



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

RICARDO ALEXANDRE AMARAL

**ESTUDO DA ROTACAO VIA FORMALISMO DE GRUPOS**

---

Londrina  
2012

RICARDO ALEXANDRE AMARAL

**ESTUDO DA ROTACAO VIA FORMALISMO DE GRUPOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho.

Londrina  
2012

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

A485e Amaral, Ricardo Alexandre.

Estudo da rotação via formalismo de grupos / Ricardo Alexandre Amaral. –  
Londrina, 2012.  
x, 31 f. : il.

Orientador: Manuel Simões Filho.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro  
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Física da matéria condensada – Teses. 2. Grupos de rotação – Teses. 3. Teoria  
dos grupos – Teses. 4. Estruturas algébricas ordenadas – Teses. 5. Simetria (Física)  
– Teses. I. Simões Filho, Manuel. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de  
Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 539.2

**RICARDO ALEXANDRE AMARAL**

**ESTUDO DA ROTACAO VIA FORMALISMO DE GRUPOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial a obtenção do título de Mestre.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Manuel Simões Filho  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof Dr. Edson Laureto  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Suhaila Maluf Shibli  
Universidade de Sao Paulo

Londrina, 30 de janeiro de 2012.

*aos meus pais (in memoriam)*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Manuel pelo aceite, a enorme paciência e ajuda nesses anos.

A minha namorada, Lena, pelo carinho e por me suportado. As minhas tias, que me deram um lugar para morar. Aos amigos da uel: David, Rodrigo, Maurício e Flavio, pelas discussões e risadas.

A banca examinadora pelo cuidado no exame e correção da proposta do trabalho e principalmente pelas considerações à este sugeridas.

Ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina pela infraestrutura.

A secretaria de pós-graduação do CCE, representada na figura da Regina, pelo auxílio com aos tramites burocráticos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ao Donald E. Knuth's, Leslie Lamport e demais desenvolvedores pelo

AMARAL, R. A. **Estudo da rotação via formalismo de grupos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

## RESUMO

Nesta dissertação utilizamos o conceito de grupos para estudar a rotação, retratando-a por meio deste formalismo, que permite uma descrição algébrica da rotação. A teoria de grupos e o ramo da matemática direcionado a investigar como estruturas algébricas (números, funções, vetores, etc) se transformam frente a uma dada operação, que por sua vez e também escrita através de uma estrutura específica denominada operador. Derivamos da definição grupo, o grupo de rotação, o qual define-se como a estrutura capta as propriedades de um sistema sob rotação e o implementamos o estudo da rotação. Sob esta perspectiva, primeiramente analisamos rotações físicas, reais, intuitivas e através das quais retratamos as principais características da rotação, exemplo as regras de comutação do momento angular. O passo seguinte, cuja intenção e comumente associada aos estudos de estruturas abstratas como grupos, foi o estudo de um sistema físico inerentemente abstrato, a rotação no espaço complexo, e análise dos resultados de como estas estruturas diferentes (rotação no plano euclidiano e complexo) se transformam de forma similar.

**Palavras-chave:** Grupos. Rotação. Momento Angular.

AMARAL, R. A. **Study the rotation via formalism of groups**. 2012. Dissertação (Master's Degree in Physics) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

## **ABSTRACT**

This essay uses the concept of groups to study the rotation, portraying it through this formalism, which allows algebraic description of rotation. The group theory is a branch of mathematics aimed to investigate how algebraic structures (numbers, functions, vectors, etc.) transform against a given operation, on the other hand is also written through a special structure called operator. We derived of the group definition, the rotation group, which is defined as the structure that captures the properties of a system under spin and we implemented the study of the rotation. Under this perspective, first we analyzed physical rotations through which portrayed the main characteristics of rotation, exemplifying the switching of the angular momentum rules. On the following step, the purpose was commonly associated with the study of abstract structures such as groups, we studied a physical system inherently abstract, the rotation in complex space. Finally, we compared the results of different structures: rotation in the Euclidean system and in the complex space too, which transformed similarly, in other words it also have a similar algebra.

**Key-words:** Groups. Rotation. Angular Momentum. Operator.

# ESTUDO DA ROTAÇÃO VIA FORMALISMO DE GRUPOS

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Estruturas Algébricas e Grupos</b>	<b>3</b>
2.1	Conjuntos . . . . .	3
2.2	Funções . . . . .	5
2.3	Vetores . . . . .	5
2.4	Espaço Vetorial . . . . .	6
2.5	Matrizes . . . . .	7
2.6	Grupo . . . . .	8
2.7	Representações . . . . .	10
2.8	Corpo . . . . .	10
<b>3</b>	<b>O grupo de Rotações <math>SO(n)</math></b>	<b>12</b>
3.1	O grupo de Rotações no Plano . . . . .	12
3.1.1	Propriedades do Grupo de Rotações no Plano: $SO(2)$ . . . . .	14
3.1.2	O gerador do Grupo de Rotação no Plano . . . . .	16
3.2	O grupo de Rotações em Três Dimensões $SO(3)$ . . . . .	17
3.2.1	Propriedades do Grupo de Rotação no Espaço . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Rotações no Espaço Complexo</b>	<b>23</b>
4.1	Espaço de Hilbert . . . . .	23
4.2	Momento Angular e Operadores de Rotação . . . . .	25
4.3	Homorfismo entre o Grupo $SU(2)$ e $SO(3)$ . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>30</b>

**Referências**

# Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica de vetores no plano euclidiano tridimensional. Versores $\hat{x}$ , $\hat{y}$ , e $\hat{z}$ . Vetores $\vec{A} = a\hat{x}$ , $\vec{B} = b\hat{y}$ e $\vec{C} = c\hat{z}$ . Soma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ . . . . .	6
3.1	Representação da operação da rotação: $(x, y) \rightarrow (x, y)'$ , onde $\phi$ , é o angulo de rotação. . . . .	13

*Sonhos não envelhecem...*

M. Nascimento, L. Borges , *Clube da Esquina no.2*  
(1972).

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de grupos é o aparato matemático que investiga como elementos de um determinado conjunto se relacionam frente a uma operação. Embora abstrata, a teoria de grupos fornece informações significativas sobre a estrutura das simetrias encontradas na natureza, e uma maneira de lidar com elas de uma forma operacional<sup>[1][2]</sup>.

A intenção deste trabalho é analisar a rotação, via a perspectiva fornecida pela teoria de grupos. Desta forma vamos abordar de modo pormenorizado, as regras que tecem um sistema sob rotação, pela construção do *grupo de rotação* que capta e reproduz as características inerentes da rotação como por exemplo, as regras de comutação do momento angular.

Alia-se assim a teoria de grupos à investigação da rotação por meio de operadores que atuam nos vetores do sistema e preservam as condições de contorno e simetrias físicas relacionadas a operação e suas propriedades operatórias.

