



Universidade
Estadual de Londrina

CRISTIANE OLDONI DA SILVA

MATÉRIA ESCURA SUPERSIMÉTRICA

Londrina
2008

MATÉRIA ESCURA SUPERSIMÉTRICA

Cristiane Oldoni da Silva

Orientador: Dr. Manoel Simões

Co-orientador: Dr. Mario Goto

Londrina
2008

Cristiane Oldoni da Silva

MATÉRIA ESCURA SUPERSIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Simões Filho.
Co-orientador: Prof. Dr. Mario Goto.

Londrina
2008

Cristiane Oldoni

MATÉRIA ESCURA SUPERSIMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em 08 de Fevereiro de 2008.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Mario Goto
Universidade Estadual de Londrina
Co-orientador

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Ronald Cintra Shellard
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

**Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586m Silva, Cristiane Oldoni da.
Matéria escura supersimétrica / Cristiane Oldoni da Silva. Londrina,
2008.
165f. : il.

Orientador: Manuel Simões Filho.
Co-orientador: Mario Goto.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina,
Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física,
2008.
Bibliografia: 158-165.

1. Matéria escura(Cosmologia) – Teses. 2. Partículas(Física nuclear) –
Teses. 3. Neutralinos – Teses. I. Simões Filho, Manuel. II. Goto, Mario.
III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 539.12

Aos meus pais, Luiz e Edia, e à minha irmã,
Karen, os amores da minha vida.

“A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o misterioso. É esta a emoção fundamental que está na raiz de toda a ciência e arte.”

Albert Einstein

Agradecimentos

Aos meus pais, Luiz e Edia, e à minha irmã, Karen, que me apoiaram imensamente durante todos os meus anos acadêmicos, em especial durante o período do mestrado, sendo pacientes comigo, me ajudando, me apoiando, me aconselhando, sempre torcendo pelo meu sucesso e me incentivando a fazer o melhor possível.

Ao meu co-orientador, Prof. Mario Goto, pela dedicação, orientação e amizade, durante minha graduação e, em especial, neste dois anos de mestrado, e pela colaboração de fundamental importância na realização deste trabalho.

A todos os demais professores que colaboraram para a minha formação, que se dedicaram à difícil tarefa de ensinar, ajudando-me a trilhar esta importante etapa de minha vida. Alguns, foram mais que professores, foram amigos e, algumas vezes, até mesmo pais. Nossas conversas certamente me zeram crescer como discente e como ser humano. Obrigada pelos preciosos conselhos.

Aos colegas de turma, aos meus amigos do mestrado, e a todos os outros amigos que z todos esses anos em Londrina, que me apoiaram nos momentos difíceis e que festejaram comigo minhas conquistas. Não posso, nem devo, citar nomes, porque foram tantas pessoas importantes para a minha vida que certamente acabaria, injustamente, esquecendo alguém. Todos vocês permanecerão entre as melhores lembranças destes anos dourados.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Agradeço também à CAPES pelo apoio nanceiro.

Cristiane Oldoni

Londrina, Fevereiro de 2008.

Resumo

A identidade da matéria escura é um dos grandes enigmas do nosso Universo. A solução para este mistério pode estar associada à supersimetria, uma simetria que relaciona férmions e bósons, ainda não verificada experimentalmente. Em muitas extensões supersimétricas do Modelo Padrão da física de partículas, a partícula supersimétrica mais leve (LSP) é estável, o que significa que ela não pode decair, sendo, portanto, uma promissora candidata à matéria escura. O neutralino mais leve, que aparece no Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM), pode ser identificado como um candidato em sua procura através de detecção direta e indireta e em futuros aceleradores.

Abstract

The identity of dark matter is one of the greatest puzzles of our Universe. Its solution may be associated with supersymmetry, a symmetry that relates fermions and bosons and has not been verified experimentally so far. In many supersymmetric extensions of the Standard Model of particle physics the lightest supersymmetric particle (LSP) is stable, what means that it cannot decay and is hence a promising dark matter candidate. The lightest neutralino, which appears in the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM), can be identified as such a candidate in indirect and direct dark matter searches and at future colliders.

Sumário

1	Introdução	1
2	Supersimetria	6
2.1	Transformações de Poincaré	8
2.1.1	Grupo de Poincaré	12
2.1.2	Álgebra de Lie graduada	22
2.2	Supersimetria	25
2.3	Supercampos e Transformações de Supersimetria	26
2.3.1	Supertranslação	30
2.3.2	Transformações de Supersimetria	32
2.3.3	Supercampos Escalares	35
2.3.4	Álgebra da Supersimetria	37
2.4	Projeção Chiral dos Supercampos	44
2.4.1	Derivada Covariante	45
2.4.2	Supercampos Chirais	53
2.4.3	Supercampos Espinoriais	60
2.5	Teoria Supersimétrica	66
2.6	Quebra Suave da Supersimetria (Soft Supersymmetry Breaking)	71
3	Modelo Supersimétrico Mínimo	74
3.1	Modelo Supersimétrico Mínimo	75
3.1.1	Paridade-R	77

3.1.2	Supermultipletos Chirais	78
3.1.3	Supermultipletos de Gauge	80
3.2	Construção do MSSM	80
3.2.1	Formalismo dos Supercampos	81
3.2.2	Lagrangiana Chiral	83
3.2.3	Lagrangiana de Gauge	84
3.2.4	Lagrangiana Supersimétrica para o MSSM	84
3.2.5	Modelo Supersimétrico Mínimo: Discussão Geral	85
3.2.6	MSSM: Espectro e Interações	92
3.3	Partícula Supersimétrica mais Leve (LSP)	106
3.4	Neutralinos	107
3.4.1	Aniquilação do Neutralino em Férmions	111
3.4.2	Aniquilação do Neutralino em Bósons de Gauge	112
3.4.3	Aniquilação do Neutralino em dois Fótons	112
3.4.4	Aniquilação do Neutralino em um Fóton e um Bóson ⁰	115
3.5	Soluções de Problemas do Modelo Padrão	117
4	Matéria Escura	120
4.1	Evidências Observacionais	122
4.1.1	Evidências Astrofísicas	122
4.1.2	Nucleossíntese Primordial	124
4.1.3	Radiação Cósmica de Fundo	127
4.1.4	Lentes Gravitacionais	131
4.2	Distribuição de Matéria Escura pelo Universo	133
4.3	Estimativa da Quantidade de Matéria Escura	136
4.4	Natureza da Matéria Escura	137
4.4.1	Neutrinos Massivos	139
4.4.2	Partículas Massivas Fracamente Interagentes	139

4.5	Matéria Escura Supersimétrica	141
4.5.1	Áxions	142
4.5.2	Sneutrinos	142
4.5.3	Gravitinos	143
4.5.4	Axinos	143
4.5.5	Neutralinos	143
4.5.6	Candidatas Superpesadas	144
4.5.7	Q-balls	145
4.5.8	Outros Candidatos Supersimétricos	145
4.6	Neutralinos e Energia Escura	145
4.7	Algumas Tentativas de Detecção	146
4.7.1	Detecção Direta	146
4.7.2	Raios Cósmicos Anômalos	148
5	Conclusão	150
A	Representações das Matrizes de Dirac	152
	Referências	158

Lista de Figuras

2.1	Evolução das três constantes de acoplamento fundamentais.	7
2.2	Medidas da evolução das constantes de acoplamento de gauge num cenário sem supersimetria (à esquerda) e com supersimetria (à direita) [2].	8
3.1	Densidade relíquia de neutralinos com e sem coaniquilações versus a composição dos neutralinos [17].	110
3.2	Diagramas para a aniquilação de neutralinos em pares de férmions [1].	111
3.3	Diagramas para a aniquilação de neutralinos em pares de bósons de gauge [1].	112
3.4	Diagramas de Feymann com um loop que contribuem para a aniquilação de neutralinos em dois fótons [19].	114
3.5	Diagramas de Feymann incluídos no cálculo de $\tilde{\chi}^-$, no processo $\tilde{\chi}^0 + \tilde{\chi}^0$ [20].	115
3.6	Diagramas de Feymann incluídos no cálculo de $\tilde{\chi}^+$, no processo $\tilde{\chi}^0 + \tilde{\chi}^0$ [20].	116
3.7	Diagramas de Feymann incluídos no cálculo de $\tilde{\chi}^-$, no processo $\tilde{\chi}^0 + \tilde{\chi}^0$ [20].	117
3.8	Diagramas de Feymann incluídos no cálculo de $\tilde{\chi}^+$, no processo $\tilde{\chi}^0 + \tilde{\chi}^0$ [20].	118
3.9	Uma classe adicional de diagramas descrevendo a transição $\tilde{\chi}^0 \rightarrow \tilde{\chi}^0$ que aparece apenas no processo de [21].	118

4.1	Curva de rotação da galáxia espiral M33. A curva pontilhada mostra a distribuição aproximada da curva de rotação devida ao disco luminoso estelar. Há também uma pequena contribuição de gás (não mostrada) [26].	123
4.2	Abundâncias previstas dos elementos leves em função da densidade de bárions. A faixa azul destaca a determinação da densidade de bárions baseada em recente medida da abundância primordial de deutério [27].	125
4.3	Mapa do céu obtido pelo satélite WMAP da NASA [35].	129
4.4	Espectro angular de flutuações obtido pelo WMAP [39].	130
4.5	Trajetória de um raio de luz sendo defletido por um corpo massivo [41]. . .	132
4.6	Curva de rotação da Via Láctea [46].	133
4.7	Curvas de rotação dos sistemas disco+halo, com parâmetros escolhidos de acordo com alguns dados observacionais. As linhas pontilhadas indicam a contribuição do halo de matéria escura [48].	135
4.8	Distribuição de massa no Universo.	137

Capítulo 1

Introdução

O conceito de simetria está intimamente relacionado às propriedades do espaço-tempo, que assume-se homogêneo e isotrópico, baseando-se na idéia de que não existem locais ou orientações privilegiadas. O ser humano, ao aceitar o fato de que não se encontrava no centro do Universo, fez com que seu conhecimento sobre a natureza do mesmo aumentasse rapidamente, com a vantagem de ser fundamentado em leis universais, válidas em qualquer lugar, para qualquer observador. Somente assim teria sentido se falar em Cosmologia por exemplo, onde os conhecimentos adquiridos são aplicados em todo o Universo. As leis fundamentais da física estão amparadas nestes ideais de homogeneidade e isotropia do espaço-tempo através do Princípio da Relatividade, implícito na física newtoniana e explícito na física einsteniana.

A descoberta da relação entre simetrias e leis de conservação e o estabelecimento das simetrias locais, através da introdução dos campos de gauge, levaram às teorias de gauge, base dos modelos das interações fundamentais, como o Modelo Padrão. Neste ponto, pode-se frisar que as transformações de simetria podem ser de coordenadas externas do espaço-tempo, que de nem o Grupo de Poincaré da Relatividade Restrita e o Grupo das Transformações Gerais de Coordenadas da Relatividade Geral, ou de variáveis ou parâmetros intrínsecos ou internos do sistema físico, base dos grupos (3), (2) e (1) do Modelo Padrão.

Os grupos de simetria acomodam e classificam as partículas. O grupo de Poincaré, definido pelas transformações de coordenadas externas, inter-relaciona todos os referenciais inerciais entre si, acomodando partículas e antipartículas nas diversas representações de massa e de spin. Existem partículas escalares (spin 0), espinoriais (spin $\frac{1}{2}$) e vetoriais (spin 1). As partículas, em geral, contêm mais graus de liberdade do que os fornecidos pelo Grupo de Poincaré (massa e spin), o mais conhecido sendo a carga elétrica.

Na formulação da mecânica quântica, a carga elétrica pode ser associada à invariância de fase das funções de onda. Então, partículas carregadas devem ser representadas por funções de onda complexas. Quando confrontada com a invariância de gauge do campo eletromagnético, observa-se que a invariância de fase somente subsiste se for devida localmente. Assim, a interação eletromagnética das partículas carregadas através do campo eletromagnético pode ser considerada consequência da invariância por transformações locais de fase, ou invariância de gauge. A invariância de gauge eletromagnética define o grupo (1) para a simetria de fase. As teorias de gauge são generalizações da invariância de gauge eletromagnética para grupos (), em especial (2) e (3) do Modelo Padrão.

Estes grupos de simetria interna acomodam partículas de mesmo spin em multipletos de mesma massa inter-relacionados por geradores, ou cargas, cujas relações de comutação definem a álgebra de Lie do Grupo. Representações do grupo de Poincaré acomodam partículas de spins diferentes, inteiros e semi-inteiros, bósons e férmions. No entanto, os seus geradores respeitam a natureza bosônica ou fermiônica destas partículas e isto ocorre porque os próprios geradores são de natureza bosônica, representação quadrivetorial e tensorial do grupo de Poincaré. Uma linha natural de generalização do grupo de Poincaré é a introdução de geradores de natureza fermiônica, representação espinorial do grupo. É a chamada "graduação" da álgebra de Lie do grupo de Poincaré, cuja característica é a presença de relações de anticomutação entre os geradores espinoriais, que define a álgebra de Lie graduada.

Nas últimas décadas, os estudos em física de partículas e cosmologia têm se aproximado

na tentativa de entender a dinâmica da evolução do nosso Universo até a presente época e resolver questões que vêm intrigando pesquisadores de ambas as áreas.

Do ponto de vista da física teórica, há indícios de que as interações fundamentais eram unificadas no universo primordial, sofrendo sucessivas quebras de simetria e o conseqüente desacoplamento das interações durante a evolução do Universo. Uma maneira de acomodar as teorias de gauge, base do Modelo Padrão, e a gravitação, parece ser a extensão supersimétrica do Grupo de Poincaré. Supondo que o universo primordial tenha sido supersimétrico, uma gama muito grande de partículas companheiras supersimétricas devem ter coexistido com as partículas usuais do Modelo Padrão. A extensão mínima supersimétrica do Modelo Padrão (MSSM) é um modelo que contém apenas um gerador supersimétrico ($\alpha = 1$) e, para evitar um decaimento catastrófico de prótons, tem como postulado importante a conservação da paridade-R. Atribui-se para as partículas do Modelo Padrão paridade $R = 1$ e para as partículas supersimétricas $R = -1$. Como conseqüência da conservação da paridade-R, a partícula supersimétrica mais leve (LSP) deve ser estável, e pode ser destruída apenas via aniquilação de pares. As partículas supersimétricas mais massivas decaem na LSP. Para ser consistente com os vínculos cosmológicos, a LSP deve ser neutra eletricamente e em cor. Conseqüentemente, a LSP, em uma teoria de paridade-R conservada, é fracamente interagente com a matéria bariônica, ou seja, comporta-se como um neutrino massivo estável, atravessando detectores sem ser diretamente observada. A LSP é determinada pela escala de quebra da Supersimetria. Os dados experimentais atuais sugerem a temperatura de 10^{16} como sendo a escala da quebra espontânea de simetria, o que traz o neutralino como a LSP. Espera-se que os neutralinos sejam não-relativísticos na presente época.

Um dos grandes enigmas atuais é que estima-se que apenas 4% da massa que constitui o Universo pode ser detectada através de radiação eletromagnética, sendo o restante matéria escura (aproximadamente 22%), acumulada nas grandes inhomogeneidades de matéria, como nos halos galácticos, que manifesta sua existência apenas através da força gravitacional exercida sobre outros objetos, e os outros 74% de uma energia, conhecida como

energia escura, uniformemente distribuída, a qual acredita-se estar relacionada ao fato do Universo atual estar se expandindo de modo acelerado. Através de estudos do movimento orbital das galáxias em aglomerados verificou-se que as velocidades de rotação das galáxias eram maiores do que o esperado. Analogamente, medindo-se a velocidade de rotação de estrelas em galáxias, observou-se que esta tende a um valor constante longe do centro galáctico, enquanto a luminosidade cai rapidamente com a distância radial. O fato da velocidade não diminuir longe do centro galáctico indica a existência de matéria não-luminosa, compondo o halo da galáxia. Outra evidência da existência de matéria escura são as lentes gravitacionais. De acordo com a teoria da relatividade geral, os raios luminosos são desviados ao passarem nas vizinhanças de um corpo massivo. Neste caso, as medidas indicam também massas muito superiores às observadas. Ainda, as medidas observacionais de radiação cósmica de fundo também constituem um forte argumento a favor da matéria escura.

A matéria escura pode ser formada por WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles - partículas fracamente interagentes, matéria não-bariônica) ou por MACHOs (Massive Compact Halo Objects - objetos maciços do halo, constituídos de matéria bariônica). Contudo, a teoria da nucleossíntese, predita no modelo do Big Bang, contradiz a hipótese de que haja muito mais matéria bariônica do que aquela visível no Universo. Isto significa que grande parte da matéria escura deve ser de natureza não-bariônica, composta de partículas massivas (WIMPs), que interagem fracamente entre si e com a matéria bariônica, reagindo quase que exclusivamente à gravidade.

Um dos candidatos à matéria escura são os neutralinos [1]. Estas partículas são uma superposição de estados associados aos gauginos (superparceiros associados aos bósons de gauge) e higgsinos (superparceiros dos bósons de Higgs) e que têm a propriedade de serem estáveis, o que significa que ainda devem existir como relíquias do Big Bang [2].

O objetivo deste trabalho é fazer uma revisão sobre supersimetria e sobre a possibilidade dos neutralinos serem responsáveis pela matéria escura.

Este trabalho é apresentado da seguinte forma: inicialmente será apresentado o for-

malismo da supersimetria e, em seguida, o Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM), mostrando que a partícula estável supersimétrica mais leve (LSP), o neutralino, é uma superposição de gauginos e higgsinos. Por fim, fazemos uma revisão sobre matéria escura e sobre a possibilidade da matéria escura ser formada, em parte, por partículas supersimétricas, como os neutralinos.

Capítulo 2

Supersimetria

Um dos objetivos da Física de Partículas é juntar as teorias que descrevem as interações em uma teoria unificada. A vantagem de uma teoria unificada sobre muitas teorias fragmentadas é que ela frequentemente oferece uma explicação mais elegante dos dados, sendo capaz de mostrar a direção para futuras áreas de estudos teórico e experimental. Se for possível uma unificação das interações observadas, então elas representariam aspectos diferentes de uma mesma interação.

Desde o início dos anos 70, há tentativas de combinar a interação forte, descrita pela Cromodinâmica Quântica (QCD), com a interação eletrofraca, descrita pela Teoria de Weinberg-Salam (WST) em uma “Grande Teoria Unificada” (GUT). Dados e teorias recentes mostram que a constante de acoplamento forte diminui para colisões a energias elevadas. O mesmo acontece para a constante de acoplamento fraco, porém a uma taxa menor. Já a constante de acoplamento eletromagnética, que é a menor das três, aumenta [3]. Portanto, acredita-se que as interações eletrofraca e forte se unam em uma única interação a energias suficientemente altas, como mostrado na figura 2.1.

As medidas das constantes de acoplamento no LEP, figura 2.2, mostram que elas não evoluem para um valor unificado se não houver supersimetria, mas o fazem quando se inclui a supersimetria, em uma escala de 2×10^{16} [4].

No modelo padrão da física de partículas, as partículas que constituem a matéria

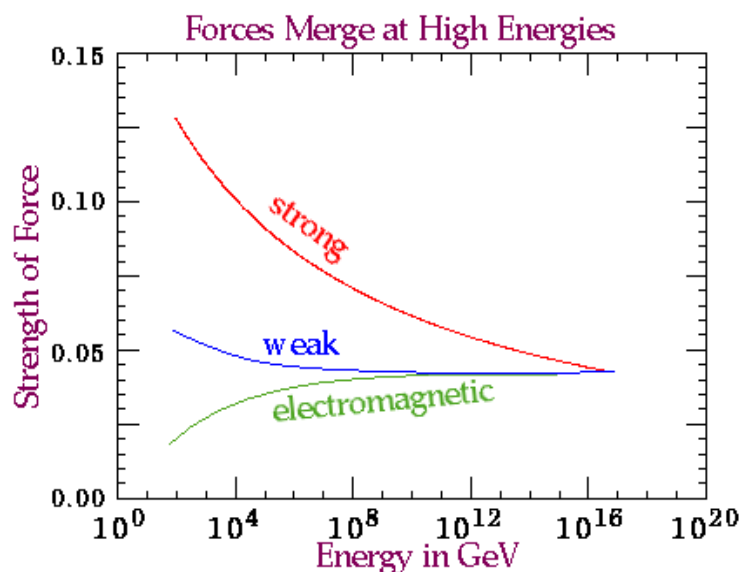


Figura 2.1: Evolução das três constantes de acoplamento fundamentais.

(quarks e léptons) são férmions. As partículas que geram forças (fótons, glúons, partículas \pm e 0 e grávitons) e partículas de Higgs são bósons. As simetrias formam a base do Modelo Padrão. Elétrons e neutrinos de elétrons, por exemplo, estão relacionados por uma simetria, de “sabor”, que também relaciona quarks (up) a quarks (down) [5]. Uma manifestação diferente dessa mesma simetria associa as partículas 0 e \pm . Os glúons estão relacionados por uma simetria de “cor”, que também relaciona diferentes “cores” de quarks. Essas simetrias relacionam férmions a férmions e bósons a bósons, porque os estados quânticos de bósons e férmions são muito diferentes para serem relacionados por meio de uma simetria simples.

A supersimetria é uma extensão do Grupo de Poincaré que unifica partículas de spin inteiro (bósons) e semi-inteiro (férmions), através de cargas fermiônicas, anticomutantes, que de nem a “graduação” da álgebra de Lie do Grupo de Poincaré [6]. Isto quer dizer que as teorias da supersimetria incorporam propriedades matemáticas que inter-relacionam os férmions e os bósons.

Em essência, as transformações supersimétricas adicionam um componente fermiônico a cada bóson de gauge e um componente bosônico a cada partícula (férmion), o que leva à conversão entre férmions e bósons. Para que as partículas conhecidas obedeçam à

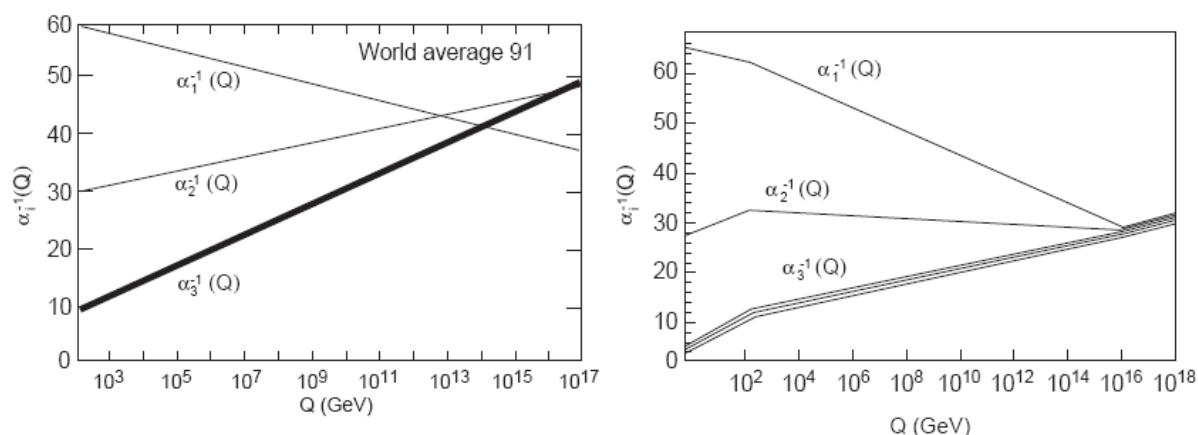


Figura 2.2: Medidas da evolução das constantes de acoplamento de gauge num cenário sem supersimetria (à esquerda) e com supersimetria (à direita) [2].

supersimetria, cada uma delas deve ter um parceiro supersimétrico. Assim, cada bóson deve ter um parceiro fermiônico e cada férmion, um parceiro bosônico. Como as partículas conhecidas não possuem propriedades adequadas para serem pares umas das outras, novas partículas são necessárias. Na hipótese da existência de Supersimetria, atualmente muitas partículas supersimétricas já deveriam ter decaído em uma partícula supersimétrica mais leve, de modo que não seria possível se proceder à detecção de grande parte delas.

Na próxima seção será feita uma revisão da álgebra do Grupo de Poincaré e de sua extensão para a álgebra de Lie graduada.

2.1 Transformações de Poincaré

Acredita-se atualmente que o espaço é uniforme, isto é, homogêneo e isotrópico. Isto quer dizer que todos os sistemas de referenciais inerciais devem ser equivalentes. Esta arbitrariedade na escolha de referenciais é devida ao fato de que não se pode localizar nenhum ponto ou orientação privilegiados que possam identificar um referencial absoluto.

Na relatividade einsteniana, de ne-se o espaço-tempo de Minkowski, cujas coordenadas contravariantes,

$$(\) = (\begin{smallmatrix} 0 \\ \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}), \quad (2.1)$$

representam eventos localizados no espaço, com coordenadas $x^1 = \dots$, $x^2 = \dots$, $x^3 = \dots$, e no tempo, no instante $x^0 = \dots$. De ne-se, também, as coordenadas covariantes, que são representadas por

$$(x_\mu) = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) = (x^0 \ \dots), \quad (2.2)$$

lembrando que podemos fazer a conversão de coordenadas contravariantes para covariantes utilizando o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, através de

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

e, inversamente,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

As transformações de Lorentz atuam sobre as coordenadas como

$$x^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (2.3)$$

com a condição de que a métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (2.4)$$

seja invariante, isto é,

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \quad (2.5)$$

e, portanto,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu, \quad (2.6)$$

onde as componentes do tensor métrico são dadas como

$$\begin{aligned} g_{00} &= g^{00} = 1 \\ g_{\alpha\alpha} &= g^{\alpha\alpha} = 1 \text{ para } \alpha = 1, 2, 3 \\ g_{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta} = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em forma matricial, ca

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $g^{\alpha\beta}$ representa a matriz transposta de $g_{\alpha\beta}$, de modo que

$$\det g = \pm 1. \quad (2.9)$$

Além disso,

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{0\alpha} \\ g_{\alpha 0} & g_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = 1, \quad (2.10)$$

isto é,

$$g_{00} = 1. \quad (2.11)$$

Se $\det g = +1$ a transformação é própria e se $\det g = -1$ é imprópria. Se $g_{00} = 1$ a transformação é ortócrona e se $g_{00} < 1$, não-ortócrona.

As transformações de Lorentz contínuas são próprias e ortócronas, contendo rotações espaciais próprias e deslocamentos uniformes. Quaisquer outras transformações podem ser construídas como produto de uma transformação de Lorentz própria e inversões espaciais e/ou temporal, razão pela qual é suficiente concentrar os estudos somente sobre as transformações próprias e ortócronas que, em forma infinitesimal, cam

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

com $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ e a condição $\eta_{\alpha\alpha} = 0$ para satisfazer à invariância da métrica. As transformações de Lorentz formam uma estrutura de grupo contendo 6 (seis) parâmetros

essenciais (3 das rotações e 3 dos deslocamentos uniformes).

Leis físicas relativísticas devem ser invariantes por transformações de Lorentz, ou seja, devem ser descritas por equações covariantes, o que quer dizer que devem ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Grandezas relativísticas, conforme as propriedades das transformações induzidas pelas transformações de Lorentz (2.3), são classificadas como

a) escalares, que são invariantes

$$\#^{(0)} = \#(); \quad (2.13)$$

b) vetores, cujas componentes transformam-se da mesma forma que as componentes das coordenadas,

$${}^0({}^0) = ({}^0); \quad (2.14)$$

c) espinores [7], que transformam-se como

$$\$(^{0}) = ({}^0)\$(); \quad (2.15)$$

e

d) tensores de ordem genérica [8], cujas componentes transformam-se, índice a índice, como as componentes dos vetores,

$${}^0 \cdots ({}^0) = \cdots ({}^0). \quad (2.16)$$

De uma forma geral pode-se considerar os vetores como tensores de primeira ordem e os escalares como tensores de ordem zero. Os pseudo-escalares, pseudo-vetores, etc. transformam-se da mesma forma que os escalares, vetores, etc., a menos do fator multiplicativo \det que determina a troca de sinal quando houver uma inversão espacial ou temporal.

As transformações de Lorentz (2.3) acrescidas de translações no espaço-tempo de nem as transformações de Poincaré ou transformações de Lorentz não-homogêneas,

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (2.17)$$

onde os termos de translação acrescentam mais 4 parâmetros independentes. As transformações de Poincaré formam uma estrutura de grupo contendo 10 parâmetros. As propriedades dos campos escalares, vetoriais, espinoriais são unicamente determinadas pelas transformações de Lorentz, visto que por translações estas grandezas são invariantes.

Como as transformações de Poincaré relacionam todos os referenciais inerciais entre si, as equações que descrevem as leis da natureza devem ser covariantes. Transformações que mantêm as equações invariantes são conhecidas como transformações de simetria.

2.1.1 Grupo de Poincaré

As transformações de Lorentz (2.3) e as transformações de Poincaré (2.17) relacionam os diversos referenciais inerciais entre si. As quantidades relevantes a este sistema podem ser grandezas escalares, vetoriais, espinoriais, tensoriais, etc., as quais se relacionam pelas transformações (2.13-2.16), respectivamente, nestas mudanças de referenciais.

Em vez de aplicar as transformações de simetria para mudanças de referenciais mantendo x_0 o sistema físico, pode-se manter o referencial x_0 e aplicar as transformações sobre o sistema físico. Estes dois procedimentos são sicamente equivalentes e, embora na física clássica prevaleça o primeiro caso, na mecânica quântica é mais proveitoso considerar o segundo caso. Isto porque na mecânica quântica existem muitas transformações de simetria baseadas nas coordenadas internas do sistema, independentes das coordenadas do espaço-tempo (coordenadas externas), como as simetrias de gauge. Aplicando as transformações de simetria sobre o sistema físico, mantendo o referencial x_0 , pode-se unir o formalismo para tratar destes dois tipos de transformações.

Considere um sistema físico satisfazendo a determinadas leis físicas e um outro sistema S^0 , idêntico a S , a menos de uma transformação de simetria,

$$S^0 = L(S), \quad (2.18)$$

de modo que S^0 deve satisfazer às mesmas leis físicas de S , quando observados no mesmo referencial R . Na linguagem da mecânica quântica, o vetor de estado

$$|\psi^0\rangle = |\psi\rangle \quad (2.19)$$

representa o sistema S no referencial R , enquanto que o vetor de estado $|\psi^0\rangle$ representa S^0 no mesmo referencial.

Fazer a transformação do sistema físico S mantendo o referencial R fixo, equação (2.18), é equivalente a fazer uma transformação inversa do referencial,

$$S^0 = L^{-1}(S), \quad (2.20)$$

mantendo o sistema físico S fixo, com as coordenadas de S^0 relacionadas às coordenadas de S através da transformação direta

$$S^0 = L(S). \quad (2.21)$$

No referencial R^0 o sistema físico S é representado pelo vetor de estado $|\psi^0\rangle$ e, dada a arbitrariedade da escolha da origem do referencial, o sistema S visto do referencial R^0 é idêntico ao sistema S^0 visto do referencial R , fato que pode ser traduzido pela igualdade

$$|\psi^0\rangle = |\psi^0\rangle \quad (2.22)$$

para

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{L}(\mathbf{q}), \quad (2.23)$$

onde \mathbf{q} representa as coordenadas numéricas, do centro de massa, por exemplo, do sistema físico. De uma forma geral, o sistema \mathcal{S}^0 visto do referencial \mathcal{S} ca

$$\mathbf{q}_0(\cdot) = \mathbf{q}^0(\cdot) - \mathbf{q}^0(\cdot), \quad (2.24)$$

onde a primeira igualdade deve ser considerada como a definição para a função $\mathbf{q}^0(\cdot)$.

Pela transformação de coordenadas (2.19), o vetor de estado $\mathbf{q}_0(\cdot)$ transforma-se como

$$\mathbf{q}_0(\cdot) = \mathbf{q}^0(\cdot) = (\mathbf{L})\mathbf{q}(\cdot) \quad (2.25)$$

onde (\mathbf{L}) é o operador que relaciona $\mathbf{q}^0(\cdot)$ e $\mathbf{q}(\cdot)$, e, considerando que as coordenadas devem ser do referencial \mathcal{S} ,

$$\mathbf{q}^0(\cdot) = (\mathbf{L})\mathbf{q}(\mathbf{L}^{-1}). \quad (2.26)$$

Em forma infinitesimal, a transformação de coordenadas (2.21) e a sua inversa cam

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{L} = \mathbf{1} + \delta \mathbf{L} \quad \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{1} - \delta \mathbf{L} \quad (2.27)$$

e o vetor de estado transforma-se como

$$\mathbf{q}^0(\cdot) = \mathbf{q}(\mathbf{L}^{-1}) + \delta \mathbf{q}(\cdot), \quad (2.28)$$

isto é,

$$\delta \mathbf{q}^0(\cdot) = \delta \mathbf{q}(\mathbf{L}^{-1}) + \delta \mathbf{q}(\cdot) = \delta \mathbf{q}(\cdot) - \delta \mathbf{L} \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}(\cdot), \quad (2.29)$$

que relaciona a variação total

$$\delta \mathbf{q}^0(\cdot) = \delta \mathbf{q}^0(\cdot) - \delta \mathbf{q}(\mathbf{L}^{-1}) = \delta \mathbf{q}(\cdot) + \delta \mathbf{L} \mathbf{q}(\cdot)$$

com a variação funcional

$$\delta \psi(x) = \psi'(x) \delta x \quad (2.30)$$

mais a variação devida à variação do argumento da função,

$$\delta_0 \psi(x) = \psi(x) - \psi(x - \delta x) = \delta x \psi'(x). \quad (2.31)$$

Em síntese, quando se faz a transformação do sistema físico mantendo o referencial x_0 , o vetor de estado $\psi^0(x)$ do novo sistema S_0 está relacionado como o vetor de estado $\psi(x)$ do sistema S pela variação funcional (2.30),

$$\delta \psi(x) = \psi^0(x) - \psi(x) = \delta x \psi'(x) = \delta \psi^0(x). \quad (2.32)$$

Como ilustração, considere uma translação pura, cuja transformação infinitesimal (2.27) assume a forma

$$\psi^0(x) = \psi(x + \delta x) = \psi(x) + \delta x \psi'(x). \quad (2.33)$$

Como as grandezas físicas são invariantes por translação,

$$\delta \psi(x) = 0 \quad (2.34)$$

e, portanto,

$$\delta \psi(x) = -\delta x \psi'(x),$$

e o campo transforma-se como

$$\psi^0(x) = (1 - \delta x \partial_x) \psi(x) = (1 + \delta x \partial_x) \psi(x) \quad (2.35)$$

Para uma translação finita

$$\psi^0(x) = e^{-\delta x \partial_x} \psi(x) \quad (2.36)$$

resulta

$$\phi^0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}), \quad (2.37)$$

onde

$$\phi^0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}), \quad (2.38)$$

é o operador (hermitiano) de momento linear, gerador do sub-grupo das translações do Grupo das Transformações Gerais de Lorentz.

A transformação de Lorentz na forma infinitesimal pode ser escrita como

$$\phi^0 = \phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi, \quad (2.39)$$

onde a invariância da métrica leva à condição

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -c^2. \quad (2.40)$$

As grandezas físicas transformam-se diferentemente conforme sejam escalares, vetores, etc. Vamos examinar, especificamente, as funções escalares e espinoriais transformando-se as transformações de Lorentz.

Escalares Uma função escalar, por definição, deve ser invariante pelas transformações de Lorentz,

$$\phi^0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \quad (2.41)$$

e, portanto,

$$\phi^0(\mathbf{x}) = (1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla}{c}) \phi(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

para

$$\mathbf{v} = -c \nabla \phi. \quad (2.43)$$

que define os geradores do Grupo de Lorentz para a representação espinorial. De uma forma mais geral, os geradores do Grupo de Lorentz podem ser escritos na forma

$$= \mathbf{K} + \mathbf{L}, \quad (2.50)$$

onde os operadores \mathbf{K} e \mathbf{L} comutam entre si e obedecem às mesmas relações de comutação de \mathbf{L} ,

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (2.51)$$

que definem a álgebra de Lie do Grupo.

