



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

MODELAGEM MATEMÁTICA EM AÇÃO:
UMA DISCUSSÃO SOBRE SEU POTENCIAL NA
SALA DE AULA

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM AÇÃO:
UMA DISCUSSÃO SOBRE SEU POTENCIAL NA
SALA DE AULA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

M386m Martins, Bianca de Oliveira.

Modelagem Matemática em ação : uma discussão sobre seu potencial na sala de aula / Bianca de Oliveira Martins. - Londrina, 2024.
102 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2024.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Formação - Tese. I. Werle de Almeida, Lourdes Maria . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM AÇÃO:
UMA DISCUSSÃO SOBRE SEU POTENCIAL NA
SALA DE AULA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito para a obtenção do título de doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle
de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Daiany Cristiny Ramos Cogna
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
Universidade Federal do Rio Grande do Sul -
UFRGS

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Federal Tecnológica do Paraná -
UTFPR

Profa. Dra. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Londrina, 06 de fevereiro de 2024.

MARTINS, Bianca de Oliveira. **Modelagem matemática em ação**: uma discussão sobre o seu potencial na sala de aula. 2024. 103 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar como a modelagem em ação na sala de aula pode contribuir para a formação dos alunos. Ou seja, que elementos formativos traz consigo o espírito da modelagem quando realizado pelos alunos em um contexto educacional? A tese está organizada em formato multipaper, em que cada artigo contempla um objetivo específico: no artigo 1, Por que construir modelos matemáticos? tem como objetivo identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos. No artigo 2, A mobilização do interesse em atividades de modelagem matemática cujo objetivo é investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula. No artigo 3 Modelagem matemática para além do que se vê: do pragmático ao formativo, o objetivo é caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores. Dados foram coletados durante o desenvolvimento de um curso de extensão ofertado em uma universidade pública do norte do Paraná que teve como objetivo promover aos alunos de diversas áreas do conhecimento o contato com a matemática e o uso da mesma para resolver situações-problema reais. Participaram do curso onze alunos com diferentes perfis formativos: Licenciatura em Matemática, Ciências Biológicas, Pedagogia e Administração. Os dados foram coletados por meio de questionários, registros escritos, gravação de áudio e vídeo. A análise de dados segue os pressupostos da Análise Qualitativa de Conteúdo. Por meio das análises evidenciadas nos três artigos foi possível caracterizar três aspectos formativos promovidos pela modelagem na Educação Matemática. O primeiro aspecto diz respeito a construção de modelos matemáticos, as ações com a matemática que as atividades de modelagem proporcionam, seja no que tange a uma visão holística das situações estudadas e as experiências dos alunos com a matemática, seja na importância que os alunos atribuem para este estudo vislumbrando os usos da matemática para sua prática profissional futura. O segundo aspecto, compreende que a modelagem também põe em ação a potencialidade das atividades para a mobilização e desenvolvimento do interesse dos alunos com relação ao tema, a matemática, ao estudo de situações-problema. Por fim, o aspecto formativo que diz respeito ao alcance que as atividades de modelagem podem viabilizar para os alunos, é explorado a partir de reflexões internas às atividades de modelagem e aos requisitos para solucionar os problemas, bem como, de reflexões externas à modelagem, ou seja, ao alcance social, cultural, político e emancipatório que as atividades de modelagem proporcionam aos alunos. Neste contexto, a formação promovida pela modelagem se caracteriza em seu potencial de agregar aspectos que dizem respeito à formação matemática dos sujeitos e à formação para além da matemática que compreende que formação carrega o espírito da modelagem.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Formação.

MARTINS, Bianca de Oliveira. **Mathematical modelling in action**: a discussion about its potential in the classroom. 2024. 103 f. Thesis (PhD in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research aims to investigate how modeling in action in the classroom can contribute to the training of students. In other words, what training elements does the spirit of modeling bring with it when carried out by students in an educational context? The thesis is organized in a multipaper format, in which each article addresses a specific objective: in article 1, Why build mathematical models? aims to identify training aspects favored by the construction of mathematical models. In article 2, The mobilization of interest in mathematical modeling activities whose objective is to investigate how interest in modeling activities is mobilized in the classroom. In article 3 Mathematical modeling beyond what is seen: from pragmatic to formative, the objective is to characterize the scope of development of a modeling activity in relation to the training of student modelers. Data were collected during the development of an extension course offered at a public university in the north of Paraná, which aimed to promote contact with mathematics and its use to solve real problem situations for students from different areas of knowledge. Eleven students with different training profiles participated in the course: Degrees in Mathematics, Biological Sciences, Pedagogy and Administration. Data were collected through questionnaires, written records, audio and video recording. Data analysis follows the assumptions of Qualitative Content Analysis. Through the analyzes evidenced in the three articles, it was possible to characterize three training aspects promoted by modeling in Mathematics Education. The first aspect concerns the construction of mathematical models, the actions with mathematics that modeling activities provide, whether in terms of a holistic view of the situations studied and students' experiences with mathematics, or in the importance that students attribute for this study, envisioning the uses of mathematics for their future professional practice. The second aspect understands that modeling also puts into action the potential of activities to mobilize and develop students' interest in relation to the topic, mathematics, and the study of problem situations. Finally, the formative aspect that concerns the scope that modeling activities can make possible for students, is explored based on reflections internal to modeling activities and the requirements to solve problems, as well as reflections external to modeling, that is, the social, cultural, political and emancipatory reach that modeling activities provide to students. In this context, the training promoted by modeling is characterized by its potential to add aspects that concern the mathematical training of the subjects and training beyond mathematics that understands that training carries the spirit of modeling.

Key-words: Mathematics Education; Mathematical Modeling; Training.

AGRADECIMENTOS

Sou grata aos meus pais, pelo amor, apoio e por todas as orações feitas. Por me ensinarem a ter fé e perseverar para viver esta conquista.

Sou grata as minhas irmãs, pelo amor, compreensão e demais coisas que não consigo exprimir em palavras, gratidão que sinto por tê-las comigo durante toda esta fase.

Sou grata aos meus familiares, que por anos, compreenderam minha ausência, mas que sempre me apoiaram.

Sou grata aos meus amigos, Bárbara e Jeferson, que são aqueles que me carregam, que não me fazem desistir e que creem mais em minha capacidade do que eu mesma, que desmistificam a cada dia a insegurança que carrego comigo e me colocam a enxergar as possibilidades no horizonte.

Sou grata a minha orientadora que se fez para além de minha professora, uma pessoa amiga, compreensiva e que compartilha comigo a felicidade de poder terminar esta conquista. A senhora é brilhante professora Lourdes!

Sou grata aos meus professores da graduação, que tenho carinho imenso, e pela felicidade de tê-los hoje como colegas de trabalho que se importam e torcem por mim a cada novo desafio!

Sou grata ao espaço do Grupemmat e colegas do grupo por todas os estudos e experiências vivenciadas.

Sou grata aos professores da banca, por toda dedicação e cuidado ao ler minha pesquisa e pelos apontamentos.

Sou grata aos meus animaizinhos, Pepe e Fofura, que tornam esse caminho mais leve e descontraído.

Estendo meus agradecimentos a Capes e aos alunos que participaram do curso de extensão em que os dados desta pesquisa foram coletados.

*Clamo ao Deus Altíssimo, a Deus,
que para comigo cumpre o seu propósito.*

Salmos 57:2

SUMÁRIO

	CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO	10
1.1	Introdução ao tema	10
1.2	Objetivo de pesquisa	15
1.3	Aspectos metodológicos	15
1.3.1	Organização da tese em formato <i>multipaper</i>	15
1.3.2	Contexto e participantes da pesquisa	16
1.3.3	Metodologia de análise dos dados	20
	Referências.....	21
	CAPÍTULO 2 - ARTIGO 1	23
	Por que construir modelos matemáticos?	23
2.1	Introdução	23
2.2	Problemas de modelagem: caracterização e possibilidade de resolução	25
2.2.1	Sobre a construção de modelos matemáticos.....	26
2.3	Aspectos metodológicos	28
2.4	Problemas de modelagem	30
2.4.1	A construção de modelos nessas atividades.....	31
2.5	Considerações finais	39
	Referências.....	40
	CAPÍTULO 3 -ARTIGO 2	44
	A mobilização do interesse em atividades de modelagem matemática	44
3.1	Introdução	44
3.2	Modelagem na Educação Matemática	45
3.3	Uma visão sobre o interesse na modelagem	47
3.4	Aspectos metodológicos	50
3.4.1	Situações-problema de modelagem	51
3.5	O interesse como uma relação sujeito-atividade de modelagem	54
3.6	Considerações finais	62
	Referências.....	63

	CAPÍTULO 4 – ARTIGO 3	65
	Modelagem matemática para além do que se vê: do pragmático ao formativo	65
4.1	Introdução	65
4.2	Modelagem matemática: um olhar sobre suas características	68
4.3	Aspectos metodológicos	71
4.3.1	Cenário 1	72
4.3.1.1	A atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 1	73
4.3.1.2	A atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 2.....	75
4.4	Discussão dos resultados: modelagem matemática na sala de aula e a discussão da formação possibilitada	81
4.5	Considerações Finais	88
	Referências.....	90
	 CAPÍTULO 5 –CONCLUSÃO	93
	Referências.....	97
	 ANEXOS	99
	ANEXO A - Questionário de Perfil e Termo de Consentimento para uso na pesquisa	100
	ANEXO B - Questionário pós-atividade	102

CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA

Há algumas décadas discussões relativas à modelagem matemática¹ e seu uso em sala de aula têm direcionado investigações a respeito do ensino e da aprendizagem da matemática e da própria modelagem, destacando potencialidades e objetivos para inseri-la na sala de aula (Almeida, 2018; Blum, 2015).

Para a modelagem, segundo Klüber, Tambarussi e Mutti (2022, p. 293), há, de modo geral, na literatura brasileira, dois enfoques: pesquisas com e pesquisas sobre a modelagem, isto é, associadas a investigações empíricas acerca de práticas educativas *com* modelagem e pesquisas de caráter teórico-epistemológico, que buscam teorizar *sobre* a modelagem. Há, ainda na literatura, como apontam Souza, Almeida e Klüber (2018), diferentes perspectivas teóricas fundamentando discussões e modos de compreender aspectos característicos da modelagem em contextos educacionais.

Com a finalidade de caracterizar modos de uso e finalidades da modelagem, Blum (2015), intencionalmente, sistematiza seis perspectivas² de modelagem, apontando para a necessidade de associar a finalidade e os exemplos adequados em sala de aula: modelagem aplicada (pragmática|autênticos); a modelagem educacional (formativa|cognitivamente ricos); modelagem sociocrítica (cultural com intenção emancipatória|autênticos); modelagem epistemológica (cultural em relação à matemática|epistemologicamente ricos); modelagem pedagógica (psicológicas com intenção de marketing|motivadores); modelagem conceitual (psicológica|ricos matematicamente). Com esta caracterização dos pares o uso da modelagem na sala de aula passa a se associar com pelo menos uma das quatro finalidades: pragmática, formativa, cultural ou psicológica.

Com finalidade pragmática, a modelagem tem por objetivo o contato com situações da realidade, cujas investigações não ocorrem em atividades intra-matemáticas. A formativa diz respeito ao desenvolvimento de competências específicas, como a argumentação que se desenvolve quando situações da realidade são estudadas mediante

¹ Neste texto, usamos o termo modelagem para nos referirmos à modelagem matemática.

² Essa sistematização leva em consideração outras perspectivas já abordadas na literatura, por exemplo as descritas por Kaiser e Sriraman (2006) e as de Galbraith (2012).

conceitos ou métodos da matemática. A cultural refere-se à possibilidade da modelagem promover uma leitura adequada da matemática como ciência num sentido mais amplo, a partir de relações entre matemática e situações da realidade. Por fim, com finalidade psicológica o uso da modelagem pode contribuir com o interesse dos alunos pela matemática, para motivá-los a aprender matemática e lidar com as especificidades que a matemática, seu ensino e sua aprendizagem podem apresentar.

Com base nas assertivas de Blum (2015), se pode afirmar que, quando a finalidade é a pragmática a matemática viabiliza o entendimento da realidade enquanto nas outras três, fenômenos da realidade fomentam o ensino e a aprendizagem da matemática.

Niss e Blum (2020, p.28), alinhados com as indicações de Blum (2015), sugerem que há duas razões diferentes para a inclusão de atividades de modelagem na sala de aula. A primeira “matemática em prol da modelagem”³, está vinculada com a percepção de que a matemática desempenha importante papel na compreensão e no tratamento do mundo que nos cerca. Nesse caso, a modelagem permite que os alunos usem a matemática para lidar com contextos e situações extramatemáticas. Esse poderia se configurar como um objetivo educacional de formar os alunos para ver e entender os usos da matemática na sociedade. A segunda razão é a “modelagem em prol da matemática”, que está vinculado ao emprego da modelagem como meio para aprender matemática, aliando aspectos motivacionais para o seu estudo, ou ainda, para a interpretação, significado, compreensão apropriada, e manutenção de conceitos, resultados, métodos e teorias, bem como para o desenvolvimento de competências matemáticas para resolver problemas reais.

As diferentes perspectivas subjacentes ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática ancoram-se em diferentes bases epistemológicas que subsidiam a estruturação de construções teóricas que visam constituir um modo de ver o que é modelagem, como usar a modelagem em sala de aula e por que fazer modelagem matemática em contextos educacionais. Nesse ínterim, pode-se dizer que cada perspectiva guarda em si um propósito educacional, isto é, acerca do papel da Educação Matemática e como esse papel se alinha com a modelagem.

No campo da filosofia da Educação, Biesta (2010, 2018) apontam para duas maneiras de compreender o papel da Educação na sociedade contemporânea: Educação baseada em evidências (*evidence-based*), relacionada com a qualificação; e Educação

³ Tradução de “mathematics for the sake of modelling” e “modelling for the sake of mathematics” (Niss e Blum, 2020, p.28).

baseada em valores ou formação para a vida (*bildung*) em que se concebe a formação como um modo de ser no mundo.

Referindo-se às qualidades da Educação, Biesta (2018, p.28) sugere que a “qualificação não é a única coisa que importa, mas a socialização e subjetivação estão também sempre presentes e precisam ser consideradas”. Para o autor, o termo *formação* pode ser entendido como “encontrar ou estabelecer uma forma de existência no mundo. No mundo, mas não no centro do mundo, de modo que reste espaço para os outros existirem também”.

No âmbito da Educação Matemática, Bicudo (1999) caracteriza *formação* como um cuidado com a forma e a ação:

É definida como a **formação** do homem, como a cultura ou cultivação da sua **forma**. Que forma é essa? Eis aí a interrogação antropológica. Educação como cultivo [...]. Entretanto, o cultivo pode ser entendido como a cultura da “semente”, que já possui em si a potência para sua realização plena, bastando-lhe o cuidado para que as condições favoráveis lhe sejam ofertadas. Pode ser entendido, também, como o cuidado com a **forma/ação**, de modo que o jogo entre **forma** e **ação** realize a plenitude desse **ente** que se **torna** sendo, ou seja, fazendo (Bicudo, 1999, p.3, grifos da autora).

Segundo Bicudo (1999), a Educação Matemática tem como premissa o cuidado com: o aluno e sua realidade histórica e cultural e o que ele pode vir a ser no mundo; a matemática e seus diferentes modos de uso no cotidiano e na esfera científica; o contexto escolar e os diferentes aspectos da educação escolar; com o contexto social, em que diferentes relações sociais são estabelecidas e onde as relações entre pessoas, entre grupos, entre instituições são estabelecidas e onde a “pessoa educada também de um ponto de vista matemático é solicitada a situar-se, agindo como cidadão que participa das decisões e que trabalha participando das forças produtoras” (Bicudo, 1999, p. 3).

Diante de tais considerações, entende-se que uma Educação Matemática voltada para a formação consiste em fornecer condições para que modos de ver o mundo tomem forma pela ação e na ação. A isso pode-se associar o que Fredj e Vos (2023) concebem como *espírito da modelagem*, em que a essência da modelagem está vinculada a uma construção sociocultural que se dá na interação e conexão dos indivíduos e seu ambiente social e cultural, que contribui não apenas para satisfazer critérios como qualificar os alunos, mas também para promover uma formação para a vida, pois ao lidar com problemas reais e de seu interesse, o aluno pode reconhecer o seu papel no mundo. Neste sentido, o que os autores caracterizam como “espírito” refere-se, de fato, aos efeitos e

contribuições da modelagem para a formação dos alunos e que não são, muitas vezes, “visíveis” aos olhos dos professores e nem mesmo à percepção dos próprios alunos.

Em contextos educacionais, sugere-se, particularmente, no cenário brasileiro, uma formação que priorize cenários investigativos ao invés de práticas baseadas no paradigma do exercício. Sugerindo um movimento que vai do paradigma do exercício a um cenário para investigação, Skovsmose (2000) explicita que deve haver uma mudança de referência das situações trabalhadas em sala de aula, visto que a referência alicerçada em situações da realidade permite que os alunos se envolvam em processos de exploração e argumentação, sendo que este engajamento pode contribuir para uma formação constituinte de reflexão crítica. O autor cita a modelagem como exemplo de mudança que vai de encontro ao paradigma do exercício, rompendo com a ideia de sustentação do pressuposto de que há somente uma resposta correta nas atividades matemáticas. Duas décadas depois, Meyer (2020) destaca que a modelagem pode provocar uma ruptura do pensamento de que a matemática é soberana e exata. Isso se dá, pois na modelagem faz-se o uso da matemática para investigar a situação da realidade, mas também é necessário que os resultados matemáticos obtidos façam sentido à luz da situação real.

Em meio ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem a tomada de decisão acompanha os alunos já em procedimentos iniciais: como definir o que é característico do fenômeno investigado para ser matematizado? com que variáveis se está lidando? O modelo matemático corresponde à situação da realidade? Qual é o papel da matemática no estudo de uma situação da realidade? Em atividades de modelagem a construção de um modelo matemático, é consequência de uma matematização. Sousa e Tortola (2021, p. 6) consideram que a matematização pode ser caracterizada como “uma atribuição de uma roupagem matemática ao fenômeno, tornando-o passível de ser interpretado matematicamente”. Já Jablonka e Gellert (2007) argumentam que a matematização é um processo que consiste em associar mais matemática a uma situação do que havia lhe sido associada até então.

Sousa *et al.* (2023, p. 6) em uma aproximação da modelagem com a Educação Matemática Crítica, comentam que “os usos de modelos matemáticos podem atuar na formatação de um modo de ver a sociedade, tanto em termos dos fenômenos investigados, quanto em termos das práticas pedagógicas subjacentes ao desenvolvimento de atividades de modelagem”. De acordo com Almeida, Tortola e Merli (2012, p.217) o modelo matemático é “o que ‘dá forma’ à solução do problema e a modelagem matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução”. Para Sousa e Tortola (2021, p. 5), “o modelo

matemático, portanto, não pode ser entendido como um fim em si só, mas é o que lança luz sobre o problema e viabiliza a explicação ou entendimento, por meio da matemática, de determinadas situações”.

As escolhas, as decisões e as características se dão em meio a formatação de um modo de ver, que é constituído pela subjetividade de cada modelador. Thompson e Yoon (2007) indica que a determinação dos aspectos que caracterizam o fenômeno investigado, bem como sua quantificação se dá em meio a escolhas particulares.

Essas escolhas particulares podem estar associadas ao que Almeida (2018) descreve como características formativas, de experiência com os conceitos matemáticos, pelo contexto em que a resolução dos problemas de modelagem é requerida, entre outras especificidades, que geram as distinções nas soluções e diferentes interpretações destas face ao fenômeno investigado.

Poderia então a modelagem se tornar fonte de reflexões sobre a matemática, sobre o contexto da situação em estudo, possibilitando refletir sobre os usos da matemática, sua razoabilidade para estudar tal fenômeno, questionar a realidade em estudo bem como o uso de modelos para esse estudo?

Outro aspecto é que os problemas a serem estudados advêm, muitas vezes, de sugestões dos alunos. Neste sentido, é possível levar em consideração seus interesses. O interesse vai desde “1. O que é importante, útil ou vantajoso, moral social ou materialmente; 2. Estado de espírito que se tem para com aquilo que se acha digno de atenção” (Oxford, 2023) conforme as acepções do dicionário de língua portuguesa até suas definições mais ligadas a aspectos filosóficos e cognitivos, que versam sobre uma relação entre sujeito e algo e que se compreende na ação. Entretanto, na área da psicologia, é evidenciado que o interesse pode ser desenvolvido, sendo que em níveis iniciais o interesse é momentâneo e, quando mais desenvolvido, pode vir a tornar-se um interesse permanente e contribuir para a formação dos alunos. Assim, como pode a modelagem contribuir para a emergência do interesse dos alunos?

Por fim, considerando as assertivas de Fredj e Vos (2023) de que, para além de competências, a modelagem pode fomentar nos alunos aspectos que às vezes passam despercebidos, levando os autores a caracterizar o *espírito da modelagem*, qual é então a formação que a modelagem pode favorecer? Ao tentar caracterizar qual formação carrega consigo o *espírito da modelagem*, ou ainda que formação é promovida por meio da modelagem, leva-se em consideração: o raio de alcance das atividades, em termos de aspectos curriculares e extracurriculares que são abordados nessas atividades; o modo

como os alunos se relacionam com os objetos do conhecimento e as atividades; os usos da matemática que são feitos nessas atividades; o interesse, as ações e reflexões dos alunos que circundam o desenvolvimento de atividades de modelagem. A partir das considerações que nos levam a formulação dessas questões, é que definimos o objetivo da presente pesquisa.

1.2 OBJETIVO DE PESQUISA

Considerando estas três questões levantadas a partir de elementos discutidos relativamente à modelagem, a presente pesquisa tem como objetivo investigar como a modelagem em ação na sala de aula pode contribuir para a formação dos alunos. Ou seja, que elementos formativos traz consigo o *espírito da modelagem* quando realizada pelos alunos em um contexto educacional?

A investigação dessa questão é mediada na presente pesquisa pela investigação de três aspectos concernentes a essa formação.

- 1- Considerando que modelos (matemáticos) sempre extraem informações da situação da realidade a que se propõe, quais aspectos formativos são favorecidos pela construção de modelos matemáticos?
- 2- Levando em consideração que o interesse é um fator psicológico relevante nas atividades educacionais, como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula?
- 3- Com base nas diferentes ações relativas às diferentes etapas de um ciclo de modelagem, qual é o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores?

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

1.3.1 Organização da tese em formato *multipaper*

Optamos por organizar o relatório de pesquisa, em *multipaper*, que é um formato alternativo de organização de teses e dissertações. Consiste em estruturar o relatório em artigos que, apesar de suas características individuais, estão relacionados e permitem a discussão sobre o objetivo geral de pesquisa. O presente relatório se constitui em cinco

capítulos: um capítulo introdutório, três capítulos de artigos e um capítulo de considerações finais.

No Capítulo 1, Considerações Iniciais, apresentam-se as características gerais da pesquisa e como a tese está estruturada.

O Capítulo 2, consiste no artigo 1 *Por que construir modelos matemáticos?* tem como objetivo *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*.

O Capítulo 3, consiste no artigo 2 *A mobilização do interesse em atividades de modelagem matemática* cujo objetivo é *investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula*.

O Capítulo 4, consiste no artigo 3 *Modelagem matemática para além do que se vê: do pragmático ao formativo*, o objetivo é *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*.

Por fim, no Capítulo 5, Considerações Finais, faz-se uma discussão em relação aos resultados obtidos em cada artigo e o objetivo da pesquisa, ressaltando interlocuções entre a modelagem e aspectos formativos que estão imbricados no desenvolvimento das atividades. Sinaliza-se as contribuições da pesquisa para a modelagem no âmbito da Educação Matemática, bem como as limitações da pesquisa e perspectivas futuras.

1.3.2 Contexto e participantes da pesquisa

A pesquisa empírica foi desenvolvida no âmbito de um curso de extensão cujo título é “Modelagem Matemática: Formação do Matemático, Pedagogo, Economista, Administrador, Contador, Biólogo e Geógrafo para matemática e para investigar fenômenos reais usando a matemática”. Este curso foi ofertado na Universidade Estadual do Norte do Paraná, sob a coordenação da pesquisadora, em que o objetivo foi promover aos alunos de diversas áreas do conhecimento, em particular, dos domínios extramatemáticos que, de acordo com a literatura, destacam-se na modelagem e nas aplicações da matemática, por exemplo, as ciências físicas, biológicas, econômicas, ambientais, sociais e de engenharia, o contato com a matemática, e o uso da mesma para resolver situações-problema reais e que se relacionam com o contexto profissional dos participantes.

O curso teve carga-horária equivalente a 40 horas, sendo 30 horas presenciais e 10 horas remotas via *Google Meet*, com encontros realizados aos sábados pela manhã.

Participaram dos encontros onze alunos advindos de diferentes áreas: cinco alunos do curso de Licenciatura em Matemática, quatro alunos do curso de Pedagogia, uma aluna do curso de Ciências Biológicas e uma aluna do curso de Administração. Um perfil com idade, gênero, curso de origem e contato com a modelagem foi sistematizado no Quadro 1.1.

Quadro 1. 1 - Perfil dos participantes

A1 – Gênero masculino, 20 anos, cursando terceiro ano de Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática.
A2 – Gênero masculino, 31 anos, formado em Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática.
A3 – Gênero feminino, 27 anos, formada em Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática.
A4 – Gênero masculino, 21 anos, cursando terceiro ano de Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática.
A5 – Gênero feminino, 19 anos, cursando primeiro ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A6 – Gênero feminino, 24 anos, cursando o terceiro ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A7 – Gênero feminino, 24 anos, cursando o quarto ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A8 – Gênero feminino, 22 anos, cursando o segundo ano de Licenciatura em Matemática e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A9 – Gênero feminino, 19 anos, cursando o segundo ano de Ciências Biológicas e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A10 – Gênero feminino, 24 anos, cursando o segundo ano de Administração, evadida do curso de Ciências Biológicas e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.
A11 – Gênero masculino, 19 anos, cursando o quarto ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.

Fonte: Adaptado do questionário de perfil para o curso de extensão (Anexo A).

Os dados⁴ foram coletados ao longo do Curso de Extensão, que teve início em 08 de outubro de 2022 e finalizou em 03 de dezembro de 2022, sendo cinco encontros presenciais e dois encontros remotos síncronos via *Google meet*. Os encontros presenciais foram gravados por meio de recursos de áudio e vídeo. Cada grupo possuía um gravador ou celular capturando as discussões dos alunos. Foram coletados os registros escritos produzidos pelos alunos, sendo orientados a anotarem suas ideias e resoluções para cada atividade desenvolvida. Ao final de cada atividade os alunos entregarem um relatório final de atividade e também foi solicitado o preenchimento de um questionário pós-atividade (Anexo B), que foi utilizado com o intuito de compreender a participação de

⁴ A coleta de dados dos alunos se deu com a autorização por meio do Termo de Consentimento em que autorizam o uso parcial ou integral, dos registros escritos, impressos, arquivos eletrônicos e gravações em áudio e vídeo das atividades realizadas (Anexo A). Os demais questionários utilizados estão disponíveis na seção de anexos.

cada aluno no desenvolvimento de cada uma das atividades realizadas. Ressalta-se que para finalizar as atividades foi realizado o procedimento de comunicação das resoluções para os demais participantes do curso e uma câmera de vídeo foi usada na sala de aula para capturar os registros no quadro e explicações dos alunos.

