



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

Julio Estefano Augusto Rosa Filho

Controle Robusto H_2 Aplicado ao
Pêndulo Invertido Sujeito a Incertezas

Londrina
2015



Julio Estefano Augusto Rosa Filho

Controle Robusto \mathcal{H}_2 Aplicado ao Pêndulo Invertido Sujeito a Incertezas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação
Especialidade: Controle Avançado

Orientador:
Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic

Londrina, PR
2015

Ficha Catalográfica

Rosa Filho, Julio Estefano Augusto

Controle Robusto \mathcal{H}_2 Aplicado ao Pêndulo Invertido Sujeito a Incertezas. Londrina, PR, 2015. 85 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, PR. Departamento de Engenharia Elétrica

1. Controle Robusto. 2. Desigualdades Matriciais Lineares. 3. Controle Ótimo \mathcal{H}_2 . 4. Incertezas Politópicas. I. Universidade Estadual de Londrina. Centro de tecnologia e Urbanismo. Departamento de Engenharia Elétrica. II Controle Robusto \mathcal{H}_2 Aplicado ao Pêndulo Invertido.

Julio Estefano Augusto Rosa Filho

Controle Robusto \mathcal{H}_2 Aplicado ao Pêndulo Invertido Sujeito a Incertezas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação
Especialidade: Controle Avançado

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic
Depto. de Engenharia Elétrica
Orientador

Prof. Dr. Newton da Silva
Depto. de Engenharia Elétrica
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Depto. de Matemática - CCE- UEL
Universidade Estadual de Londrina

5 de outubro de 2015

Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você
estará fazendo o impossível.

São Francisco de Assis

Agradecimentos

A Deus, pela saúde e perspicácia que tive durante todos esses anos de curso.

À minha família, pais, irmã, irmão, que sempre ficaram do meu lado, fortalecendo-me para vencer mais essa etapa de minha vida.

Aos meus professores e colegas da faculdade de Matemática, e principalmente aos colegas da Engenharia Elétrica, em particular Edno Gentilho Junior e Anderson Ross Biazeto, que sempre estiveram juntos nesse aprendizado.

Ao meu orientador, Dr. Márcio Roberto Covacic, pelo seu apoio, orientação, dedicação e o incentivo que me deu durante esse trabalho.

Ao Professor Dr. Newton da Silva, pelo seu esforço e participação em minha banca examinadora de grande importância em minha formação.

Ao Professor Dr. Paulo Laerte Natti, por ter aceito o convite de participar de minha banca e avaliar esta dissertação.

Ao Professor Dr. Taufik Abrão, pelo seu esforço em acompanhar e ajudar a concluir os últimos passos deste trabalho.

A todos os demais, não mencionados, que de forma direta ou indireta contribuíram para realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, com o objetivo de estudar o equilíbrio de pessoas em cadeiras de rodas, foi utilizada uma lei de controle por realimentação de estados para o modelo de um pêndulo invertido, com o objetivo de estabilizar o sistema e minimizar a sua norma \mathcal{H}_2 . A estratégia de controle desenvolvida foi projetada com base em desigualdades matriciais lineares (LMI's), considerando incertezas politópicas na massa do pêndulo. Para mostrar a eficiência da estratégia de controle desenvolvido, foram realizadas simulações, no MATLAB/SIMULINK, comparando o controle \mathcal{H}_2 , desenvolvido neste trabalho, com a técnica de controle LQR (regulador linear quadrático), analisando, assim, a qualidade desses controladores.

Abstract

In this work, with the aim of studying the balance of people on wheelchairs, a control law by state feedback was used for the model of an inverted pendulum, in order to stabilize the system and minimize its \mathcal{H}_2 norm. The developed control strategy was designed based in linear matrix inequalities (LMI's), considering polytopic uncertainties on the pendulum mass. To show the efficiency of the developed control strategy, simulations were realized, on MATLAB/SIMULINK, comparing the \mathcal{H}_2 control designed in this work, with the linear quadratic regulator (LQR) control technique, analyzing the quality of these controllers.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas

Convenções e Lista de Símbolos

1	Introdução	1
1.1	Motivação e contribuição da dissertação	3
1.2	Objetivo	4
1.3	Organização do trabalho	4
2	Controle da Norma \mathcal{H}_2 com LMI's	5
2.1	Desigualdades de Lyapunov	7
2.2	Normas de sistemas	8
2.3	Sistemas incertos	11
2.3.1	Sistemas com incertezas politópicas	11
2.3.2	Combinação convexa	12
2.3.3	Abordagem politópica	12
2.4	Formulação da lei de controle $u = Kx(t)$ com realimentação de estados usando LMI's	14
2.5	O Problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados	17
2.6	Obtenção do controlador ótimo através da função custo J	22
2.7	Conclusão do capítulo	25

3	Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido	26
3.1	Modelo do pêndulo invertido	27
3.1.1	Posições de equilíbrio do pêndulo	30
3.2	Linearização do sistema	31
3.3	Obtenção da função de transferência	31
3.4	Representação em espaços de estados	33
3.5	Conclusão	35
4	Resultados	36
4.1	Formulação do controle considerando incertezas politópicas	36
4.1.1	Obtenção do controle \mathcal{H}_2	38
4.2	Simulação do sistema não linear em malha aberta e malha fechada	39
4.3	Simulação do pêndulo linearizado considerando incertezas politópicas	45
4.4	Simulação do controle do pêndulo através do método LQR	48
4.5	Conclusão	51
5	Conclusão	52
5.1	Sugestões para trabalhos futuros	53
5.2	Disseminações	53
	Referências	55
	Apêndice A – Código do ganho que minimiza a norma \mathcal{H}_2	57
	Apêndice B – Resultado do código para a obtenção do ganho que minimiza a norma \mathcal{H}_2	59
	Apêndice C – Programação dos blocos fcn para o sistema em malha aberta e fechada	62
	Apêndice D – Programação dos fcn para o sistema linearizado em malha fechada	63

Apêndice E – Código no bloco do <i>Embedded MATLAB Function</i>	64
Apêndice F – Código para a obtenção do ganho do controlador pela técnica LQR	65
Apêndice G – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa mínima	66
Apêndice H – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa mínima	68
Apêndice I – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa máxima	71
Apêndice J – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa máxima	73
Apêndice K – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo mínima	76
Apêndice L – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo mínima	78
Apêndice M – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo máxima	81
Apêndice N – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo máxima	83

Lista de Figuras

2.1	Representação de uma combinação convexa.	12
2.2	Representação dos vértices de um politopo.	13
2.3	Conjunto convexo e não convexo.	13
2.4	Diagramas de blocos generalizado da planta.	17
3.1	Pêndulo invertido sobre carro móvel.	28
3.2	Diagrama de corpo livre para coordenadas.	28
3.3	Diagrama de forças perpendiculares ao pêndulo.	29
3.4	Momento de inércia no centro do pêndulo.	30
3.5	Posições do pêndulo invertido.	31
4.1	Sistema não linear em malha aberta.	40
4.2	Posição do carro móvel.	40
4.3	Ângulo do pêndulo em malha aberta.	41
4.4	Sistema não linear em malha fechada.	42
4.5	Posição do carro móvel considerando o sistema não linear em malha fechada.	43
4.6	Ângulo do pêndulo considerando o sistema não linear em malha fechada.	44
4.7	Sinal de controle considerando o sistema não linear em malha fechada.	44
4.8	Planta para o sistema linearizado em malha fechada.	45
4.9	Posição do carro considerando o ganho do controlador para a massa do pêndulo mínima e máxima.	46
4.10	Ângulo do pêndulo considerando o ganho do controlador para a massa do pêndulo mínima e máxima.	47
4.11	Sinal de controle para o pêndulo.	47

4.12	Modelo de controle do pêndulo usando sistema regulador ótimo. .	48
4.13	Posição do carro móvel considerando os dois vértices do politopo.	49
4.14	Ângulo do pêndulo considerando os dois vértices do politopo. . . .	50

Lista de Tabelas

4.1	Norma \mathcal{H}_2 obtida para os valores mínimo e máximo da massa do pêndulo, considerando as estratégias de controle \mathcal{H}_2 e LQR. . . .	51
-----	--	----

Lista de Abreviaturas

LMI *Linear Matrix Inequality* (Desigualdade Matricial Linear)

LMI's *Linear Matrix Inequalities* (Desigualdades Matriciais Lineares)

LQR *Linear Quadratic Regulator* (Regulador Linear Quadrático)

Convenções e Lista de Símbolos

Os seguintes símbolos serão utilizados:

símbolo	descrição
A'	transposta de uma matriz constante A
P	matriz de Lyapunov
$x(t)$	vetor de estados do sistema
$x(0)$	condição inicial do sistema
G	matriz definida positiva
t	tempo
x_i	i-ésima variável de decisão
F_i	matrizes simétricas
$Q(x)$	matriz simétrica relacionada ao complemento de Schur
$S(x)$	matriz simétrica relacionada ao complemento de Schur
$Q(x)$	matriz simétrica e inversível relacionada ao complemento de Schur
\in	símbolo de pertencente a
\exists	símbolo de existe
\forall	símbolo de para qualquer
$V(x)$	função de Lyapunov
$\dot{V}(x)$	derivada da função de Lyapunov no tempo
β_x	vizinhança do ponto de equilíbrio
$\dot{x}(t)$	derivada do vetor de estados do sistema
$u(t)$	vetor de controle
$w(t)$	entrada de perturbação
$z(t)$	saída controlada
$y(t)$	saída medida
I	matriz identidade
B_w	matriz de entrada do sistema relacionada ao distúrbio
$X(s)$	transformada de Laplace da variável de estado $x(t)$
$W(s)$	transformada de Laplace da entrada de distúrbio $w(t)$
$H(s)$	função de transferência de um sistema

continua...

símbolo	descrição
$\ \mathcal{H}(s)\ _2^2$	norma \mathcal{H}_2 de um sistema ao quadrado
Tr	função traço
$h(t)$	resposta impulsiva de um sistema
\mathcal{L}^{-1}	transformada inversa de Laplace
exp	função exponencial
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	conjunto das matrizes reais com m linhas e n colunas
\mathfrak{R}	conjunto dos números reais
\mathfrak{R}^n	conjunto dos números reais de n-ésima ordem
A	matriz característica do sistema sem incertezas
B	matriz de entrada do sistema sem incertezas relacionada à entrada de controle
C	matriz de saída do sistema sem incertezas relacionada à saída medida
D	matriz de transmissão direta do sistema sem incertezas
C_y	matriz de saída do sistema sem incertezas relacionada à saída controlada
B_w	matriz de entrada do sistema sem incertezas relacionada ao distúrbio
A_i	i-ésima matriz característica do sistema incerto
B_i	i-ésima matriz de entrada do sistema incerto relacionada à entrada de controle
C_i	i-ésima matriz de saída do sistema incerto relacionada à saída medida
D_i	i-ésima matriz de transmissão direta do sistema incerto
C_{yi}	i-ésima matriz de saída do sistema incerto relacionada à saída controlada
B_{wi}	i-ésima matriz de entrada do sistema incerto relacionada ao distúrbio
$A(\alpha)$	matriz característica do sistema incerto
$B(\alpha)$	matriz de entrada do sistema incerto relacionada à entrada de controle
$C(\alpha)$	matriz de saída do sistema incerto relacionada à saída medida
$D(\alpha)$	matriz de transmissão direta do sistema incerto

continua...

símbolo	descrição
$C_y(\alpha)$	matriz de saída do sistema incerto relacionada à saída controlada
$B_w(\alpha)$	matriz de entrada do sistema incerto relacionada ao distúrbio
α_i	parâmetro incerto
τ_i	elemento do conjunto do politopo
$\delta_{i\min}, \delta_{i\max}$	valores mínimo e máximo de um parâmetro incerto δ_i
$\alpha_{i\min}$	extremo inferior da região de um conjunto convexo
$\alpha_{i\max}$	extremos superior da região de um conjunto convexo
K	matriz de ganho constante
P^{-1}	matriz inversa de P
L	matriz representada pelo produto KP^{-1}
X	matriz inversa de P
A_f	matriz característica do sistema de malha fechada
C_f	matriz de saída do sistema de malha fechada
$\min \text{Tr}$	minimização da função traço
$\ T_{zw}\ _2$	norma \mathcal{H}_2 da função de transferência entre a saída medida e o distúrbio.
J	função custo
Q	matriz hermitiana definida positiva
R	matriz hermitiana definida positiva
M	massa do carro móvel
m	massa do pêndulo
ℓ	comprimento do pêndulo entre o seu centro de massa e o ponto de contato com o carro móvel
I	momento de inércia da barra do pêndulo
g	aceleração da gravidade
F	força aplicada ao suporte móvel
x	eixo de coordenadas
θ	ângulo do pêndulo com a vertical para baixo
φ	ângulo do pêndulo com a vertical para cima
\dot{x}	velocidade escalar do carro móvel
\ddot{x}	aceleração escalar do carro móvel
F_x	força na direção horizontal
$\dot{\theta}$	velocidade angular do pêndulo

continua...

símbolo	descrição
$\ddot{\theta}$	aceleração angular do pêndulo
$\Phi(s)$	transformada de Laplace do ângulo φ
$F(s)$	transformada de Laplace da força sobre o carro
δ	variação de qualquer parâmetro incerto
f_o	função objetivo
v_d	variável de decisão
K_{\max}	ganho do controlador para m máximo
K_{\min}	ganho do controlador para m mínimo

1 Introdução

O desenvolvimento de trabalhos envolvendo controladores para sistemas sujeitos a incertezas tem sido muito estudado ultimamente. Isso se deve as boas características do controle robusto associadas à capacidade do controlador em assegurar a estabilidade e o desempenho do sistema.

O estudo sobre estabilidade de sistemas sempre foi um campo muito importante e de grande destaque, sendo que os primeiros trabalhos começaram a surgir a partir da teoria de Lyapunov publicada em 1893. A partir desses trabalhos, começam a surgir novas linhas de pesquisas para controladores, que exploram da melhor maneira possível as propriedades em malha fechada e com aplicações das mais variadas técnicas (SANTOS, 2005). Alguns problemas matemáticos relacionados à análise de desempenho de sistemas de controle lineares e à síntese de controladores, cujas formulações baseiam-se nas normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , tiveram grande atividades de pesquisa à partir das contribuições fundamentais de (YOULA; JABR; BONGIORNO, 1976a), (YOULA; JABR; BONGIORNO, 1976b) e (ZAMES, 1981). Um exemplo disso é a realização do controle de um pêndulo invertido de duas rodas, usando o robô LEGO, realizado por (KANADA; WATANABE; CHEN, 2011), onde o controle robusto \mathcal{H}_2 é realizado considerando algumas incertezas que aparecem no processo de modelagem do sistema.

O pêndulo invertido é um sistema mecânico muito útil no estudo de controle de sistemas instáveis como o controle de posição de veículos espaciais na fase de lançamento (OGATA, 2010). Em alguns modelos de controle, se conhece precisamente o sistema, porém a consideração das incertezas no modelo não está presente. No entanto, na maioria dos casos, as incertezas sempre aparecem. As incertezas que afetam um sistema podem ter sua origem nos erros de modelagem, nas incertezas sobre os parâmetros por causa da precisão, nas aproximações de modelagem tais como linearização ou até mesmo em variações na massa do sistema.

As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ podem fornecer uma boa medida de desempenho na avaliação de controladores e também a possibilidade da obtenção de uma ma-

triz de ganho que estabiliza o sistema e minimiza a sua norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Em (GONÇALVES; PALHARES; TAKAHASHI, 2004), se desenvolve o problema de otimização da norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , por realimentação de estados, e em (GONÇALVES; PALHARES; TAKAHASHI, 2006) o uso dos controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , utilizados para sistemas incertos. Uma das formas de obter a norma \mathcal{H}_2 é através das Desigualdades Matriciais Lineares (LMI's, do inglês Linear Matrix Inequalities). Os problemas de controle ótimo \mathcal{H}_2 podem ser aplicados a sistemas lineares contínuos sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politópicas ¹, e o controle obtido com essa técnica pode ser feito por realimentação de estados ou por realimentação da saída. Os problemas de otimização formulados em uma restrição na norma \mathcal{H}_2 constituem em determinar um controlador por realimentação de estado que minimize esta norma \mathcal{H}_2 .

A teoria de controle \mathcal{H}_2 foi bastante estudada entre os anos de 60 e 80 (DOYLE, 1978). A teoria de controle robusto surgiu na década de 80 envolvendo o conceito de robustez e estabilidade. Ela representa um grande passo para os estudos de sistemas de controle, tendo em vista que uma planta não pode ser perfeitamente representada por um modelo matemático simples, ou seja, sempre vai apresentar algum tipo de incerteza, a não ser que o modelo seja idêntico ao real. A partir dos anos 80, alguns resultados significativos e inovadores aparecem nesta área e surge a teoria de controle \mathcal{H}_2 (DOYLE, 1989). Por outro lado, a formulação \mathcal{H}_2 permite tratar o problema de controle a custo garantido via LMI's para os sistemas sujeitos a incertezas do tipo politópicas (GEROMEL; PERES; SOUZA, 1992).

Neste trabalho, será abordado o conceito de estabilidade segundo Lyapunov para todo o conjunto aceitável das incertezas através da abordagem politópica, possibilitando também a resolução dos problemas de controle \mathcal{H}_2 . O projeto de controladores para sistemas sujeitos a incertezas de parâmetros, tem sido um dos objetivos da teoria de controle robusto. Desenvolvido a partir de um modelo matemático, através das Leis de Newton que descrevem o movimento do pêndulo (BUGEJA, 2003), o trabalho consiste em desenvolver um controlador que minimize a norma \mathcal{H}_2 , e estabilize o pêndulo invertido montado sobre uma plataforma móvel. No desenvolvimento do controle \mathcal{H}_2 , é adotada uma abordagem por LMI's, e obtido com essa técnica um ganho do controlador que estabiliza o sistema. Para tal modelo foi necessário entender o funcionamento do seu movimento dinâmico para então formular as equações que descrevem as posições do carro móvel e a

¹Um sistema com incertezas politópicas é um sistema do tipo $\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u$, no qual $A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i$, $B(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, e os vértices $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$, são conhecidos.

variação do ângulo. O mesmo procedimento foi feito no sistema de controle para obtenção dos ganhos do controlador que garantissem a minimização da norma \mathcal{H}_2 do sistema.

Neste trabalho será abordado o controle \mathcal{H}_2 para sistemas contínuos, com incertezas paramétricas do tipo politópicas. O desenvolvimento do controle incerto é fundamentado na teoria de Lyapunov, que garante a verificação da condição de estabilidade. Os procedimentos para a validação do controle foram feitos em análises e condições matemáticas, simuladas computacionalmente com o software MATLAB no ambiente SIMULINK.

1.1 Motivação e contribuição da dissertação

No ramo da Engenharia, o desenvolvimento de novas teorias de controle para a estabilidade de sistemas sempre foi um campo de estudo muito importante, principalmente para o avanço de novas tecnologias envolvendo sistemas de controle avançado.

Considerando-se que os primeiros passos para contribuições significativas na área de controle surgem com os primeiros trabalhos sobre equações diferenciais, pode-se afirmar que um resultado bastante significativo neste campo foi aquele de Lyapunov, publicado em 1893 (SANTOS, 2005). Desde então, muitos trabalhos foram realizados a fim de estabelecer métodos de controle que explorem da melhor maneira possível as propriedades do controle em malha fechada (GONÇALVES; PALHARES; TAKAHASHI, 2004), (GABRIEL; SOUZA; GEROMEL, 2014).

Outros tipos de controle obviamente, também apresentam sua importância particular, dentre os quais destaca-se o Regulador Linear Quadrático (LQR, do inglês Linear Quadratic Regulator), onde a matriz ganho é obtida por meio da otimização de uma função custo J (OGATA, 2010).