As componentes espaciais \mathbf{L} formam a álgebra

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k + \epsilon_{ijl} K_l + \epsilon_{ijm} K_m + \epsilon_{ijn} K_n \quad (2.52)$$

do grupo $SO(3)$ de rotação, como pode-se ver definindo os três geradores (hermitianos) de rotação

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} L_{jk}, \quad (2.53)$$

operadores de momento angular. Aqui, ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita, com $\epsilon_{123} = 1$. Os restantes três geradores são das transformações puras de Lorentz,

$$= \epsilon_{ijk} K_j L_k, \quad (2.54)$$

operadores anti-hermitianos. Em termos destes novos geradores, as relações de comutação (2.51) e (2.52) cam

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= \epsilon_{ijk} L_k \\ [L_i, K_j] &= \delta_{ij} K_j - \epsilon_{ijk} L_k \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} L_k \end{aligned} \quad (2.55)$$

que inter-relacionam todos os geradores entre si e mostram que as transformações especiais de Lorentz não formam uma estrutura de sub-grupo, ao contrário das rotações.

Por outro lado, com as seguintes definições,

$$= \frac{1}{2}(\sigma_+ - \sigma_-) \quad (2.56)$$

e o seu conjugado hermitiano

$$\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_- - \sigma_+), \quad (2.57)$$

estes novos grupos de geradores σ_+ e \dagger satisfazem, cada qual, à álgebra de Lie do grupo (2), além de comutarem entre si,

$$\begin{aligned} [\sigma_+, \dagger] &= 0 \\ \sigma_+ \dagger &= \dagger \sigma_+ \\ \sigma_+^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Deste modo pode-se obter dois operadores invariantes,

$$S^2 = e^{-i\pi/2} \sigma_+ \sigma_- e^{i\pi/2} = \sigma_+ \sigma_-, \quad (2.59)$$

com auto-valores $S(S+1)$ e $L(L+1)$ respectivamente, S e L podendo assumir valores inteiros e semi-inteiros,

$$S, L = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \text{etc.},$$

como é bem conhecido do grupo (2) de spin. Assim, as representações do Grupo de Lorentz podem ser identificadas pelos pares (S, L) e os seus estados pelos auto-valores de S^2 e L^2 . Os grupos (2) definidos pelos geradores σ_+ e \dagger não são independentes, pois os mesmos podem ser intercambiados por conjugação hermitiana ou por operação de paridade, que transformam

$$\sigma_+ \rightarrow \sigma_- \quad \text{e} \quad \dagger \rightarrow \sigma_+ \quad (2.60)$$

Como

$$= + \uparrow, \quad (2.61)$$

o spin da representação (j, k) é a soma $j + k$. A seguir, alguns exemplos destas representações:

1. $(0, 0)$ - (pseudo) escalar, spin 0.
2. $(1/2, 0)$ - espinor de “mão esquerda” (left) spin 1/2.
3. $(0, 1/2)$ - espinor de “mão direita” (right) spin 1/2. (As convenções esquerda e direita são simples convenções.)

As representações $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ intercambiam entre si por transformações de paridade, não possuindo, portanto, paridades definidas. São espinores a duas componentes complexas denominados espinores de Weyl [7]. Se a paridade for relevante, recorre-se à representação da soma direta $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$, que são os espinores de Dirac. Representações de ordem mais alta (spin maior) podem ser obtidas pelo produto destas representações fundamentais. Por exemplo,

1. $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$ - quadri-vetor, spin 1.
2. $(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ - a parte escalar é o produto antissimétrico e a representação $(1, 0)$ a parte simétrica correspondente a um tensor antissimétrico de segunda ordem, auto-dual, $\mathbf{1} = \mathbf{1} = \cdot \binom{1}{2}$. A representação $(0, 1)$ que aparece no produto $(0, 1/2) \otimes (0, 1/2)$ é um tensor de segunda ordem, anti-auto-dual, $\mathbf{2} = \mathbf{2} = \cdot \binom{2}{2}$. O tensor eletromagnético $\mathbf{3}$ transforma-se como $(0, 1) \oplus (1, 0)$, pelo grupo de Lorentz.

O grupo de Poincaré, formado pelas Transformações Gerais de Lorentz mais as translações do espaço-tempo, contém 10 parâmetros essenciais associados aos 10 geradores, 4 de translação e 6 do grupo das Transformações Gerais de Lorentz. A álgebra de Lie do grupo de Poincaré é definida pelas relações de comutação

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [P_\mu, M_{\alpha\beta}] &= \delta_{\mu\alpha} P_\beta - \delta_{\mu\beta} P_\alpha \\ [M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] &= \delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} M_{\alpha\delta} + \delta_{\beta\delta} M_{\alpha\gamma} \end{aligned} \quad (2.62)$$

As representações do grupo de Poincaré são definidas pela massa e pelo spin, sendo a massa definida pelo invariante

$$P^\mu P_\mu = -m^2 \quad (2.63)$$

O outro operador de Casimir, que define o spin da representação, é construído com a ajuda do quadri-vetor de Pauli-Lubanski,

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta}, \quad (2.64)$$

que obedece às relações de comutação

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [W_\mu, M_{\alpha\beta}] &= \delta_{\mu\alpha} W_\beta - \delta_{\mu\beta} W_\alpha \\ [W_\mu, W_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde o invariante de Casimir,

$$W^\mu W_\mu = -m^2 s(s+1), \quad (2.66)$$

define a representação de massa m e spin s , para $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, inteiros e semi-inteiros.

Os estados dentro de cada representação de spin e massa não-nula são indicados pela

orientação da componente s_3 do spin, $s_3 = \dots$.

Para massa nula,

$$s_3 = 0, \quad (2.67)$$

e como

$$s_3 = 0, \quad (2.68)$$

e s_{\pm} devem ser proporcionais,

$$s_{\pm} = \pm s_{\mp}, \quad (2.69)$$

onde a constante de proporcionalidade \pm é dada pelo spin da representação. Neste caso, uma representação de spin $s = 0$ admite somente dois estados, correspondentes às duas únicas orientações do spin, ou helicidades, $+$ e $-$.

2.1.2 Álgebra de Lie graduada

Considere um conjunto de parâmetros α de uma transformação contínua para definir uma “graduação”,

$$s = 1 \text{ se } \alpha \text{ for fermiônico,}$$

de modo que se tenha

$$[s, \alpha] = (s - 1) \alpha. \quad (2.70)$$

Assim, se α e β forem bosônicos, ou se um deles for bosônico,

$$[\alpha, \beta] = \dots, \quad (2.71)$$

e se ambos, ψ e χ , forem fermiônicos,

$$[\psi, \chi] = 0, \quad (2.72)$$

ou seja, os parâmetros bosônicos comutam entre si e com os parâmetros fermiônicos, e os parâmetros fermiônicos anti-comutam entre si e comutam com os parâmetros bosônicos.

Suponha uma transformação $T(\lambda)$, que pode ser expressa como uma série de potências em λ ,

$$T(\lambda) = 1 + \lambda \psi + \frac{\lambda^2}{2} \psi^2 + \dots, \quad (2.73)$$

com

$$\psi = (1 - \lambda) \psi, \quad (2.74)$$

e a lei de composição

$$\psi(\lambda) \psi(\mu) = \psi[\lambda + \mu], \quad (2.75)$$

$\psi(\lambda)$ tendo a mesma graduação de ψ e μ , devida por

$$\psi(\lambda) = \lambda \psi + \frac{\lambda^2}{2} \psi^2 + \dots. \quad (2.76)$$

Comparando os termos de mesma potência em ψ e μ na equação (2.73), resulta a relação que define a álgebra de Lie graduada

$$\psi \psi - (1 - \lambda) \psi \psi = 2 \psi \quad (2.77)$$

para

$$2 \psi = (1 - \lambda) \psi \psi - \psi \psi. \quad (2.78)$$

A álgebra de Lie graduada assim definida generaliza a identidade de Jacobi na forma

$$(1 - \lambda) \{ \psi \psi \} \psi + (1 - \mu) \{ \psi \psi \} \psi + (1 - \nu) \{ \psi \psi \} \psi = 0, \quad (2.79)$$

onde o símbolo $\{\dots \dots\}$ pode indicar comutação ou anti-comutação seguindo a definição

$$\{\% \%\} = \% \% \quad (1) \quad \% \% \quad (2.80)$$

conforme o caráter bosônico ou fermiônico dos geradores $\%$ e $\%$.

A álgebra de Lie graduada pode ser vista como uma extensão da álgebra de Lie usual, introduzindo uma graduação através de geradores fermiônicos que obedecem a relações de anti-comutação entre si e de comutação com os demais geradores bosônicos. A álgebra de Lie do grupo de Poincaré pode ser graduada introduzindo os geradores espinoriais \mathfrak{G} com a característica fundamental de misturar os campos bosônicos e fermiônicos, o que permite a construção de multipletos contendo indistintamente bósons e férmions, levando à simetria bóson-férmion, a que se denomina supersimetria.

Considerando somente os geradores fermiônicos \mathfrak{G} , a relação de anti-comutação

$$\{\mathfrak{G} \mathfrak{G}^0\} = \mathfrak{G} \mathfrak{G}^0 + \mathfrak{G}^0 \mathfrak{G} \quad (2.81)$$

deve resultar numa quantidade bosônica e pode ser escrita, de uma forma geral, como

$$\{\mathfrak{G} \mathfrak{G}^0\} = \quad + 1 \quad + 2 \quad , \quad (2.82)$$

onde \mathfrak{G} são os geradores de momento, \mathfrak{G} os geradores do grupo de Lorentz e \mathfrak{G} geradores bosônicos de alguma simetria interna. Foi visto que as representações do grupo de Lorentz são identificadas pelos pares (j, ℓ) , com a soma $j + \ell$ definindo o spin da representação.

Assim, os geradores como representações do grupo de Lorentz com

$(1/2, 1/2)$ - quadri-vetor.

$(1, 0)$ e $(0, 1)$ - tensor antissimétrico auto-dual e anti-auto-dual.

$(0, 0)$ - escalar.

\mathfrak{G} $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ - componente $*$ e $\bar{*}$ do espinor de Dirac.

Considerando o gerador \mathbf{G} na representação básica $(102\ 0)$ e $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}$ na representação $(0\ 102)$, o produto $\mathbf{G}\mathbf{G}$ pertence à representação vetorial $(102\ 102)$, e portanto deve ser proporcional ao único quadri-vetor disponível dentre os geradores do grupo de Poincaré, de modo que

$$\{\mathbf{G}\mathbf{G}\} = \dots \quad (2.83)$$

Se tanto \mathbf{G} como $\mathbf{G}^0 = \mathbf{G}$ pertencerem à mesma representação $(102\ 0)$, como

$$(102\ 0) \times (102\ 0) = (1\ 0) + (0\ 0),$$

a relação de anti-comutação entre \mathbf{G} e \mathbf{G} deve ser uma combinação linear de \dots e \dots .

No entanto, como \dots e \mathbf{G} comutam entre si, é proibido o termo proporcional a \dots , de modo que deve-se ter

$$\{\mathbf{G}\mathbf{G}\} = 2 \dots \quad (2.84)$$

2.2 Supersimetria

Os novos geradores introduzidos pela supersimetria transformam férmions em bósons e vice versa, ou seja,

$$\mathbf{G} |5\ 7/8\rangle = |\mathfrak{g}\ 8\rangle \quad \text{e} \quad \mathbf{G} |\mathfrak{g}\ 8\rangle = |5\ 7/8\rangle. \quad (2.85)$$

Devido à sua natureza fermiônica, os operadores \mathbf{G} devem carregar spin 1/2, o que implica que a supersimetria deva ser uma simetria do espaço-tempo [2]. O grupo de Poincaré das translações espaciais e transformações de Lorentz deve ser estendido para incluir a nova simetria entre bósons e férmions.

Os operadores \mathbf{G} , que, por convenção, são espinores de Majorana, devem satisfazer às seguintes relações

$$\{\mathbf{G}\bar{\mathbf{G}}\} = 2 \dots, \quad (2.86)$$

$$\{\bar{G}_\alpha\} = 0, \quad (2.87)$$

$$[\bar{G}_\alpha, \bar{G}_\beta] = +\bar{G}_\alpha \bar{G}_\beta, \quad (2.88)$$

onde

$$\bar{G}_\alpha = (\bar{G}^\dagger)_\alpha \quad (2.89)$$

e

$$+ = \frac{1}{4} \quad (2.90)$$

são as constantes de estrutura da teoria. A relação (2.86) mostra que a álgebra da supersimetria também inclui a álgebra usual de Poincaré do espaço-tempo. Tanto os geradores de momento, eq. (2.87), quanto os geradores de momento angular anti-comutam com os geradores da supersimetria.

Assim como a invariância de Lorentz se manifesta no espaço-tempo de Minkowski, a supersimetria pode ser definida em um super-espaço de coordenadas $\{\bar{x}^\mu, \bar{\theta}^\alpha\}$, onde \bar{x}^μ são as coordenadas usuais do espaço-tempo de Minkowski, e $\bar{\theta}^\alpha$ e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ são as coordenadas espinoriais.

Um supercampo, portanto, é uma função, $\Phi(\bar{x}, \bar{\theta})$, definida em um super-espaço. É comum introduzir campos chirais representando as partículas da matéria e campos vetoriais representando os campos de gauge.

2.3 Supercampos e Transformações de Supersimetria

Teorias construídas com a generalização do grupo de Poincaré, introduzindo geradores espinoriais, são conhecidas como teorias supersimétricas e a álgebra resultante, que agora contém relações de anti-comutação destes geradores espinoriais, é denominada álgebra de Lie graduada.

Os geradores espinoriais (spin 1/2) permitem construir supermultipletos contendo partículas de spin inteiro (bósons) e semi-inteiro (férmions), formalizando a uni-

bóson-férmion.

Os supercampos destas teorias supersimétricas são funções de nidas sobre o que se denomina um super-espaço, contendo o espaço-tempo usual acrescido por dimensões extras de nidas por no mínimo quatro coordenadas fermiônicas, resultando num (super-)espaço de dimensão 8. As coordenadas deste super-espaço são de nidas por

$$(\quad), \quad (2.91)$$

onde x^μ são as coordenadas do espaço-tempo, elementos pares da álgebra de Grassman, e θ^i são as novas coordenadas, elementos ímpares da álgebra de Grassman. A estas novas coordenadas θ^i associa-se uma regra fundamental, que é a de anti-comutação,

$$\theta^i \theta^j + \theta^j \theta^i = 0, \quad (2.92)$$

com consequência imediata sobre qualquer função local $f(x, \theta)$. Isto porque, devido a esta regra de anti-comutação,

$$\theta^i \theta^i + \theta^i \theta^i = 0,$$

ou ainda,

$$\theta^i \theta^i = 0 \quad (\text{sem soma em } i) \quad (2.93)$$

de modo que os produtos

$$\theta^1 \theta^2 \theta^3 \cdots \theta^i \cdots \theta^j$$

($i = 1, 2, 3$ ou 4) serão identicamente nulos se $i \geq 4$, pois neste caso necessariamente surgirão produtos quadráticos, equação (2.93). Assim qualquer função $f(x, \theta)$ pode ser expandida como série de potências em θ , resultando numa função polinomial de grau nito em θ , no caso, de grau 4.

As quatro coordenadas θ^i podem ser consideradas como as componentes de um espinor

de Majorana,

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Um espinor de Majorana ψ , definido pela condição $\psi = \psi$, contém quatro componentes independentes, que podem ser tornadas reais se for adotada a representação de Majorana das matrizes de Dirac, que satisfazem à relação de anti-comutação

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij},$$

e a algumas outras propriedades, como, por exemplo,

$$(\alpha_i)^{\dagger} = \alpha_i \quad \text{e} \quad (\beta)^{\dagger} = \beta.$$

As coordenadas ψ_i também são reais.

Pode-se construir 16 produtos independentes com as coordenadas ψ_i , que são

$$\begin{array}{ll} 1 & 1 \\ \alpha_i & 4 \\ \alpha_i \alpha_j & 6, \\ \alpha_i \alpha_j \alpha_k & 4 \\ \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l & 1 \end{array} \quad (2.95)$$

sendo que existem

$$\binom{4}{2} = 6$$

combinações para os produtos do tipo $\psi\psi$ e

$$\binom{4}{3} = 4$$

combinações para os produtos do tipo $\psi\psi\psi$, e qualquer função definida sobre o super-espaco poderá ser expandida como

$$f(\psi) = f_0 + f_1 \psi + f_2 \psi\psi + f_3 \psi\psi\psi + \frac{1}{24} f_4 \psi\psi\psi\psi, \quad (2.96)$$

com os coeficientes numéricos escolhidos por conveniência.

Alternativamente, pode-se decompor $f(\psi)$ em uma série de produtos com propriedades bem definidas sob o grupo de Lorentz, ou seja, em termos de

1	escalar	1
ψ	espinor	4
$\bar{\psi}$	escalar	1
$\bar{\psi}\psi$	pseudo-escalar	1
$\bar{\psi}\psi\gamma_5$	pseudo-vetor	4
$\bar{\psi}\psi\gamma_5\gamma_\mu$	espinor	4
$\bar{\psi}\psi\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$	escalar	1

(2.97)

As potências e os produtos das coordenadas fermiônicas listadas em (2.95) e (2.97) podem ser relacionadas usando a identidade de Fierz, a saber,

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta = \psi\psi.$$

Ainda em (2.97), $\bar{\psi}$ é o espinor adjunto de ψ definido por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^0 \quad (2.98)$$

sendo que a igualdade $\psi^\dagger = \psi$ é válida para os espiniores de Majorana e na representação de Majorana das matrizes de Dirac.

2.3.1 Supertranslação

Considere uma transformação nas coordenadas do super-espço, que será denominada supertranslação,

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \theta + \epsilon \cdot (\theta^1 - \theta^2) \\ \theta^1 &= \theta^1 + \epsilon \end{aligned} \quad (2.99)$$

Pela própria definição da transformação acima, os parâmetros ϵ devem ser do mesmo tipo das coordenadas θ , anti-comutantes entre si,

$$\{\epsilon, \epsilon\} = 0 \quad (2.100)$$

e com θ ,

$$\{\epsilon, \theta\} = 0. \quad (2.101)$$

Em geral, quaisquer componentes espinoriais são anti-comutantes entre si.

Pode-se verificar que somente as supertranslações não formam uma estrutura de grupo.

Realmente, considere a transformação, infinitesimal,

$$\begin{aligned} \theta^0 &= \theta + \epsilon \cdot (\theta^1 - \theta^2) + \delta\theta^0 \\ \theta^1 &= \theta^1 + \epsilon + \delta\theta^1 \end{aligned} \quad (2.102)$$

onde, genericamente,

$$\begin{aligned} \delta\theta^0 &= \epsilon \cdot (\theta^1 - \theta^2) \\ \delta\theta^1 &= \epsilon \end{aligned} \quad (2.103)$$

Em seguida, uma outra transformação sucessiva,

$$\begin{aligned} x^{\mu\nu} &= x^{\mu} + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}) : x^{\rho} = x^{\rho} + \frac{1}{2}(\xi^{\rho} - \xi^{\sigma}) \\ x^{\mu\rho} &= x^{\mu} + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\rho}) = x^{\mu} + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

que resulta em

$$x^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}) + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) + \frac{1}{2}(\xi^{\nu} - \xi^{\sigma}) \quad (2.105)$$

Considerando que

$$\frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}) = \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) : \frac{1}{2}(\xi^{\nu} - \xi^{\sigma}) = \frac{1}{2}(\xi^{\nu} - \xi^{\sigma}) \quad (2.106)$$

e

$$\frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}) = \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) = 0, \quad (2.107)$$

a transformação resultante ca

$$\begin{aligned} x^{\mu\nu} &= x^{\mu} + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) + \frac{1}{2}(\xi^{\nu} - \xi^{\sigma}) \\ x^{\mu\rho} &= x^{\mu} + \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.108)$$

que contém um termo adicional de translação nas coordenadas do espaço-tempo, não sendo uma supertranslação devida pela equação (2.99).

Note que termos do tipo

$$\frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}),$$

apesar de serem reais, isto é,

$$\frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}) = \frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu}),$$

não o são no sentido usual, pois as potências

$$\frac{1}{2}(\xi^{\mu} - \xi^{\nu})$$

são identicamente nulas para $\nu \geq 4$, o que não ocorre com nenhum número real diferente

de zero.

2.3.2 Transformações de Supersimetria

As supertranslações por si só, definidas em (2.99), não definem uma estrutura de grupo. Deve-se entender a supersimetria como uma generalização do grupo de Poincaré, que permita unificar as diversas representações (do grupo de Poincaré) pela adição de geradores espinoriais que são justamente os geradores das supertranslações.

Assim, definem-se as transformações de supersimetria como o conjunto das transformações de Poincaré mais as supertranslações, que em forma infinitesimal pode-se escrever como

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu, \\ \theta_{\alpha\beta} &= -\theta_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

para

$$\begin{aligned} \psi &= \psi + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \psi, \\ \psi &= \psi + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \psi. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Estas transformações não definem uma estrutura de grupo.

Considere as transformações sucessivas

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu, \\ \theta_{\alpha\beta} &= -\theta_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

e

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu, \\ \theta_{\alpha\beta} &= -\theta_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Fazendo as substituições (2.111) em (2.112), resultam nas transformações

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \theta_{\alpha\beta} \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu, \\ \theta_{\alpha\beta} &= -\theta_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde os termos infinitesimais das transformações são dados pela equação (2.110),

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta^1 + \delta^1 + \delta^1 \delta^1 : \\ \delta_1 : &= \delta^1 \delta^1 + \delta^1 \delta^1 : \end{aligned} \quad (2.114)$$

e

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \delta^2 + \delta^2 + \delta^2 \delta^2 : \\ \delta_2 : &= \delta^2 \delta^2 + \delta^2 \delta^2 : \end{aligned} \quad (2.115)$$

Conseqüentemente, os termos de segunda ordem são

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 &= \delta^1 \delta_2 + \delta^1 \delta_2 : \\ &= \delta^1 \delta^2 + \delta^1 \delta^2 + \delta^1 \delta^2 \delta^2 + \delta^1 \delta^2 \delta^2 : \end{aligned} \quad (2.116)$$

e

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 : &= \delta^1 \delta_2 : + \delta^1 \delta_2 : \\ &= \delta^1 \delta^2 : + \delta^1 \delta^2 : + \delta^1 \delta^2 \delta^2 : \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde se recorre à notação simplificada

$$[\delta^+] = \delta^+ \quad (2.118)$$

para a contração total dos índices tensoriais. Veja também que

$$\begin{aligned} \delta_2 \delta_1 : &= \delta^1 \delta_2 : + \delta^1 \delta_2 : \\ &= \delta^1 \delta^2 : + \delta^1 \delta^2 : + \delta^1 \delta^2 \delta^2 : \end{aligned} \quad (2.119)$$

Invertendo a ordem das transformações (2.111) e (2.112), os termos de segunda ordem,

equações (2.116-2.119), cam

$$!_1!_2 = \omega^2 \omega_1 + \omega^2 \xi + \frac{1}{2} \tau^2 (\tau^1 + \frac{\mu}{2} \omega^2 (\tau^1 - \frac{\mu}{4} \tau^2 \omega^1 + \omega^2)) : \quad (2.120)$$

e

$$!_1!_2: = \frac{1}{4} \omega^2 \omega_2 + \frac{\mu}{4} \tau^2 \tau^1 : \quad \frac{1}{4} \tau^2 \tau^1 (1) \quad (2.121)$$

Para as coordenadas espinoriais na forma conjugada adjunta, a equivalente à equação (2.117) é

$$!_1!_2: = \frac{1}{4} \bar{\omega}^2 \omega_2 + \frac{\mu}{4} \tau^2 \tau^1 + (\tau^1 + \omega^2) \quad (2.122)$$

Os termos infinitesimais de segunda ordem, equações (2.116-2.119), das transformações sucessivas (1) e (2) e os termos correspondentes, equações (2.120-2.122), das transformações sucessivas (2) e (1) mostram a não-comutatividade das transformações de supersimetria,

$$[!_2 !_1] = !_3 \quad (2.123)$$

$$\dots$$

para

$$\begin{aligned} !_3 &= \omega^3 + \xi^3 + \frac{1}{2} \tau^2 \tau^1 \\ !_3: &= \frac{1}{4} \omega^3 + \frac{1}{4} \tau^2 \tau^1 \end{aligned} \quad (2.124)$$

com os novos parâmetros de nidos em termos dos parâmetros das transformações anteriores como

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \omega \omega_2 + \omega \omega_1^2 \\ \xi^3 &= \omega \xi_2 + \omega \xi_1 + (\tau^1 - \omega^2) \\ \tau^3 &= \tau + \frac{1}{4} \omega^2 \tau^1 + \frac{1}{4} \omega^2 \tau^1 \end{aligned} \quad (2.125)$$

Para a componente espinorial, deve-se considerar, também,

$$\tau^3 = \frac{1}{4} \omega^2 \tau^1 + \tau^2 + \tau^1 \omega^2 + \dots$$

A álgebra das transformações de supersimetria é definida, formalmente, pela relação de comutação

$$[Q_2, Q_1] = Q_3, \quad (2.126)$$

faltando determinar a representação dos geradores desta álgebra.

Para as supertranslações puras, as relações de comutação (2.123) cam

$$\begin{aligned} [Q_2, Q_1] &= Q_3 = \gamma^3 = (\gamma^1 - \gamma^2) \cdot \\ [Q_2, Q_1] &: = 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

2.3.3 Supercampos Escalares

Os supercampos escalares são funções definidas sobre o super-espaço invariantes pelas transformações de supersimetria,

$$\#^0(\theta^0, \psi^0) = \#(\theta, \psi). \quad (2.128)$$

Analogamente, os supercampos vetoriais são definidos pela transformação

$$\#^0(\theta^0, \psi^0) = \#(\theta, \psi), \quad (2.129)$$

os supercampos espinoriais por

$$\mathcal{S}^0(\theta^0, \psi^0) = (\gamma) \mathcal{S}(\theta, \psi), \quad (2.130)$$

etc., onde γ define as transformações de Lorentz.

Pelo grupo de Lorentz, as coordenadas x transformam-se como espinores, e por reflexão espacial, pela regra

$$x \rightarrow x_0 + i\phi, \quad (2.131)$$

com o fator i presente para manter real a transformação. Deste modo é conveniente

2.3.4 Álgebra da Supersimetria

Quando se variam as coordenadas anti-comutantes θ , naturalmente as funções destas coordenadas, como os supercampos, também sofrerão variações. Isto é, variando

$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta,$$

uma função destas coordenadas variará como

$$\delta f(\theta) = f(\theta + \delta\theta) - f(\theta) = \delta f,$$

onde

$$\delta f = f(\theta + \delta\theta) - f(\theta),$$

que é exatamente o procedimento usado na seção anterior para determinar as transformações de supersimetria dos campos contidos num supercampo escalar.

O que se deseja aqui é definir as variações δf ou $\delta\psi$, por exemplo, em termos das suas derivadas, como ocorre com as funções usuais. Como estão envolvidas variáveis anti-comutantes, esta questão requer uma certa cautela, pois a ordem dos fatores é importante.

As derivadas em relação às variáveis θ podem ser definidas da maneira usual, porém devem obedecer às regras

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\psi_1 \psi_2) = \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \psi_2 \pm \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}, \quad (2.133)$$

conforme a função ψ_1 seja bosônica (+) ou fermiônica (-), e

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2.134)$$

as mesmas regras valendo para derivadas em relação a $\bar{\theta}$.

Considere uma função linear em ψ tal que

$$\psi = \psi + \psi, \quad (2.135)$$

isto é,

$$\psi(\psi) = \psi = \pm \psi (\psi) \psi, \quad (2.136)$$

conforme o coeficiente seja bosônico (+) ou fermiônico (-), ou

$$\psi(\psi) = (\psi) \psi, \quad (2.137)$$

onde o símbolo ψ indica derivação à esquerda.

Funções de segundo grau em ψ podem ser expandidas como combinações lineares de termos $\psi \psi$,

$$\begin{aligned} \psi \psi \psi &= \psi \psi (\psi) \psi = \psi \psi \psi = \psi \psi \psi \\ &= \psi \psi \psi + \psi \psi \psi, \end{aligned} \quad (2.138)$$

desde que se encare ψ e ψ como variáveis independentes.

Estes exemplos mostram que a regra para expressar as diferenciais de funções em ψ e ψ é

$$\psi 5 = 5 \psi + \psi 5. \quad (2.139)$$

No caso de ψ ser um espinor de Majorana, ψ e ψ não são independentes e, portanto, a diferencial pode ser simplificada para

$$\psi 5 = \psi 5 = \psi 5. \quad (2.140)$$

Para o supercampo-escalar $\#(\cdot)$, equação (2.132), resulta

$$\#^0(\cdot) = \#(\cdot) + \#(\cdot) = \#(\cdot) + \#(\cdot) - \frac{\#}{\cdot},$$

ou seja,

$$\# = \# + \# \quad (2.141)$$

No caso da supertranslação, equações (2.103), resulta

$$\# = \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} \right) \# = (\mathfrak{G}\#, \quad (2.142)$$

que de ne os geradores de supertranslação

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.143)$$

É fácil veri car que o operador

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.144)$$

gera a supertranslação nas coordenadas, como de nida em (2.99),

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cdot \right)$$

e

$$\mathfrak{G} = \left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} \right) \quad \mathfrak{G} = \left(\cdot \right)$$

As transformações sucessivas podem ser estudadas variando os parâmetros das transformações do operador (2.144),

$$\mathfrak{G}_1 = (\mathfrak{G}_1 \text{ e } \mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}_2$$

de modo que

$$\#_1^0 = \# + !_1\#$$

e

$$\#_{12}^{00} = \#_1^0 + !_2\#^0 = \# + !_1\# + !_2\# + !_2!_1\#. \quad (2.145)$$

Invertendo a ordem das transformações, resulta

$$\#_{21}^{00} = \#_2^0 + !_1\#^0 = \# + !_2\# + !_1\# + !_1!_2\#, \quad (2.146)$$

de modo que

$$\#_{12}^{00} \#_{21}^{00} = [!_2 \ !_1]\#. \quad (2.147)$$

Por outro lado, considerando as translações sucessivas das coordenadas, equação (2.108),

$$\#_{12}^{00} = \# + \left(\tau^1 + \tau^2 \frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} (\cdot) \right) \# + \frac{1}{2} (\tau^2 \# \quad (2.148)$$

e

$$\#_{21}^{00} = \# + \left(\tau^2 + \tau^1 \frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{2} (\cdot) \right) \# + \frac{1}{2} (\tau^1 \# \quad (2.149)$$

de modo que

$$\#_{12}^{00} \#_{21}^{00} = (\tau^1 \tau^2 \# \quad (2.150)$$

desde que

$$\tau^2 \tau^1 = \tau^1 \tau^2.$$

Assim,

$$[!_2 \ !_1]\# = (\tau^1 \tau^2 \# \ ,$$

ou, em termos dos geradores (2.144),

$$\tau^1 \tau^2 \# = (\tau^1 \tau^2 \# = (\tau^1 \tau^2 \# \quad (2.151)$$

O lado esquerdo desta equação pode ser desdobrado como

$$\begin{aligned} \psi^{\dagger} \epsilon \psi &= \psi^{\dagger} \epsilon \psi - \psi^{\dagger} \epsilon \psi \\ &= \psi^{\dagger} \epsilon \psi - \psi^{\dagger} \epsilon \psi = -\psi^{\dagger} \{ \epsilon - \epsilon \} \psi \end{aligned}$$

e o lado direito,

$$\psi^{\dagger} \epsilon \psi = \psi^{\dagger} \epsilon \psi = \psi^{\dagger} (2)$$

onde $2 = \epsilon$ é o operador de conjugação de carga na representação de Majorana das matrizes de Dirac. Voltando à equação original (2.151), a relação de anticomutação dos geradores de supertranslação pode ser escrita na forma

$$\{ \epsilon \epsilon \} = \epsilon \epsilon + \epsilon \epsilon = (2) \quad , \quad (2.152)$$

onde os geradores ϵ são componentes de um espinor de Majorana.

Assim como as supertranslações não formam um grupo, os seus geradores também não formam uma álgebra fechada. Para tanto deve-se considerar a supersimetria, que contém o grupo de Poincaré mais o grupo das supertranslações, equações (2.109-2.110). Neste caso, a variação (2.142) ca

$$\delta \psi = (\epsilon \psi + (\bar{\epsilon} + \epsilon) \psi + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \epsilon \psi) \quad (2.153)$$

que, usando a igualdade

$$\bar{\epsilon} \epsilon = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} \epsilon + \epsilon \bar{\epsilon}),$$

pode ser reescrita como

$$!# = \& \cdot \frac{1}{2} \ddot{} \quad \ddot{} \quad \ddot{} \quad \frac{1}{2} \ddot{} + \frac{\ddot{}}{\ddot{}} \quad (6 \#,$$

ou ainda, em termos dos geradores

$$!# = \& + \frac{1}{2} \ddot{} \quad (6 \#, \quad (2.154)$$

onde

$$= (\ddot{} \quad \ddot{}) + \frac{1}{2} \ddot{} \quad \ddot{} \quad \ddot{} \quad (2.155)$$

é o gerador de momento angular.

A não-comutatividade das transformações sucessivas ca de nida pela diferença

$$\#_{12}^{00} \#_{21}^{00} = [!_2 \ !_1] \#, \quad (2.156)$$

onde, agora,

$$! = \& + \frac{1}{2} \ddot{} \quad (6. \quad (2.157)$$

Explicitando a variação do supercampo devido às variações sucessivas das coordenadas,

$$\begin{aligned} \#_{12}^{00}(\ :) &= \#(\ \cdot^{00})^{00} \\ &= \#(\ :) + (!_1 + !_2 + !_2 !_1) \cdot \# + (!_1 + !_2 + !_2 !_1) : \frac{\ddot{}}{\ddot{}} \end{aligned}$$

mais o análogo para $\#_{21}^{00}(\ :)$, resulta

$$\#_{12}^{00} \#_{21}^{00} = [!_2 \ !_1] \cdot \# + [!_2 \ !_1] : \frac{\ddot{}}{\ddot{}} \# \equiv !_3 \#, \quad (2.158)$$

que, comparada com o resultado (2.156), de ne a relação de comutação formal

$$[!_2 \ !_1] = !_3, \quad (2.159)$$

onde os parâmetros das transformações geradas por \mathfrak{L}_3 estão definidos nas equações (2.125).