Nos encontros remotos via *Google meet* as reuniões foram gravadas usando recurso do próprio aplicativo, os *slides*, relatórios finais e o questionário pós-atividade foram enviados eletronicamente pelos alunos e quaisquer atendimentos de orientação realizados em horários extra também foram gravados. O Quadro 1.2 explicita a temática das atividades, breve descrição e em quais encontros do curso foram desenvolvidas.

Quadro 1.2 – Atividades realizadas no curso de extensão

Temática da atividade	Descrição	Uso na pesquisa	Encontros do curso
Monumento Cristo Rei	Atividade realizada com os alunos para introduzi-los à modelagem, tema do curso de extensão	não foi incluída nas análises	1º encontro presencial realizado em 08/10/2022
Higiene das Mãos	Tema sugerido pela professora do curso	analisada nos artigos 1 e 3	2º encontro presencial realizado em 15/10/2022
Biometria da Íris	Tema sugerido pela professora do curso	analisada nos artigos 1, 2 e 3	3º encontro presencial realizado em 22/10/2022
Restaurante Universitário	Tema sugerido pela professora do curso	analisada nos artigos 2 e 3	4º encontro presencial realizados em 29/10/2022
Estudo da Inflação no Brasil	Tema escolhido no grupo de participantes do curso	não foi incluída nas análises	2 encontros remotos via <i>Google Meet</i> realizados em 12/11/2022 e 19/11/2022 5º encontro presencial realizado em 03/12/2022
Tempo gasto pelos acadêmicos de Pedagogia da UENP CCP para chegar à Universidade	Tema escolhido no grupo de participantes do curso	analisada no artigo 3	
Fabricação de Panetones	Tema escolhido no grupo de participantes do curso	analisada no artigo 3	

Fonte: elaborado pelos autores

No primeiro encontro uma dinâmica inicial foi realizada para os alunos se conhecerem e uma conversa sobre o uso de modelos matemáticos em outras áreas do conhecimento foi promovida. Depois, uma atividade de introdução à modelagem cujo tema versa sobre um ponto turístico da cidade de Cornélio Procópio, o *Monumento Cristo*

Rei, foi desenvolvida em grupo com o intuito de os familiarizar com o contexto de atividades de modelagem. Ao final os alunos foram convidados a participar de um quiz⁵ com questões gerais sobre o que foi discutido no encontro.

A situação-problema *Higiene das mãos*⁶, será abordada no artigo 1, foi desenvolvida por nove alunos, que se agruparam em três grupos, sendo um grupo de alunos do curso Licenciatura em Matemática com quatro integrantes, um grupo de alunos do curso de Pedagogia com três integrantes e um terceiro grupo com dois alunos, um do curso de Ciências Biológicas e outro do curso de Administração.

A situação-problema *Biometria da Íris*⁷, foi investigada por sete alunos, separados em dois grupos. Um grupo formado por três alunos do curso de Pedagogia e o outro grupo por quatro alunos, sendo três do curso de Licenciatura em Matemática e um do curso de Administração. A descrição do desenvolvimento desta atividade está contemplada nos artigos 1 e 3, e é brevemente citada na análise do artigo 2.

Outra situação-problema, cuja descrição também é abordada no artigo 3 envolveu a temática *Restaurante Universitário* e foi investigada por seis alunos, constituindo um único grupo com dois alunos do curso de Licenciatura em Matemática, três alunos do curso de Pedagogia e um aluno do curso de Administração.

Por fim, os alunos foram convidados a investigar um problema com tema de seu próprio interesse. Formando três grupos distintos, os alunos se engajaram no desenvolvimento de atividades de modelagem cujas temáticas foram: *Estudo da variação da inflação do Brasil*, em que o interesse partiu da aluna do curso de Administração; *Tempo gasto pelos acadêmicos de Pedagogia da UENP CCP para chegar à universidade* sugerido pelo grupo do curso de Pedagogia; *Como precificar um panetone para venda?* problema a ser investigado pelo grupo do curso de Licenciatura em Matemática. Os dois últimos são parte da discussão do artigo 2 e 3.

Para as análises dos dados selecionamos as atividades que carregam um maior detalhamento do desenvolvimento, nos registros escritos, seja no relatório final ou no questionário pós-atividade, bem como nos áudios e vídeos gravados. A metodologia de

⁵ O quiz foi realizado pelo aplicativo *Kahoot!* disponível em: <<https://kahoot.com/>>.

⁶ Temática inspirada no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática proposta no Minicurso - Articulando atividades de Modelagem Matemática nos diferentes níveis de escolaridade ministrado pela Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan e Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva no VIII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, Cascavel, 2018.

⁷ Inspirada em uma atividade apresentada em Almeida (2020).

análise é descrita na seção a seguir, sendo os pormenores tratados em cada um dos artigos que compõe este relatório de pesquisa.

1.3.3 Metodologia de análise dos dados

A presente pesquisa tem como objetivo investigar como a modelagem em ação na sala de aula pode contribuir para a formação dos alunos, de forma que o movimento analítico delineia que elementos formativos traz consigo o *espírito da modelagem* quando realizada pelos alunos em um contexto educacional. Este movimento é mediado por meio da investigação de três aspectos concernentes a essa formação pautando-se em identificar quais aspectos formativos são favorecidos pela construção de modelos matemáticos; como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula; caracterizar qual é o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores.

A pesquisa caracteriza-se como de natureza qualitativa, visto que se busca articulações para compreender os dados coletados por meio de interpretações de acordo com o contexto e questão de pesquisa. Parte-se do entendimento de pesquisa qualitativa de conteúdo de caráter exploratório que pode ou não constituir categorizações.

O caráter exploratório se dá de acordo com Mayring (2014) em cinco etapas: (1) Seleção do material de análise, em que o pesquisador faz um recorte dos dados que se pretende analisar. (2) Transcrição, que consiste em transformar em texto aquilo que não está em registro escrito, como as falas presente nas gravações de áudio e vídeo; (3) Contextualização da análise, em que se determina uma linha de investigação; (4) Unidades de análise, que é a segmentação dos dados em unidades análise; (5) Definição da técnica de análise que se adequa ao objetivo da pesquisa ou dos dados a serem analisados, neste momento é possível fazer o uso de diferentes técnicas e realizar a formação de categorias. Neste sentido, tem-se a necessidade de explorar os dados coletados, realizando uma seleção inicial daquilo que é relevante para análise a partir da leitura e exploração dos dados. Este procedimento possibilita a constituição de unidades de análise, que podem posteriormente ser categorizadas mediante um processo interpretativo.

A análise dos dados, pauta-se nos procedimentos de análise qualitativa de conteúdo (Mayring, 2014) em que a partir de unidades de análise realizou-se o desenho de categorias emergentes que, por sua vez, consideram uma interpretação teórica dos

elementos que podem evidenciar, no artigo 1, aspectos formativos favorecidos pela finalidade da construção de modelos matemáticos quando os alunos estão engajados no desenvolvimento de atividades de modelagem. No artigo 2, como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula considerando que este é um fator psicológico compreendido no contexto educacional. E, no artigo 3, a partir de um olhar analítico e interpretativo destaca-se a potencialidade das atividades na formação dos alunos, em aspectos relativos aos conceitos matemáticos, bem como para além destes.

A partir das discussões advindas de cada um dos artigos promove-se uma discussão final que visa a interlocução entre os resultados de modo a caracterizar que formação é promovida por meio da modelagem na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v. 5, n. 11, 2020.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 50 n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. DE; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Revista Acta Scientiae**. Canoas-RS. v. 14, n. 2, 2012.

BICUDO, M. A. V. O Ensino de Matemática e a Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, Rio Claro, v. 12, n.13, p. 1-11, 1999.

BIESTA, G. Why ‘what works’ still won’t work. From evidence-based education to value-based education. **Studies in Philosophy and Education**, v.29, n.5, p.491–503, 2010.

BIESTA, G. Medir o que valorizamos ou valorizar o que medimos? Globalização, responsabilidade e a noção de propósito da educação. **Revista Educação Especial**, v.31, n.63, p.815–832, 2018.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

FREJD, P.; VOS, P. The spirit of mathematical modeling - a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education. **The Mathematics Enthusiast**, v.21, n.1e2, p.269-300, 2023.

- GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.
- JABLONKA, E.; GELLERT, U. Mathematization - Demathematization. In: GELLERT, U.; JABLONKA, E. (Eds), **Mathematization and Demathematization**, (p. 1-19). Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands, 2007.
- KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v.38, n.2, p.302-310, 2006.
- KLÜBER, T. E.; TAMBARUSSI, C. M.; MUTTI, G. S. L. O problema filosófico da teoria da representação e desdobramentos para a Modelagem Matemática na Educação Matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 24, n. 2, p. 289-324, 2022.
- MAYRING, P. **Qualitative content analysis** - theoretical foundation, basic procedures and software solution, 2014.
- MEYER, J. F. da C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se fazer a Matemática da necessidade. **Com a Palavra, O Professor**, v.5, n.11, p.140-149, 2020.
- NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling** (1st ed.). Routledge, 2020.
- OXFORD. Dicionário da Língua Portuguesa. Oxford University Press, 2023.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro - SP, v. 13, n. 14, 2000.
- SOUSA, B. N. P. A.; SEKI, J. T. P.; MOREIRA, C. C. V.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e os usos da linguagem: desdobramentos para o desenvolvimento da criticidade. **Anais... XII CNMEM – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática**, UFRGS, Porto Alegre - RS, p.1-16, 2023.
- SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 2, p.1-25, 2021.
- SOUZA, E.G., ALMEIDA, L. M. W; KLÜBER, T.E. Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In: RIBEIRO, A. J. et al. (Orgs.), **Mathematical Education in Brazil**. Springer: New York, p. 211-228, 2018.
- THOMPSON, M.; YOON, C. Why build a mathematical model? Taxonomy of situations that create the need for a model to be developed. In: LESH, R; HAMILTON, E.; KAPUT, J. (eds.) **Foundations for the Future in Mathematics Education**. London: Laurence Earl Baum Associates, p. 193-200, 2007.

CAPÍTULO 2 - ARTIGO 1

POR QUE CONSTRUIR MODELOS MATEMÁTICOS?

Resumo: Em atividades de modelagem a investigação matemática pode proporcionar condições para que modos de ver o mundo se configurem. Neste contexto, o objetivo deste artigo é *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*. Para detalhar a investigação dados foram coletados com nove alunos em um curso de extensão sobre os usos de modelos matemáticos em diferentes práticas profissionais. Com foco na atividade de modelagem e na finalidade de construir modelos matemáticos, registros escritos, áudio-gravados e relatórios dos alunos coletados no desenvolvimento das atividades constituem o corpus da pesquisa e foram analisados seguindo os pressupostos da Análise de Conteúdo como caracterizada por Mayring (2014). O processo analítico busca ampliar as classificações presentes na literatura recorrente do que se requer para construir modelos matemáticos. Assim identifica-se nas declarações dos alunos o que se denominou de habilidade de experiência social e habilidade de pensamento sistêmico. O primeiro indica que o estudo de uma situação inclui as práticas de participação do aluno, identificadas a partir da importância que este atribui à situação em contexto extraclasse como no seu futuro contexto profissional. O segundo, por sua vez, indica que a construção de um modelo matemático requer o pensamento sistêmico, que é identificado como uma visão holística da situação em estudo, sendo esta incorporada no entendimento e estudo das situações, quando optam por usar tecnologias digitais, nas simplificações realizadas e na dinamicidade do ciclo de modelagem quando precisam ajustar o modelo matemático desenvolvido.

Palavras-chave: Educação Matemática. Problemas de Modelagem. Modelos Matemáticos. Diferentes Resoluções.

2.1 INTRODUÇÃO

A modelagem tem em sua abordagem a resolução de um tipo especial de problema que é relativo a aplicações científicas ou situações da vida cotidiana, que pode ser tratado em um ambiente profissional, bem como em situações de ensino, que, neste artigo, denominamos *problema de modelagem*, e este pode desencadear diferentes possibilidades para as resoluções (Bassanezi, 2002; Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Czocher, 2013; Sousa, 2017; Borromeo Ferri, 2018; Carreira; Almeida; Baioa, 2018; entre outros).

O inquietante sobre esse aspecto são questionamentos específicos acerca de quais fatores podem ser elencados para caracterizar essas resoluções, ou ainda, como elas se dão no contexto, por exemplo, da sala de aula. Isso ocorre, pois a relação entre a situação real, problemática, e a matemática a ser usada para investiga-la não é imediata.

A partir da inteiração com o fenômeno, é necessário matematizar informações da situação-problema inicial para incorporar os diferentes usos da matemática. De acordo

com Almeida e Silva (2015, p. 255), o matematizar “define como a relação entre o fenômeno e a matemática vai ser”.

Os usos da matemática em atividades de modelagem são incorporados como um modo de ver a situação-problema. Neste contexto Almeida (2018, p. 28), indica que o uso realizado pelos alunos “está ancorado em suas experiências anteriores, seja em suas experiências com os conceitos e ferramentas da matemática, seja em suas experiências com práticas de modelagem”. Neste contexto, os problemas de modelagem podem permitir a possibilidade de aplicabilidade de ideias matemáticas na realidade, o que, por sua vez, colabora para a percepção dos conceitos matemáticos pelos alunos (Schukajlow; Krug, 2014; Rellensmann; Schukajlow, 2017).

Nas palavras de Bassanezi (2002, p.19), “selecionar argumentos e parâmetros, considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema” caracteriza a construção do modelo matemático. A construção e uso de modelos matemáticos “carrega”, ainda, a intencionalidade dos modeladores, e possibilita a relação entre o fenômeno e a matemática, que, por sua vez, expressa diferentes modos de ver do fenômeno investigado (Sousa; Tortola, 2021).

Os diferentes modos de ver, citados por Almeida (2018) e por Sousa (2017), por sua vez, colocam os alunos em caminhos específicos na busca por solucionar os problemas de modelagem. Isto pode se dar, em partes, devido às características formativas, de experiência com os conceitos matemáticos, ou como apontam Thompson e Yoon (2007) da finalidade de se construir os modelos matemáticos a depender do tipo de informação a ser extraída da situação, entre outras especificidades que distinguem as soluções apresentadas e ao mesmo tempo apontam para diferentes interpretações das soluções face ao fenômeno investigado.

Neste sentido, busca-se *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*. Para conduzir a investigação apresenta-se a construção de modelos matemáticos por alunos engajados no desenvolvimento de atividades de modelagem no âmbito de um curso de extensão. A partir dos encaminhamentos metodológicos da análise de conteúdo caracterizada por Mayring (2014), as atividades de modelagem analisadas de temas “Higienização das mãos”⁸ e

⁸ Temática inspirada no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática proposta no Minicurso - Articulando atividades de Modelagem Matemática nos diferentes níveis de escolaridade ministrado pela Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan e Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva no VIII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, Cascavel, 2018.

“Biometria da íris”⁹ colaboram para a ampliação de classificações a respeito da finalidade de se construir modelos matemáticos apresentadas na literatura em Thompson e Yoon (2007) e Brito (2018).

2.2 PROBLEMAS DE MODELAGEM: CARACTERIZAÇÃO E POSSIBILIDADE DE RESOLUÇÃO

A caracterização da modelagem inclui a articulação de elementos da matemática e da realidade na busca pela solução de problemas por meio de modelos matemáticos (Bassanezi, 2002). Já a caracterização de *problema*, em uma de suas acepções no dicionário da Língua Portuguesa aponta uma questão não solucionada, um objeto de discussão para o qual não se tem esquemas prévios de solução (Houaiss, 2009). O dicionário filosófico Abbagnano (2007, p. 796), indica que a noção de problema surgiu intrínseca à matemática como uma “proposição que parte de certas condições conhecidas para buscar alguma coisa desconhecida”.

No âmbito da História da Matemática, já nos livros de Euclides o termo *problema* inclui uma investigação que envolve partir de algo que se conhece em busca daquilo que é desconhecido e essa resolução se dá por meio de uma construção (Euclides, 2009)¹⁰.

Especialmente no âmbito da modelagem, Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 218) detalham que “o termo ‘problema’ é entendido como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas”.

Discussões teóricas e filosóficas apontam a formulação de problemas como parte fundamental das atividades de modelagem (Borromeo Ferri; Blum, 2010; Maas, 2010; Almeida; Tortola; Merli, 2012; Dalla Vecchia; Maltempo, 2019; Setti; Waideman; Vertuan, 2021). No âmbito internacional, de acordo com Pollak (2012, p. xi): “O coração da modelagem matemática [...] é a formulação de problemas antes da sua resolução... a modelagem matemática traz de volta à Educação Matemática a formulação de problemas e reforça a unidade da experiência em Matemática”.

Os problemas de modelagem podem ser caracterizados como problemas abertos, de modo a descrever a vagueza existente neste tipo de problema, visto que, nas palavras de Schukajlow *et al.* (2022, p. 404) eles “não incluem todas as informações necessárias

⁹ Inspirada em Almeida (2020).

¹⁰ Euclides de Alexandria, Matemático grego que viveu entre os séculos III e IV a.C, autor da obra “Os Elementos”.

para desenvolver uma solução, exigem que os solucionadores façam suposições e resultam em várias soluções”.

A formulação e delimitação de problemas de modelagem faz parte da investigação matemática conduzida a partir da atividade de modelagem. A estrutura dessas atividades é comumente descrita por meio de fases, as quais configuram, estruturam e possibilitam aos modeladores a resolução da situação-problema. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), são elas: interação, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação, comunicação dos resultados.

Conforme indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012), a fase de *inteiração* consiste em buscar informações para compreender e conhecer a situação da realidade, sendo necessário a realização de uma coleta de dados e a definição de uma situação-problema. Na fase de *matematização*, há a transição do problema em linguagem natural para linguagem matemática, via formulação de hipóteses e simplificações, e a definição de variáveis necessárias para a resolução do problema. Em seguida, tem-se a *resolução*, fase em que se elabora um modelo matemático que soluciona o problema investigado. Por fim, os autores argumentam a necessidade da fase de *interpretação de resultados e validação* como um modo de validação dos resultados matemáticos obtidos com o modelo matemática, mas também como uma maneira de retornar à situação-problema e interpretar as soluções obtidas com vistas ao fenômeno investigado. Na sala de aula uma a comunicação dos resultados é indicada como ação fundamental e se dá ao final da atividade de modelagem.

2.2.1 Sobre a construção de modelos matemáticos

Para tratar dos usos da matemática em atividades de modelagem Almeida, Silva e Vertuan (2012), ponderam que esta tem início quando os alunos realizam a tradução de informações da realidade para a matemática; e debruça-se sobre a fase de resolução e elementos que podem ser evidenciados no desenvolvimento dos modelos matemáticos que os alunos utilizam para dar encaminhamento às resoluções dos problemas de modelagem.

De acordo com Almeida (2018, p. 28), o uso da matemática realizado pelos alunos “está ancorado em suas experiências anteriores, seja em suas experiências com os conceitos e ferramentas da matemática, seja em suas experiências com práticas de modelagem”. É possível dizer que, em um momento inicial, a estruturação matemática da

situação ocorre a partir da extração de informações da situação, corroborando para se “ler” a situação-problema a partir de um “olhar” matemático. No entanto, para saber ler usando esta nova lente é necessário habilidades para compreender a finalidade de se construir e usar modelos matemáticos, visto que “ter um modelo”¹¹ envolve adotá-lo de maneira intencional, reflexiva, como forma de pensar. Este não só permite fazer coisas no mundo, mas também permite ver as coisas de uma maneira particular (Brady, 2018, p. 47).

De acordo com Thompson e Yoon (2007), o modelo sempre extrai informações da situação e sua construção pode ter diferentes finalidades. A partir de uma pesquisa empírica ampla, Thompson e Yoon (2007) construíram uma taxonomia em que caracterizam diferentes especificidades associadas à construção de um modelo matemático (Quadro 2.1).

Quadro 2.1 – Síntese de situações que requerem a construção de um modelo

- Situação de medir algo: busca-se uma maneira de mensurar algum objeto.
- Situação de tomar uma decisão: a informação que se busca, neste caso, é uma maneira de fazer e justificar uma escolha dentre várias opções que dependem de características espaciais.
- Situação de reprodução: precisa recorrer a construção de uma réplica de algum objeto.
- Situação de explicação: se o modelador precisa explicar como o fenômeno produziu determinado resultado.
- Situação de predição: se o modelador precisa compreender o fenômeno e suas condições futuras ou consequências que o comportamento pode acarretar.
- Situação de manipulação: se o modelador precisa que o fenômeno se comporte de uma dada maneira, manipular o sistema para que ele produza um resultado desejado.

Fonte: Adaptado de Thompson e Yoon (2007)

Cada um dos itens caracterizados por Thompson e Yoon (2007), está associado a uma atividade de modelagem em que a delimitação de propósitos para a criação do modelo é importante. De acordo com Lesh e Yoon (2007, p. 167) essa delimitação favorece “maneiras úteis de pensar sobre (descrever, explicar, interpretar) relações, padrões e regularidades relevantes” o que compreende o desenvolvimento de aspectos formativos, como requerer o domínio de habilidades voltadas para a construção e uso de modelos matemáticos em determinadas situações.

¹¹ Tradução nossa do termo “Having a model” (Brady, 2018, p. 47).

Com esse enfoque Brito (2018) sistematizou seis habilidades requeridas para o desenvolvimento de modelos matemáticos por alunos ao lidarem com atividades de modelagem em sala de aula. Ao lidar com uma situação da realidade e estudá-la por intermédio da modelagem, a construção de um modelo matemático demanda a extração de informações da realidade (situação) em estudo. Para isso habilidades são mobilizadas. Essas habilidades ocorrem a partir da finalidade da construção do modelo matemático que podem exigir habilidades de: medição, tomada de decisão, reprodução, explicação, predição e manipulação. Cada uma das habilidades é definida por Brito e Almeida (2021, p.9):

Dimensão 1 – habilidade de medição: a informação que se busca, neste caso, é a medida de alguma propriedade ou de uma qualidade do espaço que não pode ser determinada diretamente.

Dimensão 2 – habilidade de tomada de decisão: a informação que se busca, neste caso, é uma maneira de fazer e justificar uma escolha dentre várias opções que dependem de características espaciais.

Dimensão 3 – habilidade de reprodução: aqui, a informação procurada é um “molde” que possibilita a construção de uma réplica de algum objeto.

Dimensão 4 – habilidade de predição: se variamos certas condições ou “variáveis” espaciais de um objeto, que resultados/consequências isso pode acarretar? Se essas condições ou “variáveis” não podem ser manipuladas diretamente, então um modelo geométrico pode informar acerca do comportamento desse objeto sob condições desejadas.

Dimensão 5 – habilidade de explicação: se algum resultado incomum do espaço é observado, um modelo geométrico pode ser desenvolvido para explicar como o sistema produziu esse resultado incomum.

Dimensão 6 – habilidade de manipulação: aqui, a informação procurada refere-se a como manipular o espaço para que ele produza um resultado desejado.

No presente artigo, a partir de uma pesquisa empírica realizada com alunos de diferentes cursos de graduação, interessa-se olhar para as habilidades associadas a construção de modelos matemáticos, sendo portanto, aspectos que colaboram para a formação dos modeladores.

2.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*, dados foram coletados no âmbito de um curso de extensão, de trinta horas de duração, ofertado em uma universidade pública do estado do Paraná. O curso tinha como objetivo promover ao público participante o contato com a matemática e seus usos

para resolver situações-problema reais, tendo como participantes alunos advindos de diferentes cursos formação, como Licenciatura em Matemática, Pedagogia, Ciências Biológicas e Administração.

Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados: filmadora que captou em vídeo a comunicação dos resultados realizada pelos grupos, gravadores de voz posicionados um em cada grupo, celular para registrar fotos, uma folha com o texto da situação-problema e algumas orientações para o encaminhamento da resolução, bem como qualquer outra folha que os alunos usassem para registrar algo.

Durante as trinta horas de curso, nove alunos desenvolveram seis atividades de modelagem. Para as análises e discussões deste artigo foram selecionadas duas atividades de temáticas “higienização das mãos” e “biometria da íris”, na primeira desenvolvida por nove alunos, divididos em três grupos G1 (A1, A2, A3 e A4), G2 (A5, A6 e A7) e G3 (A9 e A10) e na segunda desenvolvida por sete alunos organizados em dois grupos G1 (A5, A7 e A11) e G2 (A1, A3, A8 e A10). O Quadro 2.2 apresenta um breve perfil dos alunos.

Quadro 2. 2 - Perfil dos participantes

Alunos	Grupos
A1- Gênero masculino, 20 anos, cursando terceiro ano de Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática. A2- Gênero masculino, 31 anos, formado em Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática. A3- Gênero feminino, 27 anos, formada em Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática. A4- Gênero masculino, 21 anos, cursando terceiro ano de Licenciatura em Matemática e já cursou a disciplina de modelagem matemática.	Grupo 1 (G1)
A5- Gênero feminino, 19 anos, cursando primeiro ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão. A6- Gênero feminino, 24 anos, cursando o terceiro ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão. A7- Gênero feminino, 24 anos, cursando o quarto ano de Pedagogia e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.	Grupo 2 (G2)
A9- Gênero feminino, 19 anos, cursando o segundo ano de Ciências Biológicas e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão. A10- Gênero feminino, 24 anos, cursando o segundo ano de Administração, evadida do curso de Ciências Biológicas e nunca teve contato com modelagem matemática antes de participar do curso de extensão.	Grupo 3 (G3)

Fonte: elaborado pelos autores



Esses alunos participantes do curso trabalharam em diferentes encontros no desenvolvimento de diversas atividades de modelagem que foram introduzidas de modo gradativo como sugerido por Almeida e Dias (2004) para familiarização dos alunos com este tipo de atividade.

Diante do objetivo do artigo faz-se o uso dos pressupostos de Marying (2014) para realizar uma análise qualitativa de conteúdo, com caráter exploratório, que consiste em formar categorias emergentes a partir da exploração dos dados e requer uma interpretação destas por meio de elementos teóricos. Tem-se a necessidade de explorar as resoluções dos participantes realizando uma seleção inicial daquilo que é relevante para análise a partir da leitura e observação dos dados constituindo unidades de análise.

2.4 PROBLEMAS DE MODELAGEM

Os alunos organizados em grupos trabalharam na resolução de problemas de modelagem cuja as temáticas versam sobre i) Higienização das mãos e ii) Biometria da íris humana. As situações foram apresentadas aos alunos de acordo com os Quadros 2.3.

