



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA

**POTÊNCIA FRACIONÁRIA DO OPERADOR
LAPLACIANO COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE
DIRICHLET**

Londrina
2015

MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA

**POTÊNCIA FRACIONÁRIA DO OPERADOR
LAPLACIANO COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE
DIRICHLET**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Michele de Oliveira Alves

Londrina
2015

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586p Silva, Maurício Barbosa da.

Potência fracionária do operador laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet / Maurício Barbosa da Silva. – Londrina, 2015.
73 f.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais – Teses. 2. Operador laplaciano – Teses. 3. Dirichlet, Problemas – Teses. 4. Bessel, Funções de – Teses. 5. Sobolev, Espaços de – Teses. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 517.95

MAURÍCIO BARBOSA DA SILVA

**POTÊNCIA FRACIONÁRIA DO OPERADOR
LAPLACIANO COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA DE
DIRICHLET**

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Universidade Estadual Paulista - UNESP

Londrina, 31 de Julho de 2015.

Dedico este trabalho a Robson Gaebler

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram, diretamente ou indiretamente, para a construção deste trabalho. Em especial, a professora Michele, que me orientou e ajudou a compreender a potência fracionária do Laplaciano.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

SILVA, Maurício Barbosa da. **Potência Fracionária do Operador Laplaciano com condição de Fronteira de Dirichlet**. 2015. 74. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

O trabalho em questão tem como objetivo apresentar um breve estudo sobre o operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, bem como a definição de sua potência fracionária e de seu operador inverso através do método de extensão α -harmônica. Para tal, foram usados alguns resultados de teoria do traço, funções de Bessel modificadas e os espaços de Sobolev H^s , com $s > 0$.

Palavras-chave: Operador. Laplaciano. Potência Fracionária. Extensão α -harmônica. Dirichlet.

SILVA, Maurício Barbosa da. **Fractional power of Laplacian operator with condition Border Dirichlet**. 2015. 74. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

The following work has a objective to present a brief study about the Laplacian operator with Dirichlet boundary condition, the definition its fractional power and inverse operator with the α -harmonic extension method. For this, were used some results of theory of trace, modified Bessel functions and the Sobolev spaces H^s , with $s > 0$.

Keywords: Operator. Laplacian. Fractional Power. α -harmonic Extension. Dirichlet.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	10
1 INTRODUÇÃO	12
2 PRELIMINARES	15
2.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS AUXILIARES	15
2.2 OS ESPAÇOS DE FUNÇÕES H^s COM $s > 0$	21
3 CÁLCULO FUNCIONAL	26
3.1 ESTUDO DO OPERADOR $-\Delta$	26
3.2 A POTÊNCIA FRACIONÁRIA DO OPERADOR $-\Delta$	31
4 A EXTENSÃO α-HARMÔNICA	36
4.1 ESPAÇO $\mathcal{V}_0(\Omega)$	36
4.2 A EXTENSÃO α -HARMÔNICA	39
5 O OPERADOR A_α E SEU INVERSO	62
5.1 DEFININDO O OPERADOR A_α	62
5.2 DEFININDO O OPERADOR B_α INVERSO DE A_α	67
REFERÊNCIAS	72

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ	operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet
φ_i	autofunção do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet para $i \in \mathbb{N}$
Ω	subconjunto do \mathbb{R}^n aberto, limitado e com fronteira de classe C^∞
\mathbb{R}_+^{n+1}	conjunto dos pares (x, y) tal que $x \in \mathbb{R}^n$ e $y > 0$
\mathcal{C}	subconjunto do \mathbb{R}_+^{n+1} dado por $\mathcal{C} = \Omega \times (0, \infty)$
$m(X)$	medida de Lebesgue do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$
∂X	fronteira do conjunto X
\overline{X}	fecho do conjunto X
X'	conjunto dos funcionais lineares limitados definidos em X
\mathbb{K}	corpo \mathbb{R} dos números reais ou o corpo \mathbb{C} dos números complexos
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$C^j(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ j vezes diferenciáveis
$C^\infty(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$L_{loc}^p(\Omega)$	espaço das funções $f \in L^p(\Omega)$ tal que $ f ^p$ é localmente integrável em Ω
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev usual
$H^m(\Omega)$	espaço $W^{m,p}(\Omega)$ para $p = 2$
$H^0(\Omega)$	espaço $L^2(\Omega)$
I	operador identidade
$D(A)$	domínio do operador A
$R(A)$	imagem do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\sigma(A)$	espectro do operador A
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	norma usual em $L^2(\Omega)$

$\ \cdot\ _{H^1(\Omega)}$	norma em $H^1(\Omega)$ dada por $\ u\ _{H^1(\Omega)}^2 = \ \nabla u\ _{L^2(\Omega)}^2 + \ u\ _{L^2(\Omega)}^2$
i	unidade imaginária
Γ	função gama
I_p	função de bessel modificada de primeiro tipo de ordem $p \in \mathbb{R}$
K_p	função de bessel modificada de segundo tipo de ordem $p \in \mathbb{R}$
$\arg(z)$	argumento do número complexo z
$\Im(z)$	parte imaginária do número complexo z
$\Re(z)$	parte real do número complexo z
Tr_Ω	operador traço sobre Ω
\longrightarrow	convergência forte
\rightharpoonup	convergência fraca
\hookrightarrow	imersão contínua
\xhookrightarrow{c}	imersão compacta

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, exibindo a definição da sua potência fracionária $(-\Delta)^\alpha$ para $0 < \alpha < 1$, através de uma série de autofunções e via método de extensão α -harmônica.

Para definirmos a potência fracionária do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet através do método de extensão α -harmônica fez-se necessário o estudo da existência e unicidade de solução de um problema de extensão α -harmônica. Este estudo foi feito e com ele mostramos que este problema apresenta como única solução a combinação linear das funções de Bessel Modificadas.

Depois de feitas as considerações sobre o operador $(-\Delta)^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$, também apresentamos a definição de seu operador inverso e mostramos que este é um operador auto-adjunto e compacto. Para isto, foram usadas, principalmente, as idéias e resultados de [6] e [9].

O estudo da definição da potência fracionária do operador Laplaciano através do método de extensão α -harmônica tem crescido muito nos últimos anos. Estudos iniciais sobre a potência fracionária do operador Laplaciano podem ser encontrados, por exemplo, em [10], onde o autor considerou funções cujo domínio é o conjunto \mathbb{R}^n .

Posteriormente, em [9], estudou-se a raiz quadrada do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet em domínios limitados e suaves de \mathbb{R}^n . Neste trabalho o autor considerou o problema de extensão harmônica no cilindro $\mathcal{C} = \Omega \times (0, \infty)$ onde Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^n limitado e suave.

Seguindo a mesma idéia de [9], podemos encontrar, por exemplo, em [23] um estudo sobre a potência fracionária do operador Laplaciano com condição de fronteira de Neumann em um domínio limitado e suave de \mathbb{R}^n definida através do método de extensão harmônica.

Nosso trabalho foi baseado em [6], onde considerou-se a potência arbitrária $\alpha \in (0, 1)$ do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet em um domínio limitado suave do \mathbb{R}^n .

O Trabalho em questão está estruturado da seguinte forma. Nas Preliminares elencamos uma série de definições e teoremas que foram usados no trabalho, dentre os quais estão algumas considerações sobre os espaços H^s com $s > 0$ e o Teorema do Traço.

Posteriormente, no Capítulo 3, abordamos a potência fracionária do operador

Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, dado por

$$\begin{aligned} -\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u \end{aligned}$$

onde seu domínio é o conjunto $D(-\Delta) = \{u \in H^2(\Omega) \mid u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado com fronteira suave e $H^2(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev. Em um primeiro momento, verificamos que o operador Laplaciano nas condições impostas apresenta várias características, tais como, ser densamente definido, simétrico e setorial. Estes e outros resultados apresentados, juntamente com a teoria espectral, nos permitiram exibir a lei de formação do operador $(-\Delta)^\alpha$ e seu domínio.

Em seguida, no Capítulo 4 estudamos o conjunto

$$\mathcal{V}_0(\Omega) = \{\text{Tr}_\Omega(v) \mid v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})\}$$

tal que $\text{Tr}_\Omega(w)$ é o traço da função w sobre Ω e

$$H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) = \overline{C_0^\infty(\mathcal{C})}^{\|\cdot\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}},$$

onde

$$\|w\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = \left(k_\alpha \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad k_\alpha = \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Verificamos que

$$\mathcal{V}_0(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}$$

em que λ_i e φ_i são respectivamente os autovalores e as autofunções do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet.

Definimos ainda a extensão α -harmônica em \mathcal{C} de uma função $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$.

Para isso fez-se necessário mostrar a existência e unicidade de solução fraca do problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(y^{1-2\alpha} \nabla w) = 0 & \text{em } \mathcal{C}, \\ w = 0 & \text{em } \partial_L \mathcal{C}, \\ \text{Tr}_\Omega(w) = u & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (P)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $\partial_L \mathcal{C} = \partial\Omega \times [0, \infty)$.

No Capítulo 5, definimos o operador

$$\begin{aligned} A_\alpha : \mathcal{V}_0(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{V}'_0(\Omega) \\ u &\longmapsto A_\alpha(u), \end{aligned}$$

de modo que $\forall g \in \mathcal{V}_0(\Omega)$

$$\langle A_\alpha(u), g \rangle := \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{g} dx dy,$$

onde w é a extensão α -harmônica de u e \tilde{g} a extensão α -harmônica de g em \mathcal{C} .

Mostramos ainda que

$$A_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j, \quad \forall u \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

Dando sequência, definimos o operador B_α por

$$\begin{aligned} B_\alpha : \mathcal{V}'_0(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{V}_0(\Omega) \\ g &\longmapsto B_\alpha(g) = \text{Tr}_\Omega(v), \end{aligned}$$

com v sendo a solução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(y^{1-2\alpha} \nabla v) = 0 \quad \text{em } \mathcal{C}, \\ v = 0 \quad \text{em } \partial_L \mathcal{C}, \\ -\frac{1}{k_\alpha} \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = g(x) \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

e mostramos que B_α é o operador inverso de A_α , auto-adjunto e compacto.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições e resultados importantes que foram utilizados no trabalho.

2.1 DEFINIÇÕES E TEOREMAS AUXILIARES

Para n inteiro positivo, consideremos

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ e } z > 0\}.$$

Seja U um subconjunto do \mathbb{R}^n . Denotaremos por $L^p(U)$ o espaço de Banach das funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, Lebesgue mensuráveis, satisfazendo,

$$\left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Em particular, o espaço $L^2(U)$ com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(U)} = \int_U u(x)v(x)dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(U)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2(U)}} = \left(\int_U |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer $u, v \in L^2(U)$, é um espaço de Hilbert.

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é densamente definido se $\overline{D(A)} = X$.*

Definição 2.2. *Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e um operador linear limitado $A : H \rightarrow H$. Dizemos que A é auto-adjunto se para quaisquer $u, v \in H$*

$$\langle Au, v \rangle_H = \langle u, Av \rangle_H.$$

Definição 2.3. *Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ linear e densamente definido. Dizemos que A é simétrico se para quaisquer $u, v \in D(A)$*

$$\langle Au, v \rangle_H = \langle u, Av \rangle_H.$$

Definição 2.4. *Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Um opera-*

Um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é dito ser monótono se

$$\langle Au, u \rangle_H \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Definição 2.5. Seja X um espaço normado. Um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dito limitado inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle A(u), u \rangle \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Se $m > 0$, então dizemos que A é positivo definido.

Definição 2.6. Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear limitado $K : X \rightarrow Y$ é dito compacto se para toda sequência limitada $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ existe uma subsequência $\{u_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\{K(u_{i_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge em Y .

Definição 2.7. Seja H um espaço de Hilbert, com produto interno dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é dito ser maximal monótono se for monótono e

$$R(I + A) = H.$$

Definição 2.8. Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é fechado se o gráfico de A

$$G(A) = \{(u, Au) \in X \times Y \mid u \in D(A)\}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$.

Definição 2.9. Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial normado complexo e $T : D(T) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que

1. Existe o operador $(T - \lambda I)^{-1}$.

2. $(T - \lambda I)^{-1}$ é um operador linear limitado.

3. O domínio de $(T - \lambda I)^{-1}$ é denso em X .

O conjunto $\rho(T)$ formado por todos os valores regulares de T é chamado conjunto resolvente de T . O conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é chamado de espectro de T .

Definição 2.10. Seja X um espaço de Banach, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é setorial se

1. A é um operador fechado, densamente definido;

2. O conjunto resolvente, $\rho(A)$, contém o setor

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\};$$

3. Vale a estimativa

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para qualquer $\lambda \in S_{a,\phi}$.

Definição 2.11. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é positivo do tipo $M \geq 1$ (ou simplesmente positivo) se:

1. A é um operador fechado, densamente definido;

2. $\mathbb{R}_+ \subset \rho(-A)$;

3. Existe $M \geq 1$ tal que

$$(1 + s)\|(sI + A)^{-1}\| \leq M,$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}_+$.

Definição 2.12. Uma série de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se normalmente convergente quando existe uma sequência de constantes $a_n \geq 0$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$.

Teorema 2.13. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é normalmente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ são uniformemente convergentes.

Demonstração. Ver Teorema 2 em [19] Capítulo 5. □

Teorema 2.14. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 com fronteira limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

onde c é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \frac{N}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Por último, se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Ver Théorème IX.25 em [7]. □

Teorema 2.15. *Seja $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert H e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, a série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i$$

converge na norma de H se, e somente se, a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

é convergente.

