sugestivamente para os parâmetros u, v como coordenadas da superfície.

Vale salientar que todas as funções serão assumidas continuamente deriváveis, a não ser que seja claramente definido o contrário.

Definição 14. Uma superfície dada pela equação $F(x, y, z) = 0$ é não singular no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$, se o gradiente de F em P é diferente de zero:

$$\begin{aligned} \nabla F|_{(x_0, y_0, z_0)} &\neq 0, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} e_1 + \frac{\partial F}{\partial y} e_2 + \frac{\partial F}{\partial z} e_3 \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &\neq 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} e_1 + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} e_2 + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} e_3 &\neq 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, se $\partial F/\partial z|_{x_0, y_0, z_0} \neq 0$, então próximo ao ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ na superfície, a equação $F(x, y, z) = 0$ pode ser resolvido para z como uma função (continuamente derivável) de x e y ; isso é, existe uma função $z = f(x, y)$, tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$, e, em na vizinhança do ponto (x_0, y_0) , $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Fórmulas para as derivadas parciais de f são obtidas como segue. Derivando implicitamente a identidade $F(x, y, f(x, y)) = 0$ com relação a x , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

Mas vale lembrar, $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0,$$

Consequentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \quad (5.2)$$

Da Definição 14 e o Teorema da Função Implícita segue que em torno de cada ponto não singular da superfície dada por $F(x, y, z) = 0$, há uma vizinhança tal que o pedaço da superfície fechada por essa vizinhança é o gráfico de uma função (onde se não for z , então tanto x quanto y devem servir como variáveis dependentes). Então localmente, isso é na vizinhança de um ponto não singular, a superfície é dada por equações paramétricas $z = f(u, v)$, $x = u$, $y = v$ (em torno do ponto $x_0 = u_0$, $y_0 = v_0$). Isso é frequentemente expresso como: em uma vizinhança de um ponto não singular de uma superfície existem coordenadas locais u, v .

Supondo agora que uma superfície é dada parametricamente:

$$r = r(u, v); \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (5.3)$$

Definição 15. Um ponto $P = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ na superfície dada por (5.3), é considerado não singular se a matriz

$$\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{pmatrix}_{u_0, v_0}$$

tenha posto¹ 2.

O próximo teorema dirá que a Definição 14 e a Definição 15 são localmente equivalentes, mas, mais significativo que isso concluir-se-á partindo disso que localmente as três maneiras diferentes de se expressar equacionalmente uma superfície no espaço cartesiano 3-d são equivalentes.

Teorema 3. Se uma superfície é dada parametricamente (como no formato dado pela Eq. (5.3)) e o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ correspondente a (u_0, v_0) é não singular, então há uma equação $F(x, y, z) = 0$ a qual define a superfície na vizinhança de P , e possui a propriedade que $\nabla F_{x_0, y_0, z_0} \neq 0$.

Seja P um ponto não singular, pela Definição 15 a matriz A possui posto 2; consequentemente, pelo renomeamento de x, y, z se necessário, pode-se supor que o determinante

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0.$$

Entretanto esse determinante é o Jacobiano da transformação $(u, v) \mapsto (x, y)$, calculado no ponto (u_0, v_0) . Como o determinante é não nulo, deduz-se do Teorema da Função Inversa (Teorema 2) que a vizinhança de um ponto (x_0, y_0) (que são $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$), onde a restrição da transformação $(x, y) \mapsto (u, v)$ tem uma inversa, na qual ainda, a matriz $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ é a inversa de $\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$. Se definir $f(x, y)$ como

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)),$$

, então a equação $z = f(x, y)$ atenderá o que o teorema diz.

Alguns exemplos:

- (a) O elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ não possui pontos de singularidade, mas globalmente não é o gráfico de uma função (porém localmente é). Não possui uma parametrização global com respeito a todos os pontos não singulares.
- (b) O hiperbolóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ também não é globalmente gráfico de uma função, mas possui parâmetros globais $u = z, v = \varphi$ (onde φ é o ângulo polar usualmente definido em termos de x e y) deixando a parametrização sem pontos singulares.

¹ Esse termo em inglês é *rank*

- (c) O hiperbolóide duplo $-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Cada parte é o gráfico de uma função da forma $z = f(x, y)$ (e tem uma parametrização sem pontos singulares).
- (d) O cone $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ tem o ponto $(0, 0, 0)$ como ponto singular.

Agora olhando para o espaço Cartesiano n -dimensional onde entende-se uma superfície dada por um sistema de equações

$$f_1(x^1, \dots, x^n) = 0, \dots, f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \quad (5.4)$$

definido em uma região do espaço.

Definição 16. Um ponto $P(x_0^1, \dots, x_0^n)$ da superfície dada por Eq. (5.4) diz-se não singular se a matriz $(n - k) \times n$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) \Big|_{x^i = x_0^i}$$

tem posto $(n - k)$.

Lema 1. Coordenadas locais podem ser definidas em uma vizinhança de um ponto singular da superfície (5.4).

5.2 Planos Tangente

Supondo uma superfície em \mathbb{R}^3 é dada em forma paramétrica $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, onde u, v são parâmetros, ou, em outra terminologia, coordenadas na superfície. UMA CURVA $u = u(t), v = v(t)$ na região (u, v) define a curva $r(t) = r(u(t), v(t))$ imersa numa superfície em \mathbb{R}^3 . O vetor tangente $\dot{r}(t)$ a curva, tem a forma

$$\dot{r}(t) = r_u \dot{u} + r_v \dot{v}, \quad r_u = \frac{\partial r}{\partial u}, \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}. \quad (5.5)$$

Pela Definição 15 um ponto não singular de uma superfície é um no qual os vetores $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $r_v = (x_v, y_v, z_v)$ são linearmente independentes. Unindo com as Eq. (5.5), que diz que todo vetor tangente a uma superfície é uma combinação linear dos vetores r_u e r_v , deduzindo que todos os vetores tangente a tal superfície em um dado ponto não singular P forma um subespaço possuidor do par r_u, r_v com base. Esse subespaço é o plano tangente à superfície em um dado ponto.

Supondo agora que uma superfície em \mathbb{R}^3 seja dada via a equação $F(x, y, z) = 0$. Se $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva na superfície, isso é $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ para um intervalo específico dos valores de t , então $(d/dt)F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ para tais valores de t consequentemente, aplicando a regra da cadeia, obtém-se

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0. \quad (5.6)$$

Em um ponto não singular $P(x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície se tem (por definição), $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$. Disso A, B, C para F_x, F_y, F_z respectivamente, avaliado em P , se vê

da Eq. (5.6) que para todo vetor $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ tangente a uma superfície em P está no plano $Ax + By + Cz = 0$. Consequentemente há um plano tangente à superfície em um ponto não singular P : ele é um subespaço 2-d que consiste de todos os vetores (x, y, z) que satisfazem $Ax + By + Cz = 0$. Agora repetindo esses dois argumentos (mostrando que existe um único plano tangente em cada ponto não singular da superfície) em n dimensões.

Assim, primeiramente supondo que em um espaço Cartesiano n -d com coordenadas x^1, \dots, x^n , é dado uma superfície k -d na forma paramétrica:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(z^1, \dots, z^k), \\ &\vdots \\ x^n &= x^n(z^1, \dots, z^k). \end{aligned} \quad (5.7)$$

(Chamando essa superfície k -d desde que olhando para z^1, \dots, z^k como coordenadas para isso.) Como no caso $n = 3$, uma família de funções $z^j = z^j(t)$, $j = 1, \dots, k$ (define uma curva no espaço coordenado por z^1, \dots, z^k), na substituição na Eq. (5.7), uma curva compreendida na superfície das Eq. (5.7) com vetor tangente

$$v = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \dot{z}^1 b_1 + \dots + \dot{z}^k b_k, \quad (5.8)$$

onde os vetores b_j são dados por

$$b_j = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^j}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^j} \right), \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.9)$$

Pela analogia com a Definição 15 (que se aplica quando $n = 3, k = 2$), deve-se dizer que um ponto dentro da superfície (5.7) é um ponto não singular da superfície se os k vetores na Eq. (5.9) são linearmente independentes. Continuamente essa analogia com o caso 3-d, então define-se o plano tangente à superfície (5.7) no ponto não singular P , a ser um subespaço de \mathbb{R}^n medido pelos k vetores independentes na Eq. (5.9); da Eq. (5.8) vê-se então que todos os vetores tangente à superfície em um ponto P não singular, está no plano tangente à superfície em P , então essa é a definição de plano tangente apropriada.

Se por outro lado uma superfície k -d é dada em termos de um sistema de $(n - k)$ equações

$$\begin{aligned} f_1(x^1, \dots, x^n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n-k}(x^1, \dots, x^n) &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

então as componentes de um vetor tangente $(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ à superfície (isso é tangente à curva $x^1 = x^1(t), \dots, x^n = x^n(t)$ que está na superfície) irá satisfazer o sistema de $(n - k)$ equações lineares

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^l} \dot{x}^l = 0, \quad j = 1, \dots, n - k. \quad (5.11)$$

Se agora for definido (por analogia da Definição 15 e como na Definição 16) um ponto não singular da superfície para ser um no qual o coeficiente da matriz $(\partial f_j / \partial x^l)$ do sistema (??) tem posto $(n-k)$, então em tal ponto P o subespaço de \mathbb{R}^n criado com todas soluções do sistema (??), irá possuir dimensão k e vai conter todos os vetores $(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ tangente à superfície em P ; em consequência pega-se um subespaço para ser o plano tangente à superfície em um ponto não singular P .

(É possível prontamente parar e perguntar se o Teorema 3 possui um análogo em n dimensões, então localmente ambas as definições de um ponto não singular da superfície são a mesma, então obviamente os dois caminhos levam a planos tangente que são o mesmo plano.)

Conciliando: o significado geométrico da propriedade de ser não singular depende do fato que o plano tangente à uma superfície em um ponto não singular tem a mesma dimensão que a superfície. Esse é o número de parâmetros na representação paramétrica da superfície, ou, se a superfície é dada por um sistema de equações (5.10), então essa é a diferença entre a dimensão de um espaço subjacente e o número dessas equações.

5.3 A métrica em uma superfície imersa no espaço Euclidiano

O estudo da métrica agora está completamente livre da métrica. E será assumido que as superfícies estejam em espaços Euclidianos.

Para começar utilizando o espaço Euclidiano de 3 dimensões, com coordenadas Euclidianas x, y, z (Definição 12). Então o interesse é estudar a superfície nesse espaço no qual é dado parametricamente por $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ (r é uma função de u, v e também um vetor no espaço dado por x, y, z , isso é, $r = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$); onde u, v são coordenadas da superfície. Segue que todo ponto da superfície que for considerado será assumido não singular (Definição 15).

Ao imaginar uma superfície coordenada por u, v então é natural surgir o questionamento sobre a medida do comprimento nesse espaço, ou seja, o comprimento em termos das coordenadas u, v . Com base nisso, então suposta a curva $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ na superfície. Como a curva está no espaço Euclidiano, seu comprimento em termos de x, y, z é dado basicamente por:

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (5.12)$$

Desde que a curva esteja sob uma superfície, é possível encontrar um par de funções, tal que:

$$x = x(u(t), v(t)) = x(t) \quad y = y(u(t), v(t)) = y(t) \quad z = z(u(t), v(t)) = z(t). \quad (5.13)$$

por exemplo, as equações $u = u(t), v = v(t)$ determinam a curva, isso se considerar a superfície como um espaço coordenado por u, v , então essas equações tomam parte

como paramétricas da curva Eq. (5.13) no primeiro espaço em termos de u, v . Tendo isso em vista, surge o questionamento de qual seria a métrica $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$ gera o mesmo resultado para o comprimento da curva parametrizada comparado a Eq. (5.12). Essa pergunta pode ser traduzida para:

$$\int_a^b |v| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (5.14)$$

$$\text{com } |v|^2 \equiv g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad \text{e} \quad x^1 = u, \quad x^2 = v$$

Abrindo o lado esquerdo segue que:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \\ \int_a^b \sqrt{(g_{11} \dot{u} + g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{21} \dot{v} \dot{u} + g_{22} \dot{v}^2)} dt &= \\ E \equiv g_{11} \quad F \equiv g_{12} = g_{21} \quad G \equiv g_{22} & \quad (5.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \dot{u} + F \dot{u} \dot{v} + F \dot{v} \dot{u} + G \dot{v}^2 &= \\ E \dot{u} + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (5.16) \end{aligned}$$

Tomando a derivada das equações Eq. (5.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} = x_u \dot{u} + x_v \dot{v} \\ \dot{y} &= y_u \dot{u} + y_v \dot{v} \\ \dot{z} &= z_u \dot{u} + z_v \dot{v} \end{aligned}$$

Tomando os quadrados, à fim de substituir em Eq. (5.16)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= x_u^2 \dot{u}^2 + 2x_u \dot{u} x_v \dot{v} + x_v^2 \dot{v}^2 \\ \dot{y}^2 &= y_u^2 \dot{u}^2 + 2y_u \dot{u} y_v \dot{v} + y_v^2 \dot{v}^2 \\ \dot{z}^2 &= z_u^2 \dot{u}^2 + 2z_u \dot{u} z_v \dot{v} + z_v^2 \dot{v}^2 \end{aligned}$$

Substituindo

$$\begin{aligned} x_u^2 \dot{u}^2 + 2x_u \dot{u} x_v \dot{v} + x_v^2 \dot{v}^2 + y_u^2 \dot{u}^2 + 2y_u \dot{u} y_v \dot{v} + y_v^2 \dot{v}^2 + \\ + z_u^2 \dot{u}^2 + 2z_u \dot{u} z_v \dot{v} + z_v^2 \dot{v}^2 &= E \dot{u} + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2 \\ (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) \dot{u}^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \dot{u} \dot{v} + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \dot{v}^2 &= \quad (5.17) \end{aligned}$$

Pela comparação dos coeficientes em Eq. (5.17) pode então ser escrito:

$$\begin{aligned} g_{11} &= E = x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u \\ g_{12} &= F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ g_{22} &= G = x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v \quad (5.18) \end{aligned}$$

Escrevendo os vetores r_u e r_v :

$$r_u = x_u e_1 + y_u e_2 + z_u e_3, \quad r_v = x_v e_1 + y_v e_2 + z_v e_3 \quad (5.19)$$

Reescrevendo Eq. (5.18) em termos do produto escalar:

$$g_{ij} = \langle r_{x^i}, r_{x^j} \rangle, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v \quad (5.20)$$

Enfim a métrica $g_{ij}(u, v) = (E, F, G)$. Essa métrica Riemanniana na superfície tem a forma:

$$g_{ij} dx^i dx^j = E(du)^2 + 2F(du dv) + G(dv)^2$$

é chamada de *primeira forma fundamental da superfície* e a métrica é chamada de induzida na superfície.

Se a superfície dada possuir uma forma do tipo $z = z(x, y)$, com $u = x$ e $v = y$, então segundo Eq. (5.18) verifica-se que a métrica induzida é dada por:

$$g_{11} = 1 + z_x^2, \quad g_{12} = z_x z_y = g_{21}, \quad g_{22} = 1 + z_y^2. \quad (5.21)$$

E no caso de a superfície ser dada por uma equação do tipo $F(x, y, z) = 0$, é necessário escolher uma região sem um ponto P onde $\nabla F \neq 0$, para tal é possível considerar $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \forall P \in$ "Região" sem perda de generalidade. Como a equação $F(x, y, z) = 0$ define uma função $z = z(x, y)$ implicitamente na região de P , e nessa tem-se $z_x = -F_x/F_z$, $z_y = -F_y/F_z$, de modo que:

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{F_x}{F_z}\right)^2, \quad g_{12} = \frac{F_x F_y}{F_z^2} = g_{21}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{F_y}{F_z}\right)^2. \quad (5.22)$$

Concluindo assim, que independente de como é definida a equação da superfície, é possível calcular a métrica induzida com respeito as coordenadas apropriadas definidas, se for do interesse é possível calcular comprimentos dos segmentos das curvas que estão sob a superfície. Enfatizando que esses comprimentos Euclidianos são medidos em um espaço Euclidiano 3-d, o espaço no qual a superfície está situado.