Quadro 2.3 – Problema sobre a lavagem das mãos

<p>15 de outubro Dia Mundial de Lavar as Mãos</p>	
<p>Segundo o instituto Butantan, a data tem como objetivo aumentar a conscientização sobre os benefícios de lavar as mãos com água e sabão corretamente ou, quando não tiver acesso a eles, utilizar álcool em gel 70%. Esta é uma das ações mais eficazes para combater infecções e a transmissão de vírus e bactérias. De acordo com a OMS (Organização Mundial da Saúde), lavar as mãos reduz em até 40% o risco de contrair conjuntivite, diarreia, dor de garganta, gripe, infecção estomacal, entre outras. Também é considerada a forma mais eficaz de prevenir a transmissão de microrganismos.</p> <p>A lavagem das mãos deve ser realizada da maneira correta e eficaz como na figura que resume os passos:</p>	 <p>É importante lavar as mãos?</p> <p>Qual a porcentagem das mãos que não lavamos?</p>
<p>Biometria da íris humana</p> <p>O uso da biometria da íris como sistema de segurança, tem sido utilizado por bancos, desbloqueio de tela de smartphones, computadores e notebooks, dentre outros. No caso dos smartphones, a própria câmera digital de alta-resolução dos aparelhos, captura imagens que com comprimentos de ondas visíveis ou de infravermelho, faz comparações das imagens e padrões da íris com imagens armazenadas em um banco de dados. A produção de aprimoramentos para os mecanismos de reconhecimento de pessoas por meio da biometria tem entrado em cena, visto que ainda há possibilidades de fraudes para burlar os sistemas de segurança.</p>	 <p>Levando em conta essa situação, a atividade que vamos desenvolver consiste na criação de um algoritmo que possa ser usado para o reconhecimento biométrico pela íris, permitindo classificar se uma pessoa pertence ou não a um determinado grupo.</p>

Fonte: Elaborado pelas autoras

As atividades de modelagem foram desenvolvidas pelos alunos divididos em grupos e segundo as fases de atividade de modelagem matemática indicadas em Almeida, Silva e Vertuan (2012). A inteiração com o tema da atividade foi feita por meio de uma

roda de conversa com os alunos e professores participantes do curso de extensão, e engajados nos grupos os alunos elaboraram uma solução para o problema inicial. O percurso que está relacionado a construção de modelos é analisado e discutido neste artigo.

2.4.1 A construção de modelos nessas atividades

O tratamento dos problemas enunciados Problema sobre a Higienização das mãos e Biometria da íris humana, se constituíram problemas para os alunos, visto que as questões a investigar não eram previamente conhecidas pelos alunos e os mesmos não possuíam esquemas prévios para sua solução. Ou ainda, de acordo com Schukajlow *et al.* (2022) se constituíram de situações em que os alunos não tinham todas as informações necessárias para solucionar as questões a eles associadas, neste contexto foi necessário o uso de delimitação de variáveis, parâmetros, formulação de hipóteses, construção, validação e interpretação de modelos matemáticos.

De acordo com Brito (2018), há diferentes habilidade que podem ser desenvolvidas por alunos que se engajam em atividades de modelagem. Em ambas as atividades de modelagem há o desenvolvimento de uma situação-problema em que se busca “medir algo” com a finalidade de investigar a área da mão que não lavamos e parâmetros da íris humana que podem compor um algoritmo. As duas situações também estão associadas à tomada de decisão, visto que várias opções espaciais podem ser justificadas para a construção de modelos matemáticos viáveis as Figuras 2.1 e 2.2 contém um esboço das escolhas dos alunos de cada grupo e os modelos matemáticos por eles construídos.

Figura 2. 1 – Síntese da resolução do grupo 3 na atividade de tem Higienização das mãos.



<p>Modelo matemático Área total: 74,61 – 100% Área não pintada: 13,6 – x</p>	<p>Interpretação e validação Essa atividade da mão [...] serve como um demonstrativo de que a gente não dá tanta atenção para a lavagem das mãos. Fizemos o cálculo novamente por aproximação de retângulos para conferir.</p>
--	---

Fonte: elabora pelas autoras

Para determinar o percentual das mãos que não são lavadas, o grupo G3, primeiramente, registrou a simulação da lavagem das mãos por meio da captura de fotos com a câmera do celular. As alunas optaram pelo registro, justamente, para manipular as imagens usando algum *software*.

Neste contexto, elas pensaram em qual *software* as ajudariam não apenas a realizar a coleta de dados, mas também a realizar cálculos e facilitar a determinação de uma resposta para o problema. Este movimento, revela um entendimento de uma visão integrada do estudo da situação, no sentido de que as ferramentas tecnológicas poderiam auxiliá-las durante todo o desenvolvimento da atividade, na coleta de dados. Além de tratar os dados coletados, a ferramenta polígono, presente no *Geogebra*, permitiu o desenho de um polígono livre, por meio da plotagem e a união de pontos.

Tal demarcação também foi pensada pelas alunas de modo a obter a área da região de forma mais aproximada, além disso as alunas incluíram as laterais dos dedos, compreendendo que essa região tem contato com os fatores externos e que, de forma geral, ao observarem as simulações dos colegas em sala, perceberam que nem sempre eram lavadas completamente. Esse cuidado em quais informações incluir, como medi-las e considerá-las nos cálculos evidencia a preocupação em não fazer grandes simplificações, no sentido de não simplificar demais a situação, já que a validação dos resultados constitui realizar estas avaliações.

Essa antecipação da forma de lidar com a situação, bem como a percepção da situação como um todo entrelaçando o uso da tecnologia, o cuidado com as simplificações, bem como a fluidez entre as fases, evidencia como apontado em Brito (2018, p.56), que “práticas de modelagem” podem favorecer o desenvolvimento de habilidades de modelagem e estas colaboram para que os alunos “construam resultados matematicamente produtivos para os problemas que surgem em seu mundo”, neste sentido lidar com atividades de modelagem e a construção de modelos matemáticos podem favorecer o desenvolvimento de habilidades.

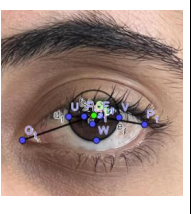
Brito e Almeida (2021), argumentam que as habilidades são constituintes da aprendizagem promovida pelo desenvolvimento de atividades de modelagem e tais

habilidades se diferenciam em função do tipo de informação que se busca extrair. Em particular, o problema sobre a higienização das mãos evidencia o favorecimento do uso de habilidades de medição, visto que a finalidade é obter “a medida de alguma propriedade ou de uma qualidade do espaço que não pode ser determinada diretamente” semelhante ao que definem Brito e Almeida (2021, p.9). Entretanto, percebe-se que o desenvolvimento da atividade de modelagem pode favorecer o uso de outras habilidades, como por exemplo coordenando os usos da tecnologia, as simplificações e a dinamicidade das fases de modelagem.

No desenvolvimento da atividade de tema “Biometria da íris”, isto também ocorre, ainda que a atividade possa ter como finalidade: a medição da íris, a tomada de decisão para constituir um algoritmo ou, em casos mais avançados, a reprodução de um protótipo de sistema de leitura biométrica já existente; para além destas a habilidade de se ter uma visão holística da situação em estudo foi fundamental.

Figura 2. 2 – Síntese da resolução do grupo 2 na atividade de tema Biometria da íris humana

Coleta de dados do grupo G2						Geogebra - A10
	$d_{C_iC_p}$	$d_{C_pL_i}$	$d_{C_pL_e}$	$d_{C_iL_i}$	$d_{C_iL_e}$	d_{C_pI}
A1	0,07	1,52	1,44	1,58	1,37	0,52
A3	0,05	1,85	1,51	1,89	1,46	0,68
A8	0,06	1,78	1,38	1,84	1,31	0,6
A10	0,06	2,33	1,67	2,39	1,62	0,74



Medidas das extraídas
 distância entre o centro da íris e o centro da pupila ($d_{C_iC_p}$);
 distância entre o centro da pupila e o limite interno do olho ($d_{C_pL_i}$);
 distância entre o centro da pupila e o limite externo do olho ($d_{C_pL_e}$);
 distância entre o centro da íris e o limite interno do olho ($d_{C_iL_i}$);
 distância entre o centro íris e o limite externo do olho ($d_{C_iL_e}$);
 distância entre o centro da pupila até o contorno da íris (d_{C_pI}).

Interpretação e validação
 Consideramos o modelo válido pois na realização de testes, com pessoas externas ao grupo, o algoritmo não reconhece as medidas lidas como pertencentes ao conjunto de elementos das etapas 1,2,3 e 4.

Modelo matemático

1° A distância entre os centros da íris e pupila pertencer ao conjunto de elementos {0,05; 0,06; 0,07}.

2° Passar na verificação anterior e o resultado de R1 pertencer ao conjunto de elementos {1,039473684; 1,021621622; 1,033707865; 1,025751073}.

3° Passar na verificação anterior e o resultado de R2 pertencer ao conjunto de elementos {0,951388889; 0,966887417; 0,949275362; 0,97005988}.

4° Passar na verificação anterior e a distância entre o centro da íris até o seu contorno pertencer ao conjunto de elementos {0,52; 0,68; 0,6; 0,74}.

Se o algoritmo reconhecer essas 4 informações é feito o desbloqueio, caso contrário a pessoa externa é mantida bloqueada.

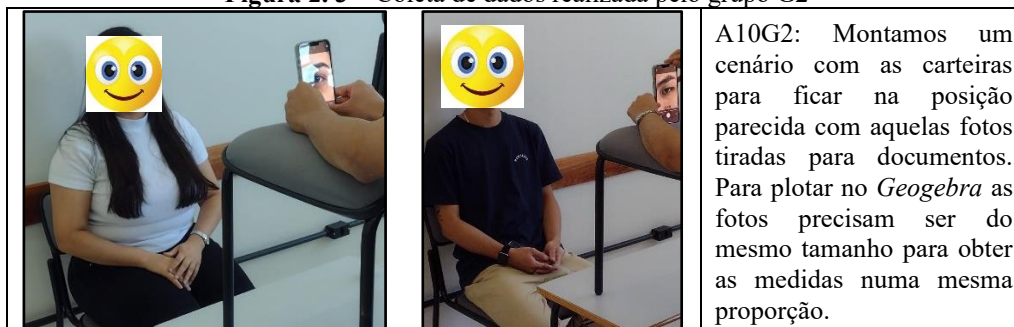
Sendo $R1 = \frac{d_{C_pL_i}}{d_{C_iL_i}}$ e $R2 = \frac{d_{C_pL_e}}{d_{C_iL_e}}$ razões que variam conforme as medidas de cada membro.

Fonte: Elaborada pelas autoras

A Figura 2.2, remete a construção do modelo matemático do grupo G2 no desenvolvimento da atividade de tema “Biometria da íris”. Pode-se destacar que o uso da tecnologia mediou fases e procedimentos da atividade. Por meio de pesquisas o grupo

verificou que a leitura da íris, geralmente, é capturada por diversos atributos que são extraídos de imagens da íris do olho. Logo, um cenário fotográfico foi criado pelos alunos para realizar a coleta de imagens da íris. Este cuidado foi tomado para que os cálculos dos atributos estivessem numa mesma proporção (Figura. 2.3).

Figura 2.3 – Coleta de dados realizada pelo grupo G2



Fonte: Elaborada pelas autoras

Isto ocorreu, pois os alunos já pensaram na atividade como um todo, e sabiam que coletas em ambientes diferentes, não seguindo os mesmos padrões, poderiam ocasionar a não validação do modelo matemático.

O que se busca evidenciar é que em ambas as atividades de modelagem, o desenvolvimento da construção de modelos não se concentra apenas em favorecer o uso de habilidades de medição ou ainda de tomada de decisão, nela também foi possível identificar indícios de que a habilidade de compreender a atividade como um todo ainda que seu desenvolvimento seja em etapas, a construção do modelo requer pensar na situação como um todo, isto quer dizer que, a finalidade do estudo desta situação engloba aspectos da modelagem, da matemática e da situação, não como partes isoladas, mas sim como uma relação do sistema.

A evidência desse aspecto formativo, de se pensar a construção de modelos matemáticos por meio de uma visão holística, também ocorre nas declarações dos alunos conforme indicativos do Quadro 2.4.

Quadro 2.4 – Ações identificadas sobre o pensamento sistêmico

Exemplos	Indícios
<p>A1G1: Vamos tirar fotos e usar o <i>Geogebra</i> pois assim que definirmos as medidas a serem consideradas teremos a leitura de cada pessoa e facilidade no cálculo das medidas. [...] Fizemos uso do <i>Geogebra</i> e do <i>Excel</i>. Sem sombra de dúvidas o <i>Geogebra</i> foi o essencial para a resolução do problema, pois através dele obtemos as distancias entre os pontos. (Biometria da íris humana)</p> <p>A9G3: Sugerir o uso do <i>Geogebra</i> pois usando as ferramentas dele identificamos a área da mão lavada e não lavada, o próprio <i>software</i> já realiza os cálculos. Para</p>	<p>Uso de tecnologias</p>

validar precisamos apenas de uma escala da foto para as medidas reais. (Higiene das mãos)	
<p>A1G1: Montamos um cenário para coleta de dados das imagens da íris e tomamos o cuidado de fixar a distância entre a câmera e o rosto das pessoas para manter a mesma proporção nas fotos. [...] vale lembrar que para que seja válido devemos adotar nove casas após a vírgula, já que as medidas são pequenas e podem ser próximas. (Biometria da íris humana)</p> <p>A3G1: Nós dividimos as mãos em polígonos que conhecemos e para o modelo incluímos a média de todas as mãos do grupo. (Higiene das mãos)</p> <p>A5G2: Vamos coletar as medidas das partes não pintadas diretamente das mãos com o uso de régua. Claro, que por meio de figuras geométricas que sabemos como calcular a área. (Higiene das mãos)</p> <p>A10G3: Para chegarmos no resultado mais próximo da área da mão que fica sem lavar coletamos os dados no <i>Geogebra</i>. Também, incluímos nos nossos cálculos as áreas das laterais dos dedos. (Higiene das mãos)</p>	Cuidado com as simplificações
<p>A10G3: Quando plotamos a imagem da lateral do dedo no <i>Geogebra</i> vimos que estávamos trabalhando com as imagens da mão e do dedo em proporções diferentes, então para validar foi necessário construir uma escala. Realizamos esses cálculos manualmente para conferir se os resultados obtidos no <i>software</i> correspondiam ao real. (Higienização das mãos)</p> <p>A1G1: Tivemos que retomar as etapas do algoritmo, pois íris de pessoas diferentes tinham medidas iguais. Então decidimos relacionar medidas e criamos duas razões para incorporar no modelo. (Biometria da íris humana)</p> <p>A11G2: Conforme fomos extraindo as medidas da íris e realizando o cálculo da área da íris vimos que seria necessário aumentar no algoritmo mais etapas, pois os resultados dos cálculos eram próximos ou iguais. (Biometria da íris humana)</p>	Dinamicidade do ciclo de modelagem

Fonte: elaborado pelas autoras

Considerando os indicativos do favorecimento de uma visão holística, e buscando aproximações com a literatura, Schoenfeld (1999), comenta que quando os alunos estão engajados na resolução de um problema de modelagem, eles lidam com sistemas complexos (i) sistemas da “vida real” que ocorrem em situações do cotidiano, (ii) sistemas conceituais desenvolvidos para modelar os sistemas da “vida real” e (iii) modelos desenvolvidos para descrever e explicar as habilidades de modelagem dos alunos. Uma abordagem holística, refere-se a uma visão integradora destes sistemas constituindo o que se pode caracterizar como pensamento sistêmico.

De acordo com Hildebrandt-Stramann (2021) o pensamento sistêmico visa compreender características sistêmicas como as propriedades de um todo e não podem ser reduzidas às propriedades de partes menores.

Em atividades de modelagem, segundo Castro (2022, p. 196), o pensamento sistêmico refere-se às “manifestações dos alunos que retratam o modo de pensar sobre como partes do desenvolvimento da atividade interagem entre si, se influenciam mutuamente e, assim, influenciam o todo.” Ou seja, o pensamento sistêmico pode ser

identificado a partir das declarações dos alunos que descrevem o que fizeram e como usam o ciclo de modelagem. Está nas declarações do pensar nas relações entre as etapas do desenvolvimento da atividade, bem como na articulação entre matemática, realidade e conhecimento dos alunos (Castro e Almeida, 2022; Blum, 2015).

Neste sentido, o pensamento sistêmico permeia a abordagem holística necessária para a construção do modelo matemático. A extração das informações da situação envolve ver o todo, ou seja, o modelo matemático construído para as situações investigadas não é decomposto em componentes individuais e sim em um sistema que agrega diversas características da situação.

Essas manifestações foram mediadas pelo uso da tecnologia, como é caso da construção do modelo matemático realizada pelos grupos G1 na atividade de tema biometria da íris e G3 na atividade de tema higiene das mãos, que optaram por realizar a investigação fazendo uso do *software Geogebra*. O uso da tecnologia indica que levava uma visão do todo, em que os cálculos seriam facilitados, os valores obtidos mais aproximados por meio da delimitação de polígonos irregulares, ponderando o cuidado com as simplificações para a redução de erros.

As relações estabelecidas entre diferentes contextos, como a modelagem, a matemática e a situação investigada, caracterizam a habilidade de pensamento sistêmico, ou seja, o estudo do sistema compreende tais relações e a construção do modelo matemático promove/requer uma visão holística do desenvolvimento da atividade. Para Blomhøj e Jensen (2007), a abordagem holística promove um processo integrado e abrangente para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A compreensão de tal abordagem permite a identificação de componentes essenciais como etapas “menores” do processo de modelagem. Porém, estes não são percebidos como entidades independentes, mas como parte da integralidade da atividade de modelagem.

Outra habilidade requerida na construção de modelos matemáticos identificada nas ações dos alunos caracterizou-se como *experiência social*. De modo geral, podemos compreendê-la como as declarações da importância que os alunos dão ao estudo da situação em contexto extraclasse (Quadro 2.5).

Quadro 2.5 – Ações identificadas sobre a experiência social.

Exemplos	Indícios
A3: É possível formular diferentes hipóteses, o que leva a pensar em diferentes modos para resolver o problema, além do que para validar é interessante pensar em outro modo de resolver. (Biometria da íris humana)	Importância do estudo da situação extraclasse para os alunos da Licenciatura em Matemática está em

A1: Resolvemos primeiro individualmente, cada um com suas medidas, e depois fizemos uma resolução para o grupo. Nessa resolução do grupo usamos a média para obter um resultado mais geral. (Higiene das mãos)	resolver os problemas e usar os conceitos matemáticos em diferentes resoluções
A5: O ato de pintar as mãos simulando estar lavando-as seria algo utilizável em sala de aula com as crianças para demonstrar a necessidade de aprender lavar as mãos corretamente. (Higiene das mãos)	Importância do estudo da situação extraclasse para os alunos da Pedagogia: para o ensino na educação infantil
A10: A gente lavar 100% da mão é muito difícil! [...] o jeito que a A9 lavou as mãos dela aprende em laboratório. A9: A primeira aula de biologia em laboratório é de higiênica básica. Essa atividade da mão para mim ela serve como um demonstrativo de que a gente não dá tanta atenção para a lavagem das mãos [...] o que resulta na proliferação de doenças. (Higiene das mãos)	Importância do estudo da situação extraclasse para os alunos das Ciências Biológicas: Higiene e prevenção de doenças
A10: Alimentar e organizar um banco de dados, é algo que por exemplo, pode ser feito em acessos de cofres de bancos. O sistema é usado e sabemos que pode ter maior ou menor segurança e isso vai depender da quantidade de leitura que o sistema é capaz de fazer. (Biometria da íris)	Importância do estudo da situação extraclasse para os alunos de Administração: segurança no trabalho

Fonte: os autores

O conceito de experiência social pode ser concebido de acordo com Silva (2009) como uma prática de participação do indivíduo em diferentes espaços, espaços culturais, espaços políticos, entre outros. Neste sentido, entende-se a experiência social alinhada ao entendimento de uma prática de participação do aluno em diferentes espaços, em particular no âmbito profissional.

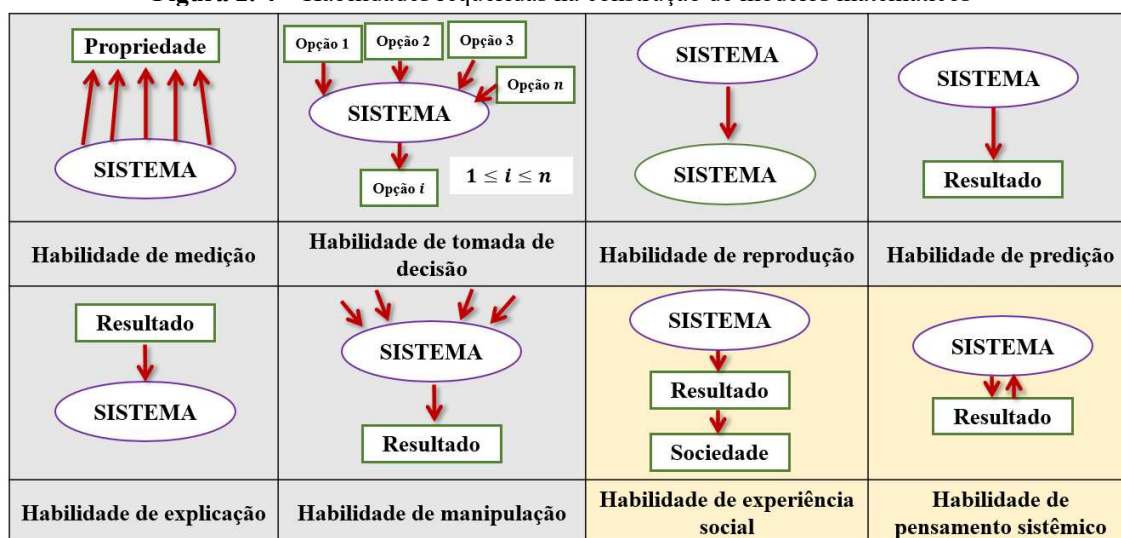
Em pensar nas atividades num âmbito para além do contexto educacional do curso de extensão, no sentido de a atividade de modelagem ela favorece os alunos a ampliarem seus horizontes e pensar na importância do estudo da situação para além do contexto educacional do curso de extensão. É uma (habilidade) capaz de estender o lidar com a situação investigada no tocante a objetivos profissionais futuros, na aplicabilidade da matemática e as diferentes resoluções que se pode encontrar fazendo modelagem, que também leva em consideração o próprio impacto que o tema ou a situação estudada tem no âmbito social, como é o caso de interpretar os resultados obtidos na resolução do problema sobre a higienização das mãos, no sentido, de que os alunos eles carregam consigo uma traço característico advindo de suas áreas de formação e que podem ter visibilidade, a depender da situação, no fazer modelagem.

Na construção de modelos matemáticos a experiência social pode revelar as finalidades e a relevância que os alunos de dão ao estudo da situação, isto quer dizer que a construção do modelo matemático pode compreender as práticas de participação dos alunos em seus respectivos contextos profissionais como trabalhar com diferentes resoluções, levar em consideração a relevância da situação em sua futura atividade de

ensino, ou ainda, a repercussão do estudo da situação em práticas laboratoriais, seja com relação a protocolos de higiene, bem como no controle e prevenção de doenças.

Levando em consideração o objetivo de *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*, pondera-se contribuir com a classificação proposta por Thompson e Yoon (2007), retomada em Almeida e Brito (2021). Os autores argumentam que a construção de um modelo matemático tem a finalidade de extrair uma informação de um sistema e não o representar. Assim, a partir da identificação das ações dos alunos propõe-se que para construção de modelos matemáticos habilidades são requeridas:

Figura 2. 4 – Habilidades requeridas na construção de modelos matemáticos



Fonte: Inspirado em Thompson e Yoon (2007) e Brito (2018).

A classificação proposta por Thompson e Yoon (2007) se deu a partir de uma investigação da prática de modeladores profissionais, concluindo que a finalidade que motiva a construção de um modelo tem relação com as situações investigadas abrigarem informações que não são diretamente acessíveis ao modelador, de modo que a obtenção dessas informações depende da identificação e estudo de um sistema. Esse sistema é construído em função do tipo de informação que se procura e do modo como se pretende obtê-la. Um modelo matemático é, portanto, um modo de extrair informações de uma situação via sistema.

Se um modelo matemático é concebido como um modo de extrair informações de uma situação via um sistema, estudar esse sistema e suas relações sejam com a situação ou com a matemática requer a habilidade de pensamento sistêmico. O estudo do sistema pode manifestar o uso de tecnologias, o cuidado com as simplificações, bem como

demonstra a dinamicidade do ciclo de modelagem, já que a extração das informações expõe as relações e os entendimentos do modelador sobre a situação para a construção do modelo matemático. Neste sentido, o estudo do sistema produz resultados e a depender dos resultados tem-se que retomar, reexplorar o sistema ou ajustar a extração das informações para a produção de um resultado válido. Este movimento necessita de uma visão holística do sistema.

Ainda pode ocorrer das relações geradas na construção do modelo matemático ter implicações com as experiências sociais dos modeladores, em particular, com o contexto profissional que está inserido. No contexto abordado, as habilidades advindas dos contextos sociais despontam na compreensão do sistema, na construção do modelo matemático e na sua aplicabilidade. Os alunos da licenciatura em matemática relacionam o estudo do sistema à diferentes possibilidades de construção do modelo matemático. Os alunos do curso de Pedagogia, por sua vez, compreendem a situação e a construção do modelo matemático ao ensino de matemática para as crianças e os alunos de Biologia e Administração associam a investigação a experiências com a gestão e organização, higiene e prevenção de doenças em seus contextos profissionais.

2.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver atividades de modelagem em sala de aula, a construção de modelos matemáticos pelos alunos se dá a partir da extração de informações da situação estudada. A finalidade de se construir modelos pode favorecer o desenvolvimento de diversas habilidades, caracterizando aspectos que colaboram para a formação dos modeladores.

Neste sentido, cabe ao professor e aos objetivos que este pretende alcançar com seus alunos a definição de situações a depender da sua finalidade assim como pontua Blum (2015). Ou seja, ainda que as situações investigadas via modelagem possam mobilizar diferentes habilidades, o professor, diante dos seus objetivos, pode ter apenas uma delas como foco, portanto a situação a ser trabalhada terá uma finalidade específica.

Com o objetivo de *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*, faz-se uma análise qualitativa de conteúdo (Mayring, 2014), cujo movimento exploratório dos dados permitiu analisar ações dos alunos em meio ao desenvolvimento de atividades de modelagem e a partir das interpretações realizadas destaca-se que as habilidades são aspectos formativos favorecidos pela construção de

modelos matemáticos e, que os resultados corroboram com os estudos de Brito (2018) e Brito e Almeida (2021) considerando uma ampliação da taxonomia proposta, caracterizando, a partir das declarações dos alunos, as habilidades de *experiência social e pensamento sistêmico*.

A habilidade de experiência social ocorre pois o estudo de uma situação pode incluir práticas de participação do aluno com o contexto social. Isto foi identificado a partir da importância que os alunos atribuem à situação em contexto extraclasse, como em seu futuro contexto profissional.

A habilidade de pensamento sistêmico pode ser desenvolvida em atividades de modelagem, visto que a extração de informações, podem de modo geral, requerer uma visão holística da situação em estudo. Tal abordagem é incorporada desde o entendimento da situação até a construção e validação dos modelos matemáticos construídos, o que se caracteriza a partir da relação integradora da situação da realidade, a modelagem e a matemática, esta relação pode ser mediada pelo uso de tecnologias digitais, nas simplificações realizadas e na dinamicidade do ciclo de modelagem.