Demonstração. Ver Theorem 3.5-2 em [18]. □

Teorema 2.16. *Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador simétrico maximal monótono, onde H é um espaço de Hilbert. Então A é um operador auto-adjunto.*

Demonstração. Ver Teorema 1.8 em [22]. □

Teorema 2.17. *Se A é um operador setorial no espaço de Banach X com $\Re(\sigma(A)) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear, limitado e injetor em X e satisfaz $A^{-\alpha} \cdot A^{-\beta} = A^{-(\beta+\alpha)}$ sempre que $\beta > 0$ e $\alpha > 0$. Para $0 < \alpha < 1$ tem-se*

$$A^{-\alpha} = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda.$$

Demonstração. Ver Theorem 1.4.2. em [16]. □

Proposição 2.18. *Se A é um operador auto-adjunto densamente definido em um espaço de Hilbert, e se A é limitado inferiormente, então A é um operador Setorial.*

Demonstração. Ver Exemplo 2 em [16] página 19. □

Teorema 2.19. *Se A é um operador auto-adjunto limitado inferiormente com a constante $m \in \mathbb{R}$, então $\sigma(A) \subset [m, +\infty)$.*

Demonstração. Ver Theorem 1.2.13 em [14]. □

Definição 2.20. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser:*

(i) *contínua se existe uma constante C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

(ii) *coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in X.$$

Teorema 2.21. (Lax-Milgran) *Seja $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma bilinear coerciva e contínua no espaço de Hilbert H . Então, para cada $f \in H'$ existe um único $z \in H$ tal que*

$$f(x) = a(x, z), \quad \forall x \in H.$$

Demonstração. Ver Corollary 5.8 em [8]. □

Teorema 2.22. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então, o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } U, \quad u \in W_0^{1,2}(U)$$

possui um número infinito e enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

tais que

$$\lambda_j \rightarrow +\infty,$$

e autofunções u_i que constituem uma base ortonormal completa de $L^2(U)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

para todo $v \in L^2(U)$.

Demonstração. Ver Theorem 8.5.1 em [17]. □

Teorema 2.23. (Lei de Weyl) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado conexo e*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

os autovalores de Dirichlet do Laplaciano em Ω . Então,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{4\pi j/A} = 1,$$

onde A é a área de Ω . Mais geralmente, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, então

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j}{4\pi^2 \left(\frac{j}{\omega_n V}\right)^{2/n}} = 1,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^n e V é o volume de Ω .

Demonstração. Veja [28] ou [13], pág. 429 - 443 □

Teorema 2.24. (Du Bois Raymond) Seja $u \in L^p_{loc}(U)$ tal que

$$\int_U u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U),$$

então $u = 0$ quase sempre em U .

Demonstração. Ver Proposição 4 em [12]. □

Teorema 2.25. (Desigualdade de Poincaré) Suponhamos que U seja um conjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n . Então, para todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante c_p , tal que

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(U)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(U).$$

Demonstração. Ver Corolário IX.19 em [7]. □

Teorema 2.26. (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(U)$ e $g \in L^{p'}(U)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então $fg \in L^1(U)$ e

$$\int_U |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(U)} \|g\|_{L^{p'}(U)}.$$

Demonstração. Ver Teorema IV.6 em [7]. □

Teorema 2.27. (Fórmula de Green) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira ∂U suave. Se $u, v \in H^2(U)$, então

$$-\int_U (\Delta u)v dx = \int_U \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS$$

onde ν representa o vetor normal unitário exterior a ∂U e $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ a derivada normal da função u .

Demonstração. Ver Propriedade (iii) em [8] página 316. □

Teorema 2.28. A função Gama dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0,$$

satisfaz

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)}.$$

Demonstração. Ver Teorema 2.12 em [25]. □

Teorema 2.29. *A equação*

$$v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s) \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2}\right) = 0 \quad (2.1)$$

é denominada "equação de Bessel modificada" e apresenta como soluções linearmente independentes as funções

$$I_\alpha(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\Gamma(\alpha+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\alpha} \quad e \quad K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\text{sen}(\alpha\pi)}.$$

Elas são chamadas "funções de Bessel modificadas". A combinação linear de tais funções é a solução geral da equação (2.1).

Teorema 2.30. *As funções de Bessel modificadas I_α e K_α apresentam o seguinte comportamento assintótico,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(x)}{\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}} = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K_\alpha(x)}{\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}} = 1.$$

Demonstração. Ver Theorem 4.21 em [5]. □

Teorema 2.31. *A função de Bessel modificada K_α satisfaz a seguinte propriedade,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{K_\alpha(x)}{\frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha}} = 1$$

Demonstração. Ver Propriedade 9.6.9 em [1]. □

Teorema 2.32. *A função de Bessel modificada K_α apresenta a seguinte propriedade,*

$$\frac{d}{dy} \{y^n K_n(y)\} = -y^n K_{n-1}(y)$$

para todo n não necessariamente inteiro.

Demonstração. Ver Theorem 4.16 em [5]. □

2.2 OS ESPAÇOS DE FUNÇÕES H^s COM $s > 0$

Vejamos agora algumas definições e resultados envolvendo os espaços H^s com $s > 0$. Os conceitos que seguem podem ser encontrados em [3].

Definição 2.33. O conjunto $S = S(\mathbb{R}^n)$ das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\eta \delta^\beta f(x)| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices $\eta, \beta \in \mathbb{N}^n$, é chamado espaço de Schwartz. Denotaremos o dual de $S(\mathbb{R}^n)$ por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.34. 1. Se $s \in \mathbb{Z}_+$, os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ são os espaços de Sobolev definidos como

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\eta| \leq s} \|D^\eta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

2. Se $s > 0$ não inteiro, os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ são os espaços de Slobodeckij dados por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2)^{\frac{s}{2}} Ff\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

para qualquer $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e F é a transformada de Fourier em \mathbb{R}^n .

Tendo definido os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s > 0$, podemos, então definir os espaços $H^s(U)$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto arbitrário, como segue.

Definição 2.35. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto arbitrário.

1. Se $s \in \mathbb{Z}_+$, os espaços de Sobolev $H^s(U)$ são definidos como

$$H^s(U) = \{f \in L^2(U) \mid \exists g \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ com } g(x) = f(x), \forall x \in U\},$$

com a norma

$$\|f\|_{H^s(U)} = \inf_{\substack{g|_U=f \\ g \in H^s(\mathbb{R}^n)}} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

para qualquer $f \in H^s(U)$.

2. Se $s > 0$ não inteiro, os espaços de Slobodeckij $H^s(U)$ são definidos como

$$H^s(U) = \{f \in L^2(U) \mid \exists g \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ com } g(x) = f(x), \forall x \in U\},$$

com a norma

$$\|f\|_{H^s(U)} = \inf_{\substack{g|_U=f \\ g \in H^s(\mathbb{R}^n)}} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

para qualquer $f \in H^s(U)$.

Quando o conjunto U é limitado e de classe C^∞ , os espaços $H^s(U)$ apresentam a seguinte caracterização.

Lema 2.36. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado de classe C^∞ ,*

$$D(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty \text{ com suporte compacto}\}$$

e $D'(U)$ o dual de $D(U)$.

1. Se $s \in \mathbb{Z}_+$, então

$$H^s(U) = \{f \in D'(U) \mid \|f\|_{H^s(U)} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{H^s(U)} = \left(\|f\|_{L^2(U)}^2 + \sum_{|\eta|=s} \|D^\eta f\|_{L^2(U)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Se $s > 0$ não inteiro, então

$$H^s(U) = \{f \in D'(U) \mid \|f\|_{H^s(U)} < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_{H^s(U)} = \left(\|f\|_{L^2(U)}^2 + \sum_{|\eta|=[s]} \int_{U \times U} \frac{|D^\eta f(x) - D^\eta f(y)|^2}{|x - y|^{n+2\{s\}}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer $f \in H^s(U)$, onde $s = [s] + \{s\}$ com $[s]$ inteiro e $\{s\} \in [0, 1)$.

Demonstração. Para o Item 1. ver Theorem 4.2.4 em [27] e para o Item 2. ver Remark 2. em [27]. □

Teorema 2.37. *(Teorema do traço em \mathbb{R}^n)* Sejam $s = 1, 2, \dots$ e $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Então, existe uma aplicação linear, contínua,

$$\begin{aligned} \text{Tr} : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{s-1} H^{s-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\longmapsto \text{Tr}(u) = \left\{ u(x, 0), \frac{\partial u}{\partial x_n}(x, 0), \dots, \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x_n^{s-1}}(x, 0) \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Ver Theorem 2.9.1 em [27]. □

Observação 2.38. O teorema anterior é válido para $s > 0$ não necessariamente inteiro, desde que $s - j - \frac{1}{2}$ não seja inteiro.

Teorema 2.39. (Teorema do traço em U) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto C^∞ -limitado e $\frac{1}{2} < s < \infty$. Então, existe uma aplicação linear, contínua,

$$\begin{aligned} \text{Tr} : H^s(U) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{[s-\frac{1}{2}]^-} H^{s-j-\frac{1}{2}}(\partial U) \\ u &\longmapsto \text{Tr}(u) = \left\{ u|_{\partial U}, \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial U}, \dots, \frac{\partial^{[s-\frac{1}{2}]^-} u}{\partial \nu^{[s-\frac{1}{2}]^-}} \Big|_{\partial U} \right\}, \end{aligned}$$

onde ν é o vetor normal exterior em relação a fronteira ∂U e $[s - \frac{1}{2}]^-$ é a parte inteira do número $s - \frac{1}{2}$.

Demonstração. Ver Theorem 4.7.1 em [27]. □

Lema 2.40. Seja $u \in H^s(U \times (0, \infty))$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $s > 0$. Então,

$$\text{Tr}(u) = u(x, 0) \in H^{s-\frac{1}{2}}(U \times \{0\})$$

e existe um $C > 0$ tal que

$$\|\text{Tr}(u)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(U \times \{0\})} \leq C \|u\|_{H^s(U \times (0, \infty))}.$$

Demonstração. Ver Lema 2 em [3]. □

Definimos o espaço

$$H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) = \overline{C_0^\infty(\mathcal{C})}^{\|\cdot\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}},$$

com a norma

$$\|w\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = \left(k_\alpha \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$k_\alpha = \frac{2^{1-2\alpha}\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

O conjunto $H(\Omega, \alpha)$ é dado por

$$H(\Omega, \alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}$$

onde o mesmo, munido da norma

$$\|u\|_{H(\Omega, \alpha)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle u, \varphi_j \rangle^2 \right)^{1/2},$$

é um espaço de Banach, vide [11].

3 CÁLCULO FUNCIONAL

3.1 ESTUDO DO OPERADOR $-\Delta$

Considere o operador

$$\begin{aligned} -\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u, \end{aligned}$$

onde, o seu domínio é o conjunto

$$D(-\Delta) = \{u \in H^2(\Omega) \mid u = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira de classe C^∞ .

Lema 3.1. *O operador $-\Delta$ é densamente definido, simétrico e maximal monótono.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que o operador $-\Delta$ é densamente definido.

Seja $u \in L^2(\Omega)$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, segue que existe $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ em $L^2(\Omega)$. Observe que se

$$u_n \in C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega), \forall n \in \mathbb{N},$$

então $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ e $u_n \in H^2(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $u_n \in D(-\Delta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Com isso, temos que $\overline{D(-\Delta)} = L^2(\Omega)$, ou seja, $-\Delta$ é um operador densamente definido.

Vejamos agora que $-\Delta$ é um operador simétrico. Sejam $u, v \in D(-\Delta)$. Pela Fórmula de Green (Teorema 2.27) e usando que $u = v = 0$ em $\partial\Omega$ temos que:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\Delta u(x))v(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)dS \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)u(x)dS \\ &= \int_{\Omega} u(x)(-\Delta v(x))dx \\ &= \langle u, -\Delta v \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo, $-\Delta$ é um operador simétrico. Note ainda que

$$\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq 0, \quad \forall u \in D(-\Delta),$$

ou seja, $-\Delta$ é um operador monótono. Mostraremos agora que $-\Delta$ é maximal monótono. Seja $g \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $u \in D(-\Delta)$ tal que $(I - \Delta)u = g$.

Considere $a : \Xi \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

onde $\Xi = \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ é um espaço de Hilbert. A função a é bilinear e usando a desigualdade de Hölder, para qualquer $u, v \in \Xi$ vale que:

1.

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| dx + \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= 2\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

2.

$$|a(u, u)| = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Por 1. e 2., temos que a é limitada e coerciva, respectivamente.

Então, tomando $F : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(v) = \int_{\Omega} g(x)v(x) dx,$$

para qualquer $v \in \Xi$, temos que $F \in \Xi'$ e pelo Teorema de Lax Milgram (Teorema 2.21), segue que existe uma única função $u \in \Xi$ tal que

$$F(v) = a(v, u), \quad \forall v \in \Xi,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} g(x)v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx + \int_{\Omega} v(x)u(x) dx, \quad \forall v \in \Xi.$$

Então, pelo Teorema 2.14, temos que $u \in H^2(\Omega)$ e ainda, usando a Fórmula de Green (Teorema 2.27), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g(x)v(x)dx &= - \int_{\Omega} (\Delta u(x))v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)v(x)dS + \int_{\Omega} v(x)u(x)dx \\
&= - \int_{\Omega} (\Delta u(x))v(x)dx + \int_{\Omega} v(x)u(x)dx, \quad \forall v \in \Xi.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\Omega} [\Delta u(x) - u(x) + g(x)]v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \Xi. \quad (3.1)$$

Em particular, para $v \in C_0^\infty \subset \Xi$, segue em (3.1), juntamente com o Teorema de Du Bois Raymond (Teorema 2.24), que

$$\Delta u - u + g = 0 \text{ quase sempre em } \Omega, \text{ ou seja, } u - \Delta u = g \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Logo, $R(I - \Delta) = L^2(\Omega)$, assim, o operador $-\Delta$ é maximal monótono. \square

Proposição 3.2. *O operador $-\Delta$ é um operador auto-adjunto.*

Demonstração. A demonstração segue do Lema 3.1 e do Teorema 2.16. \square

Proposição 3.3. *O operador $-\Delta$ é limitado inferiormente, isto é, existe $m \in \mathbb{R}_+$ tal que para qualquer $u \in D(-\Delta)$, vale*

$$\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq m \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração. Para qualquer $u \in D(-\Delta)$, segue da Desigualdade de Poincaré (Teorema 2.25) que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

e então

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq b \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

onde $b = \frac{1}{c} > 0$.