A teoria de controle robusto surgiu na década de 80 envolvendo o conceito de robustez em estabilidade, representando dessa forma um marco para os estudos de sistemas de controle (DOYLE, 1978).

Nessa época, surgiu também o interesse em calcular o controlador que resulta na minimização da norma \mathcal{H}_2 de uma função de transferência, representando um critério de desempenho, sujeito a uma determinada restrição (GEROMEL; PERES; SOUZA, 1992).

Nesta pesquisa, é apresentado o projeto de um controlador \mathcal{H}_2 aplicado ao

modelo de um pêndulo invertido, onde é considerada a presença de incertezas paramétricas do tipo politópicas.

No desenvolvimento do controle \mathcal{H}_2 , é adotada uma abordagem por LMI's, e com essa técnica é obtido um ganho do controlador que estabiliza o sistema e minimiza a norma \mathcal{H}_2 . Os procedimentos para a validação do controle foram feitos por meio de análises e condições matemáticas e simulações computacionais com o software MATLAB. No sistema de controle do pêndulo invertido, foi considerado como parâmetro incerto a massa do pêndulo, isso pode ser equiparado a um sistema em que pessoas se equilibram em um carro móvel para se locomoverem, onde o sistema de controle deve funcionar para diferentes pessoas, ou ainda ser utilizado em aplicações práticas de equilíbrio de pessoas em uma cadeira de rodas, onde cada usuário possui uma massa diferente, e o modelo de controle aplicado é praticamente o mesmo, tendo portanto uma grande importância em certas aplicações de controle.

1.2 Objetivo

Desenvolver e aplicar um sistema de controle em malha fechada ao sistema de um pêndulo invertido e manter o pêndulo equilibrado na posição vertical, mesmo quando perturbações são aplicadas ao sistema. Para isso, será considerada uma abordagem politópica e a otimização de determinados índices de desempenho do sistema de controle. O critério de desempenho considerado neste trabalho é a norma \mathcal{H}_2 .

1.3 Organização do trabalho

Esse trabalho divide-se da seguinte forma: no Capítulo 2, apresenta uma breve descrição sobre as LMI's, e a importante teoria de Lyapunov; também são apresentados os conceitos da abordagem politópica, e o sistema de controle por \mathcal{H}_2 aplicado a sistemas por realimentação de estados. O Capítulo 3 apresenta o modelo do pêndulo invertido com sua representação em espaços de estados; aqui é visto o sistema não-linear e também a linearização do mesmo. No Capítulo 4 são encontradas as matrizes que representam os vértices do politopo do parâmetro variante, e são apresentados os resultados das simulações do sistema de controle através do programa SIMULINK. No Capítulo 5, é realizada a conclusão desse trabalho e algumas propostas para trabalhos futuros. Por fim, nos Apêndices, são mostrados os códigos que geraram os ganhos do controlador.

2 Controle da Norma \mathcal{H}_2 com LMI's

Neste capítulo será feita uma descrição sobre a teoria de Lyapunov, enfatizando seus principais pontos. Serão apresentadas, também, algumas definições para sistemas de controle e formulações de controle \mathcal{H}_2 usando LMI's.

Atualmente, as LMI's podem ser consideradas como uma das mais importantes ferramentas dentro da teoria de controle, em particular no controle robusto. O controle robusto evoluiu consideravelmente ao longo das últimas décadas, apresentando soluções para vários tipos de problemas, como por exemplo, análise e performance de sistemas lineares incertos (BOYD et al., 1994). Boa parte dos estudos estão relacionados com análises de estabilidade e especificações de índices de desempenho, como, por exemplo, taxa de decaimento e robustez.

Segundo (BOYD et al., 1994), a história das LMI's na análise de sistemas dinâmicos remonta há mais de 100 anos, começando por volta de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje é conhecido por teoria de Lyapunov. Naquela época, o teorema de Lyapunov já podia ser formulado diretamente em termos de LMI's. Na década de 1980 começam a surgir novos caminhos para que problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos como apresentados em (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989). As LMI's tornaram-se, com o surgimento de pacotes computacionais, uma excelente ferramenta na procura de soluções para os mais diversos problemas de controle.

Na década de 60, com o surgimento de computadores de alta velocidade de processamento, tornou-se possível a análise de sistemas complexos. Para trabalhar com a complexidade de sistemas modernos e atender a rigorosas exigências em aplicações de controle cada vez mais exatas, surgem as técnicas de projeto formuladas na teoria de controle moderno (SANTOS, 2005). Em (ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2004), por exemplo, é realizado um controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com modificações de zeros para o problema de rastreamento usando LMI's, considerando a existência de um sinal de entrada de perturbação ou distúrbio na planta.

A vantagem deste método é que as LMI's quando factíveis podem ser resolvidas facilmente através de programas computacionais como o Matlab (GAHINET et al., 1995).

O uso das LMI's em sistemas dinâmicos teve início a partir de 1893, quando Lyapunov publicou seu trabalho conhecido hoje por teoria de Lyapunov. Ele mostrou que um sistema descrito pela equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.1)$$

é estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva P tal que:

$$A'P + PA < 0. \quad (2.2)$$

As condições $P > 0$, a qual significa que P é uma matriz simétrica definida positiva, e $A'P + PA < 0$, onde A' representa a matriz transposta de A , são o que se conhece hoje por desigualdades de Lyapunov em P , que é uma forma especial de uma LMI. Lyapunov mostrou que uma LMI é factível se e somente se a matriz A é estável, ou seja, todas as trajetórias de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$, ou, equivalentemente, quando todos os autovalores de A têm parte real negativa. Para se resolver essa LMI, toma-se qualquer $G > 0$ e resolve-se a equação de Lyapunov $A'P + PA = -G$.

Numericamente, os problemas de LMI's podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (GAHINET et al., 1995). Com isso, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs equivale a encontrar soluções para o problema original. As LMI's (BOYD et al., 1994) surgiram como uma grande ferramenta de projeto na engenharia de controle. Os três principais fatores que fazem das LMIs uma técnica atraente são:

- Uma grande variedade de especificações de projetos e restrições podem ser expressas como LMI's;
- Uma vez formulado em termos de LMI's, um problema pode ser resolvido, de forma exata, através de algoritmos eficientes de otimização convexa os LMI's solvers;
- Embora faltem soluções analíticas para a maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos, eles são frequentemente tratáveis na estrutura de LMI's.

Uma LMI (AGUIRRE, 2007) é qualquer restrição do tipo:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.3)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^m$ é um vetor de escalares desconhecido, x_i as variáveis de decisão ou de otimização e $F_i = F_i' \in \mathfrak{R}^n, i = 0, \dots, m$ são matrizes simétricas dadas. O símbolo de desigualdade em (2.3) significa que $F(x)$ definida positiva, ou seja, todos os autovalores de $F(x)$, que são reais, são positivos.

Algumas desigualdades não lineares (convexas) podem ser convertidas para a forma de LMI usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) ou seja, a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.4)$$

na qual, $Q(x) = Q(x)', R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ depende de forma afim de x , é equivalente a:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0. \quad (2.5)$$

2.1 Desigualdades de Lyapunov

Considere um sistema dinâmico linear autônomo, invariante no tempo dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.6)$$

onde x representa os estados do sistema e A é uma matriz constante no tempo.

Fazendo uma análise mais genérica, a teoria de Lyapunov garante que, para sistemas invariantes no tempo, o ponto de equilíbrio do sistema é estável se existe uma função escalar $V(x)$ tal que:

$$\begin{aligned} V(x) &> 0, \\ \dot{V}(x) &< 0, \\ \forall x &\neq 0 \in \beta_x, \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo que β_x representa uma vizinhança do ponto de equilíbrio (origem)(AGUIRRE, 2004).

Para verificar a estabilidade de um sistema linear, deve-se obter uma função de Lyapunov $V(x) > 0$ tal que $\dot{V}(x) < 0$. Considere uma função quadrática $V(x) = x'Px$, cuja a derivada no tempo $\dot{V}(x)$ é dada por:

$$\dot{V} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x. \quad (2.8)$$

Dessa forma para que a condição de Lyapunov seja satisfeita deve-se ter que $V(x) > 0$ para $\forall x \neq 0$ e $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$. Assim:

$$V(x) > 0 \leftrightarrow P = P' > 0, \quad (2.9)$$

e para a sua derivada,

$$\dot{V}(x) < 0 \leftrightarrow (A'P + PA) < 0. \quad (2.10)$$

Logo, uma condição necessária e suficiente para este sistema ser estável é a existência de uma matriz P tal que:

$$P = P' > 0, \quad (A'P + PA) < 0. \quad (2.11)$$

A relação $A'P + PA < 0$ é chamada de desigualdade de Lyapunov em P , que é também conhecida como uma forma especial de uma LMI, e que pode ser resolvida analiticamente.

2.2 Normas de sistemas

Um dos principais objetivos dos sistemas de controle é alcançar ou otimizar certas especificações de desempenho, como por exemplo, garantir a estabilidade interna e minimizar o consumo de energia do sistema (BOYD et al., 1994).

Considere o sistema dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ y(t) &= C_y x(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $z(t) \in \mathfrak{R}^q$, e $y(t) \in \mathfrak{R}^r$ representam respectivamente os vetores de estado, da entrada de controle, de perturbação, de saída controlada e a saída medida e A , B , C , D , C_y e B_w são matrizes de dimensões compatíveis com o sistema. Dado o sistema (2.12), e aplicando a Transformada de Laplace no mesmo tem-se:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) + B_w W(s), \quad (2.13)$$

$$Z(s) = CX(s) + DU(s), \quad (2.14)$$

$$Y(s) = C_y X(s). \quad (2.15)$$

Considerando o sistema sem realimentação, ou seja, a entrada de controle $u(t) =$

0, dessa forma, a transformada de Laplace do sinal de controle é dado por $U(s) = 0$, assim;

$$sX(s) = AX(s) + B_w W(s), \quad (2.16)$$

$$Z(s) = CX(s), \quad (2.17)$$

$$Y(s) = C_y X(s). \quad (2.18)$$

Escrevendo agora a matriz de transferência da saída, pela entrada de distúrbio, obtém-se:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B_w \quad (2.19)$$

Uma maneira de obter certas especificações de um projeto de controle é através da norma \mathcal{H}_2 . A norma \mathcal{H}_2 é normalmente utilizada para especificar critérios de performance e desempenho em sistemas com perturbações ou distúrbios (SANTOS, 2005).

Definição 1 (BOYD et al., 1994). Define-se a norma \mathcal{H}_2 como sendo:

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(H(j\omega)'H(j\omega))d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(h(t)'h(t))dt, \quad (2.20)$$

onde Tr representa a função traço e $h(t)$ a resposta impulsiva. Aplicando a transformada inversa de Laplace em (2.19), tem-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \begin{cases} C \exp(At)B_w, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

O Lema 1, apresentado em (DUAN, 2013), estabelece condições para a norma \mathcal{H}_2 .

Lema 1 (DUAN, 2013). Considere $G(s)$ dado em (2.19). As condições a seguir são verdadeiras:

1. $\|H(s)\|_2$ existe se e somente se A é estável.
2. Quando A é estável, então:

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(CXC'), \quad (2.22)$$

sendo $X > 0$ a única solução para a equação matricial de Lyapunov:

$$AX + XA' + B_w B_w' = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(B_w' Y B_w), \quad (2.24)$$

sendo $Y > 0$ a única solução para a seguinte equação matricial de Lyapunov:

$$A'Y + YA + C'C = 0. \quad (2.25)$$

Prova (DUAN, 2013): Pelo lema de Parseval,

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)(H(j\omega))' d\omega \right) \quad (2.26)$$

$$= \text{Tr} \int_0^{\infty} (Ce^{At}B_w)(Ce^{At}B_w)' dt. \quad (2.27)$$

Dessa forma, $\|H(s)\|_2$ existe se e somente se A é estável. Assim a primeira conclusão é provada.

Assuma agora A estável, então:

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr} \int_0^{\infty} Ce^{At}B_wB_w'e^{A't}C' dt \quad (2.28)$$

$$= \text{Tr}(CXC'), \quad (2.29)$$

onde

$$X = \int_0^{\infty} e^{At}B_wB_w'e^{A't} dt \quad (2.30)$$

é a solução da equação matricial de Lyapunov (2.23), tendo em vista a proposição (2.19). Simultaneamente, quando A é estável, tem-se:

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr} \int_0^{\infty} B_w'e^{A't}C'Ce^{At}B_w dt \quad (2.31)$$

$$= \text{Tr}(B_w'YB_w) \quad (2.32)$$

onde

$$Y = \int_0^{\infty} e^{A't}C'Ce^{At} dt \quad (2.33)$$

é solução da equação matricial de Lyapunov (2.25) tendo em vista a proposição (2.19). Assim a segunda conclusão é verdadeira.

Assim, a norma \mathcal{H}_2 pode ser calculada por meio de um procedimento convexo de otimização, ou seja:

$$\begin{aligned} & \min \text{Tr}(B_w'PB_w) \\ & \text{sujeito a : } \begin{cases} P = P' > 0 \\ A'P + PA + C'C \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3 Sistemas incertos

2.3.1 Sistemas com incertezas politópicas

Em sistemas de controle, é comum a existência de incertezas devido ao desconhecimento de parâmetros. A caracterização dessas incertezas pode ser feita através de modelos politópicos², onde é considerada a presença de matrizes incertas que formam um conjunto convexo.

Considere um sistema linear com incertezas do tipo politópicas na planta, e que seja descrito na forma de variáveis de estado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t), \\ z(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t), \\ y(t) &= C_y(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo, $A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C(\alpha) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$, $B_w(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$, $D(\alpha) \in \mathfrak{R}^{q \times m}$, e $C_y(\alpha) \in \mathfrak{R}^{r \times r}$ matrizes do sistema incerto, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ é o vetor de saída medida, $w(t) \in \mathfrak{R}^p$ entrada relacionada ao distúrbio, $z(t) \in \mathfrak{R}^q$ a saída controlada e $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada de controle.

As matrizes $A(\alpha)$, $B(\alpha)$ e $C(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $D(\alpha)$ e $C_y(\alpha)$ são formadas pela representação dos vértices do politopo, onde os vértices do politopo³ são os possíveis valores que a matriz com incerteza pode assumir através de uma combinação convexa dos valores extremos assumidos pelas incertezas, podendo ser descritas por:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B_i, \quad B_w(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B_{wi}, \\ C(\alpha) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i C_i, \quad D(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i D_i, \quad C_y(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i C_{yi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $i = 1, 2, \dots, q$, no qual q é dado pela relação $q = 2^n$, onde n representa o número de parâmetros incertos, $A_i, B_i, B_{wi}, C_i, D_i$, e C_y são matrizes constantes, e α_i são variáveis incertas tais que:

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad e \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1. \quad (2.37)$$

²Os modelos politópicos, são modelos formulados e estruturados através de teorias da abordagem politópica.

³Um politopo é a região definida por um conjunto finito de vértices, onde todo elemento no politopo pode ser gerado pela combinação convexa dos seus vértices.

2.3.2 Combinação convexa

Considere S um conjunto e seja $x_1, \dots, x_n \in S$. Se $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ para um conjunto de números reais não negativos com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, então $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ é denominado de combinação convexa de x_1, \dots, x_n .

Considere n pontos x_1, \dots, x_n pertencente ao conjunto S , então para o conjunto de todas as combinações convexas de x_1, \dots, x_n é também convexo. A Figura 2.1 mostra dois casos de combinação convexa, com dois e três vértices respectivamente.

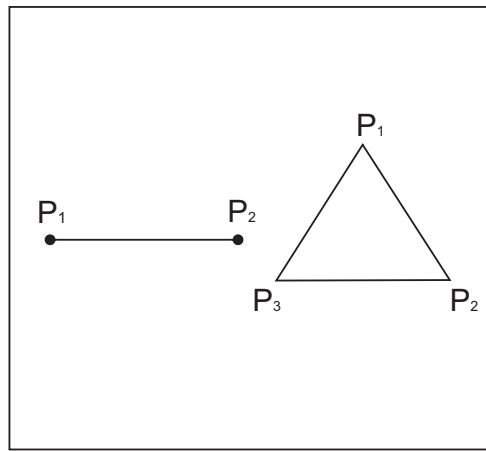


Figura 2.1: Representação de uma combinação convexa.
Fonte: Adaptado de (LEITE, 2012).

2.3.3 Abordagem politópica

Considere o seguinte conjunto representado por:

$$\tau \in T = \{\tau_i : \delta_{i \min} \leq \tau_i \leq \delta_{i \max}, i = 1, \dots, q\} \quad (2.38)$$

onde τ é o conjunto do politopo com 2^q vértices, q é o número de parâmetros incertos e $\delta_{i \min} \leq \tau_i \leq \delta_{i \max}$ são os extremos conhecidos dos intervalos do conjunto.

Para ilustrar o conceito, suponha um sistema com dois parâmetros incertos τ_1 e τ_2 , que pertencem, respectivamente, aos intervalos $-\alpha_1 \leq \tau_1 \leq \alpha_1$ e $-\alpha_2 \leq \tau_2 \leq \alpha_2$.

Assim, os vértices do politopo fica representado pela Figura 2.2.

Definição 2 (SLOTINE; LI, 1991). Um conjunto S em um espaço vetorial é dito convexo se,

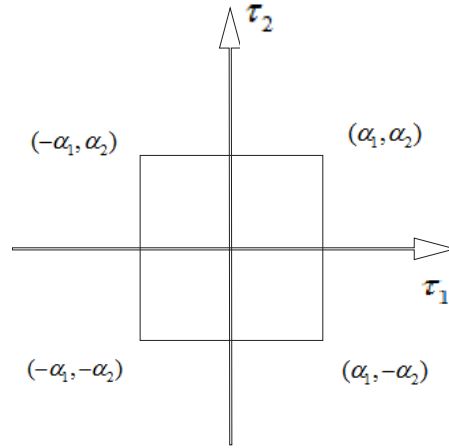


Figura 2.2: Representação dos vértices de um politopo.
Fonte: Adaptado de (LEITE, 2012).

$$[x_1, x_2 \in S] \Rightarrow \{x = \alpha x_i + (1 - \alpha)x_j \in S \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]\} \quad (2.39)$$

Em termos geométricos, isto indica que, para dois pontos, quaisquer de um conjunto convexo, o segmento de reta que conecta estes dois pontos também pertence ao conjunto conforme mostra a Figura 2.3.

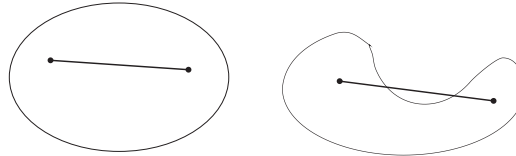


Figura 2.3: Conjunto convexo e não convexo.
Fonte: Adaptado de (MOZELLI, 2008).

Pela teoria de conjuntos tem-se que todo conjunto afim será sempre convexo. Assim o conjunto solução de uma LMI sendo afim é também convexo (BOYD et al., 1994).

A característica de convexidade é uma das mais importantes propriedades das LMI's, pois facilita a busca de solução para sistemas incertos. Para verificar a estabilidade de um sistema onde a matriz A apresenta um parâmetro incerto, faz-se necessário testar a condição de Lyapunov para todos os valores de $\tau \in T$, ou seja, encontrar uma matriz positiva definida P tal que:

$$\forall \tau \in T : A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0, \quad (2.40)$$

sendo $A(\alpha) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$.