Neste sentido, ao pensar a modelagem em ação na construção de modelos as habilidades são aspectos formativos que podem contribuir com as reflexões sobre a matemática, sobre o contexto da situação em estudo, possibilitando refletir sobre os usos da matemática e sua razoabilidade para estudar tal fenômeno.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v. 5, n. 11, 2020.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 50 n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Práticas de professores com modelagem matemática: algumas configurações. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 46, set., p. 6-15, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. DE; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Revista Acta Scientiae**. Canoas-RS. v. 14, n. 2, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, v.17, n.22, p.19-35, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BLOMHOJ, M.; JENSEN, T. H. What's all the fuss about competencies?. In: **Modelling and applications in mathematics education**. Springer, Boston, MA, 2007. p. 45-56.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BORROMEO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018.

BORROMEO FERRI, R.; BLUM, W. Insights into Teachers' Unconscious Behaviour in Modeling. In: LESH, R. et al. (Org.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competences**. New York: U.S.A., Springer, 2010. p. 423-432.

BRADY, C. Modelling and the representational imagination. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 50, p.1-16, 2018.

BRITO, D. S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática: Uma Compreensão Fenomenológica**. 2018. Número total de folhas. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. W. Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. **Actualidades Investigativas en Educación**, v.21, n.1, p.169-198, 2021.

CARREIRA, S.; BAILOA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 50, p. 201-215, 2018.

CASTRO, E. M. V.; ALMEIDA, L. M. W. Estratégias metacognitivas de estudantes brasileiros em atividades de modelagem matemática. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, v.23, n.1, p. 1-26, 2022.

CASTRO, E. M. V. **Metacognição em atividades de modelagem matemática**. 2022. 229f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

- CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically.** (Doctoral dissertation), Ohio State University, 2013.
- DALLA-VECHIA, R.; MALTEMPI, M.V. O Problema na modelagem Matemática: determinação e transformação. **Bolema**, Rio Claro, SP. v.33, n.64, p.748-767, 2019.
- EUCLIDES. **Os elementos**/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- ENGLISH, L. D. Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 2, p. 225-248, 2003.
- HILDEBRANDT-STRAMANN, H. C. R. Pensamento sistêmico: uma nova abordagem curricular na formação de professores da Educação Física. **Form. Doc.**, Belo Horizonte, v. 13, n. 27, p. 59-72, mai./ago. 2021.
- HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** 1ª Ed. Editora Objetiva, 2009, p.1-1986.
- LESH, R.; YOON, C. What is distinctive in (our views about) models & modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching? In: GALBRAITH, P. L.; HENN, H. W.; NISS, M (Eds.) **Modelling and applications in mathematics education**, New York: Springer. 2007, p. 161–170.
- MAAß, K. Classification Scheme for Modelling Tasks. **ZDM - Journal für Mathematik-Didaktik**, v.31, n.2, p.285-311, 2010.
- MAYRING, P. **Qualitative content analysis** - theoretical foundation, basic procedures and software solution, 2014.
- POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modelling Handbook**. Bedford: COMAP, 2012. Disponível em <www.comap.com>.
- RELLESMAN, J.; SCHUKAJLOW, S. Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments students' interest in problems with and without a connection to reality. **ZDM**, v.49, n.3, p.367-378, 2017.
- SCHOENFELD, A. H. Models of the teaching process. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, n. 3, p. 243-261, 1999.
- SCHUKAJLOW, S.; KRAWITZ, J.; KANEFKE, J.; RAKOCZY, K. Interest and performance in solving open modelling problems and closed real-world problems. In: C. FERNÁNDEZ, S.; LLINARES, A.; GUTIÉRREZ, N. Planas (Eds.). **Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 3, pp. 403-410). PME, 2022.
- SCHUKAJLOW, S; KRUG, A. Are interest and enjoyment important for students' performance? In: NICOL, C.; OESTERLE, S.; LILJEDAHN, P.; ALLAN, D. (Eds.)

Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, v.5, p.129-136.
Vancouver, Canada: PME, 2014.

SETTI, E. J. K.; WAIDEMAN, A. C.; VERTUAN, R. E. Percursos da Elaboração de um Problema no Contexto de uma Atividade de Modelagem Matemática. **Bolema**, v.35, n.70, p. 959-980, 2021.

SILVA, R. M. D. O conceito de experiência social em François Dubet: Possibilidades analíticas. **Mediações**, v.14, n.1, p. 275-290, 2009.

SOUSA, B. N. P. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 2, p.1-25, 2021.

THOMPSON, M.; YOON, C. Why build a mathematical model? Taxonomy of situations that create the need for a model to be developed. In: LESH, R; HAMILTON, E.; KAPUT, J. (eds.) **Foundations for the Future in Mathematics Education**. London: Laurence Earl Baum Associates, p. 193-200, 2007.

CAPÍTULO 3 - ARTIGO 2

A MOBILIZAÇÃO DO INTERESSE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo: Este artigo tem por objetivo *investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula*. A pesquisa está fundamentada na modelagem na Educação Matemática e articulações com o interesse sob uma perspectiva psicológica e seus desdobramentos no contexto educacional. A partir do desenvolvimento de diferentes atividades de modelagem em um curso de extensão, dados foram coletados por meio de registros escritos, gravações em áudio e vídeo, questionários e entrevistas. O procedimento analítico está pautado nos pressupostos da análise de conteúdo de Mayring (2014). Como resultado, três categorias emergentes evidenciam o interesse dos alunos acerca do tema, da matemática e em resolver situações-problema da realidade, sendo este interesse manifestado em domínios de diferentes naturezas, como o afetivo, epistêmico e social. Além disso, a pesquisa destaca que os alunos modificaram, ao longo das experiências do fazer modelagem, os seus interesses, transitando entre os interesses situacionais e individuais.

Palavras-chave: Educação Matemática. Desenvolvimento do interesse. Situações-problema reais.

3.1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática¹² tem por finalidade investigar situações da realidade, por meio da matemática. Na sala de aula, o seu uso pode contribuir para que o aluno “reflita sobre o que está acontecendo no mundo real, além de ser uma adaptação da realidade sob condições controladas, uma busca pela semelhança com a realidade e uma maneira de verificar como a prática funciona na realidade” (Carreira; Baioa, 2018, p. 203).

Dentre as justificativas utilizadas para a inserção da modelagem em práticas pedagógicas, pode-se citar a justificativa psicológica, na qual, segundo Blum (2015), o desenvolvimento de atividades de modelagem pode promover o interesse dos alunos pelo estudo da matemática, uma vez que as situações-problema investigadas carregam consigo certa autenticidade, possibilitando que ampliem seus modos de ver a matemática e suas aplicações na vida.

¹² Neste artigo será usado o termo modelagem para designar modelagem matemática.

Sob a justificativa psicológica, o uso do termo interesse ganha destaque na literatura, e é geralmente associado, como aponta Hermínio e Borba (2010), a escolha do tema, que quando é de escolha do aluno, ou escolhido juntamente com o professor, pode evidenciar o interesse por um tema como fonte de motivação para o estudo e seu engajamento em atividades de modelagem.

Na literatura, Burak (2004) considera o interesse do grupo em investigar algo como um dos princípios básicos da modelagem, porém o autor não define o interesse. Beumann (2016) e Ganter (2013) argumentam que há um efeito positivo do interesse em atividades de modelagem que demandam a condução de experimentos para coleta dados.

Geisle e Rach (2023), por sua vez, concluem que o interesse dos alunos não se modifica ao modelar situações-problemas que envolvem experimentos para coleta de dados e em situações-problemas que não envolvem experimentos. Hartmann e Schukajlow (2021) puderam perceber que o ambiente na qual atividades de modelagem são desenvolvidas não influencia o interesse dos alunos. Elfringhoff e Schukajlow (2021) destacam que o interesse dos alunos por problemas de modelagem está associado às emoções relativas ao contexto da situação real e a autoeficácia em resolver uma situação-problema.

Apesar da ampla utilização do termo interesse em publicações da área, Hermínio e Borba (2010) argumentam que é necessária uma explicitação do que se entende por interesse e como ele se desenvolve em atividades de modelagem matemática.

O interesse pode, por um lado, ser relativo a uma situação da realidade específica e, por outro lado, ao próprio fazer modelagem, como uma abordagem de satisfazer as necessidades dos alunos, seus interesses e objetivos. Sendo assim, o interesse pode ser desenvolvido a partir das preferências e pré-disposições em estudar uma determinada situação e se tornar um interesse individual (que pode ser duradouro) em resolver situações-problema diversas por meio do uso da matemática. Isso pode requerer uma familiarização gradativa com atividades de modelagem. Neste contexto, o objetivo deste artigo é *investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula.*

3.2 MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A modelagem proporciona discussões matemáticas e não matemáticas, de modo que tal interlocução também é feita no contexto da sala de aula, em que uma atividade de

modelagem tem início em uma situação inicial (situação-problema) e pode se dizer concluída em uma situação final (resposta para o problema identificado na situação inicial). O caminho entre estes dois pontos é traçado a partir de ações que são relevantes para o desenvolvimento da atividade, na qual o modelador a princípio não possui esquemas a priori para a resolução da situação-problema (Almeida, 2018).

De acordo com Krawitz e Shukajlow (2018) a resolução de situações-problema investigadas em atividades de modelagem, ao serem associados a situações da realidade, tem caráter investigativo e possuem um certo grau de incerteza, diferindo-se de problemas usuais trabalhados em sala de aula. Diante disso, segundo Pollak (2012), experiências com modelagem são relevantes pois possuem valor pedagógico e possibilitam ao aluno conhecer aplicações da matemática em diferentes situações. O autor destaca que não é apenas importante considerar a resolução do problema, mas também a sua formulação:

O coração da modelagem matemática [...] é a formulação de problemas antes da resolução destes. Tantas vezes em Matemática dizemos “provar o seguinte teorema” ou “resolver o seguinte problema”. Quando começamos neste ponto, estamos ignorando o fato de que encontrar o teorema ou o problema certo já é grande parte da batalha. Ao enfatizar o aspecto da formulação do problema, a modelagem matemática traz de volta à Educação Matemática a formulação de problemas, bem como a sua resolução (Pollak, 2012, p. xi, tradução nossa).

Enfatiza-se então que a formulação e a resolução de problemas são complementares e se interrelacionam no uso da matemática em atividades de modelagem.

Para caracterizar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem em sala de aula, Almeida, Silva e Vertuan (2012) definem quatro fases relativas a estruturação e resolução de uma situação-problema: (1) Inteiração, é a fase em que os alunos se familiarizam com o tema a ser investigado, realizando pesquisas, buscando informações e coletando dados e formulam um problema da realidade; (2) Matematização, em que os alunos buscam traduzir a situação-problema real em um problema matemático; (3) Resolução, na qual os alunos resolvem o problema matemático por meio do modelo matemático¹³ elaborado; (4) Interpretação dos resultados e validação, que consiste na interpretação dos resultados matemáticos obtidos como solução do problema matemático

¹³ O modelo matemático pode ser entendido, conforme Seki e Almeida (2021, p. 111) como “uma estrutura matemática capaz de revelar como aspectos relevantes da situação em estudo podem ser interpretados à luz da matemática [...] uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de modelos matemáticos”, que são usados para descrever, explicar, fazer previsões ou alguma outra demanda requerida pelas situações da realidade que se faz necessário o uso da matemática.

em termos da situação real, avaliando sua aceitabilidade ou não como solução. A resposta dada ao problema deve ser comunicada para outros, essa comunicação envolve uma argumentação “que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais esses resultados são acessíveis de que a solução apresentada é razoável e é consistente” (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 25).

Para que os alunos sejam introduzidos à modelagem Almeida e Dias (2004) propõem que a familiarização seja realizada de modo gradativo. Em um primeiro momento, a situação-problema é estabelecida e apresentada pelo professor e a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na elaboração do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor. Em um segundo momento, uma situação-problema pode ser sugerida pelo professor para a turma, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a obtenção do modelo durante a investigação, validando-o com vistas a situação real. E, finalmente, o terceiro momento, em que os alunos, em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de modelagem, a partir de um problema definido por eles e são assessorados pelo professor.

Para além das fases relativas ao fazer modelagem, o desenvolvimento desse tipo de atividade em diferentes contextos escolares envolve diferentes aspectos, de natureza didática, pedagógica e, ainda, psicológica. Nesse artigo, dirige-se atenção para os aspectos psicológicos envolvidos na modelagem, em particular, para a noção de interesse.

3.3 UMA VISÃO SOBRE O INTERESSE NA MODELAGEM

Nos diferentes usos da palavra interesse nos contextos filosóficos, Abbagnano (2007, p. 578), apresenta o uso feito por Hegel (1770-1831) filósofo alemão, que definiu o interesse como “momento da individualidade subjetiva e de sua atividade”, que compreende a presença do sujeito na ação. Em outro uso, neste caso, relativo à pedagogia, a noção de interesse tem associação à “participação do educando no saber, graças à qual o saber se lhe afigura útil” (Abbagnano, 2007, p. 578).

Dewey (1859-1952) filósofo americano, insistiu no valor do interesse, definindo-o como “acompanhamento da identificação, através da ação, do eu com algum objeto ou ideia” (Abbagnano, 2007, p.579). Para o autor, o interesse é dinâmico, pois promove a ação; tem objetivo fora de si, em algum objeto ou finalidade à qual se apega; significa realização interna ou sentimento de valor.

Seguindo a conceituação de Krapp (2007), o interesse é caracterizado como uma relação especial entre uma pessoa e uma ideia (abstrata), tópico, etc. O interesse é influenciado por sentimentos (por exemplo, sentimento de alegria) e pelo valor (atribuir uma alta estima subjetiva ao objeto de interesse) (Krapp, 2007).

A maioria das conceitualizações distingue entre interesse individual e situacional. O primeiro é um traço de disposição mais duradouro, enquanto o segundo é um estado flutuante que depende principalmente do interesse de uma situação específica (de aprendizagem). A ocorrência frequente de interesse situacional em situações de aprendizagem semelhantes pode levar a uma internalização, resultando num interesse individual estável (Krapp, 2007).

Uma possível abordagem sobre o interesse envolve pensar e explorar o seu papel nas relações humanas, sendo mais comum em teorias da psicologia da educação (Hidi e Renninger 2006). Neste contexto, os interesses são interpretados como variáveis motivacionais específicas do conteúdo que têm uma influência importante na aprendizagem e na direção do desenvolvimento humano.

A maioria dos interesses relevantes para a aprendizagem e o trabalho em alguma atividade existem apenas durante um período limitado de tempo e são desencadeados por incentivos externos (interesses situacionais). Mas há também interesses específicos de conteúdos que permanecem estáveis durante um longo período de tempo e alguns são de importância central no curso de vida da pessoa em desenvolvimento. Assim, os interesses humanos não são vistos, principalmente, como características pessoais estáveis, mas são sujeitos a mudanças.

De acordo com Hidi e Renninger (2006, p. 111), o interesse é um estado psicológico que, em fases de desenvolvimento em situações de ensino e aprendizagem, “é também uma predisposição para reengajar conteúdos que se aplicam à aprendizagem dentro e fora da escola”. Ele pode passar de um estado de reação imediata do sujeito para com o objeto e vir a ser um interesse duradouro que pode ser desenvolvido em quatro fases (Hidi e Renninger, 2006).

A primeira fase se refere ao “despertar interesse por uma situação”, em que o interesse é desencadeado diante dos afetos/sentimentos imediatos que a pessoa possui para com a situação, pode ser desencadeado por características do ambiente ou textuais, como estar na sala de aula trabalhando em grupo ou ainda a relevância pessoal que determinado tema tem para cada um.

Se sustentada, esta primeira fase evolui para a segunda fase, em que há “manutenção do interesse por uma situação”, ocorre quando o interesse pela situação é mantido por meio do significado das atividades e do envolvimento pessoal e pode ou não ser um precursor do desenvolvimento de uma predisposição para se reengajar em conteúdos específicos ao longo do tempo.

A terceira fase, caracteriza-se por um “interesse individual emergente” o aluno valoriza a oportunidade de se reengajar em tarefas relacionadas ao seu interesse individual emergente e optará por fazê-las se tiver escolha. O aluno começa a gerar regularmente suas próprias perguntas de “curiosidade” sobre o conteúdo a partir de um interesse individual emergente, que é frequentemente, mas não exclusivamente, autogerado.

A terceira fase de desenvolvimento de interesse pode então levar à quarta fase, um “interesse individual bem desenvolvido”, que é caracterizado como uma predisposição relativamente duradoura para se envolver com um conteúdo específico. O aluno valoriza a oportunidade de se engajar novamente em tarefas para as quais ele ou ela tem um interesse individual bem desenvolvido e optará por realizá-las se tiver escolha. Um aluno com interesse individual bem desenvolvido perseverará no trabalho ou na resolução de uma questão, mesmo diante da frustração.

Na modelagem, o interesse tem sido alvo de pesquisas, com relação ao afeto que os alunos possuem para com a atividade de modelagem, bem como se ele tem influência na resolução das situações-problema. Em âmbito nacional, Burak (2004) comenta que o interesse do grupo em investigar algo é um dos princípios fundamentais da modelagem, no entanto não há uma definição para o interesse. Herminio e Borba (2010), recorrem as ideias de Dewey e Shutz para discutir a noção de interesse dos alunos em projetos de modelagem.

Em pesquisas mais atuais, presentes no cenário internacional, Beumann (2016) e Ganter (2013) buscaram investigar o interesse dos alunos pelo desenvolvimento de atividades de modelagem e concluíram que há um efeito positivo em atividades que demandam a condução de experimentos para coleta dados. Em Geisle e Rach (2023), os autores relatam uma pesquisa realizada com alunos do ensino médio de escolas alemãs, em que analisam o interesse dos alunos em modelar situações-problema que necessitam da condução de experimentos para coletar dados e em modelar situações-problema sem experimentos. Os autores comentam que os alunos estavam igualmente interessados.

Hartmann e Schukajlow (2021) conduziram um estudo que analisa o interesse por uma situação dos alunos em atividades de modelagem quando estas são desenvolvidas no

ambiente escolar e fora dele, e puderam perceber que o local não modifica o interesse dos alunos.

Elfringhoff e Schukajlow (2021) pesquisaram se o interesse dos alunos por problemas de modelagem pode ajudar a melhorar competências de modelagem e mostram que os interesses dos alunos partem de emoções relativas ao contexto da situação real e eficácia deles para resolver ou não a situação-problema.

Por fim, presume-se que as situações-problema de modelagem aumentam o interesse dos alunos pela matemática, oferecendo conexão com o mundo real e a vida dos alunos (Rellesman, Schukajlow 2017; Schukajlow et. al 2012, 2017).

Considerando que o interesse é um fator psicológico relevante no contexto educacional e que pode ter contribuição para a formação dos alunos, a pesquisa busca investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula.

3.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Com a finalidade de investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula, a pesquisa realizada analisa atividades de modelagem desenvolvidas no contexto de um curso de extensão¹⁴, que envolveu quatro alunos advindos dos cursos de Licenciatura em Matemática, três da Pedagogia, um de Ciências Biológicas e um da Administração.

O material analisado possui descrições das atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos e foram coletados dados provenientes de registros escritos, de gravações em áudio e vídeo e da aplicação de questionários e realização de entrevistas com alunos.

Foi considerado cinco atividades desenvolvidas, três com temáticas e situações-problema sugeridas pela professora e duas cujos temas e situações-problema foram de escolha dos grupos. O Quadro 3.1 explica a distribuição das atividades, grupos e alunos, bem como o momento de familiarização em cada uma das cinco atividades.

¹⁴ Curso de extensão com carga-horária de 40 horas cujo objetivo foi promover aos alunos de diversas áreas do conhecimento o contato com a matemática e o uso da mesma para resolver situações-problema reais e que pode ou não ter relação com o contexto profissional dos alunos.

Quadro 3.1 – Atividade de modelagem desenvolvida pelos alunos

Tema das atividades	Alunos	Código	Momento de familiarização
Lavagem das mãos	A1, A2, A3 e A4 (Grupo 1) A5, A6 e A7 (Grupo 2) A9 e A10 (Grupo 3)	G1AT1 G2AT1 G3AT1	Segundo momento
Reconhecimento biométrico da íris ¹⁵	A5, A7 e A11 (Grupo 1) A1, A3, A8 e A10 (Grupo 2)	G1AT2 G2AT2	Segundo momento
Construção do restaurante universitário	A1, A3, A5, A6, A10 e A11	G1AT3	Segundo momento
Quanto tempo os alunos de Pedagogia levam para se deslocar até a universidade?	A5, A7 e A8	G1AT4	Terceiro momento
Como precificar um panetone para venda?	A1 e A4	G2AT5	Terceiro momento

Fonte: os autores

A análise dos dados segue pressupostos da análise de conteúdo, conforme Mayring (2014). De acordo com as etapas definidas pelo autor, nesse artigo a análise segue os procedimentos: Definição do material que será analisado, que consistiu na seleção do que é considerado relevante com vistas ao objetivo de pesquisa presente nos registros escritos, áudios transcritos e vídeos; Análise descritiva, em que se descreve o desenvolvimento das atividades e valendo-se de trechos dos registros escritos e transcritos que se pode destacar a manifestação do interesse dos alunos; Elaboração de categorias emergentes, no qual se busca categorizar por meio de agrupamentos, não como uma ação automática e sim por meio de um ato reflexivo e interpretativo possíveis interesses mobilizados pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem na sala de aula no contexto de um curso de extensão.

3.4.1 Situações-problema de modelagem

Neste artigo, considera-se cinco atividades de modelagem desenvolvidas no âmbito de um curso de extensão, ofertado no segundo semestre de 2022, que buscou promover aos alunos de diferentes cursos de Ensino Superior o contato com a matemática e o seu uso para resolver situações-problema reais. A programação do curso envolveu a apresentação de aspectos teóricos da modelagem e a caracterização de suas fases e procedimentos de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), relacionando com diferentes situações-problema que poderiam ser estudadas por meio da matemática, em diferentes momentos de familiarização de Almeida e Dias (2004).

¹⁵ Inspirado em Almeida (2020).

A primeira situação-problema consistiu em investigar *qual a porcentagem da área das mãos que não lavamos?* em que foi discutido a importância de lavar as mãos no combate à proliferação de doenças e como ato preventivo. Os alunos foram convidados a reproduzir a lavagem de mãos que fazem diariamente, no entanto, de olhos fechados e com tinta guache. A partir dessa experiência os alunos, visualizando a região higienizada, debruçaram-se em como extrair as informações da simulação realizada. Os grupos G1AT1 e G2AT1 consideraram figuras geométricas planas já conhecidas para realizar medições de subdivisões das regiões das mãos com tinta. Já o grupo G3AT1 registrou o experimento em fotos e as inseriu no *GeoGebra* utilizando ferramentas do *software* calcularam a área da região com tinta, aproximando polígonos irregulares à região. Utilizando o conceito de proporcionalidade, os alunos obtiveram o percentual da região das mãos que não foi lavada.

Na segunda situação-problema os alunos buscaram *criar um algoritmo que possa ser usado para o reconhecimento biométrico da íris, permitindo classificar se uma pessoa pertence ou não a um determinado grupo*. Em grupo, discutiram a respeito do conceito de biometria, suas aplicações, possíveis fraudes em sistemas de reconhecimento biométrico e no conceito de algoritmo. Ambos os grupos G1AT2 e G2AT2 optaram por fotografar os olhos dos integrantes de cada grupo e realizar as medições dos atributos que determinaram como essenciais por meio da manipulação da foto. O G2AT2, realizou o tratamento dos dados no *GeoGebra*, utilizando as ferramentas de segmentos de reta, delimitação de circunferência por três pontos distintos e seu centro, levando em consideração comparações entre a íris e a pupila. O grupo G2AT2, usou a ferramenta de enquadramento com malha, do aplicativo de fotos do celular, e extraiu as medidas com régua diretamente da foto, trabalhando com valores de área e perímetro de figuras planas que já conheciam, como círculo, retângulo, losango e triângulo. Os grupos criaram algoritmos que envolveram razões entre essas medidas delimitadas, bem como a aplicação de etapas de verificação dos conjuntos constituídos por valores obtidos com as medições dos atributos definidas. A validação foi realizada por testes com pessoas externas aos grupos.

A terceira situação-problema compreendeu investigar *qual a melhor localização no campus para construir um restaurante universitário?* Para o desenvolvimento desta atividade os alunos do grupo G1AT3 entrevistou a direção de *campus* e reorganizou o problema em subproblemas: Quantas pessoas poderão ser atendidas por dia? Qual o horário de atendimento? Quantos lugares terá o restaurante? Quais medidas a construção

deverá ter? E quanto custará aproximadamente a construção? Esses subproblemas vieram à tona diante da necessidade de caracterizar o espaço ocupado pela obra, dado o público a ser atendido e os locais disponíveis no lote da universidade para construção, para então determinar o custo da obra. A direção do *campus* forneceu informações como mapas do relevo da universidade e valores das últimas obras licitadas. O melhor local para construção foi definido por meio do uso do *Geogebra* e do cálculo da distância entre os blocos a um ponto comum, considerando que o restaurante deveria se localizar em uma mesma distância aos blocos localizados nas extremidades do *campus*. O preço da obra foi determinado a partir de valores do último edital de licitação. A validação ocorreu comparando restaurantes universitários já existentes e por meio de uma entrevista com um profissional de arquitetura que trabalha no desenvolvimento de projetos de refeitórios de empresas. Os resultados obtidos também foram apresentados à direção.

As atividades de terceiro momento foram realizadas em dois grupos. O grupo G1AT4 investigou a situação-problema: *Qual o tempo gasto pelos acadêmicos de Pedagogia da UENP-CCP para chegar à Universidade?* Para iniciar esta investigação, o grupo elaborou um formulário via *Google Forms* com o objetivo de coletar informações a respeito dos alunos do curso de Pedagogia: o semestre que os alunos estavam matriculados, cidade em que residiam, que meio de transporte utilizavam para se locomover até a universidade e geralmente quanto tempo demora para se fazer esse deslocamento. Ao todo, 79 alunos responderam, sendo eles de 26 municípios ou distritos localizados no estado do Paraná ou São Paulo, cujo deslocamento dos alunos é via ônibus, circular, van, carro, moto ou a pé. Diante das hipóteses formuladas, o grupo usou modelos estatísticos para definir o tempo gasto em média pelos alunos do curso de modo geral e também a média por tipo de locomoção. Para avaliarem seus cálculos e resultados obtidos, os alunos calcularam o desvio padrão, averiguando a dispersão entre as médias específicas de cada meio de transporte com a média geral das médias dos meios de transporte. Também usaram o coeficiente de variação para compreender sobre a variabilidade das informações com relação à média geral.

O segundo grupo, G2AT5 constituído por dois alunos da Licenciatura em Matemática definiu a situação-problema pensando no consumo de panetone nos finais de ano: *o que compensa mais, comprar um panetone industrializado ou fazê-lo em casa? E como precificar um panetone feito em casa para comercializá-lo?* Foi necessário para o grupo informações a respeito da receita de um panetone, sobre o preço de ingredientes e quantos panetones podem ser feitos a partir da receita. Para que fosse possível compará-

lo aos panetones encontrados no supermercado, também foi incluído nas pesquisas valores de embalagens. As hipóteses criadas determinam que a receita rende quatro unidades de panetones e de acordo com uma pesquisa no comércio local os produtos são vendidos com valor de 30% sob o custo do produto. Com base nisso, o grupo determinou um modelo que precifica panetones caseiros para venda na região, levando em consideração o preço de custo do panetone, o percentual de lucro e o valor pago por hora para uma pessoa que trabalha produzindo panetones.