Por outro lado, pela Fórmula de Green (Teorema 2.27) temos que

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)} &= - \int_{\Omega} (\Delta u(x))u(x)dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)u(x)dS \\
&= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)dx \\
&= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq m \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in D(-\Delta), \quad \text{com } m = b^2.$$

□

Teorema 3.4. *O operador $-\Delta$ é um operador positivo do tipo M .*

Demonstração. Pela Proposição 2.18 temos que $-\Delta$ é um operador setorial e pelo Teorema 2.19, que $\sigma(-\Delta) \subset [m, +\infty)$, logo,

$$\sigma(\Delta) \subset (-\infty, -m].$$

Com isso obtemos

$$[0, +\infty) \subset \rho(\Delta).$$

Sabemos ainda, pelo fato do operador $-\Delta$ ser setorial, que $-\Delta$ é fechado, densamente definido e para algum $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $\widetilde{M} \geq 1$, vale que

$$S_{m,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |\arg(\lambda - m)| \leq \pi, \lambda \neq m\} \subset \rho(-\Delta)$$

e

$$\|(\lambda I + \Delta)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\widetilde{M}}{|\lambda - m|},$$

para qualquer $\lambda \in S_{m,\phi}$.

Assim, dado $s \in \mathbb{R}_+$ temos, pelo fato de $m > 0$, que $\lambda = -s \in \mathbb{R}_- \subset S_{m,\phi}$, logo,

$$\|(sI - \Delta)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\widetilde{M}}{|s + m|}.$$

Então,

$$(1 + s) \|(sI - \Delta)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{M} \left[\frac{1}{|s + m|} + \frac{s}{|s + m|} \right] \leq \widetilde{M} \left[\frac{1}{m} + 1 \right].$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}_+$, ou seja, existe $M \geq 1$, onde

$$M = \frac{(1 + m)\widetilde{M}}{m},$$

tal que

$$(1 + s)\|(sI - \Delta)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq M,$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}_+$. Portanto, $-\Delta$ é um operador positivo do tipo M . □

3.2 A POTÊNCIA FRACIONÁRIA DO OPERADOR $-\Delta$

Nesta seção escreveremos $(-\Delta)^\alpha$ como uma série de Fourier e caracterizaremos o conjunto $D((-\Delta)^\alpha)$. Para tal, usaremos a teoria de cálculo funcional de [16] e [24].

Pela Proposição 2.18, temos que o operador $-\Delta$ é setorial em $D(-\Delta) \subset L^2(\Omega)$ e $\Re(\sigma(-\Delta)) > 0$, então pelo Teorema 2.17 temos que

$$(-\Delta)^{-\alpha} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

é um operador linear, limitado tal que, para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$(-\Delta)^{-\alpha} = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I - \Delta)^{-1} d\lambda.$$

Proposição 3.5. *Para qualquer $u \in D((-\Delta)^\alpha)$, temos que*

$$(-\Delta)^\alpha u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i,$$

onde $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é um sistema ortogonal completo de $L^2(\Omega)$, formado pelas autofunções do operador $-\Delta$ com condição de Dirichlet e $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ são os respectivos autovalores.

Demonstração. Seja φ_i autofunção do operador $-\Delta$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Como $\varphi_i \in D(-\Delta) \subset L^2(\Omega)$, temos que

$$(-\Delta)^{-\alpha} \varphi_i = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I - \Delta)^{-1} \varphi_i d\lambda.$$

Mas,

$$-\Delta \varphi_i = \lambda_i \varphi_i,$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$ e como $\lambda \in [0, \infty) \subset \rho(\Delta)$, temos que

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} \varphi_i = \frac{1}{\lambda + \lambda_i} \varphi_i,$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Então,

$$(-\Delta)^{-\alpha} \varphi_i = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \varphi_i \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}}{\lambda + \lambda_i} d\lambda = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\alpha}}{\frac{\lambda}{\lambda_i} + 1} d\lambda.$$

Colocando $z = \frac{\lambda}{\lambda_i}$, temos que $(z\lambda_i)^{-\alpha} = \lambda^{-\alpha}$ e $\lambda_i dz = d\lambda$, assim

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{-\alpha}\varphi_i &= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)}{\pi} \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \int_0^\infty \frac{(z\lambda_i)^{-\alpha}\lambda_i}{z+1} dz \\
&= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)\varphi_i\lambda_i^{-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-\alpha}}{z+1} dz \\
&= \frac{\text{sen}(\pi\alpha)\varphi_i\lambda_i^{-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-\alpha+1-1}}{z+1} dz.
\end{aligned}$$

Colocando $\beta = -\alpha + 1$, temos que

$$(-\Delta)^{-\alpha}\varphi_i = \frac{\text{sen}(\pi\alpha)\varphi_i\lambda_i^{-\alpha}}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{\beta-1}}{z+1} dz. \quad (3.2)$$

Note que a integral acima pode ser representada do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{z^{\beta-1}}{z+1} dz &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-v} \frac{z^{\beta-1}}{z+1} dz dv, \quad \text{pois} \\
\int_0^\infty e^{-v} dv &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-v} dv = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-v}]_0^b = 1.
\end{aligned}$$

Desta forma, tomando $v = s + t$ e $z = \frac{t}{s}$, segue que

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{array} \right| = \frac{s+t}{s^2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{z^{\beta-1}}{z+1} dz &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} \frac{\left(\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} s+t}{\frac{t}{s}+1} \frac{1}{s^2} ds dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} \frac{st^{\beta-1}}{s^{\beta-1}(t+s)} \frac{s+t}{s^2} ds dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s} e^{-t} t^{\beta-1} s^{-\beta} ds dt \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-s} s^{-\beta} ds \right) \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \right) \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-s} s^{(1-\beta)-1} ds \right) \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} dt \right) \\
&= \Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.28, concluimos que

$$\int_0^\infty \frac{z^{\beta-1}}{z+1} dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}. \quad (3.3)$$

Assim, substituindo (3.3) em (3.2), temos que

$$(-\Delta)^{-\alpha} \varphi_i = \lambda_i^{-\alpha} \varphi_i,$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$.

Seja $u \in D((-\Delta)^{-\alpha}) \subset L^2(\Omega)$, logo

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i.$$

Assim, considerando a soma parcial

$$s_m = \sum_{i=1}^m \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i,$$

e como $(-\Delta)^{-\alpha}$ é um operador linear e limitado pelo Teorema 2.17, temos que

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\alpha} u - \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-\alpha} \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i \right\|_{L^2(\Omega)} &= \| (-\Delta)^{-\alpha} u - (-\Delta)^{-\alpha} s_m \|_{L^2(\Omega)} \\ &= \| (-\Delta)^{-\alpha} (u - s_m) \|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K \| u - s_m \|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(-\Delta)^{-\alpha} u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-\alpha} \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i, \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Temos, para qualquer $u \in D((-\Delta)^\alpha)$, que $u \in R((-\Delta)^{-\alpha})$, pois, por definição

$$(-\Delta)^{-\alpha} = ((-\Delta)^\alpha)^{-1},$$

assim, dada uma função $u \in D((-\Delta)^\alpha)$, temos que

$$u = (-\Delta)^{-\alpha} (-\Delta)^\alpha u.$$

Portanto $u \in R((-\Delta)^{-\alpha})$.

Sendo assim, como $\lambda_i \neq 0$, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos pelo Lema 6.9.10 em

[24] que

$$(-\Delta)^\alpha u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i,$$

para qualquer $u \in D((-\Delta)^\alpha)$. □

Proposição 3.6. *Considere o conjunto*

$$Y = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}.$$

Então, temos que $D((-\Delta)^\alpha) = Y$.

Demonstração. Seja $u \in D((-\Delta)^\alpha)$, logo $u \in L^2(\Omega)$ e $(-\Delta)^\alpha u \in L^2(\Omega)$, ou seja, a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i$$

converge em $L^2(\Omega)$. Então, pelo Teorema 2.15, temos que a série numérica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2$$

converge. Portanto, $D((-\Delta)^\alpha) \subset Y$.

Considere $v \in Y \subset L^2(\Omega)$, então a série numérica

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} |\langle v, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2$$

é convergente. Então, novamente pelo Teorema 2.15, temos que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle v, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i$$

converge em $L^2(\Omega)$. Logo, $(-\Delta)^\alpha v \in L^2(\Omega)$, ou seja, $Y \subset D((-\Delta)^\alpha)$. Portanto, $Y = D((-\Delta)^\alpha)$. □

Sendo assim, concluímos o seguinte Teorema.

Teorema 3.7. *Seja $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a base ortonormal completa de $L^2(\Omega)$ formada pelas autofunções do operador $-\Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet em Ω e $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ os respectivos autovalores. Então,*

1.

$$D((-\Delta)^\alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}.$$

2. O operador $(-\Delta)^\alpha : D((-\Delta)^\alpha) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é dado por

$$(-\Delta)^\alpha u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i.$$

4 A EXTENSÃO α -HARMÔNICA

Sendo $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{C} = \Omega \times (0, \infty)$ e $\partial_L \mathcal{C} = \partial\Omega \times [0, \infty)$, definimos o conjunto

$$H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) = \overline{C_0^\infty(\mathcal{C})}^{\|\cdot\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}},$$

com a norma

$$\|w\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = \left(k_\alpha \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$k_\alpha = \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

O conjunto $H(\Omega, \alpha)$ é dado por

$$H(\Omega, \alpha) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}$$

onde o mesmo, munido da norma

$$\|u\|_{H(\Omega, \alpha)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

é um espaço de Banach.

4.1 ESPAÇO $\mathcal{V}_0(\Omega)$

Nesta seção estudaremos algumas propriedades do espaço

$$\mathcal{V}_0(\Omega) = \{ \text{Tr}_\Omega(v) \mid v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \},$$

onde Tr_Ω é o operador traço sobre Ω e $\mathcal{C} = \Omega \times (0, \infty)$.

Lema 4.1. $\mathcal{V}_0(\Omega) \subset H^\alpha(\Omega)$, onde $H^\alpha(\Omega)$ é o espaço de funções em $L^2(\Omega)$ com a seguinte norma finita

$$\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2}.$$

Demonstração. De fato, seja $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, logo $u = \text{Tr}_\Omega(v)$ com $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$. Por [20] parágrafo 5 existe $C > 0$ tal que

$$\|z(\cdot, 0)\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} y^{1-2\alpha} (z^2 + |\nabla z|^2) dx dy, \quad (4.1)$$

para toda função z , desde que o lado direito da desigualdade seja finito.

Defina $w : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $w(x, y) = v(x, y)$ para $(x, y) \in \mathcal{C}$ e $w(x, y) = 0$ para $(x, y) \notin \mathcal{C}$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)} y^{1-2\alpha} (w^2 + |\nabla w|^2) dx dy = \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} v^2 dx dy + \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy < \infty, \quad (4.2)$$

pois pela Desigualdade de Poincaré em Ω temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v^2(x, y) dx &\leq C \int_{\Omega} |\nabla_x v(x, y)|^2 dx \\ \Rightarrow y^{1-2\alpha} \int_{\Omega} v^2(x, y) dx &\leq C y^{1-2\alpha} \int_{\Omega} |\nabla_x v(x, y)|^2 dx \\ &\leq C y^{1-2\alpha} \int_{\Omega} |\nabla_x v(x, y)|^2 dx + C y^{1-2\alpha} \int_{\Omega} |v_y(x, y)|^2 dx, \end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |v|^2 dx dy \leq C \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy < \infty. \quad (4.3)$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|w(\cdot, 0)\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left[\|w(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w(x, 0) - w(y, 0)|^2}{|(x, 0) - (y, 0)|^{n+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= \left[\|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x, 0) - v(y, 0)|^2}{|(x, 0) - (y, 0)|^{n+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2} \right]^2 = \|v(\cdot, 0)\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Portanto, trocando em (4.1) z por w , segue de (4.2) e (4.3) que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, 0)\|_{H^\alpha(\Omega)}^2 &\leq C \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |v|^2 dx dy + C \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy \\ &\leq \tilde{C} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy < \infty, \end{aligned}$$

assim, $v(\cdot, 0) \in H^\alpha(\Omega)$ e $\|v(\cdot, 0)\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq \tilde{C} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\Omega)}$. Logo, $\text{Tr}_\Omega(H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})) \subset H^\alpha(\Omega)$. Portanto, $\mathcal{V}_0(\Omega) \subset H^\alpha(\Omega)$.

□

Para a próxima proposição, utilizaremos alguns resultados de interpolação que podem ser vistos em [2], [21] e [26].

Aqui usaremos a notação apresentada em [26].

Sejam E_0 e E_1 espaços normados com normas $\|\cdot\|_0$ e $\|\cdot\|_1$, respectivamente, definimos, para $u \in E_0 + E_1$ e $t > 0$, a função

$$K(t; u) = \inf_{u=u_0+u_1} (\|u_0\|_0 + t\|u_1\|_1),$$

e para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} = \{u \in E_0 + E_1 \mid t^{-\theta} K(t; u) \in L^p(\mathbb{R}_+; dt/t)\}.$$

Sabemos pelas citações acima que $H(\Omega) = (H_0^2(\Omega), L^2(\Omega))_{\alpha, 2}$.