Nota-se que se a superfície estiver na forma $r = r(u, v)$, isso é $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, então usualmente expressasse a Eq. (5.17) de forma breve:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v \quad (5.23)$$

onde $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$ são dados pelas Eq. (5.19), e onde dl é um elemento do comprimento de arco de uma curva na superfície.

É possível que para a métrica induzida $g_{ij}(x^1, x^2)$ na superfície seja Euclidiana; isso é, existe um sistema de coordenadas $\bar{u} = \bar{u}(x^1, x^2)$, $\bar{v} = \bar{v}(x^1, x^2)$, tal que

$$(d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

A métrica induzida em um cilindro é Euclidiana. Supondo a equação do cilindro dada pela equação $f(x, y) = 0$ (na qual z não aparece), então as coordenadas da superfície $\bar{u} = z$, $\bar{v} = l$, onde l é um comprimento de arco medido ao longo da curva $f(x, y) = 0$ no plano $z = 0$, são coordenadas Euclidianas para o cilindro, que é

$$\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\Big|_{f(x,y)=0} = dz^2 + dl^2.$$

O que é bem intuitivo para imaginar, pois um cilindro desenrolado é planificado.

Desviando um pouco para introduzir o conceito de unidade normal à uma superfície em um ponto. Pela Eq. (5.6), se a superfície é dada na forma $F(x, y, z) = 0$, então em qualquer ponto o vetor $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ é perpendicular a todo vetor tangente a uma superfície no ponto em questão. Então em um ponto não singular da superfície, ∇F é um vetor normal não nulo a uma superfície nesse ponto. Se por outro lado a superfície é dada em forma paramétrica $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, então os vetores

$$\xi = r_u = r_{x^1} = x_u e_1 + y_u e_2 + z_u e_3,$$

$$\eta = r_v = r_{x^2} = x_v e_1 + y_v e_2 + z_v e_3$$

são ambos tangente à superfície (Eq. (5.5)), então se eles são linearmente independentes (e como estarão em um ponto não singular da superfície, Definição 15), então seu produto vetorial $[\xi, \eta]$ providencia um vetor não nulo perpendicular à superfície.

Equipar essa superfície com a métrica Riemanniana g_{ij} na maneira descrita precedentemente é possível, como uma espécie de métrica espacial "auto-contida"; assim usa-se essa métrica para calcular o comprimento de arco da curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ da superfície, e pode-se também ser utilizado para calcular a medida do ângulo entre as curvas no ponto de intersecção das mesmas. Assim se $(u_1(t), v_1(t))$ e $(u_2(t), v_2(t))$ são duas curvas na superfície, e se $\eta_1 = (\dot{u}_1, \dot{v}_1)$, $\eta_2 = (\dot{u}_2, \dot{v}_2)$ são os vetores tangente a essas curvas no ponto onde elas se interceptam, então o ângulo φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) entre as curvas em tal ponto é dado por

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle}{|\eta_1| |\eta_2|} \quad (|\eta_1|^2 = \langle \eta_1, \eta_1 \rangle, |\eta_2|^2 = \langle \eta_2, \eta_2 \rangle),$$

onde o produto escalar $\langle \quad, \quad \rangle$ é definido por

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j \quad (\eta_k^1 = \dot{u}_k, \eta_k^2 = \dot{v}_k, k = 1, 2).$$

É claro de (5.16) que esse ângulo φ vai ser o mesmo que o Euclidiano entre as curvas $r = r(u_1(t), v_1(t))$ e $r = r(u_2(t), v_2(t))$ (assumindo a superfície dada na forma $r = r(u, v)$) no espaço Euclidiano 3-d.

Agora na formula da métrica na superfície k -d no espaço Euclidiano n -d. Desde que haja pelo menos uma vizinhança de um ponto não singular dessa superfície, os parâmetros

podem ser definidos (como já visto), assumindo que a superfície é dada na forma paramétrica $x^i = x^i(z^1, \dots, z^k)$, $i = 1, \dots, n$. Como antes uma curva $z^j = z^j(t)$, $j = 1, \dots, k$, no espaço de parâmetros k -d, define a curva

$$x^i(t) = x^i(z^1(t), \dots, z^k(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.24)$$

no espaço Euclidiano n -d, sob a superfície. Comprimento de arco ao longo da curva (5.24) é dado pela fórmula

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b |\dot{x}| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}^i)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{h=1}^n \frac{\partial x^h}{\partial z^i} \frac{\partial x^h}{\partial z^j} \dot{z}^i \dot{z}^j} dt. \end{aligned}$$

Assim como a métrica definida na superfície toma-se

$$g_{ij}(z^1, \dots, z^k) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial x^h}{\partial z^i} \frac{\partial x^h}{\partial z^j}. \quad (5.25)$$

Como no caso 3-d, deve-se dizer que a métrica definida pela Eq. (5.25) é induzida na superfície por uma métrica Euclidiana de um espaço Euclidiano. A métrica induzida em geral é não Euclidiana.

5.4 Área da Superfície

Do cálculo se sabe que a área de uma região U de um plano Euclidiano com coordenadas Euclidianas x, y , é dada pela integral dupla

$$\sigma(U) = \iint_U dx dy \quad (5.26)$$

e também a mudança de variáveis uma-a-uma

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (5.27)$$

a fórmula para $\sigma(U)$ em termos das novas coordenadas u, v é

$$\sigma(U) = \iint_V |x_u y_v - x_v y_u| du dv, \quad (5.28)$$

onde V é a região do plano (u, v) que corresponde a região U do plano (x, y) . O integrando de Eq. (5.28) é o valor absoluto $|J|$ do Jacobiano da transformação (5.26), então a Eq. (5.28) pode ser reescrita como

$$\sigma(U) = \iint_V |J| du dv.$$

A questão que deseja-se considerar é como realizar o cálculo da área de uma região não necessariamente em um plano, mas em uma superfície arbitrária em um espaço Euclidiano

3-d. Mais precisamente, dada uma superfície $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ no espaço Euclidiano 3-d, e com a métrica Riemanniana induzida

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v, \quad (5.29)$$

quer-se uma fórmula análoga da Eq. (5.26) para a área de uma região da superfície. O determinante g da matriz (g_{ij}) vai ser a parte principal da resposta à questão. Sabendo que $g > 0$ para a métrica (5.29) Riemanniana. Como para o comprimento de arco (Definição 12), então também para a área da superfícies simplesmente apresentar a definição como fato, e então em seguida o fato se mostra válido, apropriado. Seja U uma região de uma superfície $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ no espaço Euclidiano 3-d. Cada região da superfície é determinada por uma região no plano (u, v) isso será ocasionalmente conveniente (como foi ao considerar curvas na superfície) para imaginar U apesar da região do plano (u, v) que o determina. Com essa interpretação flexível de U a definição de superfície é a que segue.

Definição 17. *A área de uma região U na superfície $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ é dada por*

$$\sigma(U) = \iint_U \sqrt{g} du dv, \quad (5.30)$$

onde a integral é tomada sobre a região no plano (u, v) que determina U .

Por analogia com a Eq. (5.29) introduz-se a expressão diferencial (ou abreviada)

$$d\sigma = \sqrt{g} du dv,$$

onde $d\sigma$ é chamado de "elemento" ou "diferencial" de área da superfície com métrica g_{ij} .

Agora justificando a Definição 17; seja ξ, η vetores no plano Euclidiano, e considerando o paralelogramo que consiste de todos os vetores $\lambda\xi + \mu\eta$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. Verifica-se a área do paralelogramo que é dada por

$$\sigma = |\det A|, \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

e onde ξ^1, ξ^2 e η^1, η^2 são as componente de ξ e η relativas a uma base ortonormal e_1, e_2 , isso é $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$, $\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$.

Agora supondo um espaço 2-d com produto interno (produto escalar). Seja e_1, e_2 , uma base ortonormal para esse espaço. Isso é então natural definir que a área do paralelogramo é determinada por dois vetores ξ, η por analogia com a situação Euclidiana; assim toma-se a Eq. (5.31) como definição de área desse paralelogramo no contexto mais geral de um produto interno espacial. Escrevendo $\langle \xi, \eta \rangle = g_{12}$, $\langle \xi, \xi \rangle = g_{11}$, $\langle \eta, \eta \rangle = g_{22}$.

Expressando agora a área σ em termos do paralelogramo determinado por ξ, η , em termos desses g_{ij} . Para esse fim obtém-se

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2, \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 \rangle = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2, \\ g_{12} &= \langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2, \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 \rangle = \xi^1 \eta^1 + \xi^2 \eta^2, \\ g_{22} &= \langle \eta, \eta \rangle = \langle \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2, \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 \rangle = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2, \end{aligned}$$

o qual pode ser expresso de maneira mais compacta na notação matricial como

$$(g_{ij}) = AA^T,$$

onde A é como na Eq. (5.31). Tomando o determinante em ambos os lados, obtém-se $\det(g_{ij}) = (\det A)^2$. Disso e da Eq. (5.31) se obtém o resultado desejado que se estabelece como o lema a seguir.

Lema 2. *A área de um paralelogramo determinada pelos vetores ξ, η do produto interno espacial, é \sqrt{g} onde $g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.*

Agora o integrando da Definição 17 da área da superfície é denotado por \sqrt{g} . Agora é momento de encontrar a conexão disso com o Lema 2, indo mais um pouco

6 A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

6.1 Curvatura das curvas na superfície no Espaço Euclidiano

Supondo que seja dada a superfície em um espaço Euclidiano 3-d e um ponto não singular (x_0, y_0, z_0) na superfície. Deve-se assumir inicialmente que o eixo z é perpendicular ao plano da superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) , caso o qual o eixo x e o y serão paralelos ao plano da superfície no ponto em questão. A superfície será então dada localmente na vizinhança do ponto (x_0, y_0, z_0) pela equação na forma $z = f(x, y)$, onde $z_0 = f(x_0, y_0)$ e

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0, \quad \rightsquigarrow \quad \nabla f \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0 \quad (6.1)$$

Agora considerando a segunda diferencial da função $z = f(x, y)$, isso é $df^2 = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$. A matriz dessa forma quadrática, isso é a matriz (a_{ij}) onde $a_{ij} = f_{x^i x^j}$, $x^1 = x, x^2 = y$, é conhecido como o Hessiano da função f .

Definição 18. (*Curvatura Principal, Gaussiana e Média*). Dada a superfície $z = f(x, y)$, e um ponto (x_0, y_0, z_0) nela no qual $\nabla f = 0$, define-se Curvaturas Principais de uma superfície no ponto como sendo os autovalores da matriz (a_{ij}) calculada no ponto (x_0, y_0, z_0) . Chamando de Curvatura Gaussiana K o $\det(a_{ij})$ no ponto; e o traço de (a_{ij}) no ponto (x_0, y_0, z_0) da superfície de Curvatura Média.

Assim os autovalores k_1, k_2 de (a_{ij}) calculado em (x_0, y_0, z_0) são as curvaturas principais, enquanto a curvatura Gaussiana é $K = k_1 k_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, e a curvatura média é $k_1 + k_2 = a_{11} + a_{22}$.

A desvantagem da Definição 18 é que ela diz o que as curvaturas no ponto de uma superfície em termos do sistema de coordenadas especiais, o qual é determinado por um ponto que foi escolhido no eixo z perpendicular à superfície nesse ponto escolhido.

Assim supondo a superfície na forma paramétrica

$$r = r(u, v). \quad (6.2)$$

Foi visto que o vetor $[r_u, r_v]$ (produto vetorial de r_u com r_v) é normal à superfície em um ponto não singular; conseqüentemente se m denota um vetor unidade na mesma direção, então $[r_u, r_v] = |[r_u, r_v]|m$. Se agora $r = r(u(t), v(t))$ é uma curva na superfície, então se tem $\dot{r} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v}$, e

$$\ddot{r} = (r_{uu}\dot{u}^2 + 2r_{uv}\dot{u}\dot{v} + r_{vv}\dot{v}^2) + (r_u\ddot{u} + r_v\ddot{v}).$$

Usando $r_u \perp m$ e $r_v \perp m$, deduz-se que

$$\langle \ddot{r}, m \rangle = \langle r_{uu}, m \rangle \dot{u}^2 + 2\langle r_{uv}, m \rangle \dot{u}\dot{v} + \langle r_{vv}, m \rangle \dot{v}^2 = b_{11}\dot{u}^2 + 2b_{12}\dot{u}\dot{v} + b_{22}\dot{v}^2. \quad (6.3)$$

De Eq.(6.3) concluir que: em termos de coordenadas locais $u = x^1, v = x^2$ a projeção $\langle \ddot{r}, m \rangle$ do vetor aceleração \ddot{r} na normal à superfície, é uma forma quadrática nas componentes \dot{u}, \dot{v} do vetor tangente.

Se tomar $b_{11} = L, b_{12} = M, b_{22} = N$, então em termos das diferenciais Eq.(6.3) pode ser reescrito como

$$\langle \ddot{r}, m \rangle dt^2 = b_{ij} dx^i dx^j = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2. \quad (6.4)$$

Nomeia-se a expressão para $\langle \ddot{r}, m \rangle dt^2$ por segundo forma fundamental da superfície Eq.(6.2). Vale notar que os coeficiente L, M, N dependem apenas do ponto da superfície em questão, e não da curva $r = r(u(t), v(t))$.

Supondo agora que a curva $r = r(u(t), v(t))$ é parametrizada pelo parâmetro natural, $t = l$, onde l é o comprimento de arco. Assim com essa parametrização a curva se torna uma "curva de unidade de velocidade". Tomando a primeira fórmula de Serret-Frenet [8, Capítulo 5, Eq.(22), p.45], se tem

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dl^2} = kn,$$

onde n é a normal principal à curva, e k é sua curvatura. Consequentemente

$$\langle \ddot{r}, m \rangle = k \langle n, m \rangle = k \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre os vetores unitários m e n . Disso e de Eq.(6.4) se obtém

$$k \cos(\theta) (dl)^2 = \langle \ddot{r}, m \rangle dl^2 = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 = b_{ij} dx^i dx^j.$$

Comparando isso com a formula para a métrica induzida na superfície, que é,

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2,$$

onde $u = x^1, v = x^2$, concluindo-se, a partir de $dl^2 = (b_{ij} dx^i dx^j) / (k \cos(\theta))$ e $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, que

$$k \cos(\theta) = \frac{b_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j},$$

onde aqui denota-se os pontos como diferenciação com respeito a qualquer parâmetro t . Na forma conveniente de notação diferencial pode ser reescrito como

$$k \cos(\theta) = \frac{b_{ij} dx^i dx^j}{g_{ij} dx^i dx^j}, \quad \begin{array}{l} x^1 = u, \\ x^2 = v, \end{array} \quad (6.5)$$

(entretanto, é necessário manter em mente que estritamente falando em dx^i não é a diferencial independente, mas apenas $\dot{x}^i dt$).

Estabelecendo Eq.(6.5) em palavras, como

Teorema 4. *A curvatura em um ponto de uma curva na superfície no espaço 3-d Euclidiano, quando multiplicada pelo cosseno do ângulo entre a normal à superfície e a normal principal à curva no ponto, é a mesma razão entre a segunda e primeira formas fundamentais nas componentes do vetor tangente à curva nesse ponto.*

Um novo teorema, agora para definir um conceito importante dentro da abordagem do trabalho

Teorema 5. *(Curvatura Gaussiana). A curvatura Gaussiana de uma superfície é igual à razão dos determinantes da segunda e primeira forma fundamental:*

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (6.6)$$

Em particular, se a superfície é dada na forma $z = f(x, y)$, então temos

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \quad (6.7)$$

6.2 Invariantes de um par de formas quadráticas

Conseguir associar cada ponto de uma superfície Euclidiana 3-d, ao par de formas quadráticas

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (6.8)$$

$$\langle \ddot{r}, m \rangle dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j, \quad (6.9)$$

o primeiro é positivo definido. O objetivo é deduzir dessas formas quadráticas invariantes de superfície. Considerando um par de formas quadráticas no plano com coordenadas x, y , com matrizes relativa a essas coordenadas

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

onde G é positiva definida e $g_{12} = g_{21}$, $b_{12} = b_{21}$. Em seguida considerando a equação

$$\det(Q - \lambda G) = 0, \quad (6.11)$$

o qual, quando escrito em detalhes se torna

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0. \quad (6.12)$$

Chama-se de raízes λ_1, λ_2 dessa equação os autovalores das formas quadráticas.