Este é um problema de difícil solução, o que tornaria a desigualdade muito complexa em aplicações práticas. No entanto considerando a matriz $A(\alpha)$ afim em α e como todo conjunto afim ⁴ será sempre convexo e aparece de forma linear na inequação de Lyapunov, pode-se pela propriedade de convexidade ⁵ (SLOTINE; LI, 1991), testar a condição acima apenas para os vértices da região do conjunto convexo, ou seja:

$$\begin{aligned} A(\alpha_{1 \min}, \alpha_{2 \min}, \dots, \alpha_{q \min})'P + PA(\alpha_{1 \min}, \alpha_{2 \min}, \dots, \alpha_{q \min}) &< 0, \\ A(\alpha_{1 \min}, \alpha_{2 \min}, \dots, \alpha_{q \max})'P + PA(\alpha_{1 \min}, \alpha_{2 \min}, \dots, \alpha_{q \max}) &< 0, \\ &\vdots \\ A(\alpha_{1 \max}, \alpha_{2 \max}, \dots, \alpha_{q \max})'P + PA(\alpha_{1 \max}, \alpha_{2 \max}, \dots, \alpha_{q \max}) &< 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.4 Formulação da lei de controle $u = Kx(t)$ com realimentação de estados usando LMI's

Considere o seguinte sistema descrito por equações na forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}, \quad (2.42)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ representa a saída de desempenho do sistema, A , B e C são matrizes de dimensões compatíveis com o sistema e $u(t)$ é a entrada de controle.

Seja K uma matriz de realimentação de estados, de modo que o sinal de controle por realimentação de estados possa ser descrito por $u = Kx(t)$. Assim, o sistema em malha fechada é expresso por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Segundo a condição de estabilidade de Lyapunov este sistema será estável se

⁴Um conjunto Ω é afim se $\sigma x + (1 - \sigma)y \in \Omega$ para todos x e $y \in \Omega$ e todo $\sigma \in \mathfrak{R}$.

⁵Um politopo descrito por três vértices por exemplo, $\rho = \{v_1, v_2, v_3\}$, tem-se que qualquer ponto $p \in \rho$ pode ser escrito através da combinação convexa dos vértices $\rho = \sum_{i=1}^3 \alpha_i v_i$, $\alpha_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$. Esta propriedade de convexidade é suficiente para que se possa formular o problema de estabilidade de um sistema incerto verificando a estabilidade em um politopo e usando a teoria de Lyapunov.

$\exists P > 0$ tal que:

$$V(x) = x'Px > 0, \quad (2.44)$$

e $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$. Derivando (2.44) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x}. \quad (2.45)$$

Substituindo (2.43) em (2.45) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= [(A + BK)x]'Px + x'P(A + BK)x \\ &= x'(A + BK)'Px + x'PAx + x'PBKx \\ &= x'A'Px + x'K'B'Px + x'PAx + x'PBKx \\ &= x'(A'P + K'B'P + PA + PBK)x \\ &= A'P + PA + K'B'P + PBK < 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Multiplicando (2.45) em ambos os lados por P^{-1} , tem-se:

$$P^{-1}V(x)P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BKP^{-1} < 0. \quad (2.47)$$

Fazendo $L = KP^{-1}$ e $X = P^{-1}$, têm-se as seguintes desigualdades:

$$XA' + AX + L'B' + BL < 0, \quad (2.48)$$

$$X^{-1} > 0. \quad (2.49)$$

Para que a equação (2.49) seja uma LMI, deve-se multiplicar ambos os lados por X , encontrando-se as seguintes LMI's.

$$XA' + AX + L'B' + BL < 0, \quad (2.50)$$

$$X > 0. \quad (2.51)$$

Para obter a lei de controle, deve-se primeiramente encontrar uma solução factível de (2.50) e (2.51). Em nosso sistema, o conjunto de LMI's deve atender a todos os valores dentro dos vértices ao mesmo tempo.

Considere agora o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo:

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i A_i \text{ e } B(\alpha) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B_i \text{ onde } \sum_{i=1}^q \alpha_i = 1, \quad (2.53)$$

com q o número de vértices do politopo e a lei de controle $u(t) = Kx(t)$. Substi-

tuindo (2.53) em (2.50) tem-se que:

$$\begin{aligned} XA(\alpha)' + A(\alpha)X + L'B(\alpha)' + B(\alpha)L &< 0, \\ X &> 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

ou

$$\begin{aligned} X \sum_{i=1}^q \alpha_i A_i' + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i A_i \right) X + L' \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i B_i \right)' + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i B_i \right) L &< 0, \\ X &> 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

De acordo com a equação (2.36) tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \alpha_i X A_i' + \sum_{i=1}^q \alpha_i A_i X + \sum_{i=1}^q \alpha_i B_i L + \sum_{i=1}^q \alpha_i L' B_i' &< 0, \\ \sum_{i=1}^q \alpha_i (X A_i' + A_i X + B_i L + L' B_i') &< 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do sistema é que:

$$\begin{aligned} X A_i' + A_i X + B_i L + L' B_i' &< 0 \text{ para } \forall_i i = 1, \dots, q, \\ \text{e } X &> 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

sejam factíveis.

As condições (2.57) correspondem às condições do Teorema 1, dado em (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989) considerando que não há incerteza na matriz $B(\alpha)$.

Teorema 1 (BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989). O sistema linear dado por:

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.58)$$

sendo $A(\alpha)$ dado em (2.53) e $B(\alpha) = \sum_{i=1}^q B_i$ é quadraticamente estável se, e somente se, existem uma matriz simétrica positiva definida X e L , $L \in \Re^{m \times n}$ tais que, para todo $i \in K_r$,

$$X A_i' A_i' X - B_i L - L' B_i' < 0; X > 0, \quad (2.59)$$

onde A_i e $B(\alpha)$ são matrizes desconhecidas e de ordem compatível.

Teorema 2 (ARAUJO, 1992). Um sistema incerto (2.52), é quadraticamente estabilizável através de uma lei de controle linear se é quadraticamente estabilizável e se a lei de controle tem a forma $u(t) = Kx(t)$, onde $K \in \Re^{m \times n}$ é uma matriz constante. Se (2.59) são factíveis, para $i = 1, \dots, q$, o ganho do controlador é dado por $K = LX^{-1}$, e sabendo que $\alpha_i \geq 0$, e $\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1$ chega-se nas seguintes

equações:

$$\begin{aligned}
 XA_1' + A_1X + B_1L + L'B_1' &< 0, \\
 XA_2' + A_2X + B_2L + L'B_2' &< 0, \\
 &\vdots \\
 XA_q' + A_qX + B_qL + L'B_q' &< 0, \\
 X &> 0,
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde q representa o número de vértices do politopo.

2.5 O Problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados

Para o projeto de controladores \mathcal{H}_2 usando realimentação de estados, o ganho de realimentação de estado ótimo pode ser obtido através da equação de Riccati associada ao problema de controle (AGUIRRE, 2007). Considere para tal projeto o sistema com as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\
 z(t) &= Cx(t) + Du(t), \\
 y(t) &= C_y x(t),
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $z(t) \in \mathfrak{R}^q$, e $y(t) \in \mathfrak{R}^r$ representam respectivamente os vetores de estado, de controle, de perturbação, de saída controlada e a saída medida. A representação em diagramas de blocos para esse sistema pode ser representado pela Figura 2.4.

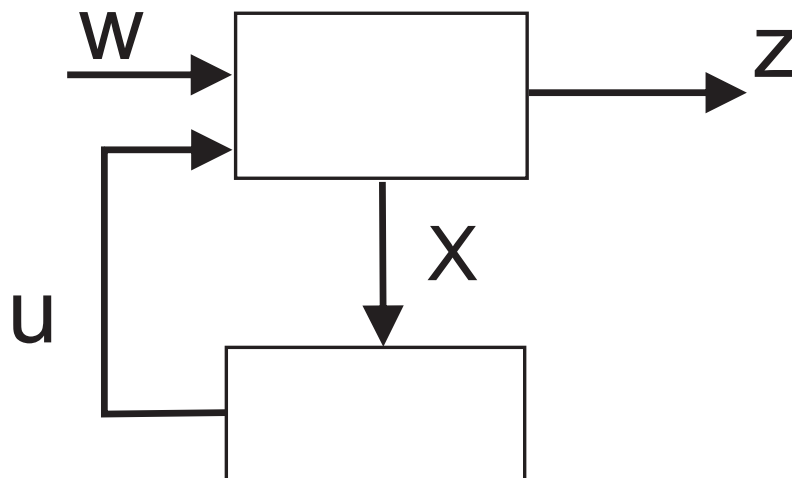


Figura 2.4: Diagramas de blocos generalizado da planta.
Fonte:(AGUIRRE, 2007).

Supondo-se que todas as matrizes sejam de dimensões apropriadas, e considere que a lei de controle por realimentação positiva de estado linear seja definida por $u(t) = Kx(t)$. O sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_f x(t) + B_w w(t), \\ z(t) &= C_f x(t), \\ y(t) &= C_y x(t). \end{aligned} \quad (2.62)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_f &= A + B_u K, \\ C_f &= C + DK, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde a matriz de transferência entre z e w é definida por $H(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}B_w$, podendo ser representada em malha fechada por:

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} A_f & B_w \\ C_f & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u K & B_w \\ C + DK & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

A norma \mathcal{H}_2 de $H(s)$ pode ser definida por:

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(H(j\omega)'H(j\omega))d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(h(t)'h(t))dt, \quad (2.65)$$

onde Tr representa a função traço.

A norma \mathcal{H}_2 está relacionada com a entrada de perturbação através da aplicação de sinais tipo impulso. Definindo as entradas $w(t) = B_{wi}\delta(t)$, $i = 1, 2, \dots, l$, sendo $\delta(t)$ a função impulso, a norma \mathcal{H}_2 de $H(s)$ pode ser expressa por (DOYLE, 1989):

$$\|H(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^l \|z_i\|_2^2, \quad (2.66)$$

onde z_i corresponde a saída controlada gerada por uma perturbação impulso na entrada de perturbação w_i . O cálculo da norma \mathcal{H}_2 também pode ser obtido por (AGUIRRE, 2007):

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{Tr}(C_f X_c C_f') = \text{Tr}(B_f' X_0 B_f), \quad (2.67)$$

sendo $X_c > 0$ e $X_0 > 0$ as matrizes que satisfaçam às seguintes equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned} A_f X_c + X_c A_f' + B_f B_f' &= 0, \\ A_f' X_0 + X_0 A_f + C_f' C_f &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Para encontrar o controlador ótimo K por meio da norma \mathcal{H}_2 , deve-se for-

mular o problema de otimização através de restrições por LMI's (PALHARES; TAKAHASHI; PERES, 1997), resultando nas seguintes condições matemáticas:

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \min_{X_c > 0} Tr\{C_f X_c C_f'\} \quad (2.69)$$

sujeito a : $A_f' X_c + X_c A_f' + B_w B_w' \leq 0$,

ou

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \min_{X_0 > 0} Tr\{B_w' X_0 B_w\} \quad (2.70)$$

sujeito a : $A_f' X_0 + X_0 A_f + C_f' C_f \leq 0$.

O objetivo deste desenvolvimento é encontrar um procedimento que gere o ganho K ótimo que minimize a norma \mathcal{H}_2 . Para isso considere a função de transferência descrita por (2.64) e a restrição apresentada em (2.70), resultando em:

$$(A + B_u K)' X_0 + X_0 (A + B_u K) + (C + DK)' I (C + DK) \leq 0. \quad (2.71)$$

Aplicando o complemento de Schur em (2.71) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)' X_0 + X_0 (A + B_u K) & (C + DK)' \\ (C + DK) & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.72)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.72) por $\begin{bmatrix} X_0^{-1} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X_0^{-1} (A + B_u K)' + (A + B_u K) X_0^{-1} & X_0^{-1} (C + DK)' \\ (C + DK) X_0^{-1} & I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.73)$$

Definindo a mudança de variáveis linearizantes:

$$\begin{aligned} X &= X_0^{-1}, \\ Z &= K X_0^{-1} = K X, \end{aligned} \quad (2.74)$$

obtém-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + B_u Z + Z' B_u' & XC' + Z' D' \\ CX + DZ & -I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.75)$$

A mudança de variável definida em (2.74), transformou a função objetivo em:

$$Tr\{B_w' X_0 B_w\} = Tr\{B_w' X^{-1} B_w\}. \quad (2.76)$$

Portanto para que se obtenha um problema de otimização semidefinida (AGUIRRE, 2007), faz-se necessário manipular a função objetivo. Define-se uma nova variável matricial, $J = J' \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ como sendo um limitante superior para a função obje-

tivo:

$$\text{Tr}\{J\} \geq \text{Tr}\{B_w' X^{-1} B_w\}, \quad (2.77)$$

ou ainda:

$$J - B_w' X^{-1} B_w \geq 0. \quad (2.78)$$

Aplicando novamente o complemento de Schur, obtém-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} J & B_w' \\ B_w & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.79)$$

Assim o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 pode ser reescrito como um problema de otimização semidefinida da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \text{Tr}\{J\} \\ \text{sujeito a : } \begin{bmatrix} J & B_w' \\ B_w & X \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} AX + XA' + B_u Z + Z' B_u' & XC' + Z' D' \\ CX + DZ & -I \end{bmatrix} \leq 0, \end{array} \right. \quad (2.80)$$

sendo que o ganho do controlador é obtido por:

$$K = ZX^{-1}, \quad (2.81)$$

e

$$\|T_{zw}\|_2 = \sqrt{\text{Tr}\{J\}}. \quad (2.82)$$

Um dos grandes benefícios em trabalhar com formulações em LMI's é a possibilidade de se estender todos os resultados apresentados anteriormente para os sistemas incertos, com incertezas descritas por um politopo, sendo que esse trabalho não gera nenhuma complexidade extra em termos de notação. Isto é, basta escrever as restrições dos vários problemas de otimização semidefinida, descritos anteriormente, para todos os vértices de um politopo (AGUIRRE, 2007). Considere para isso o sistema com incertezas descrito em (2.83):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t), \\ z(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t), \\ y(t) = C_y(\alpha)x(t), \end{array} \right. \quad (2.83)$$

onde é considerado que:

$$\alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \quad (2.84)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i, \quad B_w(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi}, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i C_i, \\ D(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i D_i, \quad C_y(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i C_{yi} \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde $i = 1, \dots, N$, no qual N é dado por $N = 2^n$, onde n representa o número de parâmetros incertos, e $A_i, B_i, B_{wi}, C_i, D_i$ e C_{yi} , são matrizes constantes para cada vértice do politopo. Para calcular a norma \mathcal{H}_2 para o sistema em malha fechada, considerando realimentação positiva (AGUIRRE, 2007) dado pela lei de controle $u = Kx(t)$, obtém-se as LMI's:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \text{Tr} \{J\}, \\ \text{sujeito a : } \begin{bmatrix} J & B_w(\alpha)' \\ B_w(\alpha) & X \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A(\alpha)X + XA(\alpha)' + B(\alpha)Z + Z'B(\alpha)' & XC(\alpha)' + Z'D(\alpha)' \\ C(\alpha)X + D(\alpha)Z & -I \end{bmatrix} \leq 0. \end{array} \right. \quad (2.86)$$

Da primeira condição da equação (2.86), obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} J & B_w(\alpha)' \\ B_w(\alpha) & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi}' \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \alpha_i J & \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi}' \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i B_{wi} & \sum_{i=1}^N \alpha_i X \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

sabendo-se que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$; dessa forma:

$$\begin{bmatrix} J & B_w(\alpha)' \\ B_w(\alpha) & X \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\begin{bmatrix} J & B_{wi}' \\ B_{wi} & X \end{bmatrix} \right) \geq 0, \quad (2.88)$$

cuja condição suficiente é:

$$\begin{bmatrix} J & B_{wi}' \\ B_{wi} & X \end{bmatrix} \geq 0, \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (2.89)$$

Da segunda condição da equação (2.86), tem-se que:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X + XA(\alpha)' + B(\alpha)Z + Z'B(\alpha)' & XC(\alpha)' + Z'D(\alpha)' \\ C(\alpha)X + D(\alpha)Z & -I \end{bmatrix} = \quad (2.90)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i X + X \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i' + \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i Z + Z' \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i' & X \sum_{i=1}^N \alpha_i C_i' + Z' \sum_{i=1}^N \alpha_i D_i' \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i C_i X + \sum_{i=1}^N \alpha_i D_i Z & -I \end{array} \right] = \quad (2.91)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i X + X A_i' + B_i Z + Z' B_i') & \sum_{i=1}^N \alpha_i (X C_i' + Z' D_i') \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i (C_i X + D_i Z) & - \sum_{i=1}^N \alpha_i I \end{array} \right] \leq 0, \quad (2.92)$$

ou ainda

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\begin{bmatrix} A_i X + X A_i' + B_i Z + Z' B_i' & X C_i' + Z' D_i' \\ C_i X + D_i Z & -I \end{bmatrix} \right) \leq 0, \quad (2.93)$$

cuja condição suficiente é:

$$\left[\begin{array}{cc} A_i X + X A_i' + B_i Z + Z' B_i' & X C_i' + Z' D_i' \\ C_i X + D_i Z & -I \end{array} \right] \leq 0, \text{ para } i = 1, \dots, N. \quad (2.94)$$

Assim, uma condição suficiente para o controle \mathcal{H}_2 é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Tr(J) \\ \text{sujeito a : } \begin{bmatrix} J & B_{wi}' \\ B_{wi} & X \end{bmatrix} \geq 0, \\ \left[\begin{array}{cc} A_i X + X A_i' + B_i Z + Z B_i' & X C_i' + Z' D_i' \\ C_i X + D_i Z & -I \end{array} \right] \leq 0, \end{array} \right. \quad (2.95)$$

para $i = 1, \dots, N$. A partir da solução, obtém-se a matriz de realimentação de estados.

$$K = Z X^{-1}, \quad (2.96)$$

e a norma \mathcal{H}_2 do sistema, com o ganho obtido é:

$$\|T_{zw}\|_2 \leq \sqrt{Tr(J)}. \quad (2.97)$$

2.6 Obtenção do controlador ótimo através da função custo J

Outra maneira de obter um controle com a otimização de uma certa função objetivo, é através do controle LQR. Nesta seção será apresentada o método

do regulador quadrático linear. Para obter o controle ótimo, faz-se necessário definir uma determinada função custo J conforme descrito a seguir,

$$J = \int_0^T x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)dt. \quad (2.98)$$

J é a função custo que geralmente está associada com a energia do sistema, assim o controle ótimo é definido no sentido de minimizar a energia do sistema (ROSA FILHO, 2011).

Para trabalhar com o problema LQR, considere um sistema controlável em espaço de estados descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.99)$$

onde $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e B é um vetor coluna $n \times 1$, $u(t)$ é o vetor de controle e o estado $x(t)$ é definido por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Portanto, para um problema de otimização, deve-se minimizar as condições:

$$\begin{aligned} \min \int_0^T x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)dt, \\ \text{sujeito a : } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde Q é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. Uma possibilidade para Q é uma matriz diagonal, cujos elementos sejam positivos. R é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, sendo um elemento que indica o peso que se quer atribuir à energia associada ao sinal de controle, ou seja, o quanto de energia o sinal de controle gasta para resolver o problema de otimização. Assim se R for grande em relação a Q , então o esforço do controle u será grande. Para valores de R grande o valor do ganho K fica menor e a resposta do sistema é mais lenta. Para valores de R pequenos, o ganho do controlador se tornam maiores, e portanto o sistema atua de forma rápida, por isso, costuma-se escolher o valor de R unitário.

Os papéis das matrizes Q e R são, portanto, definir o peso relativo que o estado e o sinal de controle têm no cálculo do critério J e no consumo de energia

dos sinais de controle. Uma possibilidade para Q é definida por (2.102).