3.5 O INTERESSE COMO UMA RELAÇÃO SUJEITO-ATIVIDADE DE MODELAGEM

O interesse pode ser caracterizado, à luz da fundamentação teórica, como uma relação entre sujeito e um objeto ou ideia, que se manifesta na ação direcionada do sujeito para com o objeto. Assim, para investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem, considera-se que as relações entre o sujeito e os diferentes aspectos associados à prática pedagógica com modelagem se manifestam em suas ações e quando estes se referem à suas experiências com as atividades, em relação aos seus sentimentos.

No questionário aplicado ao final do curso, os alunos classificaram¹⁶ as atividades desenvolvidas numa escala de pontuação de A a D, sendo A para a maior interesse e D para nenhum interesse. A quantidade de alunos que classificou determinada atividade dentro da escala de pontuação foi sintetizada do Quadro 3.2.

Quadro 3. 2 – Classificação realizada pelos alunos sobre o interesse pelas temáticas

Título da atividade	Quantidade de alunos que responderam			
	A Maior interesse	B Médio interesse	C Pouco interesse	D Nenhum interesse
Higienização das mãos	1	2	1	2
Biometria da íris	1	1	1	1
Construção do RU	3	2	1	-
Temas de escolha dos grupos	1	2	1	3

Fonte: questionário respondido pelos alunos

Destaca-se que um aluno classificou a atividade *lavagem das mãos* como a de maior interesse e dois alunos a classificaram como a nenhum interesse. Sobre a atividade *biometria da íris* um aluno a classificou como maior interesse e um aluno como de

¹⁶ Três alunos classificaram mais de uma atividade por pontuação.

nenhum interesse. A atividade *construção do restaurante universitário* foi considerada como a de maior interesse por três alunos e não houve manifestação que a considerou de nenhum interesse. Apenas um aluno classificou a atividade de terceiro momento como a de maior interesse e três alunos a classificaram como nenhum interesse.

Na atividade de temática *construção do RU* indicada como de maior interesse, os alunos argumentaram que o interesse por essa temática se deu devido aos conhecimentos adquiridos acerca do processo para construção de obras públicas na universidade e ao se sentirem parte de um projeto relevante para a universidade, conforme os diálogos a seguir:

A1 – A atividade de construção do RU, foi de extrema importância, uma vez que, adquirimos conhecimento referente aos setores públicos e toda sua burocracia.

A5 – Foi bem interessante sentir como seria fazer parte de um projeto tão grande e significativo.

Questionário pós-atividade

Dos alunos que se interessaram menos pela atividade de terceiro momento, dois alunos do grupo 2 (G2AT5) comentaram que isso pode ter ocorrido por que não sabiam ao certo que tema ou problema gostariam de investigar e acabaram escolhendo o tema “*Como precificar um panetone para venda?*” apenas para o cumprimento de atividades programadas no currículo do curso de extensão.

A1 – Como era para ser apresentado e tínhamos prazo, na realização da resolução foi encontrando cada vez mais variáveis que possibilitassem a produção do panetone, desse modo, achando menos interessante quanto a resolução para a atividade.

A8 – Eu queria trabalhar com algo sobre o meio ambiente, a revitalização do lago que tem na universidade, mas não sei o que o grupo gostaria de estudar.

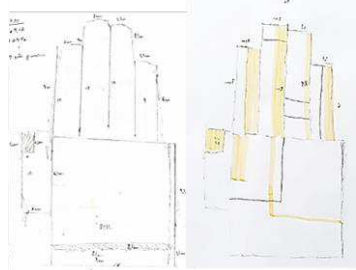
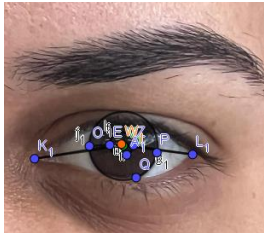
Por outro lado, no grupo 1 (G1AT4) cuja atividade foi “*Quanto tempo os alunos de Pedagogia levam para se deslocar até a universidade?*”, o aluno A8 mostrou inicialmente o interesse em investigar outra temática, mas modificou seu interesse ao negociar o tema com o grupo e ser influenciado pelos alunos A5 e A7. Dessa maneira, ainda que o interesse seja idiossincrático, como aponta Hidi e Renniger (2006), ele pode ser modificado ou gerado a partir do coletivo.

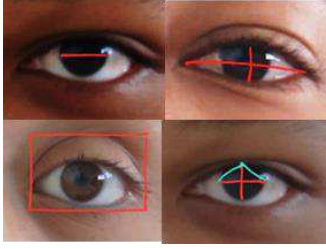
O interesse acerca do tema das atividades de modelagem surge da disposição de querer conhecer determinados aspectos acerca do tema, em se envolver de modo ativo em problemas que circundam a esfera da universidade e nas interações entre os participantes do grupo. Esse interesse se estabelece em relações pessoais ou sociais pela situação e se

caracteriza como um interesse situacional, que conforme Hidi e Renninger (2006, p. 111), é desencadeado por afetos imediatos para com a situação ou por características do ambiente, em que os sujeitos estão inseridos.

Em relação aos usos da matemática, nas atividades da *lavagem das mãos* e da *biometria da íris* o interesse se manifesta no uso de conceitos da matemática já consolidados a partir de experiências escolares anteriores como razão e proporção, área e perímetro de figuras planas e distância euclidiana entre dois pontos. O Quadro 3.3 apresenta uma síntese dos modelos obtidos.

Quadro 3.3 – Criação de modelos matemáticos usando conceitos matemáticos já aprendidos

Modelos matemáticos	Uso de conceitos já conhecidos
 $x = \frac{\text{Área pintada} \cdot 100\%}{\text{Área total}},$ <p>em que x é o percentual da área lavada das mãos. (GIAT1)</p>	<p>A2 – Recorremos a área de retângulos, que já sabemos, assim calculamos com mais facilidade as áreas lavadas.</p> <p>Questionário pós-atividade</p>
 <p>Medidas extraídas no <i>software Geogebra</i></p> <p>$(d_{C_i C_p})$ distância entre o centro da íris e o centro da pupila; $(d_{C_p L_i})$ distância entre o centro da pupila e o limite interno do olho; $(d_{C_p L_e})$ distância entre o centro da pupila e o limite externo do olho; $(d_{C_i L_i})$ distância entre o centro da íris e o limite interno do olho; $(d_{C_i L_e})$ distância entre o centro íris e o limite externo do olho; $(d_{C_p I})$ distância entre o centro da pupila até o contorno da íris.</p>	<p>1º A distância entre os centros da íris e pupila pertencer ao conjunto de elementos $\{0,05; 0,06; 0,07\}$. 2º Passar na verificação anterior e o resultado de $R1 = \frac{d_{C_p L_i}}{d_{C_i L_i}}$, pertencer ao conjunto de elementos $\{1,039473684; 1,021621622; 1,033707865; 1,025751073\}$. 3º Passar na verificação anterior e o resultado de $R2 = \frac{d_{C_p L_e}}{d_{C_i L_e}}$, pertencer ao conjunto de elementos $\{0,951388889; 0,966887417; 0,949275362; 0,97005988\}$. 4º Passar na verificação anterior e a distância entre o centro da íris até o seu contorno pertencer ao conjunto de elementos $\{0,52; 0,68; 0,6; 0,74\}$. Se o algoritmo reconhecer essas 4 informações é feito o desbloqueio, caso contrário a pessoa externa é mantida bloqueada. (G2AT2)</p> <p>A1 – Particularmente tive mais facilidade nesta atividade do que na primeira pois obtemos as distâncias usando o Geogebra e relembrar conceitos como equação da reta e circunferência, distância entre pontos e raio da circunferência.</p> <p>Questionário pós-atividade</p>

	<p>1ª etapa: área da íris $\pi \cdot r^2$, r, igual ao raio da íris</p> <p>2ª etapa: área do losango $\frac{D \cdot d}{2}$, em que D é diagonal maior extraída como a medida da distância entre os pontos das extremidades dos olhos e d, diagonal menor equivalente ao dobro de r. Assim, área do losango é dada por $\frac{D \cdot 2r}{2}$.</p> <p>3ª etapa: área do retângulo $D \cdot l$, em que D é a base e l, a altura dada pela distância da base até a pálpebra do olho.</p> <p>4ª etapa: perímetro do triângulo dada por $2 \cdot r + 2 \cdot x$, em que x é equivalente ao cateto do triângulo.</p> <p>Com acesso liberado para o conjunto que for equivalente a todas as etapas de um dos integrantes do grupo. (G1AT2)</p>	<p>A5 – A princípio a gente não sabia que dados a gente poderia coletar, mas achamos que um caminho interessante seria partir de algo que já sabíamos.</p> <p>Fala extraída do vídeo da comunicação dos resultados</p>
---	---	---

Fonte: elaborado pelas autoras

Em meio ao desenvolvimento das atividades os alunos mostraram ser um caminho interessante para ponto de partida das resoluções recorrer ao uso de conceitos matemáticos aprendidos em experiências anteriores. Este uso se concretizou na matematização das características essenciais do problema investigado. De acordo com Elfringhoff e Schukajlow (2021) os alunos na modelagem podem manifestar interesses relativos às suas crenças de autoeficácia em resolver o problema, isto é, no modo como eles acreditam serem capazes de resolver o problema formulado, a partir de seus conhecimentos matemáticos. Ao se reengajarem em conteúdos específicos em um outro momento da vida escolar, que não apenas nos momentos em que aprenderam tais conceitos na educação básica, os alunos evidenciam uma manutenção do interesse, como caracterizado por Hidi e Renninger (2006).

A atividade *Quanto tempo os alunos de Pedagogia levam para se deslocar até a universidade?* evidencia que os alunos se engajam no uso de conceitos e procedimentos matemáticos, ainda não aprendidos segundo eles, para resolver a situação-problema, como o uso de modelos estatísticos e a interpretação que pode ser produzida a partir destes. O uso da média aritmética, moda, mediana, desvio padrão e coeficiente de variação emergiram a partir da formulação das hipóteses. Em suas hipóteses, o grupo 1 considerou que: Os valores respondidos no questionário e usados na resolução são médias de tempo que as pessoas fazem quase que automaticamente; Acidentes, obras e quaisquer outros fatores que impediriam ou atrasariam a viagem dos alunos foram desconsiderados; O tempo gasto pode ser dado por meio da média das médias do tempo de cada meio de transporte. O Quadro 3.4 sintetiza os modelos usados para resolver o problema.

Quadro 3. 4 – Uso de novos conceitos matemáticos para resolver uma situação-problema

A média do tempo que os alunos de pedagogia levam para ir até a universidade, é dada por

$$M_t = \frac{(t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{79})}{79} = \frac{3140}{79} = 39,7$$

Com moda da amostra igual a 20 minutos e a mediana igual a 30 minutos. A média geral das médias dos meios de transporte (M_{tr}), foi dada por

$$M_{tr} = \frac{(M_o + M_v + M_c + M_m + M_{oc} + M_p)}{6}$$

sendo M_o a média do tempo feito pelo ônibus; M_v a média do tempo feito por vans; M_c a média de tempo dos carros; M_m a média de tempo das motos; M_{oc} a média dos ônibus circular; M_p a média do tempo feito a pé; cujo resultado foi de 31,1 minutos.

Comparando a média do tempo geral da amostra (M_t), com a média das médias dos meios de transporte (M_{tr}), os alunos de pedagogia levam 39,7 minutos para se deslocar até a universidade, e de acordo com os meios de transportes que utilizam essa média de tempo é igual a 31,1 minutos, com uma variabilidade razoável do conjunto, visto que o desvio padrão (s) que dá a dispersão entre as médias específicas de cada meio de transporte com a média geral das médias dos meios de transporte (M_{tr}) foi de 16,71.

Usando o coeficiente de variação $CV = \frac{s}{M_{tr}} \cdot 100$, vimos que a variabilidade das informações em relação à média foi de aproximadamente 53%.

Fonte: relatório dos alunos

Nesse sentido, o interesse pela matemática dos alunos emergiu a partir da necessidade considerada por eles em aprender conceitos e procedimentos matemáticos para resolver a situação-problema. Esse aspecto mostra o fato de a matemática emergir da situação-problema em modelagem, a partir da matematização, como indicado por Almeida (2018), pode ser uma fonte para que os alunos se interessem em aprender novos conhecimentos matemáticos de modo interrelacionado com os conhecimentos da situação da realidade. Conforme o diálogo:

A7 – Para a resolução usamos a média, moda e mediana e para isso é necessário organizar os tempos em ordem crescente, aprendemos que vários tem duas modas e pesquisando vimos que se chama bi-modal.

A7- No início fiquei meio perdida, mas depois fui me encontrando, mas considero que as resoluções aumentaram sim meu interesse pela matemática, pois vimos várias formas interessantes com o qual podemos resolver o problema.

A5 – Este é o desvio padrão, eu particularmente, nunca tinha usado esta fórmula, mas a professora apresentou para nós. Nós fomos fazendo um passo a passo, e inicialmente não soubemos como interpretar. Depois, discutindo compreendemos que ele é a diferença da média com relação a cada um da amostra e que tem valor de referência pra dizer se é mais ou menos disperso [...] e também conseguimos entender que a média das médias dos meios de transporte é uma média ponderada.

Fala extraída do vídeo da comunicação dos resultados

Vê-se também a manifestação de um interesse individual emergente (Hidi; Renninger, 2006), quando os alunos valorizaram a oportunidade de se engajar na situação-problema e mostraram interesse em investigar um problema diante de inquietações pessoais.

Em síntese, o interesse pela matemática pode ser desenvolvido por meio das atividades de modelagem matemática nas relações que os alunos estabelecem ao usar conhecimentos matemáticos adquiridos em experiências anteriores e em aprender novos conhecimentos para matematizar e resolver a situação-problema proposta.

Diante do desenvolvimento do curso de extensão e do contato com diferentes situações-problema, destaca-se a mudança de sentimento/afeto com relação a valorização da matemática, no que tange a resolução de problemas reais, e a predisposição em resolver situações deste tipo.

A3 – As atividades desenvolvidas foram bem diversificadas e ao mesmo tempo alinhadas a diferentes formas de pensar matematicamente e isso trouxe um interesse maior para utilizar situações-problemas reais como, por exemplos, os temas transversais citados nos documentos oficiais, associando-os a matemática.

A5 – O curso contribuiu para que eu passasse a vê-la [matemática] como algo que pode vir a ser interessante se eu tiver um problema em que precise utilizá-la.

A7 – Trabalhar com a modelagem me fez compreender um pouco mais sobre a matemática e entender que é uma forma que utilizamos para quantificar tudo a nossa volta, dar valor etc.

A8 – Pensar na matemática para resolver problemas foi algo interessante, visto que até fazer o curso nunca tinha pensado no uso que ela pode ter.

A10 – A partir do contato com a modelagem considero que é mais interessante resolver situações-problema reais do que atividade como de livros didáticos, questões de vestibulares, essas coisas.

Questionário final

Os alunos manifestaram interesse em resolver situações-problema reais, que advém de indícios do desenvolvimento do interesse individual ao longo do curso, e emergem na predileção dos alunos por resolver situações-problema da realidade em detrimento de exercícios e nas evidências de uma mudança de visão sobre o papel da matemática, que passa ser considerada como uma ferramenta para resolver problemas e para ler o mundo.

Outro fator que foi importante para o interesse em resolver situações-problemas reais por meio da matemática foi o trabalho em grupo, em que os alunos destacam que, durante o curso, esse interesse teve influência das discussões, do compartilhamento de conhecimentos e das interações entre alunos de diferentes cursos, como mostra os excertos:

A1 – Lidar com os integrantes do curso foi interessante, como nunca tive uma relação de comunicação boa entre pessoas, ter que dialogar e desenvolver trabalhos com pessoas que nunca tinha visto antes foi desafiador.

A3 – A interação para o desenvolvimento das mesmas [atividades] faz toda diferença.

A5 – O que mais gostei foi o fato de termos trabalhado em grupo para resolver as atividades. Acredito que a troca de ideias e todos os "não sei o que fazer" foram essenciais no saldo positivo que o curso trouxe para mim.

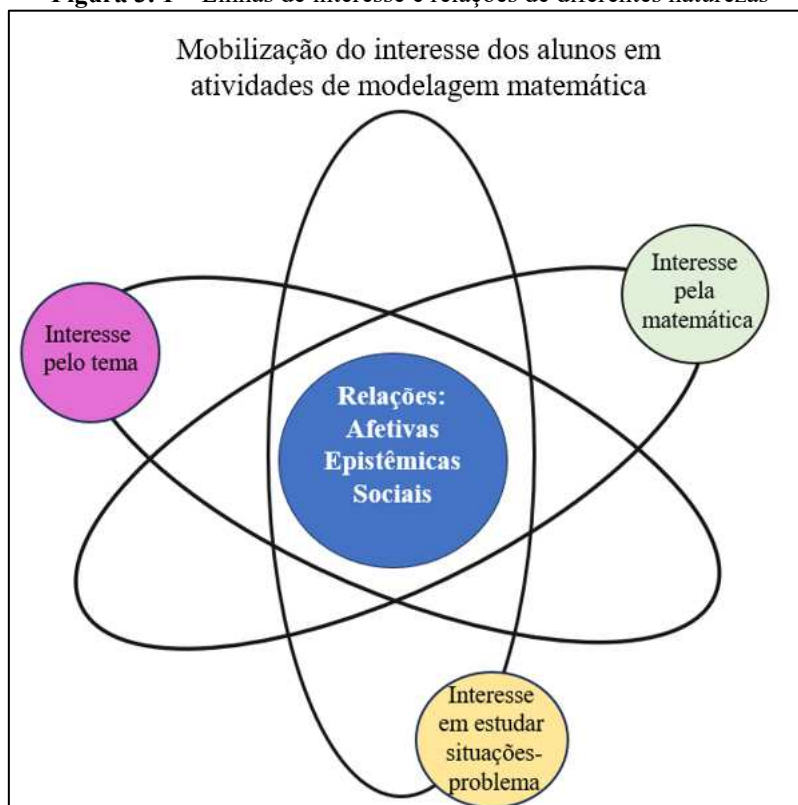
A7 – Eu gostei do pessoal que fez o curso e também das resoluções dos problemas em grupo, pois cada um tem uma forma de pensar diferente acabando por trazer uma dinâmica bem legal e interessante para o grupo. O compartilhar conhecimento foi muito bacana.

Questionário final

O interesse em resolver situações-problema da realidade foi promovido pelas atividades de modelagem desenvolvidas ao longo do curso e se manifesta no modo como os alunos se relacionam com a matemática e com os outros integrantes do grupo. Esse aspecto evidencia que o interesse ainda que seja idiossincrático, ele pode ser gerado ou modificado em um coletivo, de forma intersubjetiva, a partir de interações com outros sujeitos, como salientam Hidi e Renninger (2006).

Em síntese, três categorias emergentes podem ser caracterizadas no processo analítico, que detalham o modo como o interesse se manifesta nas atividades de modelagem matemática: o interesse pelo tema, o interesse pela matemática e o interesse em resolver situações-problema da realidade, por meio da matemática. O interesse pelo tema se manifesta nas relações afetivas com a temática, nas relações epistêmicas acerca da disposição em conhecer aspectos da situação-problema e nas relações sociais no sentido de compreender a relevância social da temática. Os interesses e suas relações foram expressos na Figura 3.1, como um átomo em que há elementos centrais e aqueles que os orbitam. Novas ligações, podem representar mudanças no desenvolvimento do interesse, como já apontado no texto.

Figura 3.1 – Linhas de interesse e relações de diferentes naturezas



Fonte: elaborado pelas autoras

O interesse pela matemática se manifesta nas relações: afetivas com a matemática; epistêmicas, com o uso de conhecimentos prévios e na disposição em aprender novos conceitos e procedimentos matemáticos para resolver a situação-problema; sociais, quando ampliam sua visão acerca do papel e dos diferentes usos da matemática na sociedade.

O interesse em estudar situações-problema da realidade se manifesta nas relações: afetivas com a própria modelagem, isto é, na disposição em desenvolver as atividades; epistêmicas, em compreender e formar uma atitude investigativa para produzir conhecimentos matemáticos ou extramatemáticos, por meio do uso de modelos matemáticos; sociais, nas interações dos alunos no grupo.

Com isso podemos caracterizar que as linhas de interesse dos alunos: pelo tema, pela matemática ou em estudar situações-problema, são mobilizadas (orbitam) em relações de diferentes naturezas, afetiva, epistêmica e social, de modo que, quando os alunos vivenciam diferentes experiências do fazer modelagem, estes e seus interesses podem transitar em diferentes fases do desenvolvimento do interesse: situacionais imediatos (interesse pelo tema), situacionais consolidados (interesse pela matemática, em conteúdos já aprendidos), individual emergente (interesse pela matemática, em aprender

um novo conteúdo) e bem desenvolvido (interesse em resolver situações-problema da realidade). Esse processo é cíclico e dinâmico, uma vez que o interesse bem desenvolvido se reconfigura conforme novas relações (ligações) entre os alunos e as atividades de modelagem são (re)estabelecidas em outras experiências.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, o objetivo foi *investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula*. A partir do procedimento analítico, pautado nos pressupostos da análise de conteúdo (Mayring, 2014), foram analisadas cinco atividades de modelagem desenvolvidas por alunos no âmbito de um curso de extensão, bem como suas respostas dadas aos questionários-pós atividades e questionário final do curso.

Como resultado, três categorias foram obtidas e evidenciam que a mobilização do interesse dos alunos acerca do tema, da matemática e em estudar situações-problema da realidade se manifestou em relações de domínios de diferentes naturezas, como a afetiva, epistêmica e social. Além disso, a pesquisa evidencia que os alunos modificaram, ao longo das experiências vivenciadas do fazer modelagem, os seus interesses, transitando entre o situacional imediato, o situacional consolidado, o individual emergente e individual bem desenvolvido.

Isso significa, que interesses que eram mobilizados pelos alunos a partir de suas relações com situações-problema específicas se tornam, gradativamente, interesses, que se desprendem dessas situações e são apropriados pelos alunos, como parte de suas individualidades, em estudar diversas situações-problema usando matemática. Nesse cenário, considera-se uma ampliação no que tange à caracterização da literatura acerca do interesse em modelagem, que pondera principalmente que a principal fonte do interesse se dá na relação afetiva dos alunos para com a situação-problema estudada e para com a matemática (Rellesman; Schukajlow, 2017; Schukajlow et. al., 2012, 2017).

Essa transição do interesse situacional para o interesse individual bem desenvolvido ocorreu no decorrer das diversas atividades de modelagem desenvolvidas em diferentes momentos de familiarização. Assim, uma conjectura que pode ser levantada é que o interesse individual em estudar situações-problema, por meio da matemática, pode ser desencadeado conforme os alunos avançam gradativamente nos três momentos de Almeida e Dias (2004).

Por fim, ressalta-se que o interesse em atividades de modelagem não emerge apenas da natureza psicológica, de forma subjetiva, mas também se manifesta na intersubjetividade entre os alunos e, entre os alunos e o mundo, promovidos pelas atividades de modelagem.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 5ª ed, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v. 5, n. 11, 2020.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities, **ZDM**, v.50, n.1, p.19-30, 2018.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um Estudo sobre o Uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem, **BOLEMA**, v.12, n.22, p. 19-36, 2004.

BEUMANN, S. **Versuch´s doch mal**: Eine empirische Untersuchung zur Förderung von Motivation und Interesse durch mathematische Schülerexperimente [Just try it: an empirical study concerning the promotion of motivation and interest with mathematical experiments] (Dissertation). Ruhr-Universität Bochum, 2016.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: **Anais...** Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática, I EPMEM, 2004, Londrina, 2004.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. **ZDM**, v.50, n.1, p.201-215, 2018.

ELFRINGHOFF, M. S.; SCHUKAJLOW, S. What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. **Quadrante**: Revista de Investigação em Educação Matemática, v.30, n.1, p.8-30, 2021.

GANTER, S. Experiments – a way to functional thinking: an empirical study concerning the effect of student experiments. In: GANTER, S. (Eds.) **Experimentieren – ein Weg zum Funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten**, Dr. Kovac, Verlag, German, 2013.

GEISLER, S.; RACH, S. Students' interest when combining modelling and experimentation – is it worth the effort? In: AYALON, M.; B. KOICHTU, B.; LEIKIN, R.; RUBEL, L.; TABACH, M. (Eds.). **Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, PME, p.1-8, 2023.

HARTMANN, L. M.; SCHUKAJLOW, S. Interest and emotions while solving realworld problem inside and outside the classroom. In: LEUNG, F. K. S.; STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; WONG, K. L. (Eds) **Mathematical Modelling Education in East and West**. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Springer, Cham, 2021.

HERMÍNIO, M. H. G. B.; BORBA, M. A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática, **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.12, n.1, p.111-127, 2010.

HIDI, S.; RENNINGER, K. A. The Four-Phase Model of Interest Development. **Educational Psychologist**, v.41, n.2, p.111-127, 2006.

KRAPP, A. An educational–psychological conceptualisation of interest. **Int J Educ Vocat Guid**, v.7, p.5-21, 2007.

KRAWITZ, J., SCHUKAJLOW, S. Do students value modelling problems, and are they confident they can solve such problems? Value and self-efficacy for modelling, word, and intra-mathematical problems. **ZDM**, vol. 50, p. 143-157, 2018.

MAYRING, P. **Qualitative content analysis** - theoretical foundation, basic procedures and software solution, 2014.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook** (p. viii-xi). Bedford: Comap, 2012.

RELLESMAN, J.; SCHUKAJLOW, S. Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments students' interest in problems with and without a connection to reality. **ZDM**, v.49, n.3, p.367-378, 2017.

SCHUKAJLOW, S.; LEISS, D.; PEKRUN, R.; BLUM, W.; MÜLLER, M.; MESSNER, R. Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. **Educational Studies in Mathematics**, v.79, n.2, p.215-237, 2012.

SCHUKAJLOW, S.; RAKOCZY, K.; PEKRUN, R. Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. **ZDM**, v.49, n.3, p.307-322, 2017.

SEKI, J. T. P.; ALMEIDA, L. M. W. A compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana. **Paradigma**, v. LXII, n.1, p.106-129, 2021.

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ALÉM DO QUE SE VÊ: DO PRAGMÁTICO AO FORMATIVO

Resumo: Este artigo apresenta considerações sobre possibilidades internas e externas ao processo de modelagem e tem como objetivo *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*. Dados foram coletados por meio de registros escritos, áudio-gravados e relatórios dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem que são tratadas neste artigo em dois cenários. Lança-se o olhar para uma atividade em cada cenário com vistas a identificar ações dos alunos nessas atividades, bem como detalhar sua representatividade em relação às reflexões internas e externas à modelagem. A partir de uma análise qualitativa de conteúdo, usando a técnica explicativa, resultados indicam que se por um lado as ações dos alunos se desdobram no movimento do ciclo de modelagem, por outro lado, é possível identificar potencialidades das atividades de modelagem matemática que viabilizam ações internas e externas ao processo de modelagem e permitem uma formação para além de aspectos pragmáticos de aplicabilidade da matemática na sociedade, mas fomentam uma formação que favorece a ação do sujeito na sociedade, sua participação no debate político e cultural de sua comunidade e sua preparação para a vida.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Formação para a vida.