Substituindo em (2.159) as expressões correspondentes a \mathfrak{L}_1 , \mathfrak{L}_2 e \mathfrak{L}_3 , definidas pela equação (2.157), obtém-se

$$\mathfrak{L}^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\prime 2} (\mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\prime 1} (\mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime} = \mathfrak{L}^3 + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\prime 3} (\mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime} ,$$

que pode ser rearranjada para

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^2 [\] + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^{\prime 2} [\] - \frac{1}{2} \mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime 1} [\] - \frac{1}{4} \mathfrak{L}^{\prime 2} [\] + \\ & + \mathfrak{L}^1 (\mathfrak{L}^2 [\] - \mathfrak{L}^2 (\mathfrak{L}^1 [\] + \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\prime 1} (\mathfrak{L}^2 [\] - \mathfrak{L}^2 [\] + \\ & \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{\prime 1} (\mathfrak{L}^1 [\] - \mathfrak{L}^1 [\])) = \\ & = \mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime 1} + \mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^{\prime 2} (\mathfrak{L}^1 (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^{\prime 1}) - \mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime 1} - \mathfrak{L}^{\prime 2} \mathfrak{L}^1) \\ & + \frac{1}{4} \mathfrak{L}^{\prime 1} (\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^{\prime 1}) (\mathfrak{L}^1 + \mathfrak{L}^2) . \end{aligned}$$

Comparando os termos de mesma potência nos parâmetros de transformação dos lados direito e esquerdo, resulta no conjunto de equações

$$\begin{aligned} [\] &= 0 \\ [\mathfrak{L}^2 \] &= 0 \\ [\mathfrak{L}^1 \] &= \frac{1}{2} (\mathfrak{L}^2) \\ [(\mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime})] &= (\mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^2) \\ \mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^{\prime 2} [\] &= 2 \mathfrak{L}^1 \mathfrak{L}^{\prime 2} \\ \mathfrak{L}^{\prime 1} \mathfrak{L}^2 [\] &= 2 \mathfrak{L}^{\prime 1} \mathfrak{L}^2 - \mathfrak{L}^2 \mathfrak{L}^{\prime 1} \end{aligned}$$

A seguir os parâmetros das transformações podem ser eliminados, restando as relações

de comutação e de anticomutação dos geradores,

$$\begin{aligned}
 [P, P] &= 0 \\
 [P, M] &= \# \\
 [P, Q] &= + \\
 [G, G] &= 0 \\
 [G, Q] &= \frac{1}{2} (+ \mathfrak{G}) \\
 \psi G \psi &= \frac{1}{2} \psi
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

As relações de comutação e de anticomutação acima de nem a álgebra da supersimetria. As três primeiras correspondem exatamente às relações de comutação da álgebra de Lie do grupo de Poincaré. A última, relação de anticomutação, são dos geradores da supertranslação, e de ne a graduação da álgebra de Lie.

A comutação entre os geradores da supersimetria e da translação, \mathfrak{G} e ψ , respectivamente, permite a construção de multipletos contendo partículas de mesma massa, com spins inteiro e semi-inteiro, incluindo portanto bósons e férmions num mesmo multipletto. A relação de comutação entre os geradores \mathfrak{G} e ψ simplesmente mostra que o gerador de supertranslação é um espinor sob o grupo de Lorentz.

Os geradores espinoriais \mathfrak{G} , devido à anti-comutação, para um determinado ψ , de nem uma álgebra de Clifford contendo 16 elementos independentes, de modo que as representações irredutíveis destes geradores devem ser matrizes 4×4 atuando num espaço de dimensão 4.

2.4 Projeção Chiral dos Supercampos

Um supercampo escalar, como vimos anteriormente,

$$\begin{aligned}
 \#(\psi) &= (\psi) + \mathfrak{G}(\bar{\psi}) + \frac{1}{4} \mathfrak{G}(\psi) + \frac{1}{4} \mathfrak{G}(\psi) + \\
 &+ \frac{1}{4} \mathfrak{G}(\psi) + \frac{1}{4} \mathfrak{G}(\psi) + \frac{1}{32} \mathfrak{G}^2(\psi),
 \end{aligned}$$

contém 16 elementos independentes, em geral, funções complexas. No entanto, a relação de anticomutação dos geradores de supertranslação,

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C^{-1})_{\alpha\beta},$$

da álgebra da supersimetria impõe que as representações irredutíveis devem ser quadri-dimensionais. Neste sentido os supercampos escalares são redutíveis, e esta seção cuida de obter as representações irredutíveis destes supercampos.

2.4.1 Derivada Covariante

As derivadas covariantes

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_{\theta^\beta} \quad (2.161)$$

têm papel muito importante na construção das representações irredutíveis a partir dos supercampos. São operadores diferenciais fermiônicos semelhantes aos geradores Q_α , e a partir da regra de derivação

$$D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \partial_{\theta^\gamma} \theta^\gamma$$

pode-se obter

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \partial_{\theta^\gamma} \theta^\gamma,$$

onde

$$D_\alpha D_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \theta^\gamma \partial_{\theta^\gamma} = -\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \partial_{\theta^\gamma} \theta^\gamma$$

e

$$D_\alpha D_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \theta^\gamma \partial_{\theta^\gamma} = -\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \partial_{\theta^\gamma} \theta^\gamma,$$

resultando em uma relação de anticomutação idêntica a dos geradores de supertranslação,

$$\{\psi, \psi\} = -2\psi \quad (2.162)$$

Em relação aos geradores da supersimetria, considere as operações

$$\begin{aligned} [\psi, \psi] &= \psi(\psi) - (\psi)\psi, \\ [\psi, \psi] &= \psi(\psi) - (\psi)\psi \end{aligned} \quad (2.163)$$

que podem ser calculadas usando as representações diferenciais

$$= \psi$$

do momento linear,

$$= (\psi, \psi) + \frac{1}{2} \psi \psi$$

do momento angular e

$$G = \frac{1}{2} \psi \psi + \frac{1}{2} \psi \psi$$

do gerador da supertranslação.

Em cálculos explícitos, considerando

$$\psi(\psi) = \frac{1}{2} (\psi) \psi = -\psi \psi$$

e

$$G(\psi) = \frac{1}{2} (\psi) \psi = \frac{1}{2} \psi \psi,$$

resulta na relação de anticomutação

$$\{\psi, G\} = \psi(\psi) + G(\psi) = 0.$$

Em relação ao momento linear, é imediato constatar que

$$\langle \hat{P}_\mu \rangle = \langle \hat{P}_\mu \rangle = 0$$

e, para o momento angular,

$$\begin{aligned} \langle \hat{M}_{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu \rangle - \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{M}_{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu + \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle - \frac{1}{4} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu + \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle - \frac{1}{4} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu \rangle, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\langle \hat{M}_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{P}_\mu \hat{X}_\nu - \hat{P}_\nu \hat{X}_\mu \rangle.$$

A partir destes cálculos, pode-se obter o conjunto das relações de comutação e de anticomutação

$$\begin{aligned} [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] &= 0 \\ [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{P}_\rho] &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\rho} \hat{P}_\nu - \delta_{\nu\rho} \hat{P}_\mu) \end{aligned} \quad (2.164)$$

As derivadas covariantes \hat{D}_μ de nem a mesma estrutura da álgebra dos operadores de supertranslação $\hat{\mathfrak{G}}$. São componentes de um espinor de Lorentz e invariantes por

supertranslações e translações espaço-temporais. Por exemplo,

$$\delta \psi = (\delta \psi) = 0$$

por supertranslações e

$$\delta \psi = \frac{1}{2} \epsilon \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi = \frac{1}{4} \epsilon \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \partial_{\nu} \psi$$

pelas transformações de Lorentz.

Como as derivadas covariantes de ψ nem uma álgebra de Cli ord, equação (2.162), também de ψ nem um espaço tendo por base os 16 produtos independentes, a base usual contendo as combinações

$$1, \psi, \bar{\psi}, \gamma^{\mu} \psi, \gamma^{\mu} \bar{\psi}, \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \psi, \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \bar{\psi}, \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \psi, \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \bar{\psi}, \quad (2.165)$$

onde de ne-se o adjunto

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0, \quad (2.166)$$

lembrando que ψ é um espinor de Majorana. Com os operadores adjuntos, valem as relações de anticomutação

$$\psi \psi = -\psi \psi = 1 \psi \quad (2.167)$$

e

$$\bar{\psi} \psi = -\psi \bar{\psi} = 2 \psi \quad (2.168)$$

obtidas por substituições diretas em (2.162) e, portanto, equivalentes entre si.

Veja que a base do espaço de Cli ord gerado pelos operadores ψ não contém os produtos $\bar{\psi} \psi$ e $\psi \bar{\psi}$. Isto ocorre porque o primeiro é proporcional a 1 e o segundo é identicamente nulo,

$$\bar{\psi} \psi = 2 \quad (2.169)$$

e

$$\overline{\langle + \rangle} = 0, \quad (2.170)$$

como será demonstrado a seguir.

Para o primeiro

$$\begin{aligned} \overline{\langle \rangle} &= \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle \\ &= \langle 0 \rangle \quad [\langle \langle \rangle \rangle + \langle \langle \rangle \rangle] \\ &= \langle 0 \rangle \quad \langle \langle \rangle \rangle + \langle 0 \rangle \quad \{\langle \langle \rangle \rangle\}, \end{aligned}$$

que, com a relação de anticomutação (2.162), ca

$$\overline{\langle \rangle} = \langle 0 \rangle \quad \langle \langle \rangle \rangle \quad (2) .$$

Usando as igualdades

$$\langle 0 \rangle = 0, \quad 2 = 0 \text{ e } 7() = 4 = 4 ,$$

resulta em

$$\begin{aligned} \overline{\langle \rangle} &= \langle 0 \rangle \quad \langle + \rangle \quad \langle 0 \rangle \\ &= \langle 0 \rangle \quad \langle + 7() \rangle = \langle \langle + 4 \rangle \rangle , \end{aligned}$$

o que leva diretamente à equação (2.169).

Quanto à equação (2.170),

$$\begin{aligned} \overline{\langle + \rangle} &= \langle 0_+ \rangle = \langle 0_+ \rangle \\ &= \langle 0_+ \rangle \quad \langle \langle + \rangle \rangle \quad \{\langle \langle \rangle \rangle\} \\ &= \overline{\langle + \rangle} + 7(\#) \# = \overline{\langle + \rangle} = 0. \end{aligned}$$

A fim de se obter uma decomposição conveniente dos supercampos escalares, definem-se os operadores chirais

$$\chi_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.171)$$

e

$$\chi_- = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.172)$$

com os respectivos conjugados

$$\bar{\chi}_+ = \frac{1}{2} \bar{\chi} (1 + \gamma_5) = \bar{\chi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.173)$$

e

$$\bar{\chi}_- = \frac{1}{2} \bar{\chi} (1 - \gamma_5) = \bar{\chi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.174)$$

cujas relações inversas são

$$\chi_{\pm} = \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.175)$$

onde

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \chi, \\ \chi_- &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \chi. \end{aligned}$$

Em função destas componentes chirais, a relação de anticomutação (2.162) pode ser

desdobrada nas seguintes relações de anticomutação:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\pm} \psi_{\pm} &= 0 \\
 \psi_{+} \psi_{-} &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \\
 \bar{\psi}_{\pm} \bar{\psi}_{\pm} &= \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \bar{\psi} \\
 \bar{\psi}_{\pm} \bar{\psi}_{\mp} &= 0 \\
 \bar{\psi}_{+} \bar{\psi}_{-} &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \bar{\psi}
 \end{aligned} \quad (2.176)$$

Note que as componentes de mesma chiralidade anticomutam, e como ψ_{+} e ψ_{-} são espiniores a duas componentes independentes, os produtos de três ou mais componentes de mesma chiralidade são identicamente nulos. Por exemplo,

$$\psi_{\pm} \psi_{\pm} \psi_{\pm} = 0,$$

assim como

$$\bar{\psi}_{\pm} \bar{\psi}_{\pm} \bar{\psi}_{\pm} = 0,$$

e, em especial,

$$\psi_{+} \bar{\psi}_{+} \psi_{+} = 0 \quad (2.177)$$

e

$$\bar{\psi}_{-} \psi_{-} \bar{\psi}_{-} = 0. \quad (2.178)$$

Estas identidades são fundamentais para a construção dos operadores de projeção,

$$P_{\pm} = \frac{1}{4} (1 \pm \gamma_5) \quad (2.179)$$

$$P_{\pm} = \frac{1}{4} (1 \pm \gamma_5) \quad (2.180)$$

e

$$\mathbb{1} = 1 \quad \mathbb{1}_+ = \mathbb{1} + \frac{1}{4} \mathbb{1}_+ \mathbb{1}_- \quad (2.181)$$

os quais satisfazem às equações diferenciais

$$\mathbb{1}_\pm = 0 \quad (2.182)$$

Como

$$\mathbb{1}_+ + \mathbb{1}_- + \mathbb{1} = 1,$$

pode-se decompor, por exemplo, os supercampos escalares em

$$\#(\cdot) = (\mathbb{1}_+ + \mathbb{1}_- + \mathbb{1})\#(\cdot), \quad (2.183)$$

e, de modo as projeções

$$\#(\cdot) = \mathbb{1}_+ \#(\cdot) + \mathbb{1}_- \#(\cdot) + \mathbb{1} \#(\cdot), \quad (2.184)$$

$$\mathbb{1}_+ \mathbb{1}_- = 0$$

pode-se reescrever

$$\#(\cdot) = \mathbb{1}_+ \#(\cdot) + \mathbb{1}_- \#(\cdot) + \mathbb{1} \#(\cdot), \quad (2.185)$$

com as projeções satisfazendo às equações

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_+ \mathbb{1}_- &= 0 \\ \mathbb{1}_+ \mathbb{1} &= 0 \\ \mathbb{1}_- \mathbb{1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.186)$$

Os operadores de projeção $\mathbb{1}_\pm$ e $\mathbb{1}$ são quantidades escalares e, portanto, invariantes supersimétricos.

2.4.2 Supercampos Chirais

As projeções

$$\#_{\pm}(\cdot) = \pm \#(\cdot)$$

do supercampo escalar $\#(\cdot)$ são chamadas de supercampos chirais. Estes supercampos chirais continuam sendo supercampos escalares, podendo ser expandidos na forma padrão, embora nem todos os campos contidos sejam agora independentes. As relações de dependência podem ser obtidas impondo as condições dadas em (2.186).

Os supercampos chirais positivos

$$\#_{+}(\cdot) = \#(\cdot)$$

devem satisfazer à condição

$$\langle \#_{+} = 0.$$

Tomando

$$\begin{aligned} \langle \#_{+} &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\$ + \frac{1}{4}(1 - \gamma_5):(\bar{\psi} \psi) + \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)(\bar{\psi} \psi) + \\ &+ \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi + \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi (1 - \gamma_5)(\bar{\psi} \psi) + \\ &+ \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi (1 - \gamma_5) \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \psi + \\ &+ \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi (1 - \gamma_5) (\bar{\psi} \psi) + \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \psi + \\ &+ \frac{1}{16} \bar{\psi} \psi (1 - \gamma_5) \bar{\psi} \psi = 0, \end{aligned} \tag{2.187}$$

leva às condições sobre os campos

$$\begin{aligned}
 3 &= \bar{3} + \\
 &= \bar{3} + \\
 &= \bar{3} + \\
 &= \bar{3} +
 \end{aligned}
 \tag{2.188}$$

além da identidade

$$(1 \ 5) \bar{3} = \bar{3} (1 \ 5) \bar{3} + 0,
 \tag{2.189}$$

e o fato de $\bar{3} = \bar{3}$ ser um espinor de chiralidade positiva. Assim, os supercampos chirais $\bar{3}_+(\cdot)$ assumem a forma

$$\begin{aligned}
 \bar{3}_+(\cdot) &= \bar{3}_+(\cdot) + \bar{3}_+(\cdot) + \frac{1}{4} (\bar{3}_+(\cdot) + \bar{3}_+(\cdot)) + \\
 &+ \frac{1}{4} (\bar{3}_+(\cdot) + \bar{3}_+(\cdot)) + \frac{1}{4} (\bar{3}_+(\cdot) + \bar{3}_+(\cdot)) + \\
 &\frac{1}{32} (\bar{3}_+(\cdot) + \bar{3}_+(\cdot)) .
 \end{aligned}
 \tag{2.190}$$

Observe que os campos independentes $\bar{3}_+(\cdot)$, $\bar{3}_+(\cdot)$ e $\bar{3}_+(\cdot)$, transformam-se por super-
translações como

$$\begin{aligned}
 \bar{3}_+ &= \frac{1}{2} (1 + \bar{3}_+) (\bar{3}_+ + \bar{3}_+) (\\
 \bar{3}_+ &= (\bar{3}_+
 \end{aligned}
 \tag{2.191}$$

Os supercampos chirais negativos

$$\bar{3}(\cdot) = \bar{3}(\cdot)$$

devem satisfazer à condição

$$\langle \psi, \psi \rangle = 0,$$

levando aos campos com chiralidade negativa

$$\begin{aligned} 3 &= \psi - \psi \\ &= \psi' \\ &= \psi' \psi \\ \langle \psi, \psi \rangle &= \psi' \psi = \psi' \psi = \psi'^2 \end{aligned} \quad (2.192)$$

além da identidade

$$(1 + \psi) \psi = \psi' \psi (1 + \psi) \psi = 0, \quad (2.193)$$

agora com $\psi = \psi$ sendo espinor de chiralidade negativa. Os supercampos chirais ψ (ψ)

assumem a forma

$$\begin{aligned} \psi(\psi) &= \psi(\psi) + \psi(\psi) + \frac{1}{4} \psi(\psi) \psi(\psi) + \\ &+ \frac{1}{4} \psi(\psi) \psi(\psi) + \frac{1}{32} \psi(\psi) \psi(\psi) \psi(\psi). \end{aligned} \quad (2.194)$$

Os campos independentes ψ , ψ e ψ , sob supertranslações, transformam-se como

$$\begin{aligned} \psi &= \psi \\ \psi &= \frac{1}{2} (1 + \psi) \psi (\psi) \\ \psi &= \psi \psi \end{aligned} \quad (2.195)$$

Pode-se expressar os supercampos chirais de uma maneira mais compacta recorrendo

às variáveis auxiliares

$$= + : \frac{5}{4} = + : : \frac{1}{4} + + \frac{1}{4} : \quad (2.196)$$

e

$$- = : \frac{5}{4} = \frac{1}{4} + : + + \frac{1}{4} : \quad (2.197)$$

Nestas novas variáveis as componentes chirais da derivada covariante, equações (2.171) e (2.172) cam

$$\langle_+ = \frac{1}{2} : = \frac{1}{2} : \quad (2.198)$$

e

$$\langle = \frac{1}{2} : = \frac{1}{2} : 2^{-} : \quad (2.199)$$

que, aplicadas sobre as variáveis auxiliares (2.196) e (2.197), resultam em

$$\begin{aligned} \langle_+ &= : \\ \langle_+ &\equiv 0 \\ \langle &= 0 \\ \langle &\equiv :_+ \end{aligned} \quad (2.200)$$

Isto signi ca que, para funções arbitrárias de e , necessariamente,

$$\langle 5(\)_0 \quad (2.201)$$

De maneira similar,

$$\langle 5(:_+) 0 \quad (2.202)$$

Estas identidades implicam que os supercampos chirais podem ser escritos como

$$\#_+(\cdot) = \#(\cdot_+) = \cdot_+ + \frac{1}{2} \bar{\$}_+(\cdot) + \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{Z}}_+(\cdot) \quad (2.203)$$

e

$$\#(\cdot) = \#(\cdot^-) = \cdot + \frac{1}{2} \bar{\$}(\cdot^-) + \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{Z}}(\cdot^-), \quad (2.204)$$

satisfazendo automaticamente às condições

$$\langle \#(\cdot_\pm) | 0 \rangle = 0. \quad (2.205)$$

As transformações de supersimetria podem ser obtidas através das variações dos supercampos $\#(\cdot_+)$ e $\#(\cdot)$ pelas supertranslações, onde as variáveis θ e $\bar{\theta}$ transformam-se como

$$\theta = \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \cdot = (\cdot^-)_+ + \theta \quad (2.206)$$

e

$$\bar{\theta} = \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \cdot = (\cdot^-)_- + \bar{\theta} \quad (2.207)$$

Formas equivalentes de expressar os supercampos chirais são

$$\#_+(\cdot) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \cdot + \frac{1}{2} \bar{\$}_+(\cdot) + \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{Z}}_+(\cdot) \quad (2.208)$$

e

$$\#(\cdot) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \cdot + \frac{1}{2} \bar{\$}(\cdot) + \frac{1}{2} \bar{\mathfrak{Z}}(\cdot). \quad (2.209)$$

Em princípio, os supercampos $\#_+(\cdot)$ e $\#(\cdot)$ são independentes. No entanto, em

$$\#(\cdot) = \bar{\mathfrak{Z}} \cdot \#(\cdot). \quad (2.210)$$

Neste caso, como

$$\psi_{\pm}(\cdot) = \frac{1}{2}(\psi_{\pm} + \bar{\psi}_{\pm}) + \frac{1}{2}(\psi_{\pm} - \bar{\psi}_{\pm}),$$

resulta nas condições sobre os campos

$$\begin{aligned} \psi_{\pm} &= \psi_{\pm} \\ \bar{\psi}_{\pm} &= \bar{\psi}_{\pm} \end{aligned} \quad (2.211)$$

Veja que as condições $\bar{\psi}_{\pm} = \psi_{\pm}$ ou $\psi_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}$ equivalem à condição de Majorana

$$\bar{\psi}_{\pm} = \psi_{\pm} + \psi_{\pm} = \bar{\psi}_{\pm}.$$

Quanto às componentes,

$$\psi_{\pm}(\cdot) = \psi_{\pm}(\cdot),$$

devem satisfazer simultaneamente às condições

$$\bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm} = 0 \text{ e } \bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm} = 0,$$

equivalentes a

$$\bar{\psi}_{\pm} \psi_{\pm} = 0.$$

Usando a equação dos produtos chirais,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \langle (1 \pm \gamma_5) \not{x} \rangle = & (3 \pm \gamma_5) \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) (\not{x} \not{y}) + \\
 & \frac{1}{8} (\not{x} \pm 2 \not{y} \not{z}) + \\
 & + \frac{1}{8} (\pm \not{x} + 2 \not{y} \not{z}) + \\
 & + \frac{1}{4} (\pm \not{x} \not{y} \not{z} + \not{x} \not{y} \not{z}) + \\
 & + \frac{1}{4} (\not{x} \not{y} \not{z} (1 \pm \gamma_5) [\not{x} + \not{y} \not{z}]) + \\
 & + \frac{1}{32} (\not{x} \not{y} \not{z})^2 (3 \pm \gamma_5), \tag{2.212}
 \end{aligned}$$

resulta nas condições independentes sobre os campos

$$\begin{aligned}
 \not{x} \not{y} \not{z} & = \not{x} \not{y} \not{z}, \tag{2.213} \\
 \not{x} \pm 2 \not{y} \not{z} & = 0
 \end{aligned}$$

que implica em

$$\begin{aligned}
 \not{x} \not{y} \not{z} & = \not{x} \not{y} \not{z}, \tag{2.214} \\
 \not{x} \pm 2 \not{y} \not{z} & = 0
 \end{aligned}$$

As demais igualdades,

$$\begin{aligned}
 \pm \not{x} + 2 \not{y} \not{z} & = 0 \\
 \pm \not{x} \not{y} \not{z} + 2 \not{y} \not{z} & = 0 \\
 \not{x} \not{y} \not{z} & = 0, \tag{2.215} \\
 \not{x} \not{y} \not{z} \pm \not{y} \not{z} & = 0
 \end{aligned}$$

podem ser consideradas identidades.

Assim,

$$\begin{aligned} \#_1(\cdot) = & \psi_1(\cdot) + \frac{1}{4} \gamma_5 \psi_1(\cdot) + \frac{1}{4} \gamma_5 \psi_1(\cdot) \\ & + \frac{1}{4} \gamma_5 \gamma_\mu \psi_1(\cdot) + \frac{1}{32} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \psi_1(\cdot), \end{aligned} \quad (2.216)$$

contendo os campos independentes $\psi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ e $\psi_1(\cdot)$, com o campo vetorial satisfazendo à condição $\gamma_5 \psi_1 = 0$. Por supertranslação, estes campos transformam-se como

$$\begin{aligned} \psi_1(\cdot) &= \frac{1}{2} (\gamma_5 \psi_1 + \psi_1) \\ \psi_1 &= (\gamma_5 \psi) \end{aligned} \quad (2.217)$$

2.4.3 Supercampos Espinoriais

Serão analisados de forma breve os supercampos espinoriais de nidos pela transformação

$$\psi(\cdot) \xrightarrow{L} (\cdot) \psi(\cdot),$$

onde L representa os parâmetros do grupo de Lorentz. Mais exatamente, serão considerados os supercampos espinoriais chirais, lembrando que a chiralidade, neste caso, pode ser de dois tipos. Um está relacionado com a estrutura chiral espinorial, que define as componentes de mão direita (right) e esquerda (left),

$$\psi(\cdot) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(\cdot) \quad (2.218)$$

e

$$\psi(\cdot) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(\cdot), \quad (2.219)$$

respectivamente. O outro está relacionado com as coordenadas espinoriais θ , definido pelas condições

$$\psi_+(\cdot) = 0 \quad (2.220)$$

e

$$\langle + \mathcal{S} (:) = 0, \quad (2.221)$$

para as projeções chirais positiva e negativa, respectivamente.

Usando as coordenadas auxiliares, equações (2.196) e (2.197), os supercampos espinoriais podem ser escritos numa forma simples,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{++} (:) &= \mathcal{S}_+ (:) = \mathcal{S} (: +) \\ &= \mathcal{S}_+() + \mathcal{S}() + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{+}} () \mathcal{S}^{\dot{+}} + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{-}} () \mathcal{S}^{\dot{-}} + () \\ &= \mathcal{S}_+ + \mathcal{S} + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{+}} + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{-}} + \mathcal{S}^{\dot{+}} () \mathcal{S}^{\dot{+}} + \mathcal{S}^{\dot{-}} () \mathcal{S}^{\dot{-}}, \end{aligned} \quad (2.222)$$

com chiralidade positiva em relação à sua estrutura espinorial,

$${}_5 \mathcal{S}_{++} (:) = \mathcal{S}_{++} (:), \quad (2.223)$$

e positiva também em relação à estrutura das coordenadas $+$,

$$\langle \mathcal{S}_{++} (:) = 0, \quad (2.224)$$

onde os campos $\mathcal{S}_+()$ e $\mathcal{S}_-()$ são espinores chirais positivos ou de mão direita, $\mathcal{S}()$ um escalar de Lorentz e $\mathcal{S}^{\dot{+}} ()$ um tensor antissimétrico de segunda ordem.

Por supertranslação, equações (2.206) e (2.207), resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{S} (: +) &= \mathcal{S} (+ ! : + + ! : +) = \mathcal{S}_+() + ((+ : +)^\nu \mathcal{S}_+() + \\ &+ \mathcal{S}() + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{+}} () \mathcal{S}^{\dot{+}} + \mathcal{S}() + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{-}} () \mathcal{S}^{\dot{-}} + \\ &+ ((+ : +)^\nu \mathcal{S}() + \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{+}} () \mathcal{S}^{\dot{+}} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{S}^{\dot{-}} () \mathcal{S}^{\dot{-}} + (: + +) + (: + +), \end{aligned}$$

cuja variação é

$$\begin{aligned} \mathbb{1} \mathbb{S}(\cdot) &= \frac{1}{2} \mathbb{3} \mathbb{S}(\cdot) + \frac{1}{2} \mathbb{3} \mathbb{S}(\cdot) \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{3} \mathbb{S}(\cdot) + \frac{1}{2} \mathbb{3} \mathbb{S}(\cdot) \end{aligned}$$

Usando a relação

$$\mathbb{S} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{16} \mathbb{S}(\alpha) \mathbb{1}(\alpha) \quad (2.225)$$

com as matrizes base $\mathbb{1}$ e $\mathbb{2}$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{2} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{3} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{4} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.226)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{5} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{6} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{7} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{8} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.227)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(\cdot) &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^{16} \mathbb{S}(\alpha) \mathbb{1}(\alpha) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{1} + \mathbb{2} + \mathbb{3} + \mathbb{4} + \mathbb{5} + \mathbb{6} + \mathbb{7} + \mathbb{8} + \mathbb{9} + \mathbb{10} + \mathbb{11} + \mathbb{12} + \mathbb{13} + \mathbb{14} + \mathbb{15} + \mathbb{16}) \mathbb{S}(\cdot) \\ &= \frac{1}{4} (\mathbb{1} + \mathbb{2} + \mathbb{3} + \mathbb{4} + \mathbb{5} + \mathbb{6} + \mathbb{7} + \mathbb{8} + \mathbb{9} + \mathbb{10} + \mathbb{11} + \mathbb{12} + \mathbb{13} + \mathbb{14} + \mathbb{15} + \mathbb{16}) \mathbb{S}(\cdot) \end{aligned}$$

e, de maneira similar,

$$(\bar{\psi} \psi)_{\pm} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \dots$$

assim como

$$(\bar{\psi} \psi)_{\pm} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \dots$$

Com estes rearranjos, a variação do supercampo ca

$$\begin{aligned} \delta (\bar{\psi} \psi)_{\pm} &= \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \dots \\ &+ \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi)_{\pm} + \dots \end{aligned} \quad (2.228)$$

que, comparado com a expressão do supercampo (2.222), fornece a variação dos campos

$$\begin{aligned} \delta \psi_{\pm} &= \frac{1}{2} \psi_{\pm} + \dots \\ \delta \bar{\psi}_{\pm} &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_{\pm} + \dots \\ \delta \phi_{\pm} &= \frac{1}{2} \phi_{\pm} + \dots \\ \delta \chi_{\pm} &= \frac{1}{2} \chi_{\pm} + \dots \end{aligned} \quad (2.229)$$

O supercampo

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\pm}(\phi) &= \mathcal{S}_{\pm}(\phi) = \mathcal{S}(\phi_{\pm}) \\ &= (\phi)_{\pm} + (\phi)_{\pm} + \frac{1}{2} (\phi)_{\pm} \\ &= \frac{1}{4} (\phi)_{\pm} + (\phi)_{\pm} + \frac{1}{2} (\phi)_{\pm}, \end{aligned} \quad (2.230)$$

com chiralidade negativa em relação à sua estrutura espinorial,

$${}_5\mathcal{S}_+(\cdot) = \mathcal{S}_+(\cdot), \quad (2.231)$$

e positiva em relação à estrutura das coordenadas \cdot ,

$$\langle \cdot, \mathcal{S}_+(\cdot) \rangle = 0, \quad (2.232)$$

contém os campos espinoriais (\cdot) e (\cdot) de chiralidades negativas e o campo vetorial (\cdot) .

Por supertranslação, equação (2.206), transforma-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+(\cdot) &= \mathcal{S}(\cdot + \mathbb{1} \cdot + \mathbb{1} \cdot) = \\ &= (\cdot) + ((\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee (\cdot) + (\cdot) \cdot + \\ &+ (\cdot) (\cdot + ((\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee (\cdot) \cdot + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \cdot) + (\cdot \mathbb{1} \cdot), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} ((\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^4 \mathbb{1}^\alpha (\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee \psi(\cdot) \cdot + \\ &= \frac{1}{2} ((\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee) (\cdot \mathbb{1} \cdot), \\ ((\cdot \mathbb{1} \cdot) &= \frac{1}{2} ((\cdot \mathbb{1} \cdot)) (\cdot \mathbb{1} \cdot) \end{aligned}$$

e

$$((\cdot \mathbb{1} \cdot)^\vee (\cdot) \cdot = -\mathbb{1} \cdot \cdot \psi(\cdot) (\cdot) \cdot,$$

resultando na variação do supercampo

$$\begin{aligned} \delta(\psi_+) &= (\psi_+ + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-)) + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) \\ &= \psi_+ + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) \end{aligned} \quad (2.233)$$

e na dos campos

$$\begin{aligned} \delta(\psi_+) &= (\psi_+ + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-)) \\ \delta(\psi_-) &= \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) + \psi_- \\ \delta(\psi) &= (\psi_+ - \psi_-) \end{aligned} \quad (2.234)$$

Analogamente, temos ainda os supercampos espinoriais

$$\begin{aligned} \delta(\psi) &= \delta(\psi_+) - \delta(\psi_-) \\ &= (\psi_+ - \psi_-) + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - (\frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) + \psi_-) \\ &= \psi_+ - \psi_- + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - \psi_- \\ &= \psi_+ - \psi_- - \psi_- \end{aligned} \quad (2.235)$$

com chiralidades negativas em relação às suas estruturas espinorial e das coordenadas,

$$\delta(\psi_-) = \delta(\psi_+), \quad (2.236)$$

e

$$\delta(\psi_+) = 0; \quad (2.237)$$

e

$$\begin{aligned} \delta(\psi_+) &= \delta(\psi_+) - \delta(\psi_-) \\ &= (\psi_+ - \psi_-) + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - (\frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) + \psi_-) \\ &= \psi_+ - \psi_- + \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - \frac{1}{2}(\psi_+ - \psi_-) - \psi_- \\ &= \psi_+ - \psi_- - \psi_- \end{aligned} \quad (2.238)$$

com chiralidades positiva em relação à sua estrutura espinorial,

$${}_5\mathcal{S}_+(\psi) = \mathcal{S}_+(\psi), \quad (2.239)$$

e negativa em relação às coordenadas,

$$\langle \mathcal{S}_+(\psi) = 0. \quad (2.240)$$

Em m , as variações dos campos por supertranslação são

$$\begin{aligned} \delta \psi &= \epsilon \mathcal{S}_+ + \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{S}_- \psi \\ \delta \mathcal{S}_+ &= \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{S}_+ \mathcal{S}_+ + \epsilon \mathcal{S}_- \psi \\ \delta \mathcal{S}_- &= \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{S}_- \mathcal{S}_- + \epsilon \mathcal{S}_+ \psi \\ \delta \mathcal{S} &= \epsilon \mathcal{S}_+ + \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{S}_- \psi \end{aligned} \quad (2.241)$$

e

$$\begin{aligned} \delta \psi &= \epsilon \mathcal{S}_+ \psi \\ \delta \mathcal{S}_+ &= \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{S}_+ \mathcal{S}_+ + \epsilon \mathcal{S}_- \psi \\ \delta \mathcal{S}_- &= \epsilon \mathcal{S}_- \psi \end{aligned} \quad (2.242)$$

2.5 Teoria Supersimétrica

A Supersimetria é uma simetria entre férmions e bósons e, portanto, suas representações irredutíveis, os supermultipletos, contêm férmions e bósons. As idéias básicas da construção de uma teoria de campos supersimétrica serão ilustradas através de uma breve revisão do Modelo de Wess-Zumino [9]. Os campos utilizados neste modelo são $\{\phi, \psi\}$, onde ϕ e ψ são escalares complexos e ψ é um espinor. Por simplicidade, vamos assumir, por enquanto, que estes campos não tenham interações de gauge. Sob supersimetria, estes

campos transformam-se como $\psi \rightarrow U \psi$, $\phi \rightarrow \phi + i\theta$, $\chi \rightarrow \chi + i\theta$ com

$$\begin{aligned} U &= \exp(i\theta \gamma_5) \\ \psi &\rightarrow \psi + i\theta \gamma_5 \psi \\ \chi &= (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \end{aligned}$$

Nestas expressões, θ é um espinor a duas componentes contendo os parâmetros de transformação da supersimetria. A Lagrangeana renormalizável invariante em relação a estas transformações é [10]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_5 \partial_\mu \psi \gamma^\mu) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \\ & 3(\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \phi + \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2 + \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \chi + \text{h.c.} \quad (2.243) \end{aligned}$$

Esta Lagrangeana inclui termos cinéticos para ψ e ϕ , termos de massa fermiônicos e bosônicos e termos de interação. Entretanto, como χ não tem termo cinético, ele não representa um grau de liberdade físico, ou seja, é um campo auxiliar, e pode ser eliminado da teoria usando sua equação de Euler-Lagrange,

$$\chi = -\frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)$$

Em particular, o termo

$$(\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \chi = -\frac{1}{4} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi)^2$$

é uma contribuição de χ para o potencial escalar.

A Supersimetria vincula os parâmetros da Lagrangeana, já que diferentes termos transformam-se diferentemente sob transformações de supersimetria. As interações em uma Lagrangeana supersimétrica envolvendo apenas supermultipletos chirais de gauge podem ser resumidas e cientemente através de uma função chamada de superpotencial.