Para cada $i = 1, 2$ procura-se soluções do sistema de equações

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - \lambda_i g_{11})\xi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^2 &= 0, \\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\xi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\xi_i^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

no desconhecidos ξ_i^1, ξ_i^2 . Desde que λ_1, λ_2 satisfaça a Eq. (6.12), o coeficiente da matriz de cada um dos sistemas (6.13) é singular, então existe solução não trivial, diz-se

$$f_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2, \quad f_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2,$$

e todas as solução serão múltiplos escalares da solução apropriada f_1, f_2 . As direções dos vetores f_1 e f_2 são chamadas de direções principais no plano do par de formas quadráticas, que f_1 corresponde a λ_1 , e que f_2 a λ_2 .

Agora com o plano equipado com o produto escalar definido em termos da forma quadrática positiva definida com matriz G , por tomar $\langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$, onde $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

Lema 3. *Se os autovalores de um par de formas quadráticas do tipo de (6.10) são distintas, então as direções principais são ortogonais.*

Para mostrar que os dois vetores f_1 e f_2 são ortogonais, basta que

$$\langle f_1, f_2 \rangle = g_{ij} \xi_1^i \xi_2^j = 0.$$

Multiplicando a primeira das equações de (6.13), com $i = 1$, por ξ_2^1 , e a segunda por ξ_2^2 , obtém-se

$$\left. \begin{aligned} (b_{11} - \lambda_1 g_{11}) \xi_1^1 \xi_2^1 + (b_{12} - \lambda_1 g_{12}) \xi_1^2 \xi_2^1 &= 0, \\ (b_{12} - \lambda_1 g_{12}) \xi_1^1 \xi_2^2 + (b_{22} - \lambda_1 g_{22}) \xi_1^2 \xi_2^2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Ao adicionar essas duas equações

$$\begin{aligned} 0 &= (b_{11} - \lambda_1 g_{11}) \xi_1^1 \xi_2^1 + (b_{12} - \lambda_1 g_{12}) \xi_1^2 \xi_2^1 + (b_{12} - \lambda_1 g_{12}) \xi_1^1 \xi_2^2 + (b_{22} - \lambda_1 g_{22}) \xi_1^2 \xi_2^2 \\ 0 &= b_{ij} \xi_1^i \xi_2^j - \lambda_1 g_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Analogamente tomando $i = 2$ e multiplicando na primeira equação ξ_1^1 e na segunda ξ_1^2 , obtém-se

$$0 = b_{ij} \xi_1^i \xi_2^j - \lambda_2 g_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \quad (6.15)$$

Finalmente, subtraindo a Eq.(6.14) de Eq.(6.15), e usando a hipótese que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ obter-se-á a conclusão desejada, isso é, que as direções principais são ortogonais.

Esse lema pode ser considerado como uma variante do teorema da algebra linear. O qual estabelece que uma forma quadrática real assume a relativa forma diagonal a uma base ortogonal adequada; conseqüentemente uma forma real quadrática pode ser trazia para a forma diagonal por uma rotação do dado sistema de coordenadas ortogonais.

7 AS MÉTRICAS: ESFÉRICA E PSEUDO-ESFÉRICA

7.1 Métrica na Esfera

A equação da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de raio R centrada na posição $C = (a, b, c)$ é:

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2 = R^2$$

Mas tomando $x_1 - a = x$, $x_2 - b = y$ e $x_3 - c = z$ obtém-se uma esfera centrada na origem, que é o que interessa para simplificar sem perda de generalidade:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (7.1)$$

A métrica em coordenadas Euclidianas:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.2)$$

mas:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Tomando a diferencial das equações de 7.3:

$$\begin{aligned} dx &= \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) dr + r \cos(\phi) d \operatorname{sen}(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) d \cos(\phi) \\ &= \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) dr + r \cos(\phi) \cos(\theta) d\theta - r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} dy &= \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) dr + r \operatorname{sen}(\phi) d \operatorname{sen}(\theta) + r \operatorname{sen}(\theta) d \operatorname{sen}(\phi) \\ &= \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) dr + r \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) d\theta + r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} dz &= \cos(\theta) dr + r d \cos(\theta) \\ &= \cos(\theta) dr - r \operatorname{sen}(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (7.6)$$

Tomando a soma dos quadrados de Eq. (7.4), Eq. (7.5) e Eq. (7.6), com isso serão obtidos termos com dr^2 , $d\theta^2$, $d\phi^2$ mas também os termos cruzados $drd\theta$, $drd\phi$, $d\theta d\phi$ e depois usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 \left(\operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) + \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) + \cos^2(\theta) \right) && + \\ &+ d\theta^2 \left(r^2 \cos^2(\theta) \cos^2(\phi) + r^2 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \right) && + \\ &+ d\phi^2 \left(r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\phi) \right) && + \\ &+ 2drd\theta \left(\operatorname{sen}(\theta)r \cos(\theta) \cos^2(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)r \cos(\theta) \operatorname{sen}^2(\phi) - r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) \right) && + \\ &+ 2drd\phi \left(\operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi)r \operatorname{sen}(\theta)(-\operatorname{sen}(\theta)) + \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \right) && + \\ &+ 2d\theta d\phi \left(r^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi)(-\operatorname{sen}(\phi)) + r^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \operatorname{sen}(\phi) \right) && + \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi^2 \end{aligned}$$

Comparando:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (7.7)$$

Na superfície da esfera há a condição de que $r = R$, que conseqüentemente leva a métrica para:

$$dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \quad (7.8)$$

Propondo as projeções estereográficas para colocar a métrica na forma conforme: com

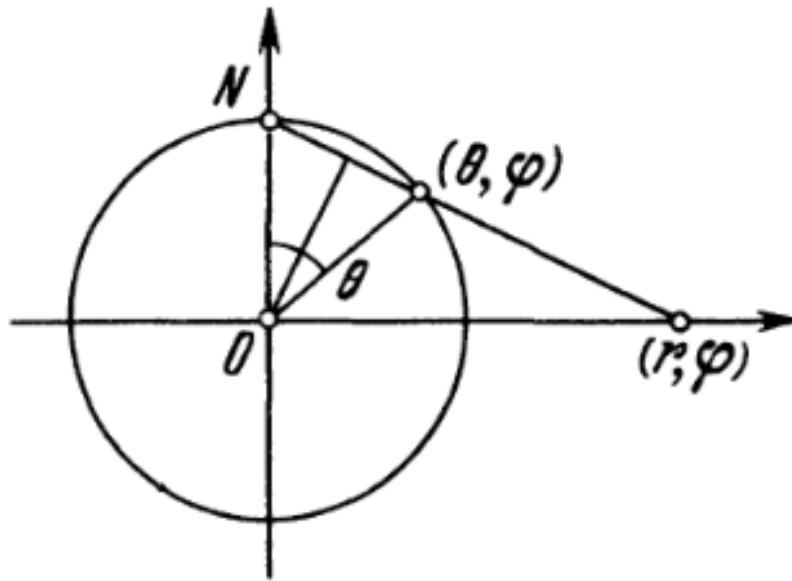


Figura 6 – Projeção Estereográfica: $(\theta, \varphi) \rightarrow (r, \varphi)$. [8]

a figura Fig. 6 identifica-se visualmente as mudanças de variáveis, por semelhança de triângulos

$$\sin(\theta/2) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \quad \cos(\theta/2) = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}. \quad (7.9)$$

Tomando a razão entre o $\cos(\theta/2)$ e o $\sin(\theta/2)$ encontra-se $\cotg(\theta/2) = r/R$ diferenciando então

$$dr = -\frac{R}{2} \operatorname{cosec}^2(\theta/2) d\theta,$$

isolando $d\theta$, tomando o quadrado e substituir lembrando que

$$\operatorname{cosec}^2(\) \equiv \sin^{-2}(\);$$

será obtido

$$R^2 d\theta^2 = \frac{4R^4 dr^2}{R^2 + r^2} \quad (7.10)$$

Voltando assim na (7.8) e fazendo as substituições adequadas:

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2) \quad (7.11)$$

Agora tomando a mudança de variáveis

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi),$$

a parte da métrica

$$(dr^2 + r^2 d\phi^2),$$

fica

$$(dx^2 + dy^2).$$

Então reescrevendo (7.11):

$$dl^2_{esfera} = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} dl^2_{plano}. \quad (7.12)$$

7.2 Métrica na Pseudo-Esfera

Uma métrica pseudo-euclidiana tem a forma:

$$dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 \quad (7.13)$$

A equação do que chamamos de pseudo-esfera, que tenha raio R é:

$$R^2 = t^2 - x^2 - y^2 \quad (7.14)$$

A pseudo esfera está do lado interno do cone de luz (isso é: $t^2 - x^2 - y^2 = 0$). As coordenadas da pseudo-esfera são:

$$\begin{aligned} -\infty < \rho < +\infty \\ 0 \leq \chi < +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned} \quad (7.15)$$

Onde:

$$\begin{aligned} t &= \rho \cosh(\chi) \\ x &= \rho \sinh(\chi) \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sinh(\chi) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Tomando os diferenciais:

$$\begin{aligned} dt &= \cosh(\chi) d\rho + \rho \sinh(\chi) d\chi \\ dx &= \sinh(\chi) \cos(\varphi) d\rho + \rho \cosh(\chi) \cos(\varphi) d\chi - \rho \sinh(\chi) \sin(\varphi) d\varphi \\ dy &= \sinh(\chi) \sin(\varphi) d\rho + \rho \cosh(\chi) \sin(\varphi) d\chi + \rho \sinh(\chi) \cos(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Tomando os quadrados e já substituindo no lado direito de (7.13) com os termos $d\rho^2$, $d\chi^2$, $d\varphi^2$, $d\rho d\chi$, $d\rho d\varphi$, $d\chi d\varphi$ evidenciados:

$$\begin{aligned}
dl^2 &= d\rho^2 \left(\cosh^2(\chi) - \sinh^2(\chi) \cos^2(\varphi) - \sinh^2(\chi) \sin^2(\varphi) \right) & + \\
&+ d\chi^2 \left(\rho^2 \sinh^2(\chi) - \rho^2 \cosh^2(\chi) \cos^2(\varphi) - \rho^2 \cosh^2(\chi) \sin^2(\varphi) \right) & + \\
&+ d\varphi^2 \left(-\rho^2 \sinh^2(\chi) \sin^2(\varphi) - \rho^2 \sinh^2(\chi) \cos^2(\varphi) \right) & + \\
&+ 2d\rho d\chi \left(\cosh(\chi) \cos(\chi) \rho - \rho \sinh(\chi) \cosh(\chi) \cos^2(\varphi) - \rho \sinh(\chi) \cosh(\chi) \sin^2(\varphi) \right) & + \\
&+ 2d\rho d\varphi \left(\rho \sinh^2(\chi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \rho \sinh^2(\chi) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right) & + \\
&+ 2d\varphi d\chi \left(\rho^2 \cosh(\chi) \sinh(\chi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \rho^2 \cosh(\chi) \sinh(\chi) \sin(\varphi) \cos(\varphi) \right) & + \\
&= d\rho^2 - \rho^2 d\chi^2 - \rho^2 \sinh^2(\chi) d\varphi^2
\end{aligned}$$

Ora, de tal forma:

$$dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 = d\rho^2 - \rho^2 \left(d\chi^2 + \sinh^2(\chi) d\varphi^2 \right) \quad (7.16)$$

Tomando $\rho = R$, onde R é um valor fixo de raio para a pseudo-esfera teremos daí:

$$-dl^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2(\chi) d\varphi^2) \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{u} &= \frac{t + R}{R} \\
x &= u \left(1 + \frac{t}{R} \right) \quad (7.18)
\end{aligned}$$

$$y = v \left(1 + \frac{t}{R} \right) \quad (7.19)$$

$$R^2 = t^2 - x^2 - y^2$$

$$R^2 = t^2 - u^2 \left(1 + \frac{t}{R} \right)^2 - v^2 \left(1 + \frac{t}{R} \right)^2$$

$$R^2 = t^2 - (u^2 + v^2) \left(\frac{(R+t)^2}{R^2} \right)$$

$$R^4 = R^2 t^2 - (u^2 + v^2)(R^2 + 2tR + t^2)$$

$$R^4 = (R^2 - u^2 - v^2)t^2 - R^2(u^2 + v^2) - 2Rt(u^2 + v^2 + R^2)$$

$$0 = (R^2 - u^2 - v^2)t^2 - 2R(u^2 + v^2)t - R^2(u^2 + v^2 + R^2)$$

Essa equação está na forma $at^2 + bt + c = 0$, equação de segundo grau usual, podemos assim calcular pela relação de Baskara:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{2R(u^2 + v^2) \pm \sqrt{4R^2(u^2 + v^2)^2 + 4R^2(R^2 - u^2 - v^2)(u^2 + v^2 + R^2)}}{2(R^2 - u^2 - v^2)} \\
&= \frac{2R(u^2 + v^2) \pm \sqrt{4R^2(u^2 + v^2)^2 + 4R^2(R^4 - (u^2 + v^2)^2)}}{2(R^2 - u^2 - v^2)} \\
&= \frac{2R(u^2 + v^2) \pm \sqrt{4R^6}}{2(R^2 - u^2 - v^2)} = \frac{R(u^2 + v^2) \pm R^3}{(R^2 - u^2 - v^2)} = R \left(\frac{(u^2 + v^2) \pm R^2}{-(u^2 + v^2) - R^2} \right)
\end{aligned}$$

Se tomamos o $-$ obteremos:

$$t = -R$$

Se tomamos o $+$ obtemos, mais interessadamente:

$$t = -R \left(1 + \frac{2R^2}{(u^2 + v^2) - R^2} \right) \quad (7.20)$$

Agora usamos Eq. (7.18) para reescrever x e y , obtendo diretamente:

$$x = \left(\frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \quad (7.21)$$

$$y = \left(\frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} \right) \quad (7.22)$$

Lembrando que temos com $\rho = R$ e utilizando a relação entre as coordenadas que

$$\begin{aligned} t &= R \cos(\chi) \\ x &= R \sinh(\chi) \cos(\varphi) \\ y &= R \sinh(\chi) \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Igualando a primeira equação de Eq. (7.23) com Eq. (7.20) e adotando $u^2 + v^2 = r^2$ temos:

$$\begin{aligned} R \cosh(\chi) &= -R \left(1 + \frac{2R^2}{(u^2 + v^2) - R^2} \right) \\ \cosh(\chi) &= \left(-1 + \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \right) \end{aligned}$$

Tomando a diferencial da equação:

$$\begin{aligned} \sinh(\chi) d\chi &= d \left(\frac{2R^2}{R^2 - r^2} \right) \\ &= 2R^2 (-1) (-2r) \left(\frac{1}{(R^2 - r^2)^2} \right) dr \\ \sinh(\chi) d\chi &= \frac{4R^2}{(R^2 - r^2)^2} dr \end{aligned} \quad (7.24)$$