O espaço $H_0^\alpha(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^\alpha(\Omega)}}$ com respeito a norma

$$\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\alpha}} dx dy \right)^{1/2}$$

é dado por $H_0^\alpha(\Omega) = (H_0^2(\Omega), L^2(\Omega))_{\alpha, 2}$, para $0 < \alpha < 1, \alpha \neq \frac{1}{2}$. Temos ainda que $H_0^\alpha(\Omega) = H^\alpha(\Omega)$, para $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Proposição 4.2. $\mathcal{V}_0(\Omega) = H(\Omega, \alpha)$.

Demonstração. Para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, note que

$$H^\alpha(\Omega) = H_0^\alpha(\Omega) = (H_0^2(\Omega), L^2(\Omega))_{\alpha, 2} = H(\Omega, \alpha),$$

logo

$$\mathcal{V}_0(\Omega) = \text{Tr}_\Omega(H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})) \subset H^\alpha(\Omega) = H(\Omega, \alpha).$$

Para $\alpha = \frac{1}{2}$, a demonstração segue da Proposição 2.1 de [9].

Para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, seja $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, logo temos que $u = \text{Tr}_\Omega(v)$ com $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$. Desta forma, existe $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathcal{C})$ tal que $\|v - v_n\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Logo,

$$\|\text{Tr}_\Omega(v_n) - u\|_{H^\alpha(\Omega)} \leq C \|v - v_n\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Assim, $u \in H_0^\alpha(\Omega)$. Então, como $H_0^\alpha(\Omega) = (H_0^2(\Omega), L^2(\Omega))_{\alpha,2} = H(\Omega, \alpha)$ para $0 < \alpha < 1$, com $\alpha \neq \frac{1}{2}$, segue que $u \in H(\Omega, \alpha)$. Logo, $\mathcal{V}_0(\Omega) \subset H(\Omega, \alpha)$.

Por outro lado, se $u \in H(\Omega, \alpha)$, então pelo Teorema 4.8 existe $w = E_\alpha(u) \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$. Logo, $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, assim $H(\Omega, \alpha) \subset \mathcal{V}_0(\Omega)$. □

Lema 4.3. $\mathcal{V}_0(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{2n}{n-2\alpha}$.

Demonstração. Sabemos pelo Lema 4.1 que $\mathcal{V}_0(\Omega) \subset H^\alpha(\Omega)$, logo $\mathcal{V}_0(\Omega) \hookrightarrow H^\alpha(\Omega)$, ambos com a mesma norma.

Por outro lado,

$$H^t(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$$

se $t > 0$ e $t > n(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$. Tome $t = \alpha > 0$ e observe que

$$\alpha > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \Leftrightarrow \alpha > \frac{n}{2} - \frac{n}{q} \Leftrightarrow \frac{n}{q} > \frac{n-2\alpha}{2} \Leftrightarrow q < \frac{2n}{n-2\alpha}.$$

Logo $\mathcal{V}_0(\Omega) \hookrightarrow H^\alpha(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{2n}{n-2\alpha}$. □

4.2 A EXTENSÃO α -HARMÔNICA

Definição 4.4. Dada uma função $u \in H(\Omega, \alpha)$, definimos sua extensão α -harmônica em \mathcal{C} como sendo a função $E_\alpha(u) = w$ que é solução fraca de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(y^{1-2\alpha}\nabla w) = 0 & \text{em } \mathcal{C}, \\ w = 0 & \text{em } \partial_L\mathcal{C}, \\ \operatorname{Tr}_\Omega(w) = u & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (P_1)$$

ou seja, $w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, $\operatorname{Tr}_\Omega(w) = u$ e vale a igualdade,

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha}\nabla w \cdot \nabla \mu \, dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y^\alpha}(x, 0)\mu(x, 0) \, dx, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), \quad \text{com}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y^\alpha}(x, 0) = - \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \frac{\partial w}{\partial y}(x, y).$$

O que buscaremos a seguir é uma expressão que nos apresente o formato da extensão α -harmônica de uma dada função $u \in H(\Omega, \alpha)$. Primeiramente, vejamos o caso particular da extensão α -harmônica de uma autofunção φ_i , com $i \in \mathbb{N}$, do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet.

Lema 4.5. *Dada uma autofunção φ_i e seu respectivo autovalor λ_i , com $i \in \mathbb{N}$, do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, tem-se que sua extensão α -harmônica é a função*

$$E_\alpha(\varphi_i)(x, y) = B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y),$$

onde

$$B_{i,\alpha} = \frac{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}{\pi \lambda_i^{-\alpha/2}}$$

e K_α é a função de Bessel modificada de segundo tipo de ordem α . (Veja Teorema 2.29)

Demonstração. Seja φ_i autofunção do Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet e assumamos $w = E_\alpha(\varphi_i)$. Desta forma, a função w satisfaz as três seguintes condições:

1.

$$0 = -\text{div}(y^{1-2\alpha} \nabla w), \quad \text{ou seja,}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}(y^{1-2\alpha} \nabla w) \\ &= \text{div}(y^{1-2\alpha} (w_{x_1}, \dots, w_{x_n}, w_y)) \\ &= \text{div}((y^{1-2\alpha} w_{x_1}, \dots, y^{1-2\alpha} w_{x_n}, y^{1-2\alpha} w_y)) \\ &= (y^{1-2\alpha} w_{x_1^2} + \dots + y^{1-2\alpha} w_{x_n^2}) + (1-2\alpha) y^{-2\alpha} w_y + y^{1-2\alpha} w_{y^2} \\ &= y^{1-2\alpha} (w_{x_1^2} + \dots + w_{x_n^2}) + (1-2\alpha) y^{-2\alpha} w_y + y^{1-2\alpha} w_{y^2} \\ &= y^{1-2\alpha} [(w_{x_1^2} + \dots + w_{x_n^2}) + (1-2\alpha) y^{-1} w_y + w_{y^2}] \end{aligned}$$

Como $y > 0$, obtemos

$$\Delta_x w + \frac{(1-2\alpha)}{y} w_y + w_{y^2} = 0.$$

A fim de resolvermos a equação acima, utilizaremos o método de separação de variáveis. Para isso, suponhamos $w(x, y) = X(x)\psi(y)$. Logo,

$$\Delta_x(X\psi) + \frac{(1-2\alpha)}{y} \frac{\partial(X\psi)}{\partial y} + \frac{\partial^2(X\psi)}{\partial y^2} = 0, \quad \text{em } \mathcal{C},$$

$$\text{então } \Delta_x(X)\psi + \frac{(1-2\alpha)}{y} \frac{\partial\psi}{\partial y} X + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} X = 0, \quad \text{em } \mathcal{C},$$

$$\text{ou seja, } \frac{\Delta_x(X)}{X\psi} \psi + \frac{(1-2\alpha)}{yX\psi} \frac{\partial\psi}{\partial y} X + \frac{1}{X\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} X = 0, \quad \text{em } \mathcal{C}.$$

$$\text{Sendo assim, } \frac{\Delta_x(X)}{X} + \frac{(1-2\alpha)}{y\psi} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{em } \mathcal{C},$$

$$\text{então } \frac{(1-2\alpha)}{y\psi} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\Delta_x(X)}{X} = K, \quad \text{em } \mathcal{C},$$

com $K \in \mathbb{R}$. Desta forma

$$-\Delta_x X = KX \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{(1-2\alpha)}{y} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \psi K = 0 \quad \text{para } y > 0.$$

2. A segunda condição de (P_1) nos diz que $w = 0$ em $\partial_L \mathcal{C}$, logo

$$X(x)\psi(y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial_L \mathcal{C}.$$

Isto significa que:

$$X(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{ou} \quad \psi(y) = 0, \quad \forall y \in [0, \infty).$$

Assim, vemos que $X = 0$ em $\partial\Omega$, uma vez que procuramos uma solução não nula.

Desta forma, por 1. e 2. segue que $X = \varphi_i$ e $K = \lambda_i$, com $i \in \mathbb{N}$.

3. A terceira condição de (P_1) diz que $\text{Tr}_\Omega(w) = \varphi_i$, ou seja

$$w(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$X(x)\psi(0) = \varphi_i(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Como já sabemos que $X(x) = \varphi_i(x)$ para todo x em Ω , segue que $\psi(0) = 1$.

Com isso, concluímos de 1., 2. e 3. que a função ψ deve satisfazer

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{(1-2\alpha)}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \lambda_i \psi = 0, & y > 0, \\ \psi(0) = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Considere $\psi(y) = y^\alpha v(\lambda_i^{1/2} y)$ para $y > 0$, onde v é uma função a determinar. Logo,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y) = \alpha y^{\alpha-1} v(\lambda_i^{1/2} y) + y^\alpha v'(\lambda_i^{1/2} y) \lambda_i^{1/2} = y^\alpha \lambda_i \left[\frac{\alpha}{y \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{1}{\lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(y) &= \alpha(\alpha-1) y^{\alpha-2} v(\lambda_i^{1/2} y) + \alpha y^{\alpha-1} v'(\lambda_i^{1/2} y) \lambda_i^{1/2} + \alpha y^{\alpha-1} v'(\lambda_i^{1/2} y) \lambda_i^{1/2} \\ &\quad + y^\alpha v''(\lambda_i^{1/2} y) \lambda_i^{1/2} \lambda_i^{1/2} \end{aligned}$$

$$= y^\alpha \lambda_i \left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{y^2 \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{\alpha}{\lambda_i^{1/2} y} v'(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{\alpha}{\lambda_i^{1/2} y} v'(\lambda_i^{1/2} y) + v''(\lambda_i^{1/2} y) \right]$$

$$= y^\alpha \lambda_i \left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{y^2 \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{2\alpha}{y \lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) + v''(\lambda_i^{1/2} y) \right].$$

Assim, pela primeira condição do problema (4.4), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{(1-2\alpha)}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \lambda_i \psi \\ &= y^\alpha \lambda_i \left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{y^2 \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{2\alpha}{y \lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) + v''(\lambda_i^{1/2} y) \right] + \\ &\quad + \frac{(1-2\alpha)}{y} y^\alpha \lambda_i \left[\frac{\alpha}{y \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{1}{\lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) \right] - \lambda_i y^\alpha v(\lambda_i^{1/2} y) \\ &= y^\alpha \lambda_i \left\{ \left[\frac{(\alpha^2 - \alpha)}{y^2 \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{2\alpha}{y \lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) + v''(\lambda_i^{1/2} y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-2\alpha)}{y} \left[\frac{\alpha}{y \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{1}{\lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) \right] - v(\lambda_i^{1/2} y) \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
0 &= y^\alpha \lambda_i \left\{ \frac{(\alpha^2 - \alpha)}{y^2 \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{2\alpha}{y \lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) + v''(\lambda_i^{1/2} y) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha)}{y} \frac{\alpha}{y \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{1 - 2\alpha}{y} \frac{1}{\lambda_i^{1/2}} v'(\lambda_i^{1/2} y) - v(\lambda_i^{1/2} y) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(\lambda_i^{1/2} y) + v'(\lambda_i^{1/2} y) \left(\frac{2\alpha}{y \lambda_i^{1/2}} + \frac{(1 - 2\alpha)}{y \lambda_i^{1/2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 - 2\alpha)}{y} \frac{\alpha}{y \lambda_i} v(\lambda_i^{1/2} y) - v(\lambda_i^{1/2} y) \left(1 + \frac{\alpha - \alpha^2}{y^2 \lambda_i} \right) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{v'(\lambda_i^{1/2} y)}{y \lambda_i^{1/2}} - v(\lambda_i^{1/2} y) \left(\frac{2\alpha - 1}{y} \frac{\alpha}{y \lambda_i} + 1 + \frac{\alpha - \alpha^2}{y^2 \lambda_i} \right) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{v'(\lambda_i^{1/2} y)}{y \lambda_i^{1/2}} - v(\lambda_i^{1/2} y) \left(1 + \frac{2\alpha^2 - \alpha}{y^2 \lambda_i} + \frac{\alpha - \alpha^2}{y^2 \lambda_i} \right) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{v'(\lambda_i^{1/2} y)}{y \lambda_i^{1/2}} - v(\lambda_i^{1/2} y) \left(1 + \frac{\alpha^2}{y^2 \lambda_i} \right) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(\lambda_i^{1/2} y) + \frac{v'(\lambda_i^{1/2} y)}{y \lambda_i^{1/2}} - v(\lambda_i^{1/2} y) \left(1 + \frac{\alpha^2}{(y \lambda_i^{1/2})^2} \right) \right\} \\
&= y^\alpha \lambda_i \left\{ v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s) \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) \right\}, \quad \text{com } s = y \lambda_i^{1/2} \quad \text{e } y > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$v''(s) + \frac{v'(s)}{s} - v(s) \left(1 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right) = 0, \quad \text{para } s > 0. \quad (4.5)$$

A equação (4.5) é chamada "*equação de Bessel modificada*". Segundo o Teorema 2.29, temos que $y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)$ e $y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)$, onde

$$I_\alpha(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha + r + 1)} \left(\frac{s}{2} \right)^{2r + \alpha} \quad \text{e} \quad K_\alpha(s) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(s) - I_\alpha(s)}{\text{sen}(\alpha\pi)},$$

são soluções linearmente independentes da equação (4.5) e

$$A_{i,\alpha} y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) + B_{i,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y), \quad (4.6)$$

com $A_{i,\alpha}, B_{i,\alpha} \in \mathbb{R}$, é a solução geral. Mas, queremos que $\phi_{1,i}, \phi_{2,i} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, em que

$$\phi_{1,i}(x, y) = y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x) \quad \text{e} \quad \phi_{2,i}(x, y) = y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x)$$

ou seja, precisamos que

$$\|\phi_{1,i}\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} < \infty \quad \text{ou} \quad \|\phi_{2,i}\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} < \infty.$$

$$\text{Vejam os que } \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla(y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x))|^2 dx dy = \infty.$$

De fato, pelo Teorema 2.30, temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} = 1,$$

$$\text{ou seja, dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que se } s > \delta, \text{ então } \left| \frac{I_\alpha(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left| 1 - \frac{I_\alpha(s)}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} \right| < \varepsilon. \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{|I_\alpha(s)|}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < \frac{|I_\alpha(s)|}{\frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}}$$

$$\Rightarrow \quad (1 - \varepsilon) \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} < |I_\alpha(s)|.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}} < |I_\alpha(s)|. \quad (4.7)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_\alpha} \|y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x)\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 &= \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla(y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x))|^2 dx dy \\
&= \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} [|y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \nabla_x \varphi_i(x)|^2 \\
&\quad + |(y^\alpha I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y))_y \varphi_i(x)|^2] dx dy \\
&\geq \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} y^{2\alpha} |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 |\nabla_x \varphi_i(x)|^2 dx dy \\
&= \left(\int_0^\infty y |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \right) \left(\int_\Omega |\nabla_x \varphi_i(x)|^2 dx \right) \\
&= \lambda_i \int_0^\infty y |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\
&= \lambda_i \int_0^\delta y |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy + \lambda_i \int_\delta^\infty y |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\
&\geq \lambda_i \int_\delta^\infty y |I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\
&> \lambda_i \int_0^\infty \frac{e^{2\lambda_i^{1/2} y}}{8\pi \lambda_i^{1/2}} dy \\
&= \frac{\lambda_i^{1/2}}{8\pi} \int_0^\infty e^{2\lambda_i^{1/2} y} dy \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Assim, $\phi_{1,i} \notin H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$. Desta forma, tome $A_{i,\alpha} = 0$ em (4.6).