No modelo de Wess-Zumino, o superpotencial é

$$= \frac{1}{6} \phi^3 + \frac{1}{2} \psi^2, \quad (2.244)$$

no qual ϕ é um acoplamento adimensional e m tem dimensão de massa. Note que o superpotencial tem dimensão de [massa]³. Os ψ 's são supercampos chirais, que contêm todos os campos em um supermultiplete chiral (ϕ , ψ e χ) como seus componentes. A Lagrangeana de interação pode ser obtida a partir do superpotencial, de modo

$$= \int d^4x \left(\frac{1}{6} \phi^3 + \frac{1}{2} \psi^2 \right). \quad (2.245)$$

No cálculo destas duas quantidades, os supercampos são substituídos por suas componentes bosônicas e as derivadas são tomadas com relação a estas componentes. A Lagrangeana é, então, dada por

$$L = \int d^4x \left(\frac{1}{6} \phi^3 + \frac{1}{2} \psi^2 + A \right). \quad (2.246)$$

As equações de Euler-Lagrange dos campos auxiliares são $\chi = 3$. A Lagrangeana é obtida com a substituição desta solução na equação (2.246).

Uma propriedade do superpotencial merece ser notada. Suponha que o superpotencial não seja dado pela eq. (2.244), ao invés disso seja dado por

$$= \frac{1}{6} \phi^3 + \frac{1}{2} \psi^2.$$

Este “superpotencial” difere da eq. (2.244) apenas pelo termo χ . Entretanto, pode-se verificar, utilizando as transformações supersimétricas da Lagrangeana obtida através deste “superpotencial”, que a mesma não é supersimétrica. Este é apenas um exemplo da seguinte regra geral: o superpotencial deve ser holomorfo em todos os supercampos para dar origem a uma Lagrangeana que obedeça à supersimetria [10]. Por holomorfo entende-

se que no superpotencial um supercampo não pode aparecer junto a seu adjunto.

Pode-se, ainda, incluir as simetrias de gauge, que comutam com a supersimetria. Em teorias supersimétricas $\mathcal{N} = 1$, um bóson de gauge é sempre acompanhado de seu superparceiro, uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ chamada gaugino λ (cada λ é índice dos parâmetros do grupo de gauge). Juntos eles formam os graus de liberdade físicos de um supercampo chamado de multiplete vetorial. Como o bóson de gauge, o gaugino se transforma sob a representação adjunta do grupo de gauge. Da mesma forma que o multiplete chiral, o multiplete vetorial contém um campo escalar complexo auxiliar ϕ .

Para construir modelos supersimétricos com interações de gauge, pode-se, inicialmente, incluir as interações supersimétricas para o multiplete vetorial

$$\mathcal{L}_{\text{gauge-kinetic}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{\partial} \lambda, \quad (2.247)$$

onde as derivadas covariantes \not{D} para os gauginos são

$$\not{D} = \not{\partial} + g \not{A}^a T^a. \quad (2.248)$$

Nesta equação, f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo de gauge.

O próximo passo é trocar todas as derivadas ordinárias para os campos de matéria da eq. (2.243) por derivadas covariantes, o que leva ao acoplamento dos bósons de gauge à matéria chiral:

$$\mathcal{L}_m = \bar{\psi} \not{D} \psi + \dots,$$

onde T^a é o gerador do grupo de gauge, escrito na representação própria dos campos de matéria. Entretanto, a supersimetria requer acoplamentos similares entre gauginos e a matéria chiral:

$$\mathcal{L}_m = \dots + 2g \int d^4x \bar{\lambda}^a T^a \psi + \text{h.c.} \quad (2.249)$$

Em $\mathcal{N} = 1$, há também a interação entre os campos chirais de matéria e os campos auxiliares,

que deve ser considerada, ou seja,

$$L_{\text{aux.}} = (\dots) < .$$

Os dois acoplamentos acima podem ser obtidos pela transformação supersimétrica dos termos cinéticos contendo os acoplamentos entre bósons de gauge e campos de matéria. Portanto, eles podem ser considerados como generalizações supersimétricas dos acoplamentos usuais de gauge.

Combinando $L_{\text{gauge-kinetic}}$ e outros termos envolvendo campos auxiliares, pode-se obter a equação de movimento

$$= (\dots) .$$

Outra forma útil para as interações supersimétricas do multiplete vetorial é obtida pela redefinição dos campos \dots , \dots e \dots ,

$$L_{\text{gauge-kinetic}} = \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{2} \dots \quad (2.250)$$

onde $\dots = \frac{1}{2}(\dots)$. Na eq. (2.250) está incluso um termo correspondente a uma configuração não-trivial do vácuo dos campos de Yang-Mills [10]. Obviamente, esta parte da Lagrangeana contém os termos cinéticos usuais para os acoplamentos usuais de gauge e suas generalizações supersimétricas.

O modelo supersimétrico renormalizável mais geral de supermultipletos chirais e vetoriais pode ser especificado pelo superpotencial genérico

$$= \frac{C}{6} + \frac{\dots}{2} \quad (2.251)$$

onde \dots e D indicam os números quânticos de \dots e acoplamentos mínimos dos campos de gauge e de matéria. O superpotencial do Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM) é desta forma. No MSSM, dois dos índices dos acoplamentos de Yukawa C indicam os

índices das famílias, enquanto o terceiro índice denota os campos de Higgs. O segundo termo (de massa) no superpotencial irá se anular por invariância de gauge para todos os campos do MSSM, exceto para os dubletos de Higgs E^* e E_+ .

O superpotencial apresentado na eq. (2.251), junto com as interações de gauge, fornecem os acoplamentos supersimétricos renormalizáveis mais gerais dos supermultipletos chirais com os termos cinéticos padrões. Como teorias fenomenologicamente realistas requerem que a supersimetria seja suavemente quebrada, termos de quebra suave devem ser adicionados, levando a uma teoria efetiva, tal como o MSSM, especificado por seu superpotencial renormalizável e pela Lagrangeana de quebra suave da Supersimetria, L_{eff} .

2.6 Quebra Suave da Supersimetria (Soft Supersymmetry Breaking)

A complexidade de detalhes no Modelo Supersimétrico Mínimo, que apresentaremos no próximo capítulo, aparece, não no nível de manifestação da supersimetria, mas no nível onde a física da quebra da supersimetria é especificada. Em uma linguagem de supercampos, a supersimetria é equivalente a uma invariância translacional no superespaço, o espaço das coordenadas x e θ . Fornecer a um supercampo (ϕ, ψ) um valor não nulo é equivalente a quebrar essa invariância. Se a SUSY fosse uma simetria exata, não quebrada, teríamos s-elétrons com $m = 0$. Da mesma forma, gluinos e fotinos sem massa também deveriam existir. Estas partículas teriam sido detectadas facilmente a muito tempo. Como os mesmos nunca foram observados, sabe-se que a SUSY é uma simetria quebrada [10]. De uma perspectiva teórica, espera-se que esta simetria seja espontaneamente quebrada, analogamente à simetria eletrofraca no Modelo Padrão. Mais adiante, será construída a Lagrangeana do MSSM com termos gerais de quebra suave da supersimetria (soft supersymmetry breaking).

A idéia de uma quebra suave nasceu da hipótese de se poder fazer uma União das

teorias forte e eletrofraca [11]. A SUSY é quebrada suavemente por termos de massa para todos os superparceiros escalares e gauginos. A origem da quebra da SUSY situa-se fora dos graus de liberdade do Modelo Padrão. A quebra suave da SUSY visa assegurar que a massa dos bósons de Higgs não tenham sensibilidade quadrática em relação à massa de Unificação. Ou seja, a quebra é suave no sentido de não gerar divergências indesejadas. Esta quebra suave é obtida permitindo-se apenas acoplamentos que sejam consistentes com critérios de renormalizabilidade da teoria de perturbações de supercampos, de modo que nenhum novo tipo de divergência seja introduzido.

É possível fazer algumas considerações sobre os termos de quebra da SUSY que aparecerão na Lagrangeana. Pode-se mostrar que para qualquer ordem de perturbação da teoria, a inclusão dos seguintes termos ainda fornece o cancelamento de divergências [12]:

- termos escalares de massa $\sum_i |H_i|^2$,
- interações escalares trilineares $(\sum_i H_i H_i + A)$,
- termos de massa dos gauginos $\frac{1}{2} \sum_a F_a^2$, onde F é o índice do grupo de gauge,
- termos bilineares $(\sum_i H_i H_i + A)$, e
- termos lineares $\sum_i H_i$.

Se a maior escala de massa associada aos termos de quebra suave for denotada por M , então as correções aos Higgs devem ser da forma

$$\delta^2 = M^2 \left[\frac{1}{16B^2} \ln\left(\frac{M}{\mu}\right) + \dots \right]. \quad (2.252)$$

A supersimetria é quebrada porque estes termos contribuem explicitamente para as massas e interações das partículas supersimétricas, sem contribuir para suas parceiras do Modelo Padrão. A diferença de massas entre as partículas do MP e suas superparceiras deve ser determinada pelos termos de massa que aparecerem na lagrangeana de quebra de simetria. Espera-se que as massas das partículas mais leves estejam em torno de 1 % .

Não se sabe ao certo como ocorre a quebra da SUSY, mas, em geral, assume-se que esta quebra ocorra em um setor ‘oculto’ e seja transmitida para o setor ‘visível’, constituído

pelas partículas do MSSM, por algum mecanismo [13]. O resultado é a Lagrangeana efetiva de quebra suave da SUSY, \mathcal{L}_{eff} , no setor visível. Uma enorme variedade de mecanismos e cenários de quebra da SUSY e sua transferência para o MSSM têm sido propostos. Os dois mecanismos mais estudados são a quebra da SUSY mediada pela gravidade e a quebra da SUSY mediada por bósons de gauge [14].

Nos modelos de quebra da SUSY mediada pela gravidade, onde a gravidade é a mensageira da quebra, o neutralino é a LSP (Lightest Supersymmetric Particle). Este cenário, além de fornecer uma excelente candidata à matéria escura, é o mais favorecido teórica e observacionalmente, e será o cenário considerado no próximo capítulo.

Na quebra da Supersimetria mediada por bósons de gauge, a quebra é transmitida ao MSSM por interações de gauge. Tipicamente, em tais modelos as partículas mensageiras da quebra são partículas com números quânticos de $(3) \times (2) \times (1)$. Neste cenário, a LSP é o gravitino, com massas da ordem de m_{D} . O neutralino ou o stau fazem o papel de partículas mais leves acima da LSP (NLSP - Next to Lightest Supersymmetric Particle).

Capítulo 3

Modelo Supersimétrico Mínimo

Apesar de anos de sucesso experimental do Modelo Padrão, sabe-se atualmente que ele não é a última teoria para as interações fundamentais. Nas últimas décadas vem surgindo uma série de problemas que mostram que uma descrição mais completa deve incorporar novas ferramentas ao MP.

Experimentalmente, existe o problema da massa dos neutrinos. No Modelo Padrão os neutrinos têm massa nula, mas existem fortes evidências experimentais de que os neutrinos têm massa. Ainda, qualquer teoria de campo do Modelo Padrão que tente incluir a gravidade acaba se tornando não-renormalizável. Finalmente, se observarmos as constantes de acoplamento num cenário de uma Teoria Unificada, as constantes de acoplamento se aproximam a altas energias, mas não se encontram; este é conhecido como o problema da unição. Já num cenário com Supersimetria, estas constantes de fato se encontram.

Uma das tentativas de construir uma teoria mais geral é o Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM).

3.1 Modelo Supersimétrico Mínimo

Em uma teoria supersimétrica, qualquer estado fermiônico deve ser acompanhado por um estado bosônico e vice-versa. Nas primeiras teorias supersimétricas, achava-se que alguns desses estados requeridos pela Supersimetria (SUSY) poderiam ser identificados com algumas das partículas conhecidas. Essa idéia mostrou-se fenomenologicamente incorreta, fazendo com que novas partículas fossem necessárias, de modo que o espectro de partículas aumenta significativamente no Modelo Supersimétrico Mínimo, como listado na tabela abaixo.

Tabela 1. Espectro de partículas do Modelo Supersimétrico Mínimo.

Partículas do Modelo Padrão		Parceiras Supersimétricas	
Símbolo	Nome	Símbolo	Nome
$G = 3$	quarks up	\tilde{G}_*^1	squarks up
$G = 3$	quarks down	\tilde{G}_+^1	squarks down
$F = 3$	léptons	\tilde{F}_1	sléptons
$I = I_1, I_2, I_3, I_0$	neutrinos	$\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$	sneutrinos
	glúons	\tilde{g}	gluinos
\pm	bosóns	$\tilde{\chi}_{1,2}^{\pm}$	charginos
E^{\pm}	bósons de Higgs carregados		
	fóton		
	bóson		
0	escalar de Higgs leve	$\tilde{\chi}_1^0, \tilde{\chi}_4^0$	neutralinos
E_1^0	escalar de Higgs pesado		
E_3^0	pseudoescalar de Higgs		

Cada estado do Modelo Padrão corresponde a um estado supersimétrico. Os quarks têm spin $\frac{1}{2}$, enquanto os squarks são escalares. Portanto, há dois squarks (left e right) para cada quark. Em geral, os quarks up das três diferentes cargas de cor da interação forte misturam-se entre eles, e também os quarks down, então há seis squarks up e seis

squarks down no espectro de partículas.

Os superparceiros dos bósons \pm e dos bósons de Higgs E^\pm , higgsinos e gauginos carregados, têm os mesmos números quânticos $(3) \times (1)$. Assim, eles se misturarão, geral, após a quebra da simetria eletrofraca e os dois auto-estados de massa resultantes são combinações lineares conhecidas como charginos. O mesmo ocorre com os superparceiros do fóton, 0 , e os bósons de Higgs neutros. Estes campos se misturam para dar origem a quatro auto-estados de massa chamados neutralinos. O símbolo $\tilde{}$ será usado para denotar os superparceiros; entretanto, nas equações freqüentemente este símbolo será omitido para os neutralinos e charginos, quando não gerar ambigüidade. Provavelmente, a partícula supersimétrica mais leve é o neutralino de menor massa, $\tilde{\chi}_1^0$, que deve ser estável. Ele seria um candidato natural à matéria escura, e será referido, quando não causar confusão, simplesmente como neutralino, designado por $\tilde{\chi}_1^0$.

O espectro de partículas do Modelo Padrão é especificado da mesma maneira que para os Modelos sem Supersimetria. O modelo de quebra de simetria de gauge também permanece o usado no Modelo Padrão e fornece a mesma relação entre as massas dos bósons \pm e 0 . Uma diferença importante ocorre no setor de Higgs. No Modelo Padrão, apenas um dubleto de Higgs é suficiente para gerar massa para os léptons e quarks. Na SUSY, entretanto, é preciso pelo menos dois dubletos de Higgs para dar origem a termos de massa apropriados [15].

As diferentes extensões supersimétricas do Modelo Padrão são naturalmente divididas em duas classes. A primeira é o Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM), contendo o número mínimo de campos e parâmetros requeridos para a construção de um modelo realístico de léptons e quarks. A segunda classe recebe o nome de Modelos Supersimétricos Não-Mínimos (NMSSM). Muitos desses modelos podem ser construídos, mas em geral aumentam o número de parâmetros e campos sem um aumento correspondente em seu poder de predictibilidade e motivação física.

O MSSM tem um alto grau de predictibilidade, e dentro deste modelo todas as massas e constantes de acoplamento do setor dos bósons de Higgs podem ser calculadas apenas

com os termos principais da interação (no nível da “árvore”), sem utilizar termos de correções radiativas.

Considerando que o MSSM seja um dos modelos mais atrativos do ponto de vista prático, ele será tratado no presente trabalho. É interessante notar que o MSSM sobreviveu a muitos testes experimentais e grande parte dos parâmetros relevantes do MSSM têm valores bastante próximas aos valores do Modelo Padrão.

Os “ingredientes” principais do MSSM podem ser de nidos nos seguintes pontos:

- o grupo mínimo de gauge: $(3) \times (2) \times (1)$;
- o conteúdo mínimo de partículas, englobando as três gerações de léptons e quarks, doze bósons de gauge (de nidos na maneira usual), dois dubletos de Higgs e, é claro, todos os superparceiros destas partículas;
- a quebra da SUSY, por termos suaves de quebra (soft supersymmetry breaking);
- uma paridade-R discreta conservada.

3.1.1 Paridade-R

O Modelo Padrão contém todas as interações renormalizáveis possíveis que são permitidas pelas simetrias $(3) \times (2) \times (1)$. O superpotencial utilizado no MSSM, por outro lado, é mínimo, no sentido de que contém apenas os termos necessários para ser consistente com as interações do Modelo Padrão. Se construirmos uma teoria baseada apenas nos três primeiros pontos, aparecerão teorias que violam a conservação de número leptônico ($*$) e número bariônico (1). Os termos responsáveis por isso geram uma física inaceitável com rápido decaimento de núcleons. Além disso, processos que violam 1 e $*$, em geral, não são observados. Assim, estes termos devem ser evitados de alguma forma e acredita-se que isto pode ser feito de maneira satisfatória através da introdução de uma simetria adicional, como uma simetria de gauge ou uma simetria discreta. Esta última possibilidade é utilizada no MSSM. Nele, uma simetria não-quebrada correspondendo a uma paridade-R, ou, equivalentemente, paridade de matéria, é introduzida para eliminar os termos indesejados. A paridade-R de um estado é relacionada a seu spin (s), número

bariônico (1) e número leptônico (*) por

$$= (1)^{31+22}. \quad (3.1)$$

Note que assumindo a conservação dos números bariônico e leptônico, isto, automaticamente, implica na conservação da paridade-R.

Além disso, a consequência imediata da expressão acima é que todas as partículas do Modelo Padrão (inclusive os bósons de Higgs) têm paridade-R positiva, $P_R = 1$, enquanto seus superparceiros têm paridade-R negativa, $P_R = -1$. Como resultado, as partículas supersimétricas podem ser produzidas apenas em pares, e qualquer um de seus produtos de decaimento deve conter um número ímpar de partículas supersimétricas. Isto implica que a partícula supersimétrica mais leve (Lightest Supersymmetric Particle - LSP) tem que ser estável, pois não tem canais de decaimento permitidos. Se for eletricamente neutra, então a LSP seria uma excelente candidata à matéria escura.

Note que acima foi definido que o MSSM conserva a paridade-R. Isto parece um processo completamente arbitrário já que o MSSM não sofreria nenhuma inconsistência teórica se ela não fosse incluída. Entretanto, muitos mecanismos nas extensões do MSSM têm sido propostos que de fato levam esta simetria.

3.1.2 Supermultipletos Chirais

Os férmions do Modelo Padrão têm a propriedade de que suas componentes de “mão direita” e de “mão esquerda” transformam-se diferentemente sob os grupos de gauge. Apenas multipletos chirais podem conter férmions cujas componentes de “mão direita” transformam-se de forma diferente de suas parceiras de “mão esquerda” sob transformações dos grupos de gauge. Portanto, no MSSM, cada uma das partículas fundamentais deve estar em um supermultiplete de gauge ou em um supermultiplete chiral. Os superparceiros de spin 0 dos férmions do Modelo Padrão são escritos com um s , por exemplo, o superparceiro do elétron é chamado de s -elétron. Adicionalmente, os superparceiros

são denotados com um $\tilde{}$, por exemplo, o s-elétron de “mão esquerda” é escrito como \tilde{e}_L . Note que o subscrito no s-elétron se refere a helicidade de seu parceiro do Modelo Padrão, já que os s-elétrons têm spin 0. As componentes de “mão direita” e de “mão esquerda” dos férmions são separadas em duas componentes de férmions de Weyl com diferentes transformações de gauge. Assim, elas devem ter companheiros escalares complexos diferentes (independentes). As interações de gauge dos parceiros escalares são as mesmas correspondentes aos férmions do Modelo Padrão.

O bóson de Higgs deve estar em um multipleteo chiral, já que tem spin 0. Na SUSY são necessários dois multipletos. A razão disso reside no fato de que o superpotencial é holomórfico, de modo que o multipleteo de Higgs, que fornece massa para os quarks do tipo up, não poderia fornecer massa para quarks do tipo down. Assim, para se fornecer massa para todos os quarks, precisamos de pelo menos dois campos de Higgs, um com hipercarga $C = \frac{1}{2}$ e outro com $C = -\frac{1}{2}$. Outra razão para a necessidade de dois multipletos é que a SUSY não permite conjugação de carga, então dois dubletos são necessários para evitar anomalias originadas por Higgsinos de spin- $\frac{1}{2}$. Os supermultipletos chirais necessários para o MSSM estão listados na tabela 2.

Tabela 2. Supermultipletos chirais do MSSM.

Nomes	Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	((3), (2), (1) ₃)
squarks	$\mathbf{6}$ (\tilde{u}, \tilde{d})	()	$(3, 2, \frac{1}{6})$
quarks	-	\tilde{u}, \tilde{d}	$(\bar{3}, 1, \frac{2}{3})$
($\times 3$ famílias)	-	\tilde{u}, \tilde{d}	$(\bar{3}, 1, \frac{1}{3})$
sléptons, léptons	$\mathbf{*}$ ($\tilde{\tau}, \tilde{\nu}$)	()	$(1, 2, \frac{1}{2})$
($\times 3$ famílias)	-	$\tilde{\tau}, \tilde{\nu}$	(1, 1, 1)
Higgs, higgsinos	E_* (E_*^+, E_*^0)	$\tilde{e}_+, \tilde{e}_0, \tilde{e}_-$	$(1, 2, \frac{1}{2})$
	E_+ (E_+^0, E_+^-)	$(\tilde{E}_+^0, \tilde{E}_+^-)$	$(1, 2, \frac{1}{2})$

3.1.3 Supermultipletos de Gauge

A interação forte da Cromodinâmica Quântica (QCD) é mediada por glúons, com superparceiros chamados gluinos. Os bósons vetoriais do Modelo Padrão devem ser acomodados em supermultipletos de gauge. Seus superparceiros fermiônicos são chamados de gauginos. No Modelo Padrão, após a quebra da simetria eletrofraca, W^0 e B^0 se misturam para fornecer os autoestados de massa Z^0 e A^0 . Da mesma forma, a mistura de gauginos \tilde{W}^0 e \tilde{B}^0 é chamada de zino (\tilde{Z}^0) e fotino ($\tilde{\gamma}$). Se a Supersimetria não fosse quebrada, seriam autoestados de massa com massas de $M/4$ e 0. A tabela 3 lista os supermultipletos de gauge do MSSM.

Tabela 3. Supermultipletos de gauge do MSSM.

Nomes	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	((3), (2), (1) ₃)
gluino, glúon	\tilde{g}		(8,1,0)
winos, bósons	$\tilde{W}^\pm, \tilde{W}^0$	$\tilde{B}^\pm, \tilde{B}^0$	(1,3,0)
bino, bóson 1	\tilde{B}^0		(1,1,0)

Os supermultipletos chiral e de gauge listados acima são o conteúdo de partículas do MSSM. Uma característica importante dessa teoria é que nenhum dos superparceiros foi descoberto experimentalmente ainda. Como já foi mencionado anteriormente, se a SUSY não fosse quebrada, seria possível observar s-elétrons, fótinos e gluinos.

3.2 Construção do MSSM

A partir daqui será feita uma construção mais detalhada do MSSM, descrevendo os termos de interação de forma geral, através do formalismo dos supercampos. Nesta construção será utilizada a representação de Weyl, já que esta representação é mais adequada para descrever férmions sem massa.

3.2.1 Formalismo dos Supercampos

Uma das formas de se obter a lagrangeana de uma teoria de campo supersimétrica é através do formalismo de supercampos. Um supercampo é um conjunto de “componentes” de campos, contendo excitações, tais como férmions, campos escalares, ou partículas de gauge, organizadas de modo que a ação das transformações de supersimetria nestas componentes de campos seja simplificada quando escritas em termos de supercampos. As várias componentes de campo de um dado supercampo são membros de um multiplete supersimétrico. Um supercampo é escrito formalmente como um polinômio em variáveis espinoriais abstratas, as quais são denotadas por $\theta, \bar{\theta}$, que devem satisfazer às relações de anticomutação

$$\{\theta^a, \theta^b\} = \{\bar{\theta}_a, \bar{\theta}_b\} = \{\theta^a, \bar{\theta}_b\} = 0$$

Estas variáveis são chamadas de coordenadas do super-espaco e transformam-se como espinores com relação às transformações de Poincaré. Um supercampo genérico será da forma

$$\begin{aligned} \Phi(\theta, \bar{\theta}) = & \phi(x) + \theta^a \psi_a(x) + \bar{\theta}_a \bar{\chi}^a(x) + \theta^a \theta^b \rho_{ab}(x) + \bar{\theta}_a \bar{\theta}_b \sigma^{ab}(x) + \theta^a \theta^b \theta^c \chi_{abc}(x) \\ & + \bar{\theta}_a \bar{\theta}_b \bar{\theta}_c \bar{\chi}^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}(x) + \theta^a \theta^b \bar{\theta}_c \psi_{ab\bar{c}}(x) + \bar{\theta}_a \bar{\theta}_b \theta_c \bar{\chi}^{\bar{a}\bar{b}c}(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

que contém componentes de campos escalares, espinoriais e vetoriais. Como uma característica do formalismo, algumas das componentes do campo acabam sendo não-dinâmicas, o que significa que os campos auxiliares podem ser eliminados usando as equações de Euler-Lagrange, pois esses campos, em geral, representam potenciais relacionados a outros campos e acabam acoplando-se às equações de movimento destes outros campos. Como representações para as transformações de supersimetria, os supercampos são, em geral, redutíveis. As únicas representações de supercampos irredutíveis são de dois tipos. O primeiro tipo de representação irredutível é fornecido pelos supercampos chirais, que

são supercampos que satisfazem à equação de vínculo

$$\bar{\psi} \gamma_5 \psi + \psi \gamma_5 \bar{\psi} = 0. \quad (3.3)$$

O segundo tipo de representação irreduzível é fornecido por supercampos vetoriais, que satisfazem ao vínculo

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{\beta}. \quad (3.4)$$

Lembrando que os supercampos ψ_{α} e ψ^{α} em si são escalares, suas componentes são chirais e vetoriais, respectivamente. Estes campos são as versões supersimétricas de dois tipos de campos não-supersimétricos: um supercampo chiral contém as representações supersimétricas dos campos fermiônicos chirais, e um supercampo vetorial, as representações supersimétricas de campos de gauge. Estes vínculos, (3.3) e (3.4), eliminam certas componentes de campo sem destruir a supersimetria.

Para construir uma ação funcional, deve-se eliminar as coordenadas fermiônicas do super-espaço sem destruir a supersimetria. Um método é fornecido pelas regras de Berezin [1] para integração das variáveis de Grassman,

$$\int d\theta = 0 \\ \int d\theta \theta = 1.$$

É equivalente fazer a integração ou a derivação com relação às variáveis de Grassman. Usando esta definição, a ação polinomial renormalizável mais geral para uma teoria de um supercampo chiral pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu} \psi \partial^{\mu} \psi + \psi \left(\gamma_{\mu} \partial^{\mu} + m \right) \psi + K \right]. \quad (3.5)$$

O segundo termo, envolvendo potências de ψ , é chamado de superpotencial. O primeiro termo é identificado como termo de energia cinética, e a prescrição mínima de acoplamento

para interação com um vetor de supercampo é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \text{h.c.},$$

onde ψ é o supercampo vetorial.

3.2.2 Lagrangeana Chiral

A parte livre da lagrangeana é

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \text{h.c.}, \quad (3.6)$$

com o conteúdo abaixo. As interações renormalizáveis mais gerais para estes campos podem ser escritas como

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \text{h.c.}, \quad (3.7)$$

onde \mathcal{W} é o superpotencial de nido por

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{6} C \psi^3 \\ &= \frac{1}{2} \psi^2, \\ &= \frac{1}{6} C \psi^3. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim, a densidade lagrangeana chiral completa pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\gamma 5} = \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_5. \quad (3.9)$$

3.2.3 Lagrangeana de Gauge

A densidade lagrangeana para um supermultiplete de gauge é dada por

$$\mathcal{L}_{7*7} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \dots, \quad (3.10)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu], \quad (3.11)$$

é o campo de força usual de Yang-Mills, e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu], \quad (3.12)$$

O índice a percorre a representação adjunta do grupo de gauge ($a = 1, \dots, 8$) para $SU(3)$, $a = 1, 2, 3$ para $SU(2)$, $a = 1$ para $U(1)$, e T_a são matrizes hermitianas, geradores dessa representação.

3.2.4 Lagrangeana Supersimétrica para o MSSM

Como a supersimetria comuta com as transformações de gauge, os escalares e os campos fermiônicos devem estar na mesma representação do grupo de gauge. Para termos uma lagrangeana invariante de gauge, precisamos substituir as derivadas ordinárias na eq. (3.6) por derivadas covariantes de nidas acima. Este procedimento executa o propósito de acoplar os bósons vetoriais de gauge aos escalares e férmions do multiplete chiral. Mas precisamos ainda considerar se existem quaisquer outras interações permitidas pela invariância de gauge envolvendo somente os multipletos vetoriais dos campos de gauge. De fato, há três termos que poderiam ser adicionados, já que são renormalizáveis. Incluindo estes termos de interação de gauge, a densidade lagrangeana completa para uma teoria

supersimétrica renormalizável é

$$\mathcal{L}_{23} = \mathcal{L}_{7^*7} + \mathcal{L}_{Y5} + 2 [(\# \% \$)_{>} + >^\dagger (\$^\dagger \% \#)] + (\# \% \#)_{<}, \quad (3.13)$$

porém com as derivadas ordinárias em \mathcal{L}_{Y5} trocadas por derivadas covariantes. O superpotencial para o MSSM é dado por [14]

$$\mathcal{W}_{229} = \bar{y}_{*6} E_* + \bar{y}_{+6} E_+ + \bar{y}^* E_+ + E_* E_+. \quad (3.14)$$

Os campos que aparecem no superpotencial são os supercampos da tabela 2. As constantes adimensionais de Yukawa são matrizes 3×3 no espaço das famílias. Todos os índices sobrescritos de gauge e das famílias foram suprimidos. O termo é a versão supersimétrica do termo de massa de Higgs no Modelo Padrão. Comparando com o Modelo Padrão, podemos notar que temos interações adicionais: os y_{*+} não implicam simplesmente em acoplamentos Higgs-quark-quark e Higgs-lépton-lépton, mas também em interações squark-higgsino-quark e slépton-higgsino-lépton.

3.2.5 Modelo Supersimétrico Mínimo: Discussão Geral

Considere uma teoria de campo supersimétrica, cujo conteúdo dos supercampos seja suficiente para incorporar os campos do Modelo Padrão como componentes. Considere que todas as interações sejam invariantes de gauge e renormalizáveis, e que ela não permita mais supercampo algum além do mínimo requerido para englobar os campos do Modelo Padrão. Esta teoria é o Modelo Supersimétrico Mínimo (MSSM). Os supercampos chirais do MSSM são os supercampos dos quarks e dos léptons

$$\hat{q}, \tilde{q}, \hat{l}, \tilde{l}, \hat{e}, \tilde{e}, \quad (3.15)$$

juntamente com os supercampos de Higgs

$$\hat{E}_1, \hat{E}_2. \quad (3.16)$$

Os supercampos \hat{G} , \hat{K} , \hat{E}_1 e \hat{E}_2 carregam índices de (2) na forma usual; são dubletos fracos. Os índices nos supercampos dos quarks e léptons são índices de geração (índices latinos i, j, D serão usados como índices de geração). Os supercampos vetoriais são aqueles apropriados à simetria de gauge $(1)_3 \times (2) \times (3)$, ou seja,

$$\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}. \quad (3.17)$$

A notação com $\hat{}$ indica os supercampos. Os supercampos do MSSM estão listados nas tabelas 4, 5 e 6 abaixo.

A existência de dois supercampos de Higgs, a primeira vista, parece não-mínima. Entretanto, não é possível introduzir os acoplamentos de Yukawa de ambos os tipos de quarks, up e down, ao mesmo campo de Higgs no MSSM. Pode-se recordar que no Modelo Padrão com apenas um dubleto de Higgs, quarks do tipo down e up acoplam-se, respectivamente, a H e $H^c = H_2 H$. No entanto, em um superpotencial para supercampos chirais, um supercampo não pode aparecer junto a seu adjunto; não há nenhum termo supersimétrico com esta forma. Assim, requer-se um campo extra de Higgs. Além disso, a existência de um segundo supercampo de Higgs é necessária para evitar uma anomalia de gauge que resultaria dos férmions chirais desemparelhados existentes no supermultiplete de Higgs.

Tabela 4. Conteúdo de campos de matéria do MSSM.

Super-campo	Componentes dos Campos de matéria	Números Quânticos (3), (2), (1)	Nome
$\hat{6}$	$\mathbf{6}$	$(3, 2, \frac{1}{3})$	dubleto de quarks left
$\hat{3}$	$\tilde{\mathbf{3}}$	$(3, 1, \frac{2}{3})$	singl. de quarks up right
$\hat{3}$	$\tilde{\mathbf{3}}$	$(3, 1, -\frac{2}{3})$	sing. quarks down right
$\hat{2}$	$\mathbf{2}$	$(1, 2, 1)$	dubleto de léptons left
$\hat{1}$	$\mathbf{1}$	$(1, 1, +2)$	singleto de léptons right

Com o conteúdo dos campos acima, pode-se escrever a Lagrangeana supersimétrica para o MSSM, ou seja,

$$\mathcal{L}_{23} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (3.18)$$

onde W é o superpotencial para os supercampos chirais,

$$W = \hat{E}_1 \hat{E}_2 + \hat{E}_1 \hat{A} \hat{\mathbf{3}} + \hat{E}_1 \hat{A} \hat{\mathbf{6}} + \hat{E}_2 \hat{A} \hat{\mathbf{6}} \quad (3.19)$$

Tabela 5. Conteúdo de campos de gauge do MSSM.

Super-campo	Componentes dos Campos de gauge	Números Quânticos	Nome
\hat{A}	\pm $_3$	(3), (2), (1) (1 0 3)	campos de gauge de (2)
$\hat{1}$	1 $\tilde{1}$	(1 1 +2)	campos de gauge de (1)
\hat{A}	$\tilde{}$	(8 1 0)	campos de gauge de (3)

Tabela 6. Conteúdo de campos de Higgs do MSSM.

Super-campo	Componentes dos Campos de Higgs	Números Quânticos	Nome
\hat{E}_2	$\#_+^+$ $\#_+^0$ $\tilde{+}$ $\tilde{*}$ $\#_+^0$	(3), (2), (1) (1 2 +1)	dubleto de Higgs up
\hat{E}_1	$\#_+^+$ $\#_+^0$ $\tilde{+}$ $\tilde{+}$ $\#_+^0$	(1 2 1)	dubleto de Higgs down

Nesta equação, μ é chamado de parâmetro de massa do higgsino, que aparece nas matrizes de massa dos neutralinos e charginos. Dupleto de campos fracos estão implicitamente contraídos usando o tensor L_i de (2). As matrizes A são as matrizes de acoplamento de Yukawa, relacionadas às matrizes de massa dos férmions, ψ , ψ^* e ψ^\dagger .

na forma usual

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} ; \quad A_+ = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} +; \quad A_* = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} *, \quad (3.20)$$

onde $\tan \theta$ é a taxa de valores esperados de vácuo (VEVs) para os campos de Higgs.

Na verdade, as regras específicas para a construção da Lagrangeana já foram quebradas. O superpotencial escrito acima não é o superpotencial mais geral possível. Existe uma outra classe de interações que violam a paridade-R que não foram incluídas. A existência de tais interações faria do MSSM um desastre fenomenológico. Estes termos são eliminados pela imposição de uma simetria discreta, a paridade-R,

$$= (-1)^{3B+2L},$$

onde B e L são os números bariônico e leptônico e s é o spin. A necessidade desta restrição é uma contrariedade, comparada ao caso do MP onde os números bariônico e leptônico aparecem como simetrias acidentais da lagrangeana invariante de gauge e renormalizável mais geral. Nesta definição do MSSM, a paridade-R é uma simetria exata. Isto leva à importante consequência de que deve existir uma partícula mais leve com $s = 1/2$, e esta partícula, chamada de partícula supersimétrica mais leve (Lightest Supersymmetric Particle - LSP), deve ser estável.