Vamos calcular o valor de $\frac{x^2 + y^2}{R^2}$, utilizando as expressões para x de Eq. (7.23) e também Eq. (7.21) e Eq. (7.22) obteremos resultados que ao igualar vai nos fornecer $\sinh(\chi)^2$

dependendo apenas da variável r e do raio que fixamos R :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + y^2}{R^2} &= \frac{\left((R \operatorname{senh}(\chi) \cos(\varphi))^2 + (R \operatorname{senh}(\chi) \operatorname{sen}(\varphi))^2 \right)}{R^2} \\
&= \operatorname{senh}(\chi)^2 \\
\frac{x^2 + y^2}{R^2} &= \left[\left(\frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^2 + \left(\frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^2 \right] / R^2 \\
&= \left(\frac{4R^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \right) (u^2 + v^2) \\
&= \left(\frac{4R^2 r^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \right) \\
\operatorname{senh}(\chi)^2 &= \left(\frac{4R^2 r^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} \right) \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Como tínhamos em Eq. (7.16):

$$-dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{senh}^2(\chi) d\varphi^2)$$

Para obter $d\chi^2$ basta tomar (7.24)² e isolar, substituindo também com a equação Eq. (7.25) :

$$\begin{aligned}
d\chi^2 &= \left(\frac{4R^2}{(R^2 - r^2)^2} \right)^2 \left(\frac{(R^2 - r^2)^2}{4R^2 r^2} \right) dr^2 \\
&= \frac{4R^2 dr^2}{(R^2 - r^2)^2} \tag{7.26}
\end{aligned}$$

Enfim agora basta calcular $d\varphi^2$ e para isso é preciso retomar, por isso lembrando que:

$$u = r \cos(\varphi)$$

$$v = r \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$r^2 = u^2 + v^2$$

De forma que as diferenciais ficam:

$$\begin{aligned}
du &= dr \cos(\varphi) - d\varphi \operatorname{sen}(\varphi)r \\
dv &= dr \operatorname{sen}(\varphi) + d\varphi \cos(\varphi)r \\
dl_{plano}^2 &= du^2 + v^2 \\
du^2 + dv^2 &= dr^2 (\cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi)) + \\
&\quad + d\varphi^2 (\operatorname{sen}^2(\varphi)r^2 + \cos^2(\varphi)r^2) + \\
&\quad + drd\varphi (-r \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) + r \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)) \\
&= dr^2 + r^2 d\varphi^2
\end{aligned}$$

Levando a

$$dl_{plano}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (7.27)$$

Substituindo Eq. (7.26) em Eq. (7.16) resulta:

$$-dl^2 = R^2 \left(\frac{4R^2 dr^2}{(R^2 - r^2)^2} + \frac{4R^2 r^2 d\varphi^2}{(R^2 - r^2)^2} \right) = \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2) \quad (7.28)$$

Agora usando Eq. (7.27) e Eq. (7.28) obtém-se

$$-dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} dl_{plano}^2$$

Por questão de clareza nota-se que

$$dl^2 = dl_{\substack{pseudo \\ esfera}}^2$$

De fato é possível então escrever a métrica da pseudo-esfera na forma:

$$\boxed{-dl_{\substack{pseudo \\ esfera}}^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} dl_{plano}^2} \quad (7.29)$$

8 A FORMA CONFORME DA MÉTRICA NA SUPERFÍCIE

No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , temos uma superfície que é um objeto em $2 - d$ com as seguintes equações paramétricas:

$$x = x(p, q) \quad y = y(p, q) \quad z = z(p, q) \quad (8.1)$$

Com p e $q \in \mathbb{R}$, os quais para nossa análise serão considerados aos pares assumindo valores do tipo (p, q) , esses fazem parte do conjunto \mathbb{R}^2 . A métrica induzida nessa superfície é Riemanniana:

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2 \quad (8.2)$$

Sabendo que a métrica é positivo definida, $ds^2 > 0$ e sabendo que a métrica é simétrica $g_{ij} = g_{ji}$, então conseguimos encontrar uma métrica \tilde{g}_{ij} tal que:

$$ds^2 = \tilde{g}_{11} dx^2 + \tilde{g}_{22} dy^2 \Rightarrow \tilde{g}_{11} > 0, \quad \tilde{g}_{22} > 0 \quad \forall (p, q) \neq (0, 0) \quad (8.3)$$

ref Esta condição nos leva a:

$$0 < \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} \equiv \tilde{g} \Rightarrow g \equiv \det(g_{ij}) > 0$$

Como o determinante é invariante para transformações ortogonais, como a que fizemos para levar de g_{ij} para $\tilde{g}_{\alpha\beta}$:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \rightarrow g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0 \quad (8.4)$$

Ainda na forma da equação Eq. (8.2) temos de modo geral o seguinte:

$$\begin{aligned} g_{11} &= E = x_p x_p + y_p y_p + z_p z_p \\ g_{12} &= F = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q \\ g_{22} &= G = x_q x_q + y_q y_q + z_q z_q \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a relação com o determinante relacionado diretamente com E, F e G :

$$g = EG - F^2 > 0 \quad (8.5)$$

8.1 Coordenadas Isotermas. Curvatura Gaussiana em termos das coordenadas conforme

Teorema 6 (Curvatura Gaussiana(dada pela métrica conforme)). *Se u, v são coordenadas conforme em uma superfície do 3-espaço Euclidiano, em termos da métrica induzida que*

tem a forma:

$$dl^2 = g(u, v) (du^2 + dv^2),$$

então a curvatura Gaussiana da superfície é dada por:

$$K \equiv -\frac{1}{2g(u, v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \ln(g(u, v)) \quad (8.6)$$

Supondo que em termos de coordenadas conformes u, v a superfície é dada localmente por $r = r(u, v)$; $r = (x, y, z)$, onde x, y, z são coordenadas Euclidianas em \mathbb{R}^3 . Desde que a métrica na superfície em termos dessas coordenadas seja dado por $dl^2 = g(u, v) (du^2 + dv^2)$, pela definição de Eq. (5.20) escreve-se:

$$\langle r_u, r_u \rangle = \langle r_v, r_v \rangle = g(u, v), \quad \langle r_u, r_v \rangle = 0 \quad (8.7)$$

Derivando Eq. (8.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \langle r_u, r_u \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial u} r_u r_u \\ &= \left(\frac{\partial r_u}{\partial u} r_u + r_u \frac{\partial r_u}{\partial u} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial r_u}{\partial u} r_u \right) \\ &= 2 r_{uv} r_u \stackrel{\text{Eq. (5.20)}}{=} 2 \langle r_{uv}, r_v \rangle \end{aligned} \quad (8.8)$$

Analogamente como em Eq. (8.8), escreve-se todas igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} &= \langle r_{uu}, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} &= \langle r_{vv}, r_v \rangle = \langle r_{uv}, r_u \rangle \end{aligned} \quad (8.9)$$

Além dessas, também ao derivar $\langle r_u, r_v \rangle = 0$ é encontrado:

$$\langle r_{uu}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{uv} \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle + \langle r_u, r_{vv} \rangle = 0 \quad (8.10)$$

Ao tomar $r = r(u(t), v(t))$ como a curva sob a superfície, então $\dot{r} = r_u \dot{u} + r_v \dot{v}$, e a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \overbrace{r_u \dot{u} + r_v \dot{v}}^{\frac{d}{dt}} \\ &= \overbrace{r_{uu} \dot{u} + r_{vu} \dot{v}}^{\dot{r}_u} \dot{u} + \overbrace{r_{uv} \dot{u} + r_{vv} \dot{v}}^{\dot{r}_v} \dot{v} + r_u \ddot{u} + r_v \ddot{v} \\ &= r_{uu} \dot{u}^2 + 2r_{uv} \dot{u} \dot{v} + r_{vv} \dot{v}^2 + r_u \ddot{u} + r_v \ddot{v} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Tomando um vetor normal à superfície $n = \frac{[r_u, r_v]}{|r_u||r_v|}$ (onde $[a, b]$ é o produto vetorial entre os vetores a e b) tal que $\langle r_u, n \rangle = \langle r_v, n \rangle = 0$ deduz-se

$$\begin{aligned} \langle \ddot{r}, n \rangle &= \langle r_{uu}, n \rangle \dot{u}^2 + 2\langle r_{uv}, n \rangle \dot{u}\dot{v} + \langle r_{vv}, n \rangle \dot{v}^2 \\ &= b_{11}\dot{u}^2 + 2b_{12}\dot{u}\dot{v} + b_{22}\dot{v}^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$b_{11} \equiv \langle r_{uu}, n \rangle \quad b_{12} \equiv \langle r_{uv}, n \rangle \quad b_{22} \equiv \langle r_{vv}, n \rangle$$

De Eq. (8.12) conclui-se que em termos de coordenadas locais, como em exemplo $u = x^1$, $v = x^2$ a projeção $\langle \ddot{r}, n \rangle$, é a forma quadrática em termos das componentes \dot{u}, \dot{v} do vetor tangente.

Ao definir $b_{11} = L$, $b_{12} = M$, $b_{22} = N$, então escrevendo com as diferenciais a equação Eq. (8.12):

$$\langle \ddot{r}, n \rangle dt^2 = b_{ij} dx^i dx^j = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 \quad (8.13)$$

A expressão Eq. (8.13), é nomeada como segunda forma fundamental da superfície. Identifica-se então:

$$b_{11} = L = \langle r_{uu}, n \rangle \quad b_{12} = M = \langle r_{uv}, n \rangle \quad b_{22} = N = \langle r_{vv}, n \rangle \quad (8.14)$$

De Eq. (8.9) e Eq. (8.10) com Eq. (8.14), $n = [e_1, e_2]$ e ainda as definições dos vetores unitários $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{g(u, v)}}$, $e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{g(u, v)}}$ já é possível escrever os vetores em termos das direções, no formato

$$(\quad) = (\langle \quad, e_1 \rangle, \langle \quad, e_2 \rangle, \langle \quad, n \rangle)$$

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (\langle r_{uu}, e_1 \rangle, \langle r_{uu}, e_2 \rangle, \langle r_{uu}, n \rangle) \\ &= (\langle r_{uu}, e_1 \rangle, -\langle r_{uv}, e_1 \rangle, \langle r_{uu}, n \rangle) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial v}, L \right) \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} r_{uv} &= (\langle r_{uv}, e_1 \rangle, \langle r_{uv}, e_2 \rangle, \langle r_{uv}, n \rangle) \\ &= (\langle r_{uv}, e_1 \rangle, \langle r_{uv}, e_2 \rangle, \langle r_{uv}, n \rangle) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u}, M \right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} r_{vv} &= (\langle r_{vv}, e_1 \rangle, \langle r_{vv}, e_2 \rangle, \langle r_{vv}, n \rangle) \\ &= (\langle -r_{uv}, e_2 \rangle, \langle r_{vv}, e_2 \rangle, \langle r_{vv}, n \rangle) \\ &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{g(u, v)}} \frac{\partial g(u, v)}{\partial v}, N \right) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Então a diferença entre os produtos escalares $\langle r_{uu}, r_{vv} \rangle$ e $\langle r_{uv}, r_{vu} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle r_{uu}, r_{vv} \rangle - \langle r_{uv}, r_{vu} \rangle &= -\frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} + \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + \\
&\quad + LN - \frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + \\
&\quad -\frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \frac{1}{2\sqrt{g(u,v)}} \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} - M^2 \\
\langle r_{uu}, r_{vv} \rangle - \langle r_{uv}, r_{vu} \rangle &= -\frac{2}{4g(u,v)} \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \right)^2 - \frac{2}{4g(u,v)} \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \right)^2 + \\
&\quad + LN - M^2 \\
\langle r_{uu}, r_{vv} \rangle - \langle r_{uv}, r_{vu} \rangle &= LN - M^2 + \frac{-1}{2g(u,v)} \left(\left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \right)^2 \right) \quad (8.18)
\end{aligned}$$

Derivando Eq. (8.9) em relação a u

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \langle r_{uv}, r_v \rangle \\
&= \langle r_{uuv}, r_v \rangle + \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial v} \langle r_{uu}, r_v \rangle - \langle r_{uu}, r_{vv} \rangle \right) + \langle r_{uv}, r_{uv} \rangle \\
&= -\frac{\partial}{\partial v} \langle r_u, r_{uv} \rangle - \left[LN - M^2 + \frac{-1}{2g(u,v)} \left(\left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \right)^2 \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(u,v)}{\partial v^2} - LN + M^2 + \frac{1}{2g(u,v)} \left(\left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} \right)^2 \right) \quad (8.19)
\end{aligned}$$

quando isso procede (usando a Eq.(6.6)) se tem a curvatura Gaussiana dada por

$$K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{LN - M^2}{(g(u,v))^2} = -\frac{1}{2g(u,v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \ln(g(u,v)),$$

concluindo a prova do teorema.

Notando finalmente que em notação complexa a métrica $dl^2 = g(u,v)(du^2 + dv^2)$ se torna (tomando $z = u + iv$)

$$dl^2 = g(z, \bar{z}) dz d\bar{z},$$

e a formula Eq.(8.6) para a curvatura Gaussiana da superfície com essa métrica se torna (em alguns passo):

$$K = -\frac{2}{g(z, \bar{z})} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln(g(z, \bar{z}))). \quad (8.20)$$

9 OPERADOR DE BELTRAMI

9.1 A construção do Operador de Beltrami

Supondo E , F e G sendo funções analíticas reais das variáveis p e $q \in \mathbb{R}$. Então existem novas coordenadas u e $v \in \mathbb{R}$ e locais para a superfície em termos da métrica induzida, que tomará a forma:

$$dl^2 = f(u, v)(du^2 + dv^2) \quad (9.1)$$

Coordenadas com essa propriedade são chamadas conforme, ou também, isotermas. Desta forma, coordenadas isotérmicas sobre uma superfície são aquelas para as quais a métrica assume a forma conforme. Antes de prosseguir vamos provar esse teorema. Tomemos a equação Eq. (8.2)

$$dl^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

Igualando a uma forma fatorada geral para duas variáveis, assim será possível fatorar o lado direito, $(\alpha dp + \beta dq)^2$:

$$\begin{aligned} dl^2 &= (\alpha dp + \beta dq)^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2 \\ &= \alpha^2 dp^2 + 2\alpha\beta dpdq + \beta^2 dq^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Pela comparação em Eq. (9.2) tiramos:

$$E = \alpha^2 \quad F = \alpha\beta \quad G = \beta^2 \quad (9.3)$$

E temos também de Eq. (8.5) $g = EG - F^2 \rightarrow G = \frac{g + F^2}{E}$ que pode ser escrito:

$$G = \sqrt{\frac{F + \iota\sqrt{g}}{\sqrt{E}}} \cdot \sqrt{\frac{F - \iota\sqrt{g}}{\sqrt{E}}} \quad (9.4)$$

Agora portanto vamos olhar para α e β descritos como:

$$\begin{aligned} \alpha^2 = \alpha_1\alpha_2 &\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{E} \\ \beta^2 = \beta_1\beta_2 &\Rightarrow \quad \beta_1 = \beta_2^\dagger = \sqrt{\frac{F + \iota\sqrt{g}}{\sqrt{E}}} \end{aligned}$$

Com α e β nessa nova forma voltaremos para Eq. (9.2) à fim de reescrever o lado direito que dependiam de α e β :

$$dl^2 = (\alpha dp + \beta dq)^2 = (\alpha_1 dp + \beta_1 dq)(\alpha_2 dp + \beta_2 dq)$$

Nesse momento será suposta uma função $\lambda = \lambda(p, q)$ que obedeça:

$$\lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} dq \right) = du + i dv \quad (9.5)$$

$$\bar{\lambda} \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} dq \right) = du - i dv \quad (9.6)$$

Multiplicando Eq. (9.5) por Eq. (9.6):

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} dq \right) \bar{\lambda} \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} dq \right) &= du^2 + dv^2 \\ du^2 + dv^2 &= |\lambda|^2 \left(E dp^2 + 2F dp dq + \left[\frac{F^2 - EG - F^2}{E} \right] dq^2 \right) \\ du^2 + dv^2 &= |\lambda|^2 (E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Obtemos assim:

$$du^2 + dv^2 = |\lambda|^2 dl^2 \quad (9.8)$$

Assumindo $|\lambda|^2 \neq 0$ temos:

$$dl^2 = |\lambda|^{-2} (du^2 + dv^2) \quad (9.9)$$

Então comparando Eq. (9.9) com Eq. (9.1) podemos designar $f(u, v) = |\lambda|^{-2}$. Ora, como Eq. (9.5) e Eq. (9.6) são equações diferenciais complexas de variáveis reais, onde uma é o complexo conjugado da outra, basta resolver uma dessas equações. A escolha feita será a Eq. (9.5), primeiro utilizando:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial p} dp + \frac{\partial u}{\partial q} dq \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial q} dq \end{aligned}$$