4.1 INTRODUÇÃO

A matemática é utilizada para fins não matemáticos em uma variedade de interesses cotidianos, profissionais, sociais, acadêmicos e científicos. Esse uso se dá por meio da construção ou uso explícito ou implícito de modelos matemáticos (Niss; Højgaard, 2019). Neste sentido, o uso da matemática para compreender o mundo é uma possibilidade que pode materializar-se por meio da modelagem¹⁷.

Na sociedade contemporânea, a preparação dos alunos para a vida em sociedade emerge também nas prescrições para o ensino e a aprendizagem na Educação Básica (Brasil, 2017). Neste sentido, as atividades escolares têm a função de proporcionar aos alunos o contato com conteúdos científicos, a cultura da sociedade em que vivem e dar condições para que os mesmos se insiram nos processos políticos, culturais e sociais de seu entorno e do mundo. Mesmo que as atividades escolares visem a instrumentalização para o mundo do trabalho, a escola e as atividades nela desenvolvidas estão também

¹⁷ Neste texto, usamos o termo modelagem para fazer referência à expressão modelagem matemática.

associadas à transformação dos alunos em cidadãos conscientes das demandas sociais do meio em que estão inseridos (Frejd; Vos, 2023; Meyer, 2020; Biesta, 2018).

Neste contexto, aborda-se neste artigo diferentes possibilidades formativas da modelagem, que em sua constituição trata da resolução de problemas reais por meio da matemática (Bassanezi, 2002). A modelagem investiga situações da realidade a partir de um repertório de conceitos matemáticos (Meyer, 2020). Aprender matemática por meio da modelagem pode auxiliar em questionamentos acerca do próprio conhecimento, bem como em reconhecer a matemática em ação e relacionando-a à justificativa de preparação dos alunos para viver e agir em sociedade.

Sua inserção nas aulas de matemática, e de outras disciplinas, pode proporcionar o contato com situações da vida dos sujeitos, pode prepará-los para a ação em sociedade, proporcionar a inserção nos debates sociais, bem como capacitá-lo para diferentes usos da matemática e suas demandas por diferentes tecnologias (Almeida, Silva, Vertuan, 2012).

De modo geral, fazer da realidade vivida suporte basilar para a construção de conhecimento, dentro e fora dos muros da escola, pode envolver no contexto da modelagem, aspectos relativos a ela mesma como objeto envolvendo a compreensão de um fazer e lidar com atividades desta natureza para aprender matemática (Seki, 2019; Pollak, 2015; Almeida, 2022). Contudo, a modelagem também pode proporcionar um ambiente de troca sociocultural, de trabalho colaborativo e criativo, construindo experiências que destacam a relevância da matemática e uma visão holística da modelagem na vida acadêmica, social e cultural (Fredj; Vos, 2023; Araujo, 2009).

Quando tratamos das finalidades da modelagem, Blum (2015) argumenta que há finalidades formativas, psicológicas ou culturais que podem ser alicerce para aprender matemática; já quando a finalidade for pragmática ela fomenta a interpretação da realidade. Kaiser e Sriraman (2006), argumentam que na comunidade de modelagem, a perspectiva pragmática tem como um dos precursores Henry Pollak e foca em objetivos utilitários e pragmáticos, relativamente à habilidade dos aprendizes de usar a matemática para resolver problemas da realidade, promovendo o desenvolvimento de competências de modelagem.

Blum (2015) considera que a perspectiva pragmática está associada ao uso da modelagem para entender e lidar com situações do mundo real e, para isso, aplicações adequadas e exemplos de modelagem devem ser explicitamente tratados, uma vez que não podemos esperar nenhuma transferência de atividades intramatemáticas. O autor

sugere que essa perspectiva relaciona objetivos pragmáticos e problemas autênticos e se alinha ao que o autor denomina de modelagem aplicada.

Nesse contexto, Martins e Almeida (2021) sugerem que a modelagem pode ser entendida como uma possibilidade de resolver problemas autênticos, em que a autenticidade pode ser vista sob dois pontos de vista: associada a problemas aplicados na indústria ou na ciência; a situações-problema com origem em um contexto fora da escola, ou seja, contextos da realidade ou da cotidianidade da vida dos alunos.

No âmbito da Educação Básica, em particular, essa vertente pragmática pode ser associada às expectativas para o ensino e a aprendizagem da matemática. De acordo com os parâmetros curriculares vigentes é preciso ensinar os sujeitos a “raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (Brasil, 2017, p. 264). Os currículos da Educação Básica ainda complementam a necessidade do conhecimento matemático, tendo em vista sua aplicação na sociedade contemporânea e suas potencialidades na formação de cidadãos críticos (Brasil, 2017, p. 263).

Os documentos brasileiros se amparam na ideia do desenvolvimento de competências e habilidades. Em algumas perspectivas o ‘fazer’ modelagem pode estar relacionado a ideia cognitivista de competências (Maaß, 2006; Blomhøj, 2020). De acordo com Cevikbas *et al.* (2021), a maioria das pesquisas sobre competências compartilham de um entendimento comum em que a modelagem é uma atividade que percorre o ciclo de modelagem, e este por sua vez, se torna a referência para avaliar as competências dos alunos. De modo geral, um ciclo de modelagem é uma representação esquemática da atividade de modelagem desenvolvida, que por sua vez, pode usar de diferentes itens para evidenciar a dinâmica de tal atividade (Perrenet, Zwaneveld, 2012).

E neste contexto, chama-se a atenção para pensar a modelagem para além do passo a passo das atividades, para além da resolução de problemas, do ser competente ou não em modelagem, ou ainda, para além da mobilização e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Mas também a modelagem extrapola essas condições, ao passo que possui nela um alcance que permite discutir questões não matemáticas, que julga, critica e oferece um olhar minucioso para ver a realidade investigada, bem como aspectos que não são “visíveis”, ou seja, a formação que a modelagem carrega vai para além de aspectos que podem ser mensuráveis.

Tendo por norte as características da modelagem e a problemática acerca de suas finalidades para a formação humana, neste artigo visamos *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*. A discussão vislumbra possibilidades acerca da natureza do alcance de atividades de modelagem, relativamente ao seu potencial nas discussões matemáticas e não matemáticas.

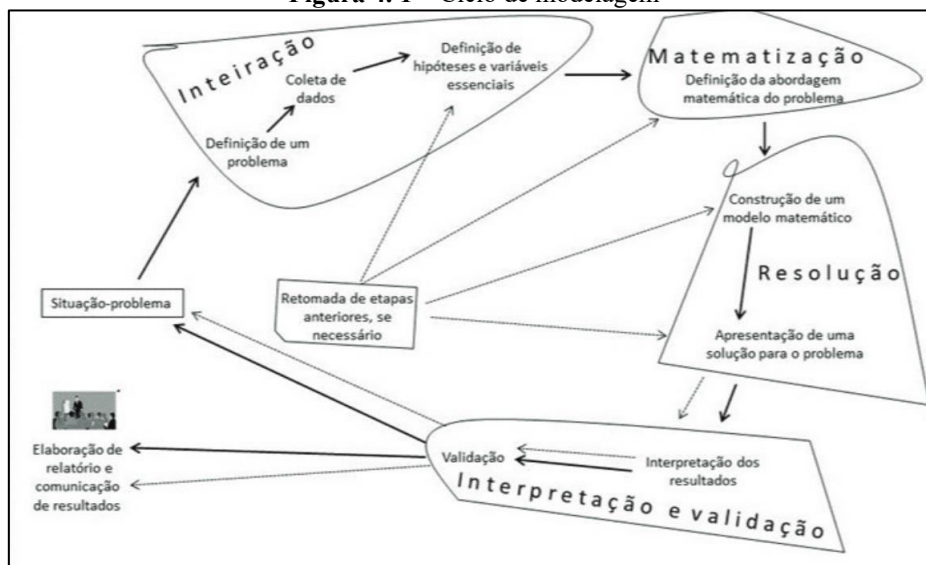
Para percorrer o objetivo de pesquisa, neste artigo apresentamos dois cenários que tratam de atividades de modelagem, discutimos esses cenários e trazemos elementos teóricos acerca de aspectos internos e externos à formação por meio da modelagem. Por fim, alinha-se o apresentado na seção de discussões sobre uma formação pragmática ou formação para a vida a partir da modelagem.

4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR SOBRE SUAS CARACTERÍSTICAS

A modelagem pode se caracterizar como uma investigação de um problema, definido a partir de uma situação da realidade, em que se busca uma resolução por meio da matemática (Bassanezi, 2002; Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Quando associada a sala de aula, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem é orientado por meio de fases e procedimentos que contempla ações dos alunos e que podem ser evidenciadas em um processo cíclico e dinâmico como indicado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Ciclo de modelagem



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386)

De acordo com Blomhøj e Kjeldsen (2011), as atividades de modelagem podem desafiar os alunos a refletir e criticar suas resoluções. Estas reflexões podem ser classificadas como reflexões internas e reflexões externas (Blomhøj, 2004; Blomhøj; Kjeldsen, 2011; Niss; Blum, 2020; Elicer; Blomhøj, 2022). A reflexão entendem-na como um “ato deliberado de pensar sobre alguma ação real ou potencial com o objetivo de compreender ou aprimorar esta ação” que são influenciadas por interações sociais e podem ser evidenciadas e analisadas quando externalizadas por meio da comunicação (Blomhøj; Kjeldsen, 2011, p. 386).

Elicer e Blomhøj (2022) comentam que as reflexões internas estão relacionadas a pensar sobre ações tomadas dentro do processo de modelagem e, portanto, podem ser direcionadas a fundamentar tais ações, seja para os resultados obtidos por meio do modelo matemático elaborado, para a validade do modelo ou para trazer à luz possíveis ações alternativas. Para exemplificar os autores apresentam questões que podem iniciar reflexões internas:

Exemplos de questões que iniciam reflexões internas são: “Por que formulamos o problema dessa maneira?... Que elementos essenciais incluímos no nosso sistema e porquê?... Quais foram as nossas razões para matematizar o sistema como o fizemos? Com base em que estimamos os parâmetros?... Por que pensamos que o modelo é válido em relação ao nosso problema, ou por que não?” (Elicer; Blomhøj, 2022, p. 222, tradução nossa)

Já as reflexões externas referem-se a utilização, seja ela real ou possível, de um modelo matemático, com os resultados do modelo e com o seu papel e função em determinados contextos de aplicação, sejam eles sociais, técnicos ou científicos. Nas palavras dos autores “Este tipo de reflexão tem como objeto o papel e as funções de um modelo numa determinada aplicação e, portanto, envolve necessariamente o contexto em que o modelo está sendo utilizado ou poderia ser utilizado” (Blomhøj; Kjeldsen 2011, p. 388, tradução nossa). A distinção entre as reflexões internas e externas são analíticas e na prática elas estão interligadas numa relação dialética.

A possibilidade de a atividade de modelagem gerarem tais reflexões, pode por sua vez, permitir pensar na modelagem na educação matemática associada a duas bases distintas de filosofia da educação discutidas em Biesta (2010). O cerne desta distinção está no modo de ver a educação:

[...] a educação não vive somente do “como fazer”, ou do “o que fazer”, mas implica também em um “para quê educar”, para que intencionalidade, finalidade ou rumo desejamos educar nossas crianças,

para que tipo de ideal de ser humano e de mundo estamos pautando nossas escolhas (Trevisan; Dalbosco, 2023, p. 72-73).

Um lado na discussão visa uma educação nomeada *evidence-based*, que de acordo com Biesta (2010) é presente desde o momento em que as competências foram importadas de outras áreas para a educação. De acordo com o autor, o sistema educativo diante de seus interesses, passou a medir a qualidade de alunos, professores, livros didáticos, escolas, currículos, entre outros, por meio de testes padronizados. Esses testes, acima de tudo, aferem informações sobre a eficácia por meio de evidências. E neste contexto, as competências dos alunos são expressas como pontuações.

De acordo com Nogueira-Ramírez (2009), nesta filosofia do *evidence-based* há uma transformação do ideal pedagógico de uma formação para a cidadania em uma formação profissionalizante orientada pela aprendizagem por competências, identificando o cidadão como um aprendiz-permanente, distanciando-o de uma educação para a cidadania.

Segundo Frejd e Vos (2023), no tangente a modelagem na educação matemática há um movimento em direção a *evidence-based*, que teve origem com o argumento da utilidade, em que a educação matemática deveria instrumentalizar os alunos para utilizar a matemática para resolver problemas da vida cotidiana ou futura. Ao atrelar isso aos currículos surgiu a necessidade de quantificar as competências de modelagem dos alunos.

O outro lado da discussão visa uma filosofia da educação conhecida como *bildung-based* que carrega em seus princípios a formação humana integral em que os objetivos da educação são políticos e morais (Biesta, 2010).

O conceito de *Bildung* é intraduzível em qualquer outra língua, por isso grande parte da literatura em outras línguas que a ele se dedica escolhe mantê-lo em alemão. *Bildung* não é equivalente a *ensino* ou *educação*, mas evoca uma série de ideias que nenhum vocábulo único reúne em português: interioridade, totalidade, desenvolvimento, vocação, promessa, a ação de dar forma, modelar, aprofundar e aperfeiçoar a própria personalidade, a construção de uma cultura pessoal etc (Alves, 2019, p. 3).

Neste sentido, *bildung* está associado uma formação para cidadania, uma formação ao longo da vida (Biesta, 2017). Voltada aos valores, para que os alunos desenvolvam honestidade, integridade e aprendam a fazer bons julgamentos. Estes aspectos não podem ser testados ou medidos. Na modelagem, *bildung*, portanto está relacionada a uma perspectiva formativa do sujeito, apontando que a própria modelagem envolve aspectos para além do desenvolvimento de competências (Fredj; Vos, 2023).

A análise de reflexões e ações, internas ou externas, em atividades de modelagem matemática, pode permitir o papel da modelagem na formação dos sujeitos e como a mesma possibilita condições para que diferentes modos de ver o mundo tomem forma pela ação e na ação, delimitando elementos do que Fredj e Vos (2023) tratam ao falar do *espírito da modelagem*. Para os autores, a modelagem está vinculada a uma construção sociocultural que possibilita qualificar os alunos para o tratamento da matemática e para o tratamento de questões sociais, políticas e relacionadas com sua ação e seu papel no mundo. Neste sentido, a modelagem pode favorecer a formação para a vida, sendo essa a parte menos visível da modelagem e nomeada por Fredj e Vos (2023) de espírito da modelagem.

4.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para iniciar reflexões sobre modelagem como uma atividade que é permeada por diferentes ações, apresenta-se dois cenários que trata uma atividade de modelagem desenvolvida em cada um deles. Cada cenário tem a intenção de identificar as ações dos alunos em relação a aspectos internos ou externos ao ciclo da atividade de modelagem, de modo a detalhar objetivo de *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*.

Dados foram coletados por meio de registros escritos, áudio-gravados e relatórios dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem. Cada cenário contempla o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por grupos de alunos, sendo que, o Cenário 1 detalha o desenvolvimento da atividade de modelagem “criação de um algoritmo para o reconhecimento biométrico da íris, permitindo classificar se uma pessoa pertence ou não a um determinado grupo”, desenvolvido por dois grupos de alunos de um curso de extensão¹⁸: o Grupo 1, composto por A5, A7 e A11, alunos do curso de Pedagogia; o Grupo 2, composto por A1, A3, A8 e A10, três do curso de Licenciatura em Matemática e um do curso de Administração. Já no Cenário 2 os alunos do curso de extensão trabalharam em um único grupo A1, A3, A5, A6, A10 e A11 (dois alunos da Licenciatura em Matemática, dois do curso de Pedagogia e um da Administração) para investigar o problema sobre “qual seria a melhor localização para construir um restaurante

¹⁸ Curso de extensão com carga-horária de 40 horas cujo objetivo foi promover aos alunos de diversas áreas do conhecimento o contato com a matemática e o uso da mesma para resolver situações-problema reais e que pode ou não ter relação com o contexto profissional dos alunos.

na universidade?”. O tema foi sugerido pela professora do curso de extensão, visto que era de interesse de todos os alunos e haviam demasiadas discussões entre eles acerca da necessidade de abertura de um restaurante universitário na instituição devido as limitações da cantina existente no *campus* para atender a comunidade universitária.

Ambas as atividades estão associadas ao contato intermediário dos alunos com a modelagem, ou seja, os alunos estão sendo familiarizados gradativamente com este tipo de atividade investigativa e em conjunto com um professor analisam uma situação-problema pelo professor indicada.

Para análise dos dados ampara-se nos pressupostos Mayring (2014) de indicações para realização de uma análise qualitativa de conteúdo usando a técnica explicativa, que consiste na interpretação dos dados por meio de material adicional advindo do referencial teórico explicitado neste texto, em busca de evidenciar os resultados da pesquisa. O movimento analítico e interpretativo foi feito a partir das etapas de: seleção do material; transcrição dos dados advindos do desenvolvimento da atividade de modelagem; esboço de uma linha de investigação dada pela descrição de dois cenários e pela análise interpretativa considerando o quadro teórico desenhado neste artigo; a segmentação dos dados em unidades de análise e categorização que dizem respeito a dois tipos de formação proporcionadas pela modelagem – formação matemática e formação para a vida. Na sequência explicitamos os dois cenários e detalhamos o processo analítico.

4.3.1 Cenário 1¹⁹

Dentre as várias funções da íris humana, como a de embelezar o olhar, regular a quantidade de luz que entra até a retina, esta pequena parte de nossos olhos ganhou papel importante no reconhecimento de pessoas por meio da biometria. Devido a sua complexidade, a decodificação da íris é segura e usada em maior escala. Em meio a essas informações, pesquisadores da área de tecnologia com objetivo de proporcionar mais segurança ao usuário, desenvolveram e aprimoraram sistemas de *software* e *hardware* que possibilitam escanear a íris. Essa tecnologia faz parte da variação de recursos biométricos, bem como o sensor de impressões digitais e o reconhecimento facial. O uso da biometria da íris como sistema de segurança, tem sido utilizado por bancos, desbloqueio de tela de smartphones, computadores e notebooks, dentre outros. No caso dos smartphones, a

¹⁹ Inspirado em uma atividade apresentada em Almeida (2020).

própria câmera digital de alta-resolução dos aparelhos, captura imagens que com comprimentos de ondas visíveis ou de infravermelho, faz comparações das imagens e padrões da íris com imagens armazenadas em um banco de dados. A produção de aprimoramentos para os mecanismos de reconhecimento de pessoas por meio da biometria tem entrado em cena, visto que ainda há possibilidades de fraudes para burlar os sistemas de segurança.

Levando em conta essa situação, a atividade discutida no Cenário 1 visa desenvolver um algoritmo que possa ser usado para o reconhecimento biométrico da íris, permitindo classificar se uma pessoa pertence ou não a um determinado grupo.

4.3.1.1 A atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 1

Os alunos A5, A7 e A11 se inteiraram com o tema por meio de pesquisas na *internet* para compreender em que âmbito está presente e como é utilizada, e questionamentos como os do diálogo encaminharam-os para a determinação de medidas relativas à área da íris.

A3: O que é biometria?

A1: Acho que é medir algo...não é? [...]

A10: Mas como eu consigo reconhecer que as informações são de cada pessoa? [...]

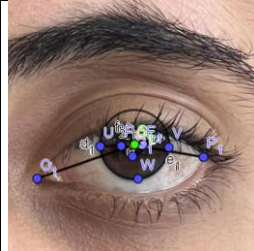
A10: O que é algoritmo? [...]

A1: Vamos precisar criar um? O algoritmo tem regras?

Diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

Este movimento inicial, permitiu associar a íris a uma forma circular, bem como a extração das medidas via *software Geogebra* como no exemplo do Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Informações coletadas pelo Grupo 1

DADOS DO GRUPO ²⁰							Geogebra - A10
	$d_{C_iC_p}$	$d_{C_pL_i}$	$d_{C_pL_e}$	$d_{C_iL_i}$	$d_{C_iL_e}$	d_{C_pI}	
A1	0,07	1,52	1,44	1,58	1,37	0,52	
A3	0,05	1,85	1,51	1,89	1,46	0,68	
A8	0,06	1,78	1,38	1,84	1,31	0,6	
A10	0,06	2,33	1,67	2,39	1,62	0,74	

Fonte: Adaptado do relatório do grupo

²⁰ distância entre o centro da íris e o centro da pupila ($d_{C_iC_p}$); distância entre o centro da pupila e o limite interno do olho ($d_{C_pL_i}$); distância entre o centro da pupila e o limite externo do olho ($d_{C_pL_e}$); distância entre o centro da íris e o limite interno do olho ($d_{C_iL_i}$); distância entre o centro íris e o limite externo do olho ($d_{C_iL_e}$); distância entre o centro da pupila até o contorno da íris (d_{C_pI}).

Compreender conceitos matemáticos relativos à geometria plana e analítica foram necessários para determinar as equações das circunferências, e seus respectivos centros, os segmentos de reta que proporcionaram determinar as distâncias entre pontos e nesse contexto o uso do *Geogebra* permitiu também a visualização e comparação da imagem com as equações, como no Quadro 3.2, a equação da circunferência que representa o contorno da íris de A10 em sua forma geral é dada por $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ e em particular ao tratamento realizado, $(x - 21,04)^2 + (y - 3,77)^2 = 0,63$ com coordenadas de centro igual a $C(21,04; 3,77)$ já que eles utilizaram um mesmo arquivo alocando lado a lado todas as imagens dos olhos dos integrantes do grupo.

Considerando condições de coleta de dados para manter um padrão de distância entre a câmera e os olhos e a exposição à luz, três hipóteses foram definidas: Hipótese 1: O centro da pupila e o centro da íris são diferentes; Hipótese 2: A leitura da íris é realizada com os olhos sempre na mesma posição da coleta; Hipótese 3: A pupila dilata, porém o centro dela permanece sempre o mesmo.

Foram definidas como variáveis duas razões que incorporaram as medições realizadas: $R1 = \frac{d_{c_p L_i}}{d_{c_i L_i}}$, uma razão de medidas do limite interno do olho que varia conforme as medidas de cada membro; $R2 = \frac{d_{c_p L_e}}{d_{c_i L_e}}$ (expressas com nove casas decimais).

O modelo matemático consistiu em um algoritmo com verificação em etapas, assim como sistemas de segurança de acesso a aplicativos com senhas, contas de *e-mails*, dentre outros exemplos:

1° A distância entre os centros da íris e pupila pertencer ao conjunto de elementos {0,05; 0,06; 0,07}.

2° Passar na verificação anterior e o resultado de R1 pertencer ao conjunto de elementos {1,039473684; 1,021621622; 1,033707865; 1,025751073}.

3° Passar na verificação anterior e o resultado de R2 pertencer ao conjunto de elementos {0,951388889; 0,966887417; 0,949275362; 0,97005988}.

4° Passar na verificação anterior e a distância entre o centro da íris até o seu contorno pertencer ao conjunto de elementos {0,52; 0,68; 0,6; 0,74}.

Se o algoritmo reconhecer essas 4 informações é feito o desbloqueio, caso contrário a pessoa externa é mantida bloqueada.

Relatório do desenvolvimento da atividade.

A partir da definição do modelo matemático o Grupo 1 realizou testes para validar a consistência do modelo sendo que todas as pessoas externas ao grupo foram bloqueadas já na primeira etapa de verificação, visto que a distância obtida entre o centro da íris e o

centro da pupila não pertenciam ao conjunto de elementos {0,05; 0,06; 0,07} como indica o Quadro 4.2.

Quadro 4.2 – Resultados dos testes com pessoas externas

VALIDAÇÃO				
	Distância entre centros	Razão dos Limites internos R1	Razão dos Limites externos R2	Distância entre o centro da Íris até seu contorno
Pessoa 1 (A5)	0,03	1,019607843	0,973684211	0,58
Pessoa 2 (E9)	0,11	1,072992701	0,938931298	0,27
Pessoa 3	0,08	1,033492823	0,952941176	0,72

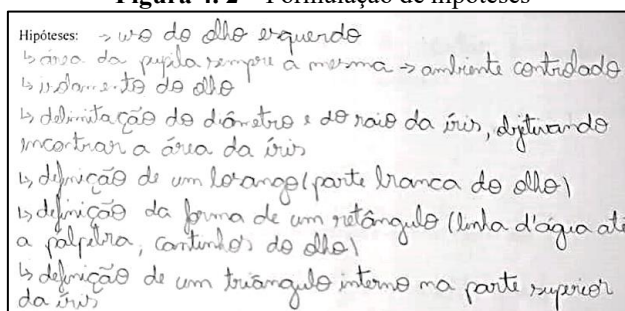
Fonte: relatório do grupo 1

4.3.1.2 A atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 2

Para resolver o problema acerca da criação de um algoritmo para o reconhecimento biométrico da íris, os alunos do Grupo 2 a partir da inteiração com o tema, de incorporarem informações acerca dos elementos da íris e de como matematizar as informações se engajaram em dois movimentos.

Inicialmente os alunos coletaram fotos dos olhos de cada um dos integrantes do grupo usando o celular, para identificar e listar os dados. Eles posicionaram as fotos de uma mesma maneira e na mesma proporção usando o recurso tecnológico de quadratura e realizaram as medições usando régua e o aparelho celular. Para matematizar foram definidos os atributos para o algoritmo, que consistiram também das hipóteses utilizadas pelos alunos do Grupo 2 (Figura 4.2).

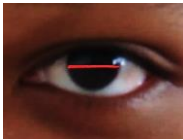
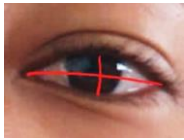
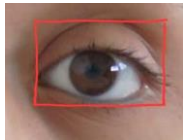
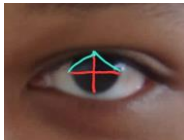
Figura 4.2 – Formulação de hipóteses



Fonte: Relatório dos alunos do grupo 2

O Quadro 4.3, indica a coleta de dados dos integrantes do Grupo 2.

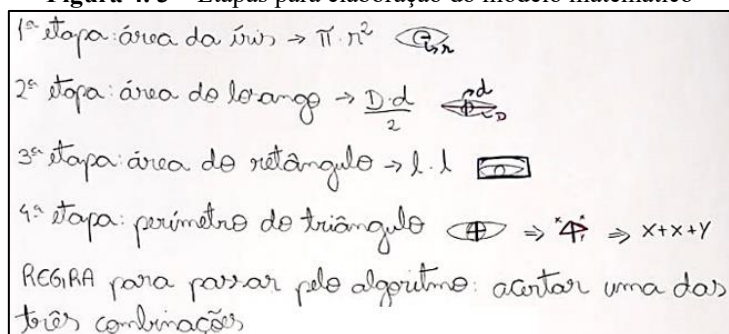
Quadro 4.3 – Parâmetros dos olhos do grupo 2

	1ª ETAPA Área da íris	2ª ETAPA Área do losango	3ª ETAPA Área do retângulo	4ª ETAPA Perímetro do triângulo
Integrantes do grupo				
A11	4,89 cm ²	9 cm ²	21,60 cm ²	5,9 cm
A7	4,89 cm ²	6,36 cm ²	24,64 cm ²	5,7 cm
A5	4,52 cm ²	6,37 cm ²	25,83 cm ²	5,6 cm

Fonte: relatório dos alunos

Para obtenção do modelo matemático o grupo realizou o que nomeou de decodificação do conjunto de características da íris para leitura, e que a pessoa intrusa seria aceita se o conjunto de características dela possuir três características que combinem exatamente com as três características de um integrante (Figura 4.3).