O segundo capítulo apresenta um referencial teórico básico que dá suporte para a introdução da idéia de grupo, através dos conceitos de conjuntos, funções, vetores, matrizes, espaço vetorial e corpo.

O terceiro capítulo implementa o conceito de grupo para a rotação em duas dimensões,  $SO(2)$ , e o analisa quanto a sua fidelidade para com a descrição física da operação. Depois de definir a rotação no plano, amplia-se a discussão e examina-se a rotação para o espaço euclidiano tridimensional,  $\mathbf{E}^3$ , através do grupo de rotação  $SO(3)$ , relacionando-o às regras de comutação do momento angular.

No capítulo 4 aplicamos o conceito de grupo de rotação para o estudo

de um sistema inerentemente abstrato, o espaço complexo, no qual é possível entender o porquê das técnicas de grupos e representações terem ganho força depois do advento da mecânica quântica.

O último capítulo faz revisão da intenção geral do trabalho, dos resultados, e das principais propriedades obtidas ao longo da discussão, como por exemplo, a maneira com que estão interligados os operadores e os objetos nos quais estes atuam, e o sucesso da descrição via grupos de uma operação física.

## Capítulo 2

# Estruturas Algébricas e Grupos

O presente capítulo expõe as estruturas básicas pelas quais será construído o conceito de grupo, e conseqüentemente, dará suporte para a discussão da rotação através desta linguagem. Serão apresentadas estruturas algébricas elementares como conjuntos, funções e vetores, e através delas introduziremos o assunto que discutiremos neste trabalho.

A intenção é, deste modo, abordar o conceito de grupo à partir de ferramentas matemáticas conhecidas, contextualizando o aparato axiomático através das estruturas matemáticas mais comuns. Iremos apresentar o conceito de grupo e vincula-lo à rotação, especificando-o de modo que atenda à descrição da rotação para o espaço euclidiano.

### 2.1 Conjuntos

Dentre os conceitos matemáticos estruturantes na construção do conceito de grupo, destaca-se a noção de *conjunto*, cuja idéia central é associar objetos e classes de objetos, identificando-os por alguma característica.

**Definição 2.1 *Conjunto*.** *É uma estrutura matemática que representa a idéia de coleção. Assim, um conjunto é definido como uma coleção de objetos genéricos, denominados elementos.*

Os elementos de um conjunto podem então representar: carros, bolas, tipos numéricos, operações, funções, etc. A importância da discussão de conjuntos reside na identificação de tipos e subtipos que nos ajudam a definir o grau

de generalidade da estrutura abordada. Para a classe dos números, a noção de conjuntos permite organizá-los, segundo uma regra de seleção:

**Exemplo 2.1** *Segue abaixo alguns conjuntos numéricos importantes.*

**Números Naturais:** *é a coleção formada pelos números utilizados na contagem:*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

**Números Inteiros:** *são os números formados pelos números naturais, o negativo destes e o zero:*

$$\mathbb{Z} = \{-n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

**Números Racionais:** *são quantidades que resultam de divisões entre inteiros:*

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}.$$

**Números Irracionais:** *números que não podem ser escritos através de um quociente de inteiros<sup>1</sup>:*

$$\mathbb{S} = \{\ni a/b, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}; \text{ ex: } \pi = 3, 1414, \sqrt{2}, \dots$$

**Números Reais:** *inclui todos os conjuntos numéricos citados anteriormente em uma mesma classe:*

$$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{S} \in \mathbb{R}.$$

**Números Imaginários:** *conjunto que admite raízes de números negativos:*

$$\mathbb{I} = \{\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{-1} = ai : a \in \mathbb{R}\}, \text{ onde } \sqrt{-1} = i.$$

**Números Complexos:** *compostos de parte imaginária e parte real:*

$$\mathbb{C} = \{a \pm ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto há relações de hierarquia entre os tipos numéricos, devido a seu grau de abrangência, permitindo escrever subtipos, no caso, *subconjuntos*. Deste modo, podemos organizar as classes numéricas como:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$ <sup>2</sup> e os resultados válidos para uma classe mais geral contém os resultados de suas subclasses, que é idéia a central que será também usada para analisar as estruturas matemáticas relacionadas ao conceito de grupos.

---

<sup>1</sup>  $\ni$  significa não pertence

<sup>2</sup>  $\subset$  significa contém ou “está contido em”

## 2.2 Funções

Também merece destaque a idéia de *função*, que essencialmente caracteriza a dependência entre quantidades. Desta maneira, dado dois conjuntos  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  e  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ , podemos dizer que estes exibem uma dependência funcional de modo que seja possível escrever uma relação que para cada  $c_n$  exista um único valor de  $f(c_n)$ .

É necessário também indentificar as quantidades como discretas ou contínuas, respectivamente, relacionadas à quantidades interruptas e não interruptas com relação a um intervalo. Exemplo  $\mathbb{R} \in [a, b]$  é contínua, enquanto  $\mathbb{N} \in [a, b]$  não é.

## 2.3 Vetores

Utiliza-se para representar quantidades orientadas, a noção de *vetor*, que tem a interpretação geométrica de um segmento de reta orientado, com magnitude (tamanho) e uma orientação: direção e sentido. Veremos que a rotação atua especificamente sobre os vetores de um sistema, já que girar é mudar a orientação.

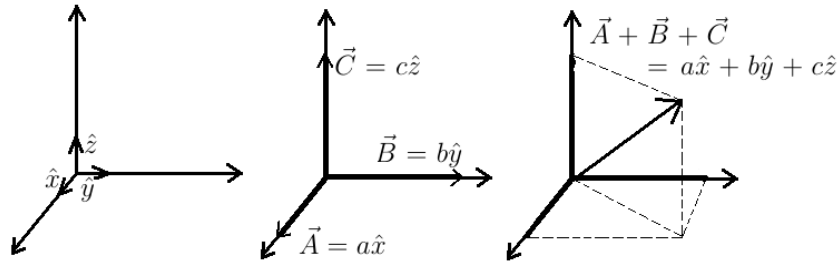
Em um contexto mais amplo, um vetor é parte de um espaço vetorial<sup>[3]</sup>. Por exemplo o *espaço euclidiano tridimensional*,  $\mathbf{E}^3$ , é composto de vetores  $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots\}$ <sup>3</sup>, que são escritos em função das *bases* deste espaço,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Base, portanto, é o componente estrutural mínimo relacionado a um tipo de estrutura matemática, do qual todos os demais objetos da classe são linearmente dependentes.

De outro modo, diz-se que são linearmente independentes, as estruturas que não são expansões com relação a uma base. Para um conjunto de vetores  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ , caracteriza-se esta independência quando  $a = b = c = 0$  é a única solução para a equação:

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = 0. \quad (2.1)$$

---

<sup>3</sup>notaremos vetores também como  $V$ , utilizando a outra notação apenas quando, for necessário para evitar confusão.