Então:

$$du + i dv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq \quad (9.10)$$

A comparação de Eq. (9.5) com Eq. (9.10) gera:

$$\lambda \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} dq \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq$$

Que podemos separar em duas equações, uma na qual são os termos multiplicativos de dp e a outra os de dq :

$$\lambda \sqrt{E} = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) \quad (9.11)$$

$$\lambda \left(\frac{F + i\sqrt{g}}{\sqrt{E}} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) \quad (9.12)$$

Tomando a razão entre Eq. (9.12) e Eq. (9.11):

$$\frac{F + \iota\sqrt{g}}{E} = \left(\frac{\partial u}{\partial q} + \iota \frac{\partial v}{\partial q} \right) / \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \iota \frac{\partial v}{\partial p} \right)$$

Multiplicando os dois lados pela multiplicação dos denominadores:

$$(F + \iota\sqrt{g}) \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \iota \frac{\partial v}{\partial p} \right) = E \left(\frac{\partial u}{\partial q} + \iota \frac{\partial v}{\partial q} \right)$$

Abrindo os dois lados:

$$F \frac{\partial u}{\partial p} + F\iota \frac{\partial v}{\partial p} + \iota\sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} + \iota^2 \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial p} = E \frac{\partial u}{\partial q} + E\iota \frac{\partial v}{\partial q}$$

Separando do forma comparativa, isso é, o que acompanha ι e o que sobrar também, fazendo isso obteremos:

$$F \frac{\partial u}{\partial p} - \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial p} = E \frac{\partial u}{\partial q} \quad (9.13)$$

$$F \frac{\partial v}{\partial p} + \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} = E \frac{\partial v}{\partial q} \quad (9.14)$$

O próximo passo é obter algo no formato $v_p = v_p(E, F, G, g, u_p, u_q)$, $v_q = v_q(E, F, G, g, u_p, u_q)$, $u_p = u_p(E, F, G, g, v_p, v_q)$ e $u_q = u_q(E, F, G, g, v_p, v_q)$, no caso de v_p e u_q é trivial, bastando colocar de um lado e dividir a equação pelo termo multiplicativo que o acompanhar, assim temos:

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \left(F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q} \right) \div \sqrt{g} \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \left(E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p} \right) \div \sqrt{g} \quad (9.16)$$

Para obter v_q e u_q podemos substituir Eq. (9.15) em Eq. (9.14) em seguida isolar no mesmo procedimento para o primeiro, e o segundo substituindo Eq. (9.16) em Eq. (9.13) em seguida isolar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial q} &= \left(\sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} + F \frac{\partial v}{\partial p} \right) / E \\ &= \left(\sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{F}{\sqrt{g}} \left(F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q} \right) \right) / E \\ &= \left(\frac{\sqrt{g}}{E} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{F^2}{\sqrt{g}} \right) - \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial q} \\ &= - \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial q} + \left(\frac{g + F^2}{E\sqrt{g}} \right) \frac{\partial u}{\partial p} \end{aligned}$$

Mas:

$$\left(\frac{g + F^2}{E} \right) = G$$

Então:

$$\frac{\partial v}{\partial q} = \left(G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q} \right) / \sqrt{g} \quad (9.17)$$

De forma semelhante agora obteremos u_q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial q} &= \frac{F}{E} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\sqrt{g}}{E} \frac{\partial v}{\partial p} \\ &= \frac{F}{E\sqrt{g}} \left(E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p} \right) - \frac{\sqrt{g}}{E} \frac{\partial v}{\partial p} \\ &= \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial q} - \left(\frac{F^2}{E\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{g}}{E} \right) \frac{\partial v}{\partial p} \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p} \quad (9.18)$$

Finalmente, os resultados que obtivemos para as derivadas parciais de u e v em relação a p e q onde:

$$\begin{aligned} dl^2 &= E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2 \\ dl^2 &= f(u, v)(du^2 + dv^2) \\ |\lambda|^{-2} &\equiv f(u, v) \\ |\lambda|^{-2}(du^2 + dv^2) &= E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_p = \frac{\partial v}{\partial p} = \left(F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q} \right) / \sqrt{g} \quad u_p = \frac{\partial u}{\partial p} = \left(E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p} \right) / \sqrt{g}} \quad (9.19)$$

$$\boxed{v_q = \frac{\partial v}{\partial q} = \left(G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q} \right) / \sqrt{g} \quad u_q = \frac{\partial u}{\partial q} = \left(F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p} \right) / \sqrt{g}} \quad (9.20)$$

Agora construindo o Operador de Beltrami em si.

Então exigindo que $u = u(p, q)$ e $v = v(p, q)$ tenham segundas derivadas parciais contínuas, $\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 u}{\partial q \partial p}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 v}{\partial q \partial p}$, definimos o operador \mathbb{L} :

$$\mathbb{L} \equiv \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \quad (9.21)$$

Aplicando \mathbb{L} em u , lembrando que $g = EG - F^2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}u &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{g}} \right] u + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{g}} \right] u \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{g}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial u}{\partial q} - G \frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{g}} \right]\end{aligned}$$

Utilizando as equações Eq. (9.15) e Eq. (9.17) é conclusivo que:

$$\mathbb{L}u = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial v}{\partial q} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{L}u = 0} \quad (9.22)$$

Agora fazendo a aplicação de \mathbb{L} em v :

$$\begin{aligned}\mathbb{L}v &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] v + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] v \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial v}{\partial p} - E \frac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{g}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{g}} \right]\end{aligned}$$

Substituindo Eq. (9.16) e Eq. (9.18), semelhantemente para v :

$$\mathbb{L}v = \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial u}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{L}v = 0} \quad (9.23)$$

A esse operador \mathbb{L} é dado o nome de Operador de Beltrami, à equação $\mathbb{L}f = 0$ é nomeado por Equação de Beltrami.

9.2 Aplicação Operador de Beltrami: Forma Conforme Esfera

$$\mathbb{L}u = 0$$

$$u(\theta, \varphi) = T(\theta)P(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 T(\theta)P(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)P(\varphi)}{\partial \theta} \right) = 0$$

Dividindo por $T(\theta)P(\varphi)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(\varphi)} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{T(\theta)} \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) &= 0 \\ -\frac{1}{P(\varphi)} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} &= \frac{1}{T(\theta)} \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

Mas equações diferenciais parciais iguais de diferentes variáveis só podem ser iguais a constante, portanto:

$$-\frac{1}{P(\varphi)} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{T(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) = \alpha$$

Mas por comodidade, conhecendo esse tipo de equação tomamos: $\alpha = m^2$, e basta resolvermos a equação para $T(\theta)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{P(\varphi)} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} &= m^2 \\ \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} &= -P(\varphi)m^2 \\ \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} + P(\varphi)m^2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.24}$$

E também para $P(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) &= m^2 \\ \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) &= T(\theta)m^2 \\ \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} \right) - T(\theta)m^2 &= 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} + \cos(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} - \frac{m^2 T(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} &= 0 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Antes de sair resolvendo as duas equações diferenciais é interessante olhar primeiro [9.25](#), que será feitas as substituições:

$$\begin{aligned} x = \cos(\theta) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d}{dx} = -\operatorname{sen}(\theta) \frac{d}{dx} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\operatorname{sen}(\theta) \frac{d}{dx} \right) \\ &= -\cos(\theta) \frac{d}{dx} - \operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d}{dx} \\ &= -\cos(\theta) \frac{d}{dx} - \operatorname{sen}(\theta) \left(-\operatorname{sen}(\theta) \frac{d}{dx} \right) \frac{d}{dx} \\ &= -x \frac{d}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned}$$

A partir da troca de parâmetros foi obtido:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen}(\theta) \frac{d}{dx} \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= -x \frac{d}{dx} + (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned} \tag{9.26}$$

Utilizando Eq. (9.26) em Eq. (9.25) depois de dividir toda a equação por $\text{sen}(\theta)$ temos:

$$\frac{\text{sen}(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} T(\theta) + \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} T(\theta) - \frac{m^2 T(\theta)}{\text{sen}(\theta)}}{\text{sen}(\theta)} = 0$$

Tal que

$$\left(-x \frac{d}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \right) T(x) - x \frac{d}{dx} T(x) - \frac{m^2 T(x)}{1-x^2} = 0$$

Enfim:

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} T(x) - 2x \frac{d}{dx} T(x) - \frac{m^2}{1-x^2} T(x) &= 0 \\ \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} \right] T(x) &= 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

O resultado Eq. (9.27) podemos comparar com a Equação de Legendre Associada

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad (9.28)$$

Para a convergência de Eq. (9.28) sabe-se:

$$l \geq 0 \quad ; \quad |m| \leq l \quad (9.29)$$

Pela comparação de Eq. (9.28) com Eq. (9.27) e usando as relações para convergência Eq. (9.29):

$$l = 0 \Rightarrow m = 0 \quad (9.30)$$

Usando Eq. (9.30) em Eq. (9.24) torna possível solucionar diretamente:

$$\frac{1}{P(\varphi)} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \rightarrow \quad P(\varphi) = a\varphi + b \quad (9.31)$$

Onde, a e b serão mais tarde determinados. E usando Eq. (9.30) em Eq. (9.27) tem-se

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right] T(x) = 0 \quad (9.32)$$

Para solução de Eq. (9.32) supõe-se:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+s} \quad (9.33)$$

A partir disso toma-se as derivadas primeira e segunda:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (n+s) x^{n+s-1} \quad (9.34)$$

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2} \quad (9.35)$$

Substituindo Eq. (9.34) e Eq. (9.35) em Eq. (9.32), e reajustando os índices dos somatórios:

$$\begin{aligned}
& (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)x^{n+s-1} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} + \\
& \quad - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)x^{n+s-1} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + \\
& \quad - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)x^{n+s} = 0 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(n+s)(n+s-1) + 2\alpha_n(n+s))x^{n+s} = 0 \\
& \alpha_0 s(s-1)x^{s-2} + \alpha_1(s+1)s + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} + \\
& \quad - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(n+s)(n+s+1))x^{n+s} = 0 \\
& \alpha_0 s(s-1)x^{s-2} + \alpha_1(s+1)s + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+2}(n+2)(n+s+2)(n+s+1)x^{n+s} + \\
& \quad - \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(n+s)(n+s+1))x^{n+s} = 0
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
& \alpha_0 s(s-1)x^{s-2} + \alpha_1(s+1)s + \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{n+2}(n+2)(n+s+2)(n+s+1) + \\
& \quad - \alpha_n(n+s)(n+s+1)]x^{n+s} = 0
\end{aligned}$$

Tomando $s = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{n+2}(n+2)(n+1) - \alpha_n(n)(n+1)]x^n = 0 \quad (9.36)$$

Tomando $s = 1$

$$2\alpha_1 + \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_{n+2}(n+3)(n+2) - \alpha_n(n+1)(n+2)]x^{n+1} = 0 \quad (9.37)$$

No caso de $s=0$, de Eq. (9.36) tira-se que:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{n+2}(n+2)(n+1) - \alpha_n n(n+1) = 0 \\
& \alpha_{n+2}(n+2) - \alpha_n n = 0 \\
& \alpha_{n+2}(n+2) = \alpha_n n \\
& \alpha_{n+2} = \frac{n}{n+2} \alpha_n
\end{aligned}$$

Tomando $n=0$

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow \alpha_2 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_{2n+2} = 0 \quad \forall \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned} n = 1 &\rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{3}\alpha_1 \\ n = 3 &\rightarrow \alpha_5 = \frac{3}{5}\alpha_3 = \frac{3}{5}\frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{1}{5}\alpha_1 \\ n = 5 &\rightarrow \alpha_7 = \frac{5}{7}\alpha_5 = \frac{5}{7}\frac{3}{5}\alpha_3 = \frac{5}{7}\frac{3}{5}\frac{1}{3}\alpha_1 = \frac{1}{7}\alpha_1 \\ &\Rightarrow \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{\alpha_1}{2n+1} \quad \forall \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (9.39)$$

Já no caso de $s=1$, usando Eq. (9.37) obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_{n+2}(n+3)(n+2) - \alpha_n(n+1)(n+2) &= 0 \\ \alpha_{n+2}(n+3) - \alpha_n(n+1) &= 0 \\ \alpha_{n+2}(n+3) &= \alpha_n(n+1) \\ \alpha_{n+2} &= \frac{n+1}{n+3}\alpha_n \end{aligned}$$

Se sabe que $\alpha_1 = 0$ de forma que todos os de índice ímpar serão zero, pois depende do seu antecessor de modo que é identificado $\alpha_{2n+1} = 0$ enquanto os coeficientes de índice ímpar para $s = 1$:

$$\begin{aligned} n = 0 &\rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3}\alpha_0 \\ n = 2 &\rightarrow \alpha_4 = \frac{3}{5}\alpha_2 = \frac{3}{5}\frac{1}{3}\alpha_0 = \frac{1}{5}\alpha_0 \\ n = 4 &\rightarrow \alpha_6 = \frac{5}{7}\alpha_4 = \frac{5}{7}\frac{3}{5}\alpha_2 = \frac{5}{7}\frac{3}{5}\frac{1}{3}\alpha_0 = \frac{1}{7}\alpha_0 \\ &\Rightarrow \alpha_0 \neq 0, \quad \alpha_{2n} = \frac{\alpha_0}{2n+1} \quad \forall \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (9.40)$$

De modo que unindo Eq. (9.33) com Eq. (9.38) e Eq. (9.39) para $s = 0$ mas para $s = 1$ usa-se Eq. (9.40):

$$s = 0 \Rightarrow T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9.41)$$

$$s = 1 \Rightarrow T(x) = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9.42)$$

Segundo [5] tem-se:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9.43)$$

Pode ser também provada a seguinte relação:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \operatorname{tg}^{-1}(x)$$

Começando com $\operatorname{tg}(x)$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg}(x) &= e^x - e^{-x} \\ e^x (\operatorname{tg}(x) - 1) &= -e^{-x} (\operatorname{tg}(x) + 1) \\ e^x &= -e^{-x} \frac{\operatorname{tg}(x) + 1}{\operatorname{tg}(x) - 1} \\ e^{2x} &= -\frac{\operatorname{tg}(x) + 1}{\operatorname{tg}(x) - 1}\end{aligned}$$

Fazendo uma inversão chama-se $x = \operatorname{tg}^{-1}(u)$

$$\begin{aligned}e^{2 \operatorname{tg}^{-1}(u)} &= -\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}(u)) + 1}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}(u)) - 1} \\ e^{2 \operatorname{tg}^{-1}(u)} &= -\frac{u + 1}{u - 1} \\ \ln(e^{2 \operatorname{tg}^{-1}(u)}) &= \ln\left(-\frac{u + 1}{u - 1}\right) \\ \operatorname{tg}^{-1}(u) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)\end{aligned}\tag{9.44}$$

Assim é válido reescrever substituindo Eq. (9.43) com Eq. (9.44) em Eq. (9.41):

$$s = 0 \quad \rightarrow \quad T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{tg}^{-1}(u)\tag{9.45}$$

O mesmo procedimento adotado para reescrever Eq. (9.42):

$$s = 1 \quad \rightarrow \quad T(x) = \alpha_0 \operatorname{tg}^{-1}(u)\tag{9.46}$$

Vale notar que sem perda de generalidade é possível adotar apenas a Eq. (9.45) no lugar de Eq. (9.45) para $s = 0$ e Eq. (9.46) para $s = 1$ onde adota-se:

$$\begin{aligned}s = 0 &\Rightarrow \alpha_0 \rightarrow \alpha_0 \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \\ s = 1 &\Rightarrow \alpha_0 \rightarrow \alpha_0 \quad \alpha_1 \rightarrow 0\end{aligned}$$