A teoria especificada pelas equações (3.18) e (3.19) é uma teoria manifestamente supersimétrica de campos interagindo entre si e com seus parceiros de supermultiplete. Estes parceiros devem, é claro, ter a mesma massa que as partículas do MP às quais estão relacionadas, e isto entra em direta contradição com os fatos experimentais. De alguma forma a supersimetria deve ser quebrada, de modo que os parceiros indesejados ganhem massas suficientemente altas para não terem sido descobertos em colisões de altas energias. Por outro lado, este mecanismo de quebra não deve destruir características desejáveis na teoria supersimétrica. Esta quebra bem comportada é chamada de quebra suave (soft breaking).

A forma mais geral dos termos de quebra suave da SUSY invariantes de gauge envolvendo os campos do MSSM é [12]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{soft}} = & \frac{1}{2} |E_1|^2 + \frac{1}{2} |E_2|^2 + \frac{1}{2} (E_1 E_2 + E_2 E_1) \tilde{\mathcal{G}}_2 - \tilde{\mathcal{G}}_2^{\dagger} + \tilde{\mathcal{G}}_2^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_2 + \\
 & \tilde{\mathcal{G}}_1^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_1 + \tilde{\mathcal{G}}_2^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_2 + \tilde{\mathcal{G}}_3^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_3 + E_2 \tilde{\mathcal{G}}_2 (A^* \tilde{\mathcal{G}}_2)^{\dagger} + \\
 & E_1 \tilde{\mathcal{G}}_1 (A^* \tilde{\mathcal{G}}_1)^{\dagger} + E_1 \tilde{\mathcal{G}}_2 (A^* \tilde{\mathcal{G}}_2)^{\dagger} + E_1 \tilde{\mathcal{G}}_3 (A^* \tilde{\mathcal{G}}_3)^{\dagger} + \\
 & \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_1^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_1 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_2^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_2 + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{G}}_3^{\dagger} \tilde{\mathcal{G}}_3 .
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Os campos nesta equação não são supercampos, mas componentes de campos; $\tilde{\mathcal{G}}$ indica o parceiro escalar de um férmion \mathcal{G} e $\tilde{\mathcal{G}}$ indica o parceiro fermiônico de um bóson vetorial \mathcal{G} . Os parâmetros $(E = \mathcal{G})$ são as matrizes no espaço de “sabores” com dimensões de massa e as $\tilde{\mathcal{G}}$ (para $\mathcal{G} = \mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G}$) são matrizes simétricas 3×3 com dimensões de massa ao quadrado. Assim, a lagrangeana efetiva para o MSSM pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{23} + \mathcal{L}_{\text{soft}}, \tag{3.22}$$

onde $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ inclui os termos listados acima. Os parâmetros de quebra suave têm um impacto significativo no espectro de massas do MSSM. As matrizes de massa dos férmions são geralmente não-diagonais na base onde as matrizes dos férmions são diagonais, com os efeitos não-diagonais dependentes dos parâmetros que aparecem na $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ e de μ , o parâmetro de massa do higgsino. Os gauginos e higgsinos com cargas elétricas iguais se misturam. Os carregados são denotados genericamente por charginos e os neutros como neutralinos. As matrizes de massa dos charginos e neutralinos dependem dos parâmetros de massa dos gauginos e de μ .

Estes termos de quebra suave devem ser entendidos como termos de uma lagrangeana efetiva em escalas de energia menores que a escala na qual o mecanismo de quebra da SUSY é de fato, $\mu = 21$. Sendo uma lagrangeana efetiva, $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ fornece uma descrição completa da

física de quebra de simetria na escala em que aquela física é especificada ou abaixo dela, e não é necessário considerar a origem da quebra da simetria ao se estudar a fenomenologia da teoria a baixas energias, $\mu \ll \mu_{21}$. Entretanto, não se pode esperar que L_{eff} descreva de forma adequada processos em escalas maiores que μ_{21} . Neste sentido, o MSSM é uma teoria incompleta e aparentemente existe a necessidade de uma teoria mais geral, na qual o encaixe da quebra suave do MSSM tenha significado.

O próximo passo em direção à fenomenologia do MSSM é substituir os campos auxiliares por suas equações de Euler-Lagrange. A substituição dos campos auxiliares cria várias contribuições à lagrangeana em termos de componentes de campos. Serão enumerados os tipos de termos que aparecem.

Para o potencial escalar,

$$L_3 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\partial_{\mu} \phi_{\alpha} \right)^2 - V(\phi_{\alpha}), \quad (3.23)$$

com

$$V(\phi_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} m_{\alpha}^2 \phi_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}^4 \right), \quad (3.24)$$

onde $\{\phi_{\alpha}\}$ denotam os campos escalares da teoria que são componentes dos supercampos Φ_{α} .

Derivadas do superpotencial em relação aos campos escalares são entendidas de acordo com a seguinte regra: na função $V(\phi_{\alpha})$, trocar cada supercampo por suas componentes escalares e então calcular a derivada indicada. Os ∂_{μ} são geradores de gauge. A soma sobre os índices α , na eq. (3.23), é sobre todo o grupo de geradores de $(1) \times (2) \times (3)$.

Para as interações de Yukawa, a eliminação dos campos auxiliares resulta

$$L_{3*} = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{\alpha}^2 - \left(\frac{1}{2} m_{\alpha}^2 \phi_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}^4 \right) \right) + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi_{\alpha}^2 - \left(\frac{1}{2} m_{\alpha}^2 \phi_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha}^4 \right) \right), \quad (3.25)$$

que fornece a identificação previamente mencionada do acoplamento do superpotencial com os campos fermiônicos de Yukawa.

Para as interações de gauge, a lagrangeana em termo das componentes de campo, sendo ψ um campo fermiônico com superparceiro $\tilde{\psi}$ e o bóson de gauge com superparceiro \tilde{V} , é

$$\mathcal{L}_{7*7} = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\dagger \gamma^\mu \tilde{\psi} \partial_\mu \tilde{V} - \tilde{\psi}^\dagger \gamma^\mu \psi \partial_\mu \tilde{V} + \frac{1}{2} \tilde{V}^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \tilde{V} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\dagger \gamma^\mu \psi \partial_\mu \tilde{V} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\dagger \gamma^\mu \psi \partial_\mu \tilde{V} \quad (3.26)$$

3.2.6 MSSM: Espectro e Interações

Utilizando as prescrições acima para calcular as interações das componentes de campo do superpotencial, a lagrangeana será construída em termo das componentes de campo. O primeiro passo é diagonalizar as várias matrizes de massa para obter os autoestados de massa. Primeiro serão diagonalizadas as matrizes de massa para os charginos e neutralinos, que são os superparceiros fermiônicos dos bósons de gauge e partículas de Higgs. Em seguida, serão diagonalizadas as matrizes de massa dos sférmions, assumindo que as matrizes de massa dos férmions familiares já estão diagonalizadas. O efeito deste procedimento de diagonalização é a introdução de uma matriz de mistura de sabores nas interações de corrente carregada dos quarks, a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, V_{CKM} . Na forma usual, não há efeito observável da diagonalização da matriz de massa dos léptons, devido à liberdade de absorver qualquer rotação por uma contra-rotação dos campos dos neutrinos. O efeito desta rotação nos sférmions será considerado na discussão de suas matrizes de massa. De agora em diante, quando for escrito um campo de quark ou lépton, este será entendido como sendo um autoestado de massa.

Charginos: Na base $\tilde{\chi}^\pm = \tilde{E}^\pm$, a matriz de massa do chargino é

$$M_{\tilde{\chi}^\pm} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{W}} & \sqrt{2} \sin \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta & m_{\tilde{H}} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Esta matriz assimétrica é diagonalizada por rotações separadas de estados carregados

negativamente e positivamente, $\theta_{\pm} = \theta_{\mp}$. As matrizes U_{\pm} e V_{\pm} aparecerão nas interações dos autoestados de massa dos charginos, que serão designados χ_{\pm}^0 , com $\theta_{\pm} = 1/2$.

As formas explícitas para as matrizes de mistura dos charginos são

$$\begin{aligned}
 U_{\pm} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{\pm} & \sin \theta_{\pm} \\ \sin \theta_{\pm} & \cos \theta_{\pm} \end{pmatrix} \\
 V_{\pm} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{\pm} & \sin \theta_{\pm} \\ \sin \theta_{\pm} & \cos \theta_{\pm} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde

$$\tan 2\theta_{\pm} = 2 \frac{\text{Re}(M_{12})}{(M_{11} - M_{22}) \pm \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4|M_{12}|^2}} \tag{3.29}$$

e

$$\tan 2\theta_{\pm} = 2 \frac{\text{Im}(M_{12})}{(M_{11} - M_{22}) \pm \sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4|M_{12}|^2}}.$$

Não foi escolhida a convenção de que as massas sejam positivas; ao invés disto, permite-se que o sinal do termo de massa seja positivo ou negativo, correspondendo ao autovalor de CP da partícula. Se as massas tivessem sido dadas como sendo positivas, esta informação de números quânticos apareceria na matriz de mistura. Assume-se que as interações dos charginos conservam CP. Assim, M_{12} e M_{13} são reais e U_{\pm} e V_{\pm} são matrizes reais. Este formalismo permite que as matrizes de diagonalização e de massa sejam complexas, de modo a acomodar também modelos que violam CP.

Neutralinos: No caso da matriz de massa do neutralino, permitir que os termos de massa tenham qualquer sinal (positivo ou negativo) faz com que seja possível trabalhar com matrizes de mistura de valores puramente reais, com a subsequente simplificação para manipulações dos acoplamentos, especialmente em cálculos numéricos. A matriz de

massa do neutralino, na base $\tilde{1} \quad \tilde{2} \quad \tilde{3} \quad \tilde{E}^0 \quad \tilde{E}^\pm$ é

$$M_{\tilde{\chi}^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

onde $\cos 4$, $\sin 4$, $\cos \theta$ e $\sin \theta$. Esta matriz hermitiana é diagonalizada por uma transformação unitária dos campos do neutralino, $\tilde{\chi}^0 = U \tilde{\chi}^0_{\text{massa}}$.

A matriz $M_{\tilde{\chi}^0}$ aparecerá nas interações dos autoestados de massa dos neutralinos, designados por $\tilde{\chi}^0_i$, com $i = 1, 2, 3, 4$. Os índices i e j serão constantemente usados como índices do chargino ou do neutralino.

Setor de Higgs: Existem cinco estados físicos de Higgs, que serão denotados por A^0 , E^0 , E^\pm e H^\pm . Os estados neutros de CP par, A^0 e E^0 , são misturas das componentes neutras dos estados de interação dos campos de Higgs. O ângulo de mistura é chamado de β e satisfaz às equações

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha \frac{M_{12}^2 + M_{23}^2}{M_{12}^2 - M_{23}^2}, \quad \cos 2\beta = \cos 2\alpha \frac{M_{12}^2 - M_{23}^2}{M_{12}^2 + M_{23}^2}. \quad (3.31)$$

No nível da “árvore”, as massas dos bósons de Higgs neutros são relacionadas por

$$M_{A^0, E^0}^2 = \frac{1}{2} (M_{12}^2 + M_{23}^2 \pm \sqrt{(M_{12}^2 - M_{23}^2)^2 + 4M_{13}^2 \cos 2\alpha}). \quad (3.32)$$

A taxa dos dois valores esperados do vácuo (VEVs) é $\tan \beta = |v_2/v_1|$. Quaisquer dois parâmetros entre as massas e ângulos determinam os outros. Além disso, a massa do bóson de Higgs carregado é relacionada à massa pseudoescalar por

$$M_{H^\pm}^2 = M_{A^0}^2 + M_{E^0}^2.$$

Acima do nível da “árvore”, existem também correções que dependem das massas fermiônicas, de outras combinações de acoplamentos do Modelo Padrão e das massas dos sférmions. Se estas quantidades forem tomadas como conhecidas, permanece verdadeiro que dois dos parâmetros de Higgs são suficientes para determinar o restante.

Squarks, sléptons e sneutrinos: Em geral, as matrizes de massa dos sférmions geram misturas entre os seis sférmions de uma dada carga. Por exemplo, os estados do tipo up dos squarks, \tilde{u}_L e \tilde{u}_R , misturar-se-ão entre eles e, similarmente, os squarks do tipo down e os sléptons carregados. Os sneutrinos são ligeiramente diferentes, já que existem apenas três estados, $\tilde{\nu}_e$. Estas matrizes quadradas 6×6 , escritas em termos de blocos de 3×3 , são

$$\tilde{m}_{*}^2 = \begin{pmatrix} m_{*L}^2 + \frac{1}{4}(m_{*R}^2 - m_{*L}^2) \cos 2\theta_4 & \frac{1}{2}(m_{*R}^2 - m_{*L}^2) \sin 2\theta_4 \\ \frac{1}{2}(m_{*R}^2 - m_{*L}^2) \sin 2\theta_4 & m_{*R}^2 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$\tilde{m}_{+}^2 = \begin{pmatrix} m_{+L}^2 + \frac{1}{4}(m_{+R}^2 - m_{+L}^2) \cos 2\theta_4 & \frac{1}{2}(m_{+R}^2 - m_{+L}^2) \sin 2\theta_4 \\ \frac{1}{2}(m_{+R}^2 - m_{+L}^2) \sin 2\theta_4 & m_{+R}^2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$\tilde{m}_{-}^2 = \begin{pmatrix} m_{-L}^2 + \frac{1}{4}(m_{-R}^2 - m_{-L}^2) \cos 2\theta_4 & \frac{1}{2}(m_{-R}^2 - m_{-L}^2) \sin 2\theta_4 \\ \frac{1}{2}(m_{-R}^2 - m_{-L}^2) \sin 2\theta_4 & m_{-R}^2 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

e a matriz 3×3 do sneutrino é

$$\tilde{m}_{\nu}^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{4} \cos 2\theta_4, \quad (3.36)$$

onde m_{*L}^2 , m_{*R}^2 são as matrizes dos parâmetros de quebra suave da SUSY que aparecem na eq. (3.21). As quantidades m_{*L}^2 são as cargas elétricas: $m_{*L}^2 = 2/3$, $m_{+L}^2 = 1/3$ e $m_{-L}^2 = 1$.

Os termos proporcionais às matrizes de massa dos férmions aparecem dos termos de \mathcal{L}_F e os termos proporcionais às massas dos bósons de gauge vêm dos termos de \mathcal{L}_B , quando o campo de Higgs adquire valores esperados de vácuo (VEVs). Estas matrizes hermitianas

são diagonalizadas por matrizes unitárias, $\tilde{m}_{\psi}^{2+7} = U_{\psi}^{-1} \tilde{m}_{\psi}^2 U_{\psi}$. Os autoestados de massa dos sférmions carregados são denotados por $\tilde{\psi}_i$ com $i = 1 \dots 6$, onde $i = 5, 6$, ou 7 , indicando a família de férmions de tipo up, down ou leptônica. A família do sneutrino é similar, exceto pelo fato de que há apenas três estados, $i = 1, 2, 3$. É importante notar que pode-se executar uma rotação preliminar dos campos dos sférmions no espaço de gerações, de modo que as matrizes 3×3 de massa dos férmions, \tilde{m}_u, \tilde{m}_d e \tilde{m}_ν , sejam diagonais. Isto é feito rotacionando-se os campos dos sférmions left e right pelas mesmas transformações unitárias utilizadas para rotacionar os férmions left e right no processo de diagonalização das matrizes de massa dos férmions. Isto envolve uma mudança nas definições dos parâmetros \tilde{m}_{ψ}^2 da matriz de quebra suave. Como não há uma base preferencial na qual especificar essas matrizes, não há perda de generalidade por esta redefinição. Tal procedimento é mais conveniente porque torna evidente que termos de mistura de sabores de squarks não-diagonais não ocorrem no caso de quebra suave de supersimetria com blindagem de sabor, isto é, quando os termos de quebra suave forem simétricos em sabor.

Pela forma das eqs. (3.33)-(3.35), fica claro que a mistura entre squarks e sléptons é bastante comum. Por exemplo, mesmo que todas as matrizes \tilde{m}_{ψ}^2 sejam diagonais e as \tilde{m}_{ψ}^2 sejam nulas, existem ainda termos não-diagonais nas matrizes \tilde{m}_{ψ}^2 proporcionais às matrizes de massa dos férmions. Neste caso, ainda poderá haver uma mistura significativa entre squarks top right e left.

Alinhamento do vácuo: No contexto deste modelo, o problema do alinhamento do vácuo significa simplesmente que nenhum campo escalar carregando carga eletromagnética ou de cor deveria adquirir um valor esperado de vácuo (VEV). Portanto, as matrizes quadradas de massa dos sférmions dadas acima precisam ter autovalores estritamente positivos.

Interações do MSSM: A partir daqui serão listadas as interações em termos dos autoestados físicos de massa [1]. Será dada uma atenção particular à estrutura de sabores e

mistura de sabores.

As interações envolvendo sférmions são complicadas principalmente pela mistura dos mesmos. É importante tratar apropriadamente o caso geral, já que ele inclui a possibilidade de FCNCs (Flavor-Changing Neutral-Current), que são de grande interesse fenomenológico. Para determinar as interações da forma mais transparente, é adequado introduzir dois operadores de projeção que têm o efeito de projetar os autoestados de massa dos campos dos sférmions em subespaços correspondentes a uma chiralidade particular. Estes operadores serão chamados de P_L e P_R . Eles são definidos de tal forma que

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad (3.37)$$

e similarmente para os squarks do tipo down e para os léptons carregados. As P_L e P_R são as matrizes de mistura dos sférmions definidas pelo processo de diagonalização descrito acima. O caso dos sneutrinos é diferente, já que a família “de mão direita”, ou chiralidade positiva, está ausente; neste caso temos simplesmente $P_L = 1$ e $P_R = 0$. Uma realização explícita destes operadores de projeção é facilmente dada. Considere, por exemplo, os squarks do tipo up na base $(\tilde{u}_L, \tilde{u}_D, \tilde{u}_S, \tilde{u}_C, \tilde{u}_B, \tilde{u}_T)$; nesta base as matrizes de projeção são

$$P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

$$P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Também é conveniente definir as matrizes de projeção 6×6 por $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ e $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$. Estes produtos das matrizes de projeção aparecem em algumas expressões que são quadráticas em campos de sférmions. Do mesmo modo, define-se a matriz CKM projetada

$= \tau @_9$, que é uma matriz 6×6 . Finalmente, os operadores de projeção chirais usuais para os espinores de Dirac são $= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ e $= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$. As interações de sférmions com férmions e neutralinos são dadas por

$$L_{\sim,0} = \sum_{A=*,+} \bar{\psi} (\mathbf{J}^0 + \gamma_5) \tilde{\psi} + \bar{\tau} \mathbf{J} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 6 \end{smallmatrix} \right) \tilde{\tau} + A). \quad (3.40)$$

Os acoplamentos que aparecem aqui são

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^0 &= \mathbf{J} \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right), \\ \gamma_5 &= C \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{2} [\gamma_3 - \tan \theta (\gamma_3 \gamma_5)], \quad \tilde{\tau} = C = 2 \tan \theta, \quad \tilde{\tau} \\ * &= \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \left(\begin{smallmatrix} * \\ \end{smallmatrix} \right) \sim_2, \quad + = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} \left(\begin{smallmatrix} + \\ \end{smallmatrix} \right) \sim_1, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) \sim_1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Os índices repetidos estão sempre somados nestas expressões. Os elementos da matriz foram indicados usando os símbolos \tilde{E}_2 e \tilde{E}_1 para denotar componentes na base de nida na eq. (3.30). As matrizes de massa dos quarks e léptons já estão diagonalizadas, de modo que as matrizes de massa nas definições dos acoplamentos de são diagonais.

As interações de correntes de sférmions com bósons vetoriais são dadas por

$$\begin{aligned} L_{\sim,8} &= \sum_{A=*,+} \cos \theta \left(\gamma_3 \sin \theta \right) \tilde{\psi} \cdot \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) \tilde{\psi} + \\ &+ \frac{1}{\cos \theta} \sum_{A=*,+} \sin^2 \theta \tilde{\psi} \cdot \left(\begin{smallmatrix} \\ \end{smallmatrix} \right) \tilde{\psi} + \\ &\sum_{A=*,+} \tilde{\psi} \cdot \tilde{\psi} \quad \tilde{\psi} \cdot \tilde{\psi} \quad \tilde{\psi} \cdot \tilde{\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau + \tau) \nu + \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau - \tau) \nu + \dots \\
& -\frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{T} (\tau^{\dagger} \tau) \nu + \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau) \mathbf{T} \nu.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Aqui \mathbf{A} é o potencial vetorial dos glúons; \mathbf{W} , \mathbf{Z} e \mathbf{A} são os potenciais vetoriais eletrofracos usuais. Note que $\mathbf{6}$ é uma matriz 3×3 , já que a matriz de massa do sneutrino é uma matriz 3×3 .

Outros termos também aparecem, acoplando as correntes de sférmions aos pares de bósons vetoriais. Estas interações são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} = & \sum_{A=1,2,3} \frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{6} \nu + \sum_{A=1,2,3} \frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{G} \mathbf{6} \nu \\
& + \frac{1}{\cos^2 \theta} \sum_{A=1,2,3} (\mathbf{6}_3 \sin^2 \theta)^2 \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau) \nu \\
& + \frac{1}{\cos \theta} \sum_{A=1,2,3} (\mathbf{6}_3 \sin^2 \theta) \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau) \nu \\
& + \frac{1}{\cos^2 \theta} \sum_{A=1,2,3} \sin^2 \theta \bar{\nu}^{\dagger} (\tau^{\dagger} \tau) \nu \\
& + \frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} [(\tau^{\dagger} \tau) \nu + \bar{\nu} (\tau^{\dagger} \tau) \nu] \\
& + \frac{1}{2} \bar{\nu}^{\dagger} [\mathbf{T} \mathbf{T} + \bar{\nu} (\tau^{\dagger} \tau) \nu] \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \bar{\nu}^{\dagger} [(\tau^{\dagger} \tau + \tau) \nu + \bar{\nu} (\tau^{\dagger} \tau - \tau) \nu] \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \bar{\nu}^{\dagger} [\mathbf{T} (\tau^{\dagger} \tau) \nu + \bar{\nu} (\tau^{\dagger} \tau) \mathbf{T}] \\
& + \sum_{A=1,2,3} \frac{1}{6} \bar{\nu}^{\dagger} (\mathbf{G} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{6} \mathbf{G}) \nu \\
& + 2 \sum_{A=1,2,3} [\bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{6}_A (\tau^{\dagger} \tau) \nu + \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{6}_A (\tau^{\dagger} \tau) \nu] \\
& + 2 \sum_{A=1,2,3} (\mathbf{6}_{3A} \sin^2 \theta) \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{G} \mathbf{6} \nu \\
& + 2 \sum_{A=1,2,3} \frac{1}{\cos^2 \theta} (\mathbf{6}_{3A} \sin^2 \theta) \bar{\nu}^{\dagger} \mathbf{G} \mathbf{6} (\bar{\nu} \mathbf{6}_A)^{\dagger} \nu
\end{aligned}$$

As interações acima das correntes de sférmions com os bósons de gauge ilustram a natureza das FCNCs no modelo. As FCNCs aparecem neste caso porque $\theta = 1$, e a unitariedade das matrizes não é suficiente para assegurar o cancelamento das partes

de correntes de sabores fora da diagonal, isto é, $\Gamma^\dagger = 1$. Tais projeções com aparecem necessariamente porque os bósons fracos de gauge acoplam-se apenas aos férmions de “mão-esquerda” (ou chiralidade negativa), e a própria supersimetria impõe que eles devem acoplar-se apenas aos sférmions esquerdos.

As interações $L_{\tilde{W}_0}$ também incluem FCNCs genericamente, por exemplo, considerando a parte do vértice \tilde{W}_0 proporcional ao coeficiente \mathbf{J}_+ . Esta interação é a superparceira da interação de corrente neutra W_0 . No último caso, não há termos não-diagonais de sabores, por causa do cancelamento de GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani) [1]. Entretanto, o mecanismo de GIM não pode operar para os vértices de mistura quark-squark, pois as rotações dos campos dos squarks são independentes das rotações dos campos dos quarks. As supercorrentes leptônicas não estão imunes a este fenômeno; correntes neutras de mudança de sabor (FCNCs) leptônicas também aparecerão genericamente, com manifestações tais como $(\tilde{W}_0) = 0$.

As interações de correntes carregadas supersimétricas são dadas por

$$L_{\tilde{W}_\pm} = \left[\bar{\psi} - \tilde{\psi}^\dagger \mp \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \right] + \left(\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \right) + \frac{1}{2 \cos 4} \left[\bar{\psi} \tilde{\psi}^\dagger + \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \right] + \frac{1}{2 \sin 4} \left[\bar{\psi} \tilde{\psi}^\dagger + \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \right] + \frac{1}{2 \cos 4} \left[\mathbf{I} \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \mathbf{I} \right] + A, \quad (3.44)$$

onde

$$\tilde{\psi}^\dagger = \left(\tilde{\psi}_9^\dagger \right)_1, \quad \tilde{\psi}^\dagger = \left(\tilde{\psi}_9^\dagger \right)_1, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\psi}_9 + \tilde{\psi} \right)_2, \quad \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\psi}_9 + \tilde{\psi} \right)_2, \quad (3.46)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\psi}_9^* + \tilde{\psi} \right)_2, \quad \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\psi}_9^* + \tilde{\psi} \right)_2, \quad (3.47)$$

Novamente, as matrizes de massa nas equações acima são diagonais pela prévia rotação

dos campos. Não aparecem projetores na equação para \tilde{G} , já que a matriz de mistura do sneutrino é apenas 3×3 . Note, também o aparecimento da operação de conjugação de carga,

$$\tilde{G} = 2\tilde{G}^\dagger. \quad (3.48)$$

As interações de squarks com quarks e gluinos são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{A}\tilde{Q}} = & \sum_{A=*,+} 2^{-1} \bar{q} [G(\tilde{A}) - G(\tilde{A}^\dagger)] (\tilde{Q}) \tilde{G} \\ & + [\bar{G}(\tilde{A}) - \bar{G}(\tilde{A}^\dagger)] (\tilde{Q}) \tilde{G}. \end{aligned}$$

Nas expressões seguintes envolvendo os campos de Higgs serão escritas apenas as interações para os squarks. Para obter as interações para os sléptons, deve-se fazer as trocas $Q \leftrightarrow L$. As interações com os escalares neutros são

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{A}\tilde{Q}^0} &= \kappa_{**0} E^{0\tilde{Q}} + \tilde{\kappa}_{\tilde{+}\tilde{+}0} E^{0\tilde{Q}^+}, \\ \mathcal{L}_{\tilde{A}\tilde{Q}^{\prime 0}} &= \kappa_{**\prime 0} A^{0\tilde{Q}} + \tilde{\kappa}_{\tilde{+}\tilde{+}\prime 0} A^{0\tilde{Q}^+}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde os acoplamentos são

$$\begin{aligned} \kappa_{**0} = & \frac{1/4}{\cos \beta} \cos(\beta + 4) \{ (\kappa_{3*}^* \sin \beta)^2 (\tilde{q}^* \tilde{q}^*)^\dagger + \kappa^* \sin \beta : (\tilde{q}^* \tilde{q}^*)^2 \}^\dagger \\ & \frac{\sin 4}{\sqrt{\cos 4}} \sin(\beta + [\tilde{q}^{\dagger 2} + \tilde{q}^{\dagger 2}]^*) \kappa^* \\ & \frac{\cos}{2\sqrt{\sin 4}} \tilde{\kappa}^{\dagger \dagger} \kappa^* [\kappa^* \tan \beta]^* + A \}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{\tilde{+}\tilde{+}0} = & \frac{1/4}{\cos \beta} \cos(\beta + 4) \{ (\kappa_{3+}^+ \sin \beta)^2 (\tilde{q}^+ \tilde{q}^+)^\dagger + \kappa^+ \sin \beta : (\tilde{q}^+ \tilde{q}^+)^2 \}^\dagger \\ & \frac{\cos 4}{\sqrt{\cos 4}} \cos(\beta + [\tilde{q}^{\dagger 2} + \tilde{q}^{\dagger 2}]^+) \kappa^+ \\ & \frac{\sin}{2\sqrt{\cos 4}} \tilde{\kappa}^{\dagger \dagger} + [\kappa^+ \cot \beta]^+ + A \)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\tilde{W}^0} &= \frac{1/4}{\cos \beta} \sin(\beta + 4) \{ (\%_{3*} \tilde{W}^0 \sin \beta)^2 (\tilde{W}^0)^{\dagger} + \tilde{W}^0 \sin \beta : (\tilde{W}^0)^2 \}^{\dagger} \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{\sin 4}} \cos (\beta^{\dagger} [\tilde{W}^0 \sin \beta + \tilde{W}^0 \sin \beta] \tilde{W}^0) \tilde{W}^0 \\
&\quad + \frac{\sin \beta}{2\sqrt{\sin 4}} \{ \tilde{W}^0 \tilde{W}^0 \sin \beta [\tilde{W}^0 \sin \beta \cot \beta] \tilde{W}^0 + A \} \}, \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{\tilde{Z}^0} &= \frac{1/4}{\cos \beta} \sin(\beta + 4) \{ (\%_{3+} \tilde{Z}^0 \sin \beta)^2 (\tilde{Z}^0)^{\dagger} + \tilde{Z}^0 \sin \beta : (\tilde{Z}^0)^2 \}^{\dagger} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\cos 4}} \sin (\beta^{\dagger} [\tilde{Z}^0 \sin \beta + \tilde{Z}^0 \sin \beta] \tilde{Z}^0) \tilde{Z}^0 \\
&\quad + \frac{\cos \beta}{2\sqrt{\cos 4}} \{ \tilde{Z}^0 \tilde{Z}^0 \sin \beta [\tilde{Z}^0 \sin \beta \tan \beta] \tilde{Z}^0 + A \} \}. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

As interações com pseudoescalares são

$$\begin{aligned}
L_{\tilde{A}^0} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \tilde{A}^0 (\tilde{A}^0 \sin \beta + \tilde{A}^0 \sin \beta \tan \beta) \tilde{A}^0 + A \} \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \tilde{A}^0 (\tilde{A}^0 \sin \beta + \tilde{A}^0 \sin \beta \cot \beta) \tilde{A}^0 + A \} \}. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

As interações com escalares carregados são

$$\begin{aligned}
L_{\tilde{A}^{\pm}} &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{2}} E^{+\sim} (\tilde{A}^{\pm} \tilde{A}^{\pm}) \tilde{A}^{\pm} + A \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} E^{+\sim} (\tilde{A}^{\pm} \tilde{A}^{\pm} [\tilde{A}^{\pm} \tan \beta + \tilde{A}^{\pm} \cot \beta] \tilde{A}^{\pm}) \tilde{A}^{\pm} + A \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} E^{+\sim} (\tilde{A}^{\pm} \tilde{A}^{\pm} [\tilde{A}^{\pm} \tan \beta + \tilde{A}^{\pm} \cot \beta] \tilde{A}^{\pm}) \tilde{A}^{\pm} + A \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} E^{+\sim} (\tilde{A}^{\pm} \tilde{A}^{\pm} [\tilde{A}^{\pm} \tan \beta] \tilde{A}^{\pm}) \tilde{A}^{\pm} + A \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} E^{+\sim} (\tilde{A}^{\pm} \tilde{A}^{\pm} [\tilde{A}^{\pm} \cot \beta] \tilde{A}^{\pm}) \tilde{A}^{\pm} + A \}. \quad (3.55)
\end{aligned}$$

Agora, serão listadas as interações envolvendo neutralinos, charginos e gluinos, sem sférmions:

$$L_{\tilde{g}^0} = \frac{1}{2} \{ \tilde{g}^0 (\tilde{g}^0 \sin \beta + \tilde{g}^0 \sin \beta \tan \beta) \tilde{g}^0 + A \}, \quad (3.56)$$

$$L_{\tilde{g}^{\pm}} = \frac{1}{\cos \beta} \{ \tilde{g}^{\pm} (\tilde{g}^{\pm} \sin \beta + \tilde{g}^{\pm} \sin \beta \tan \beta) \tilde{g}^{\pm} + A \} + \frac{1}{2 \cos \beta} \{ \tilde{g}^{\pm} (\tilde{g}^{\pm} \sin \beta + \tilde{g}^{\pm} \sin \beta \cot \beta) \tilde{g}^{\pm} + A \}, \quad (3.57)$$

$$L_{\tau\tau} = -\frac{1}{2} \bar{\tau} \tau, \quad (3.58)$$

$$L_{\tau\tau} = \frac{1}{2} \bar{\tau} \tau, \quad (3.59)$$

Os acoplamentos que aparecem nas equações acima são dados por

$$\begin{aligned} g_{\tau\tau}^{00} &= g_{\tau\tau}^{00} = \frac{1}{2} (g_{33} + g_{44}), \\ g_{\tau\tau}^0 &= \frac{1}{2} (g_{33} - g_{44}) \sin \beta, \\ g_{\tau\tau}^{\pm} &= \frac{1}{2} (g_{33} + g_{44}) \sin \beta, \\ g_{\tau\tau}^{\pm} &= (10 - 2) g_{33} + 2 g_{44}, \\ g_{\tau\tau}^{\pm} &= (10 - 2) g_{33} + g_{44} \end{aligned}$$

Os índices de τ , τ se referem às bases de nidas nas eqs. (3.21) e (3.25).

As interações de neutralinos e charginos com bósons de Higgs são dadas pela supersimetria e pela simetria de gauge, e, portanto, não exibem a dependência do modelo típica das interações de Higgs,

$$L_{\tau\tau\tau} = \cos E^{0-+} [g_{33} + g_{44}] \sin E^{0-+} [g_{33} - g_{44}], \quad (3.60)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = \sin A^{0-+} [g_{33} - g_{44}] \cos A^{0-+} [g_{33} + g_{44}], \quad (3.61)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = \sin 4^{0-+} [g_{33} - g_{44}] + \cos 4^{0-+} [g_{33} + g_{44}], \quad (3.62)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = \frac{1}{2} E^{-0} [g_{33} + g_{44}], \quad (3.63)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = \frac{1}{2} A^{\sigma} [g_{33} + g_{44}], \quad (3.64)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = \frac{1}{2} E^{-0} [g_{33} + g_{44}], \quad (3.65)$$

$$L_{\tau\tau\tau} = E^{-0} [g_{33} + g_{44}] + A^{\sigma}, \quad (3.66)$$

Os acoplamentos que aparecem aqui são

$$\begin{aligned}
 g_{\phi^+} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos \theta_W} \sin \theta_W, \\
 g_{\phi^0} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos \theta_W} \cos \theta_W, \\
 g_{\phi^+} &= \cos \theta_W [g_{\phi^+} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos \theta_W} (\frac{1}{2} + \tan^2 \theta_W) g_{\phi^+}], \\
 g_{\phi^0} &= \sin \theta_W [g_{\phi^0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos \theta_W} (\frac{1}{2} + \tan^2 \theta_W) g_{\phi^0}], \\
 g_{\phi^+} &= \cos \theta_W g_{\phi^+}^{(0)} + \sin \theta_W g_{\phi^+}^{(0)}, \\
 g_{\phi^0} &= \sin \theta_W g_{\phi^+}^{(0)} + \cos \theta_W g_{\phi^0}^{(0)}, \\
 g_{\phi^+} &= \sin \theta_W g_{\phi^+}^{(0)} + \cos \theta_W g_{\phi^0}^{(0)}, \\
 g_{\phi^+}^{(0)} &= \frac{1}{2} g_{\phi^+}^{(0)} (\frac{1}{2} + \tan^2 \theta_W) + (\dots), \\
 g_{\phi^0}^{(0)} &= \frac{1}{2} g_{\phi^0}^{(0)} (\frac{1}{2} + \tan^2 \theta_W) + (\dots).
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

As interações dadas acima esgotam as interações envolvendo as partículas superparceiras. Para terminar, serão dadas as interações envolvendo bósons de Higgs com bósons de gauge, que são determinadas pela simetria de gauge, as interações familiares de Yukawa e as interações de gauge de quarks e léptons:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_8 &= \frac{1}{2} E^+ \left[(E^0 \sin \theta_W + A \cos \theta_W) + \dots \right] + A^0 \\
 &\quad \frac{1}{2 \cos \theta_W} [E^0 \sin \theta_W + A \cos \theta_W] \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cos \theta_W} (2 \sin^2 \theta_W - 1) E^+ E^+ E^+ E^+,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{88} &= \dots + [E^0 \cos \theta_W + A \sin \theta_W] \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cos \theta_W} [E^0 \cos \theta_W + A \sin \theta_W],
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
L_{88} &= \frac{1}{4} \left[(E^0)^2 + (A^0)^2 + (\nu^0)^2 + 2E^0 E^+ E^- \right] \\
&+ \frac{1}{8 \cos^2 \theta} \left[(E^0)^2 + (A^0)^2 + (\nu^0)^2 + 2 \cos^2 2\theta E^+ E^- \right] \\
&+ \frac{1}{2} E^+ E^- + \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta} E^+ E^- + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \\
&\times [E^+ E^- (E^0 \sin(4\theta) + A^0 \cos(4\theta) + \nu^0) + A^0]. \quad (3.70)
\end{aligned}$$

As interações familiares de Yukawa são dadas por

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2\sqrt{\sin 4\theta}} [E^+ \sin \theta + A^0 \cos \theta + \nu^0 \cos 4\theta] \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\cos 4\theta}} [E^0 \cos \theta + A^0 \sin \theta + \nu^0 \sin 4\theta] \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \{E^+ E^- (\tan 4\theta + \cot 4\theta) + A^0\}. \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Para obter os acoplamentos de Yukawa para os léptons carregados, basta fazer as trocas $e \leftrightarrow \nu$ na expressão acima, notando que a matriz de massa do neutrino se anula. Portanto, estes termos levam aos acoplamentos seguintes Higgs-férmion-férmion de Yukawa. Para férmions do tipo up, os acoplamentos são

$$A_{u^{***}} = \frac{f_* \cot 4\theta}{2\sqrt{2}}, \quad A_{u^{**}} = \frac{f_* \sin \theta}{2\sqrt{2} \sin 4\theta}, \quad A_{f^{**}} = \frac{f_* \cos \theta}{2\sqrt{2} \sin 4\theta}, \quad (3.72)$$

onde f_* é a massa dos férmion, e para férmions do tipo down, os acoplamentos são

$$A_{d^{++}} = \frac{f_+ \tan 4\theta}{2\sqrt{2}}, \quad A_{d^{++}} = \frac{f_+ \cos \theta}{2\sqrt{2} \cos 4\theta}, \quad A_{f^{++}} = \frac{f_+ \sin \theta}{2\sqrt{2} \cos 4\theta}, \quad (3.73)$$

onde f_+ é a massa dos férmion.