**Fig. 2.1** – Representação geométrica de vetores no plano euclidiano tridimensional. Versores  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , e  $\hat{z}$ . Vetores  $\vec{A} = a\hat{x}$ ,  $\vec{B} = b\hat{y}$  e  $\vec{C} = c\hat{z}$ . Soma  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ .

**Exemplo 2.2** Considere os vetores  $\vec{A} = a\hat{x}$ ,  $\vec{B} = b\hat{y}$  e  $\vec{C} = c\hat{z}$  inseridos em um sistema euclidiano tridimensional, onde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , e  $\hat{z}$  são os versores<sup>4</sup>, figura 2.1. Observando as projeções destes vetores podemos escrever:

1.  $\vec{A} = a\hat{x} = (a, 0, 0)$  depende apenas da direção  $\hat{x}$ ;
2.  $\vec{A} + \vec{B} = a\hat{x} + b\hat{y} = (a, b, 0)$  é função das direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ ;
3.  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z} = (a, b, c)$ , é formado pelas três direções que compõem o sistema euclidiano tridimensional.

## 2.4 Espaço Vetorial

Estendendo os conceitos expostos acima, podemos abstrair que vetores e escalares compõem um espaço regido por regras operatórias próprias que os associam: a adição vetorial e a multiplicação por números reais.

**Definição 2.2 Espaço vetorial:** Reconhece-se como espaço vetorial a estrutura matemática formada pelos conjuntos de escalares  $\{F : f_0, f_1, f_2, \dots\}$ , e de vetores  $\{V : v_0, v_1, v_2, \dots\}$  para os quais estão definidas as operações de adição vetorial (+) e multiplicação escalar ( $\cdot$ ) e, deste modo, satisfazem os seguintes axiomas:

1.  $v_i, v_j \in V \rightarrow v_i + v_j \in V$ ; fechado em relação à soma;
2.  $v_i + (v_j + v_k) = (v_i + v_j) + v_k$ ; associativo quanto à soma;
3.  $v_0 + v_i = v_i = v_i + v_0$ ; há um elemento nulo em relação à soma;

---

<sup>4</sup>vetores unidimensionais

4.  $v_i + (-v_i) = v_0 = -v_i + v_i$ ; há um elemento inverso em relação à soma;
  5.  $v_i + v_j = v_j + v_i$ ; comutativo em relação à soma.
1.  $f_i \in F, v_j \in V \rightarrow f_i \cdot v_j \in V$ ; fechado em relação à multiplicação;
  2.  $f_i \cdot (f_j \cdot v_k) = (f_i \cdot f_j) \cdot v_k$ ; associativo com relação à multiplicação;
  3.  $1 \cdot v_i = v_i \cdot 1$  elemento neutro da multiplicação;
  4.  $f_i \cdot (v_j + v_k) = f_i \cdot v_j + f_i \cdot v_k$  associativo quanto à multiplicação sobre soma;
  5.  $(f_i + f_j) \cdot v_k = f_i \cdot v_k + f_j \cdot v_k$  associativo quanto à soma sobre multiplicação.

## 2.5 Matrizes

Os operadores que iremos tratar são escritos na forma de matrizes, que expressam a transformação de vetores em um espaço vetorial. Assim a transformação  $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$  em  $\mathbf{E}^3$  pode ser formulada por meio de um sistema de equações, ou de uma matriz:

$$\begin{cases} x' = m_{1,1}x + m_{1,2}y + m_{1,3}z \\ y' = m_{2,1}x + m_{2,2}y + m_{2,3}z \\ z' = m_{3,1}x + m_{3,2}y + m_{3,3}z \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Os tipos mais comuns de matrizes são:

**Matriz Quadrada:** cujo o número de linhas,  $n$ , é igual ao de colunas,  $m$ :

$$M = \{M_{n,m} : n = m\}.$$

**Matriz Diagonal:** todos os elementos, exceto os da diagonal, linha  $i$ , coluna  $j$ , são nulos:

$$E = \{m_{i,j} = 0 : i \neq j; m_{i,j} \neq 0 : i = j\}.$$

**Matriz Identidade:** matriz diagonal onde os elementos não nulos são iguais a um:

$$E = \{m_{i,j} = 0 : i \neq j; m_{i,j} = 1 : i = j\}.$$

**Matriz Inversa:** dada a matriz,  $M$ , então  $M^{-1}$  é a sua inversa, caso:

$$M.M^{-1} = E;$$

**Matriz Linha:** constituída por elementos organizados em apenas uma linha:

$$M = (m_{1,1} \quad m_{1,2} \quad m_{1,3}).$$

**Matriz Coluna:** apresenta os seus elementos distribuidos sobre uma única coluna <sup>5</sup>

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ m_{3,1} \end{pmatrix}$$

As operações mais comuns relacionadas a uma matriz são:

**Multiplicação por escalar:**  $c \in \mathbb{R}$  e  $M = M_{3,3}$ :

$$c.M = \begin{pmatrix} cm_{1,1} & cm_{1,2} & cm_{1,3} \\ cm_{2,1} & cm_{2,2} & cm_{2,3} \\ m_{3,1} & cm_{3,2} & cm_{3,3} \end{pmatrix}.$$

**Matriz Transposta:** é a matriz obtida trocando as linhas por colunas:

$$M_{ij}^T = M_{ji}.$$

**Traço:** é a soma dos elementos da diagonal de uma matriz quadrada:

$$Tr(M_{nm}) = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nm}.$$

**Determinante:** é uma fator relacionado à condição de inversão de uma matriz, e definido como a diferença entre os produtos da diagonal principal e da diagonal secundária:

$$\det(M_{22}) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}.$$

## 2.6 Grupo

Apresentadas as estruturas algébricas básicas, iremos introduzir o conceito de grupo que, inicialmente, é constituído por um conjunto de elementos e uma operação *fechada*, que gera sempre elementos pertencentes à esta classe.

Dessa forma, se os elementos  $G_1, G_2, G_3, \dots$ , e a operação  $\otimes$  formam um grupo, isto quer dizer que estes podem ser escritos como um conjunto  $G =$

---

<sup>5</sup>as matrizes linha e coluna são vetores

$\{G_1, G_2, G_3, \otimes, \dots\}$ , que é binário, fechado, tem elemento neutro e inverso, com relação à  $\otimes$ :

**Definição 2.3 Grupo:** Dado um conjunto  $G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_n\}$  pode-se dizer que esta estrutura constitui um grupo em relação à operação  $\otimes$  se:

1. há uma operação, denominada genericamente de multiplicação  $\otimes$ , a qual é associativa, isto é:  $G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) = (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3$ ;
2. deve haver o elemento unitário,  $E$ , o qual comuta com todos os outros elementos do grupo:  $E \otimes G_n = G_n \otimes E$  para qualquer  $G_n \in G$ ;
3. todo elemento  $G_n \in G$  possui inverso  $G_n^{-1} \in G$ ; de modo que  $G_n \otimes G_n^{-1} = E$ ;
4. as operações do grupo são fechadas, pois qualquer operação de dois elementos do grupo resulta em um terceiro elemento também pertencente ao grupo: exemplo  $G_1 \otimes G_2 = G_n \in G$

Para classes de números, podemos identificar que muitas delas podem escritas por meio de um grupo.