Assim a solução de Eq. (9.32) é:

$$T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{tg}^{-1}(u)\tag{9.47}$$

Retomando ao que foi feito, primeiro tomada a equação de Beltrami para a variável $u = u(\varphi, \theta)$:

$$Lu = 0$$

Que abrindo o operador de Beltrami foi obtida a equação diferencial Eq. (9.25)

$$\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} + \cos(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} - \frac{m^2 T(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = 0$$

Mas considerando que $u = u(\theta, \varphi)$ fosse separável, sua forma seria do tipo $u = T(\theta)P(\varphi)$ então é possível reescrever a equação diferencial em um sistema de equações diferenciais, onde felizmente as variáveis estão desacopladas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} + P(\varphi)m^2 = 0 \\ \text{sen}(\theta) \frac{\partial^2 T(\theta)}{\partial \theta^2} + \cos(\theta) \frac{\partial T(\theta)}{\partial \theta} - \frac{m^2 T(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = 0 \end{cases}$$

Da equação dependente de θ faz-se a substituição $x = \cos(\theta)$ obtendo:

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} \right] T(x) = 0$$

Que ao comparar com a Equação de Legendre:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

Percebe-se que $l = 0$ para que a equação obtida a partir da equação de Beltrami tenha convergência, sendo assim $l = 0$ faz com que o único valor de m que não gere uma solução divergente seja $m = 0$, de forma a redefinir o sistema de equações para:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right] T(x) = 0 \end{cases}$$

As soluções obtidas são do tipo:

$$\begin{cases} P(\varphi) = a\varphi + b \\ T(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{tg}^{-1} \end{cases}$$

Isso foi o feito até o momento, para que a volta seja coerente é necessário escrever $T = T(x)$ como $T = T(\theta)$ assim tem-se:

$$\begin{aligned} \text{tg}^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \\ \text{tg}^{-1}(x) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)} \right) \end{aligned}$$

Mas utilizando $\cos(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ então:

$$\begin{aligned} 1 + \cos(\theta) &= 1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 1 - \cos(\theta) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

que voltando reescreve-se:

$$\operatorname{tg}^{-1}(\cos(\theta)) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$\begin{cases} P(\varphi) = a\varphi + b \\ T(\theta) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Enfim $u = u(\theta, \varphi) = T(\theta)P(\varphi)$ é reescrito

$$u = (a\varphi + b) \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right)$$

$$u = b\alpha_0 + \frac{b\alpha_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + a\alpha_0\varphi + \frac{a\alpha_1\varphi}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (9.48)$$

Vale notar que a solução para $Lv = 0$ terá a mesma forma funcional, então:

$$v = d\beta_0 + \frac{d\beta_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + c\beta_0\varphi + \frac{c\beta_1\varphi}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (9.49)$$

Mas é necessário que u e v sejam compatíveis. Para encontrar algo que compatibilize basta voltar à construção feita para obtenção da equação de Beltrami no ponto onde se obteve o que relacionava u e v o quadro Eq.(9.19). Nele é feita as substituições necessárias para aplicação nesse caso:

$$p = \theta \quad q = \varphi$$

$$E = R^2 \quad F = 0 \quad G = R^2 \operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$g^2 = EG - F^2 \rightarrow g = R^2 \operatorname{sen}(\theta)$$

De ponto a se obter diretamente por substituição:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(-R^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) / (R^2 \operatorname{sen}(\theta))$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left(R^2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) / (R^2 \operatorname{sen}(\theta))$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(-R^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) / (R^2 \operatorname{sen}(\theta))$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \left(R^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) / (R^2 \operatorname{sen}(\theta))$$

Simplificando:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \quad (9.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \quad (9.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(-\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (9.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (9.53)$$

E é notável que Eq. (9.50) \Leftrightarrow Eq. (9.52) e Eq. (9.51) \Leftrightarrow Eq. (9.53), sobrando duas equações que mantêm o vínculo de interesse entre u e v :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(-\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \quad (9.54)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \left(\frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \quad (9.55)$$

Por comodidade, adotando $u \equiv w_1$, $v \equiv w_2$, $\sigma_1 \equiv 1$ e $\sigma_2 = -1$ se torna possível compactamente escrever tanto Eq. (9.54) quanto Eq. (9.55)

$$\frac{\partial w_i}{\partial \theta} = \left(\frac{\sigma_i}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \right) \quad , \quad i \neq j \quad i, j \in [1, 2] \quad (9.56)$$

Por questão de completeza e clareza expondo a forma de $w_i = w_i(\theta, \phi)$

$$w_i = b_i \alpha_i + \frac{b_i \beta_i}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + a_i \alpha_i \varphi + \frac{a_i \beta_i \varphi}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (9.57)$$

Cada identificação fica:

$$\begin{aligned} a_1 &= a & \alpha_1 &= \alpha_0 \\ b_1 &= b & \beta_1 &= \alpha_1 \\ a_2 &= c & \alpha_2 &= \beta_0 \\ b_2 &= d & \beta_2 &= \beta_1 \end{aligned} \quad (9.58)$$

Calculando as derivadas em φ e em θ . O cálculo em relação a φ sai diretamente:

$$\frac{\partial w_i}{\partial \varphi} = a_i \alpha_i + \frac{a_i \beta_i}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (9.59)$$

Agora em relação a θ usa-se:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(f(x))}{dx} &= \frac{1}{x} \frac{df(x)}{dx} \\ \frac{d \cotg^2(\theta/2)}{d\theta} &= 2 \cotg(\theta/2) \frac{1}{2} (-\text{cossec}^2(\theta/2)) = -\cotg(\theta/2) \text{cossec}^2(\theta/2) \\ \frac{d}{d\theta} \ln(\cotg^2(\theta/2)) &= \frac{-\text{cossec}^2(\theta/2)}{\cotg(\theta/2)} = \frac{-\text{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2) \text{sen}^2(\theta/2)} \end{aligned}$$

Mas como $\cos(\theta/2) \text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\theta/2)/2$ então

$$\frac{d}{d\theta} \ln(\cotg^2(\theta/2)) = \frac{-2}{\text{sen}(\theta)} = -2\text{cossec}(\theta) \quad (9.60)$$

Resultando então a derivada em θ de Eq. (9.57) com Eq. (9.60):

$$\frac{\partial w_i}{\partial \theta} = -\beta_i (a_i \varphi + b_i) \text{cossec}(\theta) \quad (9.61)$$

Retomando Eq. (9.56) substituindo Eq. (9.61) e Eq. (9.59)

$$\begin{aligned} -\beta_i(a_i\varphi + b_i)\operatorname{cosec}(\theta) &= \sigma_i\operatorname{cosec}(\theta) \left[a_j\alpha_j + \frac{a_j\beta_j}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \\ -\beta_i(a_i\varphi + b_i) &= \sigma_i \left[a_j\alpha_j + \frac{a_j\beta_j}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (9.62)$$

Da Eq. (9.62) tira-se as relações:

$$\beta_i a_i = 0 \quad \beta_i b_i = \sigma_j \alpha_j a_j \quad \beta_j a_j = 0 \quad (9.63)$$

A escolha feita será de uma constante de cada função, uma do tipo romana (da função $P = P(\varphi)$, a, b) e uma grega (de $T = T(\theta)$, α, β) a ser zerada para o sistema admitir solução diferente da trivial. Antes, para clarear, expondo os índices i, j das equações Eq. (9.63):

$$\begin{aligned} \beta_1 a_1 = 0 & \quad \beta_1 b_1 = \sigma_2 \alpha_2 a_2 & \quad \beta_2 a_2 = 0 \\ \beta_2 a_2 = 0 & \quad \beta_2 b_2 = \sigma_1 \alpha_1 a_1 & \quad \beta_1 a_1 = 0 \end{aligned}$$

Agora fazendo escolhas para encontrar uma solução do sistema:

$$\begin{aligned} \boxed{a_1 = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\alpha_1 = 0} & \rightarrow \beta_2 b_2 = 0 \\ \text{Mas} \quad \beta_2 a_2 &= 0 \\ \Rightarrow \boxed{\beta_2 = 0} & \end{aligned} \quad (9.64)$$

Que levou a uma nova equação para o sistema, a qual comparando com uma que já fazia parte do sistema resultou em $\beta_2 = 0$, agora voltando em u e v escrito como em Eq. (9.57):

$$\begin{aligned} u = w_1 &= b_1 \alpha_1 + \frac{b_1 \beta_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + a_1 \alpha_1 \varphi + \frac{a_1 \beta_1 \varphi}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ v = w_2 &= b_2 \alpha_2 + \frac{b_2 \beta_2}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + a_2 \alpha_2 \varphi + \frac{a_2 \beta_2 \varphi}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Substituindo os valores adotados em Eq. (9.64):

$$\begin{aligned} u = w_1 &= \frac{b_1 \beta_1}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ v = w_2 &= b_2 \alpha_2 + a_2 \alpha_2 \varphi \end{aligned}$$

Com $\beta_1 b_1 = -\alpha_2 a_2 \equiv A$ e $b_2 \alpha_2 = B$

$$u = u(\theta, \varphi) = \frac{A}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = u(\theta) \quad (9.65)$$

$$v = v(\theta, \varphi) = B - A\varphi = v(\varphi) \quad (9.66)$$

Enfim com $u = u(\theta, \varphi)$ e $v = v(\theta, \varphi)$ é hora de calcular o valor do fator integrante $\lambda = \lambda(u, v)$ da equação Eq. (9.9).

9.2.1 Fator Integrante

As equações que definem λ , Eq. (9.11) e Eq. (9.12):

$$\lambda\sqrt{E} = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \iota \frac{\partial v}{\partial p} \right)$$

$$\lambda \left(\frac{F + \iota\sqrt{g}}{\sqrt{E}} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial q} + \iota \frac{\partial v}{\partial q} \right)$$

Para a situação da esfera à partir da métrica: $dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi)$, se fez utilizar de:

$$p = \theta \quad q = \varphi$$

$$E = R^2 \quad F = 0 \quad G = R^2 \text{sen}^2(\theta)$$

Tem-se:

$$\lambda R = \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \iota \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$\lambda \iota R \text{sen}(\theta) = \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \iota \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)$$

Como foi obtido Eq. (9.65) e Eq. (9.66), substituindo:

$$\lambda R = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right) + \iota \frac{\partial}{\partial \theta} (B - A\varphi) \right) \quad (9.67)$$

$$\lambda \iota R \text{sen}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right) + \iota \frac{\partial}{\partial \varphi} (B - A\varphi) \right) \quad (9.68)$$

Ambos vão gerar o mesmo resultado, mas é bem mais direto o cálculo por Eq. (9.68), que resulta diretamente em:

$$\lambda R \text{sen}(\theta) = -A \Rightarrow \lambda = -\frac{A}{R \text{sen}(\theta)} \quad (9.69)$$

9.2.2 A métrica induzida na foma conforme para a Esfera

A métrica para a esfera:

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\varphi^2)$$

Que como visto, pode ser escrita na forma:

$$dl^2 = |\lambda|^{-2} (du^2 + dv^2)$$

E reescrevendo utilizando Eq. (9.69)

$$dl^2 = \frac{R^2 \text{sen}^2(\theta)}{A^2} (du^2 + dv^2) \quad (9.70)$$

Há um problema ainda, a dependência em θ ; para remover a mesma, toma-se novamente Eq. (9.65) e conferindo uma relação antes de seguir:

$$\text{sen}^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2) = \text{sen}^2(\theta)/4 \quad \rightarrow \quad \text{sen}^2(\theta) = 4 \text{sen}^2(\theta/2) (1 - \text{sen}^2(\theta/2)) \quad (9.71)$$

Seguindo:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{A}{2} \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ \frac{2u}{A} &= \ln \left(\cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ e^{\left(\frac{2u}{A}\right)} &= \cotg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ e^{u/A} &= \cotg \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)} \\ e^{2u/A} &= \frac{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \\ e^{2u/A} &= \frac{1 - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \\ e^{2u/A} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) &= 1 - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ 1 &= e^{2u/A} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) &= \frac{1}{1 + e^{2u/A}} \end{aligned} \quad (9.72)$$

Enfim substituindo Eq. (9.72) em Eq. (9.71):

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\theta) &= 4 \frac{1}{1 + e^{2u/A}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{2u/A}} \right) \\ \text{sen}^2(\theta) &= 4 \left(\frac{1 + e^{2u/A} - 1}{(1 + e^{2u/A})^2} \right) \\ \text{sen}^2(\theta) &= \left(\frac{4e^{2u/A}}{(1 + e^{2u/A})^2} \right) \end{aligned} \quad (9.73)$$

Substituindo Eq. (9.73) em Eq. (9.70)

$$dl^2 = \frac{(2R)^2}{A^2} \left(\frac{e^{2u/A}}{(1 + e^{2u/A})^2} \right) (du^2 + dv^2)$$

Para que a notação acomode este exemplo é conveniente escrever:

$$ds_{esfera}^2 = \left(2\frac{R}{A}\right)^2 \left(\frac{e^{2u/A}}{1+e^{2u/A}}\right)^2 (du^2 + dv^2) = \left(2\frac{R}{A}\right)^2 \left(\frac{e^{2u/A}}{1+e^{2u/A}}\right)^2 ds_{plano}^2 \quad (9.74)$$

COMPARAR?

9.3 Aplicação Operador de Beltrami: Forma Conforme Pseudo-esfera

A métrica da pseudo-esfera:

$$-dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\varphi^2) \quad (9.75)$$

Tomando $dl'^2 = -dl^2$ para não carregar o sinal negativo, e comparando com:

$$dl'^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

podendo assim identificar:

$$\begin{aligned} p &= \chi & q &= \varphi \\ E &= R^2 & F &= 0 & G &= R^2 \sinh^2(\chi) \\ g &= R^4 \sinh^2(\chi) \end{aligned} \quad (9.76)$$

Utilizando os valores de Eq. (9.76) no Operador de Beltrami:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial p} - E \frac{\partial}{\partial q}}{\sqrt{g}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{F \frac{\partial}{\partial q} - G \frac{\partial}{\partial p}}{\sqrt{g}} \right] \\ &\stackrel{Eq.(9.76)}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{-R^2}{\sqrt{R^4 \sinh^2(\chi)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{-R^2 \sinh^2(\chi)}{\sqrt{R^4 \sinh^2(\chi)}} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{-1}{\sinh(\chi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(-\sinh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \\ L &= -\frac{1}{\sinh(\chi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \end{aligned} \quad (9.77)$$

As equações de Beltrami ficam:

$$\begin{cases} Lu = 0 \\ Lv = 0 \end{cases}$$

as quais podem ser identificadas como:

$$Lw_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sinh(\chi)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial w_i}{\partial \chi} \right) = 0 \quad (9.78)$$

com $i = [1, 2]$, onde $w_1 = u$ e $w_2 = v$. Supondo uma solução separável para $w_i = w_i(\chi, \varphi)$:

$$w_i = X_i(\chi)Y_i(\varphi) \quad (9.79)$$

Substituindo Eq. (9.79) em Eq. (9.78)

$$0 = \frac{1}{\sinh(\chi)} \frac{\partial^2 X_i(\chi) Y_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial X_i(\chi) Y_i(\varphi)}{\partial \chi} \right) \\ \times \frac{\sinh(\chi)}{X_i(\chi) Y_i(\varphi)} \frac{1}{Y_i(\varphi)} \frac{\partial^2 Y_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{\sinh(\chi)}{X_i(\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} \right) = 0$$

De forma que é possível agora desacoplar as variáveis em duas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Y_i(\varphi)} \frac{\partial^2 Y_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} = m^2 \\ -\frac{\sinh(\chi)}{X_i(\chi)} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} \right) = m^2 \end{array} \right. \quad (9.80)$$