As interações de gauge familiares são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_8 = & \frac{1}{2} (\mathbf{1}^\dagger @9) + (@9)] \\
 & \frac{1}{2} [\mathbf{1}^\dagger + \mathbf{1}] \quad \text{---} \quad \frac{1}{5} \\
 & \times \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_W \sin^2 \beta \right) \quad \text{---} \quad \frac{1}{5} \quad \text{---} \quad \frac{1}{5} \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

As únicas interações restantes são as cúbicas e quárticas no setor de Higgs. Os termos cúbicos são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{4} E^+ E^- [E^0 \cos(4\theta) + A \sin(4\theta)] \\
 & \frac{1}{4 \cos^2 \theta} [E^0 \cos(4\theta) + A^0 \sin(4\theta)] \times \{ \cos 2\theta [(E^0)^2 - (A^0)^2] \\
 & 2E^0 A^0 \sin 2\theta - [(E^0)^2 + 2E^+ E^-] \cos 24\theta \}. \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

Os termos quárticos não serão listados, pois raramente são necessários em diagramas com contribuições apenas de termos principais, sem correções radiativas.

3.3 Partícula Supersimétrica mais Leve (LSP)

No MSSM, devido à conservação da paridade-R, existe uma partícula supersimétrica estável, a LSP (Lightest Supersymmetric Particle). As outras partículas supersimétricas decaem na LSP.

As possíveis candidatas à LSP são o gluino (\tilde{g} , parceiro supersimétrico do glúon), o squark (\tilde{q} , parceiro supersimétrico do quark), que devem formar hádrons devido ao confinamento de cores, o sneutrino ($\tilde{\nu}$, superparceiro do neutrino), o gravitino (\tilde{G} , superparceiro do gráviton) e o neutralino mais leve ($\tilde{\chi}_1^0$, uma mistura dos superparceiros dos bósons neutros de gauge, \tilde{g} e \tilde{b}_1 , e dos bósons neutros de Higgs, \tilde{E}_1^0 e \tilde{E}_2^0) [13].

Os três primeiros, gluino, squark e sneutrino, em geral, apresentam fenomenologia em desacordo com algumas observações cosmológicas. Se a LSP fosse um squark ou um

gluino, estas partículas deveriam formar hádrons. Se estes hádrons fossem carregados, eles apareceriam em buscas por prótons anômalos; porém, é possível que superparceiros estáveis com interação forte formassem apenas hádrons neutros que, diferente dos nêutrons, não formariam núcleos e, assim, esquivariam-se da detecção. Modelos de Grande Unificação prevêem relações entre as massas das superpartículas, e, na maioria dos casos, o gluino é mais massivo que o neutralino e os squarks são mais pesados que os sléptons. Então, nenhum dos dois poderia ser a LSP.

A LSP é determinada pela escala de quebra da Supersimetria. Se essa escala for maior que 10^{10} , a LSP será o neutralino. Se for menor que 10^{10} , será o gravitino [3]. Os dados experimentais atuais sugerem uma temperatura da ordem de 10^{16} como sendo a escala da quebra da SUSY, de modo que o neutralino seria a LSP. A massa da LSP é controlada pelos parâmetros da L , ..

3.4 Neutralinos

No MSSM, os férmions fótino ($\tilde{\gamma}$), zino (\tilde{Z}^0) e higgsinos neutros \tilde{E}_1^0 e \tilde{E}_2^0 se misturam em quatro auto-estados fermiônicos, chamados neutralinos. Os quatro neutralinos são tipicamente representados por $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_2^0$, $\tilde{\chi}_3^0$ e $\tilde{\chi}_4^0$ em ordem crescente de massa. Daqui em diante, iremos nos referir ao $\tilde{\chi}_1^0$, isto é, o mais leve dos quatro neutralinos, como neutralino e representá-lo simplesmente por $\tilde{\chi}$.

Na base $(\tilde{\gamma}, \tilde{Z}^0, \tilde{E}_1^0, \tilde{E}_2^0)$, a matriz de massa dos neutralinos pode ser expressa por

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\gamma}} & 0 & \cos 4 \sin : & \sin 4 \sin : \\ 0 & m_{\tilde{Z}^0} & \sin 4 \cos : & \cos 4 \cos : \\ \cos 4 \sin : & \sin 4 \cos : & 0 & 0 \\ \sin 4 \sin : & \cos 4 \cos : & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

onde $m_{\tilde{\gamma}}$ e $m_{\tilde{Z}^0}$ são os parâmetros de massa do fótino e do zino, respectivamente, θ é o ângulo de mistura de Weinberg, $\tan 4$ é a taxa de valores esperados do vácuo dos bósons

de Higgs e μ é o parâmetro de massa do higgsino. Esta matriz pode ser diagonalizada pela matriz U , de modo que

$$U^{-1} M_{\tilde{\nu}} U = M_{\tilde{\nu}}^{\text{diag}}. \quad (3.77)$$

A diagonalização da matriz de massa do neutralino leva a quatro auto-estados de massa [16], dados por

$$L_1 \cdot \tilde{\nu}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \tilde{\nu}_2^{\text{H}} + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3^{\text{H}} + \frac{2_3}{(8 \frac{2_3}{3} \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2) \right), \quad (3.78)$$

$$L_2 \cdot \tilde{\nu}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \tilde{\nu}_2^{\text{H}} + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3^{\text{H}} + \frac{2_3}{(8 \frac{2_3}{3} \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} (\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_2) \right), \quad (3.79)$$

$$L_3 \cdot \tilde{\nu}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \tilde{\nu}_2^{\text{H}} + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3^{\text{H}} + \frac{2_3}{(8 \frac{2_3}{3} \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2) \right), \quad (3.80)$$

$$L_4 \cdot \tilde{\nu}_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \tilde{\nu}_2^{\text{H}} + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3^{\text{H}} + \frac{2_3}{(8 \frac{2_3}{3} \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2) \right), \quad (3.81)$$

onde L_i representa o i -ésimo autovalor da matriz de massa do neutralino e

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} \tilde{\nu}_2^{\text{H}} + \frac{1}{2} \tilde{\nu}_3^{\text{H}} + \frac{2_3}{(8 \frac{2_3}{3} \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{8} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)^2 \right), \quad (3.82)$$

$$L_2 = \frac{1}{8} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 + \tilde{\nu}_2} \right) (\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_4) + (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)^2 + (\tilde{\nu}_1 \cos^2 \theta + \tilde{\nu}_2 \sin^2 \theta)^2 + \frac{2_3}{4} \sin^2 2\theta, \quad (3.83)$$

$$L_4 = \left(\tilde{\nu}_1 \cos^2 \theta + \tilde{\nu}_2 \sin^2 \theta \right)^2 \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2) \left[(\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)^2 + (\tilde{\nu}_1 \cos^2 \theta + \tilde{\nu}_2 \sin^2 \theta)^2 + \tilde{\nu}_4 \sin^2 2\theta \right] + \frac{1}{16} (\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_4)^2 + \frac{3}{256} (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)^4, \quad (3.84)$$

$$\tilde{\nu}_4 = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \text{Re} \left(\tilde{\nu}_1 \right) + (\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.85)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{4}{3} \frac{27}{2^2}, \quad \tan \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{27}{2^2}, \quad \tan^2 \theta = \frac{2}{27} \frac{27^3}{2^3} + \frac{8}{3} \frac{27^2}{2^4}. \quad (3.86)$$

A matriz \mathcal{M} é dada por [16]

$$\mathcal{M}_{11} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \frac{1}{2} \frac{L_{\cdot 0}}{L_{\cdot 1}}, \quad (3.87)$$

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{[2 L_{\cdot 0}][1 L_{\cdot 0}]^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta [(1 - 2) \cos^2 \theta + 2 L_{\cdot 0}]}{4 [2 L_{\cdot 0}] \sin^2 \theta [\cos^2 \theta + L_{\cdot 0} \sin^2 \theta]}, \quad (3.88)$$

$$\mathcal{M}_{13} = \frac{L_{\cdot 0} [2 L_{\cdot 0}][1 L_{\cdot 0}]^2 \cos^2 \theta [(1 - 2) \cos^2 \theta + 2 L_{\cdot 0}]}{4 [2 L_{\cdot 0}] \sin^2 \theta [\cos^2 \theta + L_{\cdot 0} \sin^2 \theta]}, \quad (3.89)$$

e

$$\mathcal{M}_{14} = 1 + \frac{\mu}{1} \frac{1}{2} + \frac{\mu}{1} \frac{1}{3} + \frac{\mu}{1} \frac{1}{4} \frac{1}{2}. \quad (3.90)$$

O neutralino (mais leve) é uma combinação linear de $\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_2^0$, \tilde{E}_1^0 e \tilde{E}_2^0 (gauginos e higgsinos),

$$\tilde{\chi}_1^0 = \mathcal{M}_{11} \tilde{\chi}_1^0 + \mathcal{M}_{12} \tilde{\chi}_2^0 + \mathcal{M}_{13} \tilde{E}_1^0 + \mathcal{M}_{14} \tilde{E}_2^0. \quad (3.91)$$

A fração de gauginos de $\tilde{\chi}_1^0$ é definida como

$$f_1 = \frac{\mathcal{M}_{11}}{\mathcal{M}_{11}^2 + \mathcal{M}_{12}^2 + \mathcal{M}_{13}^2 + \mathcal{M}_{14}^2}$$

e a fração de higgsinos como

$$f_2 = \frac{\mathcal{M}_{12}}{\mathcal{M}_{11}^2 + \mathcal{M}_{12}^2 + \mathcal{M}_{13}^2 + \mathcal{M}_{14}^2}$$

Quando a fração de gauginos é muito maior que a de higgsinos, os neutralinos são denominados neutralinos-binos, ou neutralino-gauginos; quando as frações são aproximadamente equivalentes, neutralinos mistos e quando a fração de higgsinos é bem maior, neutralinos-higgsinos.

Se o neutralino for neutralino-higgsino, ele é aproximadamente degenerado em massa com o primeiro neutralino de menor massa depois do neutralino mais leve, $\tilde{\chi}_2^0$ e com

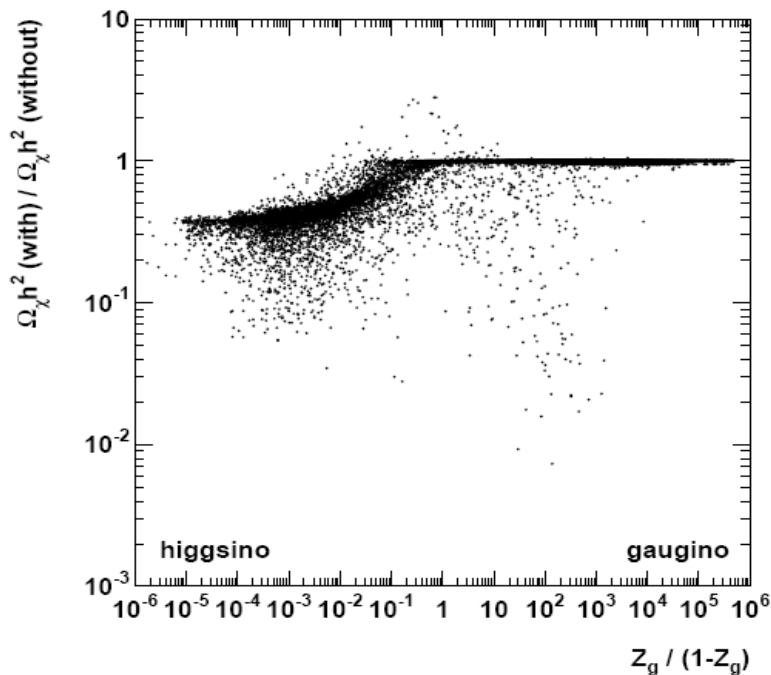


Figura 3.1: Densidade relíquia de neutralinos com e sem coaniquilações versus a composição dos neutralinos [17].

o chargino mais leve. Quando o neutralino mais leve é predominantemente higgsino, a abundância relíquia correspondente é tipicamente menor que a estimada para o conteúdo não-bariônico do Universo. Isto se deve primeiramente à taxa de aniquilação deste tipo de neutralino, que é bem maior que a taxa de aniquilação de um neutralino-bino. Além disso, a quase-degenerescência entre neutralinos-higgsinos e $\tilde{\chi}_2^0$ e charginos leva a grandes efeitos de coaniquilação [17], como mostrado na figura 3.1. Esta coaniquilação de neutralinos com estas outras partículas também diminui a abundância relíquia dos mesmos no Universo. Como resultado, na ausência de processos que aumentem a densidade de relíquias, neutralinos-higgsinos não são adequados para serem os principais componentes da matéria escura. Como será visto mais adiante, a presença de energia escura no Universo aumenta a abundância dessas relíquias naturalmente, tornando os neutralinos-higgsinos candidatos atrativos à matéria escura [18].

Espera-se que os neutralinos sejam não-relativísticos na presente época. A baixas velocidades, os canais de aniquilação para o neutralino são pares férmion-antiférmion

(primeiramente férmions pesados, como os quarks top, bottom e charm e o lépton tau), pares de bósons de gauge (γ e Z) e estados neutros contendo bósons de Higgs [1]. Apesar de não haverem processos diretos para a aniquilação de neutralinos em fótons, termos de correção contendo loops para sua aniquilação em γ e Z são bastante interessantes, já que estes processos forneceriam uma linha espectral característica, observável em experimentos de detecção indireta [2].

3.4.1 Aniquilação do Neutralino em Férmions

Os neutralinos podem se aniquilar em pares de férmions através dos três diagramas abaixo:

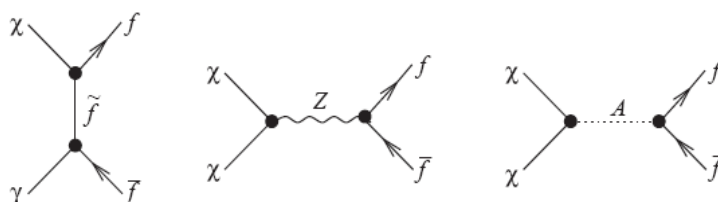


Figura 3.2: Diagramas para a aniquilação de neutralinos em pares de férmions [1].

Estes processos consistem na troca de Higgs pseudoescalares, bósons Z ou sférmions. O cálculo das amplitudes para estes processos pode ser encontrado em [1] e [2]. Deve-se enfatizar que estes diagramas de aniquilação de neutralinos de baixas velocidades em pares de férmions têm amplitudes proporcionais à massa do férmion do estado final. Para as trocas de sférmions e Z , isto ocorre porque os acoplamentos Z -férmion-férmion e neutralino-férmion-férmion preservam a chiralidade. Para a troca de Higgs pseudoescalares, a amplitude introduz um fator explícito da massa do férmion no acoplamento de Yukawa. Também deve-se notar que o acoplamento de Yukawa que aparece na amplitude do processo com troca de Higgs pseudoescalar é proporcional à $\tan \beta$ para quarks down e à $\cot \beta$ para quarks up. O resultado destas observações é que a aniquilação do neutralino em férmions será dominada por estados neutros pesados, $\tilde{\chi}_1^0$, H e H^+ e, se permitido cinematicamente, \tilde{f} . Além disso, se $\tan \beta$ for grande, férmions do tipo bottom podem ser dominantes

sobre férmions do tipo up. E também, aniquilações em $\bar{\chi}_1^0 \chi_1^0$ podem ser dominantes sobre $\bar{\chi}_1^0 \chi_2^0$, mesmo para neutralinos pesados.

3.4.2 Aniquilação do Neutralino em Bósons de Gauge

Em geral, neutralinos podem se aniquilar em bósons de gauge através dos vários processos apresentados abaixo:

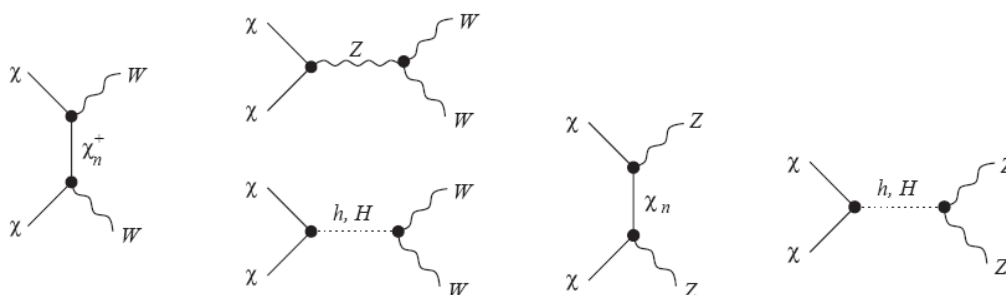


Figura 3.3: Diagramas para a aniquilação de neutralinos em pares de bósons de gauge [1].

No limite de baixas velocidades, entretanto, apenas os processos com trocas de charginos ou neutralinos fornecem amplitudes não-nulas. O cálculo destas amplitudes pode, também, ser encontrado em [1] e [2]. É importante notar que neutralinos puramente gauginos não apresentam amplitude para a aniquilação em bósons de gauge. Já os neutralinos puramente higgsinos ou misturados podem aniquilar-se eficientemente por esses canais, mesmo a baixas velocidades.

3.4.3 Aniquilação do Neutralino em dois Fótons

Uma excelente assinatura para a detecção de neutralinos seria fornecida pela aniquilação de neutralinos no halo em estados finais de dois corpos contendo dois fótons, como $\bar{\chi}_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma \gamma$, ou um fóton, γ . Como os neutralinos aniquilantes se movem com velocidades galácticas $v \sim 10^{-3} c$, o resultado é uma linha de raios gama com um pico de máximo. Esta assinatura não teria origem concebível a partir das fontes astrofísicas conhecidas.

O cálculo da seção de choque do processo

$$+ + \quad (3.92)$$

é feito no limite onde a velocidade relativa do par de neutralinos é nula. Este resultado pode ser aplicado a neutralinos se aniquilando no halo galáctico, onde a velocidade estimada destas partículas seria de 10^{-3} [19]. Os fótons resultantes seriam aproximadamente monocromáticos, com energia igual à massa do $\tilde{\chi}$. Além disso, para velocidades relativamente baixas, o par de neutralinos deve estar em um estado de onda 1_0 , com números quânticos pseudoescalares. Pode-se, portanto, projetar a amplitude do estado 1_0 , usando o projetor

$$O_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{\tilde{m}} \right), \quad (3.93)$$

onde \tilde{m} é a massa do $\tilde{\chi}$ e $M = (\tilde{\chi} \cdot 0)$ seu momento. Analisando a estrutura de Dirac dos diagramas de Feynman para este processo, podem ser excluídos a priori aqueles diagramas que não geram um estado pseudoescalar.

Há ainda uma outra propriedade que introduz uma simplificação adicional. Em qualquer processo de aniquilação de partículas em repouso, as integrais com loops de quatro pontos obtidas de cada diagrama, aplicando-se as regras de Feynman, podem sempre ser reescritas como uma combinação linear de integrais de três pontos. Isto é possível porque, para cada integral, pode-se encontrar uma combinação linear dos quatro fatores no denominador que é independente do momento fluente no loop. Assim, segue-se que não haverá integrais de quatro pontos no cálculo da amplitude.

A amplitude do processo de aniquilação (3.92) pode ser fatorada na forma

$$A = \frac{1}{2} \frac{1}{2B^2} ((\epsilon_1 (\epsilon_2 D_1 D_2))^\sim), \quad (3.94)$$

onde $(\epsilon_1, \epsilon_2, D_1, D_2)$ são respectivamente os tensores de polarização e de momento dos dois

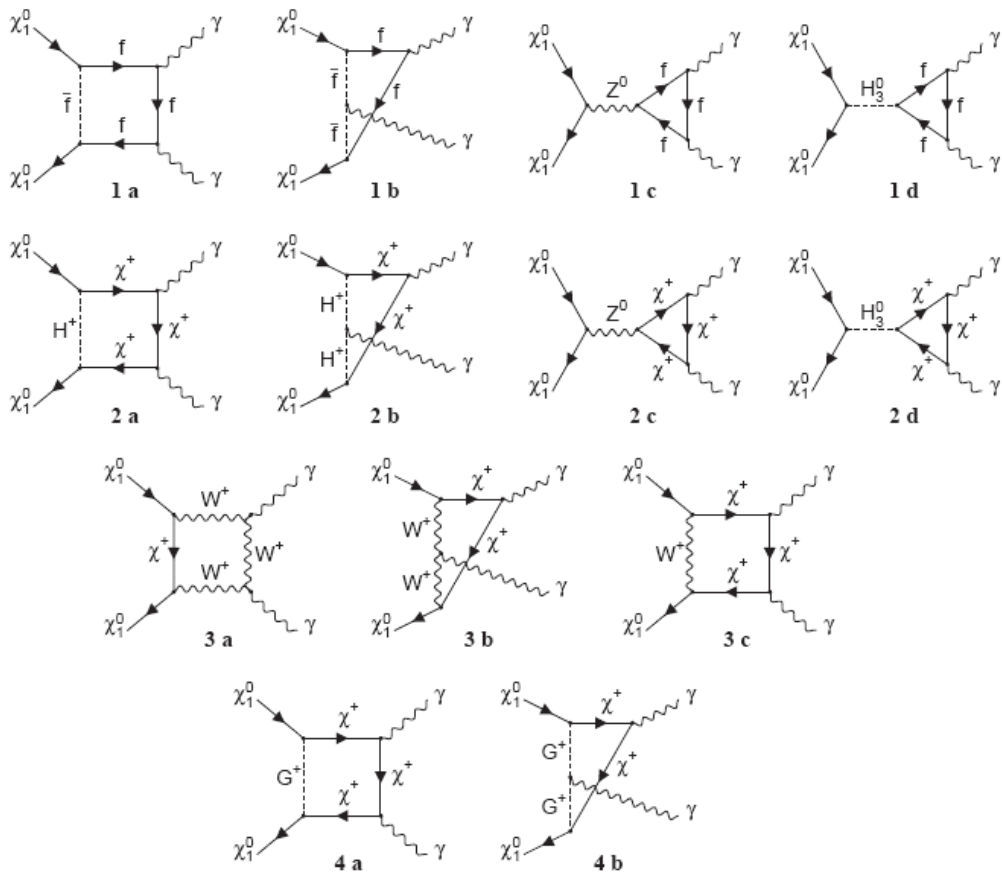


Figura 3.4: Diagramas de Feynmann com um loop que contribuem para a aniquilação de neutralinos em dois fótons [19].

fótons resultantes. A seção de choque é, portanto, dada como uma função de $\tilde{\gamma}$, pela fórmula

$$I_{+2} = \frac{2}{16B^3} \tilde{\gamma}^2. \quad (3.95)$$

A amplitude total é escrita como a soma das contribuições obtidas das quatro diferentes classes de diagramas, apresentadas na gura 3.4, ou seja:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_- + \tilde{\gamma}_+ + \tilde{\gamma}_W + \tilde{\gamma}_G. \quad (3.96)$$

Nesta equação, $\tilde{\gamma}_-$ são as contribuições dos diagramas com loops de férmion-sférmion; $\tilde{\gamma}_+$ são as contribuições dos diagramas com loops de chargino-bóson de Higgs; $\tilde{\gamma}_W$ são as contribuições dos diagramas com loops de chargino-bóson e $\tilde{\gamma}_G$ são as contribuições

dos diagramas com loops de chargino-Higgs não-físicos [19]. Baixas taxas de aniquilação de neutralinos em dois fótons são obtidas com neutralinos-binos e neutralinos mistos, enquanto neutralinos-higgsinos fornecem uma taxa bem maior. No limite onde o neutralino é puramente higgsino

$$\Gamma_{\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma \gamma} \approx 1 \times 10^{28} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}. \quad (3.97)$$

Um neutralino puramente higgsino de massa de aproximadamente 3-4% pode ter o canal $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma \gamma$ como modo dominante de aniquilação.

3.4.4 Aniquilação do Neutralino em um Fóton e um Bóson Z^0

No MSSM, o único outro canal de aniquilação de neutralino em $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ monoenergético é o de estado $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$, cujos diagramas de Feynman estão apresentados nas figuras 3.5-3.9. Como as aniquilações no halo acontecem no estado de onda S , a conservação da helicidade proíbe estados $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ com $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ representando os três bósons de Higgs neutros. Podem haver estados $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ não-perturbativos, tais como $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$, com $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ sendo um méson vetorial feito de um par $G\bar{G}$, mas estes geralmente fornecem uma proporção muito baixa nas taxas [20].

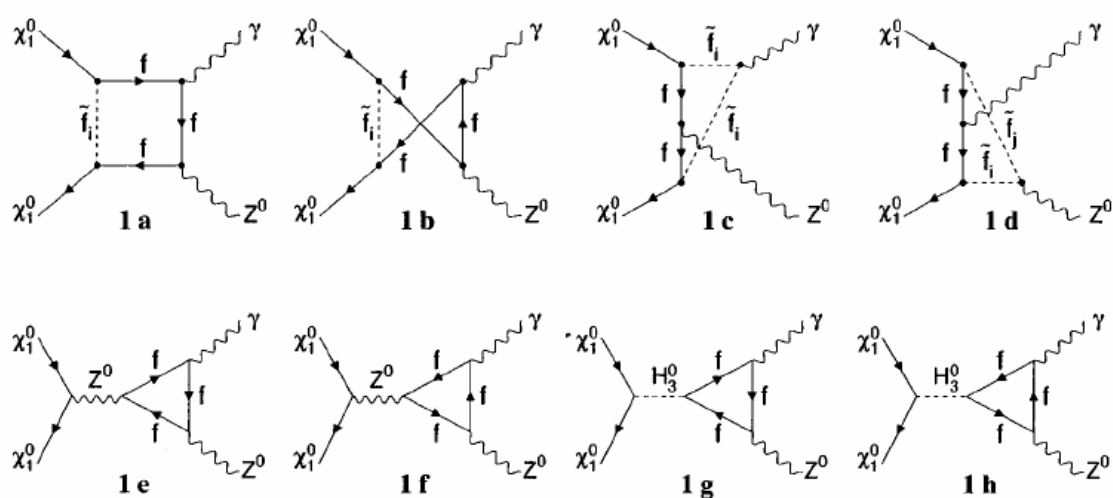


Figura 3.5: Diagramas de Feynman incluídos no cálculo de $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$, no processo $\chi_1^0 \chi_1^0 \rightarrow \gamma Z^0$ [20].

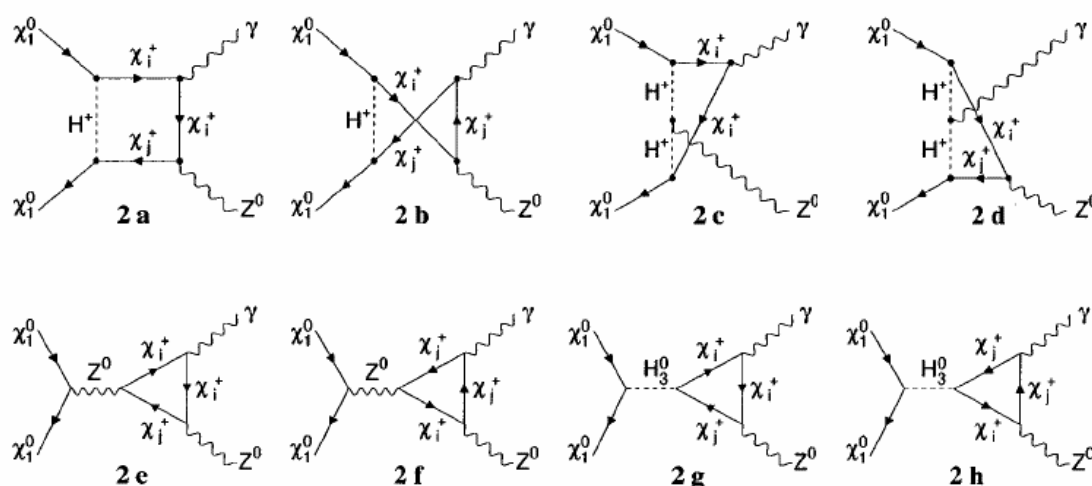


Figura 3.6: Diagramas de Feynmann incluídos no cálculo de $\tilde{\gamma}_+$, no processo $\chi_1^0 + \chi_1^0$ [20].

No processo

$$\chi_1^0 + \chi_1^0 \rightarrow \gamma + Z^0 \quad (3.98)$$

uma nova contribuição, além daquelas que são generalizações do processo de aniquilação em 2, deve ser levada em conta. Quando se faz a generalização de $\tilde{\gamma}_+$ para $\tilde{\gamma}_+$, a maior parte dos diagramas podem ser derivados de $\tilde{\gamma}_+$. Existe, entretanto, uma importante classe de diagramas presentes apenas para $\tilde{\gamma}_+$, que correspondem à inserção da transição $\tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \tilde{\chi}_1^0$ [21].

A natureza da LSP, com maior fração de gaugino ou higgsino, e sua massa criticamente determinam sua seção de choque de aniquilação em $\tilde{\gamma}_+$. Neste processo, assim como no de 2, as maiores contribuições ocorrem quando a fração de higgsino é dominante no neutralino. Porém, no caso de uma LSP com grande proporção de higgsino, a magnitude da seção de choque para $\tilde{\gamma}_+$ é quase uma ordem maior que para $\tilde{\gamma}_+$, devido às contribuições da nova classe de diagramas, que fornecem correções de mais de 30%. Além disso, para o caso $\tilde{\gamma}_+$, o pico da seção de choque é muito mais evidente antes da seção de choque decair e alcançar um patamar da mesma ordem de $\tilde{\gamma}_+$.

Existem ainda numerosos estados nãis nos quais os neutralinos poderiam se aniquilar.

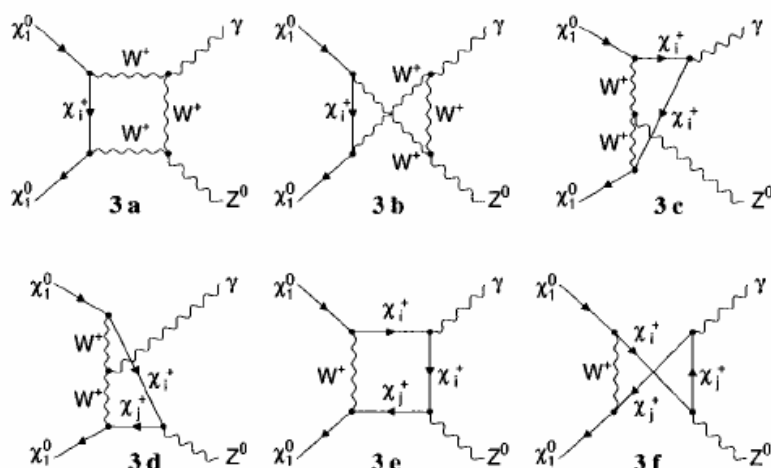


Figura 3.7: Diagramas de Feynmann incluídos no cálculo de $\tilde{\gamma}$, no processo $\chi_i^0 + \chi_j^0$ [20].

Os mais importantes, é claro, são os estados finais de dois corpos que aparecem na mais baixa ordem de perturbação da teoria. Especificamente, estes são $\chi_i^0 + \chi_j^0$, $\chi_i^+ + \chi_j^+$,

$\chi_i^+ + \chi_j^0$, $\chi_i^0 + \chi_j^+$, $\chi_i^0 + \chi_j^+$, $\chi_i^+ + \chi_j^+$, e todas as seis combinações de χ_i^0 , χ_j^0 e χ_k^0 . Muitos diagramas de Feynmann contribuem para tais processos, fazendo com que o cálculo de sua seção total de choque seja uma tarefa árdua. A aniquilação de neutralinos nesses outros estados finais depende também de que os neutralinos tenham massa suficiente para que tais canais sejam possíveis. Em particular, eles são importantes em modelos onde o neutralino seja predominantemente higgsino e são suprimidos quando se têm neutralinos-binos (maior fração de gauginos).

3.5 Soluções de Problemas do Modelo Padrão

Considerando as constantes de acoplamento, à luz do MSSM, é possível mostrar que de fato elas se unificam em uma escala de $> \sqrt{3} \times 10^{16}$ [10]. Esta unificação aparente das constantes de acoplamento poderia ser acidental, mas também fornece uma esperança de que possa existir algum tipo de Grande Unificação.

Ainda tem-se um grande número de parâmetros livres e o problema da incorporação

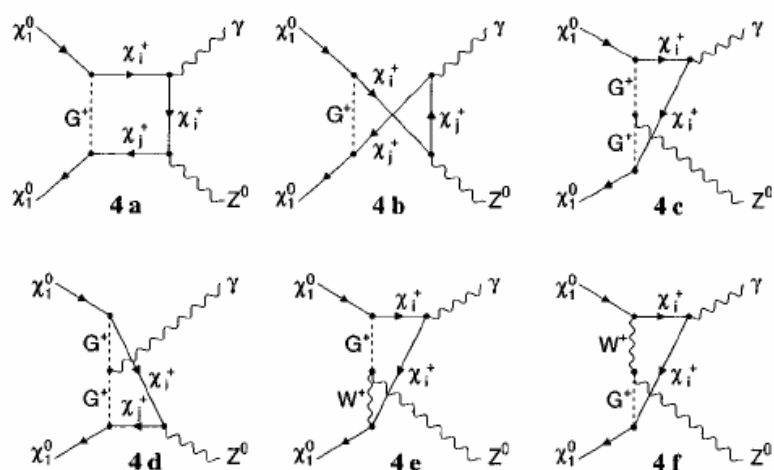


Figura 3.8: Diagramas de Feynmann incluídos no cálculo de $\tilde{\Gamma}$, no processo $\chi_1^0 + \chi_j^0 \rightarrow \chi_i^+ + \gamma + Z^0$ [20].