Figura 4.3 – Etapas para elaboração do modelo matemático



Fonte: Relatório do grupo 2

O modelo matemático neste cenário se constitui da junção das quatro etapas e da aplicação da regra, ou seja, o algoritmo para liberar o sistema de segurança deve validar uma das três combinações entre as etapas de um a quatro. Para validação do algoritmo criado foi realizada coleta de dados com cinco sujeitos externos ao grupo, sendo que esses dados foram testados em relação às características dos integrantes do grupo, em pelo menos três de quatro etapas realizando testes para validar a consistência do modelo. Os alunos do grupo elaboraram um quadro de leitura da íris das pessoas externas e destacaram em verde a etapa que possuiu uma igualdade no parâmetro (Quadro 4.4).

Quadro 4. 4 – Validação do algoritmo com sujeitos externos

Pessoas externas	1ª ETAPA Área da íris	2ª ETAPA Área do losango	3ª ETAPA Área do retângulo	4ª ETAPA Perímetro do triângulo
1	6,59	11,73	39,84	6,3
2	3,45	6	31,24	4,7
3	4,43	7,38	23,42	5,24

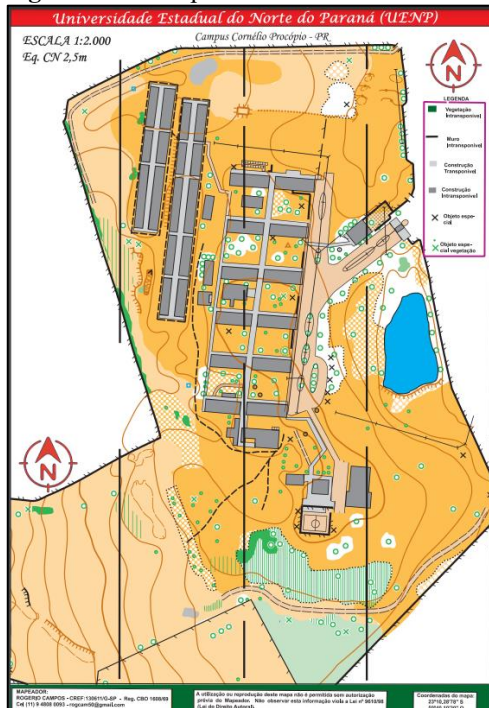
Fonte: relatório do Grupo 2

4.3.2 Cenário 2

Um dos pontos que permearam a campanha eleitoral de candidatos a reitoria de uma Universidade Pública diz respeito à falta de um refeitório ou restaurante universitário em um dos *campi* de atuação da reitoria. O *campus* possui apenas uma cantina de difícil acesso aos diferentes blocos de prédios da Universidade. O tempo de 15 minutos de intervalo e a distância até a cantina inviabiliza que os alunos façam refeições. No cenário 2, os alunos A1, A3, A5, A6, A10 e A11 investigaram o problema ‘qual seria a melhor localização para construir um restaurante na universidade?’. Com a intenção de determinar qual seria a melhor localização no *campus* para construir o restaurante universitário, subproblemas foram definidos diante de algumas reflexões: 1- Quantas pessoas poderão ser atendidas por dia? 2- Qual o horário de atendimento? E quantos lugares terá o restaurante? 3- Quais medidas a construção deverá ter? 4- E quanto custará aproximadamente a construção?

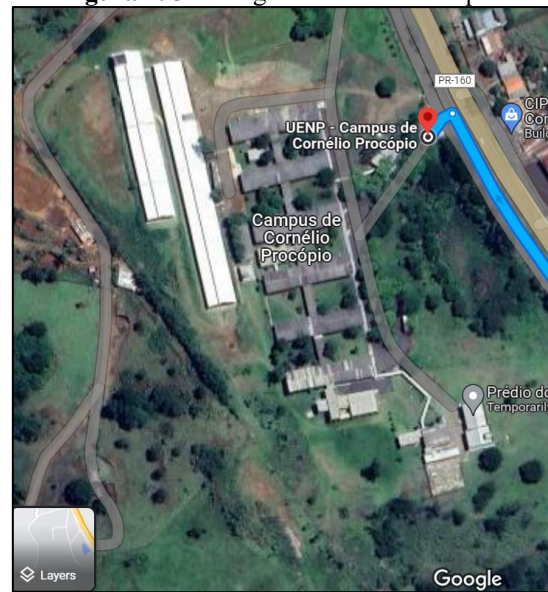
A inteiração com o tema incluiu discussões acerca da viabilidade da construção na Universidade, bem como de aspectos políticos necessários para implantar o restaurante. Para sanar possíveis dúvidas, foi realizada uma entrevista com a direção do campus e a partir da entrevista surgiu a necessidade de delimitação das variáveis envolvidas com o problema, por exemplo, com base no mapa cedido pela direção (Figura 3.4), os alunos conseguiram excluir áreas como área verde e área rochosa. A partir deste mapa os alunos delimitaram os espaços possíveis e com o auxílio da ferramenta *Google Maps* coletaram informações sobre a melhor localização para a construção (Figura 4.5).

Figura 4.4 – Mapa do relevo da universidade



Fonte: direção de *campus*

Figura 4.5 – Imagem satélite do campus

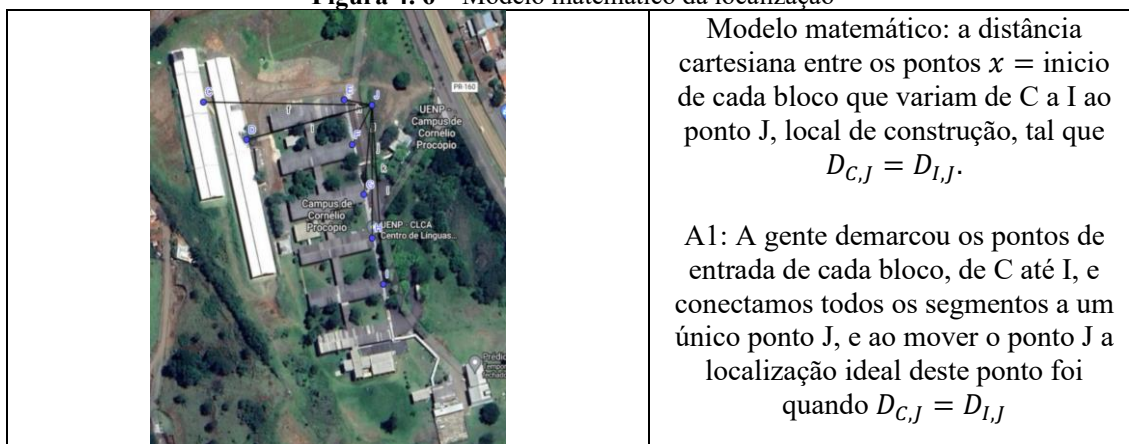


Fonte: *Google maps*

Neste contexto, consideraram: o mapa, o número de pessoas que envolve a comunidade universitária do *campus*, quantos lugares tem em média os restaurantes universitários, qual o tamanho da área construída desse tipo de restaurante. A partir dessas considerações formularam as hipóteses: Hipótese 1: Considerar a distância dos blocos que possui um maior fluxo de alunos e mantendo uma distância igualitária entre os blocos que estão mais distantes; Hipótese 2: Ser um local livre para construção (sem impedimentos), fácil acesso para descarte de resíduos orgânicos, instalações elétricas e hidráulicas e possibilidade de ampliação futura; Hipótese 3: Considerar uma média do público interno do Campus de Cornélio Procópio e uma média de evasão no cursos de graduação de 16,4% de acordo com o Instituto Semesp; Hipótese 4: considerando que a universidade oferece cursos integrais e noturnos, e considerando que no período de maior fluxo (noturno) uma grande parte dos alunos que são de fora chegam próximo do horário de início das aulas, às 19h consideraremos uma maior quantidade de atendimento e menos rotatividade; Hipótese 5: para estabelecer quantos lugares terá o restaurante foi considerada uma proporção de outros restaurantes universitários; Hipótese 6: Será considerado uma proporção com referência no RU da UEL que possui 5,22m² por pessoa.

A partir da matematização da imagem coletada e considerando as hipóteses os alunos construíram o modelo matemático usando construções geométricas por meio do *software Geogebra*, conforme indica a Figura 4.6 o ponto J foi o melhor local.

Figura 4.6 – Modelo matemático da localização



Fonte: relatório do grupo

Para validar o modelo matemático, foi necessário questionamentos sobre a qualidade de vida e mobilidade dos alunos no campus universitário, conforme indica o aluno A1 para o grupo: “A1: Quando a distância dos blocos que ficam mais longe for a mesma. [...] É justo por que os blocos mais distantes ficarão a uma mesma distância e os blocos com mais fluxo de pessoas ficam próximos do RU” (Áudio do aluno). O grupo considerou o ponto J como resultado matemático válido, neste caso não houve um teste para validar a informação, mas as próprias suposições realizadas foram consideradas tanto em relação a matemática quanto a situação-problema real.

A quantidade de pessoas que poderão usar o restaurante foi estimada por meio da média $M = \frac{1238+56+240+22+130}{5}$, que envolve a comunidade acadêmica, bem como o número de graduandos já aplicado à taxa de evasão de 16,4% como consta na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Quantidade de pessoas estimadas que usarão o restaurante

Público Alvo	Média de pessoas para atendimento
Graduando considerando a média de evasão paranaense	1238
Pós-graduação	56
Futuros cursos	240
Funcionários	22
Colaboradores (professores)	130
TOTAL	1686

Fonte: relatório do grupo

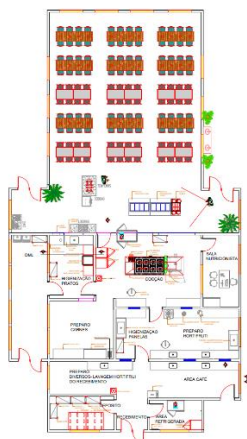
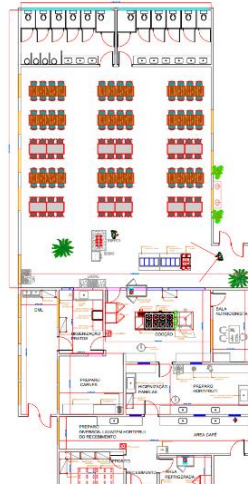
Para responder sobre o horário de atendimento, e quantos lugares terá o restaurante, os alunos realizaram uma proporção considerando os dados do restaurante universitário da Universidade Estadual de Londrina UEL, pois este foi o único local que divulga dados a respeito do restaurante, e chegaram a uma média de 58 lugares. No entanto tiveram que reconsiderar o resultado devido a hipótese 4, maior capacidade e

menor rotatividade pensa-se no dobro de lugares, em 116 lugares, ao qual o *buffet* atenderia no período do almoço das 11:30 horas às 13 horas (uma hora e meia de duração) e no período noturno das 18:30 horas às 21 horas (duas horas e meia de duração).

Para quais medidas a construção deverá ter? E quanto custará aproximadamente a construção? foi considerada uma proporção de número de pessoas por metro quadrado construído, chegando a um valor de $605,52m^2$, que custariam, a partir de informações de uma licitação realizada na última obra na universidade, cerca de 1.871.271,71 reais.

Na interpretação dos resultados e validação os alunos buscaram informações com um profissional que trabalhava na prefeitura com um dos alunos do grupo (Quadro 4.5).

Quadro 4.5 – Interpretação dos resultados e validação dos alunos

<p>Em vista de validar o modelo matemático obtido, foi realizada uma pesquisa com arquiteto na área, onde nos foi fornecido a planta baixa (imagem 1) do refeitório da JBS de Taquaritinga, que tem $369,096m^2$.</p> 	<p>Considerando que, refeitórios e cozinhas se comportam conforme a necessidade da empresa, solicitamos que acrescentassem banheiros para ficar mais próximo da nossa realidade.</p> 
<p>Importante mencionar que, os espaços entre as mesas da planta fornecida são de 130 centímetros e as mesas utilizadas foram de 6 lugares, totalizando $418,221m^2$ de construção. Mas como objetivo da validação é comparar uma proposição realizada pelo modelo matemático e uma situação da realidade, concluímos que o modelo matemático está correto, uma vez que, o R.U. necessita de um número maior de lugares e espaçamentos entre as mesas, o qual é diferente da planta baixa utilizada, para assim se obter um fluxo maior de pessoas num tempo reduzido, ou seja, cada refeitório possui suas especificidades, faz-se justificada o resultado.</p>	

Fonte: relatório do grupo

O grupo de alunos tomou a decisão de considerar 120 lugares, visto que a partir da verificação do espaço físico da cantina observou-se que a mesma possui 80 lugares, e se este local já possui limitações para atender o público da universidade e é para esta finalidade que se considera a construção de um restaurante universitário o grupo

aproximou o dobro dos 58 lugares. Por fim, a investigação foi compartilhada com a direção do *campus* da Universidade.

4.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA E A DISCUSSÃO DA FORMAÇÃO POSSIBILITADA

Para tratar da formação matemática possibilitada, inicia-se a discussão analítica a partir das reflexões internas e externas à modelagem, tendo como norte a base teórica desenvolvida por Elicer e Blomhøj (2022) e Blomhøj e Kjeldsen (2011). Essas reflexões por sua vez estão relacionadas à uma cadeia de ações que são influenciadas pelas experiências prévias dos alunos engajados nas atividades de modelagem e nos permitem olhar para as discussões matemáticas e não matemáticas de modo a estruturar dois grupos de ações que remetem ao potencial da modelagem no que tange a formação para a vida e a formação matemática dos sujeitos. Por fim, para fomentar essas reflexões trazemos para a análise a base filosófica de Biesta (2017) e as ponderações de Fredj e Vos (2023) que lançam sobre a modelagem um olhar filosófico e discutem o conceito de *bildung*, de uma formação para cidadania e para vida, bem como aos elementos do que os autores denominam de *espírito da modelagem*.

A partir do objetivo de *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*, é possível diante de cada um dos cenários evidenciar o potencial das discussões matemáticas e não matemáticas que as atividades proporcionam aos alunos.

Neste contexto, o cenário 1 em que os alunos trabalharam com o tema biometria da íris possibilitou evidenciar o potencial da atividade para trabalhar com um repertório matemático, com foco na matematização de medidas que caracterizam o fenômeno, na formulação de hipóteses, e na elaboração de um modelo que pode ser compreendido como um protótipo de um sistema de reconhecimento e leitura da íris.

Associado a estes aspectos, o cenário 1 desencadeia questionamentos que podem ser atrelados a reflexões internas ao processo de modelagem (Elicer; Blomhøj, 2022). Por exemplo, para se inteirar com o tema, na fase de inteiração do ciclo de Almeida, Castro e Silva (2021), os alunos discutiram em que consiste biometria, fizeram pesquisas na *internet* para compreender em que âmbito está presente e como é utilizada. Assim, questionamentos como no diálogo abaixo foram encaminhando-os para a determinação de medidas essenciais relativas à área da íris.

A3: O que é biometria?
A1: Acho que é medir algo...não é?
A10: Acho que é medida de características biológicas.
A10: Mas como eu consigo reconhecer que as informações são de cada pessoa?
A3: Elas são decodificadas por algoritmos.
A10: O que é algoritmo?
A3: É uma estrutura que vai permitir a leitura.
A1: Vamos precisar criar um? O algoritmo tem regras?
Diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

Essas reflexões pautadas em questionamentos tais como: que medidas deveriam ser tomadas como essenciais ao fenômeno investigado?; como matematizar as medidas consideradas?; que hipóteses simplificadoras podem ser formuladas?; como elaborar um algoritmo que incorpore em suas etapas as informações de todos os integrantes do grupo e exclua aqueles que não pertencem ao grupo?; ou, ainda, se o modelo matemático é válido e garante a seguridade contra fraudes?; podem se caracterizar como reflexões internas à atividade de modelagem. Estas reflexões, por sua vez, fundamentam as ações a serem tomadas pelos alunos na fase de resolução da atividade bem como fundamentam suas ações ao repensar escolhas que fizeram, como por exemplo, considerar mais etapas de verificação no algoritmo ao perceberem que algumas pessoas possuíam medições próximas ou iguais, ou ainda, a realizar testes com pessoas externas para validação os resultados obtidos por meio do modelo matemático elaborado.

Para Blomhøj e Kjeldsen (2011), essas reflexões são atos deliberados de pensar e esboçar reação acerca da atividade de modelagem, bem como sofrem influência das experiências anteriores dos alunos e do modo como convivem em sociedade, neste caso, experiências advindas, por exemplo, de sua escolaridade e da formação que estão cursando, Licenciatura em Pedagogia, Matemática ou Administração.

O diálogo evidencia a fundamentação das ações dos alunos que, na sequência, passam a considerar atributos específicos que podem compor os parâmetros do modelo matemático, na fase de resolução e na transição para a fase de resolução do ciclo de Almeida, Castro e Silva (2021), para resolução da atividade de modelagem que visa determinar um algoritmo que considera a biometria da íris. As reflexões e ações nessas fases da atividade de modelagem estão associadas aos usos da matemática, bem como aos conhecimentos extramatemáticos que são necessários considerar para elaboração dos modelos matemáticos que solucionam as problemáticas iniciais.

No cenário dois, em que os alunos se debruçaram na investigação da construção de um restaurante na universidade, as reflexões internas estão associadas à: que critérios

e qual matemática utilizar para determinar a melhor localização do restaurante, a proporção que o restaurante deve ter levando em consideração o terreno disponível no *campus*, regras e padrões associados à construção civil, os quais deveriam ser respeitados para obtenção de uma solução viável para o melhor local de construção do restaurante universitário, regulamentação de cozinhas e refeitórios, e ainda que este contemple os requisitos de acessibilidade.

O diálogo dos alunos do grupo 1 mostra as discussões para identificar e listar os dados pesquisados, e que o grupo se dividiu para pesquisar as informações, organizando depois um documento com as informações encontradas.

A3: Tem outra planta?

A3: A foto do *Google* vamos usar para analisar algumas distâncias.

A3: Vamos dividir a pesquisa das informações sobre restaurantes universitários?

A1: Será que tem no site nas universidades?

A11: Podemos ir lá medir?

A3: No site da UENP tem o total de alunos e servidores?

A3: E a taxa de evasão, onde podemos achar? Ou melhor calcular?

A10: Eu posso ver em média quanto tempo leva para os alunos fazerem as refeições.

A10: Onde podemos buscar essas informações? Será que ligamos lá?

A1: Tem um *site* com todas as informações do RU da UEL. Eu já achei quantos estudantes o RU atende por ano e por dia, horário de pico e quantos quilogramas de comida são necessários diariamente e quantas refeições são servidas diariamente. Também tem a informação de quantos lugares tem disponível por mesa. São 185 mesas que totalizam 750 lugares.

Diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

Para além destas reflexões internas, que dizia respeito ao melhor local no *campus* para a construção do restaurante, os alunos se debruçaram sobre outros elementos que tornariam possível em um curto espaço de tempo tal construção. Ou seja, o interesse pessoal os mobilizou na preocupação de “tentar fazer dar certo”. Na descrição do cenário 2, percebe-se o desejo de que a resolução tenha um retorno à universidade e contribua para o dia a dia da comunidade universitária.

Neste contexto, reflexões externas foram se desencadeando, a partir de questionamentos como: quanto custaria para a universidade construir este restaurante? O que seria necessário para equipá-lo? O que os profissionais da construção civil podem dizer sobre o modelo matemático elaborado? Para estas questões ainda surgiram reflexões posteriores, no tocante a precificar a construção, como qualquer empresa pode prestar este serviço? O que é um processo de licitação? Quanto custaria cada refeição? É

interessante para geração de recursos a universidade atender a comunidade externa da região? Todas essas questões envolvem a aplicação do modelo no contexto investigado. Como destacado em Blomhøj e Kjeldsen (2011), as reflexões externas estão vinculadas a finalidade e funções do modelo para com sua efetiva ou potencial aplicação no contexto investigado, e neste caso, o cenário dois revela a possibilidade de uma atividade de modelagem ter potencial para tais reflexões, em articulação tanto com a comunicação dos resultados obtidos quanto com a fase de interpretação de resultados e validação do ciclo de Almeida, Castro e Silva (2021).

Ao passar para a fase de matematização nos dois cenários, é possível reconhecer ações que estão atreladas às reflexões externas, apontadas por Blomhøj e Kjeldsen (2011), visto que tais reflexões tratam da utilização dos modelos matemáticos, dos resultados do modelo e de seu papel em contextos de aplicação. Este mesmo tipo de reflexão é o possibilita, e de certo modo move as ações associadas à interpretação de resultados e validação dos modelos matemáticos, por exemplo, quando os alunos que desenvolveram a atividade do Cenário 2 se preocupam com o uso que será feito da melhor localização para construção do restaurante universitário, bem como do restaurante em si. Naquele momento para validar o modelo matemático obtido para determinar o melhor local do restaurante no campus da instituição, foi necessário questionamentos de ordem qualitativa sobre a qualidade de vida e mobilidade dos alunos no campus universitário:

A10: Quando ocorre a melhor localização?

A1: Quando a distância dos blocos que ficam mais longe for a mesma.

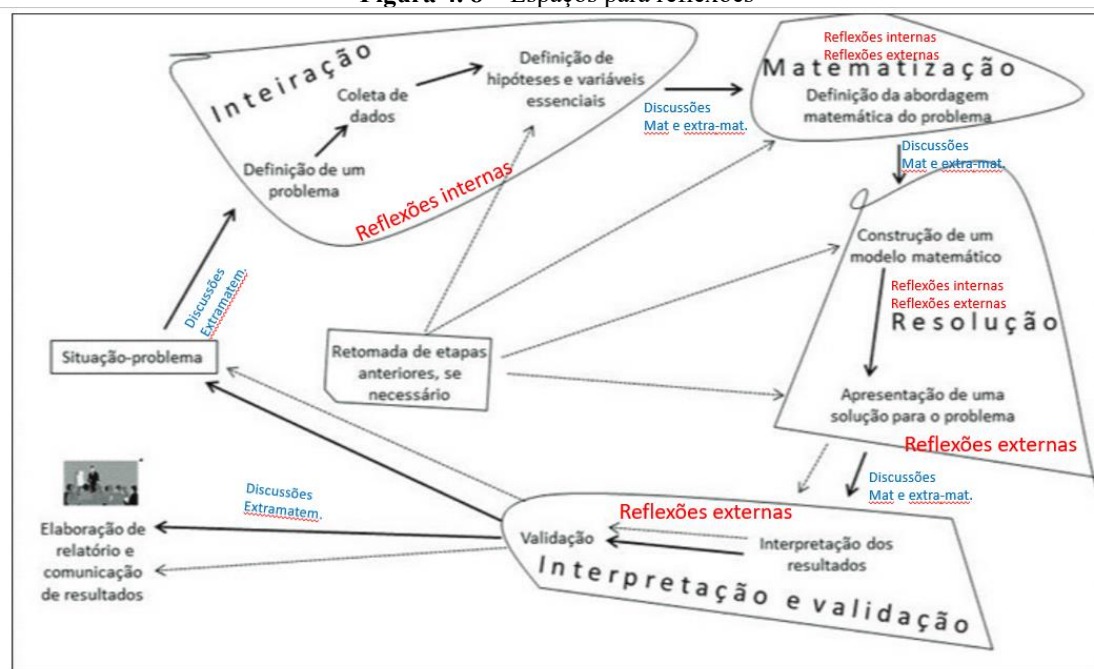
A1: É justo por que os blocos mais distantes ficarão a uma mesma distância e os blocos com mais fluxo de pessoas ficam próximos do RU.

Diálogo dos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

O cenário 2 proporcionou que as discussões matemáticas, a determinação do melhor ponto para construção do restaurante universitário a partir de conceitos geométricos, fossem utilizadas para análise da vida acadêmica na universidade, bem como para a discussão política em termos do que é necessário para que a administração do *campus* consiga possibilitar a construção do RU.

Neste contexto, é possível delimitar alguns espaços para as reflexões internas e externas à modelagem e as ações que delas emergem considerando as fases do ciclo de modelagem de Almeida, Castro e Silva (2021), conforme indica a Figura 4.8. É importante sinalizar que não há algo estático em relação ao ciclo.

Figura 4.8 – Espaços para reflexões



Fonte: Adaptado de Almeida, Castro e Silva (2021).

As atividades detalhadas nos cenários 1 e 2 estão associadas às experiências dos alunos com a modelagem e também com os conhecimentos matemáticos e extramatemáticos dos alunos. As experiências prévias dos sujeitos estão associadas à sua vida pessoal profissional e acadêmica. Na atividade *Biometria da Íris*, um grupo formado por alunos do curso de Pedagogia e o outro grupo por alunos da Licenciatura em Matemática e da Administração. Na atividade *Restaurante Universitário* seis alunos, respectivamente dois da Licenciatura em Matemática, três alunos de Pedagogia e um de Administração.

A partir das reflexões internas nas discussões não matemáticas dos alunos e das reflexões externas, mais associadas ao uso da matemática proporcionada pela atividade e como este uso se enquadra para a aplicabilidade dos modelos matemáticos na sociedade, é possível vislumbrar dois tipos de formação proporcionadas pela modelagem: *formação matemática* e *formação para a vida*. A estes dois tipos de formação podemos inferir sobre o alcance das atividades de modelagem.

Formação matemática

A formação matemática está de modo geral associada ao entendimento de modelagem como uma possibilidade de construção e uso de modelos matemáticos para a solução de problemas da realidade (Niss; Højgaard, 2019). A análise de atividades de modelagem no que tange ao uso de conceitos matemáticos pode dar evidências do que os

alunos sabem e podem aprender a partir de atividades de modelagem, por exemplo. Podemos realizar uma análise da matemática utilizada em cada um dos cenários e encontrar evidências da formação dos alunos em relação a matemática, os tipos de modelos que eles constroem, que conceitos matemáticos usam, como fazem uso de *softwares* como o *Geogebra*.

Na sociedade contemporânea, podemos atrelar o foco a pontos específicos do saber, ao que Biesta (2010, 2018) indica como Educação baseada em evidências (*evidence-based*), ou seja, àquela que está relacionada com a qualificação.

Por exemplo, no Cenário 1 evidências da formação matemática podem ser obtidas no desenvolvimento de modelos matemáticos pelos alunos, quando por exemplo os alunos do Grupo 1 explicitam a compreensão de conceitos matemáticos da geometria plana e analítica ao determinar as equações das circunferências, seus respectivos centros, bem como as distâncias entre pontos para a delimitação de parâmetros que seriam necessários à construção de um algoritmo.

A própria delimitação do algoritmo já declara elementos matemáticos que correspondem a conceitos matemáticos previamente apreendidos pelos alunos ou no curso de sua aprendizagem em sala de aula, como, os conceitos já citados e ainda o conhecimento de conjuntos, de pertencimento e não pertencimento, entre outros, como evidenciado em um dos parâmetros do algoritmo do grupo 1 “A distância entre os centros da íris e pupila pertencer ao conjunto de elementos $\{0,05; 0,06; 0,07\}$ ”. Os conceitos matemáticos mobilizados pelos alunos, ou introduzidos pelos professores, já são pauta de diferentes pesquisas em modelagem, como em Seki (2019), Pollak (2015), Almeida (2022), entre outros.