A equação em φ tem soluções triviais, tais que:

$$\begin{aligned} \text{Se } m = 0 & \rightarrow \frac{\partial^2 Y_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \\ & \Rightarrow Y_i(\varphi) = \alpha_i \varphi + \beta_i \end{aligned} \quad (9.81)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } m \neq 0 & \rightarrow \frac{\partial^2 Y_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} - m^2 Y_i(\varphi) = 0 \\ & \Rightarrow Y_i(\varphi) = \alpha_i e^{m\varphi} + \beta_i e^{-m\varphi} + \gamma_i \end{aligned} \quad (9.82)$$

Agora solucionando a equação referente à dependência em χ fica

$$\sinh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\sinh(\chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \right) X_i(\chi) + m^2 X_i(\chi) = 0 \\ \sinh(\chi) \cosh(\chi) \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} + \sinh^2(\chi) \frac{\partial^2 X_i(\chi)}{\partial \chi^2} + m^2 X_i(\chi) = 0$$

tomando $\cosh(\chi) = \kappa$, recordando da identidade $\cosh^2(\chi) - \sinh^2(\chi) = 1$, então dessa substituição resolva-se também:

$$\frac{d}{d\chi} = \frac{d\kappa}{d\chi} \frac{d}{d\kappa} = \sinh(\chi) \frac{d}{d\kappa} = \sqrt{\kappa^2 - 1} \frac{d}{d\kappa} \quad (9.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\chi^2} &= \frac{d}{d\chi} \left(\sinh(\chi) \frac{d}{d\kappa} \right) = \cosh(\chi) \frac{d}{d\kappa} + \sinh(\chi) \frac{d}{d\chi} \frac{d}{d\kappa} \\ &= \kappa \frac{d}{d\kappa} + \sinh^2(\chi) \frac{d^2}{d\kappa^2} \\ \frac{d^2}{d\chi^2} &= \kappa \frac{d}{d\kappa} + (\kappa^2 - 1) \frac{d^2}{d\kappa^2} \end{aligned} \quad (9.84)$$

Com Eq. (9.84) e Eq. (9.83) em Eq. (9.80)

$$\begin{aligned}
0 &= \sqrt{\kappa^2 - 1} \kappa \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} + (\kappa^2 - 1) \frac{\partial^2 X_i(\chi)}{\partial \chi^2} + m^2 X_i(\chi) \\
0 &= \kappa \sqrt{\kappa^2 - 1} \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} + (\kappa^2 - 1) \left(\kappa \frac{d}{d\kappa} + (\kappa^2 - 1) \frac{d^2}{d\kappa^2} \right) X_i(\kappa) + m^2 X_i(\kappa) \\
0 &= \kappa (\kappa^2 - 1) \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} + (\kappa^2 - 1) \left(\kappa \frac{d}{d\kappa} + (\kappa^2 - 1) \frac{d^2}{d\kappa^2} \right) X_i(\kappa) + m^2 X_i(\kappa) \\
0 &= (\kappa^2 - 1)^2 \frac{d^2}{d\kappa^2} X_i(\kappa) + 2\kappa (\kappa^2 - 1) \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} + m^2 X_i(\kappa)
\end{aligned} \tag{9.85}$$

Dividindo toda a equação pelo termo $\kappa^2 - 1$ é obtida a equação no formato:

$$0 = (\kappa^2 - 1) \frac{d^2}{d\kappa^2} X_i(\kappa) + 2\kappa \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} + \frac{m^2 X_i(\kappa)}{(\kappa^2 - 1)} \tag{9.86}$$

Comparando com a equação de Legendre, é possível remover valores e introduzir de forma que a solução convirja:

$$0 = (1 - \kappa^2) \frac{d^2}{d\kappa^2} X_i(\kappa) - 2\kappa \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} + \left(l(l+1) + \frac{-n^2}{(1 - \kappa^2)} \right) X_i(\kappa) \tag{9.87}$$

De Eq. (9.87) e Eq. (9.86) se tira que $l = 0$ o que implica em $m = 0$, pois $|m| = 0, 1, \dots, l - 1, l$. Resultado esse que leva a

$$\begin{aligned}
0 &= (\kappa^2 - 1) \frac{d^2}{d\kappa^2} X_i(\kappa) + 2\kappa \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} \\
0 &= \frac{d}{d\kappa} \left[(\kappa^2 - 1) \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} \right] \rightarrow (\kappa^2 - 1) \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} = cte \equiv A_i \\
\frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} &= \frac{A_i}{(\kappa^2 - 1)}
\end{aligned}$$

Integrando em $d\kappa$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dX_i(\kappa)}{d\kappa} d\kappa &= \int \frac{A_i}{(\kappa^2 - 1)} d\kappa \\
X_i(\kappa) &= A_i \int \frac{1}{1 + \kappa} \frac{1}{\kappa - 1} d\kappa \\
&= \frac{A_i}{2} [\ln(1 - \kappa) - \ln(1 + \kappa)] + b'_i \\
&= \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \right) + \ln(e^{b'_i}) \\
&= \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \right) + \frac{A_i}{2} \ln(e^{2b/A_i}) \\
&= \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} e^{2b/A_i} \right) = \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} B'_i \right)
\end{aligned}$$

Já lembrando que $\kappa = \cosh(\chi)$

$$X_i(\cosh(\chi)) = X_i(\chi) = \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \cosh(\chi)}{1 + \cosh(\chi)} B'_i \right)$$

Utilizando as propriedades $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(2x)$ e $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$X_i(\chi) = \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{1 - \sinh^2\left(\frac{\chi}{2}\right) - \cosh^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{1 + \sinh^2\left(\frac{\chi}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} B'_i \right)$$

$$X_i(\chi) = \frac{A_i}{2} \ln \left(\frac{-2 \sinh^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{2 \cosh^2\left(\frac{\chi}{2}\right)} B'_i \right)$$

Tomando $B_i = -B'_i$

$$X_i(\chi) = \frac{A_i}{2} \ln \left(B_i \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) \quad (9.88)$$

Retornando em Eq. (9.79) com Eq. (9.88) e Eq. (9.81):

$$w_i(\chi, \varphi) = X_i(\chi) Y_i(\varphi)$$

$$= \left[\frac{A_i}{2} \ln \left(B_i \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) \right] [\alpha_i \varphi + \beta_i] \quad (9.89)$$

Agora enfim, é possível descrever $w_1 = u$, $w_2 = v$ removendo nesse ponto a economia de notação que foi feita com B_i :

$$u(\chi, \varphi) = \left[\frac{A_1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + b_1 \right] [\alpha_1 \varphi + \beta_1] \quad (9.90)$$

$$v(\chi, \varphi) = \left[\frac{A_2}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + b_2 \right] [\alpha_2 \varphi + \beta_2] \quad (9.91)$$

Obs.: de fato para economizar a notação o termo B_i se manterá na forma 'escondida' na hora de utilizá-lo, exposto à essa maneira. Agora compatibilizando as soluções, utilizando a construção do Operador de Beltrami

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial p} &= F \frac{\partial u}{\partial p} - E \frac{\partial u}{\partial q} & \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial q} &= G \frac{\partial u}{\partial p} - F \frac{\partial u}{\partial q} \\ \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} &= E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p} & \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial q} &= F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p} \end{aligned}$$

Como $F=0$, pois a métrica é diagonal reduz-se para:

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial p} &= -E \frac{\partial u}{\partial q} & \sqrt{g} \frac{\partial v}{\partial q} &= G \frac{\partial u}{\partial p} \\ \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial p} &= E \frac{\partial v}{\partial q} & \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial q} &= -G \frac{\partial v}{\partial p} \end{aligned}$$

E também as substituições de Eq. (9.76), $p = \chi$, $q = \varphi$, $E = R^2$, $G = R^2 \sinh^2(\chi)$ e $g = R^4 \sinh^2(\chi)$

$$\begin{aligned} R^2 \sinh(\chi) \frac{\partial v}{\partial \chi} &= -R^2 \frac{\partial u}{\partial q} & R^2 \sinh(\chi) \frac{\partial v}{\partial q} &= R^2 \sinh^2(\chi) \frac{\partial u}{\partial \chi} \\ R^2 \sinh(\chi) \frac{\partial u}{\partial \chi} &= R^2 \frac{\partial v}{\partial q} & R^2 \sinh(\chi) \frac{\partial u}{\partial q} &= -R^2 \sinh^2(\chi) \frac{\partial v}{\partial \chi} \end{aligned}$$

Simplificando recai-se sobre duas equações diferenciais distintas:

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \sinh(\chi) \frac{\partial u}{\partial \chi} \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\sinh(\chi) \frac{\partial v}{\partial \chi} \quad (9.92)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} &= X_i(\chi) \frac{\partial Y_i(\varphi)}{\partial \varphi} \\ &\stackrel{\text{Eq. (9.81)}}{=} X_i(\chi) \frac{\partial}{\partial \varphi} [\alpha_i \varphi + \beta_i] \\ &= \alpha_i \frac{A_i}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + \alpha_i b_i \end{aligned} \quad (9.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial \chi} &= Y_i(\varphi) \frac{\partial X_i(\chi)}{\partial \chi} \\ &\stackrel{\text{Eq. (9.88)}}{=} Y_i(\varphi) \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{A_i}{2} \ln \left(B_i \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) \right] \\ &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{2} \frac{1}{B_i \operatorname{tg}(\chi/2)} \frac{\partial (B_i \operatorname{tg}(\frac{\chi}{2}))}{\partial \chi} \\ &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{2} \frac{1}{\operatorname{tg}(\chi/2)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\chi/2) \right) \\ &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{4} \frac{\cosh(\chi/2)}{\sinh(\chi/2)} \frac{1}{\cosh^2(\chi/2)} \\ &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{4} \frac{1}{\sinh(\chi/2) \cosh(\chi/2)} \end{aligned}$$

Utilizando a relação: $\sinh(x) \cosh(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{(e^{2x} - e^{-2x})}{4} = \frac{\sinh(2x)}{2}$

$$\begin{aligned} &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{4} \frac{2}{\sinh(\chi)} \\ &= [\alpha_i \varphi + \beta_i] \frac{A_i}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} \\ \frac{\partial w_i}{\partial \chi} &= \alpha_i \varphi \frac{A_i}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} + \beta_i \frac{A_i}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} \end{aligned} \quad (9.94)$$

Utilizando os valores de Eq. (9.93) com $i = 1$, Eq. (9.93) com $i = 2$, Eq. (9.94) com $i = 1$ e Eq. (9.94) com $i = 2$ em Eq. (9.92) obtém-se as equações:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \frac{A_2}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + \alpha_2 b_2 &= \sinh(\chi) \alpha_1 \varphi \frac{A_1}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} + \beta_1 \frac{A_1}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} \\ \alpha_2 A_2 \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + \alpha_2 b_2 &= \alpha_1 \varphi A_1 + \beta_1 A_1 \end{aligned} \quad (9.95)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{A_1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + \alpha_1 b_1 &= -\sinh(\chi) \alpha_2 \varphi \frac{A_2}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} + \beta_2 \frac{A_2}{2} \frac{1}{\sinh(\chi)} \\ \alpha_1 A_1 \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + \alpha_1 b_1 &= -\alpha_2 \varphi A_2 - \beta_2 A_2 \end{aligned} \quad (9.96)$$

Ao comparar os coeficientes se obtém, de Eq. (9.95)

$$\alpha_2 A_2 = 0 \quad \alpha_2 b_2 = \beta_1 A_1 \quad \alpha_1 A_1 = 0 \quad (9.97)$$

E de Eq. (9.96)

$$\alpha_1 A_1 = 0 \quad \alpha_1 b_1 = -\beta_2 A_2 \quad -\alpha_2 A_2 = 0 \quad (9.98)$$

Escolhendo: $\alpha_1 = 0 \quad A_1 \neq 0$
 $A_2 = 0 \quad \alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_2 b_2 = \beta_1 A_1 = D \neq 0$ e $\alpha_1 b_1 = 0 = \beta_2 A_2$. Esses resultados levam a:

$$\begin{aligned} u(\chi, \varphi) &= \left[\frac{A_1}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + b_1 \right] \beta_1 \\ &= \frac{D}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) + b_1 \beta_1 \end{aligned}$$

$$v(\chi, \varphi) = D\varphi + b_2 \beta_2$$

Os coeficientes β_1 e b_2 são bem definidos como não nulos. Já β_2 e b_1 são não determinados a não ser por uma escolha; por economia aqui se adotará eles como sendo nulos, isso é, $b_1 = \beta_2 = 0$. Enfim u e v obtidos:

$$u(\chi, \varphi) = \frac{D}{2} \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \right) \right) = u(\chi) \quad (9.99)$$

$$v(\chi, \varphi) = D\varphi = v(\varphi) \quad (9.100)$$

Das equações para obter o fator λ , utiliza-se a:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{E}} (F + i\sqrt{g}) = \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q}$$

Que ao substituir os valores correspondentes como é mostrado em Eq. (9.76) fica:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{R^2}} i \sqrt{R^4 \sinh^2(\chi)} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} + i \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\lambda i R \sinh(\chi) = i \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$\lambda R \sinh(\chi) = D \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{D}{R \sinh(\chi)}} \quad (9.101)$$

Podendo nesse ponto escrever a métrica da pseudo-esfera como:

$$\begin{aligned} -dl_{\text{pseudo esfera}}^2 &= |\lambda|^{-2} (du^2 + dv^2) \\ &= \left(\frac{D}{R \sinh(\chi)} \right)^{-2} (du^2 + dv^2) \\ &= \left(\frac{R^2 \sinh^2(\chi)}{D^2} \right) (du^2 + dv^2) \end{aligned} \quad (9.102)$$

A equação Eq. (9.102) possui ainda dependência explícita em χ mas como pode ser escrito $\chi = \chi(u, v)$. De Eq. (9.99):

$$\begin{aligned}
 u = u(\chi) &= \frac{D}{2} \ln [\operatorname{tg}(\chi/2)] \\
 \frac{2u}{D} &= \ln [\operatorname{tg}(\chi/2)] \\
 e^{2u/D} &= \operatorname{tg}(\chi/2) \\
 &= \frac{\operatorname{senh}(\chi/2)}{\operatorname{cosh}(\chi/2)} \\
 e^{2u/D} \operatorname{cosh}^2(\chi/2) &= \operatorname{senh}(\chi/2) \operatorname{cosh}(\chi/2) = \frac{\operatorname{senh}(\chi)}{2} \\
 e^{2u/D} \operatorname{cosh}^2(\chi/2) &= \frac{\operatorname{senh}(\chi)}{2}
 \end{aligned} \tag{9.103}$$

Mas como $\operatorname{sech}^2(x) + \operatorname{tg}^2(x) = 1 \rightarrow \operatorname{cosh}^2(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(x)}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{senh}(\chi)}{2} &= e^{2u/D} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2(\chi/2)} \\
 &\stackrel{\text{Eq. (9.103)}}{=} e^{2u/D} \frac{1}{1 - e^{4u/D}} \\
 \operatorname{senh}(\chi) &= 2e^{2u/D} \frac{1}{1 - e^{4u/D}} \\
 \operatorname{senh}^2(\chi) &= 4 \frac{e^{4u/D}}{(1 - e^{4u/D})^2}
 \end{aligned} \tag{9.104}$$

Finalmente Eq. (9.102) com Eq. (9.104):

$$-dl_{\text{esfera}}^2 = \left(\frac{2R}{D}\right)^2 \left(\frac{e^{4u/D}}{(1 - e^{4u/D})^2}\right) (du^2 + dv^2)$$

Enfim:

$$\boxed{dl_{\text{esfera}}^2 = - \left(\frac{2R}{D} \frac{e^{2u/D}}{(1 - e^{4u/D})}\right)^2 dl_{\text{euclidiano}}^2} \tag{9.105}$$

Parte III

Aspectos Geométricos do Gás Ideal

10 GEOMETRIA DO GÁS IDEAL

Um gás ideal é definido como o sistema termodinâmico que satisfaz às equações [2, 10]

$$PV = NRT, \quad (10.1)$$

e

$$U = \frac{3}{2}NRT. \quad (10.2)$$

Onde, como usualmente é definido na termodinâmica, P é a pressão, V o volume, T a temperatura e U a energia interna do sistema termodinâmico; N é o número de moles e $R = 1.986$ cal/mol K, é a constante universal dos gases. Introduzindo a notação

$$v \equiv \frac{V}{N}, \quad u \equiv \frac{U}{N}, \quad v \equiv \frac{V}{N}, \quad k \equiv \frac{R}{N}, \quad s \equiv \frac{S}{N}, \quad (10.3)$$

reescrevemos as equações Eqs. (10.1,10.2) como

$$Pv = NkT = RT, \quad (10.4)$$

$$u = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}RT. \quad (10.5)$$

Substituindo as equações Eq. (10.4) e Eq. (10.5) na forma diferencial da primeira lei da termodinâmica

$$du = Tds - Pdv \quad (10.6)$$

obtemos a equação diferencial

$$ds = \frac{1}{T}du + \frac{P}{T}dv = \frac{3}{2}Nk\frac{du}{u} + Nk\frac{dv}{v}$$

que pode ser integrada diretamente fornecendo

$$s = s_0 + \frac{3}{2}R \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) + R \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

⇕

$$\frac{s - s_0}{R} = \frac{3}{2}R \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) + R \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \quad (10.7)$$

Onde s_0 , u_0 e v_0 , são constante de integração que são valores dos parâmetros do sistema referidos a um dado estado de equilíbrio inicial. A equação Eq.(10.7) pode ser resolvida para a energia interna por unidade de moles, fornecendo

$$\frac{u}{u_0} = e^{\frac{2}{3}\left(\frac{s-s_0}{R}\right)} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (10.8)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais

$$x \equiv \frac{s - s_0}{R}, \quad y \equiv \frac{v}{v_0}, \quad z \equiv \frac{u}{u_0}, \quad z = z(x, y) \quad (10.9)$$

reescrevemos a equação Eq.(10.8) como

$$z = \frac{e^{\frac{2}{3}x}}{y^{\frac{2}{3}}}. \quad (10.10)$$

10.1 A métrica induzida do Gás Ideal

A equação Eq.(10.10) é a equação de uma superfície regular representando os pontos de equilíbrio de um gás ideal no espaço de fase, aqui representado pelas variáveis x e y .