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

onde $q_{nn} \gg q_{(n-1)(n-1)} \gg q_{(n-2)(n-2)} \gg \cdots \gg q_{11}$, possibilita uma resposta mais rápida para o sistema.

O controle ótimo $u(t)$ ou solução para o problema de otimização é único e dado por $u(t) = Kx(t)$. Nesse tipo de projeto, o importante é encontrar a matriz K de forma que minimize a função custo J . No MATLAB o comando que calcula o valor de K é dado por:

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R). \quad (2.103)$$

Os parâmetros Q e R são responsáveis pelo balanceamento ou relacionam a entrada e os estados na função custo que está sendo otimizada. Para esse tipo de controle, o caso mais simples para R é o valor unitário, e a partir daí é proposto um valor para Q .

Substituindo agora a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ na equação (2.98) tem-se:

$$J = \int_0^T (x(t)'Qx(t) + (Kx(t))'R(Kx(t)))dt, \quad (2.104)$$

ou ainda

$$J = \int_0^T (x(t)'Qx(t) + x(t)'K'RKx(t))dt. \quad (2.105)$$

Fazendo $R = 1$,

$$J = \int_0^T x(t)'(Q + K'K)x(t)dt. \quad (2.106)$$

Considerando, agora, a existência de uma equação diferencial (OGATA, 2010), dada por:

$$x(t)'(Q + K'K)x(t) = -\frac{d}{dt}(x(t)'Px(t)), \quad (2.107)$$

dessa forma é obtido que:

$$x(t)'(Q + K'K)x(t) = -\dot{x}(t)'Px(t) - x(t)'P\dot{x}(t). \quad (2.108)$$

Para um sistema em malha fechada, o correspondente controle ótimo é dado pela equação $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$, dessa forma a equação descrita em (2.108) se

transforma em:

$$x(t)'(Q + K'K)x(t) = -\dot{x}(t)'[(A + BK)'P + P(A + BK)]x(t), \quad (2.109)$$

ou ainda:

$$-(Q + K'K) = (A + BK)'P + P(A + BK). \quad (2.110)$$

Ainda segundo (OGATA, 2010), o índice de desempenho para um sistema assintoticamente estável pode ser dado por:

$$J = x(0)'Px(0). \quad (2.111)$$

Considerando um sistema de segunda ordem por exemplo, é possível encontrar a matriz de ganho do controlador dada por $K = [K_1, K_2]$, através da diferenciação parcial da função custo J em relação aos ganhos K_1 e K_2 . O valor do ganho é obtido igualando todos os termos a zero conforme foi mostrado em (ROSA FILHO, 2011). Outra maneira de realizar essa otimização é através de programas computacionais como o software MATLAB (GAHINET et al., 1995).

2.7 Conclusão do capítulo

Neste Capítulo foram apresentados o problema de controle \mathcal{H}_2 na forma de otimização semidefinida para o caso de sistemas incertos, o ganho do controlador para o controle \mathcal{H}_2 e o controle ótimo da função custo J . A seguir, no Capítulo 3 será visto o modelo do pêndulo invertido com sua representação em espaços de estados.

3 Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido

Na maioria dos sistemas dinâmicos existentes é fundamental a obtenção dos modelos matemáticos que descrevem determinados fenômenos para melhor compreensão, análise e controle dos mesmos. Uma das formas de modelar um sistema, para quem trabalha com controle, é obter as equações ou funções de transferência que possibilitam estabelecer uma relação entre a entrada e a saída do sistema. Assim, a modelagem tem uma especial importância na engenharia, em particular para projetos de sistemas de controle.

Através de modelos matemáticos, é possível realizar análises e prever o comportamento para determinado sistema, em determinadas situações e condições, e posteriormente transformar em sistemas reais aplicados na engenharia.

Basicamente, existem duas formas de construção de modelos matemáticos (SODERSTROM; STOICA, 1989):

- Modelagem Matemática: Quando as relações físicas e matemáticas do fenômeno envolvido são conhecidas e esse conhecimento é utilizado para construção do modelo.
- Identificação de Sistemas: É uma técnica que permite construir modelos matemáticos de sistemas dinâmicos a partir de dados medidos. Nesse modo, não existe conhecimento matemático do fenômeno.

Para a proposta neste trabalho será abordado o modelo em que são conhecidas as leis da física que regem o sistema, ou a relação entre as variáveis envolvidas no comportamento dinâmico do sistema. Para (AGUIRRE, 2004), essa modelagem também é conhecida como modelagem pela física ou natureza do processo.

Neste Capítulo será apresentado o modelo do pêndulo invertido e sua representação em espaços de estados.

3.1 Modelo do pêndulo invertido

Na natureza, se encontram diversos tipos de sistemas dinâmicos onde a estabilidade ou instabilidade é facilmente perceptível pelo ser humano. Como exemplo, pode-se citar uma bola que sempre busca encontrar a sua posição de menor potencial gravitacional, e portanto a sua posição de equilíbrio. Outro exemplo interessante é o caso do pêndulo invertido, em que uma barra sendo articulada em uma de suas extremidades, tende sempre a buscar a sua posição de equilíbrio. Esse sistema mecânico, por sua vez, é um bom exemplo de um sistema não linear que será considerado na análise de controle robusto e controle ótimo neste trabalho. No entanto como na maioria dos tipos de sistema dinâmicos, a existência de algum tipo de distúrbio externo pode levar o sistema à instabilidade.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar o pêndulo invertido em um carro móvel, considerando a presença de distúrbios e incertezas no sistema de controle. O sistema em estudo consiste de um pêndulo invertido sobre um carro móvel, onde a barra sobre o carro fica livre para mover-se, de forma que qualquer movimento realizado pelo pêndulo deva ser atribuído ao movimento do carro. Primeiramente, será feita uma descrição do modelo em estudo considerando as equações físicas que descrevem a dinâmica do movimento do carro e do pêndulo. Uma das influências externas em que o pêndulo fica submetido durante seu equilíbrio é a presença de ventos ou qualquer outro tipo de ondas mecânicas ou mesmo alguma interferência humana. Através de uma modelagem matemática e considerando as equações da física newtoniana e o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 3.1, é possível equacionar a dinâmica do pêndulo invertido em um carro móvel e realizar o seu controle segundo as teorias de controle robusto. O sistema mostrado na Figura 3.1 representa um sistema de um pêndulo invertido sobre um suporte móvel (BUGEJA, 2003).

Para o sistema representado na Figura 3.1, os parâmetros são:

- M - massa do suporte móvel;
- m - massa do pêndulo;
- ℓ - comprimento até o centro de massa do pêndulo;
- I - Momento de inércia do pêndulo;
- g - aceleração da gravidade;
- F - força aplicada no suporte móvel;

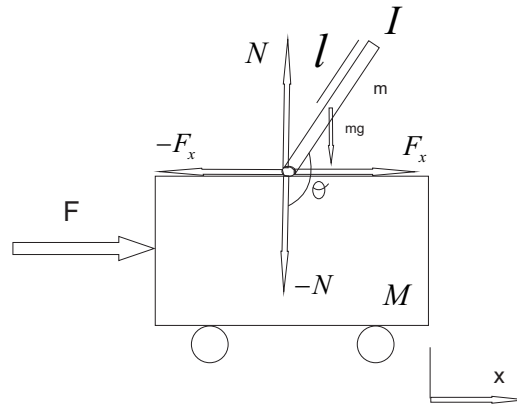


Figura 3.1: Pêndulo invertido sobre carro móvel.
Fonte: Adaptado de (BUGEJA, 2003).

- x - eixo de coordenada;
- θ ângulo do pêndulo em relação à vertical para baixo.

Considerando o diagrama de corpo livre do pêndulo na Figura 3.2 e definindo o sistema de coordenadas a partir do referencial do plano x, y , obtêm-se as equações do movimento do centro de massa.

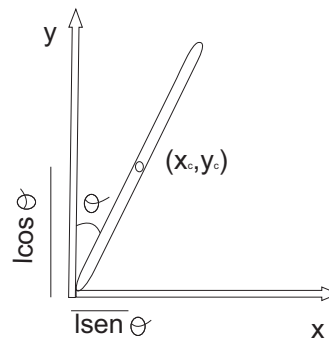


Figura 3.2: Diagrama de corpo livre para coordenadas.
Fonte: Próprio autor

Aplicando a segunda lei de Newton $\sum F = ma$ para as forças na direção horizontal do suporte móvel, tem-se:

$$F - F_x = M\ddot{x}, \quad (3.1)$$

isto é:

$$F = M\ddot{x} + F_x. \quad (3.2)$$

Realizando a soma das forças no diagrama de corpo livre do pêndulo na direção horizontal, tem-se:

$$F_x = ma = m \frac{d^2}{dt^2}(x_c) = m \frac{d^2}{dt^2}(x + \ell \text{sen}\theta), \quad (3.3)$$

$$F_x = m\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} \cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2) tem-se:

$$F = (M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} \cos\theta - m\ell\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta. \quad (3.5)$$

Somando agora as forças perpendiculares ao pêndulo, conforme ilustra a Figura 3.3, obtém-se:

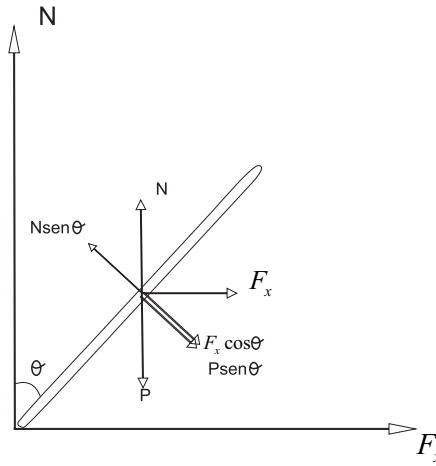


Figura 3.3: Diagrama de forças perpendiculares ao pêndulo.
Fonte: Próprio autor.

$$N \text{sen}\theta - F_x \cos\theta - P \text{sen}\theta = m\ell\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos\theta. \quad (3.6)$$

Calculando-se o momento de inércia em torno do centro do pêndulo, conforme a Figura 3.4;

$$-N\ell \text{sen}\theta + F_x \ell \cos\theta = I\ddot{\theta}. \quad (3.7)$$

Multiplicando (3.6) por $(-\ell)$ tem-se:

$$-N\ell \text{sen}\theta + F_x \ell \cos\theta + P\ell \text{sen}\theta = -m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell\ddot{x} \cos\theta. \quad (3.8)$$

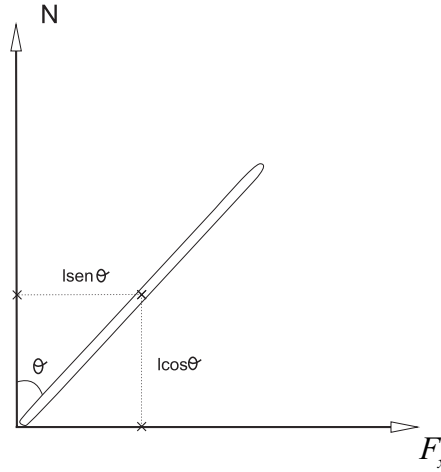


Figura 3.4: Momento de inércia no centro do pêndulo.
Fonte: Próprio autor.

Substituindo (3.7) em (3.8):

$$I\ddot{\theta} + Pl\text{sen}\theta = -m\ell^2\ddot{\theta} - m\ell\ddot{x} \cos\theta, \quad (3.9)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + mgl\text{sen}\theta = -m\ell\ddot{x} \cos\theta. \quad (3.10)$$

As equações obtidas em (3.5) e (3.10) estão na forma não-linear, mas podem ser linearizadas para pequenas variações de θ .

3.1.1 Posições de equilíbrio do pêndulo

O propósito desta seção é mostrar uma ideia geral das posições do pêndulo invertido para entender seu funcionamento e seu controle. De maneira particular, é possível identificar três posições de maior interesse para o projeto de controle. Na Figura 3.5.a, o pêndulo está em sua posição de equilíbrio devido à ação do controle. Na Figura 3.5.b, o pêndulo não está estabilizado. Na Figura 3.5.c, o pêndulo encontra-se na sua condição de estabilidade natural, com a barra na posição para baixo.

Para realizar o controle do pêndulo, faz-se necessário levar o pêndulo próximo à posição da Figura 3.5.a, pois um controle partindo de sua posição de equilíbrio levaria a um consumo de energia bem maior dentro do sistema e um aumento da complexidade das técnicas de controle. Assim quando o pêndulo estiver próximo da sua posição invertida o sistema de estabilização passa a atuar sobre o sistema.

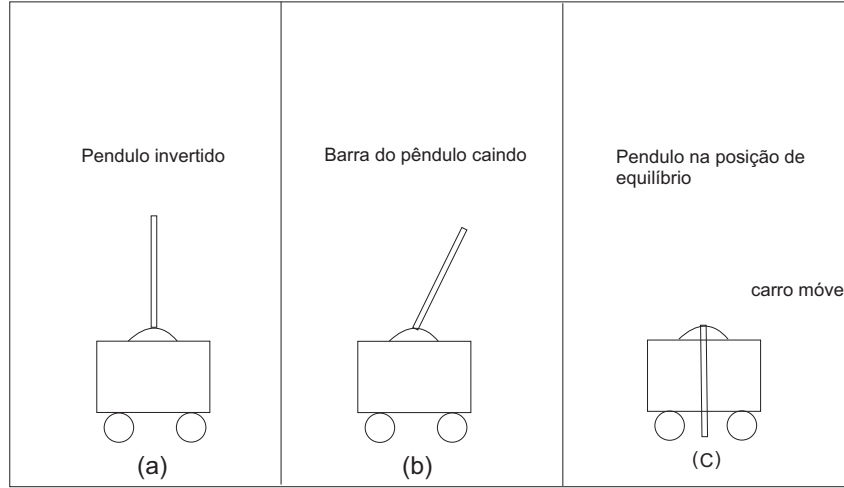


Figura 3.5: Posições do pêndulo invertido.
Fonte: Adaptado de (BUGEJA, 2003).

3.2 Linearização do sistema

As equações (3.5) e (3.10) não são lineares. Para encontrar a função de transferência do sistema, é necessário obter um modelo linearizado, considerando o ponto de equilíbrio do sistema representado pela Figura 3.5.a, onde o valor de θ é considerado a partir da posição de equilíbrio representado por $\theta = \pi - \varphi$. Para uma pequena variação de φ da posição vertical do pêndulo invertido, ou seja, $\varphi \cong 0$, é possível fazer as seguintes aproximações:

$$\cos(\theta) = \cos(\pi - \varphi) = \cos \pi \cos(-\varphi) + \text{sen} \pi \text{sen}(-\varphi) = -\cos \varphi \cong -1, \quad (3.11)$$

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\pi - \varphi) = \text{sen} \pi \cos(-\varphi) - [\text{sen}(-\varphi) \cos \pi] = -\text{sen} \varphi \cong -\varphi, \quad (3.12)$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}^2 \approx 0. \quad (3.13)$$

Linearizando-se as equações (3.5) e (3.10), obtém-se:

$$(M + m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\varphi} = F, \quad (3.14)$$

$$(I + m\ell^2)\ddot{\varphi} - mgl\varphi = m\ell\ddot{x}. \quad (3.15)$$

3.3 Obtenção da função de transferência

Qualquer sistema físico (elétrico, mecânico, etc) pode ser representado por uma equação matemática que relaciona a entrada com a saída do sistema. Por definição (OGATA, 2010), uma função de transferência pode ser determinada pela equação

(3.16)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (3.16)$$

onde $H(s)$ é a função de transferência, também denominada por $G(s)$, $Y(s)$ é a transformada de Laplace da saída do sistema, e $U(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada do sistema. Para obter a função de transferência do sistema linearizado, basta calcular a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas do sistema descrito pelas equações (3.14) e (3.15):

$$(M + m)X(s)s^2 - m\ell\Phi(s)s^2 = F(s), \quad (3.17)$$

$$(I + m\ell^2)s^2\Phi(s) - mgl\Phi(s) = m\ell s^2 X(s). \quad (3.18)$$

Para encontrar a função de transferência da saída $\Phi(s)$ pela entrada $F(s)$, isola-se $X(s)$ de (3.18):

$$X(s) = \left[\frac{I + m\ell^2}{m\ell} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s). \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.17) obtém-se:

$$(M + m) \left(\frac{I + m\ell^2}{m\ell} - \frac{g}{s^2} \right) \Phi(s)s^2 - m\ell s^2 \Phi(s) = F(s), \quad (3.20)$$

$$\Phi(s) \left[(M + m) \left(\frac{I + m\ell^2}{m\ell} - \frac{g}{s^2} \right) s^2 - m\ell s^2 \right] = F(s), \quad (3.21)$$

$$\Phi(s) \left[\frac{(M + m) [(I + m\ell^2)s^2 - mgl] - (m\ell)^2 s^2}{m\ell} \right] = F(s). \quad (3.22)$$

Dado que a saída de interesse é o ângulo do pêndulo, tem-se a seguinte função de transferência.

$$\frac{\Phi(s)}{F(s)} = \frac{m\ell}{[(M + m)(I + m\ell^2) - (m\ell)^2] s^2 - (M + m)(mgl)}. \quad (3.23)$$

Da equação (3.17), tem-se ainda que:

$$\Phi(s) = \frac{(M + m)X(s)s^2 - F(s)}{m\ell s^2}. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.18):

$$\begin{aligned} & \frac{(I + m\ell^2)s^2(-F(s) + (M + m)X(s)s^2)}{m\ell s^2} - mgl \frac{(-F(s) + (M + m)X(s)s^2)}{m\ell s^2} = \\ & = m\ell s^2 X(s), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & \left[-(m\ell)^2 s^4 + (M+m)(I+m\ell^2)s^4 - (M+m)mgl s^2 \right] X(s) = \\ & = [(I+m\ell^2)s^2 - mgl] F(s). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dessa forma, obtém-se a segunda função de transferência que relaciona a posição do carro com a força de entrada do sistema dado pela equação (3.27):

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{(I+m\ell^2)s^2 - mgl}{[(M+m)(I+m\ell^2) - (m\ell)^2] s^4 - [(M+m)mgl] s^2}. \quad (3.27)$$

3.4 Representação em espaços de estados

A descrição em espaços de estados é um outro método que permite representar um sistema físico. Ela é formada por um conjunto de entradas, saídas e variáveis de estados descritas por equações diferenciais de primeira ordem, que se combinam em uma equação diferencial matricial (OGATA, 2010). Uma equação em espaços de estados pode ser expressa por (3.28).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde, x é o vetor de estados, u o vetor de entrada, também conhecido como vetor de controle, e A , B , C e D são matrizes de dimensões compatíveis do sistema. Este tipo de representação tem a vantagem de conhecer o comportamento interno do sistema, podendo ainda trabalhar com as condições iniciais do sistema, visto que se tratam de equações diferenciais. Outra vantagem é o uso de pacotes computacionais, visto que a maioria das simulações dependem desse tipo de representação. Como exemplo, temos no SIMULINK o bloco de simulação State-Space.