**Exemplo 2.3** O conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  forma um grupo com relação à operação de soma,  $\{\mathbb{Z}, +\}$  para  $a, b$  e  $c \in \mathbb{Z}$ :

1.  $a + (b + c) = (a + b) + c$  associativo;
2.  $a + 0 = a$  ; elemento neutro 0;
3.  $a + (-a) = e$ , inverso  $a^{-1} = -a$  ;
4. qualquer combinação por soma produz um número  $\in \mathbb{Z}$ , portanto o conjunto é fechado com relação à soma.

Por sua vez  $\{\mathbb{N}, +\}$  não forma um grupo já que não se pode definir uma operação inversa. Deste exemplo podemos entender que o conceito de grupo é bastante sofisticado, no sentido de agregar de forma específica as operações e as estruturas em que estas atuam.

É fácil ver que a rotação em torno de apenas um eixo, a rotação no plano, pode ser associada a um grupo. Por exemplo, para a rotação em torno do eixo z,  $\hat{z} : (x, y) \rightarrow (x, y)'$  pode-se constatar que:

- há o elemento neutro ( rotação de um angulo nulo) ;
- entende-se elementos inversos como rotações no sentido contrário;
- a composição entre rotações, é uma rotação equivalente, também pertencente ao conjunto de rotações no plano.

## 2.7 Representações

Há diversas formas de parametrizar matematicamente um problema, analogamente há inúmeras formas de escrever os operadores de um grupo, sendo que cada uma é dita uma *representação*<sup>[4]</sup>.

Quando as representações são matriciais há, basicamente, dois tipos de representações, as redutíveis e as irredutíveis, que respectivamente denominam as estruturas matriciais que podem ou não ser rearranjadas em uma forma mais simples.

Sob o aspecto da simplicidade, as representações irredutíveis são muito importantes pois assemelham-se à base do sistema, e assim qualquer configuração é uma soma dessas representações fundamentais ou, em outras palavras, qualquer representação redutível pode ser construída por meio de uma soma de representações irredutíveis.

## 2.8 Corpo

Sob transformação de coordenadas, o comprimento dos vetores é preservado. Na verdade esta propriedade define escalares, e por completeza vamos vincular escalares à idéia de *corpo* que, de forma análoga aos conceitos de vetor e espaço vetorial, vem sintetizar as propriedades de um escalar:

**Definição 2.4 *Corpo*:** Dado o conjunto  $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$  é dito que  $C$  é um corpo caso as operações de adição (+) e multiplicação(.) satisfaçam as seguintes propriedades:

1. em relação a soma e multiplicação :

(a) associativo:  $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$  e  $c_1 \cdot (c_2 \cdot c_3) = (c_1 \cdot c_2) \cdot c_3$ ;

(b) comutativo:  $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$  e  $c_1 \cdot c_2 = c_2 \cdot c_1$ ;

2. há o elemento identidade para a soma ( $e_+$ ) e a multiplicação ( $e$ ):

$$(a) \ c_n + e_+ = e_+ + c_n \ e \ c_n \cdot e = e \cdot c_n;$$

3. distributivo com respeito a multiplicação sobre a adição:  $c_1 \cdot (c_2 + c_3) = c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3$ ;

## Capítulo 3

# O grupo de Rotações $SO(n)$

Apresentado o conceito de grupo e das principais estruturas matemáticas a ele relacionadas, vamos neste capítulo mostrar a aplicabilidade dessas idéias para análise da rotação para duas e três dimensões, que culminam com a definição do grupo  $SO(n)$ .

### 3.1 O grupo de Rotações no Plano

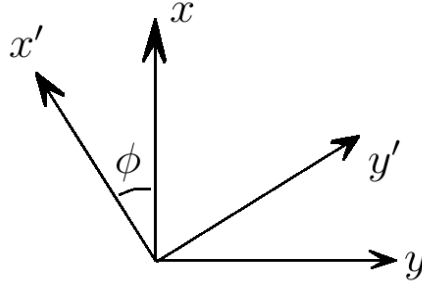
Iniciaremos nosso estudo restringindo nossa análise ao plano euclidiano bidimensional,  $\mathbf{E}^2$ , escolha que tem motivação na simplicidade matemática sem prejudicar o curso normal da discussão.

O grupo de rotação no plano é o conjunto de operadores fechados que contém as características da rotação neste espaço vetorial, mapeando transformações do tipo:  $(x, y) \rightarrow (x, y)'$ . Utilizando a figura 3.1 é possível mostrar que esta transformação é dada por um sistema de equações ou uma multiplicação vetor matriz, respectivamente dadas por:

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi - y \sin \phi \\ y' = x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comparando as equações acima, é possível identificar o operador de rotação no plano, dado por:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.1)$$



**Fig. 3.1** – Representação da operação da rotação:  $(x, y) \rightarrow (x, y)'$ , onde  $\phi$ , é o ângulo de rotação.

O operador definido na equação 3.1 é conhecido como *matriz de rotação no plano*; é uma função contínua,  $R(\phi)$ , representando assim um conjunto infinito de operadores,  $\phi \in [-\pi, \pi]$ .<sup>1</sup>

Através da matriz de rotação no plano, podemos estudar quaisquer rotações em duas dimensões, em torno de um eixo arbitrário. Portanto, caso tenhamos rotações dadas em torno de  $\hat{z}$  com  $\phi = \pm n\pi/2$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , teremos os operadores:  $R(\pi/2)$ ,  $R(\pi)$ ,  $R(3\pi/2)$ , e  $R(2\pi)$ .

**Exemplo 3.1** As rotações no plano euclidiano bidimensional para  $\phi = \pm n\pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , podem ser escritas como:

$$1. R(\pi/2) = R(-3\pi/2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2. R(\pi) = R(-\pi)^{-1} = R(-\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

3. note ainda que:  $R(\pi)R(-\pi) = (-E)(-E) = E^2 = E$  como esperado;

$$4. R(3\pi/2) = R(-\pi/2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 3\pi/2 & -\sin 3\pi/2 \\ \sin 3\pi/2 & \cos 3\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5. R(2\pi) = R(0) = E = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por meio da matriz de rotação, podemos verificar que estes operadores atendem à definição de grupo, pois:

1. A operação é fechada:  $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2)$ , sendo  $R(\phi_1 + \phi_2) \in R(\phi)$ .