Para utilizar a equação da métrica induzida na superfície S^2 imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 (neste caso de fato o espaço de fase) $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, para a superfície dada pela equação Eq. (10.10) calculamos

$$\begin{aligned} E = g_{11} &= x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u = x_x x_x + y_x y_x + z_x z_x = 1 + z_x^2, \\ F = g_{12} &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = x_x x_y + y_x y_y + z_x z_y = z_x z_y, \\ E = g_{22} &= x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v = x_y x_y + y_y y_y + z_y z_y = 1 + z_y^2. \end{aligned}$$

Calculando cada termos separadamente, obtemos

$$g_{11} = 1 + \frac{4}{9}z^2, \quad g_{12} = -\frac{4}{9}\frac{z^2}{y}, \quad g_{22} = 1 + \frac{4}{9}\frac{z^2}{y^2}, \quad (10.11)$$

de onde segue a métrica induzida na superfície de equilíbrio para um gás ideal

$$dl^2 = \left(1 + \frac{4}{9}z^2\right) dx^2 - \frac{8}{9}\frac{z^2}{y} dx dy + \left(1 + \frac{4}{9}\frac{z^2}{y^2}\right) dy^2, \quad (10.12)$$

ou na forma

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{4}{9}z^2 \left(dx - \frac{dy}{y}\right)^2 \quad (10.13)$$

10.2 A curvatura Gaussiana do Gás Ideal

Utilizando diretamente a equação Eq.(27) da ref. ([8]) que fornece a curvatura Gaussiana de uma superfície regular,

$$K = \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^2}, \quad (10.14)$$

teremos para

$$z_x = \frac{2}{3}z, \quad z_{xx} = \frac{4}{9}z, \quad z_y = -\frac{2}{3}\frac{z}{y}, \quad z_{yy} = \frac{10}{9}\frac{z}{y^2}, \quad z_{xy} = -\frac{4}{9}\frac{z}{y} \quad (10.15)$$

a expressão

$$K = \left[\frac{\sqrt{24}zy}{9y^2 + 4z^2(1 + y^2)} \right]^2 \quad (10.16)$$

O primeiro resultado interessante que segue desta expressão é que ela é positiva definida. Dado que (veja equações Eq.(10.8) e Eq. (10.9)) $x \geq 0$, $y > 0$, $z > 0$, a curvatura é necessariamente positiva e não nula, ou seja $K > 0$. Importante ainda é o fato deste resultado

ser coerente com o requerimento que este resultado é consistente com as condições de estabilidade de um sistema termodinâmico que na representação de energia impõe à forma quadrática d^2u como provado na referência [2]. Outro ponto interessante demonstrando a consistência deste procedimento é que o fato de termos

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \left(\frac{\sqrt{24}z}{9y} \right)^2 > 0,$$

e

$$z_{xx} = \frac{4}{9} > 0, \quad z_{yy} = \frac{10}{9} \frac{z}{y^2} > 0,$$

indicam que além da superfície possuir uma curvatura positiva ela é convexa estando acima de seus planos tangentes.

Devido isto e baseados nas condições de estabilidade de sistemas termodinâmico em equilíbrio [1], esperamos que uma descrição deste problema na representação da entropia forneça uma superfície com curvatura Gaussiana positiva porém convexa e estando abaixo de seus planos tangentes. Isto pode ser verificados simplesmente reescrevendo a equação Eq.(10.10) para a variável $x = x(y, z)$, fornecendo

$$x = \ln(yz^{3/2}) \quad (10.17)$$

e seguindo o mesmo procedimento anterior que nos levou as equações Eq. (10.13) e Eq. (10.16), obtemos

$$dL^2 = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy^2 + \frac{4}{3} \frac{1}{yz} dydz + \left(1 + \frac{9}{4} \frac{1}{z^2}\right) dz^2. \quad (10.18)$$

Para a construção da curvatura Gaussiana, destacamos os cálculos de

$$x_{yy} = -\frac{1}{y^2}, \quad x_{yz} = x_{zy} = 0, \quad x_{zz} = -\frac{3}{2} \frac{1}{z^2}$$

e a curvatura Gaussiana que é dada por

$$K = \left[\frac{\sqrt{24}zy}{9y^2 + 4z^2(1 + y^2)} \right]^2. \quad (10.19)$$

Apesar da representação funcional da curvatura Gaussiana nas representações da energia Eq. (10.16) e na representação da entropia Eq. (10.19) serem iguais, vale lembrar que no primeiro caso a função $z = z(x, y)$ não sendo portanto uma variável independente. Como afirmado anteriormente, a superfície Eq.(10.17) possui curvatura positiva com $x_{yy} < 0$ e $x_{zz} < 0$, portanto é convexa estando abaixo de todos os seus planos tangentes, como esperado da condição de equilíbrio de um sistema termodinâmico cuja equação de estado é expressa em termos da entropia.

11 CONCLUSÃO

O resultado Eq. (10.16) está em desacordo com àqueles obtidos nas referências [7, 9, 11], coincidindo, entretanto com o resultado obtido nas referências [4].

O fato de haver a discordância entre os resultados de Gibbs e Weinhold é decorrente das diferentes escolhas para a métrica nos trabalhos anteriormente citados, ou seja os autores comparam a curvatura Gaussiana decorrente de três escolhas, aparentemente distintas, para a métrica.

Nas referências [13–18] o autor constrói um espaço abstrato com um produto interno e conseqüentemente um espaço métrico sob os seguintes requerimentos:

1. As propriedades de um sistema em equilíbrio podem ser associadas com derivadas de menor ordem de uma função U (as quais o autor representa por R_i que serão os vetores base do espaço vetorial) que depende de um certo (pequeno) número r de variáveis independentes e que esta função seja diferenciável.
2. Que a função U seja de classe C^2 para que a primeira lei seja uma diferencial exata.
3. A função U deve satisfazer a condição

$$\frac{\partial R_i}{\partial X_i} \geq 0,$$

para que a estabilidade de um sistema termodinâmico em equilíbrio, na representação da energia, seja satisfeita.

Utilizando este procedimento os autores [7] obtém o resultado nulo para o cálculo da curvatura Gaussiana de um gás ideal.

Na referência [11] o autor busca construir uma formulação geométrica da termodinâmica alegando que nos trabalhos [6, 12, 17] falta um significado mais amplo de uma estrutura métrica. A solução que propõe é incluir a teoria das flutuações (Mecânica Estatística) nos axiomas da termodinâmica do equilíbrio através da inclusão de uma função distribuição

$$W(x, x') dx' = B e^{\frac{S_t(x, x')}{k_B} dx'},$$

onde $x = (x, y)$, $x' = (x', y')$, $S_t(x, x')$ a entropia total do 'reservatório' (*reservoir*), k_B a constante de Boltzmann e B uma constante de normalização. Considerando as flutuações do sistema em contato com o *reservoir*, com relação a configuração de equilíbrio, leva a definição da métrica

$$g_{ij}(x) = - \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 S_t}{\partial x'_i \partial x'_j} \Big|_{x'=x}$$

e ao correspondente elemento de comprimento de arco

$$\Delta l \equiv [g_{ij}(x) \Delta x'_i \Delta x'_j]^{1/2},$$

a qual "aparenta" ser uma distância entre estados vizinhos em uma variedade Riemanniana com métrica $g_{ij}(x)$. Para um gás ideal, esta métrica fornece o elemento de comprimento de arco

$$dl^2 = \frac{C_V}{k_B T^2} dT^2 + \frac{1}{k_B T} \frac{V}{\rho^2 K_T} d\rho^2,$$

onde $\rho \equiv N/V$ e $K_T \equiv -(1/V)(\partial V/\partial P)_T$ é a compressibilidade isotérmica. Mostra-se que esta métrica pode ser escrita na forma

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

que é a métrica Euclidiana, portanto plana, ou seja, a curvatura Gaussiana associada a esta métrica é nula.

O trabalho desenvolvido na referência [4] adota um outro procedimento, que no entanto tem alguma semelhança com àquele adotado nos trabalhos de Weinhold [17].¹ O autor propõe uma função distância

$$dl^2 = \sum_{\alpha=1}^n (\lambda_{\alpha}^B dE^{\alpha})^2 + d\mathcal{U}^2,$$

definida em um espaço \mathbb{R}^{n+1} no qual $\mathcal{U}(E)$ está imerso. Na vizinhança do ponto de equilíbrio $(E_0^{\alpha}, \mathcal{U}_0(E))$ a métrica induzida na "superfície potencial" $n - d$ é

$$g_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha}^B)^2 \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{U}_{\alpha} \mathcal{U}_{\beta},$$

onde

$$\mathcal{U}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial E^{\alpha}} - \lambda_{\alpha}^B$$

representa uma "força termodinâmica generalizada" atuando sobre o sistema em contato com o *reservoir* e caracterizada pela variável termodinâmica intensiva λ_{α}^B . No equilíbrio $\mathcal{U}_{\alpha} = 0$. Esta geometria quando aplicada ao gás ideal fornece a expressão para a curvatura Gaussiana [4]

$$K(S, V) = \begin{vmatrix} f_{rr} & f_{sr} \\ f_{rs} & f_{ss} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T/C_V & -T/\Gamma_V \\ -T/\Gamma_V & 1/V\beta_S \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \left(\frac{P}{R} \right)^2, \quad (11.1)$$

que é positiva definida, como esperado para uma superfície convexa.

O determinante da equação Eq.(11.1) é a matriz de *stiffness* e que de fato decorre da condição de estabilidade da forma quadrática semi-positiva du^2 que na interpretação do autor é comparada à segunda forma fundamental no contexto da geometria Riemanniana. A segunda forma fundamental de fato é proporcional à curvatura e determina o sinal da curvatura Gaussiana, entretanto é bem sabido que a curvatura Gaussiana é definida em como a razão entre o determinante da matriz simétrica associada à segunda forma

¹ Este ainda é um problema em aberto que precisa ser esclarecido, isto será feito oportunamente.

fundamental e a associada à primeira forma fundamental, portanto o motivo pelo qual o autor na referência [4] define a curvatura Gaussiana como na equação Eq. (11.1) não está claro e deve ser justificada ou corrigida!

Já com relação a semelhança dos resultados para a curvatura Gaussiana nula obtida nas referências [7, 11, 17], é que de fato as métricas são equivalentes conforme, e isto decorre que de fato os autores definem a métrica em função das derivadas segundas de U e S nas referências [18] e [11], respectivamente, ao contrário da referência [4] que utiliza as derivadas primeira desta função para construir a métrica. Sendo as métricas equivalentes conforme espera-se, como acontece, que as duas forneçam os mesmos resultados para a curvatura Gaussiana.

Neste trabalho buscou-se construir uma formulação geométrica consistente tanto na descrição Gaussiana ou Riemanniana da termodinâmica de sistemas em equilíbrio. Entretanto dada a não trivialidade do problema. Outro problema encontrado foi o fato de se deparar a um número razoável de literaturas discrepantes nos resultados obtidos quando as formulações propostas são aplicadas a sistemas termodinâmicos simples, optamos por um caminho aparentemente inequívoco e quase que trivial: ou seja fazer a geometria a partir das equações das superfícies no espaço de fase de sistemas termodinâmicos simples, para os quais foram calculados as diversas quantidades geométricas: curvatura Gaussiana, Tensor de Riemann, Escalar de Curvatura, Geodésicas, etc, para em seguida se estender a descrição em um contexto mais geral, ou seja construir uma formulação geométrica da termodinâmica que ao ser aplicada a qualquer sistema termodinâmico em equilíbrio forneça os resultados já obtidos para estes sistemas via métrica induzida e que também reproduzam os resultados já consolidados da termodinâmica clássica.

REFERÊNCIAS

- [1] H. B. Callen. *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, 1st edition, 1960.
- [2] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistic*. John Wiley, 2nd edition, 1985.
- [3] J. Gibbs. *Collected Works*, volume Vol. I. Longmans, Green, 1928.
- [4] R. Gilmore. Lengththermodynamics in the geometry of thermodynamics. *Phys. Rev. A*, 30(4):1994, 1984.
- [5] I. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Elsevier, 7th edition, 2007.
- [6] R. B. Griffiths and J. C. Wheeler. Critical points in multicomponent system. *Phys. Rev. A*, 2:1047, 1970.
- [7] M. Mijatovic and K. Teceviski. Differential geometry of equilibrium thermodynamics. *Phy*, 35(4):1863–1867, 1987.
- [8] S. Novikov, B. A. Dubrovin, and A. T. Fomenko. *Methods and Application Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, 2nd edition, 1992.
- [9] J. D. Nulton and P. Salamon. Geometry of the ideal gas. *Physical Review A*, 31(4):2520–2524, 1985.
- [10] W. Pauli. *Thermodynamics and the Kinect Theory of Gases*, volume 3. MIT Press, 1973.
- [11] G. Ruppeiner. Themodynamics: A riemannian geometric model george. *Phys. Rev. A*, 20(4):1608, 1979.
- [12] L. Tisza. Generalized thermodynamics. *MIT*, 1966.
- [13] Weinhold. Metric geometry and equilibrium thermodynamics i. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2479, 1975.
- [14] Weinhold. Metric geometry and equilibrium thermodynamics. ii. scaling, homogeneity, and generalized gibbs-duhem relations. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2484, 1975.
- [15] Weinhold. Metric geometry and equilibrium thermodynamics. iii. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2488, 1975.
- [16] Weinhold. Metric geometry and equilibrium thermodynamics. iv. vectoralgebraic evaluation of thermodynamic derivatives. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2496, 1975.
- [17] Weinhold. Metric geometry and equilibrium thermodynamics. v. aspects of heterogeneous equilibrium. *The Journal of Chemical Physics*, 65:559, 1976.
- [18] F. Weinhold. Thermodynamics and geometry. *Physics Today*, 23, 1975.