Para o sistema do pêndulo tem-se que as equações linearizadas do movimento descritas pelas equações (3.23) e (3.27) podem ser escritas na forma de espaço de estados, e dessa forma podendo ser representadas no formato de matrizes. Isolando \ddot{x} da equação (3.14) e inserindo em (3.15) tem-se:

$$\frac{(M+m)}{m\ell} [(I+m\ell^2)\ddot{\phi} - mgl\phi] - m\ell\ddot{\phi} = F, \quad (3.29)$$

$$Fm\ell = [I(M+m) + Mm\ell^2] \ddot{\phi} - (M+m)mgl\phi. \quad (3.30)$$

Assim obtém-se:

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{m\ell F + (M+m)mgl\phi}{I(M+m) + Mm\ell^2} \right). \quad (3.31)$$

Da mesma forma, isolando-se $\ddot{\varphi}$ de (3.15) e substituindo em (3.14), tem-se:

$$(M + m)\ddot{x} - m\ell \left[\frac{m\ell\ddot{x} + mgl\varphi}{I + m\ell^2} \right] = F, \quad (3.32)$$

$$\left[(I + m\ell^2)(M + m) - m^2\ell^2 \right] \ddot{x} - m^2g\ell^2\phi = F(I + m\ell^2), \quad (3.33)$$

$$\left[I(M + m) + Mm\ell^2 + m^2\ell^2 - m^2\ell^2 \right] \ddot{x} = F(I + m\ell^2) + m^2g\ell^2\phi. \quad (3.34)$$

Isolando \ddot{x} , tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{m^2g\ell^2\phi}{I(M + m) + Mm\ell^2} + \frac{(I + m\ell^2)F}{I(M + m) + Mm\ell^2}. \quad (3.35)$$

Assim o sistema pode ser expresso pelas seguintes equações em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2g\ell^2}{(M+m)I+Mm\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl(M+m)}{(M+m)I+Mm\ell^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I+m\ell^2)}{(M+m)I+Mm\ell^2} \\ 0 \\ \frac{m\ell}{(M+m)I+Mm\ell^2} \end{bmatrix} u, \quad (3.36)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (3.37)$$

sendo $u = F$. Portanto, o sistema pode ser representado na forma genérica:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (3.38)$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m^2g\ell^2}{(M+m)I+Mm\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl(M+m)}{(M+m)I+Mm\ell^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(I+m\ell^2)}{(M+m)I+Mm\ell^2} \\ 0 \\ \frac{m\ell}{(M+m)I+Mm\ell^2} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

3.5 Conclusão

Neste Capítulo o modelo matemático do pêndulo invertido foi apresentado, bem como as equações que regem o movimento do mesmo. Foi obtida, também, a representação em espaços de estados para o modelo do pêndulo invertido sobre o carro móvel.

A seguir, será desenvolvida a formulação de controle considerando a presença de incertezas politópicas para o modelo estudado no Capítulo 3.

4 Resultados

Após desenvolvimento do modelo matemático que descreveu o movimento do pêndulo, foi formulado um controle com incertezas politópicas. Nessa formulação, utilizou-se o controle \mathcal{H}_2 , onde, a matriz B_w relacionada ao distúrbio, é igual a matriz B que está relacionada à entrada de controle. No desenvolvimento desse controle, o parâmetro incerto é a massa que por sua vez possui valor constante, mas desconhecido, embora pertencente a um intervalo conhecido. Conforme pôde ser visto nas equações em espaço de estados descrito por (3.36) e (3.37), a massa esteve presente na matriz A e B , portanto, essas duas matrizes foram objetos de análises nesse modelo.

Neste capítulo serão apresentadas as incertezas politópicas ao modelo do pêndulo invertido, bem como a obtenção do controle \mathcal{H}_2 que satisfaça uma determinada função objetivo f_0 .

4.1 Formulação do controle considerando incertezas politópicas

Considere o seguinte sistema com incertezas do tipo politópicas, descrito na forma de variáveis de estados e dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo $A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C(\alpha) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$, matrizes que representam a dinâmica da planta do sistema com incertezas politópicas, sendo que α representa as incertezas politópicas da variação da massa, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é vetor de estados, $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ é o vetor de saída e $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada de controle. Considerando

a equação (3.36) e a matriz $A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}$, tem-se:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}(\alpha) & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}(\alpha) & a_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Da mesma forma a matriz $B(\alpha)$ com incertezas politópicas α , tem-se:

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21}(\alpha) \\ b_{31} \\ b_{41}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Para o sistema do pêndulo invertido, considerou-se que o pêndulo tinha uma massa de valor constante, e pertencente a um intervalo conhecido. Portanto, a massa do pêndulo teve uma variação entre o intervalo de $[m + \delta]$ e $[m - \delta]$. Para esse sistema foi considerado também que:

- $M = 0,5 \text{ kg}$
- $m = 0,4 \text{ kg}$
- $l = 0,15 \text{ m}$
- $I = 0,003 \text{ kgm}$

Considerando que a variação da massa do pêndulo seja de 40% tem-se que $\delta = 0,16 \text{ kg}$, e a massa do pêndulo terá uma variação no intervalo $[0,24, 0,56]$.

Dessa forma as matrizes A_α e B_α formam uma combinação convexa de dois vértices. Essas matrizes dos vértices são dadas pelos seguintes elementos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 53,1176 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,3016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 92,1395 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,7073 \\ 0 \\ 7,3171 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,6456 \\ 0 \\ 8,8608 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.1.1 Obtenção do controle \mathcal{H}_2

Para o problema de controle definido em (2.80), busca-se encontrar um controle ótimo, que satisfaça uma determinada função objetivo f_o , de modo que a lei de controle $u(t)$ minimize o custo funcional de J definido em (2.80). Dessa forma $u(t)$ será ótimo se for solução ótima do problema. Para isso, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} J &= J' \in \mathfrak{R}^{1 \times 1}, \\ X &= X' \in \mathfrak{R}^{4 \times 4}, \\ Z &\in \mathfrak{R}^{1 \times 4} \end{aligned} \quad (4.6)$$

que são representadas por:

$$\begin{aligned} J &= [j], \\ X &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix}, \\ Z &= [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4], \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo o vetor de decisão definido por:

$$v_d = \left[j \ x_{11} \ x_{12} \ x_{22} \ x_{13} \ x_{23} \ x_{33} \ x_{14} \ x_{24} \ x_{34} \ x_{44} \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \right]', \quad (4.8)$$

onde a função objetivo é descrita por:

$$f_o = Tr\{J\} = \left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right] \begin{bmatrix} j \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{14} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{44} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ou ainda,

$$fo = tr\{J\} = j. \quad (4.10)$$

Aplicando a condição dada em (2.95) as matrizes dos vértices representadas por (4.4) e (4.5) tem-se que o ganho do controlador obtido pelo Apêndice A é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} 66,8728 & 49,3949 & -86,7713 & -15,0136 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

e a norma \mathcal{H}_2 é dada por:

$$normaH_2 = 0,3978, \quad (4.12)$$

sendo o resultado da simulação apresentado no Apêndice B.

4.2 Simulação do sistema não linear em malha aberta e malha fechada

A diferença principal de um sistema em malha aberta para um sistema em malha fechada é que no primeiro, a saída não exerce qualquer ação no sinal de controle, deste modo, a saída do processo não é comparada com a saída de referência, já no segundo, o sinal de saída possui efeito direto na ação de controle conhecido também por "feedback".

Para a simulação do sistema, com a lei de controle obtida, o modelo foi construído no SIMULINK. A simulação em malha aberta teve por objetivo avaliar o modelo dinâmico obtido matematicamente, para, posteriormente, comparar esse sistema não linear com o sistema linearizado. As situações avaliadas foram: (i) a resposta ao degrau unitário, com o sistema em equilíbrio, condições iniciais para a posição nula e o pêndulo na posição vertical para cima, (ii) valor da massa nominal, desconsiderando a presença de incertezas. Para o sistema não linear em malha fechada foi obtida a planta para o pêndulo invertido conforme mostra a Figura 4.1, onde a programação dos blocos são apresentadas no Apêndice C.

Aplicando um degrau unitário para representar a força sobre o carro móvel representado na Figura 3.1, tem-se a posição do carro é representada pela Figura 4.2.

Para essa situação, o pêndulo estava em repouso na posição vertical para cima, e quando foi aplicado um degrau unitário representando a força sobre o carro, notou-se que o carro passou a movimentar-se para a direita, no mesmo sentido da força exercida, conforme pode ser visto pela Figura 4.2. Como o

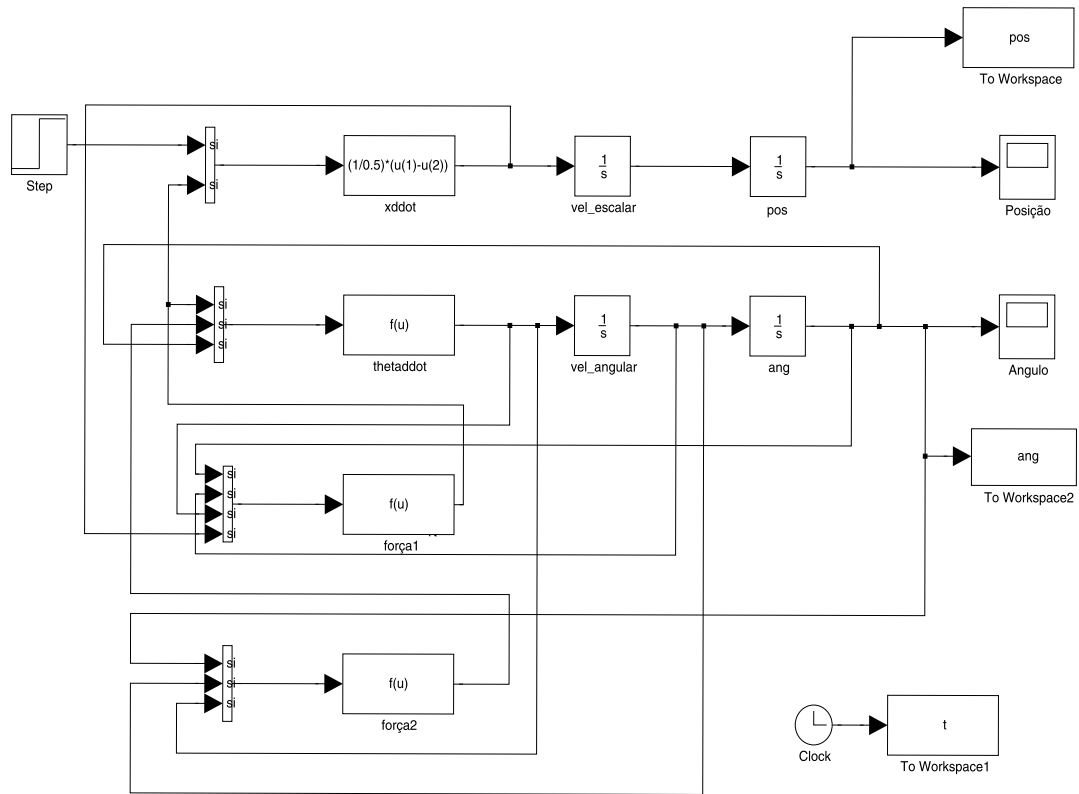


Figura 4.1: Sistema não linear em malha aberta.
Fonte: Próprio autor.

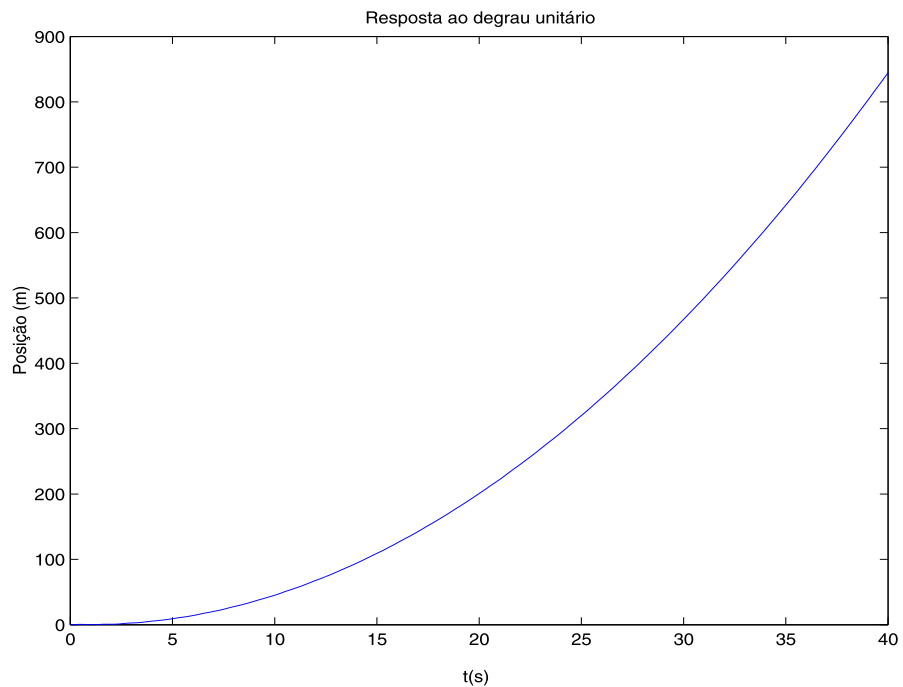


Figura 4.2: Posição do carro móvel.
Fonte: Próprio autor.

sistema não é realimentado, o pêndulo parte da posição de $\theta = \pi$ e retorna a sua posição de equilíbrio percorrendo dessa forma um caminho de aproximadamente 2π radianos, conforme pode ser visto na Figura 4.3, repousando na posição de

$\theta = 0^\circ$.

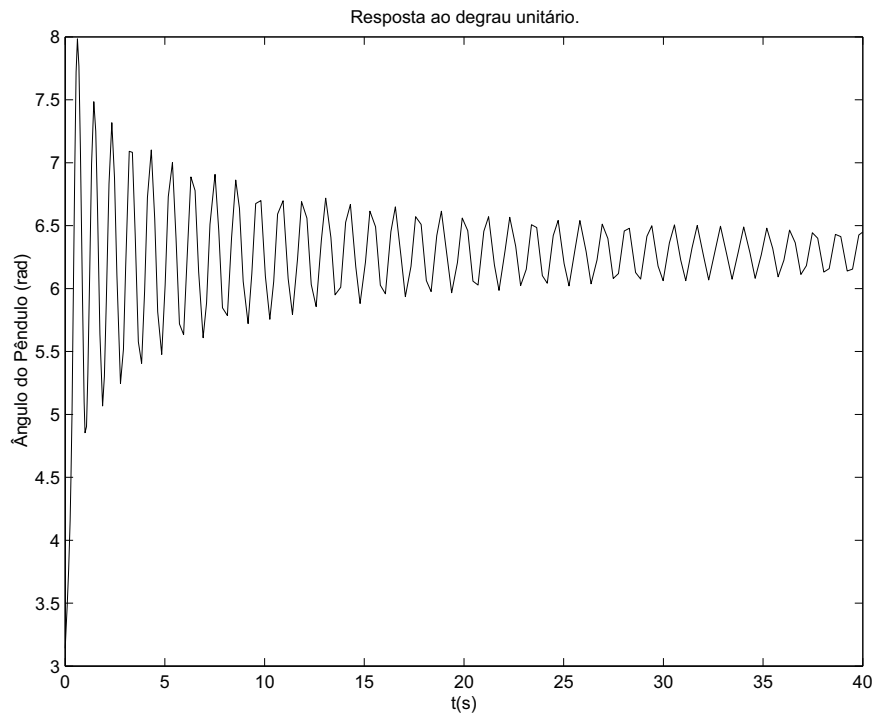


Figura 4.3: Ângulo do pêndulo em malha aberta.
Fonte: Próprio autor.

Sendo o sistema naturalmente instável, como visto nas Figuras 4.2 e 4.3, faz-se necessário o uso da realimentação de estados para estabilizar o sistema e controlar o ângulo e a posição do carro móvel.

Para o sistema não linear em malha fechada, considerando os ganhos do controlador obtidos com as incertezas politópicas, conforme encontrado na equação (4.11), foi obtida a planta para o pêndulo invertido conforme Figura 4.4, sendo a programação de seus blocos a mesma encontrada na Figura 4.1, dado pelo Apêndice C.

No sistema da Figura 4.4, aplica-se um degrau unitário na entrada da planta, obtendo como resposta para a posição do carro a resposta mostrada na Figura 4.5.

Pela figura 4.5, verifica-se que o carro consegue estabilizar próximo a posição de -2 metros, pois agora o controle é realimentado, no entanto, ficando distante da posição de partida, e com sinal negativo decorrente à realimentação da planta. Como o sistema é não linear, as equações pertencentes aos blocos da Figura 4.4 são mais complexas e apresentam funções senoidais, dessa forma, o resultado das simulações acabam sendo influenciadas e tendo maior oscilações até atingir a estabilidade, diferentemente do sistema linear que é descrito por equações mais simplificadas, favorecendo o resultado da simulação realizada no SIMULINK.

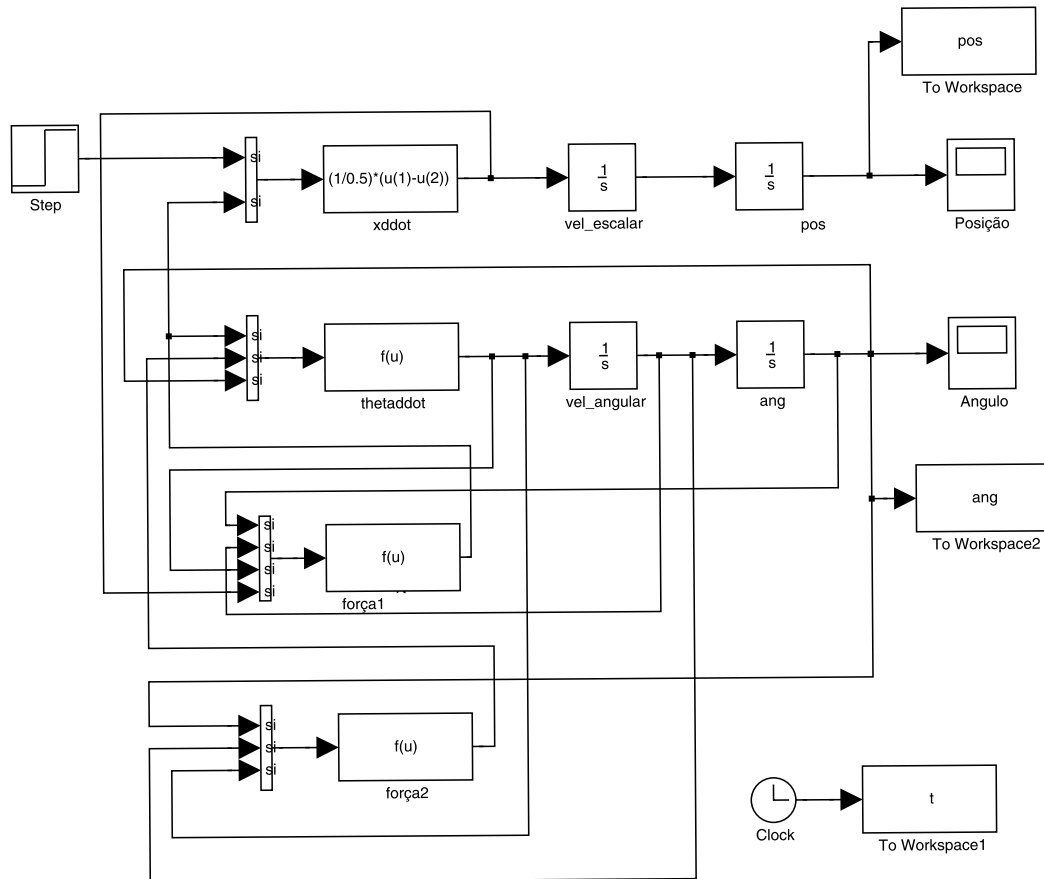


Figura 4.4: Sistema não linear em malha fechada.

Fonte: Próprio autor.

Para essa simulação, o ângulo do pêndulo é representado pela Figura 4.6, sendo que o ângulo parte da posição $\theta = \pi$, (posição onde será testado o controle do pêndulo) e oscila em torno dessa posição até ser controlado e atingir o equilíbrio na posição de $\theta = \pi$.