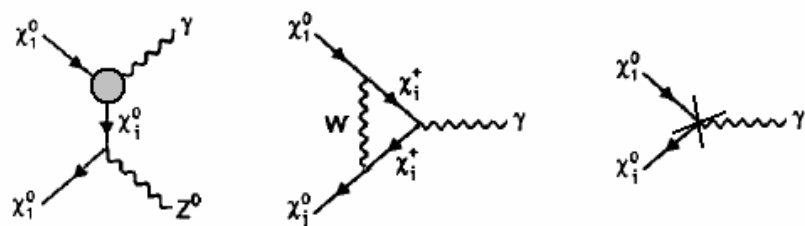


Figura 3.9: Uma classe adicional de diagramas descrevendo a transição $\chi_1^0 + \chi_j^0 \rightarrow \chi_i^0 + \gamma$ que aparece apenas no processo de $\tilde{\Gamma}$ [21].

da gravidade. De fato, após incluir os termos de quebra da SUSY no MSSM, restam ainda cerca de 100 parâmetros a serem determinados experimentalmente. Isto parecer intensificado o problema ao invés de resolvê-lo. Para resolver esses problemas, uma teoria interessante seria a supergravidade (SUGRA) [22]. Ela é baseada na versão local da SUSY. A álgebra da SUSY mostra que a invariância sob transformações locais da SUSY implicam em invariância sob uma mudança local de coordenadas. Esta é a base da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Assim, a SUSY local naturalmente inclui a gravidade. Não serão discutidos maiores detalhes aqui, mas a introdução da supergravidade implica que os termos de quebra da SUSY possam ser descritos utilizando apenas três parâmetros.

Podemos ainda fazer uma consideração sobre as massas dos neutrinos. É possível

mostrar que quaisquer termos que introduzam massa aos neutrinos estão fora do MP, entretanto alguns desses termos podem ser incluídos no MSSM sem prejudicar a teoria.

Capítulo 4

Matéria Escura

A possibilidade da existência de matéria escura no Universo vem sendo discutida há algumas décadas. Atualmente, estima-se que apenas 5 a 10% da massa que constitui o Universo é visível, sendo o restante matéria escura. Algumas das evidências de sua existência são as medidas de velocidades no movimento orbital de galáxias em aglomerados, as curvas de rotação das galáxias e as lentes gravitacionais.

A riqueza de evidências observacionais para uma densidade de matéria não-relativística $\Omega \approx 0.3$, combinada com os vínculos da nucleossíntese do Big Bang na densidade de bárions, $\Omega_b \approx 0.05$, indicam a existência de uma significativa quantidade de matéria escura não-bariônica, de modo que se espera que a matéria escura seja formada de algum tipo exótico de partícula. Além disso, se só existisse matéria luminosa, a duração da época da formação de estruturas seria muito curta, requerendo, portanto, flutuações na radiação cósmica de fundo bem maiores que as observadas.

A natureza da matéria escura ainda é pouco conhecida. Existem tentativas de detectar sua presença através de seu efeito dinâmico sobre núcleos atômicos. Mesmo interagindo muito pouco com a matéria bariônica, acredita-se que se possa detectar o efeito da colisão de tais partículas com os núcleos. Nesse caso, o recuo desses poderia dar indícios sobre a massa dessas partículas não-bariônicas. Entretanto, até o momento, essas experiências ainda não deram resultados concretos, e, enquanto a identificação positiva dessa matéria

não ocorrer, existem muitos possíveis candidatos levantados pelas teorias de partículas elementares.

Muitos autores sugerem que a matéria escura consiste de alguma nova, e ainda não-descoberta, partícula massiva fracamente interagente (WIMP). Das candidatas a WIMPs que têm sido consideradas, uma delas é o neutralino, a partícula supersimétrica mais leve (LSP) em muitas teorias supersimétricas. A existência de uma partícula supersimétrica estável com a possibilidade de ser candidata à matéria escura é uma das características apreciáveis do MSSM [23]. Sua estabilidade é consequência da conservação da paridade-R, postulada para preservar a estabilidade do próton.

Existe hoje uma vasta gama de experimentos sendo montados para detectar estas partículas no halo galáctico. Técnicas incluindo detecção direta em laboratórios subterrâneos, detecção indireta através da observação de neutrinos energéticos gerados pela aniquilação de WIMPs que se acumulam no Sol e/ou na Terra, e observação de raios cósmicos anômalos como antiprótons, pósitrons e raios gama de WIMPs que são aniquiladas no halo galáctico, além, é claro, da busca por estas partículas nos aceleradores.

Do ponto de vista cosmológico, a matéria escura presente nos aglomerados pode ser responsável por uma fração considerável da densidade crítica, mas não por toda. Acredita-se que a massa total contida nos aglomerados pode ter uma contribuição tal que $\Omega_w \approx 0.2 - 0.3$. Se tomarmos que o Universo tem $\Omega_w = 1$, então uma parte importante dessa densidade deve estar fora dos aglomerados de galáxias, na forma de energia escura. Assim, temos que a densidade de matéria-energia no Universo está dividida da seguinte forma: uma pequena contribuição de matéria bariônica, $\Omega_b \approx 0.05$, uma contribuição de matéria escura não-bariônica, $\Omega_{cdm} \approx 0.22$, levando à uma contribuição total de matéria de $\Omega_m \approx 0.27$, e uma densidade de energia escura $\Omega_\Lambda \approx 0.73$ [10]. A energia escura seria a componente responsável pela expansão acelerada do Universo.

4.1 Evidências Observacionais

As primeiras evidências assinalando a presença de uma enorme quantidade de matéria escura no Universo começaram a surgir em meados dos anos 30, com os trabalhos de Fritz Zwicky sobre os aglomerados de galáxias [24]. Desde então, estas evidências se acumularam e, nos anos 60, surgiram indícios de que a matéria escura estaria presente também nas galáxias. Paralelamente, a necessidade de matéria escura em escalas cosmológicas surgiu com o reconhecimento das vantagens do modelo plano e da inviabilidade de preencher o Universo unicamente com bárions, já que o sucesso da nucleossíntese primordial constitui um forte argumento nesse sentido.

4.1.1 Evidências Astrofísicas

Tanto em nossa galáxia, quanto em outras galáxias espirais próximas, observa-se que a velocidade de rotação dos seus respectivos discos se mantém praticamente constante quando nos afastamos da região central. A velocidade de rotação, v , do material contido nesses discos, é uma resposta ao potencial gravitacional gerado pela distribuição de massa. Consideremos o gás interestelar contido no plano do disco a uma distância r do centro da galáxia. A órbita desse material é aproximadamente circular e para que haja equilíbrio dinâmico esse gás deve se movimentar com uma aceleração centrípeta tal que

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}. \quad (4.1)$$

Na região central a densidade de massa é aproximadamente constante, resultando que $v \propto r^{3/2}$, e, portanto, devemos esperar que a velocidade de rotação observada cresça proporcionalmente à distância radial, $v \propto r^{3/2}$. Esse é exatamente o resultado que se observa. Até os anos 60, acreditava-se que esse crescimento da velocidade de rotação deveria ocorrer até o ponto em que praticamente toda a massa da galáxias fosse amostrada. A partir desse ponto, deveríamos esperar que $v \propto r^{-1/2}$, quando finalmente a rotação atingiria a

fase kepleriana. Contudo, no final dessa mesma década, dados observacionais mostraram que as curvas de rotação, na maior parte das galáxias espirais, mantêm-se praticamente constantes em toda região onde se pode detectar a presença do gás ionizado proveniente dos braços espirais, como mostrado na figura 4.1. Se a velocidade de rotação se mantém constante, podemos inferir que a massa deve crescer proporcionalmente à distância radial. Assim, mesmo após o raio óptico, quando todas as estrelas já foram amostradas, devemos ter uma enorme quantidade de massa, conhecida por matéria escura [25].

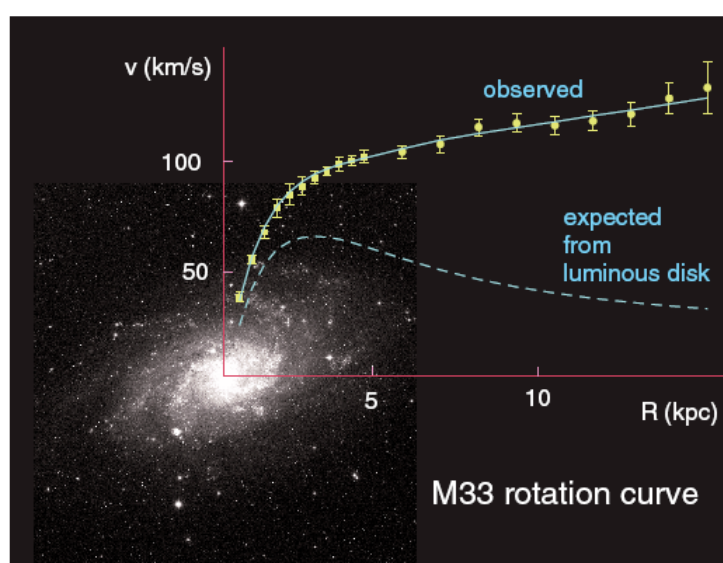


Figura 4.1: Curva de rotação da galáxia espiral M33. A curva pontilhada mostra a distribuição aproximada da curva de rotação devida ao disco luminoso estelar. Há também uma pequena contribuição de gás (não mostrada) [26].

Nos aglomerados de galáxias também deve existir uma grande quantidade de matéria escura. A evidência vem do movimento aleatório das galáxias que povoam essas enormes estruturas. A distribuição de velocidades desses objetos indica um sistema que deve estar próximo do equilíbrio. Assim, podemos assumir, sem grande margem de erro, que é válido o teorema de Virial, segundo o qual a média temporal da energia potencial deve ser igual a duas vezes a energia cinética. Esta condição pode ser escrita como:

$$2E_p = E_k, \quad (4.2)$$

onde σ_8 representa a dispersão interna de velocidades, r , a dimensão radial do aglomerado e M , a massa total. A aplicação dessa condição de virialização a aglomerados tem sido realizada desde meados dos anos 30. O resultado é que as massas obtidas são da ordem de 50 a 100 vezes maiores que a massa luminosa contida nas galáxias. Mesmo considerando que muitos aglomerados contêm gás quente, em quantidades comparáveis às próprias galáxias, não se pode deixar de concluir que sua dinâmica interna deve ser dominada por uma quantidade enorme de matéria escura. Além disso, a matéria escura dos aglomerados também deve estar distribuída no interior dos aglomerados, entre as galáxias.

Durante algum tempo, cogitou-se que talvez a matéria escura indicasse a presença nos halos galácticos de objetos astronômicos de baixa massa: estrelas pouco luminosas, planetas e outros remanescentes da evolução estelar. Se este fosse o caso, a emissão infravermelha desses objetos já teria sido detectada pelos telescópios atuais.

4.1.2 Nucleossíntese Primordial

Devido à rápida expansão e resfriamento, o Universo evidentemente não se encontrava em um estado de equilíbrio termodinâmico estrito. De alguma forma, essa rápida expansão foi proporcionando o domínio momentâneo de diferentes processos cujas ações deixaram marcas em sua estrutura até o presente.

Logo após a fase da bariogênese, uma grande quantidade de nêutrons começou a surgir, graças às interações entre prótons e elétrons, preparando o Universo para a nucleossíntese. Ao contrário da bariogênese, que depende de princípios físicos ainda em discussão, a nucleossíntese é uma fase melhor compreendida. Primeiro, porque as condições físicas reinantes, ainda sob o domínio da era da radiação, são conhecidas. Além disso, os processos físicos são semelhantes aos encontrados na nucleossíntese estelar. Trata-se, naturalmente, de uma fase complexa, em que vários fenômenos ocorreram concomitantemente. Contudo, cada um deles é individualmente conhecido [25]. Nesse período, durante aproximadamente 10^3 s, o Universo foi transformado em um gigantesco reator termonu-

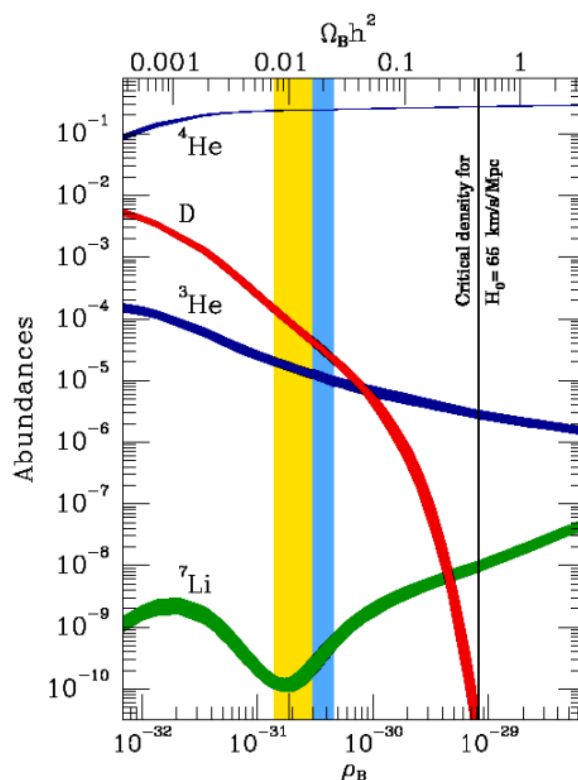


Figura 4.2: Abundâncias previstas dos elementos leves em função da densidade de bárions. A faixa azul destaca a determinação da densidade de bárions baseada em recente medida da abundância primordial de deutério [27].

clear altamente aquecido e denso, da mesma forma que o processo de fusão que ocorre no interior das estrelas. Contudo, ao contrário do que ocorre nos núcleos estelares, logo em seguida, devido à rápida expansão, que reduziu rapidamente a frequência das colisões entre partículas, as reações nucleares foram abortadas prematuramente antes que os elementos pesados pudessem ser sintetizados. Em virtude disso, somente os elementos mais leves, ^2H , ^3He , ^4He e ^7Li tiveram condições de serem sintetizados. Os elementos mais pesados só começaram a surgir após o aparecimento das primeiras estrelas, numa fase muito posterior à da nucleossíntese primordial, ou nucleossíntese do Big Bang (BBN). Isto quer dizer que a nucleossíntese do Big Bang pode ser usada para determinar a fração de bárions da densidade de matéria no Universo com certa precisão [28].

. De acordo com a BBN, as abundâncias dos elementos leves são sensíveis a variações da densidade de bárions do Universo, como mostrado na figura 4.2. A região hachurada do

diagrama é compatível com as medidas observadas. Observa-se que para uma quantidade maior de matéria bariônica, a abundância de deutério poderia ser reduzida drasticamente. Desta forma a maior parte da matéria escura deve ser não-bariônica.

As estimativas da densidade de bárions, baseadas na massa detectada nas galáxias, indicam que $\Omega_b \approx 0.04$, valor muito próximo das estimativas baseadas na nucleossíntese primordial. Isto leva a concluir que a massa bariônica observada nas galáxias é a quantidade necessária para justificar a criação dos elementos leves na nucleossíntese primordial. Em contrapartida, a densidade de massa na forma de galáxias é claramente insuficiente para prover a densidade crítica que nos permita adotar o modelo plano. Portanto, se houver uma componente adicional de massa presente no Universo que nos leve a $\Omega_0 = 1$, e deve necessariamente estar contida numa forma não-bariônica [4]. Isso significa que não se pode fechar o Universo através da inclusão de objetos astronômicos, como planetas e estrelas. Eles contribuiriam para elevar o número de bárions no Universo, provocando um conflito intransponível com a nucleossíntese do Big Bang. Portanto, o sucesso das medidas relativas à BBN é também um forte argumento em favor da presença de matéria escura não-bariônica no Universo. Além disso, se o Universo fosse formado apenas por matéria bariônica, apareceriam outros problemas, especialmente relativos aos processos de formação de estruturas [29].

Na formação de estruturas é importante não somente a densidade de matéria escura, Ω_c , mas também o tipo de partícula que constitui a matéria escura. Se as partículas forem muito leves (como, por exemplo, neutrinos com massa), elas seriam relativísticas no momento em que as estruturas começaram a se formar e se espalhariam rapidamente para fora das regiões onde condensados de matéria estivessem começando a formar galáxias, de modo que apenas grandes estruturas poderiam ser formadas. Em uma das classificações da matéria escura, este tipo de partícula constitui a chamada Matéria Escura Quente (Hot Dark Matter - HDM) [30], e as estruturas se formam, num cenário top-down, pela fragmentação das grandes estruturas ('panquecas') em estruturas menores [31]. Este comportamento é hoje fortemente desfavorecido pelas observações de galáxias em altos

red-shifts, porém uma componente de HDM de menos de 10% do total de matéria escura não precisa ser excluída [4].

Partículas massivas (da ordem de 10^5 ou acima) estariam se movendo a velocidades não-relativísticas ao se desacoplarem e poderiam, portanto, se aglomerar também em escalas menores. Partículas massivas constituem a Matéria Escura Fria (Cold Dark Matter - CDM), sendo um de seus exemplos importantes partículas supersimétricas massivas neutras. Nos cenários de CDM, as estruturas se formam tipicamente de forma hierárquica, com aglomerações menores de matéria se unindo para formar maiores, formando halos galácticos e sucessivamente estruturas maiores.

Entre a HDM e a CDM pode existir também a Matéria Escura Morna (Warm Dark Matter - WDM), que poderia ser formada de partículas neutras com massas na escala de 10^2 , como por exemplo, gravitinos, os superparceiros do gráviton, que são a LSP em alguns modelos de quebra de supersimetria [32]. O cenário com WDM também é particularmente desfavorecido atualmente, tanto pela física de partículas quanto por motivos de formação de estruturas (cosmológicos).

4.1.3 Radiação Cósmica de Fundo

A observação feita em 1929 por Edwin Hubble da presença de um desvio sistemático para o vermelho (red-shift) das raias espectrais provenientes de objetos astrofísicos distantes, diretamente proporcional à distância (lei de Hubble), implica que o Universo como um todo encontra-se em expansão e, portanto, tornando-se cada vez mais diluído e frio. Assim sendo, o Universo deve ter sido muito mais quente e denso no início, resfriando-se e tornando-se mais rarefeito enquanto se expandia.

Os dados observacionais confirmam também que o Universo é aproximadamente homogêneo e isotrópico, pelo menos em escalas muito grandes. Como a força gravitacional é atrativa, ela tende a aumentar as inomogeneidades com o tempo, de modo que no passado o universo deve ter sido ainda mais homogêneo do que o observado atualmente.

Portanto, durante a sua evolução, o universo deve ter passado por uma época na qual a

densidade de energia e a temperatura tinham valores extremamente altos comparados com os valores atuais. Deve ter passado por fases onde matéria e radiação estavam em equilíbrio térmico, pares matéria-antimatéria sendo criados e aniquilados em igual velocidade. Com a expansão e conseqüente diminuição da temperatura, a matéria como a conhecemos hoje começa a surgir, com elétrons, prótons, nêutrons, etc., em velocidades médias ultra-relativísticas, em equilíbrio térmico com a radiação. Com o gradual resfriamento, núcleos atômicos começam a se formar, primeiramente ainda em estado ionizado, e depois, já começando a capturar os elétrons, formando as primeiras estruturas atômicas (recombinação). Isto ocorre quando a temperatura cai abaixo de $\approx 3000 \text{ K}$ ($\approx 10^4 \text{ eV}$), e de ne o desacoplamento matéria-radiação. Os fótons, que estavam em equilíbrio térmico com os elétrons e os prótons remanescentes, não podem mais interagir com a matéria agora na forma atômica neutra, e propagam-se com pouquíssima interferência, resfriando-se e diluindo-se com a expansão do universo a uma taxa mais elevada que a matéria. Estes fótons residuais é que dão origem à radiação cósmica de fundo, detectada hoje na faixa de frequências de microondas. A sua distribuição espacial é extremamente isotrópica, coerente com o universo inicial também extremamente homogêneo e isotrópico. No entanto, observações mais precisas indicam minúsculas inomogeneidades representadas por perturbações de uma parte em 10^5 com relação à temperatura de fundo, que correspondem a flutuações da ordem de 10^{-5} . Acredita-se que estas pequenas inomogeneidades (em escala cosmológica) são a origem das atuais inomogeneidades da distribuição de matéria, formando os aglomerados de matéria que deram origem às galáxias.

A radiação cósmica de fundo foi detectada, por acaso, em 1964, por Arno Penzias e Robert Wilson, dois astrônomos a serviço da Bell Laboratories, cujo objetivo era identificar as fontes causadoras das persistentes interferências nas telecomunicações. Ao longo dos anos seguintes, vários experimentos lançados a bordo de balões foram elaborados buscando determinar com precisão o fluxo e a forma do espectro desta radiação cosmológica. O experimento definitivo foi, sem dúvida, o satélite COBE (COsmic Background Explorer) [33] lançado em 1989, que inaugurou uma nova era na pesquisa da radiação de

fundo. Este instrumento foi capaz de demonstrar que este fundo de microondas segue com precisão a distribuição de corpo negro, apresentando uma temperatura de aproximadamente 2.76 ± 0.01 K. Isso indica que a radiação cósmica de fundo deve ter sido gerada em um processo de equilíbrio termodinâmico da matéria com a radiação, ou seja, ela originou-se durante o próprio processo que gerou o Universo, não emanando de objetos astronômicos, sendo um dos componentes do Universo primordial.

As flutuações locais de temperatura, mostradas na figura 4.3, obtidas recentemente pelo satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [34], são da ordem de 10^{-5} K, demonstrando assim que o Universo primordial era muito homogêneo. Essa é a evidência mais contundente de que o Universo é de fato homogêneo em grandes escalas, conforme postulado pelo princípio cosmológico. Apesar de diminutas, essas flutuações são muito importantes, já que o Universo não pode ter sido formado em um estado perfeitamente homogêneo, pois, nesse caso, as estruturas que observamos hoje simplesmente não teriam se formado. Deste modo, estas flutuações podem nos levar à distribuição da matéria no Universo e, em especial, da matéria escura.

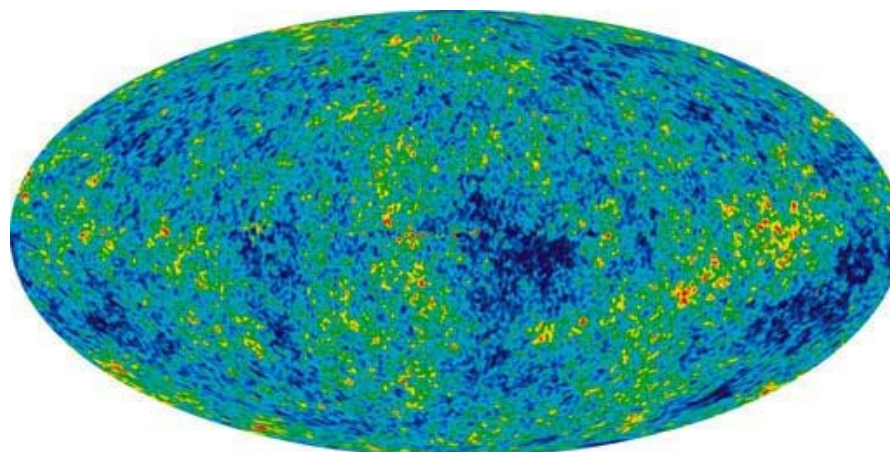


Figura 4.3: Mapa do céu obtido pelo satélite WMAP da NASA [35].

O estudo da radiação cósmica de fundo, que permeia o Universo como resto fóssil do Big Bang, oferece a possibilidade de medir θ_0 . Só recentemente foi alcançada uma precisão instrumental capaz de decodificar a grande quantidade de informações que a radiação

cósmica de fundo oferece sobre as propriedades globais do Universo. Particularmente, os dados reunidos pela missão Boomerang [36] implicam $\Omega_0 = 1$. Os mesmos dados também podem ser utilizados para avaliar a densidade dos bárions: ela corresponde a um valor de Ω_b igual a cerca de 0.05. A combinação de resultados de radiação cósmica de fundo com medidas de supernovas levam à vínculos de $\Omega_m = 0.4 \pm 0.1$ e $\Omega_\Lambda = 0.6 \pm 0.1$ [37].

Os resultados, após três anos de dados do WMAP, indicam que a matéria normal corresponde a 4% da massa total (a amplitude do pico acústico é proporcional à densidade bariônica), 22% de matéria escura e 74% de energia escura (constante cosmológica) ou quintessência (energia com pressão negativa), completando a massa crítica prevista pelo modelo in acionário ($\Omega_0 = 1.0$) [38].

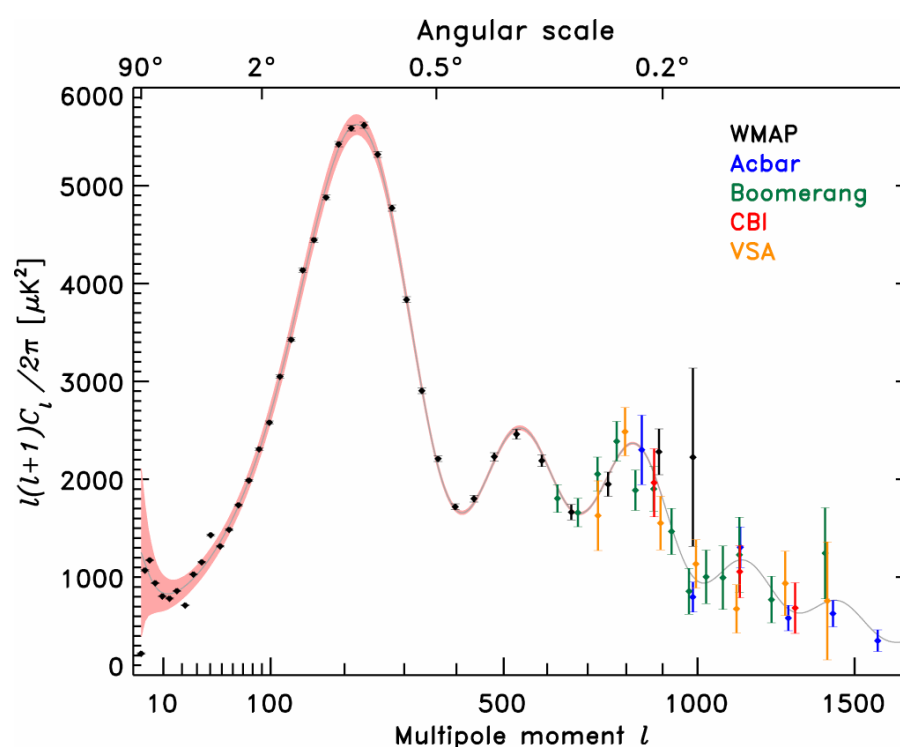


Figura 4.4: Espectro angular de flutuações obtido pelo WMAP [39].

Na figura 4.4, a posição do primeiro pico acústico depende fortemente do valor do parâmetro de densidade, Ω_0 . A posição deste pico é exatamente aquela esperada no modelo plano. Este fato consiste em uma forte evidência experimental a favor do modelo plano e, por consequência, das previsões do modelo in acionário. A amplitude do primeiro

pico é dependente da constante cosmológica e pode ser utilizada para vincular a densidade de energia do vácuo. A amplitude do segundo pico é sensível à abundância de bárions, e indica que $\Omega_b \approx 0.04$, em excelente acordo com os dados da nucleossíntese primordial [25].

4.1.4 Lentes Gravitacionais

De acordo com a teoria da relatividade geral, uma distribuição de massa provoca uma curvatura do espaço-tempo. Assim, a propagação da luz é distorcida na presença da matéria, que age como uma lente, multiplicando, aumentando ou deformando a imagem da fonte, de modo que os raios luminosos são desviados ao passarem nas vizinhanças de um corpo massivo. Assim, se uma estrela, um desses corpos e a Terra estiverem alinhados, o corpo se comportará como uma lente gravitacional, focalizando a luz da estrela e fazendo com que seu brilho aumente, enquanto está sendo eclipsada pelo objeto.

A deflexão da luz pela gravidade foi prevista pela Teoria da Relatividade Geral e confirmada observacionalmente em 1919. Nas décadas seguintes, vários aspectos dos efeitos das lentes foram explorados teoricamente. Apesar disso, as lentes gravitacionais tornaram-se uma ciência observacional apenas em 1979, após a descoberta da primeira imagem duplicada de quasar, e, desde então, têm-se estabelecido como uma ferramenta astrofísica extremamente útil, com alguns sucessos notáveis. Têm contribuído significativamente para novos resultados na área cosmológica, como, por exemplo, a distribuição de matéria em larga escala no Universo, distribuição de massa de aglomerados de galáxias, matéria escura nos halos galácticos e estrutura das galáxias.

Como o ângulo de deflexão é proporcional à massa do objeto que causa a deflexão (lente) [40], as lentes gravitacionais são utilizadas para determinar a massa de clusters de galáxias, complementando as determinações de massa através de análises de raios-X, da utilização do teorema de virial e da distribuição de velocidades das galáxias. Apesar de haver algumas discrepâncias entre os três métodos, parece que em alguns aglomerados de galáxias a concordância entre essas diferentes determinações de massa é muito boa.

Um dos resultados gerais da análise de arcos gigantes nos aglomerados de galáxias

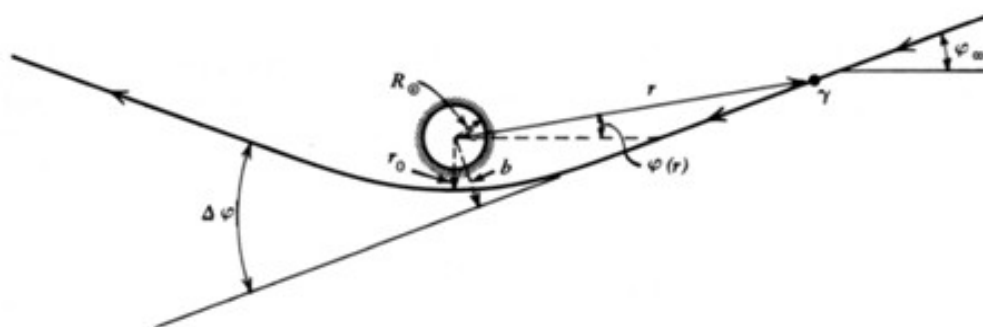


Figura 4.5: Trajetória de um raio de luz sendo desviado por um corpo massivo [41].

é que estes aglomerados são dominados por matéria escura. A distribuição da matéria escura segue aproximadamente a distribuição da luz nas galáxias, em particular na parte central do aglomerado. O fato de se poder observar tais arcos mostra que a densidade superficial de massa central deve ser alta. As observações feitas até hoje mostram que existem menos eventos de microlentes do que se esperaria se o halo da Via Láctea fosse formado inteiramente de MACHOs (objetos compactos maciços do halo). Assim, não se pode excluir a possibilidade de alguns desses eventos serem devidos à uma população desconhecida do halo.

As lentes gravitacionais podem ser usadas para estudar parâmetros cosmológicos do Universo. Seu estudo detalhado pode levar à determinação da quantidade de matéria escura presente nas lentes [42]. A combinação de observações de lentes fracas e da radiação cósmica de fundo levam ao resultado de que a densidade de matéria no Universo é de $\Omega_m \approx 0,3$, sendo dominada por matéria escura [43]. Espera-se ainda que observações mais detalhadas de lentes possam trazer informações sobre a distribuição da matéria escura nos halos galácticos [44]. Os exemplos existentes de observações de lentes gravitacionais também podem ser usados para impôr limites na constante cosmológica. Diferentes estudos encontraram limites de $\Omega_\Lambda < 0,66$ e $\Omega_\Lambda < 0,7$ [45]. Eles são baseados na hipótese de um Universo plano, onde $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Investigações do conteúdo da matéria do Universo através das lentes, em geral, concluem que a fração de matéria na forma bariônica não pode exceder uma pequena porcentagem da densidade crítica.

4.2 Distribuição de Matéria Escura pelo Universo

Apesar de medidas diretas da curva de rotação de galáxias irem ficando cada vez mais difíceis para raios maiores, os movimentos orbitais de satélites da Via Láctea sugerem que sua curva de rotação permanece constante até um raio de 50 DM e talvez mais longe. De acordo com as leis de Newton a velocidade de rotação deveria decair com $r^{-0.5}$, para raios maiores que a extensão do disco luminoso. Segue-se, portanto, que o disco luminoso e o bojo devem estar imersos em um extenso halo de matéria escura (ou que as leis de Newton são violadas).

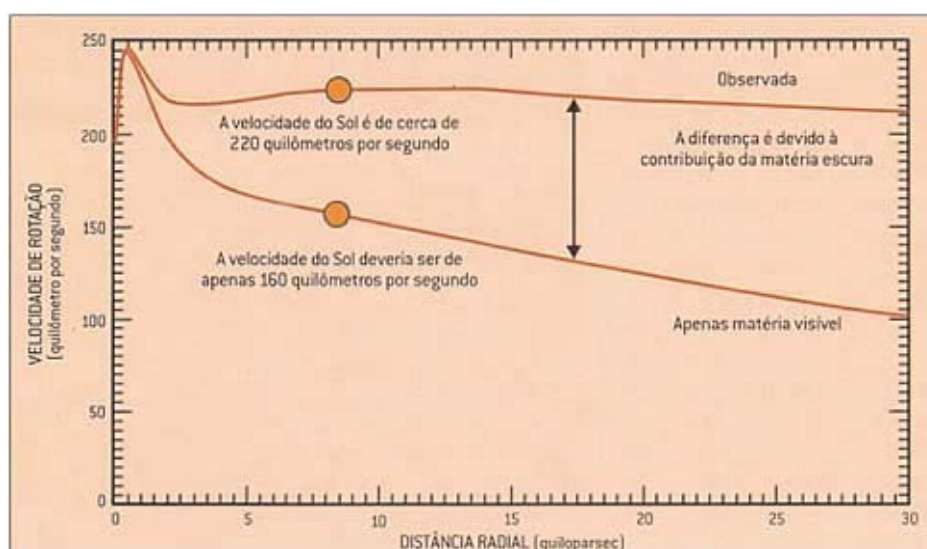


Figura 4.6: Curva de rotação da Via Láctea [46].

Nosso conhecimento do halo vem quase que unicamente desta curva de rotação, mostrada na figura 4.6. Assim, não sabemos empiricamente se o halo é circular, elíptico ou talvez achatado como o disco. Entretanto, existem boas razões para acreditar que o halo deve ser muito mais difuso que o disco. Acredita-se que o disco seja achatado já que a matéria luminosa pode irradiar fótons e, portanto, colapsar gravitacionalmente em uma estrutura com a forma de uma panqueca. Por outro lado, a matéria escura não pode irradiar fótons. Existem também atualmente argumentos empíricos que envolvem, por exemplo, a forma da distribuição do gás na Via Láctea, que sugere que o halo escuro deve

ser mais difuso que o disco.

Uma das características que distinguem a matéria bariônica e a não-bariônica é que a bariônica, devido ao seu acoplamento com o campo eletromagnético, pode emitir luz, isto é, irradiar. Como consequência disto, energia é dissipada, o que faz com que a matéria bariônica nas galáxias em geral sejam concentradas em um bojo próximo ao centro, e, para galáxias espirais, também na forma de um disco. A matéria escura não-bariônica, entretanto, possivelmente se constitui de partículas eletricamente neutras, não se condensando por dissipação. Por outro lado, a estrutura da matéria escura pode evoluir de diversas formas sob a influência da gravidade. Além da possível aglomeração hierárquica obtida em simulações da estrutura de formação da matéria escura, também deve haver influência da interação gravitacional entre as componentes bariônica e não-bariônica, o que leva a crer que a matéria escura deve se aglomerar com as galáxias, formando um halo aproximadamente esférico. Além disso, dados do satélite COBE (Cosmic Background Explorer) sugerem que a matéria escura, responsável pelas curvas de rotação, não pode ser confinada em um disco e provavelmente tenha uma distribuição esferoidal. As curvas de rotação dos discos de galáxias também fornecem uma forte evidência da existência de um halo esférico de matéria escura.