<sup>1</sup>outros intervalos também são possíveis, por exemplo:  $[0, 2\pi]$

2. A operação é associativa, pois para a adição e multiplicação de matrizes temos:  $R(\phi_1) + (R(\phi_2) + R(\phi_3)) = (R(\phi_1) + R(\phi_2)) + R(\phi_3)$  e  $R(\phi_1)(R(\phi_2) \cdot R(\phi_3)) = (R(\phi_1)R(\phi_2)) \cdot R(\phi_3)$  com relação a soma e multiplicação usual de matrizes.
3. Para todo elemento  $R(\phi_n) \in R(\phi)$  há um elemento inverso  $R(\phi_n)^{-1} \in R(\phi)$ <sup>2</sup>, e assim  $R(\phi_1) \leftrightarrow R(-\phi_1)$ , e  $R(\phi_n)R(-\phi_n) = E$ .
4. Possui elemento identidade, que no caso é obtido tomando  $R(\phi = 0) = E$ , de modo que  $R(\phi_n)R(0) = R(\phi_n)$ .

O grupo formado pelo conjunto de operadores  $R(\phi)$  é conhecido por  $SO(2)$  cujo o nome refere-se às características dos operadores que o compõem: especiais, ortogonais e de dimensão-2<sup>3</sup>.

**Teorema 3.1 Grupo de Rotações no Plano** - é o conjunto de operadores  $R(\phi) \in SO(2)$ , que satisfazem a definição de grupos, que rotaciona vetores em  $\mathbf{E}^2$  de um ângulo  $\phi$ :

$$(x, y)' = R(\phi)(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

### 3.1.1 Propriedades do Grupo de Rotações no Plano: $SO(2)$

Estabelecido  $SO(2)$  como ferramenta para o estudo da rotação no plano, a intenção aqui é destacar suas propriedades. Inicia-se esta tarefa pela análise das características que distinguem  $SO(2)$  e que fazem com que ele seja identificado como: *especial*, *ortogonal* e de *dimensão-2*.

É dito que um operador matricial é especial quando tem determinante igual a 1. É fácil notar que os operadores pertencentes à  $SO(2)$  obedecem esta condição, uma vez que dado um operador  $R(\phi) \in SO(2)$  é imediato notar que o determinante da matriz  $\det R(\phi) = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ .

Outra propriedade que caracteriza os operadores de  $SO(2)$  é a da ortogonalidade, definida quando uma matriz multiplicada pela sua transposta resulta na matriz identidade, isto é  $R(\phi)R(\phi)^T = E$ , pois:

---

<sup>2</sup>note que o elemento inverso neste caso é uma rotação no sentido inverso

<sup>3</sup>do inglês: special, orthogonal, dimension-2

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$R(\phi)^T = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$R(\phi)R(\phi)^T = R(\phi)R(-\phi) = R(\phi - \phi) = E$$

Verificamos ainda que  $SO(2)$  é consistente com os vínculos físicos da operação de rotação, a saber:

1. Conserva o comprimento dos vetores  $|(x, y)'| = |(x, y)|$ :

$$\begin{aligned} (x, y)' &= R(\phi)(x, y) \\ |(x, y)'| &= R(\phi)(x, y)R(\phi)(x, y) \\ &= R(2\pi)(x, y)^2 \\ &= E \cdot (x, y)^2 = E|(x, y)| = |(x, y)|. \end{aligned}$$

2. Tem período de  $2\pi$ , dado que uma rotação completa é idêntica à identidade.
3. É comutativo,  $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_2)R(\phi_1)$ .
4. É associativo  $R(\phi_1 + \phi_2) = R(\phi_2)R(\phi_1)$ .
5. O operador inverso deve ser igual à rotação no sentido contrário,  $R(\phi)^{-1} = R(-\phi)$ .
6. Forma um conjunto contínuo, pois  $R(\phi)$  é definido  $\forall \phi$ .

O grupo  $SO(2)$  também é classificado como *unidimensional* devido a exibir a uma dependência funcional de uma única quantidade, que por sua vez é também contínua, visto que sempre tem-se um ângulo  $\phi$  válido para um intervalo o qual está parametrizado a função  $R(\phi)$ .

Provém da analiticidade dos operadores do grupo de rotação no plano com relação a variável  $\phi$  a possibilidade das rotações tornarem-se suficientemente pequenas,  $d\phi = \phi \rightarrow 0$ . Dessa forma, teremos o operador de rotação dado por um montante de operações infinitesimais  $R(\phi) = R(d\phi_1) + R(d\phi_2) + \dots R(d\phi_n)$ .

### 3.1.2 O gerador do Grupo de Rotação no Plano

Utilizando a *equação de Euler*<sup>[5]</sup>,  $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ , é possível reescrever o operador de rotação no plano como:

$$\begin{aligned} R(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \cos\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & i^2 \\ -i^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= E\cos\phi - iJ\sin\phi \end{aligned}$$

onde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

O operador  $J$  definido acima é o gerador das rotações no plano e através dele podemos associar um ajuste exponencial que retrate  $SO(2)$  em torno da origem,  $E$ , utilizando pouquíssimos parâmetros:  $\phi, J$ , o que pode ser observado pela expansão :

$$\begin{aligned} R(\phi) &= e^{-iJ\phi} \\ &= E - iJ\phi - E\phi^2/2 - iJ(-\phi^3/3!) + O^4 \\ &= E\cos\phi - iJ\sin\phi \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

onde no caso utilizamos a propriedade de  $J$  ser cíclico, isto é:

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = E \\ J^3 &= J.J^2 = J.E = J \\ J^4 &= J^2.J^2 = E \\ J^5 &= J.J^4 = J.E = J. \end{aligned}$$

É interessante perceber que  $SO(2)$  escrito sob a forma  $R(\phi) = e^{-iJ\phi}$  preserva suas propriedades, por exemplo:

1. é fechado:

$$R(\phi_1)R(\phi_2) = e^{-iJ\phi_2}e^{-iJ\phi_1} = e^{-iJ(\phi_1+\phi_2)} = R(\phi_1 + \phi_2).$$

2. apresenta elemento inverso:

$$R(\phi)^{-1} = R(-\phi) = e^{iJ\phi}.$$

3. possui elemento identidade:

$$R(\phi = 0) = e^0 = E.$$

## 3.2 O grupo de Rotações em Três Dimensões $SO(3)$

Vamos agora estender nosso estudo sobre grupo de rotação, de forma a contemplar as rotações no espaço euclidiano tridimensional. Construiremos um grupo, o grupo de rotação no espaço,  $SO(3)$ <sup>4</sup>, que caracterize a rotação para o espaço euclidiano tridimensional,  $\mathbb{E}^3$ .

O grupo de rotações no espaço é, desta forma, o conjunto de operadores,  $R \in SO(3)$ , relacionados à operação  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z)'$ . A parametrização utilizada na determinação  $R \in SO(3)$  é feita eixo por eixo, ou seja: a rotação no espaço é entendida como uma composição de rotações independentes realizadas em torno  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ .

Por conseguinte,  $R_z(\phi)$  denota a rotação em torno de  $\hat{z}$  de um ângulo  $\phi$ , e analogamente  $R_x(\beta)$  e  $R_y(\gamma)$  compõem a denominação dos operadores de rotação em  $SO(3)$ . Representaremos assim os operadores de rotação no espaço através de três operadores unidimensionais, parametrizados pelas quantidades  $\phi$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conhecidos como *ângulos de Euler*<sup>[6]</sup>.