Já no Cenário 2 evidências da formação matemática podem ser obtidas já na análise da matematização e da possível resolução para o problema. Os alunos fizeram uso de construções geométricas, do *software Geogebra* e de conceitos de distância euclidiana entre pontos, bem como proporcionalidade e conceitos articulados ao tratamento da informação como a média aritmética.

A literatura pontua o alcance da modelagem neste tipo de formação, visto que foi necessário a elaboração de hipóteses para relacionar a situação e a matemática, para comunicar e argumentar matematicamente, para trabalhar com conceitos matemáticos em busca de uma resolução válida e interpretar os resultados obtidos analisando os procedimentos e ferramentas matemáticas utilizadas.

No entanto, a formação proporcionada pela modelagem está para além do uso e da aplicabilidade da matemática em sociedade. Tanto no cenário 1, quando no cenário 2 é possível notar que as atividades permitiram aos alunos questionar a realidade por eles vivenciada, no que diz respeito aos sistemas de segurança com que lidam no dia a dia e no que diz respeito ao local e as regulamentações que existem e que são necessárias para que a vida no campus universitário seja melhor a partir da construção de um restaurante universitário. É, neste contexto que a análise de atividades de modelagem pode permitir também falar de uma formação para a vida.

Formação para a vida

Mas, nas palavras de Biesta (2018, p.28) “[...] a socialização e subjetivação estão também sempre presentes e precisam ser consideradas”, ou seja, para além da qualificação em determinadas áreas do saber é necessária uma formação que prepare para a vida. Em modelagem, essa formação está alinhada com o que Fredj e Vos (2023) concebem como *espírito da modelagem*, que aponta para o alcance da modelagem matemática em termos da interação e conexão dos indivíduos e seu ambiente social e cultural. Enfatiza-se, assim como em Martins e Almeida (2021), que o tratamento de problemas de interesse dos alunos e, ainda, de problemas autênticos, pode promover uma formação para a vida, que permita ao aluno (re)configurar seus modos de ver e reconhecer o mundo.

Em Biesta o conceito de *Bildung* não é necessariamente associado ao ensino e a educação, mas também aos elementos que estão associados aos modos de ver dos sujeitos, a sua construção social enquanto ser humano que se vê, se identifica e faz parte de um espaço e tempo, de uma cultura. Para Fredj e Vos (2023) uma das finalidades da modelagem, em essência, está associada ao espírito da modelagem e à promoção da cidadania e da conexão dos sujeitos com o mundo que os cerca, a manifestação de seu modo de ser e agir no espaço a partir do entendimento e do tratamento deste espaço, também, por meio da modelagem.

A formação para a vida é parte das atividades de modelagem, pois as mesmas permitem com os sujeitos analisem o espaço a que as situações-problema pertencem, a viabilidade ou não de elaborar soluções para essas situações-problema, bem como seu pertencimento ou não no mundo, e, ainda, os impactos que os modelos matemáticos podem ter na sociedade e na comunidade para a qual a solução da atividade de modelagem retorna.

Por exemplo, no Cenário 1, ao elaborar um algoritmo que leva em consideração características da íris humana, os alunos precisaram se inteirar com a realidade a que essa situação-problema se aplica, ou seja, seu próprio dia a dia com atividades que muitas vezes precisam do uso de tais algoritmos, como a ida a bancos o uso de smartphones, entre outros. Na análise dos parâmetros a considerar, para além dos conceitos matemáticos que podem ser utilizados, é preciso entender que parâmetros as máquinas poderiam ler e com que precisão isso seria feito. Neste momento entra em cena também a quebra de paradigma acerca da exatidão da matemática, visto que a definição dos parâmetros é sempre feita por um grupo de sujeitos e há sempre uma porcentagem da população para a qual o algoritmo não irá funcionar. O retorno do algoritmo a sociedade permite os alunos entender seu papel no mundo enquanto cidadão e também como aluno e pesquisador que pode vir a ser.

Já no Cenário 2, o contato com o meio em que vivem é importante para realizar a atividade, visto que é necessário compreender aspectos geográficos e sociais da comunidade local para o desenvolvimento de um modelo que permita projetar o melhor local para a construção de um restaurante universitário. Em todas as fases da atividade de modelagem emerge o contato com a comunidade e as reflexões externas indicadas no item anterior colaboram para validar inferências sobre a formação humana proporcionada pela modelagem, visto que a conexão entre a matemática e a realidade local é importante para inferir também sobre a qualidade de vida e mobilidade dos alunos no ambiente universitário.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve por objetivo *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores*. Para tanto, dois cenários de atividades de modelagem foram discutidos a partir da análise qualitativa de conteúdo segundo os pressupostos de Mayring (2014). Usando lentes teóricas específicas foi possível determinar a caracterização de ações dos alunos a partir de reflexões internas e externas, a partir de Elicer e Blomhøj (2022) e de como elas emergem nos dois cenários que pautam as análises.

Em suma a modelagem de uma perspectiva pragmática está associada às ações dos alunos durante o ciclo de uma atividade de modelagem. Neste artigo se faz uma análise que leva em consideração as ações dos alunos durante as etapas de um ciclo, ou

seja, das práticas associadas à atividade, e dos tipos de reflexões internas e externas que são proporcionadas neste caminhar. Por exemplo, a construção dos modelos matemáticos, seja de um algoritmo para a leitura biométrica da íris do corpo humano, ou um modelo que descreva a melhor localização para a instalação de um restaurante universitário, essas ações matemáticas ou não estão associadas ao uso explícito de modelos matemáticos, conforme indicam Niss e Højgaard (2019) e o fim da utilidade matemática exemplifica aspectos da modelagem sobre uma perspectiva pragmática.

Essa compreensão possibilitada pela modelagem extrapola e vai para além dos usos da matemática na sociedade, pois pode possibilitar diferentes formações, entre elas a formação matemática e a formação para a vida, momento em que o espírito da modelagem entre em cena.

Essa instrumentalização inicial que a modelagem proporciona vai para além, pois mesmo que não possamos mensurar em sala de aula, a modelagem matemática proporciona que características idiossincráticas dos sujeitos se manifestem e transformem o ser humano em alguém que vive em sociedade e sabe como efetuar tomadas de decisão com consciência, sendo essas em diferentes campos, no trabalho, na escola, em relação às demandas sociais e até na constituição do caráter dos sujeitos, visto que esses “modos de ver” proporcionados pela modelagem podem se manifestar em um espaço curto ou durante a vida toda do sujeito.

A formação para a vida, abordada no artigo, foi vista pontualmente, mas a construção de conhecimento proporcionada, em particular no âmbito da escola, pode proporcionar a troca sociocultural, o trabalho colaborativo, criativo, bem como a visão holística da modelagem na vida acadêmica, social e cultural como mencionado por Fredj e Vos (2023).

Portanto, a caracterização das ações dos alunos nestes cenários mostra o potencial e o alcance de atividades de modelagem para gerar reflexões sejam elas internas ou externas, diante de discussões matemáticas ou não matemáticas, que pode se conceber como contribuições para pensar na formação que carrega o espírito da modelagem, corroborando com os resultados apontados em Fredj e Vos (2023). Os autores, apontam aspectos formativos em níveis *micro*, *meso* e *macro* que podem ser promovidos pela modelagem ainda que não mensuráveis. Em nível *micro* destaca-se aspectos metacognitivos, a flexibilização da criatividade, a antecipação, a iteratividade, as decisões tomadas em grupo como exercício democrático e a crítica. Na presente pesquisa pode-se ampliar os aspectos formativos deste nível ao abordar-se as reflexões internas. As

reflexões externas, por sua vez, podem ser associadas ao nível *macro* que compreende aspectos como a relevância do estudo da situação, a interdisciplinaridade, a utilidade na sociedade e o senso de justiça.

Assim, o alcance da modelagem pode ser caracterizado em dois tipos de formações: formação matemática e formação para vida. Na atual perspectiva da educação mundial, em que se associa uma filosofia da educação baseada em evidências (Biesta, 2010), o desenvolvimento de atividades de modelagem tem potencial para promover reflexões internas ao processo de modelagem, bem como para o desenvolvimento de competências relativas à matemática ou a própria modelagem (Mass, 2006; Niss; Blum, 2020; Cevikbas et al. 2021), o que pode se dar diante de seu caráter pragmático para resolver problemas reais por meio da matemática. E, para além dessa percepção da utilidade da matemática, há aspectos formativos que não são visíveis, porém são viabilizados pela modelagem em discussões não matemáticas, com reflexões externas, que fomentando uma formação que permite a ação do sujeito na sociedade e sua participação no debate político, econômico e cultural da comunidade em que se vive. Ela abrange o *Bildung*, possibilitando uma formação de preparação para a vida, que não foca apenas no ser profissional eficiente.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p.121-145, 2022.

ALMEIDA, L. W.; CASTRO, E. M. V.; SILVA, M. H. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto online. **Alexandria**, v.14, n.2, p.383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista, v. 5, n. 11, 2020.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES, A. A Tradição Alemã do Cultivo de si (*Bildung*) e sua Significação Histórica. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 44, n. 2, p.1-18, 2019.

ARAUJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.55-68, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002.

BIESTA, G. Why ‘what works’ still won’t work. From evidence-based education to value-based education. **Studies in Philosophy and Education**, v.29, n.5, p.491–503, 2010.

BIESTA, Gert J.J. **Para além da aprendizagem**: educação democrática para um futuro humano. Tradução Rosaura Eichenberg. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

BIESTA, G. Medir o que valorizamos ou valorizar o que medimos? Globalização, responsabilidade e a noção de propósito da educação. **Revista Educação Especial**, v.31, n.63, p.815–832, 2018.

BLOMHOJ, M. Mathematical Modelling-A Theory for Practice. In: CLARKE, B., CLARKE, D. M.; EMANUELSSON, G.; JOHANSSON, B.; LESTER, D. V.; WALLBY, A.; WALLBY, K. (Eds.). **International Perspectives on learning and teaching mathematics**. Göteborg: National Center for Mathematics Education, p.145-159, 2004.

BLOMHOJ, M.; KJELDSEN, T. H. Students’ reflections in mathematical modelling projects. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (Eds.). **ICTMA 14: Trends in teaching and learning of mathematical modelling**, p.385-396), Springer, 2011.

BLOMHOJ, M. Characterising modelling competency in students’ projects: Experiences from a natural science bachelor program. In: STILLMAN, G.; KAISER, G.; LAMPEN, C. E. (Eds.). **Mathematical modelling education and sense-making**. Springer, p. 395-405, 2020.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2017.

CEVIKBAS, M.; KAISER, G.; SCHUKAJLOW, S. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. **Educational Studies in Mathematics**, v.109, n.2, p. 205-236, 2021.

ELICER, R.; BLOMHOJ, M. Mathematics in Action: On the *Who, Where* and *How* of the Constructions and Use of Mathematical Models in Society. In: JANKVIST, U.T.; GERANIOU, E. (eds) **Mathematical Competencies in the Digital Era**. Mathematics Education in the Digital Era, v. 20. Springer, Cham., 2020.

FREJD, P.; VOS, P. The spirit of mathematical modeling - a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education. **The Mathematics Enthusiast**, v.21, n.1e2, p.269-300, 2023

- KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v.38, n.2, p.302-310, 2006.
- MAAß, K. What are modelling competences? **ZDM**, v.38, n.2, 2006.
- MARTINS, B. O.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática: dos entendimentos às finalidades. **Vidya**, v.41, n.1, p.113-128, 2021.
- MEYER, J. F. C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade. **Com a Palavra o Professor**, v. 5, n.11, p.140-149, 2020.
- NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. London: Routledge, 2020.
- NISS, M. A.; HØJGAARD, T. Mathematical competencies revisited. **Educational Studies in Mathematics**, v.102, n.1, p.9-28, 2019.
- NOGUEIRA-RAMIREZ, C. E. **O governo pedagógico: da sociedade do ensino para a sociedade da aprendizagem**. Tese (Doutorado) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-graduação em Educação. Porto Alegre, RS, 2009.
- PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. v.1, n.6, p.3-21, 2012.
- POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham, Switzerland: Springer, p. 265-276, 2015.
- SEKI, J. T. P. **Modelagem matemática, compreensão e linguagem: interlocuções fundamentadas na filosofia de Wittgenstein**. 2019. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.
- TREVISAN, A. L.; DALBOSCO, C. A. **CRISE DA EDUCAÇÃO CONTEMPORÂNEA: DA APRENDIZAGEM À FORMAÇÃO**. **Revista Educere Et Educare**, Dossiê AnpedSul, v.18, n.47, p.68-89, 2023.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO

A partir de elementos teóricos relativos à modelagem, essa pesquisa teve como objetivo investigar como a modelagem em ação na sala de aula pode contribuir para a formação dos alunos. Neste sentido, questiona-se que elementos formativos traz consigo o *espírito da modelagem* quando realizado pelos alunos em um contexto educacional?

Neste contexto, a modelagem em ação pode proporcionar uma formação matemática, bem como uma formação que permite a análise crítica e a tomada de decisões que “mudam” e “moldam” os modos de ver dos alunos engajados com atividades de modelagem e que nem sempre são visíveis, mas que fazem parte da formação do aluno e é levada para contextos extraclasse.

A investigação do espírito da modelagem proporcionou a ênfase em diferentes elementos desta e, a partir de uma investigação empírica foi possível detalhar considerações teóricas acerca de três aspectos formativos que são favorecidos no desenvolvimento de atividades de modelagem. O primeiro no que tange as discussões sobre a construção de modelos matemáticos, o segundo a respeito da mobilização do interesse e o terceiro que versa as possibilidades para uma formação matemática e a formação para a vida.

Essa investigação se desdobrou na elaboração de três artigos que detalham as questões de pesquisa: considerando que modelos (matemáticos) sempre extraem informações da situação da realidade a que se propõe, quais aspectos formativos são favorecidos pela construção de modelos matemáticos?; levando em consideração que o interesse é um fator psicológico relevante nas atividades educacionais, como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula?; com base nas diferentes ações relativas às diferentes etapas de um ciclo de modelagem, qual é o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores?

Com vistas a refletir sobre os resultados obtidos e o objetivo de pesquisa, conclui-se que há evidências de aspectos que caracterizam uma formação que traz à tona o espírito da modelagem, que a formação matemática é presente e faz parte da atividade de modelar, e ainda, a modelagem promove também um alcance num horizonte que fornece a formação do indivíduo que tem participação em práticas de espaços políticos, sociais e

culturais. Sinalizam-se possíveis contribuições da pesquisa para a modelagem no âmbito da Educação Matemática, bem como perspectivas futuras.

No artigo 1, *Por que construir modelos matemáticos?* cujo objetivo foi *identificar aspectos formativos favorecidos pela construção de modelos matemáticos*, partindo do pressuposto de que atividades de modelagem podem dar condições para que modos de ver o mundo se configurem, entende-se que o modelo matemático pode ser concebido como a extração de informações de uma situação a ser estudada e amplia-se a classificação de Brito (2018) corroborando com a delimitação de duas habilidades que podem ser requeridas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem em meio a construção de modelos matemáticos, sendo a experiência social e o pensamento sistêmico habilidades requeridas para tal desenvolvimentos.

A investigação das ações que os alunos utilizam para matematizar uma situação da realidade se pautou no desenvolvimento de duas atividades de modelagem com um grupo de alunos específico²¹, e permite identificar as ações no desenvolvimento da investigação matemática, mas mais do que isso a importância da construção de modelos para a formação em modelagem, da mobilização de conhecimentos para o estudo das situações sejam eles de experiências sociais, para colocar em ação, ou aprender, especificidades dos usos da matemática que consideram pertinente em sua área de formação e atuação profissional, bem como a necessidade de uma visão holística que integra a modelagem, a situação e a matemática para o estudo de problemas advindos de situações reais.

No artigo 2, *A mobilização do interesse em atividades de modelagem matemática*, o objetivo foi *investigar como se dá a mobilização do interesse em atividades de modelagem na sala de aula*, o contato gradativo com atividades de modelagem foi evidenciado por meio da análise de cinco atividades desenvolvidas pelos alunos, sendo possível caracterizar três categorias que detalham a mobilização do interesse dos alunos acerca do tema, da matemática e estudo de situações-problema. Este interesse, por sua vez, manifestou-se em domínios com relações de diferentes naturezas, como as relações afetivas, epistêmicas e sociais. Foi possível evidenciar que os alunos modificam seus interesses, transitando entre o situacional imediato, o situacional consolidado, o individual emergente e individual bem desenvolvido, como descrito no Artigo 2.

²¹ O perfil dos alunos participantes da pesquisa está descrito na introdução deste relatório de pesquisa.

Ressalta-se que o interesse em atividades de modelagem não é apenas de natureza psicológica, mas se manifesta, também, mas também se manifesta na intersubjetividade entre os alunos e, entre os alunos e o mundo, promovidos pelas atividades de modelagem.

Tendo por norte as perspectivas vigentes para o uso da modelagem em contextos educacionais (Blum, 2015), vê-se que os aspectos nesta pesquisa caracterizados, o uso da matemática, as reflexões proporcionadas pelas atividades de modelagem e a mobilização do interesse, podem ser aspectos transversais à cada uma das perspectivas para contextos educacionais. Ou seja, os pares compostos por finalidade e exemplo de Blum (2015), bem como às razões para o uso da matemática em cada uma dessas perspectivas, podem ser associados às ações que contemplam o espírito da modelagem em diferentes instâncias, sendo que cada um deles contempla de uma forma ou de outra os aspectos detalhados nos três artigos dessa pesquisa.

Por fim, no artigo 3, *Modelagem matemática para além do que se vê: do pragmático ao formativo* em que o objetivo foi *caracterizar o alcance do desenvolvimento de uma atividade de modelagem relativamente à formação dos alunos modeladores* está associado à investigação da formação possibilitada por meio das atividades de modelagem que permitem aos alunos gerarem reflexões e discussões matemáticas ou não matemáticas. Uma análise qualitativa inspirada no uso da técnica explicativa (Mayring, 2014), foi empreendida de modo a compreender como as ações dos alunos e suas reflexões no desenvolvimento da atividade permitem caracterizar o alcance das atividades de modelagem. A partir de um olhar analítico e interpretativo dois cenários foram investigados, nos quais diferentes ações e reflexões possibilitaram detalhar discussões matemáticas e não matemáticas que as atividades proporcionaram aos alunos.

As discussões dos alunos podem ser caracterizadas em reflexões internas (Elicer; Blomhøj, 2022) e reflexões externas (Blomhøj; Kjeldsen, 2011) ao processo de modelagem. Como cada atividade de modelagem depende do contexto em que é desenvolvida, é a partir das discussões e ações dos alunos em seu desenvolvimento que se faz possível a caracterização do alcance da atividade de modelagem. Assim, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem oferece uma formação matemática, bem como uma formação para a vida, visto que seu raio de alcance está para além da instrumentalização matemática, mas também compartilha de aspectos de alcance social, cultural, econômico e político.

Em menor ou maior abrangência, a investigação das ações e das reflexões promovidas pela modelagem pode estar associada à uma filosofia da educação baseada

em evidências (Biesta, 2010), com potencial para promover reflexões internas ao processo de modelagem, bem como para o desenvolvimento de competências relativas à matemática ou a própria modelagem, ou ainda, proporcionar uma formação para a vida (Biesta, 2010), que contempla aspectos formativos que não são visíveis e que permite a ação do sujeito na sociedade e sua participação no debate político, econômico e cultural da comunidade em que se vive mediante o desenvolvimento de atividades de modelagem, ou seja, a modelagem favorece o *Bildung*, uma formação para a vida.

A busca por evidenciar a modelagem em ação e o alcance da formação oportunizada por meio do desenvolvimento de atividades deste tipo se assenta, ainda, na base filosófica defendida por Biesta (2010, 2018) que concebe uma formação para a vida (*bildung*) em que a formação é um modo de ser no mundo, que considera o engajamento dos alunos com a modelagem promovendo o estabelecimento de uso da modelagem para ser e estar no mundo, colaborando com sua formação e identificação enquanto ser crítico e autônomo, visando os ideais educacionais.

Assim, ao concluir que a formação promovida pela modelagem contempla aspectos como a construção de modelos matemáticos, defende-se também os usos da matemática para compreender que um dos papéis da modelagem é fornecer condições para que modos de ver o mundo sejam refinados, alterados e coloquem os alunos em ação na sociedade. Os usos da matemática podem permitir, assim, a mobilização de preferências e experiências dos alunos com a matemática – aquilo que eles trazem consigo de conhecimentos prévios, ou ainda, usos convencionados que precisam ser apreendidos para ler e interpretar o mundo a partir da matemática – para sua prática acadêmica ou profissional, como investigado no Artigo 1.

A modelagem também está relacionada à potencialidade das atividades de mobilização e desenvolvimento do interesse dos alunos com relação ao próprio fazer modelagem, ou ao que as discussões que as atividades de modelagem proporcionam, discussões essas que podem ser matemáticas, da realidade investigada ou de temas que extrapolam a situação-problema sob investigação, como evidenciado pelo Artigo 2 que aponta a mobilização do interesse dos alunos a partir do desenvolvimento gradativo de atividades de modelagem.

No que tange ao alcance das atividades de modelagem, estas podem viabilizar para os alunos reflexões internas às atividades de modelagem e aos requisitos para solucionar os problemas, ou, ainda, reflexões externas à modelagem, ou seja, ao alcance social, cultural, político e emancipatório que estas atividades proporcionam aos alunos

ganham espaço e colaboram com a discussão sobre o papel emancipatório da modelagem, bem como com suas possibilidades para o desenvolvimento da criticidade e ação no mundo. As asserções de Fredj e Vos (2023) sobre o *espírito da modelagem*, já pautavam a construção sociocultural que se dá na interação e conexão dos indivíduos e seu ambiente social e cultural, e nas possibilidades de ação e reflexões que a modelagem proporciona na qualificação dos alunos ao indicar a formação para a vida. Por exemplo, a discussão política, econômica e social da viabilidade de inserção de um restaurante em uma universidade pode envolver diferentes campos da sociedade e proporcionar a discussão qualificada em diferentes esferas sobre as necessidades de uma comunidade e de como uma atividade de modelagem pode ter um alcance para além da prática de modelagem, como descrito no Artigo 3.

Neste contexto, a partir da investigação realizada nesta tese é possível caracterizar que a modelagem contribui com a formação dos alunos por meio de aspectos que dizem respeito à formação matemática dos sujeitos, à formação para além da matemática e ao desenvolvimento do interesse quando lidam com atividades dessa natureza.

Na pesquisa identificamos, ainda, que as ações envolvidas na matematização, as reflexões potencializadas pelas atividades de modelagem e o interesse mobilizado pelas atividades podem ser investigados ao considerar a formação do sujeito em modelagem, bem como ao vislumbrar a formação do sujeito para o uso da modelagem em ambientes educacionais. Essa pesquisa se debruçou sobre o primeiro tipo de formação, sendo que a formação para o uso em contextos educacionais, considerando estes três aspectos pode ser pauta de pesquisas futuras que articulem esses aspectos à formação dos sujeitos para a vida.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

BIESTA, G. Why ‘what works’ still won’t work. From evidence-based education to value-based education. **Studies in Philosophy and Education**, v.29, n.5, p.491–503, 2010.

BIESTA, G. Medir o que valorizamos ou valorizar o que medimos? Globalização, responsabilidade e a noção de propósito da educação. **Revista Educação Especial**, v.31, n.63, p.815–832, 2018.

BLOMHØJ, M.; KJELDSEN, T. H. Students' reflections in mathematical modelling projects. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (Eds.). **ICTMA 14: Trends in teaching and learning of mathematical modelling**, p.385-396), Springer, 2011.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, p. 73-96, 2015.

CEVIKBAS, M.; KAISER, G.; SCHUKAJLOW, S. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. **Educational Studies in Mathematics**, v.109, n.2, p. 205-236, 2021.

CZOCHER, J. A. **Toward a description of how engineering students think mathematically**. (Doctoral dissertation), Ohio State University, 2013

ELICER, R.; BLOMHØJ, M. Mathematics in Action: On the *Who, Where* and *How* of the Constructions and Use of Mathematical Models in Society. In: JANKVIST, U.T.; GERANIOU, E. (eds) **Mathematical Competencies in the Digital Era**. Mathematics Education in the Digital Era, v. 20. Springer, Cham., 2020.

FREJD, P.; VOS, P. The spirit of mathematical modeling - a philosophical study on the occasion of 50 years of mathematical modeling education. **The Mathematics Enthusiast**, v.21, n.1e2, p.269-300, 2023

MAAß, K. What are modelling competences? **ZDM**, v.38, n.2, 2006.

MAYRING, P. **Qualitative content analysis** - theoretical foundation, basic procedures and software solution, 2014

NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. London: Routledge, 2020.

ANEXOS

ANEXO A

QUESTIONÁRIO DE PERFIL E TERMO DE CONSENTIMENTO PARA USO NA PESQUISA

1) Dados pessoais do respondente: (Os dados preenchidos nesta página não serão divulgados. Servem apenas para esclarecimento para eventuais dúvidas do pesquisador).		
Nome:		
Endereço:		
Telefone:	E-mail:	
Data de Nascimento:	Idade:	Gênero: () M () F
2) Formação acadêmica:		
Curso de Graduação:		
3) Possui pós-graduação?		
() Especialização	Área:	
() PDE	Área:	
() Mestrado	Área:	
() Doutorado	Área:	
4) Experiência de trabalho: Docência		
Tempos (em anos):	Séries trabalhadas:	
() Rede Estadual de Ensino / Municipal	() Rede particular de ensino	
Turmas em que trabalha atualmente:	Número de alunos das respectivas turmas:	
5) Experiência de trabalho: Outras áreas		
Tempo (em anos):	Área de atuação:	
6) Já teve contato com disciplinas de matemática que abordaram a resolução de problemas reais?		
() sim	() não	
7) O que lhe motivou a se inscrever no curso de extensão?		
8) Para você que relações há entre a matemática e a sua formação profissional?		

9) O que você considera mais importante para a resolução de um problema?	
10) Consentimento	
Diante do compromisso ético de mantermos preservada sua identidade, você concorda em participar desta pesquisa uma vez que os dados coletados serão objeto de estudo e poderão ser divulgados em futuras publicações científicas? () Sim () Não	
_____ Assinatura R.G. ou C.P.F. _____	
11) Para uso do pesquisador	
Local:	Data:
Código do respondente (para controle do pesquisador):	

ANEXO B

QUESTIONÁRIO PÓS-ATIVIDADE

Nome:
1) O que você aprendeu com esta atividade? Aponte as suas dificuldades, o que você gostou e o que você não gostou nesta atividade.
2) Para resolver esta situação-problema que aspecto para você foi o mais importante?
3) Que ideias você indicou? Como você colaborou no desenvolvimento da atividade?
4) O que você considera fundamental na elaboração do modelo matemático do problema investigado?
6) O que significou para você essa atividade? Que importância você atribui a ela? Explique.
7) Explique como você utilizou os recursos (computador, softwares, calculadora, régua, etc...) nesta atividade. Qual foi o mais importante? Por quê?
8) Para a construção do modelo matemático desta atividade o que o grupo considerou? Que características da realidade foram levadas em conta? Elas foram incorporadas no modelo matemático? Quais características foram simplificadas?