Na Figura 4.6, verifica-se também que o tempo de estabilização do ângulo do pêndulo, é o mesmo que a estabilização da posição, conforme visto na Figura 4.5, mostrando dessa forma as vantagens da utilização de um sistema realimentado. Nessa simulação o sinal de controle é representado pela Figura 4.7, onde verifica a presença de algumas oscilações durante o tempo de estabilização de aproximadamente 1,5 segundos. Essas variações ocorrem sempre como uma resposta à entrada degrau, podendo ter menor ou maior amplitude dependendo do tipo de sistema. Como a entrada degrau está representando a força sobre o carro móvel, e para a simulação no MATLAB foi considerado um degrau de valor final igual a 1, então, a força aplicada sobre o carro é de 1 Newton, e portanto o sinal de controle tende a se opor a essa força. Pela Figura 4.7 a força de resposta varia fortemente no primeiro meio segundo e depois estabiliza na posição -1 que

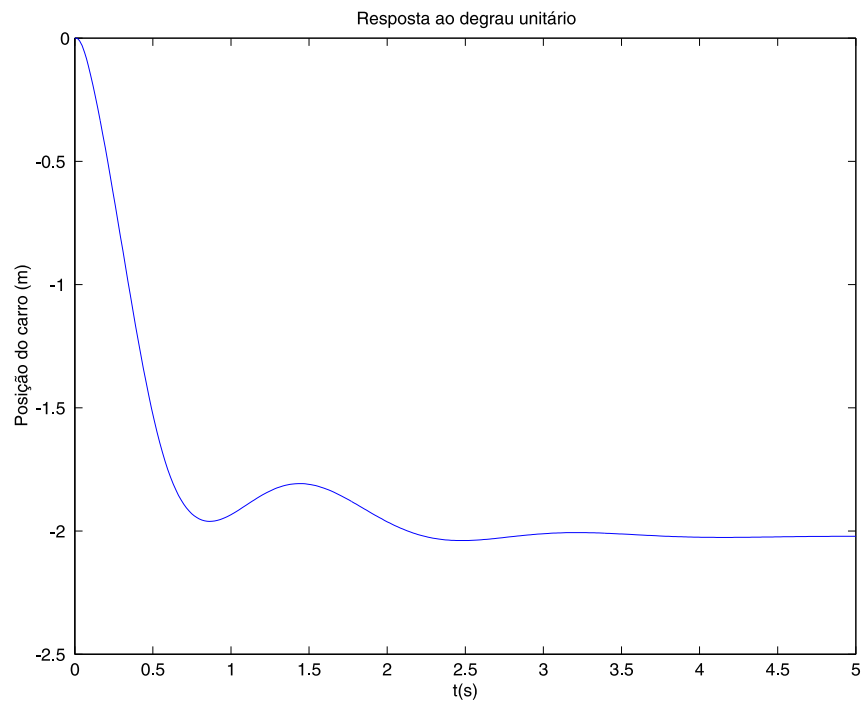


Figura 4.5: Posição do carro móvel considerando o sistema não linear em malha fechada.

Fonte: Próprio autor.

representa a mesma intensidade da força de entrada, conforme era de se esperar.

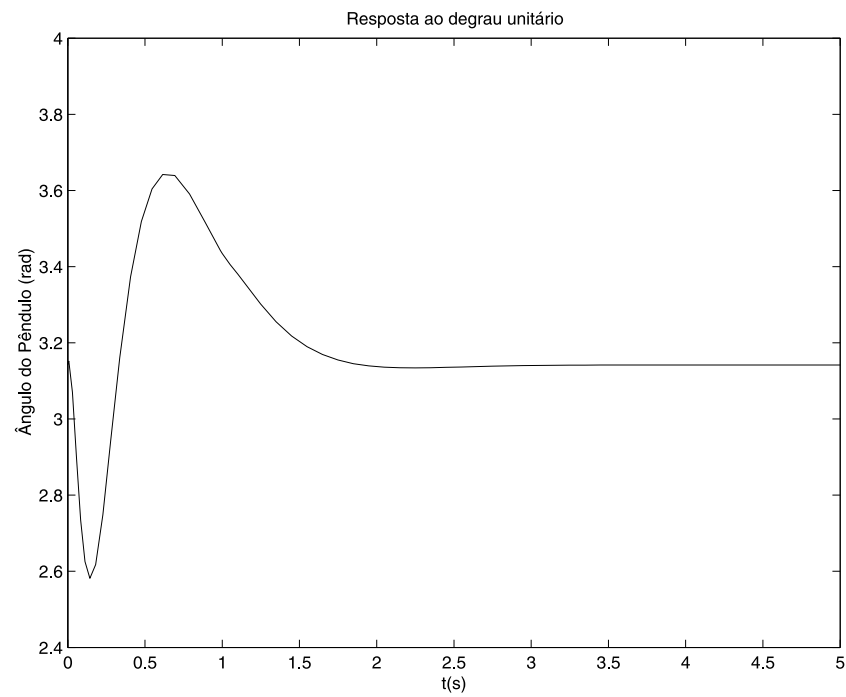


Figura 4.6: Ângulo do pêndulo considerando o sistema não linear em malha fechada.

Fonte: Próprio autor.

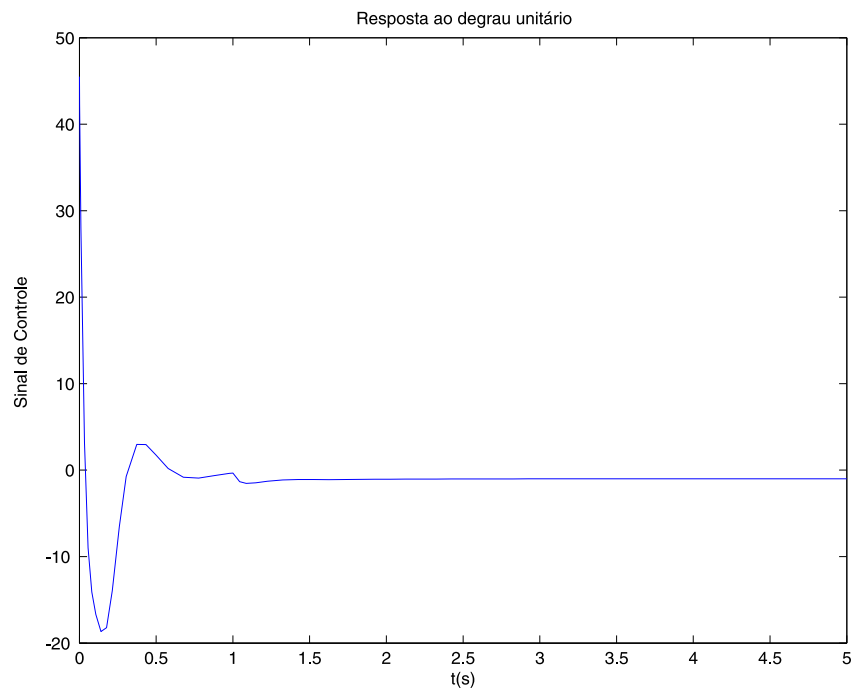


Figura 4.7: Sinal de controle considerando o sistema não linear em malha fechada.

Fonte: Próprio autor.

4.3 Simulação do pêndulo linearizado considerando incertezas politópicas

Para o sistema linearizado do pêndulo descrito em (3.36) e (3.37) foi obtida a planta em malha fechada conforme ilustra a Figura 4.8, sendo a programação dos blocos mostrada no Apêndice D.

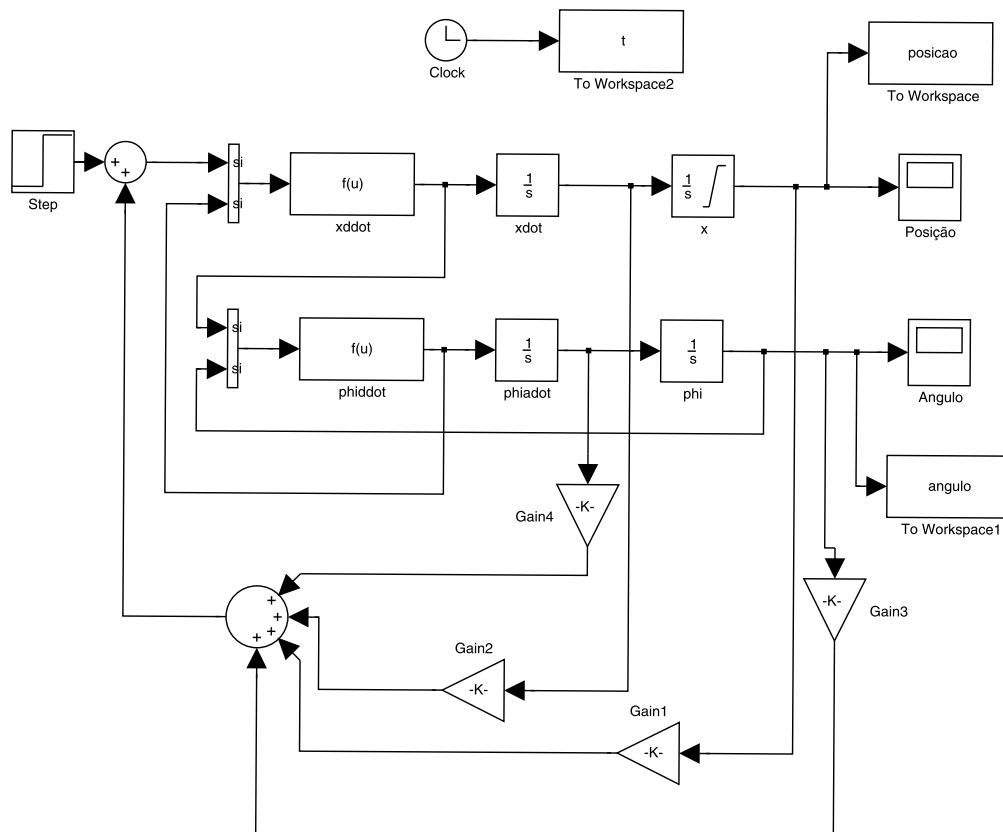


Figura 4.8: Planta para o sistema linearizado em malha fechada.
Fonte: Próprio autor.

Para a planta da Figura 4.8, foram considerados para simulação dois valores para a massa do pêndulo: (i) para a massa mínima, (ii) para a massa máxima, definindo dessa forma dois vértices para o politopo.

Representando a força exercida sobre o carrinho, como sendo a entrada do degrau, tem-se que a posição do carro móvel se desloca conforme ilustra a Figura 4.9.

Para o caso descrito na Figura 4.9, verificou-se que no sistema linearizado, o gráfico da posição do carro móvel também ficou mais linear quando comparada com a simulação da posição para o sistema não linearizado mostrada na Figura 4.5. Notou-se também que as curvas que representavam a posição do carro para

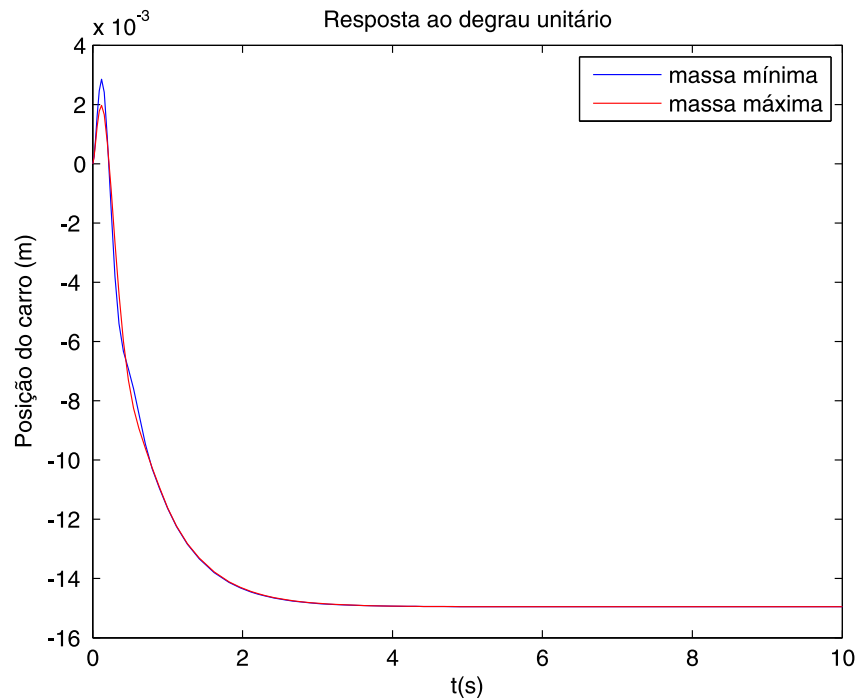


Figura 4.9: Posição do carro considerando o ganho do controlador para a massa do pêndulo mínima e máxima.

Fonte: Próprio autor.

o caso da massa mínima e massa máxima praticamente foram idênticas, e novamente o sistema realimentado também estabilizou em uma posição negativa.

Para a simulação do ângulo do pêndulo, considerando a massa do pêndulo mínima e máxima, foi obtido o seguinte resultado, conforme ilustra a Figura 4.10. Para o gráfico que representa o ângulo de estabilidade do pêndulo, verificou-se que, em ambos os casos da massa, o sistema estabilizou na posição de $\varphi = 0^\circ$ conforme esperado, sendo o comportamento diferenciado apenas no instante anterior a 2 segundos, devido apenas à diferença da massa entre eles.

Para essa simulação, foi obtido o sinal de controle conforme ilustra a Figura 4.11. No sinal de controle, observa-se que o mesmo opõe-se à entrada em degrau de forma a estabilizar o sistema, representando dessa forma uma oposição à força.

Analisando a Figura 4.9, foi possível verificar que a variação da massa do pêndulo não provocou grandes alterações no sistema de controle, pois os resultados das simulações para as posições do carro móvel se mantiveram praticamente idênticas quando comparadas para os dois valores das massas. Isso se deve à característica de robustez do sistema, que, mesmo com incertezas em seus parâmetros, ainda se mostrou bastante adequado e eficiente para certos sistemas de controle. Ainda nessa figura verifica-se que o pêndulo estabiliza com o carro na posição negativa, da mesma forma ocorrida com o sistema não linear em malha fechada

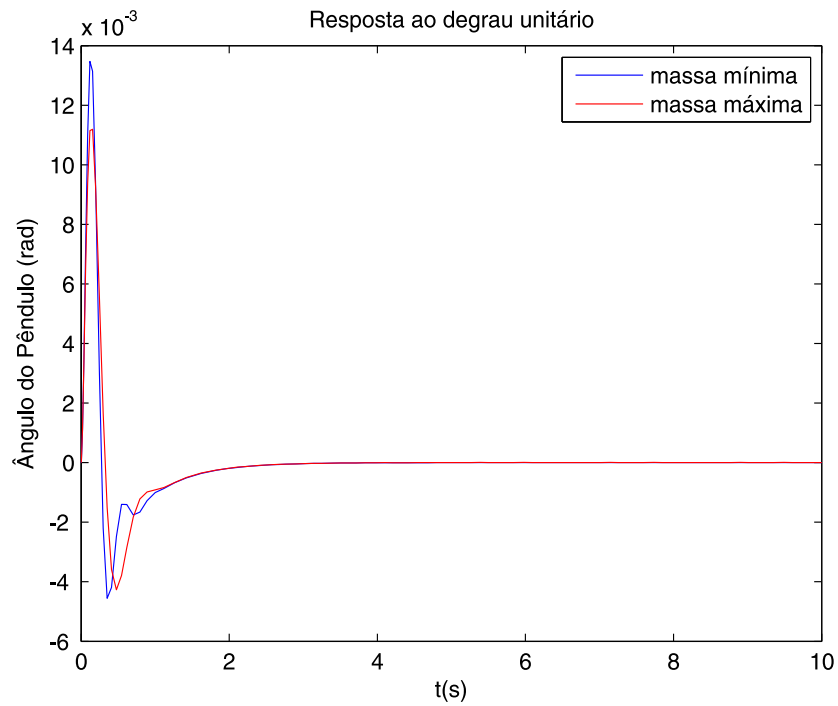


Figura 4.10: Ângulo do pêndulo considerando o ganho do controlador para a massa do pêndulo mínima e máxima.

Fonte: Próprio autor.

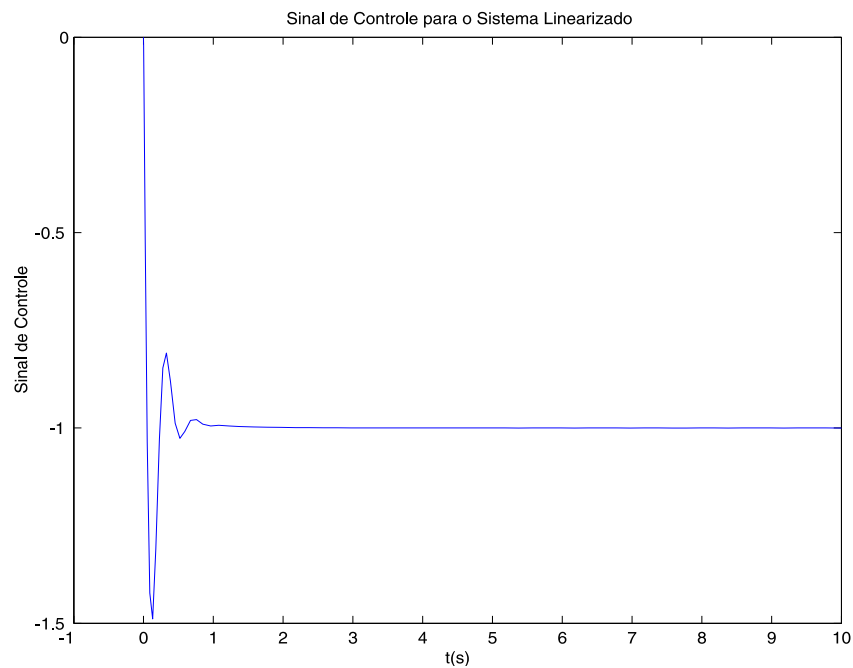


Figura 4.11: Sinal de controle para o pêndulo.

Fonte: Próprio autor.

conforme mostrado na Figura 4.5. Isso ocorre, pois a força é aplicada para direita, (sentido positivo) e a reação do sinal de controle no sentido contrário à força, levando o carro à posição negativa onde ocorre a estabilização do pêndulo. Dessa forma o carro fica estacionado próximo à posição de 0,015 metros.

4.4 Simulação do controle do pêndulo através do método LQR

Outra maneira de obter o controle do pêndulo invertido é através da técnica LQR. Esse tipo de controle consiste em obter uma matriz de ganho K do vetor de controle ótimo, que minimize o índice de desempenho J . O objetivo dessa seção foi obter o ganho do controlador para os dois vértices do politopo conforme apresentado em (4.4) e (4.5). Dessa forma, foi possível verificar as diferenças e vantagens entre o controle \mathcal{H}_2 robusto e o controle por sistemas com reguladores quadráticos ótimos. Para uma melhor comparação entre os resultados foi realizado o cálculo da norma \mathcal{H}_2 para os dois casos de controle. Para esta simulação foi montado o sistema de controle descrito pela Figura 4.12.