É interessante observar, que a parametrização via ângulos de euler, leva a operadores muito parecidos com os  $R \in SO(2)$ , o que é explicado pela geometria dessa escolha, que é equivalente a fixar uma direção e girar em torno dela. Assim, por exemplo, para uma rotação de um ângulo  $\phi$  em torno de  $\hat{z}$ :

---

<sup>4</sup>especial, ortogonal, dimensão três

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Sob esta forma de parametrização, a rotação em torno de uma direção pode ser arbitrariamente descrita pelo grupo de rotação no plano, ou no espaço, sendo que a única diferença está na dimensão espacial em que estes grupos atuam:

- $R \in SO(2)$ , atua em  $\mathbf{E}^2$ , sendo que a terceira direção permanece inalterada;
- $R \in SO(3)$ , atua em  $\mathbf{E}^3$  e traz dentro de sua estrutura a preservação com relação a uma direção.

Sob o aspecto de conjuntos  $SO(2) \in SO(3)$ , de modo que, à partir do estudo do grupo de rotações no espaço, deve ser possível reproduzir todas propriedades da rotação bidimensional. Assim, a rotação em torno de  $\hat{z}$  pode ser dada por:

1.  $R \in SO(2)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(x, y)' = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi)$$

2.  $R \in SO(3)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z)' = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi, z)$$

Seguindo o mesmo raciocínio geométrico os operadores  $R \in SO(3)$  que operam em torno de  $\hat{y}$  e  $\hat{x}$  são dados por:

$$R_y(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad R_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Devido à parametrização unidimensional e contínua, é possível associar um gerador  $J \in SO(3)$ , e assim representar o grupo de forma compacta. Consequentemente, relaciona-se as três matrizes espaciais de rotação, aos geradores:  $J_z \leftrightarrow R_z(\phi)$ ,  $J_x \leftrightarrow R_x(\beta)$  e  $J_y \leftrightarrow R_y(\gamma)$ , obtidos de forma análoga que para  $SO(2)$ :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

E deste modo podemos escrever para  $SO(3)$  uma representação exponencial em função dos geradores, de forma análoga ao procedimento para  $SO(2)$ , porém no caso tridimensional temos um produto de funções para cada direção:

$$R(\phi, \gamma, \beta) = e^{-i\phi J_z \hat{z}} e^{-i\gamma J_y \hat{y}} e^{-i\beta J_x \hat{x}} \quad (3.6)$$

### 3.2.1 Propriedades do Grupo de Rotação no Espaço

Iremos analisar as relações de comutação dos geradores do grupo de rotação no espaço, de forma semelhante à abordagem feita para o caso bidimensional, porém como veremos agora esses operadores não comutam.

Calculando os comutador relacionado aos operadores  $J_x$  e  $J_y$ :

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= J_x J_y - J_y J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i J_z. \end{aligned}$$

Por completeza, podemos arranjar os comutadores relacionados aos operadores  $J_x, J_y$  e  $J_z$  como:

$$[J_y, J_z] = i J_x \quad [J_z, J_x] = i J_y \quad [J_x, J_y] = i J_z. \quad (3.7)$$

As relações acima, podem então ser reescritas, usando o tensor anti-simétrico,  $\varepsilon_{xyz}$  [7]:

$$[J_x, J_y] = i\varepsilon_{xyz}J_z. \quad (3.8)$$

Continuando a inspeção das propriedades dos geradores do grupo de rotação no espaço, é interessante definir um escalar relacionado a estes operadores, no caso,  $J^2 = J \cdot J = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ , o qual então deve comutar com os demais operadores:

$$J_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$J_y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$J_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E \quad (3.12)$$

É interessante notar que às regras de comutação, obtidas para os geradores de rotação em  $\mathbf{E}^3$ , são análogas as regras de comutação do momento angular, [7], [8].

$$[J^2, J_x] = 0 \quad (3.13)$$

O operador  $J^2$  comuta com qualquer um dos geradores de  $SO(3)$ :

$$[J^2, J_x] = J^2 J_x - J_x J^2 = 2E J_x - J_x 2E = 0. \quad (3.14)$$

A rotação em torno de apenas um eixo comuta, enquanto que rotações no espaço não; equivalentemente, diz-se que  $SO(2)$  comuta, ao contrário de

$SO(3)$ . Baseando-nos no fato de que a escolha de uma representação deve sustentar as características da operação a qual descreve, vamos utilizar os operadores do grupo  $SO(3)$  para investigar se há uma dependência entre a ordem da variável independente com respeito à comutatividade.

Considerando a rotação apenas em torno de  $\hat{z}$  dada pela equação 3.3 para um ângulo infinitesimal  $\varepsilon = \lim_{\phi \rightarrow 0} \phi$  e utilizando as expansões em série de *Taylor* para as funções  $\text{sen}\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^3/6 + O^5$  e  $\text{cos}\varepsilon = 1 - \varepsilon^2/2 + O^4$ , reescrevemos  $R_z(\phi)$ :

$$R_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

De maneira similar os operadores correspondentes as rotações infinitesimais em torno de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são:

$$R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2/2 \end{pmatrix} \quad R_y(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \varepsilon^2/2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Multiplicando os operadores infinitesimais, equações 3.15 e 3.16, podemos calcular os comutadores relacionados aos operadores infinitesimais de  $SO(3)$ :

$$\begin{aligned} R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 1 - \varepsilon^2/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

e analogamente:

$$R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2/2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & 1 - \varepsilon^2/2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 - \varepsilon^2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Através dos resultados das equações, 3.17 e 3.18, vemos que a ordem de  $\varepsilon$  está relacionada à comutatividade dos operadores de  $SO(3)$ , pois se admitirmos  $\varepsilon^2 = 0$  estas equações são idênticas.

Ainda é possível relacionar o comutador  $[R_x, R_y]$  com o operador identidade  $R_z(0) = R_y(0) = R_x(0) = E$ :

$$[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - R(0) = R_z(\varepsilon^2) - E. \quad (3.19)$$

## Capítulo 4

# Rotações no Espaço Complexo

Abordamos até aqui a rotação de maneira clássica, uma vez que  $SO(n)$  é a classe de operadores que operam sobre o espaço euclidiano  $\mathbf{E}^n$  ajustando a rotação dos vetores que o compõem. A proposta agora é analisar como um espaço vetorial complexo, ou seja um espaço no qual os objetos que o constituem  $\in \mathbb{C}$ . Em suma a intenção é estudar a rotação em um caso mais geral, já que  $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ .

A grande utilidade de um espaço complexo,  $\mathbb{C}^n$ , está relacionada com estudo da mecânica quântica, onde os estados dos sistemas são mapeados por operadores matriciais lineares,  $R$ , de modo que uma rotação seja dada por  $|\alpha\rangle' = R|\alpha\rangle$ .