Do Teorema 2.32 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_\alpha} \|y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x)\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 &= \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla(y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \varphi_i(x))|^2 dx dy \\
&= \lambda_i \int_0^\infty y |K_\alpha^2(\lambda_i^{1/2} y)| dy \\
&\quad + \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |(y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y))_y \varphi_i(x)|^2 dx dy \\
&= \lambda_i \int_0^\infty y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\
&\quad + \lambda_i \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |y^\alpha K_{\alpha-1}(\lambda_i^{1/2} y)|^2 |\varphi_i(x)|^2 dx dy \\
&= \lambda_i \int_0^\infty y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\
&\quad + \lambda_i \int_0^\infty y |K_{\alpha-1}(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 2.30

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K_\alpha(s)}{\sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}} = 1,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $s > \delta$, então $\left| \frac{K_\alpha(s)}{\sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}} - 1 \right| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \frac{|K_\alpha(s)|}{\sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}} < \varepsilon + 1$$

Coloque $\varepsilon = \frac{1}{2}$, logo

$$|K_\alpha(s)| < \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s}.$$

Fazendo $s = \lambda_i^{1/2} y$ segue que,

$$\begin{aligned} y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 &< y \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda_i^{1/2} y}} e^{-\lambda_i^{1/2} y} \right)^2 \\ &= \frac{9\pi}{8} e^{-2\lambda_i^{1/2} y}, \end{aligned}$$

para $y > \lambda_i^{-1/2} \delta$.

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy &= \int_0^{\lambda_i^{-1/2} \delta} y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy + \int_{\lambda_i^{-1/2} \delta}^\infty y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy \\ &< \int_0^{\lambda_i^{-1/2} \delta} y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy + \frac{9\pi}{8} \int_{\lambda_i^{-1/2} \delta}^\infty e^{-2\lambda_i^{1/2} y} dy \\ &= \int_0^{\lambda_i^{-1/2} \delta} y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{9\pi}{8} \frac{e^{-2\lambda_i^{1/2} y}}{-2\lambda_i^{1/2}} \Big|_{\lambda_i^{-1/2} \delta}^b \\ &= \int_0^{\lambda_i^{-1/2} \delta} y |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 dy + \frac{9\pi}{16\lambda_i^{1/2}} e^{-2\delta}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Temos também pelo Teorema 2.31 que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_\alpha(s)}{\frac{1}{2} \Gamma(\alpha) \left(\frac{1}{2}s\right)^{-\alpha}} = 1,$$

isto é, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|s| < \bar{\delta} &\Rightarrow \left| \frac{K_\alpha(s)}{\frac{1}{2}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{2}s\right)^{-\alpha}} - 1 \right| < \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow |K_\alpha(s)| < \frac{3}{4}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{2}s\right)^{-\alpha} \\
&\Rightarrow y|K_\alpha(s)|^2 < y\left(\frac{3}{4}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{2}s\right)^{-\alpha}\right)^2.
\end{aligned}$$

Assim, para $s = \lambda_i^{1/2}y$ segue que

$$y|K_\alpha(s)|^2 < \frac{9}{16}\Gamma(\alpha)^2\left(\frac{\lambda_i^{1/2}}{2}\right)^{-2\alpha}y^{1-2\alpha},$$

desde que $|\lambda_i^{1/2}y| < \bar{\delta}$.

Tome $m = \min\{\lambda_i^{-1/2}\bar{\delta}, \lambda_i^{-1/2}\delta\}$, logo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\lambda_i^{-1/2}\delta} y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy &= \int_0^m y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy + \int_m^{\lambda_i^{-1/2}\delta} y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy \\
&= \int_0^m \frac{9}{16}\Gamma(\alpha)^2\left(\frac{\lambda_i^{1/2}}{2}\right)^{-2\alpha}y^{1-2\alpha} dy + \int_m^{\lambda_i^{-1/2}\delta} y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy \\
&= \frac{9}{16}\Gamma(\alpha)^2\left(\frac{\lambda_i^{1/2}}{2}\right)^{-2\alpha} \frac{y^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \Big|_0^m + \int_m^{\lambda_i^{-1/2}\delta} y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy \\
&= \frac{9}{16}\Gamma(\alpha)^2\left(\frac{\lambda_i^{1/2}}{2}\right)^{-2\alpha} \frac{m^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} + \int_m^{\lambda_i^{-1/2}\delta} y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy < \infty.
\end{aligned}$$

Segue de (4.9) que

$$\int_0^\infty y|K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy < \infty.$$

Analogamente,

$$\int_0^\infty y|K_{\alpha-1}(\lambda_i^{1/2}y)|^2 dy < \infty.$$

Portanto, de (4.8) obtemos que $\phi_{2,i} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$. Voltando a função ψ , temos então que a mesma segue o formato

$$\psi(y) = y^\alpha B_{i,\alpha} K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y) \tag{4.10}$$

onde $B_{i,\alpha}$ é uma constante real a determinar. Desta forma

$$\begin{aligned}
\psi(y) &= y^\alpha B_{i,\alpha} K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \\
&= y^\alpha B_{i,\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(\lambda_i^{1/2} y) - I_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)}{\text{sen}(\alpha\pi)} \\
&= \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(-\alpha + r + 1)} \left(\frac{\lambda_i^{1/2} y}{2} \right)^{2r-\alpha} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha + r + 1)} \left(\frac{\lambda_i^{1/2} y}{2} \right)^{2r+\alpha} \right] \\
&= \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(-\alpha + r + 1)} \left(\frac{\lambda_i^{1/2} y}{2} \right)^{2r-\alpha} - \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha + r + 1)} \left(\frac{\lambda_i^{1/2} y}{2} \right)^{2r+\alpha} \\
&= \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\lambda_i^{1/2} y}{2} \right)^{-\alpha} + \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(r-\alpha+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i} y}{2} \right)^{2r-\alpha} \\
&\quad - \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha+r+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i} y}{2} \right)^{2r+\alpha} \\
&= \frac{B_{i,\alpha} \pi \lambda_i^{-\alpha/2}}{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)} + \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(r-\alpha+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i} y}{2} \right)^{2r-\alpha} \\
&\quad - \frac{y^\alpha B_{i,\alpha} \pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha+r+1)} \left(\frac{\sqrt{\lambda_i} y}{2} \right)^{2r+\alpha}
\end{aligned}$$

Assim

$$\psi(0) = \frac{B_{i,\alpha} \pi \lambda_i^{-\alpha/2}}{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}. \quad (4.11)$$

Como a segunda condição do problema (4.4) é que $\psi(0) = 1$, temos que

$$B_{i,\alpha} = \frac{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}{\pi \lambda_i^{-\alpha/2}}, \quad (4.12)$$

e a função ψ é dada por

$$\psi(y) = y^\alpha B_{i,\alpha} K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y). \quad (4.13)$$

Concluimos, então que $E_\alpha(\varphi_i)(x, y) = B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)$ em que $B_{i,\alpha}$ é dado por (4.12)

□

Vejamos no teorema seguinte a existência e unicidade da extensão α -harmônica

de uma função $u \in H(\Omega, \alpha)$, mas antes, segue um lema que nos auxiliará a verificar certas propriedades da extensão α -harmônica.

Lema 4.6. *Dada a função $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i \in L^2(\Omega)$, segue que*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^{\infty} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)], \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \sum_{i=1}^{\infty} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)], \quad (4.15)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{\infty} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)],$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{i=1}^{\infty} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)].$$

Demonstração. Considerando que as derivadas das autofunções φ_i são limitadas por uma constante M , segue pela Desigualdade de Young que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] \right| &= \left| a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \right| \\ &\leq M y^\alpha |a_i| |B_{i,\alpha}| |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)| y^\alpha \\ &\leq \frac{|a_i|^2}{2} + \frac{M^2 |B_{i,\alpha}|^2 |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 y^{2\alpha}}{2}. \end{aligned}$$

Sendo

$$B_{i,\alpha} = \frac{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}{\pi \lambda_i^{-\alpha/2}},$$

considere

$$B_{i,\alpha}^2 = \frac{N_\alpha}{\lambda_i^{-\alpha}}$$

com

$$N_\alpha = \frac{2^{2-2\alpha} \text{sen}^2(\alpha\pi) \Gamma^2(1-\alpha)}{\pi^2}.$$

Assim

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] \right| \leq \frac{|a_i|^2}{2} + \frac{M^2 N_\alpha |K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)|^2 y^{2\alpha}}{2 \lambda_i^{-\alpha}}. \quad (4.16)$$

Mas, pelo Teorema 2.30, segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)}{\left(\frac{\pi}{2\lambda_i^{1/2}y}\right)^{1/2} e^{-\lambda_i^{1/2}y}} = 1.$$

Logo, dado $\varepsilon = 1$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} i > i_0 &\Rightarrow \left| \frac{K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)}{(\pi/2\lambda_i^{1/2}y)^{1/2} e^{-\lambda_i^{1/2}y}} - 1 \right| < 1 \\ &\Rightarrow |K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)|^2 < \frac{2\pi}{\lambda_i^{1/2}y} e^{-2\lambda_i^{1/2}y}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.16), segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)] \right| \leq \frac{|a_i|^2}{2} + \frac{M^2 N_\alpha \pi e^{-2\lambda_i^{1/2}y} y^{2\alpha-1}}{\lambda_i^{1/2-\alpha}}. \quad (4.18)$$

Tome $k \in \mathbb{R}_+^*$ e observe que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} y^{2\alpha-1} \frac{e^{-2\lambda_i^{1/2}y}}{\lambda_i^{1/2-\alpha-k}} = 0.$$

Ou seja, para $\varepsilon = 1$, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$i > i_1 \Rightarrow y^{2\alpha-1} \frac{e^{-2\lambda_i^{1/2}y}}{\lambda_i^{1/2-\alpha}} < \frac{1}{\lambda_i^k}. \quad (4.19)$$

Agora, substituindo (4.19) em (4.18), segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2}y)] \right| \leq \frac{|a_i|^2}{2} + \frac{C_\alpha}{\lambda_i^k}, \quad (4.20)$$

com $C_\alpha = M^2 N_\alpha \pi$ e $i > \max\{i_0, i_1\}$.

Pelo Teorema 2.23 temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i}{4\pi^2 \left(\frac{i}{w_n V}\right)^{2/n}} = 1,$$

onde V é o volume de Ω e w_n é o volume da bola n -dimensional do espaço euclidiano. Isto é,

para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} i > i_2 &\Rightarrow \frac{1}{2}4\pi^2 \left(\frac{i}{w_n V} \right)^{2/n} < \lambda_i \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} < \frac{(w_n V)^{2/n}}{2\pi^2} \frac{1}{i^{2/n}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda_i^k} < \left[\frac{(w_n V)^{2/n}}{2\pi^2} \right]^k \frac{1}{i^{2k/n}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) em (4.20), e colocando $J_{n,\alpha,\Omega} = C_\alpha \left[\frac{(w_n V)^{2/n}}{2\pi^2} \right]^k$, segue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)] \right| \leq \frac{|a_i|^2}{2} + J_{n,\alpha,\Omega} \frac{1}{i^{2k/n}}, \forall i > \max\{i_0, i_1, i_2\}. \quad (4.22)$$

Escolha k tal que $\frac{2k}{n} > 1$, ou seja, $k > \frac{n}{2}$, desta forma, os dois termos do lado direito da desigualdade (4.22) são termos gerais de séries convergentes. Assim, pelo Teorema 2.13, segue que a derivada em (4.22) é o termo geral de uma série uniformemente convergente, o que nos permite concluir ser válida a relação (4.14). De modo análogo mostra-se o mesmo resultado para a segunda derivada parcial em x_i , a derivada parcial em y e a segunda derivada parcial em y . \square

A seguir definiremos um conjunto W e mostraremos que o mesmo é não vazio, com o objetivo de utilizá-lo futuramente.

Lema 4.7. *O conjunto*

$$W = \{w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \mid \text{Tr}_\Omega(w) = u \text{ quase sempre em } \Omega\}$$

é não vazio.