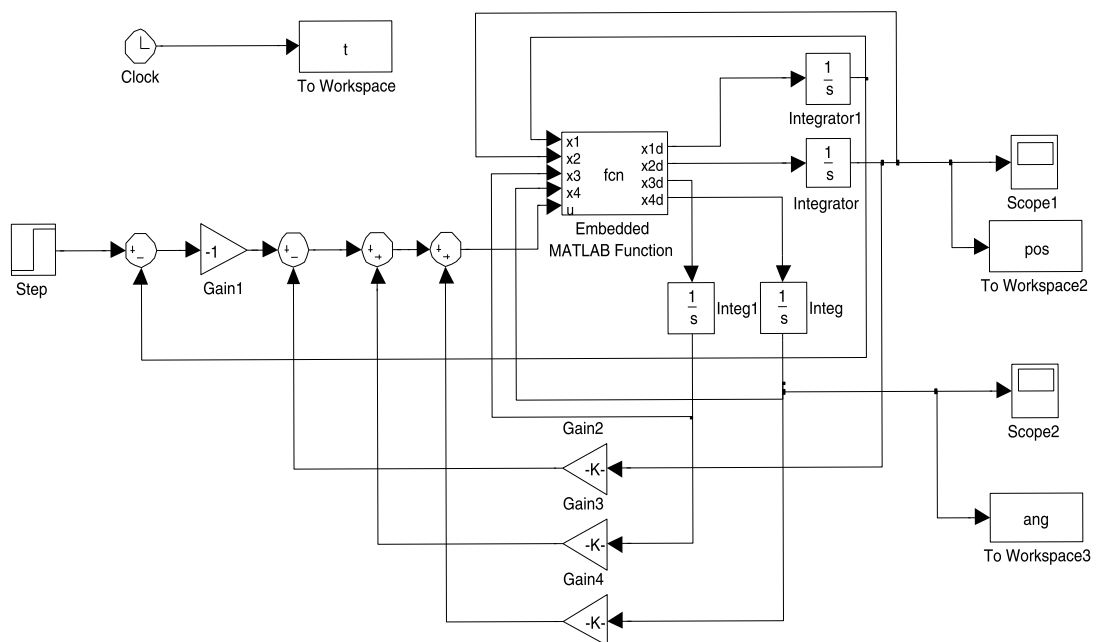


Figura 4.12: Modelo de controle do pêndulo usando sistema regulador ótimo.
Fonte: Próprio autor.

Para o modelo da Figura 4.12, foi utilizada uma realimentação em espaços de estados e as instruções dos blocos do Embedded MATLAB Function, descritos no Apêndice E. Nessa simulação, o programa do MATLAB considera a realimentação do sistema como sendo negativa, no entanto isso não interfere no resultado do controle, pois como na abordagem politópica foi considerado realimentação positiva, basta inverter o sinal do ganho do controlador para que os dois sistemas possam ser comparados. Foi considerado também que $Q = C'C$ e

que $R = 1$ e resolvendo o código interno do bloco fcn da Figura 4.12 no MATLAB conforme descrito no Apêndice F, obteve-se que o ganho com a massa do pêndulo sendo mínima foi de:

$$K_{\min} = \begin{bmatrix} -1,0000 & -1,4990 & 18,2814 & 2,5708 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

E para o caso da massa do pêndulo sendo máximo o ganho do controlador conforme Apêndice F foi de:

$$K_{\max} = \begin{bmatrix} -1,0000 & -1,6726 & 24,1204 & 2,6349 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Realizando a simulação para os dois valores do ganho encontrado para os dois politopos, a posição do carro móvel é descrita pela Figura 4.13.

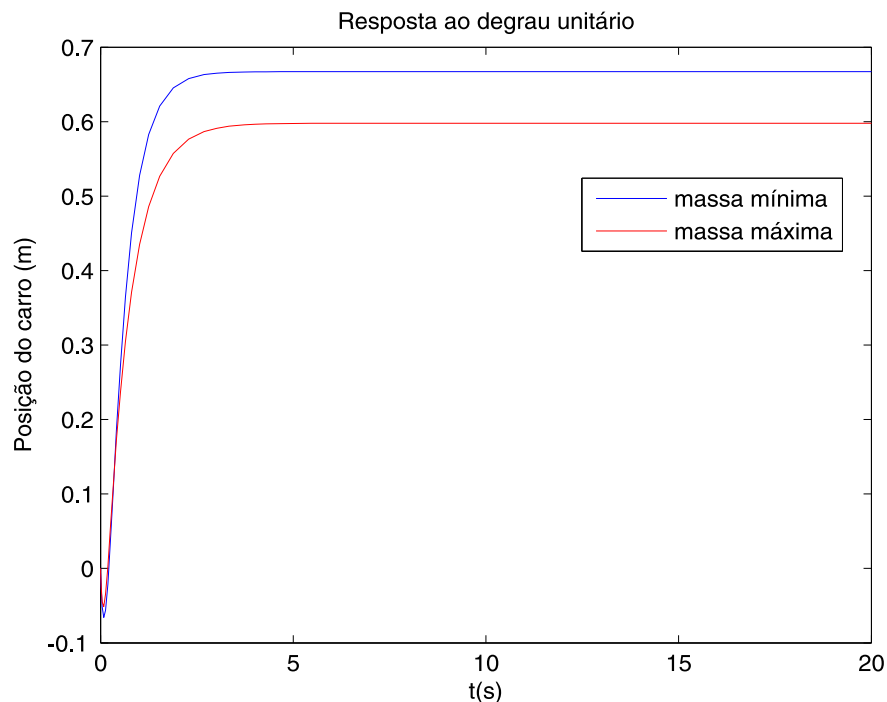


Figura 4.13: Posição do carro móvel considerando os dois vértices do politopo.
Fonte: Próprio autor

Na Figura 4.13 o sistema estabiliza-se em posições diferentes quando comparado à Figura 4.9. Essa diferença é um indicativo que o controle LQR é menos robusto em relação ao controle \mathcal{H}_2 quando ocorrem incertezas em algum dos parâmetros do sistema. Para uma melhor comparação desses resultados é calculada a norma \mathcal{H}_2 para ambas as estratégias de controle. Notou-se também que a trajetória da posição estabilizou-se agora em coordenada positiva quando comparada com o controle \mathcal{H}_2 robusto. Isso se deve apenas ao fato de apresentarem realimentações ou ganhos com sinais contrários. É importante destacar que

quando na tentativa de realimentar o controle LQR positivamente o sistema se torna instável, pois o MATLAB considera em seu programa interno que a realimentação será feita negativa. Para o caso do ângulo do pêndulo, considerando a massa sendo máxima e mínima, foi obtida a simulação da Figura 4.14.

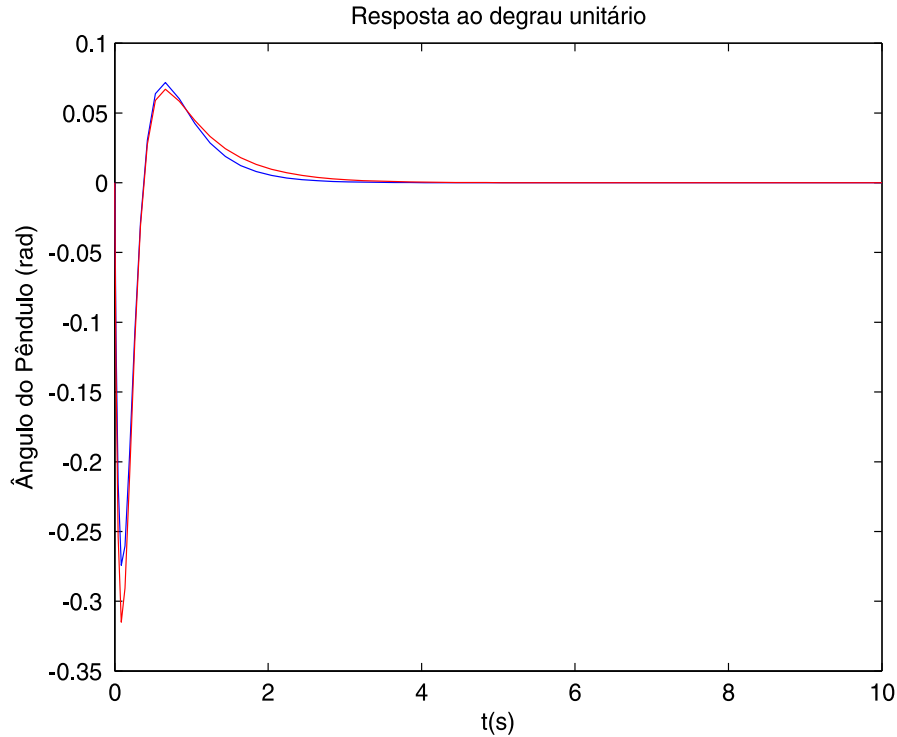


Figura 4.14: Ângulo do pêndulo considerando os dois vértices do politopo.
Fonte: Próprio autor

Pelo gráfico da Figura 4.14, verifica-se que, praticamente não há diferença no valor do ângulo para os dois valores da massa do pêndulo.

Para comparar os resultados obtidos pelo controle robusto com o controle LQR, deve-se analisar a norma \mathcal{H}_2 de ambos os sistemas. Para isso, foi desenvolvido um programa que calcula a norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle, obtendo-se o valor do ganho do controlador. Primeiramente, através da equação do ganho do controle robusto dado pela equação (4.11), e considerando a massa do pêndulo mínima, é obtida através do programa dado no Apêndice G uma norma \mathcal{H}_2 igual a 0,0637, e o resultado da simulação representado pelo Apêndice H. Para esse mesmo tipo de controle, analisa-se o outro vértice do politopo, onde a massa do pêndulo é agora considerada como sendo máxima. O cálculo na norma \mathcal{H}_2 é obtido agora através do Apêndice I, e o valor encontrado segundo o Apêndice J foi de 0,0465.

De maneira semelhante, calculou-se a norma \mathcal{H}_2 para o sistema de controle LQR, segundo Apêndice K, utilizando agora o ganho encontrado na equação (4.13). Dessa forma, através do Apêndice L, foi obtido que a norma \mathcal{H}_2 é igual

a 0,6636. Para o caso da massa do pêndulo sendo máxima, utiliza-se agora o ganho obtido em (4.14). Nessa simulação o código para a obtenção da norma \mathcal{H}_2 é apresentado no Apêndice M e o resultado do cálculo é apresentado no Apêndice N, sendo a norma \mathcal{H}_2 igual a 0,6047.

Para uma melhor comparação desses resultados foi montada uma tabela contendo algumas informações referentes a esses dois tipos de controle, conforme pode ser visto na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Norma \mathcal{H}_2 obtida para os valores mínimo e máximo da massa do pêndulo, considerando as estratégias de controle \mathcal{H}_2 e LQR.

Norma \mathcal{H}_2 obtida para cada vértice		
	Controle \mathcal{H}_2	Controle LQR
Massa mínima (m=0,24kg)	0,0637	0,6636
Massa máxima (m=0,56kg)	0,0465	0,6047

Verifica-se, pela Tabela 4.1, que a norma \mathcal{H}_2 calculada para o controle \mathcal{H}_2 para ambos os vértices são menores quando comparado com os resultados do controle LQR. Portanto o controle \mathcal{H}_2 apresenta uma melhor minimização da norma \mathcal{H}_2 .

4.5 Conclusão

Neste Capítulo foi analisado o sistema de controle considerando incertezas no modelo do pêndulo e realizadas simulações para as técnicas de controle \mathcal{H}_2 e LQR e um comparativo entre esses dois tipos de controle. Nos resultados encontrados verificou-se que o controle \mathcal{H}_2 apresentou melhor desempenho em relação à norma \mathcal{H}_2 , quando comparado com o controle LQR. No capítulo seguinte, serão apresentadas as conclusões finais do trabalho.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi analisado um sistema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estados, considerando a presença de incerteza de parâmetros no modelo do pêndulo invertido com intuito de possibilitar o uso desse controle no equilíbrio de pessoas em cadeiras de rodas. Para o sistema do pêndulo invertido, foi considerada como parâmetro incerto a massa do pêndulo, e dessa forma, foi desenvolvida uma lei de controle que estabilizasse o pêndulo em todo o domínio das incertezas. Através do código desenvolvido no MATLAB, foi obtido o ganho do controlador que garantisse a estabilização do sistema do pêndulo e, ao mesmo tempo, minimizasse a sua norma \mathcal{H}_2 , mesmo com a presença de incertezas no sistema, atingindo dessa forma a estabilidade robusta.

O projeto de uma estratégia de controle para uma certa faixa de valores da massa do pêndulo possibilita a aplicação do sistema para casos em que, por exemplo, pessoas com diferentes massas utilizam um mesmo equipamento móvel controlado para locomoções. Esta é uma vantagem em relação a métodos que se aplicam a um único valor dos parâmetros do controle.

O interesse em apresentar um problema de otimização sob a forma de LMI's reside no fato de se poder trabalhar com resolução numéricas e simulação por software. A resolução do controle por LMI's desenvolve-se via programação convexa, o que permite a implementação de algoritmos e códigos bastantes eficazes e com custo polinomial.

Por fim, foi realizada uma comparação com a técnica de controle LQR, considerando cada vértice do politopo. Dessa forma, foi possível comparar as normas \mathcal{H}_2 de ambos os controles de maneira numérica, conforme apresentado na Tabela 4.1, onde verifica-se que a técnica \mathcal{H}_2 apresenta um melhor desempenho da norma \mathcal{H}_2 , pois apresenta menor valor numérico. Comparando também as simulações para essas duas técnicas de controle, foi possível verificar graficamente algumas diferenças entre os comportamentos do controle \mathcal{H}_2 e LQR. Para o primeiro, ambas as simulações de posição e ângulo apresentaram resultado gráfico muito próximas; para o controle LQR, o resultado do ângulo de estabilização para a

massa mínima e máxima ficaram próximas, mas no entanto, a mudança no valor da massa do pêndulo também ocasionou uma mudança na posição do carro móvel.

A técnica de controle \mathcal{H}_2 mostrou-se bastante robusta para sistemas incertos, pois, mesmo mudando o parâmetro da massa do pêndulo em 40%, os resultados das simulações da posição do carro e ângulo do pêndulo ficaram praticamente idênticas, mostrando-se, portanto, um ótimo controle a ser aplicado em sistemas que sofrem pequenas ou grandes mudanças em seus parâmetros.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

- Comparação com resultados obtidos por outras técnicas não consideradas neste trabalho;
- Aplicação destas técnicas em um número maior de exemplos diferenciados para maior observação e tomada de conclusões;
- Implementação e aplicação prática dos controladores nos modelos apresentados pelos exemplos para observação experimental de campo;
- Desenvolvimento de novas técnicas de controle \mathcal{H}_2 que deem melhores resultados.
- Desenvolver e projetar um sistema de realimentação de estados baseado no controle com Lógica Fuzzy, usando o modelo Takagi-Sugeno para equilibrar o pêndulo na posição vertical.

5.2 Disseminações

- ROSA FILHO, J. E. A.; COVACIC, M. R., Controle robusto \mathcal{H}_2 do modelo do pêndulo invertido com incertezas politópicas. Artigo submetido à Revista Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas (2015).
- ROSA FILHO, J. E. A.; GENTILHO JUNIOR, E.; COVACIC, M. R.; GAINO, R., Técnica de controle otimizado aplicada a uma cadeira de rodas controlada por sopro e sucção. In: Anais do 11º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI- DINCON 2013), Fortaleza - CE, 6 páginas.
- ROSA FILHO, J. E. A.; GENTILHO JUNIOR, E.; COVACIC, M. R.; GAINO, R., Técnica de controle otimizado aplicada a uma cadeira de rodas

automatizada. In: Anais do 16º Encontro de Modelagem Computacional (EMC) 2013, Ilhéus - BA, 10 páginas.

- GENTILHO JUNIOR, E.; ROSA FILHO, J. E. A.; BIAZETO, A. R.; COVACIC, M. R.; CARVALHO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANCHES, M.A.A.; KOZAN, R. F.; JUNQUEIRA, M. V. N.; GAINO, R., Controle implementado em DSP para cadeira de rodas acionada por sopro e sucção. In: Anais do 11º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI-DINCON 2013), Fortaleza - CE, 6 páginas.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas -Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Uberlândia - MG: editora UFMG, 2004.
- AGUIRRE, L. A. *Enciclopédia de Automática: Controle e Automação, volume II*. São Paulo: Blucher, 2007. ISBN 9788521204091.
- ARAÚJO, H. X. *Sur La Stabilité des Systèmes Incertains Sujets à des Contraintes sur l'état et la commande*. Tese (Doutorado) — Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, 1992.
- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle ótimo H_2 e H_∞ com modificação de zeros para o problema de rastreamento usando lmi. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, v.15, n. 4, outubro 2004.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P.; GEROMEL, J. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, 1989.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
- BUGEJA, M. Non-linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system. *EUROCON, Ljubljana, Slovenia*, 2003.
- DOYLE, J. C. Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23, n. 6.4, p. 756–757, 1978.
- DOYLE, J. C. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 881–847, 1989.
- DUAN, G. *LMI's in control systems: analysis, design and applications*. Boca Raton: CRC, 2013.
- GABRIEL, G. W.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. Controle H_2 amostrado de sistemas lineares com saltos markovianos via realimentação de estado. *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática, MG*, setembro 2014.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. LMI control toolbox: for use with MATLAB. *Natick, MA, USA: MathWorks, Inc.*, 1995.
- GEROMEL, J.; PERES, P.; SOUZA, S. H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 19, n. 1, p. 23–27, 1992.
- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. Otimização multi-objetivo aplicada a síntese de controladores robustos H_2/H_∞ por realimentação de estados. *XV Congresso Brasileiro de Automática CBA*, 2004.

- GONÇALVES, E. N.; PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C. Síntese de controladores PID H_2/H_∞ robustos para sistemas incertos. *XVI Congresso Brasileiro de Automática CBA*, 2006.
- KANADA, T.; WATANABE, Y.; CHEN, G. Robust H_2 control for two-wheeled inverted pendulum using LEGO Mindstorms. *Australian Control Conference*, p. 136–141, 2011.
- LEITE, K. de S. *Estudo de um Sistema de Nível com Dois Tanques Interligados Sujeito a Perturbações Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.
- MOZELLI, L. A. *Controle Fuzzy para Sistemas Takagi-Sufeno: Condições aprimoradas e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PALHARES, M. R.; TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D. H_∞ e H_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science* 28(2):183-188, 1997.
- ROSA FILHO, J. E. A. *Contribuições de Controle Ótimo*. 2011. Trabalho de conclusão de curso apresentado na Universidade Estadual de Trabalho, Londrina.
- SANTOS, J. F. S. dos. *Problema de Controle $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ - Estudo Comparativo entre as Técnicas EBPE / CGO e LMI*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2005.
- SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- SODERSTROM, T.; STOICA, P. *System Identification*. Nova York: Prentice Hall, 1989. (Prentice Hall International Series In Systems And Control Engineering, v. 4). ISBN 9780138812362.
- YOULA, D.; JABR, H. A.; BONGIORNO, J. J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: Part I. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 21, p. 3–13, 1976.
- YOULA, D.; JABR, H. A.; BONGIORNO, J. J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers: Part II. *IEEE Transactions on Automatic Control*, n. 21, p. 313–338, 1976.
- ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative, seminorms, and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 2, n. 26, p. 301–320, 1981.