Um sistema quântico é altamente abstrato, resultando que as idealizações sobre a dinâmica do sistema sejam postas na forma de representações, que são condicionadas por vínculos físicos os quais estes sistemas e sua álgebra devem obedecer. Consequentemente, o estudo da mecânica quântica converge para a utilização de representações e grupos, organizados por meio de *postulados* que remetem diretamente as condições e contornos os quais o sistema ou sua representação devem atender.

### 4.1 Espaço de Hilbert

Dentre os espaços complexos, nos concentramos especificamente no *espaço de Hilbert*,  $\mathbf{H}^n$ , que configura-se como o conjunto de vetores e regras operatórias que se ajustam ao estudo de representações na mecânica quântica, onde  $n$  é a dimensão. É desta forma  $\mathbf{H}^n$  uma extensão de  $\mathbf{E}^3$  uma vez que é construído

sobre o corpo dos números complexos.

A primeira característica de  $\mathbf{H}^n$  é a sua *dualidade*, ligada à sua construção por meio de um vetor, denominado *ket*,  $|\alpha\rangle$ , sempre relacionado ao seu oposto dito *bra*,  $\langle\alpha|$ . O espaço  $\mathbf{C}^n$  é assim expandido em função de auto-kets,  $\{|\alpha'\rangle\}$ ; e auto-bras,  $\{\langle\alpha'|\}$ , de forma biunívoca:

$$|\alpha'\rangle, |\alpha''\rangle, \dots \leftrightarrow \langle\alpha'|, \langle\alpha''|, \dots \quad (4.1)$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta|, \dots \quad (4.2)$$

Postula-se que o bra dual relacionado à  $c|\alpha\rangle$  é  $c^*\langle\alpha|$  e não  $c\langle\alpha|$ <sup>[7]</sup>. De forma mais geral reescrevemos a relação ket-bra como:

$$c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle \leftrightarrow c_\alpha^*\langle\alpha| + c_\beta^*\langle\beta|. \quad (4.3)$$

O produto interno para o espaço vetorial complexo é dado partir da operação entre dois vetores, um bra e um ket, da qual resulta um número complexo:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = (\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle) \quad (4.4)$$

Do mesmo modo postula-se as propriedades fundamentais do produto interno destes operadores, dadas por:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \quad (4.5)$$

e assim  $\langle\beta|\alpha\rangle$  e  $\langle\alpha|\beta\rangle$  são complexos conjugados um do outro.

O produto escalar é análogo ao produto escalar em  $\mathbf{E}^n$ , contudo devemos agora distinguir entre  $\langle\beta|\alpha\rangle \neq \langle\alpha|\beta\rangle$  devido à natureza complexa do espaço vetorial.

Percebe-se por meio da equação 4.5 que  $\langle\alpha|\alpha\rangle \in \mathbb{R}$ , substituindo  $\langle\beta| \rightarrow \langle\alpha|$ .

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0 \quad (4.6)$$

A equação 4.6 estabelece que temos uma *métrica positiva*, isto é  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$  apenas para um ket nulo. Define-se ainda que dois kets  $\langle \alpha |$  e  $|\beta \rangle$  são ditos ortogonais se:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = 0 \quad (4.7)$$

e utilizando a equação 4.5 também podemos verificar que :

$$\langle \beta | \alpha \rangle = 0 \quad (4.8)$$

## 4.2 Momento Angular e Operadores de Rotação

Com base nos resultados anteriores, vimos que podemos descrever a rotação de um sistema físico via uma matriz de rotação. Assim, dado um sistema físico descrito por uma configuração escrita por uma função  $\psi(x, y, z)$ , onde  $x, y$  e  $z$  são as coordenadas espaciais, podemos definir que uma rotação pode ser genericamente escrita como:

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad (4.9)$$

onde  $R$  é o operador de rotação, ou seja:

$$R\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) = \psi(\vec{x}'). \quad (4.10)$$

Em outras palavras,  $R$  opera sobre  $\psi$  criando  $\psi'$ , numericamente igual a  $\psi(\vec{x}')$ , onde  $\vec{x}'$  são as coordenadas escritas em relação a  $R$ .

Considerando  $R_z$ , equação 3.3, e a componente  $\hat{z}$  do operador momento angular clássico  $\vec{L}^{[9]}$ , vamos relacionar diretamente os geradores e as regras de comutação do momento angular. Escrevendo  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  em termos do operador momento,  $i(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ , podemos considerar uma rotação infinitesimal de um ângulo  $\delta\phi$  em torno de  $\hat{z}$  como:

$$R_z(\delta\phi)\psi(x, y, z) = \psi(x + (\delta\phi), y - (\delta\phi), z). \quad (4.11)$$

Expandindo o lado direito em *serie de Taylor*<sup>[5]</sup>, e considerando apenas a primeira ordem de  $\delta\phi$ :

$$R_z(\delta\phi)\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) - (\delta\phi)\{x\partial_y\psi - y\partial_x\psi\} + O^2$$

$$R_z(\delta\phi)\psi(x, y, z) = (1 - i(\delta\phi)L_z)\psi(x, y, z) \quad (4.12)$$

ou seja, obtemos uma expressão em função de  $iL_z$ , e como a rotação em torno de uma única direção comuta:

$$R_z(\phi + \delta\phi)\psi(x, y, z) = R_z(\delta\phi)R_z(\phi)\psi(x, y, z) = (1 - i(\delta\phi)L_z)R_z(\phi)\psi \quad (4.13)$$

e assim nos mostra uma forma fechada, muito útil para cálculo de uma rotação em relação apenas a uma dada direção:

$$R_z(\phi + \delta\phi) - R_z(\phi)/\delta\phi = -iL_zR_z(\phi). \quad (4.14)$$

Observa-se que lado esquerdo da equação 4.14 coincide com a definição de derivada de função para  $\delta\phi \rightarrow 0$ , e identificando o termo  $\frac{d}{d\phi}R_z(\phi)$  na equação acima, obtivemos uma equação diferencial de primeira ordem, cuja solução e seu valor de contorno, considerando as propriedades de diferenciação da função exponencial, são:

$$R_z(\phi) = \exp(-iL_z), \quad R_z = E. \quad (4.15)$$

Reescrevendo sob uma forma matricial, e definindo o operador  $S = i\epsilon_{ijk}$ , no qual  $i$  é imagiário e  $\epsilon_{ijk}$  é a constante de estrutura de  $SO(3)$ , reconhecemos a interligação entre os operadores  $L$  e  $J$  já que ambos obedecem as mesmas regras de comutação:

$$L_z = (x, y, z)J_z \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

### 4.3 Homorfismo entre o Grupo $SU(2)$ e $SO(3)$

O grupo especial unitário,  $SU(2)$ , é o grupo composto pelas matrizes unitárias,  $U_{2,2}U_{2,2}^\dagger = E$ , com  $\det(U) = 1$ , e cujos geradores são dados pelas matrizes de Pauli.