Demonstração. Dada a função $v(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{j,\alpha} y^\alpha \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j(x) K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)$, observe que $v(\cdot, 0) = u(\cdot)$, pois, podemos escrever a função v como $v(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(y) \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j(x)$, onde $\psi(y)$ é dado em (4.13) e, por outro lado, usando (4.11) e (4.12), segue que $v(\cdot, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(0) \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j(\cdot) = u(\cdot)$ em Ω e $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$.

Mostraremos agora que $\|v\|_{H_{0,L}^\alpha(C)} < \infty$. Para isso, veja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_\alpha} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(C)}^2 &= \int_C y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy \\ &= \int_C y^{1-2\alpha} |\nabla_x v|^2 + y^{1-2\alpha} v_y^2 dx dy \\ &= \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \int_\Omega |\nabla_x v|^2 dx dy + \int_\Omega \int_0^\infty y^{1-2\alpha} v_y^2 dx dy. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por outro lado, usando a ortonormalidade das autofunções φ_j , note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_x v|^2 dx &= \sum_{j,i=1}^\infty B_{j,\alpha} B_{i,\alpha} y^{2\alpha} \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx \\ &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_j B_{j,\alpha}^2 y^{2\alpha} \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 K_\alpha^2(\lambda_j^{1/2} y) \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^\infty y^{1-2\alpha} v_y^2 dy dx &= \int_\Omega \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \left\{ \left[\sum_{j=1}^\infty B_{j,\alpha} y^\alpha \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_j(x) K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y) \right]_y \right\}^2 dy dx \\ &= \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \sum_{j=1}^\infty \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 ((B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))_y)^2 dy. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo (4.24) e (4.25) em (4.23), e usando que $\psi(y) = y^\alpha B_{j,\alpha} K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)$,

segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_\alpha} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(C)}^2 &= \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \sum_{j=1}^\infty \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 [\lambda_j (B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))^2 + ((B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))_y)^2] dy \\ &= \sum_{j=1}^\infty \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^\infty y^{1-2\alpha} [\lambda_j \psi(y)^2 + \psi_y(y)^2] dy \\ &= \sum_{j=1}^\infty \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \left[\lambda_j \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi(y)^2 dy + \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi'(y)^2 dy \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mas, usando a fórmula de integração por partes e o fato de ψ ser solução do Problema (4.4), temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi'(y)^2 dy &= \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi'(y) dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b \\
&\quad - \int_0^\infty \psi(y) [(1-2\alpha)y^{-2\alpha} \psi'(y) + y^{1-2\alpha} \psi''(y)] dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \int_0^\infty (1-2\alpha)y^{-2\alpha} \psi(y) \psi'(y) dy \\
&\quad - \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi(y) \left[-\frac{(1-2\alpha)}{y} \psi'(y) + \lambda_j \psi(y) \right] dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi(y) \lambda_j \psi(y) dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b - \lambda_j \int_0^\infty y^{1-2\alpha} \psi(y)^2 dy. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Desta forma, substituindo (4.27) em (4.26), temos que

$$\frac{1}{k_\alpha} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 = \sum_{j=1}^\infty \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b. \tag{4.28}$$

Temos ainda que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) - \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y). \tag{4.29}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} (B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))_y \\
&= \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} B_{j,\alpha} \lambda_j^{-\alpha/2} [(\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)]_y. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Por outro lado, colocando $z = \lambda_j^{1/2} y$, temos que $y = \lambda_j^{-1/2} z$,

$$(z^\alpha K_\alpha(z))_z = (z^\alpha K_\alpha(z))_y \frac{dy}{dz} = \lambda_j^{-1/2} (z^\alpha K_\alpha(z))_y,$$

e assim

$$\begin{aligned}
[(\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)]_y &= \lambda_j^{1/2} (z^\alpha K_\alpha(z))_z \\
&= -\lambda_j^{1/2} z^\alpha K_{\alpha-1}(z) \\
&= -\lambda_j^{1/2} (\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

logo

$$\begin{aligned}
B_{i,\alpha} \lambda_j^{-\alpha/2} [(\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)]_y &= -B_{j,\alpha} \lambda_j^{-\alpha/2} \lambda_j^{1/2} (\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y) \\
&= -B_{j,\alpha} \lambda_j^{1/2} y^\alpha K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo (4.32) em (4.30), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} -B_{j,\alpha} \lambda_j^{1/2} y^{1-\alpha} K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y) \\
&= -B_{j,\alpha} \lambda_j^{1/2} \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-\alpha} K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
y^{1-\alpha} K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y) &= y^{1-\alpha} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-(\alpha-1)}(\lambda_j^{1/2} y) - I_{(\alpha-1)}(\lambda_j^{1/2} y)}{\text{sen}(\alpha\pi)} \\
&= y^{1-\alpha} \frac{\pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(-\alpha + r + 2)} \left(\frac{\lambda_j^{1/2} y}{2}\right)^{2r-\alpha+1} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha + r)} \left(\frac{\lambda_j^{1/2} y}{2}\right)^{2r+\alpha-1} \right] \\
&= \frac{\pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(-\alpha + r + 2)} \left(\frac{\lambda_j^{1/2}}{2}\right)^{2r-\alpha+1} y^{2r-2\alpha+2} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r! \Gamma(\alpha + r)} \left(\frac{\lambda_j^{1/2}}{2}\right)^{2r+\alpha-1} y^{2r} \right].
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) &= -\lambda_j^{1/2} B_{j,\alpha} \left[-\frac{\pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda_j^{1/2}}{2}\right)^{\alpha-1} \right] \\
&= \frac{\pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda_j^{\alpha/2}}{2^{\alpha-1}} B_{j,\alpha} \\
&= \frac{\pi}{2 \text{sen}(\alpha\pi)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda_j^{\alpha/2}}{2^{\alpha-1}} \frac{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}{\pi \lambda_j^{-\alpha/2}} \\
&= \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \lambda_j^\alpha \\
&= K_\alpha \lambda_j^\alpha.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Logo

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \lim_{y \rightarrow 0^+} \psi(y) = k_\alpha \lambda_j^\alpha. \quad (4.35)$$

Assim, substituindo (4.35) em (4.29), segue que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) - k_\alpha \lambda_j^\alpha. \quad (4.36)$$

Por outro lado, usando as propriedades das funções de Bessel (Teorema 2.30 e Teorema 2.32) e a igualdade (4.31), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) &= \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} (B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))_y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} B_{j,\alpha} ((\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y))_y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} B_{j,\alpha} (-\lambda_j^{1/2} (\lambda_j^{1/2} y)^\alpha K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y)) \\ &= -\lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}} \lim_{y \rightarrow \infty} B_{j,\alpha} y^{1-\alpha} (\pi/2 \lambda_j^{1/2} y)^{1/2} \cdot e^{-\lambda_j^{1/2} y} \frac{K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y)}{(\pi/2 \lambda_j^{1/2} y)^{1/2} \cdot e^{-\lambda_j^{1/2} y}} \\ &= -\lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}} \lim_{y \rightarrow \infty} B_{j,\alpha} y^{1-\alpha} (\pi/2 \lambda_j^{1/2} y)^{1/2} \cdot e^{-\lambda_j^{1/2} y} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{K_{\alpha-1}(\lambda_j^{1/2} y)}{(\pi/2 \lambda_j^{1/2} y)^{1/2} \cdot e^{-\lambda_j^{1/2} y}} \\ &= 0.1 = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} B_{j,\alpha} y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y) = \lim_{y \rightarrow \infty} B_{j,\alpha} y^\alpha (\pi/2 \lambda_j^{1/2} y)^{1/2} \cdot e^{-\lambda_j^{1/2} y} = 0. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.37) e (4.38) em (4.36), segue que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi'(y) \psi(y) \Big|_0^b = -k_\alpha \lambda_j^\alpha \quad (4.39)$$

e por fim, usando (4.39) em (4.28), concluímos que

$$\frac{1}{k_\alpha} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 (-k_\alpha \lambda_j^\alpha) = -k_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)}^2 \lambda_j^\alpha < \infty, \quad (4.40)$$

pois $u \in H(\Omega, \alpha)$. Assim, a norma de v é finita e, pelo Lema 1.1.2 em [4], segue que $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$.

□

Teorema 4.8. Dada uma função $u \in H(\Omega, \alpha)$, com $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$, existe uma única função $w = E_\alpha(u)$, extensão α -harmônica de u em \mathcal{C} , isto é, existe um único $w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ tal que $\text{Tr}_\Omega(w) = u$ e w é solução fraca de

$$\begin{cases} -\text{div}(y^{1-2\alpha}\nabla w) = 0 & \text{em } \mathcal{C}, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ w(\cdot, 0) = u(\cdot) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (P_2)$$

e esta é dada por

$$E_\alpha(u)(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y),$$

onde φ_i e λ_i são autofunções e autovalores do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet, respectivamente,

$$B_{i,\alpha} = \frac{2^{1-\alpha} \text{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1-\alpha)}{\pi \lambda_i^{-\alpha/2}}$$

e K_α é a função de Bessel modificada de segundo tipo de ordem α .

Demonstração. Para demonstrarmos este teorema, mostraremos a seguir que, uma função w ser extensão α -harmônica de uma função $u \in H(\Omega, \alpha)$ é equivalente a w ser mínimo do funcional F no conjunto W , definidos logo abaixo. Em seguida, provaremos a existência e unicidade do mínimo de F , concluindo assim a prova deste teorema.

Considere, então, o conjunto $W \neq \emptyset$ do Lema (4.7) e o funcional dado por

$$\begin{aligned} F : H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto F(w) = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Logo, para $w \in W$ e pelo Teorema do Traço (Teorema 2.39), temos a seguinte desigualdade

$$|F(w)| = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w|^2 dx dy = \frac{1}{k_\alpha^2} \|w\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 \geq \|\text{Tr}_\Omega(w)\|_{H(\Omega, \alpha)}^2 = \|u\|_{H(\Omega, \alpha)}^2.$$

Logo, F é limitado inferiormente em W . Tome $m = \inf\{F(w) | w \in W\}$ e $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ tal que $F(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$. Logo

$$\|w_n\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 = k_\alpha^2 F(w_n) \leq M,$$

pois $\{F(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Assim, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, logo possui uma subsequência $(w_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} w_0 \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $\text{Tr}_\Omega(w_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \text{Tr}_\Omega(w_0)$ em $L^q(\Omega)$ para $1 < q < \frac{2n}{n-2\alpha}$, em particular, para $q = 2$, devido ao Lema 4.3. Assim

$$\|u - \text{Tr}_\Omega(w_0)\|_{L^2(\Omega)} = \|\text{Tr}_\Omega(w_{n_j}) - \text{Tr}_\Omega(w_0)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, $u = \text{Tr}_\Omega(w_0)$ quase sempre em Ω e assim $w_0 \in W$. Então,

$$F(w_0) \geq m. \quad (4.41)$$

Por outro lado, temos que

$$|\nabla w_{n_j}|^2 \geq -|\nabla w_0|^2 + 2\nabla w_0 \cdot \nabla w_{n_j},$$

logo

$$\frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w_{n_j}|^2 dx dy \geq -\frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w_0|^2 dx dy + \frac{2}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla w_{n_j} dx dy,$$

então

$$F(w_{n_j}) \geq -F(w_0) + \frac{2}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla w_{n_j} dx dy. \quad (4.42)$$

Considere agora o funcional linear contínuo

$$\begin{aligned} \xi : H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \xi(v) = g(y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla v), \end{aligned}$$

com $g \in (L^2(\mathcal{C}; \mathbb{R}^n))'$. Logo

$$\left| g(y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla w_{n_j}) - g(y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla w_0) \right| = |\xi(w_{n_j}) - \xi(w_0)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

então

$$y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla w_{n_j} \rightharpoonup y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla w_0 \quad \text{em } L^2(\mathcal{C}; \mathbb{R}^n).$$

Agora, como $y^{\frac{1-2\alpha}{2}} \nabla w_0 \in L^2(\mathcal{C}; \mathbb{R}^n)$, pelo Teorema 3 do Apêndice D em [15], temos que

$$\frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla w_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w_0|^2 = F(w_0).$$

Desta forma, temos em (4.42) que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(w_{n_j}) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(-F(w_0) + \frac{2}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla w_{n_j} dx dy \right), \text{ logo}$$

$$m \geq -F(w_0) + 2F(w_0),$$

então

$$m \geq F(w_0). \quad (4.43)$$

Por (4.41) e (4.43) segue que $F(w_0) = m$ e, como $w_0 \in W$, segue que F admite um mínimo em W . Vejamos agora que o mínimo de F é único. Para isso, suponha $v_1, v_2 \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ mínimos de F , logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq F\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \left(|\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2 - 2\nabla v_1 \cdot \nabla v_2 + |\nabla v_2|^2 + |\nabla v_2|^2 - |\nabla v_2|^2 \right) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \left(2|\nabla v_1|^2 + 2|\nabla v_2|^2 \right) dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \left(-|\nabla v_1|^2 - 2\nabla v_1 \cdot \nabla v_2 - |\nabla v_2|^2 \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_1|^2 dx dy + \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_2|^2 dx dy - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \left(|\nabla v_1|^2 + 2\nabla v_1 \cdot \nabla v_2 + |\nabla v_2|^2 \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_1|^2 dx dy + \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_2|^2 dx dy - \frac{1}{4} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_1 + \nabla v_2|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_1|^2 dx dy + \frac{1}{2} \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v_2|^2 dx dy - \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \left| \nabla \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) \right|^2 dx dy \\ &= \frac{F(v_1)}{2} + \frac{F(v_2)}{2} - F\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \leq \frac{m}{2} + \frac{m}{2} - m = 0, \end{aligned}$$

$$\text{então } F\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) = 0 \text{ e por fim } v_1 = v_2,$$

ou seja, F possui um único mínimo.