Apêndice A – Código do ganho que minimiza a norma \mathcal{H}_2

```

clear all;close all;
mmin=0.24;
mmax=0.56;
M=0.5;
l=0.15;
I=0.003;
g=9.81;
A1=[0 1 0 0; 0 0 (mmin^2*g*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0; 0 0 0 1;
    0 0 (mmin*g*l*(M+mmin))/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0]
A2=[0 1 0 0; 0 0 (mmax^2*g*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0; 0 0 0 1;
    0 0 (mmax*g*l*(M+mmin))/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0]
Bu1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2);
    0; (mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bu2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2);
    0; (mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Bw1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2);
    0; (mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bw2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2);
    0; (mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Cz1=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Cz2=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Dzu1=[0 ;0];
Dzu2=[0 ;0];
pause
n=4;
m=1;
setlmis([]);
J=lmivar(1,[m 1]);

```

```
X=lmivar(1,[n 1]);
Z=lmivar(2,[m n]);

lmiterm([-1 1 1 J],1,1);
lmiterm([-1 2 1 0],Bw1);
lmiterm([-1 2 2 X],1,1);

lmiterm([-2 1 1 J],1,1);
lmiterm([-2 2 1 0],Bw2);
lmiterm([-2 2 2 X],1,1);

lmiterm([3 1 1 X],A1,1,'s');
lmiterm([3 1 1 Z],Bu1,1,'s');
lmiterm([3 2 1 X],Cz1,1);
lmiterm([3 2 1 Z],Dzu1,1);
lmiterm([3 2 2 0],-1);

lmiterm([4 1 1 X],A2,1,'s');
lmiterm([4 1 1 Z],Bu2,1,'s');
lmiterm([4 2 1 X],Cz2,1);
lmiterm([4 2 1 Z],Dzu2,1);
lmiterm([4 2 2 0],-1);

otimizacao=getlmis;
sigma=zeros(1,15);
sigma(1)=1;
[fot,xof]=mincx(otimizacao,sigma);
Jot=dec2mat(otimizacao,xof,J)
Xot=dec2mat(otimizacao,xof,X)
Zot=dec2mat(otimizacao,xof,Z)

K=Zot*inv(Xot)

normaH2=sqrt(fot)
```

Apêndice B – Resultado do código para a obtenção do ganho que minimiza a norma \mathcal{H}_2

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1	
2	
3	
4	8.942316
5	6.586320
6	5.294599
7	2.602204
8	1.245743
9	1.245743
10	0.737410
11	0.737410
12	0.737410
13	0.591319
14	0.591319
15	0.591319
16	0.286282
17	0.286282
18	0.221992
19	0.221992
20	0.221992
21	0.187121
22	0.180302

*** new lower bound: -0.164131

```

23                0.180302
***              new lower bound:    0.124177
24                0.166315
25                0.161671
***              new lower bound:    0.152495
26                0.159262
***              new lower bound:    0.152607
27                0.159057
***              new lower bound:    0.154136
28                0.158717
***              new lower bound:    0.155182
29                0.158717
***              new lower bound:    0.155901
30                0.158260
***              new lower bound:    0.157266

```

```

Result: feasible solution of required accuracy
        best objective value:    0.158260
        guaranteed absolute accuracy: 9.94e-004
        f-radius saturation: 0.001% of R = 1.00e+009

```

```

Jot =
    0.1583

```

```

Xot =
    1.0e+003 *

```

Columns 1 through 3

```

    0.0039   -0.0144    0.0037
-0.0144    0.1898   -0.0508
    0.0037   -0.0508    0.0239
-0.0531    0.9279   -0.2988

```

Column 4

```

-0.0531
    0.9279
-0.2988

```

4.9232

Zot =

1.0e+003 *

Columns 1 through 3

0.0229 -1.1147 0.1487

Column 4

-5.7016

K =

Columns 1 through 3

66.8728 49.3949 -86.7713

Column 4

-15.0136

normaH2 = 0.3978

Apêndice C – Programação dos blocos fcn para o sistema em malha aberta e fechada

Programações dos blocos:

Bloco xddot: $(1/0.5)*(u(1)-u(2))$

Bloco thetaddot: $(1/0.003)*(-u(1)*0.15*\cos(u(3)+\pi/2)-u(2)*0.15*\sin(u(3))\backslash\backslash$
 $+\pi/2))$

Bloco Força 1: $0.4*(u(4)-0.15*(u(2))^2)*\sin(u(1)+\pi/2)+0.15*u(3)*\cos(u(1))\backslash\backslash$
 $+\pi/2))$

Bloco Força 2: $0.4*(0.15*((u(2))^2)*\cos(u(1)+\pi/2)+0.15*u(2)*\sin(u(1))\backslash\backslash$
 $+\pi/2)+9.8)$

Apêndice D - Programação dos fcn para o sistema linearizado em malha fechada

Programações dos blocos para a massa mínima:

$$\text{Bloco } \ddot{x}: (1/(0.5+0.24))*u(1)+0.24*0.15*u(2)$$

$$\text{Bloco } \ddot{\phi}: (1/(0.003+0.24*(0.15^2)))*(0.24*0.15*u(1)+0.24*9.8*0.15*u(2))$$

Programações dos blocos para a massa máxima:

$$\text{Bloco } \ddot{x}: (1/(0.5+0.56))*u(1)+0.56*0.15*u(2)$$

$$\text{Bloco } \ddot{\phi}: (1/(0.003+0.56*(0.15^2)))*(0.56*0.15*u(1)+0.56*9.8*0.15*u(2))$$

Apêndice E – Código no bloco do *Embedded MATLAB Function*

```
%massa do pêndulo mínima
function [x1d,x2d,x3d,x4d] =fcn(x1,x2,x3,x4,u)
x1d=x1
x2d=2.58*x3+1.7*u
x3d=x4
x4d=71.70*x3+7.31*u
%massa do pêndulo máxima
function [x1d,x2d,x3d,x4d] =fcn(x1,x2,x3,x4,u)
x1d=x1
x2d=7.29*x3+1.64*u
x3d=x4
x4d=86.83*x3+8.86*u
```

Apêndice F – Código para a obtenção do ganho do controlador pela técnica LQR

```
%valor da massa do pêndulo máxima
A1=[0 1 0 0;0 0 2.5841 0;0 0 0 1; 0 0 53.1176 0]
B1=[0;1.7073;0;7.3171]
Q=[1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 0]
R=[1]
lqr(A1,B1,Q,R)
%valor da massa do pêndulo mínima
A2=[0 1 0 0;0 0 7.3016 0;0 0 0 1; 0 0 92.1395 0]
B2=[0;1.6456;0;8.8608]
Q=[1 0 0 0;0 0 0 0;0 0 1 0; 0 0 0 0]
R=[1]
lqr(A2,B2,Q,R)
```

Apêndice G – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa mínima

```
close all;clear;clc
```

```
mmin=0.24;
```

```
mmax=0.56;
```

```
M=0.5;
```

```
l=0.15;
```

```
I=0.003;
```

```
g=9.81;
```

```
A1=[0 1 0 0; 0 0 (mmin^2*g*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0; 0 0 0 1; \\  
0 0 (mmin*g*l*(M+mmin))/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0]
```

```
A2=[0 1 0 0; 0 0 (mmax^2*g*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0; 0 0 0 1; \\  
0 0 (mmax*g*l*(M+mmax))/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0]
```

```
Bu1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0; \\  
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
```

```
Bu2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0; \\  
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
```

```
Bw1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0; \\  
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
```

```
Bw2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0;\\  
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
```

```
Cz1=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

```
Cz2=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

```
Dzu1=[0;0];
```

```
Dzu2=[0;0];
```

```
pause
```

```
K=[66.8728 49.3949 -86.7713 -15.0136];  \\  
% Ganho obtido com a estrategia adotada, considerando realimentacao POSITIVA  
Af=A1+Bu1*K      % Primeiro vertice do politopo, com realimentacao POSITIVA  
Cf=Cz1+Dzu1*K  
setlmis([]);  
Xo=lmivar(1,[4 1]);  
  
lmiterm([1 1 1 Xo],Af',1,'s');  
lmiterm([1 1 1 0],Cf'*Cf);  
lmiterm([-2 1 1 Xo],1,1);  
  
cH2=getlmis;  
% Definicao da funcao objetivo, para o primeiro vertice do politopo  
n=decnbr(cH2)  
sigma=zeros(1,n);  
for i=1:n  
    Xi=defcx(cH2,i,Xo);  
    sigma(i)=trace(Bw1'*Xi*Bw1);  
end  
pause  
[fot,xot]=mincx(cH2,sigma);  
Xoot=dec2mat(cH2,xot,Xo)  
normaH2=sqrt(fot)
```

Apêndice H – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa mínima

A1 =

0	1.0000	0	0
0	0	2.5841	0
0	0	0	1.0000
0	0	53.1176	0

A2 =

0	1.0000	0	0
0	0	7.3016	0
0	0	0	1.0000
0	0	92.1395	0

Bu1 =

0
1.7073
0
7.3171

Bu2 =

0
1.6456
0
8.8608

Bw1 =

0
1.7073

0
7.3171

Bw2 =

0
1.6456
0
8.8608

Af =

0	1.0000	0	0
114.1731	84.3328	-145.5620	-25.6330
0	0	0	1.0000
489.3132	361.4261	-581.7944	-109.8556

Cf =

1	0	0	0
0	0	1	0

n = 10

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1	
2	0.032369
3	0.013533
4	0.013533
5	0.013533
6	7.710213e-003
7	7.357187e-003
***	new lower bound: 2.596358e-003
8	6.582530e-003
***	new lower bound: 2.844646e-003
9	5.213668e-003
***	new lower bound: 3.345433e-003
10	4.687334e-003

```

***          new lower bound: 3.626914e-003
  11          4.687334e-003
***          new lower bound: 3.784243e-003
  12          4.165435e-003
***          new lower bound: 3.806483e-003
  13          4.152756e-003
***          new lower bound: 3.897741e-003
  14          4.114519e-003
***          new lower bound: 3.958093e-003
  15          4.069331e-003
***          new lower bound: 3.998358e-003
  16          4.051348e-003
***          new lower bound: 4.012860e-003

```

```

Result:  feasible solution of required accuracy
         best objective value: 4.051348e-003
         guaranteed absolute accuracy: 3.85e-005
         f-radius saturation:  0.000% of R = 1.00e+009

```

```

Xoot =
  0.5989    0.1690   -0.2029   -0.0405
  0.1690    0.0870   -0.0777   -0.0208
 -0.2029   -0.0777    0.1422    0.0203
 -0.0405   -0.0208    0.0203    0.0050

```

```

normaH2 = 0.0637

```

Apêndice I – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa máxima

```

close all;clear;clc

mmin=0.24;
mmax=0.56;
M=0.5;
l=0.15;
I=0.003;
g=9.81;

A1=[0 1 0 0; 0 0 (mmin^2*g*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0; 0 0 0 1; \
0 0 (mmin*g*l*(M+mmin))/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0]
A2=[0 1 0 0; 0 0 (mmax^2*g*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0; 0 0 0 1; \
0 0 (mmax*g*l*(M+mmax))/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0]
Bu1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0;\
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bu2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0;\
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Bw1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0;\
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bw2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0; \
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Cz1=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Cz2=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Dzu1=[0;0];
Dzu2=[0;0];
pause

```

```
K=[66.8728 49.3949 -86.7713 -15.0136]; \\  
% Ganho obtido com a estrategia adotada, considerando realimentacao POSITIVA  
Af=A2+Bu2*K      % Segundo vertice do politopo, com realimentacao POSITIVA  
Cf=Cz2+Dzu2*K  
setlmis([]);  
Xo=lmivar(1,[4 1]);
```

Apêndice J – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para estratégia de controle \mathcal{H}_2 para massa máxima

A1 =

0	1.0000	0	0
0	0	2.5841	0
0	0	0	1.0000
0	0	53.1176	0

A2 =

0	1.0000	0	0
0	0	7.3016	0
0	0	0	1.0000
0	0	92.1395	0

Bu1 =

0
1.7073
0
7.3171

Bu2 =

0
1.6456
0
8.8608

Bw1 =

0

1.7073

0

7.3171

Bw2 =

0

1.6456

0

8.8608

Af =

0	1.0000	0	0
110.0438	81.2827	-135.4866	-24.7059
0	0	0	1.0000
592.5438	437.6763	-676.7201	-133.0319

Cf =

1	0	0	0
0	0	1	0

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1	
2	0.017368
3	6.878980e-003
4	6.878980e-003
5	5.872956e-003
***	new lower bound: 1.908216e-004
6	4.945792e-003
***	new lower bound: 5.293680e-004
7	4.530932e-003
***	new lower bound: 1.145175e-003
8	3.104111e-003
***	new lower bound: 1.568502e-003
9	2.574677e-003

```
***                new lower bound: 1.825307e-003
10                 2.278416e-003
***                new lower bound: 1.974206e-003
11                 2.201739e-003
***                new lower bound: 2.055216e-003
12                 2.174052e-003
***                new lower bound: 2.101160e-003
13                 2.160410e-003
***                new lower bound: 2.139886e-003
```

```
Result: feasible solution of required accuracy
best objective value: 2.160410e-003
guaranteed absolute accuracy: 2.05e-005
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009
```

Xoot =

```
0.5786   0.1538   -0.1676   -0.0294
0.1538   0.0777   -0.0580   -0.0148
-0.1676  -0.0580    0.1281    0.0123
-0.0294  -0.0148    0.0123    0.0028
```

normaH2 = 0.0465

Apêndice K – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo mínima

```
close all;clear;clc
```

```
mmin=0.24;
```

```
mmax=0.56;
```

```
M=0.5;
```

```
l=0.15;
```

```
I=0.003;
```

```
g=9.81;
```

```
A1=[0 1 0 0; 0 0 (mmin^2*g*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0; 0 0 0 1; \\  
0 0 (mmin*g*l*(M+mmin))/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0]
```

```
A2=[0 1 0 0; 0 0 (mmax^2*g*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0; 0 0 0 1; \\  
0 0 (mmax*g*l*(M+mmax))/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0]
```

```
Bu1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0;\\  
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
```

```
Bu2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0; \\  
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
```

```
Bw1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0; \\  
(mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
```

```
Bw2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0; \\  
(mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
```

```
Cz1=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

```
Cz2=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
```

```
Dzu1=[0;0];
```

```
Dzu2=[0;0];
```

```
pause
```

```

K=[-1.0000 -1.4990 18.2814 2.5708];  \
% Ganho obtido com a estrategia adotada, considerando realimentacao POSITIVA
Af=A1-Bu1*K      % Primeiro vertice do politopo, com realimentacao POSITIVA
Cf=Cz1-Dzu1*K

setlmis([]);
Xo=lmivar(1,[4 1]);

lmiterm([1 1 1 Xo],Af',1,'s');
lmiterm([1 1 1 0],Cf'*Cf);

lmiterm([-2 1 1 Xo],1,1);

cH2=getlmis;

% Definicao da funcao objetivo, para o primeiro vertice do politopo
n=decnbr(cH2)
sigma=zeros(1,n);
for i=1:n
    Xi=defcx(cH2,i,Xo);
    sigma(i)=trace(Bw1'*Xi*Bw1);
end
pause
[fot,xot]=mincx(cH2,sigma);
Xoot=dec2mat(cH2,xot,Xo)
normaH2=sqrt(fot)

```

Apêndice L – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo mínima

A1 =

0	1.0000	0	0
0	0	2.5841	0
0	0	0	1.0000
0	0	53.1176	0

A2 =

0	1.0000	0	0
0	0	7.3016	0
0	0	0	1.0000
0	0	92.1395	0

Bu1 =

0
1.7073
0
7.3171

Bu2 =

0
1.6456
0
8.8608

Bw1 =

0
1.7073

0
7.3171

Bw2 =

0
1.6456
0
8.8608

Af =

0	1.0000	0	0
1.7073	2.5593	-28.6280	-4.3892
0	0	0	1.0000
7.3171	10.9683	-80.6488	-18.8107

Cf =

1	0	0	0
0	0	1	0

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1		
2	1.076915	
3	0.608934	
4	0.608934	
5	0.529046	
***	new lower bound:	0.350107
6	0.517023	
***	new lower bound:	0.388756
7	0.517023	
***	new lower bound:	0.407660
8	0.470204	
***	new lower bound:	0.410145
9	0.470204	
***	new lower bound:	0.419525
10	0.446167	

```
***          new lower bound:      0.422740
  11          0.443590
***          new lower bound:      0.429365
  12          0.442011
***          new lower bound:      0.433410
  13          0.440358
***          new lower bound:      0.436175
```

```
Result: feasible solution of required accuracy
        best objective value:      0.440358
        guaranteed absolute accuracy: 4.18e-003
        f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009
```

Xoot =

```
  1.2001    0.6738   -1.4519   -0.2256
  0.6738    0.5246   -1.1781   -0.1839
 -1.4519   -1.1781    2.8293    0.4245
 -0.2256   -0.1839    0.4245    0.0655
```

normaH2 = 0.6636

Apêndice M – Cálculo da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo máxima

```

A1=[0 1 0 0; 0 0 (mmin^2*g*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0; 0 0 0 1;\ \
    0 0 (mmin*g*l*(M+mmin))/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2) 0]
A2=[0 1 0 0; 0 0 (mmax^2*g*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0; 0 0 0 1;\ \
    0 0 (mmax*g*l*(M+mmax))/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2) 0]
Bu1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0; \ \
    (mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bu2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0;\ \
    (mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Bw1=[0; (I+mmin*l^2)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2); 0; \ \
    (mmin*l)/((M+mmin)*I+M*mmin*l^2)]
Bw2=[0; (I+mmax*l^2)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2); 0;\ \
    (mmax*l)/((M+mmax)*I+M*mmax*l^2)]
Cz1=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Cz2=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
Dzu1=[0;0];
Dzu2=[0;0];
pause

K=[-1.0000 -1.6726 24.1204 2.6349]; \ \
% Ganho obtido com a estrategia adotada, considerando realimentacao POSITIVA
Af=A2-Bu2*K % Segundo vertice do politopo, com realimentacao POSITIVA
Cf=Cz2-Dzu2*K

setlmis([]);
Xo=lmivar(1,[4 1]);

lmiterm([1 1 1 Xo],Af',1,'s');

```

```
lmiterm([1 1 1 0],Cf'*Cf);
lmiterm([-2 1 1 Xo],1,1);

cH2=getlmis;
pause
n=decnbr(cH2);
sigma=zeros(1,n);
for i=1:n
    Xi=defcx(cH2,i,Xo);
    sigma(i)=trace(Bw2'*Xi*Bw2);
end

[fot,xot]=mincx(cH2,sigma);
Xoot=dec2mat(cH2,xot,Xo)
normaH2=sqrt(fot)
```

Apêndice N – Resultado da norma \mathcal{H}_2 para qualquer estratégia de controle com a massa do pêndulo máxima

A1 =

0	1.0000	0	0
0	0	2.5841	0
0	0	0	1.0000
0	0	53.1176	0

A2 =

0	1.0000	0	0
0	0	7.3016	0
0	0	0	1.0000
0	0	92.1395	0

Bu1 =

0
1.7073
0
7.3171

Bu2 =

0
1.6456
0
8.8608

Bw1 =

0
1.7073

0
7.3171

Bw2 =

0
1.6456
0
8.8608

Af =

0	1.0000	0	0
1.6456	2.7524	-32.3902	-4.3359
0	0	0	1.0000
8.8608	14.8205	-121.5856	-23.3472

Cf =

1	0	0	0
0	0	1	0

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

1		
2	1.025593	
3	0.540671	
4	0.540671	
5	0.462643	
***	new lower bound:	0.206133
6	0.454839	
***	new lower bound:	0.286864
7	0.454839	
***	new lower bound:	0.318809
8	0.397701	
***	new lower bound:	0.323167
9	0.394380	
***	new lower bound:	0.339538
10	0.394380	

```

***          new lower bound:      0.348052
  11          0.372404
***          new lower bound:      0.350697
  12          0.369280
***          new lower bound:      0.356599
  13          0.366923
***          new lower bound:      0.360185
  14          0.365643
***          new lower bound:      0.362170
    
```

```

Result: feasible solution of required accuracy
        best objective value:      0.365643
        guaranteed absolute accuracy: 3.47e-003
        f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009
    
```

```

Xoot =
  1.3130    0.7959   -1.4481   -0.2043
  0.7959    0.6790   -1.2670   -0.1798
 -1.4481   -1.2670    2.4982    0.3417
 -0.2043   -0.1798    0.3417    0.0480
    
```

normaH2 =0.6047