Segue que uma matriz  $U_{2,2} \in SU(2)$  pode ser parametrizada utilizando as quantidades  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{R}$ :

$$U_{2,2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e logo complexo conjugado relacionado ao operador  $U_{2,2}$ , isto é  $U_{2,2}^\dagger$  é:

$$U_{2,2}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

como  $U$  é unitário, então impomos  $U_{2,2}U_{2,2}^\dagger = E$ :

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + bb^* & ac^* + bd^* \\ ca^* + bd^* & cc^* + dd^* \end{pmatrix} = E \quad (4.19)$$

e assim podemos relacionar os  $a = d$  e  $b = -c$ , pois:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4.20)$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (4.21)$$

$$ac^* + bd^* = 0. \quad (4.22)$$

Consequentemente  $a = \cos\eta e^{i\xi a}$  e  $b = -\sin\eta e^{i\xi b}$ . E a forma geral de um operador  $\in SU(2)$  é representada por três variáveis contínuas  $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$  conhecidos como parâmetros de *Caley-Klein*<sup>[5]</sup>:

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \cos\eta & e^{i\zeta} \sin\eta \\ -e^{-i\zeta} \cos\eta & e^{-i\xi} \sin\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Utilizando um procedimento análogo à obtenção da equação dos geradores de  $SO(n)$ , no qual diferenciamos e truncamos para ordens maiores ou iguais a  $O^2$ , obtemos os geradores de  $SU(n)$ :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

As equações em 4.24 são conhecidas como as *matrizes de Pauli* e tratam da rotação de um sistema quântico bidimensional<sup>[5], [7]</sup>. Note que as matrizes de Pauli são hermitianas, e assim têm autovalores reais. Com relação aos geradores de  $SU(2)$  podemos escrever que as funções geradoras são:

$$U_z = e^{ia_z\sigma_z/2}, \quad U_y = e^{ia_y\sigma_y/2}, \quad U_x = e^{ia_x\sigma_x/2} \quad (4.25)$$

onde os três parâmetros da equação 4.27,  $a_x, a_y$  e  $a_z \in \mathbb{R}$ . É importante notar que há nesta equação um fator  $1/2$  é posto para que possamos definir uma regra de comutação similar ao estudo de  $SO(3)$ ,  $R \leftrightarrow J$ . Deste modo definimos um operador  $s \leftrightarrow \sigma$ , que se transforma exatamente como o momento angular:

$$s_z = \sigma_z/2, \quad s_y = \sigma_y/2, \quad s_x = \sigma_x/2. \quad (4.26)$$

E assim podemos relacionar com a rotação no espaço complexo bidimensional uma expressão compacta análoga ao caso clássico:

$$[S_x, S_y] = i\varepsilon_{xyz}\sigma_z. \quad (4.27)$$

Analizando a forma dos grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , notamos que  $SU(2)$  descreve as rotações em  $\mathbb{H}^2$ , ao passo que  $SO(3)$  desempenha função idêntica com relação a  $\mathbb{E}^3$ . Assim há um correspondência entre essas duas estruturas denominada genericamente *morfismo* já que funcionalmente podemos mapear uma em função da outra, lembrando porém do ajuste do fator  $1/2$ .

De outro modo essa constante  $1/2$  pode ser entendida através do período das funções  $R \in SO(3)$  e  $U \in SU(2)$ , que ao longo de  $\hat{z}$  respectivamente tem período  $2\pi$  e  $4\pi$ . Ou ainda a partir de 4.23, para  $a = e^{i\xi}$  e  $b = 0$ :

$$U_z\sigma_xU_z^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\xi} \\ e^{2i\xi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Escrevendo em termos de cada componente de  $\sigma$ , nota-se que o valor da função está dobrado, pois:

$$U_z x \sigma_x U_z^\dagger = x \cos 2\xi \sigma_x - x \operatorname{sen} 2\xi \sigma_y \quad (4.29)$$

$$U_z x \sigma_y U_z^\dagger = y \cos 2\xi \sigma_x + y \operatorname{sen} 2\xi \sigma_y \quad (4.30)$$

$$U_z x \sigma_z U_z^\dagger = z \sigma_z. \quad (4.31)$$

Desta forma, há uma correspondência, que não é unívoca (um por um), entre  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , mas sim biunívoca (duas para um), que define que esses grupos são *homeomórficos*. Por fim, podemos comparar o morfismo destes grupos relacionando seus operadores para um ângulo arbitrário  $\omega$  como:

$$U_{\omega/2} = \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix} \leftrightarrow R_z(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

# Capítulo 5

## Conclusão

Abordamos neste trabalho a operação de rotação do ponto de vista de operadores. Deste modo obtivemos e analisamos os grupos que ajustaram as propriedades de rotação no plano euclidiano bi e tridimensional, respectivamente dados por  $SO(2)$  e  $SO(3)$ .

Identificamos para os grupos de rotação clássicos,  $SO(n)$ , a relação entre a dimensionalidade do espaço, à partir das estruturas vetoriais nas quais os operadores atuam, a conservação do produto escalar, e principalmente derivamos, à partir dos operadores de rotação, as regras pelas quais se transformam os operadores de momento angular.

Fundamentados os elementos básicos da teoria de grupos de rotação para o caso clássico, observamos a rotação para um sistema abstrato, a rotação no espaço de Hilbert em duas dimensões, para a qual o uso de representações, operadores e postulados não é só natural como necessário.

Também para este sistema foi possível investigar a rotação com base nas ferramentas derivadas ao longo do texto, obter as matrizes de *Pauli* e também relacionar uma relação análoga do momento angular clássico.

Por fim, ainda analisamos como as classes de operadores pertencentes à  $SO(3)$  e  $SU(2)$  são mapeadas, a constante  $1/2$  aparece com relação ao ajuste das regras de comutação dos operadores  $\sigma \in SU(2)$ , juntamente com a qual se identifica o homorfismo reconhecidamente confirmado na literatura aos grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$ .

## Referências

- [1] J. P. Elliot , *Symmetry in Physics*( Macmillan, London, 1979).
- [2] W. K. Tung , *Group Theory in Physics*( World Scientific , Phyladelphia, 1987).
- [3] E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra.*( Academic Press, Londres, 1959).
- [4] W. Miller Jr., *Symmetry Groups and Their Applications* ( Academic Press, San Diego, 1972).
- [5] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physics* ( World Scientific , Phyladelphia, 1987).
- [6] F. W. Byron Jr, R. W. Fuller , *Mathematical of Classical and Quantum Physics* (Dover, New York, 1969).
- [7] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*( Addison Wesley ,Rev. Ed, Los Angeles, 1994).
- [8] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics, 3 Ed.* ( Mc-Grall-Hill, Tokyo, 1981).
- [9] J. B. Marion, S T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems, 4 Ed.* ( Sanders College, Philadelphia, 1995).