Mostraremos agora que w_0 , mínimo de F , é a única solução fraca de (P_2) . Para isto, considere $f(t) = F(w_0 + t\gamma)$ com $\gamma \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $\gamma(\cdot, 0) = 0$ quase sempre em Ω .

Logo $t = 0$ é um ponto de mínimo de f , então $f'(0) = 0$, assim

$$\begin{aligned}
0 = f'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(w_0 + t\gamma) - F(w_0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{1}{k_\alpha} \left[\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla(w_0 + t\gamma)|^2 dx dy - \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w_0|^2 dx dy \right] \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \frac{|\nabla(w_0 + t\gamma)|^2 - |\nabla w_0|^2}{t} dx dy \right] \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \frac{|\nabla w_0|^2 + 2\nabla w_0 \cdot \nabla(t\gamma) + |\nabla(t\gamma)|^2 - |\nabla w_0|^2}{t} dx dy \right] \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \frac{2\nabla w_0 \cdot \nabla(t\gamma) + |\nabla(t\gamma)|^2}{t} dx dy \right] \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} (2\nabla w_0 \cdot \nabla\gamma + t|\nabla\gamma|^2) dx dy \right] \\
&= \frac{2}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla\gamma dx dy, \quad \forall \gamma \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \text{ e } \gamma(\cdot, 0) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla\gamma dx dy = 0, \quad \forall \gamma \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \text{ e } \gamma(\cdot, 0) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (4.44)$$

Afirmção 1: w_0 é solução fraca de (P_2) .

De fato, já temos que $w_0 \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $w(\cdot, 0) = u(\cdot)$ quase sempre em Ω . Seja $\mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, então pela definição de $H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, existe uma sequência $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathcal{C})$ tal que

$$\|\mu_n - \mu\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

logo

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx \right| = \left| \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu dx dy \right. \\
& - \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu_n dx dy + \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu_n dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu_n(x, 0) dx \\
& \left. + \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu_n(x, 0) dx - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx \right| = \\
& = \left| \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla (\mu - \mu_n) dx dy + \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu_n dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu_n(x, 0) dx - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) (\mu(x, 0) - \mu_n(x, 0)) dx \right|.
\end{aligned}$$

Como $\mu_n \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $\mu_n(\cdot, 0) = 0$ em Ω , segue que

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu_n dx dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu_n(x, 0) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, usando a desigualdade de Hölder (Teorema 2.26), segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx \right| = \\
& = \left| \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla (\mu - \mu_n) dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) (\mu(x, 0) - \mu_n(x, 0)) dx \right| \\
& \leq \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla w_0| |\nabla (\mu - \mu_n)| dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \right| |\mu(x, 0) - \mu_n(x, 0)| dx \\
& \leq \|w_0\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \|\mu - \mu_n\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} + \left\| \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\mu(\cdot, 0) - \mu_n(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

$$\text{Assim } \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w_0 \cdot \nabla \mu dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial w_0}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Logo, w_0 é solução fraca de (P_2) .

Provaremos agora a recíproca deste resultado, ou seja

Afirmção 2: se w é solução fraca de (P_2) , então w é mínimo de F .

De fato, se w é solução fraca de (P_2) , então $w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, $w(\cdot, 0) = u(\cdot)$ quase sempre em Ω e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \mu dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}),$$

em particular, para $\mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ tal que $\mu(\cdot, 0) = 0$ quase sempre em Ω . Logo,

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \mu dx dy = 0, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad \mu(\cdot, 0) = 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Suponha agora que w_o seja mínimo de F , então de (4.44) temos

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla(w - w_o) \cdot \nabla \mu dx dy = 0, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad \mu(\cdot, 0) = 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Tome $\mu = w - w_o \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $\mu(\cdot, 0) = w(\cdot, 0) - w_o(\cdot, 0) = u(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) = 0$ quase sempre em Ω , então

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla(w - w_o)|^2 dx dy = 0, \quad \text{logo} \quad \|w - w_o\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = 0 \quad \text{e por fim} \quad w = w_o \quad \text{quase sempre.}$$

Considere a função $v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,\alpha} a_i y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)$, assim como já vimos $v \in W$, logo $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e $\text{Tr}_\Omega(v) = u$ q.s em Ω . Por outro lado, $v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i E_\alpha(\varphi_i)(x, y)$. Assim, para $\forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \mu dx dy &= \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i E_\alpha(\varphi_i) \right) \cdot \nabla \mu dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla(E_\alpha(\varphi_i)) \cdot \nabla \mu dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_{\Omega} \frac{\partial E_\alpha(\varphi_i)}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i E_\alpha(\varphi_i)(x, 0) \right) \mu(x, 0) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y^\alpha}(x, 0) \mu(x, 0) dx \end{aligned} \tag{4.45}$$

Logo, $E_\alpha(u)(x, y) = v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,\alpha} a_i y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)$. □

5 O OPERADOR A_α E SEU INVERSO

5.1 DEFININDO O OPERADOR A_α

Teorema 5.1. *Seja $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$ e $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ sua extensão α -harmônica em \mathcal{C} . Então $A_\alpha(u) \in \mathcal{V}'_0(\Omega)$, onde*

$$\langle A_\alpha(u), g \rangle := \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{g} dx dy,$$

sendo

$$k_\alpha = \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

com \tilde{g} sendo a extensão α -harmônica de $g \in \mathcal{V}_0(\Omega)$.

Demonstração. Para $u_1, u_2 \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, com $v_1 = E_\alpha(u_1)$ e $v_2 = E_\alpha(u_2)$, tem-se

$$\langle A_\alpha(u), u_1 + u_2 \rangle = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{g} dx dy, \quad (5.1)$$

com $w = E_\alpha(u)$ e $\tilde{g} = E_\alpha(u_1 + u_2)$. Observe que

$$v_1, v_2 \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), v_1(x, 0) = u_1(x), v_2(x, 0) = u_2(x) \quad \text{e}$$

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v_1 \cdot \nabla \varphi dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial y^\alpha}(x, 0) \varphi(x, 0) dx, \quad \forall \varphi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C});$$

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v_2 \cdot \nabla \varphi dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial v_2}{\partial y^\alpha}(x, 0) \varphi(x, 0) dx, \quad \forall \varphi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Então

$$v_1 + v_2 \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), (v_1 + v_2)(x, 0) = (u_1 + u_2)(x) \quad \text{e}$$

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla (v_1 + v_2) \cdot \nabla \varphi dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial (v_1 + v_2)}{\partial y^\alpha}(x, 0) \varphi(x, 0) dx, \quad \forall \varphi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Desta forma $v_1 + v_2 = E_\alpha(u_1 + u_2)$. Por outro lado, colocando $v_1 + v_2$ no lugar de \tilde{g} , em (5.1), temos que

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha(u), u_1 + u_2 \rangle &= \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{v}_1 dx dy + \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{v}_2 dx dy \\ &= \langle A_\alpha(u), u_1 \rangle + \langle A_\alpha(u), u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Vejamos agora que $A_\alpha(u)$ é um operador limitado. Pela Desigualdade de Hölder e considerando $v = E_\alpha(u)$ e $\tilde{\mu} = E_\alpha(\mu)$, segue que

$$\begin{aligned}
| \langle A_\alpha(u), \mu \rangle | &\leq \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{\frac{1-2\alpha}{2}} |\nabla v| y^{\frac{1-2\alpha}{2}} |\nabla \tilde{\mu}| dx dy \\
&\leq \frac{1}{k_\alpha} \left(\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla \tilde{\mu}|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{k_\alpha} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \|\tilde{\mu}\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4 em [4], segue que

$$\|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = k_\alpha \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|\tilde{\mu}\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} = k_\alpha \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
| \langle A_\alpha(u), \mu \rangle | &\leq \frac{1}{k_\alpha} k_\alpha \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} k_\alpha \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} \\
&= \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} k_\alpha \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} \\
&= C \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

para toda função $\mu \in \mathcal{V}_0(\Omega)$ com $C = \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} k_\alpha$. Portanto, $A_\alpha(u) \in \mathcal{V}'_0(\Omega)$. \square

A partir deste Teorema temos a seguinte definição do operador A_α .

Definição 5.2. *Definimos o operador A_α da seguinte maneira*

$$\begin{aligned}
A_\alpha : \mathcal{V}_0(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{V}'_0(\Omega) \\
u &\longmapsto A_\alpha(u),
\end{aligned}$$

tal que

$$\langle A_\alpha(u), g \rangle := \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{g} dx dy, \quad \forall g \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

O próximo lema nos apresenta que o operador A_α é um operador limitado.

Lema 5.3. *A_α é um operador limitado.*

Demonstração. Em (5.2) obtivemos que

$$| \langle A_\alpha(u), \mu \rangle | \leq k_\alpha \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)}, \quad \forall u, \mu \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

Com isso temos que

$$\sup_{\substack{\mu \in \mathcal{V}_0(\Omega), \\ \|\mu\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} \leq 1}} |\langle A_\alpha(u), \mu \rangle| \leq k_\alpha \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{V}_0(\Omega),$$

assim

$$\|A_\alpha(u)\|_{\mathcal{V}_0^*(\Omega)} \leq k_\alpha \|u\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

Logo, A_α é limitado de $\mathcal{V}_0(\Omega)$ em $\mathcal{V}_0'(\Omega)$. □

Lema 5.4. *Dada uma função $u \in Y \subset \mathcal{V}_0(\Omega)$, segue que*

$$\langle A_\alpha(u), g \rangle = \langle (-\Delta)^\alpha(u), g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{V}_0(\Omega),$$

$$\text{onde } u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Demonstração. Dadas as funções $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i$, $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \varphi_j \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, sejam v e \tilde{g} suas respectivas extensões α -harmônicas dadas por

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j B_{j,\alpha} y^\alpha \varphi_j(x) K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y),$$

logo

$$\begin{aligned} \nabla v \cdot \nabla \tilde{g} &= \nabla_x v \cdot \nabla_x \tilde{g} + v_y + \tilde{g}_y \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i B_{i,\alpha} y^\alpha \nabla_x \varphi_i(x) K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j B_{j,\alpha} y^\alpha \nabla_x \varphi_j(x) K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i B_{i,\alpha} \varphi_i(x) [y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)]_y \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j B_{j,\alpha} \varphi_j(x) [y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)]_y \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j B_{i,\alpha} B_{j,\alpha} y^{2\alpha} K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y) K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y) [\nabla_x \varphi_i(x) \cdot \nabla_x \varphi_j(x)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j B_{i,\alpha} B_{j,\alpha} \varphi_i(x) \varphi_j(x) [y^\alpha K_\alpha(\lambda_i^{1/2} y)]_y [y^\alpha K_\alpha(\lambda_j^{1/2} y)]_y. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{g} dx dy = \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j B_{i,\alpha} B_{j,\alpha} \int_0^{\infty} y K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y) K_{\alpha}(\lambda_j^{1/2} y) dy \int_{\Omega} \nabla_x \varphi_i(x) \cdot \nabla_x \varphi_j(x) dx \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j B_{i,\alpha} B_{j,\alpha} \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} [y^{\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]_y [y^{\alpha} K_{\alpha}(\lambda_j^{1/2} y)]_y dy \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i b_i B_{i,\alpha}^2 \int_0^{\infty} y K_{\alpha}^2(\lambda_i^{1/2} y) dy + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i B_{i,\alpha}^2 \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} [y^{\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]_y^2 dy \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i b_i \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} [y^{\alpha} B_{i,\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]^2 dy + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} [y^{\alpha} B_{i,\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]_y^2 dy \\
& = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i b_i \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} \{ \lambda_i [y^{\alpha} B_{i,\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]^2 + [y^{\alpha} B_{i,\alpha} K_{\alpha}(\lambda_i^{1/2} y)]_y^2 \} dy.
\end{aligned}$$

Assim

$$\langle A_{\alpha}(u), g \rangle = \frac{1}{k_{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} [\lambda_i \psi(y)^2 + (\psi'(y))^2] dy. \quad (5.3)$$

Mas, pela equação dada em (4.4), temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} \lambda_i \psi(y)^2 dy &= \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} \psi_{yy}(y) \psi(y) dy + (1-2\alpha) \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} \psi(y) y^{-1} \psi'(y) dy \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi(y) \psi_y(y) \Big|_0^b - \int_0^{\infty} y^{1-2\alpha} |\psi_y(y)|^2 dy. \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Substituindo (5.4) em (5.3), segue que

$$\langle A_{\alpha}(u), g \rangle = \frac{1}{k_{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \left[\lim_{b \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi(y) \psi_y(y) \Big|_0^b \right].$$

Mas, por (4.36) e (4.39), temos que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{1-2\alpha} \psi(y) \psi_y(y) = 0.$$

Por outro lado, usando (4.34), segue que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi(y) \psi_y(y) = \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \psi(y) \right) \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \psi_y(y) \right) = 1 \cdot (k_{\alpha} \lambda_i^{\alpha}) = k_{\alpha} \lambda_i^{\alpha}.$$

Assim,

$$\langle A_\alpha(u), g \rangle = \frac{1}{k_\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \lambda_i^\alpha. \quad (5.5)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^\alpha(u), g \rangle &= \langle (-\Delta)^\alpha(u), g \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)} \varphi_i, \sum_{j=1}^{\infty} b_j \varphi_j \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha a_i b_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{k_\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \lambda_i^\alpha. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por (5.6) e (5.5), concluímos que

$$\langle (-\Delta)^\alpha(u), g \rangle = \langle (A)_\alpha(u), g \rangle, \quad \forall g \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

□

Teorema 5.5. *Os operadores A_α e $(-\Delta)^\alpha$ coincidem no conjunto*

$$Y = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\alpha} |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \infty \right\}.$$

Demonstração. A demonstração segue do Lema 5.4, da Proposição 3.5 e do fato de que $Y \subset H(\Omega, \alpha)$, pois dada uma função $u \in Y$, temos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda_i^\alpha < \lambda_i^{2\alpha}, \quad \text{para } i > k,$$

pois $\lambda_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$. Logo,

$$\lambda_i^\alpha |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 < \lambda_i^{2\alpha} |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2, \quad \text{para } k < i,$$

e como o membro do lado direito da desigualdade é o termo geral de uma série convergente, concluímos pelo teste da comparação que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha |\langle u, \varphi_i \rangle_{L^2(\Omega)}|^2$$

é convergente. Logo, $u \in H(\Omega, \alpha)$, portanto $Y \subset H(\Omega, \alpha)$.

□

Tendo definido o operador A_α , nosso próximo passo será definir seu inverso.

5.2 DEFININDO O OPERADOR B_α INVERSO DE A_α

Definição 5.6. *Considere o operador*

$$B_\alpha : \mathcal{V}'_0(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_0(\Omega) \quad (5.7)$$

$$g \longmapsto B_\alpha(g) = \text{Tr}_\Omega(v), \quad (5.8)$$

com v sendo a solução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(y^{1-2\alpha}\nabla v) = 0 \quad \text{em } \mathcal{C}, \\ v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ -\frac{1}{k_\alpha} \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{1-2\alpha} \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = g(x) \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (P_3)$$

ou seja, $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e satisfaz

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy = k_\alpha \langle g, \tilde{\mu}(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \tilde{\mu} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Teorema 5.7. *O problema (P_3) possui uma única solução fraca. O operador definido em (1.1) é o inverso de A_α .*

Demonstração. De fato, considere o funcional

$$\begin{aligned} J : H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \times H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \mu) &\longmapsto J(v, \mu) = \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \mu dx dy. \end{aligned}$$

Note, pela linearidade da integral e do gradiente, que J é bilinear. Além disso, note que, pela Desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned} |J(v, \mu)| &\leq \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v| |\nabla \mu| dx dy \\ &= \int_{\mathcal{C}} y^{\frac{1-2\alpha}{2}} |\nabla v| y^{\frac{1-2\alpha}{2}} |\nabla \mu| dx dy \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla \mu|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{k_\alpha^2} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \|\mu\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}, \quad \forall (v, \mu) \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) \times H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), \quad \text{e} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$J(v, v) = \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} |\nabla v|^2 dx dy = \frac{1}{k_\alpha^2} \|v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2.$$

Dada uma função $g \in \mathcal{V}'_0(\Omega)$ defina o funcional linear contínuo

$$\begin{aligned} F : H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\mu} &\longmapsto F(\tilde{\mu}) = k_\alpha \langle g, \tilde{\mu}(\cdot, 0) \rangle, \end{aligned}$$

Desta forma, pelo Teorema de Lax -Milgram (Teorema 2.21), segue que existe uma única função $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ tal que

$$\begin{aligned} J(v, \tilde{\mu}) &= \langle F, \tilde{\mu} \rangle, \quad \forall \tilde{\mu} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), \\ \text{então } \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy &= k_\alpha \langle g, \tilde{\mu}(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Vejam agora que B_α é o operador inverso do operador A_α .

Afirmção 1: $(B_\alpha \circ A_\alpha)(u) = u, \quad \forall u \in \mathcal{V}_0(\Omega).$

De fato, por definição de A_α , dada uma função $u \in \mathcal{V}_0(\Omega)$ temos que

$$A_\alpha(u) = \frac{1}{k_\alpha} \frac{\partial v}{\partial y^\alpha} \Big|_{\Omega \times \{0\}},$$

com

$$\langle A_\alpha(u), \mu \rangle = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy, \quad \forall \mu \in \mathcal{V}_0(\Omega), \quad (5.11)$$

onde $v = E_\alpha(u)$ e $\tilde{\mu} = E_\alpha(\mu)$. Por outro lado, pela definição de B_α segue que

$$B_\alpha(A_\alpha(u)) = \text{Tr}_\Omega(w), \quad \text{com } w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx dy = k_\alpha \langle A_\alpha(u), \varphi(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \varphi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \quad (5.12)$$

Tome $\tilde{\mu} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ em (5.12) e usando (5.11) segue que

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy = k_\alpha \langle A_\alpha(u), \mu \rangle = \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy, \quad \forall \tilde{\mu} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}),$$

$$\text{então } \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla(w - v) \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy = 0, \quad \forall \tilde{\mu} \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \quad (5.13)$$

Tomando $\tilde{\mu} = w - v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, segue em (5.13) que

$$\|w - v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}^2 = 0,$$

ou seja, $w = v$ quase sempre em \mathcal{C} . Com isso segue que $\text{Tr}_\Omega(w) = \text{Tr}_\Omega(v) = u$, logo $B_\alpha(A_\alpha(u)) = \text{Tr}_\Omega(w) = u$, então $(B_\alpha \circ A_\alpha)(u) = u$.

O que conclui a prova da afirmação em questão.

Afirmção 2: $(A_\alpha \circ B_\alpha)(v) = v, \forall v \in \mathcal{V}'_0(\Omega)$.

De fato, dado um funcional $g \in \mathcal{V}'_0(\Omega)$, temos pela definição de B_α que $B_\alpha(g) = \text{Tr}_\Omega(v)$ com $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \mu dx dy = k_\alpha \langle g, \mu(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \quad (5.14)$$

Por outro lado, a definição de A_α nos diz que

$$A_\alpha(B_\alpha(g)) = \frac{1}{k_\alpha} \frac{\partial w}{\partial y^\alpha} \Big|_{\Omega \times \{0\}} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{1}{k_\alpha} \frac{\partial w}{\partial y^\alpha} \Big|_{\Omega \times \{0\}}, \mu \right\rangle = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy, \quad (5.15)$$

$\forall \mu \in \mathcal{V}_0(\Omega)$, onde $w = E_\alpha(B_\alpha(g))$ e $\tilde{\mu} = E_\alpha(\mu)$.

Observe que $\text{Tr}_\Omega(w) = B_\alpha(g) = \text{Tr}_\Omega(v)$, então $\text{Tr}_\Omega(w - v) = 0$.

Pelo Lema ?? temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \|\text{Tr}_\Omega(w - v)\|_{\mathcal{V}_0(\Omega)} = k_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|E_\alpha(\text{Tr}_\Omega(w - v))\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \\ &= k_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|E_\alpha(\text{Tr}_\Omega(w)) - E_\alpha(\text{Tr}_\Omega(v))\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \\ &= k_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|w - v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

ou seja, $w = v$ quase sempre.

Logo, por (5.15) e (5.14), segue que

$$\langle A_\alpha(B_\alpha(g)), \mu \rangle = \frac{1}{k_\alpha} \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \tilde{\mu} dx dy = \langle g, \mu(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \mu \in \mathcal{V}_0(\Omega).$$

Com isso segue que $A_\alpha(B_\alpha(g)) = g$.

Pelas afirmações 1 e 2 segue que B_α é o inverso de A_α . □

Teorema 5.8. $B_\alpha : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é auto-adjunto e compacto.

Demonstração. Faremos a demonstração em duas partes. Primeiro, provaremos que o operador

B_α é auto-adjunto.

Afirmção 1: O operador $B_\alpha : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é auto-adjunto.

Seja $f, g \in L^2(\Omega)$, logo

$$\langle B_\alpha(f), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} B_\alpha(f)g dx = \int_{\Omega} \text{Tr}_\Omega(v)g dx, \quad (5.17)$$

com $v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \mu dx dy = k_\alpha \langle f, \mu(\cdot, 0) \rangle = k_\alpha \int_{\Omega} f \mu(\cdot, 0) dx, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \quad (5.18)$$

Por outro lado,

$$\langle f, B_\alpha(g) \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f B_\alpha(g) dx = \int_{\Omega} f \text{Tr}_\Omega(w) dx, \quad (5.19)$$

com $w \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$ e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla \mu dx dy = k_\alpha \langle g, \mu(\cdot, 0) \rangle, \quad \forall \mu \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}). \quad (5.20)$$

Tome $\mu = w$ em (5.18) e $\mu = v$ em (5.20), logo

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla w dx dy = k_\alpha \langle f, \text{Tr}_\Omega(w) \rangle \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla w \cdot \nabla v dx dy = k_\alpha \langle g, \text{Tr}_\Omega(v) \rangle,$$

então

$$\langle f, \text{Tr}_\Omega(w) \rangle = \langle g, \text{Tr}_\Omega(v) \rangle.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} f \text{Tr}_\Omega(w) dx = \int_{\Omega} g \text{Tr}_\Omega(v) dx.$$

Portanto, por (5.17) e (5.19), segue que

$$\langle B_\alpha(f), g \rangle = \int_{\Omega} \text{Tr}_\Omega(v)g dx = \int_{\Omega} f \text{Tr}_\Omega(w) dx = \langle f, B_\alpha(g) \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Concluimos então que B_α é um operador auto-adjunto.

Afirmção 2: O operador $B_\alpha : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é compacto.

Seja $\{g_n\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\|g_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{g_n\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$, existe uma subsequência $\{g_{n_k}\}$ e $g \in L^2(\Omega)$ tal que $g_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} g$ em $L^2(\Omega)$. Assim

$$\int_{\Omega} g_{n_k} \mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g \mu, \quad \forall \mu \in L^2(\Omega).$$

Por outro lado, $B_\alpha(g_{n_k}) = \text{Tr}_\Omega(v_{n_k})$ e $B_\alpha(g) = \text{Tr}_\Omega(v)$, com $v_{n_k}, v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}), \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v_{n_k} \cdot \nabla \phi dx dy = \langle g_{n_k}, \phi(\cdot, 0) \rangle = \int_{\Omega} g_{n_k} \phi(x, 0) dx, \quad \forall \phi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \phi dx dy = \langle g, \phi(\cdot, 0) \rangle = \int_{\Omega} g \phi(x, 0) dx, \quad \forall \phi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Como $\phi(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} g_{n_k} \phi(x, 0) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g \phi(x, 0), \quad \forall \phi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Então

$$\int_{\Omega} y^{1-2\alpha} \nabla v_{n_k} \cdot \nabla \phi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} y^{1-2\alpha} \nabla v \cdot \nabla \phi, \quad \forall \phi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}),$$

logo

$$\int_{\Omega} y^{1-2\alpha} \nabla (v_{n_k} - v) \cdot \nabla \phi \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \phi \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C}).$$

Tome $\phi = v_{n_k} - v \in H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})$, logo

$$\|v_{n_k} - v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

então

$$\|\text{Tr}_\Omega(v_{n_k}) - \text{Tr}_\Omega(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v_{n_k} - v\|_{H_{0,L}^\alpha(\mathcal{C})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Assim,

$$B_\alpha(g_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} B_\alpha(g).$$

□

REFERÊNCIAS

- [1] ABRAMOWITZ, M. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Courier Corporation, Estados Unidos, 2012.
- [2] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. Pure and Mathematics 65, Academic Press, New York, 1975.
- [3] ALVES, M. D. O. *Um problema de extensão relacionado a raiz quadrada do Laplaciano com condições de fronteira de Neumann*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.
- [4] BARRERA, B. B. *Nonlocal problems in partial differential equations*. Tese de Doutorado, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2013.
- [5] BELL, W. W. *Special Functions for Scientists and Engineers*. D. Van Nostrand Company LTD, London, 1968.
- [6] BRANDLE, C., COLORADO, E., AND DE PABLO, A. A concave-convex elliptic problem involving the fractional laplacian. *Math. Ap.* 2 (2010).
- [7] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [8] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [9] CABRÉ, X., AND TAN, J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the laplacian. *Adv. Math.* 224 (2010), 2052–2093.
- [10] CAFFARELLI, L., AND SILVESTRE, L. An extension problem related to the fractional laplacian. *Comm. in Partial Differential Equations* 32 (2007), 1245–1260.
- [11] CAPELLA, A., DAVILA, J., DUPAIGNE, L., AND SIRE, Y. Regularity of radial extremal solutions for some non local semilinear equations. *Comm. Partial Differential Equations* 36 (2011), 1353–1384.
- [12] CAVALCANTI, M. M., AND DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem - UEM, Maringá, PR, 2009.
- [13] COURANT, H., AND HIBERT, D. *Methodl of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience, 1953.
- [14] CZAJA, R. *Differential Equations with Sectorial Operator*. Wydawnictwo Uniwersytetu Slaskiego, Katowice, 2002.

- [15] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, United States of America, 1998.
- [16] HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [17] JOST, J. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 214, 2002.
- [18] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with applications*. John Wiley Sons, 1978.
- [19] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Impa, Rio de Janeiro, 2012.
- [20] LIONS, J. L. Théorèmes de trace et d interpolation. *I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* 13. (1959), 389–403.
- [21] LIONS, J. L., AND MAGENES, E. Problemes aux limites non homogenes at applications. *Traroux et Recherches Mathematiques I* (1968).
- [22] MELO, R. A. *A teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*. Universidade Federal de Campina Grande (Mestrado em Matemática), Campina Grande, 2006.
- [23] MONTEFUSCO, E., PELLACCI, B., AND VERZINI, G. Fractional diffusion with neumann boundary conditions: the logistic equation. *Math. Ap.* 2 (2012).
- [24] NAYLOR, A. W., AND SELL, G. R. *Linear operator theory in engineering and science*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [25] OLIVEIRA, E. C. *Funções Especiais com Aplicações*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [26] TARTAR, L. *An Introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, vol. 3. Springer, Berlin, 2007.
- [27] TRIEBEL, H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. North- Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [28] WEYL, H. *Über die Asymptotische Verteilung der Eigenwerte*. Gottinger, 1911.