A ideia de que a matéria escura se concentra no centro dos aglomerados de galáxias é confirmada por dados do observatório espacial de raios-X Chandra (NASA) [47]. Os dados de raios-X do Chandra mostram que a densidade da matéria escura cresce gradualmente, desde a periferia até a galáxia central do aglomerado. Esta descoberta está de acordo com as previsões dos modelos de matéria escura fria, e em desacordo com outros modelos de matéria escura que prevêm um valor constante na quantidade de matéria escura na região central do aglomerado.

Muitos modelos teóricos prevêm que a matéria escura se distribui compondo halos em torno dos quais se formaram estrelas e galáxias. Estes modelos são corroborados por resultados da análise de dados colhidos pelo telescópio espacial Hubble e por telescópios baseados na Terra na tentativa de mapear a matéria escura pelo Universo.

O problema de como a matéria escura está distribuída nos halos galácticos e aglomerados de galáxias é muito importante, inclusive na determinação de estratégias para a detecção dos vários candidatos.

Recentemente, muitas simulações de N-corpos de halos de matéria escura têm sido feitos. A parametrização usual genérica para os halos de matéria escura é

$$N(r) = \frac{N_0}{(70 \text{ km/s}) [1 + (70 \text{ km/s})^2 / v^2]^D}. \quad (4.3)$$

Uma das simulações feitas, utilizando os parâmetros $N_0 = 10^4$, $D = 3$, $\sigma = 10 \text{ e } v_0 = 200 \text{ km/s}$, que estão de acordo com alguns dados observacionais, fornece a curva de rotação dada a seguir [48].

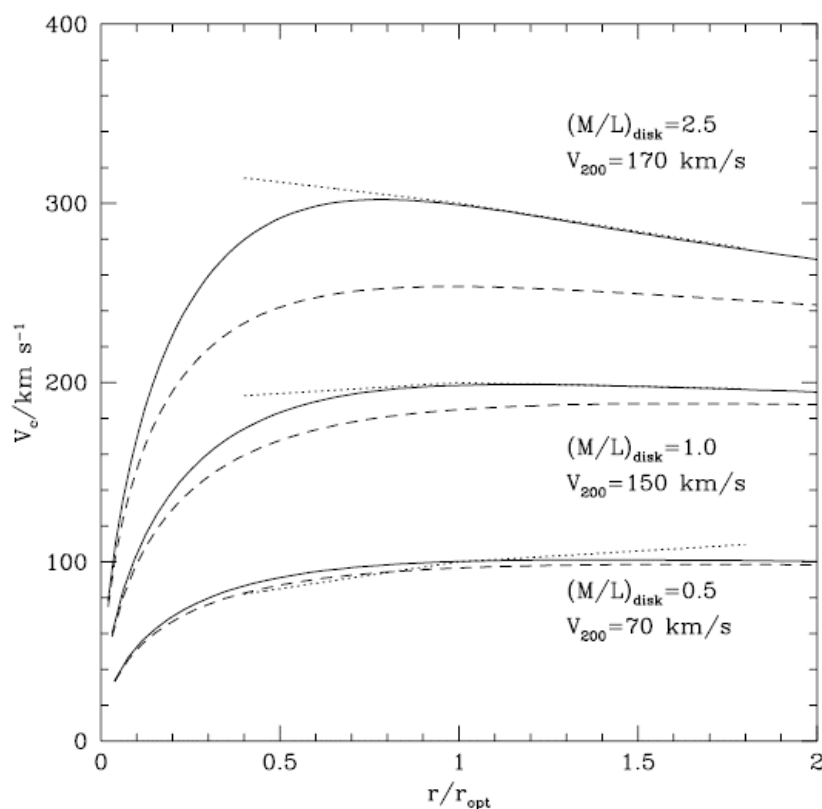


Figura 4.7: Curvas de rotação dos sistemas disco+halo, com parâmetros escolhidos de acordo com alguns dados observacionais. As linhas pontilhadas indicam a contribuição do halo de matéria escura [48].

Nesta gura pode-se observar que a velocidade de rotação aumenta conforme aumenta

a massa do halo e que a contribuição de matéria escura é menos importante em galáxias mais brilhantes (maior quantidade de matéria bariônica).

4.3 Estimativa da Quantidade de Matéria Escura

Informações importantes sobre quantidade e natureza da matéria escura são obtidas pelo estudo das propriedades globais do Universo. Devemos, portanto, fazer uma breve incursão no campo da cosmologia, utilizando o Modelo Cosmológico Padrão, que emerge da teoria einsteiniana da gravidade, juntamente com a hipótese de que o espaço seja homogêneo e isotrópico. Evidentemente essas propriedades referem-se a observações efetuadas em escala cósmica, maiores, em grande medida, que as dimensões de um aglomerado de galáxias.

Segundo o Modelo Cosmológico Padrão, o Universo é um espaço com curvatura constante, que pode se expandir ou contrair durante a sua evolução. Mas se o espaço é homogêneo e isotrópico, não pode existir nenhum “centro do Universo” em relação ao qual ocorra a expansão ou contração. O Universo se expandiu desde a sua origem com o Big Bang, ocorrido por volta de 15 bilhões de anos atrás; e essa expansão se manifesta no movimento de distanciamento recíproco das galáxias, descoberto por Edwin Hubble (1889 - 1953), em 1929. No âmbito do Modelo Cosmológico Padrão, a expansão cósmica do Universo é sempre desacelerada, em virtude da atração gravitacional entre os objetos que o compõem. Tanto a geometria do Universo, quanto a sua evolução, dependem da quantidade de matéria que ele contém. É conveniente expressar a correspondente densidade cósmica média em termos do parâmetro de densidade cósmica ρ_0 , de modo como a relação entre a densidade medida e a chamada “densidade crítica”, característica de um Universo com curvatura nula, ou seja, descrito pela geometria euclidiana. Se a densidade média é baixa em relação à densidade crítica, temos $\rho_0 < 1$, a curvatura espacial é negativa e a expansão continuará para sempre. Do mesmo modo, se a densidade média é maior do que a crítica, $\rho_0 > 1$, a curvatura é positiva e, a partir de um certo momento, o

Universo começará a se contrair, até atingir um estado singular semelhante àquele do Big Bang. Uma terceira possibilidade corresponde ao caso $\Omega_0 = 1$. Neste caso a densidade média é igual à crítica, então o Universo é espacialmente plano - ou seja, euclidiano - e a taxa de expansão se reduzirá progressivamente à zero. Muitas evidências observacionais levam a crer que, de fato, o Universo seja essencialmente plano, ou seja, $\Omega_0 = 1$.

As observações indicam que a densidade de matéria no Universo deve corresponder a $\Omega_m = 0,3$ [49]. Assim, para $\Omega_0 = 1$, ainda está faltando cerca de 70% da massa do Universo, o que se atribui atualmente a uma constante cosmológica não-nula, que corresponde a uma “densidade de energia escura”, com $\Omega_\Lambda = 0,7$. Acredita-se que esta densidade de energia escura esteja relacionada ao fato do Universo atual estar se expandindo de modo acelerado. Em outros termos, a energia escura deve ter uma pressão negativa e pode-se demonstrar que essa pressão dá lugar a uma “gravidade repulsiva” que, portanto, acelera a expansão cósmica. Então teríamos $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, em conformidade com o resultado da missão Boomerang. A figura 4.8 representa essa distribuição de massa do Universo.

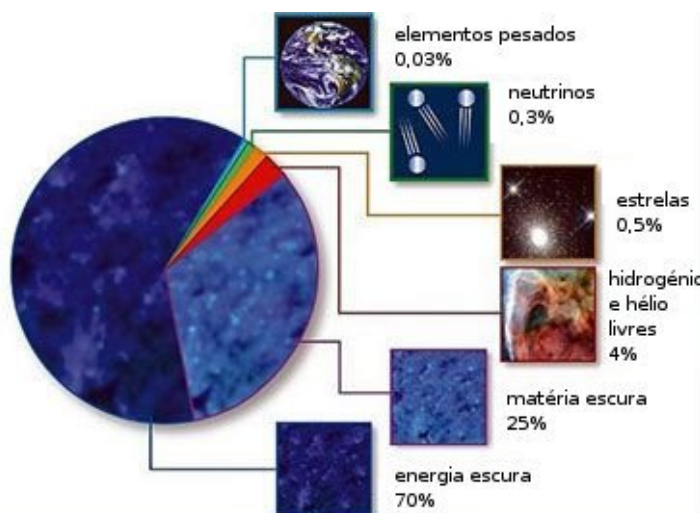


Figura 4.8: Distribuição de massa no Universo.

4.4 Natureza da Matéria Escura

Os candidatos à matéria escura podem ser divididos em duas classes:

1. As WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles): partículas massivas fracamente interagentes. Existem naturalmente em extensões supersimétricas do Modelo Padrão, conhecidas como Lightest Supersymmetric Particle (LSP). Geralmente, considera-se a LSP como sendo o neutralino [50]. O neutralino é uma superposição de estados associados aos Higgsinos neutros, ao fótino e ao zino, e que tem a propriedade de ser estável, o que significa que ele ainda deve existir como relíquia do Big Bang. Existem sugestões de outras possibilidades como sneutrinos, gravitinos, fótonos e áxions [51].

2. Os MACHOs (Massive Compact Halo Objects): objetos massivos compactos do halo. Entre eles estão “planetas errantes”, buracos negros e estrelas pouco luminosas como estrelas de nêutrons, anãs brancas e anãs marrons. São formados por matéria bariônica, ou seja, seus constituintes são bárions - prótons, nêutrons e elétrons. Recentemente os astrônomos encontraram indícios de que existem MACHOs em nossa galáxia, a partir da observação de lentes gravitacionais.

Uma das grandes conquistas da teoria do Big Bang foi a predição das abundâncias dos elementos leves (H , He , 3He , 4He e Li). De acordo com esta teoria, as abundâncias previstas são muito sensíveis a variações da densidade de bárions do Universo [52], de modo que a hipótese de que haja muito mais matéria bariônica do que o observado não é razoável. Desta forma a maior parte da matéria escura deve ser não-bariônica [53].

Além disso, se o Universo fosse constituído apenas de matéria luminosa (bariônica), então a época de formação de estruturas teria sido muito curta, provavelmente requerendo perturbações iniciais que forneceria anisotropias à radiação cósmica de fundo muito maiores que as observadas [1].

Como já visto, uma classificação dos candidatos a matéria escura não-bariônicos é como matéria escura “quente” e matéria escura “fria”. Esta classificação tem grande importância na formação de estruturas. A matéria escura quente não pode se aglomerar em escalas galácticas até resfriar-se a velocidades não-relativísticas e, também, dá origem a um espectro de perturbações primordiais consideravelmente diferente do observado. Partículas massivas fracamente interagentes geralmente se desacoplam a uma temperatura

de aproximadamente $\Omega_{\text{CDM}} \approx 0.20$, o que significa que são não-relativísticas e se comportam como Matéria Escura Fria (Cold Dark Matter - CDM) quando as estruturas se formam.

4.4.1 Neutrinos Massivos

As observações recentes de oscilações de neutrinos, desde 1998, com o experimento Super-Kamiokande [54], levam a concluir definitivamente que os neutrinos têm massa não-nula, apesar de muito pequena, o que quer dizer que eles podem ser matéria escura [55]. Entretanto, a contribuição a Ω é provavelmente muito pequena. Os resultados do WMAP também corroboram a ideia de que a contribuição seria muito pequena. Além disso, a distribuição de matéria em largas escalas impõe um limite máximo da contribuição em massa dos neutrinos à matéria escura, que seria da ordem de 0.3% [56].

Existe uma objeção fundamental a que neutrinos massivos sejam os constituintes dominantes da matéria escura. Isto tem a ver com o fato de que os neutrinos são partículas de spin- $\frac{1}{2}$ e obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli. Para dar conta da matéria escura necessária em algumas galáxias, os neutrinos teriam que ser aglomerados muito fortemente, o que seria impossível pelo Princípio de Pauli.

Um outro ponto desfavorável aos neutrinos é o fato de que eles seriam relativísticos no momento em que as estruturas começaram a se formar e seriam Matéria Escura Quente (HDM). Este tipo de matéria escura, como dito, levaria à formação de estruturas diferentes das atualmente observadas [57].

4.4.2 Partículas Massivas Fracamente Interagentes

Vamos supor que, em adição às partículas conhecidas do Modelo Padrão, exista uma nova, e ainda não-descoberta, partícula massiva fracamente interagente (WIMP) estável ou de longa vida, $\tau \gg t_{\text{univ}}$. A temperaturas maiores que a massa da partícula, $kT \gg m$, a quantidade de equilíbrio de tais partículas é $n \sim \frac{g}{2\pi^2} (kT)^3$, mas para temperaturas menores, $kT \ll m$, a abundância de equilíbrio é exponencialmente suprimida, $n \sim e^{-m/kT}$ [58]. Se

a expansão do Universo foi tão lenta de modo a manter o equilíbrio térmico, a quantidade de WIMPs hoje seria muito pequena. Entretanto, o Universo não é estático, assim não se pode levar em consideração apenas o equilíbrio termodinâmico.

A altas temperaturas ($kT \gg m$), as χ 's são abundantes e rapidamente se convertem em partículas mais leves e vice-versa, $\chi \leftrightarrow \bar{\chi}$, onde $\bar{\chi}$ são pares quark-antiquark e lépton-antilépton, e se kT for maior que as massas de bósons de gauge e/ou de Higgs, $\bar{\chi}$ poderiam ser pares de bósons de gauge ou Higgs também. Logo após kT cair abaixo de m , a densidade de χ 's cai exponencialmente e a taxa de aniquilação de χ 's, $\Gamma = \langle \sigma v \rangle n^2$, onde $\langle \sigma v \rangle$ é a média térmica da seção de choque total para a aniquilação de $\bar{\chi}$ em partículas mais leves multiplicada pela velocidade relativa v , cai abaixo da taxa de expansão, $H = E$. Neste ponto, os χ 's param de se aniquilar e cienteamente, atingindo o equilíbrio, e uma abundância cosmológica relíquia se mantém.

Uma solução aproximada para a equação de Boltzmann leva à seguinte estimativa para a abundância cosmológica atual de WIMPs:

$$A^2 = \frac{\langle \sigma v \rangle}{N_\gamma} W^2 \frac{3 \times 10^{27} \text{ cm}^{-3}}{h^2 \langle \sigma v \rangle} \quad (4.4)$$

onde A é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. O resultado é, em primeira aproximação, independente da massa da WIMP e dado primeiramente por sua seção de choque de aniquilação.

O valor esperado para a seção de choque de aniquilação dessas WIMPs, considerando a idade do Universo, é de 10^{-9} cm^2 . Curiosamente, esta é a ordem de magnitude esperada para uma seção de choque eletrofraca típica

$$\sigma \sim \frac{g^4}{s} \quad (4.5)$$

onde g é da ordem de 0.01 e s é da ordem de 100 GeV^2 . Esta “coincidência” sugere que se uma nova, e ainda não descoberta, partícula massiva estável com interação

fraca existe, haveria uma densidade razoável dessas relíquias e, portanto, forneceria um candidato natural à matéria escura.

Um cenário com a presença de um campo escalar no Universo primitivo poderia afetar significativamente o valor da densidade de relíquias [59]. Além disso, uma grande mudança na densidade de relíquias também pode ser introduzida pelo aumento de ressonâncias, ou das chamadas coaniquilações.

Pequenas modificações na abundância de relíquias são necessárias aos vários tipos de candidatas à matéria escura. Por exemplo, se a partícula for diferente da antipartícula, pode ser que exista uma assimetria que poderia tornar a densidade de partículas maior do que se houvesse uma perfeita simetria. Isto levaria a uma densidade de relíquias bem maior que a estimada na equação (4.4), mesmo que a seção de choque seja grande. De fato, tal assimetria deve ter existido para os bárions, porque, de outra forma, os bárions teriam sido quase completamente aniquilados por antibárions, devido à grande seção de choque de aniquilação causada pela interação forte, o que faria do Universo atual algo bastante diferente do observado. Considerações com relação à BBN levam a uma assimetria de bárions e antibárions da ordem de uma parte em 10^9 . A origem desta assimetria que viola CP e número bariônico é ainda desconhecida, e possivelmente é necessário ir além do Modelo Padrão da Física de Partículas para explicá-la.

Se a partícula é idêntica à antipartícula, esta incerteza da quantidade de assimetria não aparece. Partículas neutras de spin-1 como ω e ϕ são exemplos de partículas auto-conjugadas. Também é possível para uma partícula neutra de spin- $\frac{1}{2}$ ser sua própria antipartícula, chamada de férmion de Majorana. Este é o caso genérico de partículas supersimétricas, como o neutralino.

4.5 Matéria Escura Supersimétrica

As primeiras WIMPs consideradas foram neutrinos massivos de Dirac ou Majorana com massas da ordem de alguns eV a alguns GeV, pertencentes a uma possível quarta

geração de partículas [60]. Apesar desses neutrinos pesados terem sido considerados plausíveis, eles certamente não foram bem motivados da perspectiva da teoria de partículas. Além disso, evidências experimentais excluíram a possibilidade destes serem candidatos à matéria escura. Muitos candidatos provenientes de diversos modelos foram surgindo na tentativa de explicar a matéria escura. Algumas dessas possibilidades serão apresentadas abaixo.

Um candidato à WIMP muito promissor vem da Supersimetria. A escala eletrofraca da SUSY discutida aqui aparece em física de partículas como uma possibilidade de sanar problemas naturais do Modelo Padrão, como o chamado problema da hierarquia (uma incompreensível discrepância entre as escalas de massa de interações eletrofracas e a gravidade). A unificação das constantes de acoplamento parece melhorar com a SUSY, além da SUSY ser, em geral, um ingrediente essencial em teorias que unificam a gravidade com as outras três interações fundamentais. Ainda, o surgimento de uma nova simetria, a paridade-R, nas teorias supersimétricas sugere que a partícula supersimétrica mais leve (LSP) seja estável, o que forneceria um candidato natural à matéria escura. Deve-se notar, entretanto, que a matéria escura pode ser constituída de diversas partículas, e não de apenas um desses candidatos.

4.5.1 Áxions

Áxions são mésons pseudoescalares que aparecem nas teorias de cordas e são necessários para explicar a fraca violação de CP em interações fortes. Existem experimentos procurando por estas partículas em escalas de massa interessantes para a cosmologia [61].

4.5.2 Sneutrinos

Uma outra possibilidade, ainda, são os sneutrinos, os parceiros supersimétricos dos neutrinos. Estas partículas originariam um grande acoplamento com a matéria comum (e também uma grande seção de choque de aniquilação) através de trocas de bósons ⁰

e, portanto, são candidatas desfavoráveis, já que não restaria abundância suficiente para dar conta da matéria escura [10].

4.5.3 Gravitinos

Os gravitinos, companheiros supersimétricos dos grávitons, seriam, também, possíveis candidatos à matéria escura [62]. Em teorias supersimétricas onde a quebra da SUSY é transferida para o setor visível por interações de gauge, o gravitino é a LSP. Mesmo quando o gravitino não é a LSP e pode decair, como em cenários de quebra mediada pela gravidade, seu tempo de meia vida pode ser muito longo, devido à sua fraca interação gravitacional. Além disso, os gravitinos, devido ao fato de interagirem apenas gravitacionalmente, tornariam-se partículas de detecção muito difícil [63].

4.5.4 Axinos

Acreditava-se até recentemente que os axinos, superparceiros dos áxions, eram capazes de atuar apenas como candidato à WDM ou HDM. Entretanto, foi mostrado que, para baixas temperaturas de resfriamento, existe a possibilidade de CDM composta de axinos [64]. Em muitas formas, axinos e gravitinos têm propriedades fenomenológicas similares.

4.5.5 Neutralinos

Uma das possibilidades mais aceitas atualmente é a de que a matéria escura seria formada por neutralinos. O neutralino, uma combinação linear de parceiros supersimétricos do fóton, $\tilde{0}$ e dos bósons de Higgs neutros, seria a LSP em diversos modelos, entre os quais o MSSM.

Uma das características apreciáveis deste candidato reside no fato de que os neutralinos naturalmente fornecem uma densidade relíquia da ordem requerida para explicar halos de matéria escura, $\Omega_{\tilde{0}} \approx 0.25$. Além disso, sua motivação pela física de partículas se tornou mais forte devida a aparente necessidade de uma escala supersimétrica de 100

- 10 % para se obter a uni cação das constantes de acoplamento de gauge, conforme os resultados do LEP (Large Electron-Positron Collider) [65].

Atualmente, o limite mínimo da massa do neutralino mais leve é de cerca de 43 GeV [66]. O limite máximo de massa do neutralino, no MSSM, é da ordem de 700 GeV [67]. Acima desta massa, a densidade relíquia se torna maior que o limite máximo baseado nas observações. Com a inclusão de algumas restrições no espaço dos parâmetros, como em alguns modelos com supergravidade, a massa obtida para o neutralino mais leve está, em geral, abaixo de 600 GeV [68].

Uma vez xados os parâmetros de um dado modelo supersimétrico, a seção de choque de aniquilação do neutralino com partículas mais leves pode ser calculada, podendo-se obter a densidade cosmológica de massa dos neutralinos. A escala de massa da SUSY deve ser da ordem da escala eletrofraca e o neutralino apresentará apenas interação eletrofraca. De fato, os cálculos levam a crer que a abundância cosmológica de neutralinos pode dar conta da matéria escura em nosso halo galáctico [58].

4.5.6 Candidatas Superpesadas

As partículas de matéria escura são, em geral, consideradas “leves”, o que significa que elas têm massas menores que algumas centenas de GeV . Este “limite” é uma consequência da existência de uma seção de choque de aniquilação máxima, $\sigma_{\text{ann}} \sim 10^{-26} \text{ cm}^2$, para uma partícula de uma dada massa, $m_{\text{ch}} \sim 100 \text{ GeV}$. Este limite e os vínculos da densidade de relíquias podem ser utilizados para inferir um limite máximo de massa da partícula de matéria escura de $m_{\text{ch}} \sim 340 \text{ GeV}$. A utilização das restrições impostas pelo WMAP levam a um valor ainda menor, de $m_{\text{ch}} \sim 34 \text{ GeV}$. As partículas “superpesadas” que são candidatas à matéria escura têm massas $m_{\text{ch}} \gtrsim 10^{10} \text{ GeV}$, e são chamadas de wimpzillas [69].

As wimpzillas têm interessantes consequências fenomenológicas, incluindo uma possível solução para o problema dos raios cósmicos ultra-energéticos [70]. Nestes cenários, os raios cósmicos ultra-energéticos seriam produzidos por decaimento ou aniquilação de matéria escura superpesada [71].

4.5.7 Q-balls

Outra possibilidade de candidatos à matéria escura são as “Q-balls” [72]. As “Q-balls” podem ser ou não supersimétricas e também podem ser ou não estáveis em escalas de tempo cosmológicas. Em alguns cenários, “Q-balls” supersimétricas decaem no neutralino mais leve, fornecendo um cenário semelhante ao MSSM, mas com fenomenologia diferente.

4.5.8 Outros Candidatos Supersimétricos

Outras possibilidades supersimétricas incluem campos mensageiros, Partículas Massivas Carregadas (CHARGed Massive Particles - CHAMPs) [73], matéria escura auto-interagente [74], entre outros.

4.6 Neutralinos e Energia Escura

Os últimos anos foram marcados por rápidos progressos na cosmologia observacional. Uma das maiores surpresas foi a descoberta de que o Universo está em expansão acelerada. Existem também indicações de que a maior parte de sua densidade de energia, atualmente, esteja na forma de uma energia de vácuo, ou energia escura, correspondente à famosa “constante cosmológica”, introduzida e depois rejeitada por Einstein, que seria uma componente com pressão negativa, responsável pela aceleração da expansão do Universo. Devido a estas descobertas, muitos modelos têm sido propostos, em alguns dos quais a energia escura é introduzida como “quintessência” [75], um termo dinâmico, associado a um campo escalar com um potencial efetivo, gravitacionalmente acoplado às outras componentes do Universo, possivelmente já antes de se tornar o componente dominante na presente época [22]. Além de dirigir a dinâmica do Universo hoje, tal termo pode ter tido um papel importante durante os estágios iniciais de sua evolução.

O resfriamento das WIMPs é predito para ter ocorrido a uma temperatura na escala de alguns ou acima, muito antes, na história do Universo, do que qualquer processo que possa ser diretamente testado através das observações cosmológicas. Entretanto,

as predições da abundância relíquia de WIMPs são significativamente diferentes se o resfriamento ocorresse durante um período de dominação da quintessência.

Se durante a época em que a densidade de energia em forma de radiação era dominante fosse adicionada uma contribuição de quintessência, o Universo seria forçado a se expandir mais rapidamente. Isto levaria alguns processos, como a taxa de aniquilação, a ocorrerem em uma temperatura maior, então a densidade de equilíbrio das WIMPs se resfriaria em um valor maior, fornecendo um aumento na abundância final de WIMPs. Em particular, modelos que trazem como LSP o neutralino-higgsino, que são usualmente descartados como candidatos à matéria escura, podem ser retomados nesse cenário, já que sua abundância aumentaria significativamente, pois o efeito desse aumento é maior quanto maior for a massa da WIMP considerada [18].

Atualmente, um dos modelos sobre matéria escura mais aceitos, que fornece uma descrição adequada de grande parte das observações cosmológicas, é o Modelo Λ CDM, conhecido também como modelo de concordância, que inclui a energia escura, com [10]

- $\Omega_{\Lambda} = 0.73 \pm 0.04$, de energia escura, com pressão negativa;
- $\Omega_{CDM} = 0.22 \pm 0.02$, de matéria escura fria;
- $\Omega_{b} = 0.05$ de outros componentes, dos quais os bárions contribuem com cerca de 0.044 ± 0.004 , neutrinos massivos com aproximadamente 0.006 , fótons com cerca de 5×10^{-5} e neutrinos relativísticos com cerca de 10^{-5} .

Este modelo explica de forma bastante satisfatória os dados obtidos pelo WMAP [38].

4.7 Algumas Tentativas de Detecção

4.7.1 Detecção Direta

Se os neutralinos forem descobertos em aceleradores de partículas, isto poderia também ser a descoberta indireta de matéria escura formada por partículas supersimétricas. Entretanto, seria mais satisfatório detectar partículas de matéria escura diretamente

movendo-se através do halo galáctico. Se existem neutralinos no halo, estes poderiam ser detectados por diversos meios. Uma das técnicas mais promissoras para a detecção direta envolve buscas de recuos da ordem de 10 D produzidos pelo espalhamento elástico de neutralinos por núcleos em detectores abaixo do solo. Uma partícula com massa $m \sim 100$ e interações de escala eletrofraca terá uma seção de choque para o espalhamento elástico por um núcleo de $\sim 10^{-38} \text{ cm}^2$. Se a densidade local do halo é $N_0 \sim 0.4 \text{ cm}^{-3}$, e as partículas se moverem com velocidades $v \sim 300 \text{ km/s}$, então a taxa de espalhamento elástico para estas partículas, por exemplo, por germânio, que tem uma massa de $M_B \sim 70$, será $\sim N_0 \cdot \sigma \cdot v \cdot M_B \sim 1 \text{ evento}/\text{D} \cdot 8^1$. Se uma WIMP de 100 , movendo-se a uma velocidade $v \sim 10^3$, espalha-se com um núcleo de massa similar, transmitirá uma energia de recuo de até 100 D ao núcleo. Assim, se tivermos 1 D de germânio esperamos ver um núcleo por ano espalhado com energia próxima de 100 D [58].

É claro que esse é um cálculo grosseiro. Para realizar um cálculo mais preciso, seria necessário usar a interação neutralino-quark apropriada, a partir da QCD e da física nuclear, que leva da interação neutralino-quark à interação neutralino-núcleo, e integrar sobre a distribuição de velocidades das WIMPs. Mesmo que todos esses efeitos físicos sejam incluídos apropriadamente, há ainda um significativo grau de incerteza nas taxas previstas de eventos. Apesar da SUSY fornecer o candidato talvez mais promissor à matéria escura (e solucionar problemas da física de partículas), fornece, por outro lado, pouco poder de previsão. Portanto, o que os teóricos normalmente fazem é analisar um grande grupo de modelos com massas e acoplamentos dentro de uma escala plausível e apresentar resultados para abundância de relíquias e taxas de detecção direta e indireta.

Existe ainda uma boa quantidade de diferentes experimentos de detecção direta sendo testados ou planejados usando uma variedade de diferentes métodos de detecção. Quando uma WIMP espalha-se com um núcleo em um cristal, o núcleo recua, causando um deslocamento na estrutura cristalina, vibrações da rede cristalina (na forma de fônons e/ou calor) e também ionização. Então seria necessário identificar um ou mais destes sinais.

Uma outra classe de experimentos procura por neutrinos energéticos do centro do Sol e da Terra, que seriam produzidos por aniquilação de WIMPs. Halos de WIMPs podem se acumular próximos a corpos massivos, como o Sol e a Terra, e nestes locais aniquilar-se produzindo neutrinos de altas energias que poderiam ser detectados em telescópios de neutrinos. Tais neutrinos teriam energias de aproximadamente um terço da massa das WIMPs. Como os neutrinos solares comuns têm no máximo energias de $\sim 10^6$ eV, um sinal de neutrino de multi-TeV do Sol ou da Terra seria um sinal inconfundível.

As principais dificuldades nesses experimentos vêm do fato de que WIMPs são eventos raros e há muitos acontecimentos de fundo que depositam quantias similares de energia em escalas de tempo muito mais frequentes. Assim, os experimentos são forçados a operar profundamente abaixo do solo, onde a interferência de raios cósmicos é menos frequente. Eles também tipicamente devem ser operados em detectores a baixas temperaturas a fim de manter baixas as excitações térmicas.

4.7.2 Raios Cósmicos Anômalos

As WIMPs podem também ser detectadas via observação de raios cósmicos anômalos constituídos por pósitrons, antiprótons e raios gama produzidos pela aniquilação de WIMPs no halo galáctico [76]. A dificuldade em inferir a existência de partículas de matéria escura a partir de raios cósmicos se deve à discriminação entre raios cósmicos induzidos por WIMPs e aqueles provenientes das tradicionais fontes astrofísicas. Apesar disso, as WIMPs podem produzir diferentes assinaturas nestes raios cósmicos específicos. A aniquilação de WIMPs produziria um excesso de raios cósmicos de pósitrons de altas energias que não poderia ser imitado por qualquer uma das fontes astrofísicas tradicionais. Além disso, alguns autores defendem que as colisões de raios cósmicos primários de prótons com o Hélio interestelar e o re-espalhamento de raios cósmicos de antiprótons também pode produzir antiprótons de baixa energia. Estes autores argumentam que o cenário de antiprótons de altas energias é melhor compreendido, e uma busca por excessos destes antiprótons energéticos forneceria uma melhor assinatura de WIMPs [77].

A aniquilação direta de duas WIMPs em dois fótons, $\chi\chi \rightarrow \gamma\gamma$, ou em $\chi\chi \rightarrow e^+e^-$, produziriam fótons monoenergéticos com energia igual à massa da WIMP, $E = m_\chi c^2$. [78]. Nenhum outro mecanismo astrofísico imaginável poderia produzir um sinal monoenergético de raio gama de tal energia. Apesar disso, devemos nos lembrar que devido a numerosas incertezas astrofísicas, é difícil fazer previsões conáveis de fluxos de raios cósmicos de pósitrons, antiprótons e raios gama para uma partícula candidata à matéria escura.

Capítulo 5

Conclusão

A Supersimetria é uma teoria que relaciona férmions a bósons, de modo que cada estado fermiônico tenha um superparceiro bosônico e vice-versa. Nas primeiras teorias supersimétricas, achava-se que alguns desses estados requeridos pela Supersimetria poderiam ser identificados com algumas das partículas conhecidas. Essa idéia mostrou-se fenomenologicamente incorreta, fazendo com que novas partículas fossem necessárias, de modo que o espectro de partículas aumenta significativamente no Modelo Supersimétrico Mínimo. O MSSM é uma das tentativas de se construir uma teoria mais geral que o Modelo Padrão de Partículas Elementares, onde fosse possível resolver certos problemas intrínsecos a esse último. A inclusão no MSSM de uma simetria adicional, a paridade-R, para evitar o rápido decaimento de prótons, traz como consequência o fato de que as partículas supersimétricas poderiam ser produzidas apenas em pares, e qualquer um de seus produtos de decaimento deve conter um número ímpar de partículas supersimétricas. Isto implica que a partícula supersimétrica mais leve (Lightest Supersymmetric Particle - LSP) tem de ser estável, já que não tem canais de decaimento permitidos.

Há algumas décadas sabe-se da existência de uma enorme quantidade de matéria escura no Universo, que vem sendo confirmada pelos mais diversos tipos de observações experimentais. As evidências observacionais de que $\Omega \approx 0.3$, combinadas com vínculos da nucleossíntese do Big-Bang de uma densidade bariônica $\Omega_b \approx 0.04$, sugerem que uma

fração significativa da matéria do Universo deve estar na forma de partículas de matéria escura não-bariônicas. Estas partículas, chamadas de WIMPs, devem ser massivas e não-relativísticas para serem consistentes com as estruturas observadas. Se uma partícula massiva estável com interação fraca existe, haveria uma densidade razoável dessas relíquias e, portanto, forneceria um candidato excelente à matéria escura. Esta partícula, em boa parte dos modelos supersimétricos, inclusive no MSSM, é o neutralino, uma combinação linear de parceiros supersimétricos do fóton, do bóson $\tilde{0}$ e dos bósons de Higgs neutros, $\tilde{0}$ teria uma abundância cosmológica similar à abundância de matéria escura. Seus possíveis canais de aniquilação dependem de sua natureza, ou seja, da fração de gauginos e higgsinos presentes em sua composição, e são muito importantes na determinação de possibilidades de sua detecção. As observações cosmológicas também levam a crer que exista uma quantidade considerável de energia escura no Universo, algo em torno de

0.7. Em um contexto cosmológico com energia escura, ou quintessência, a densidade relíquia de neutralinos aumentaria significativamente, e, portanto, seria muito importante neste cenário, a massa e a composição do neutralino. Modelos supersimétricos que trazem o neutralino-higgsino como LSP podem se tornar interessantes na presença de energia escura.

As WIMPs não intrigam apenas os teóricos; uma grande comunidade de experimentais tem se dedicado à procura de tais partículas. Entretanto, devemos enfatizar que apesar de muito atrativa, esta é ainda uma idéia especulativa. Não existe ainda evidência alguma de experimentos em aceleradores e outros que comprove a existência da Supersimetria no contexto das partículas elementares. A matéria escura poderia ser algo completamente diferente. No entanto, como argumentamos, a evidência da existência de matéria escura não-bariônica é de fato convincente, e as partículas estudadas (neutralinos) são candidatas promissoras. Mesmo sendo um grande desafio experimental, é fato que a descoberta de partículas de matéria escura representaria uma verdadeira revolução tanto para a física de partículas quanto para a cosmologia.

Apêndice A

Representações das Matrizes de Dirac

Utilizamos, neste trabalho, o sistema natural de unidades, onde

$$\hbar = c = 1. \tag{A.1}$$

O tensor da métrica é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

As matrizes α satisfazem à relação

$$\{ \alpha_i, \alpha_j \} = 2 \delta_{ij}, \tag{A.3}$$

com σ_0 hermitiana, σ_1 anti-hermitiana, e estão relacionadas às matrizes σ_2 e σ_3 através de

$$\sigma_0 = \sigma_4 \quad \sigma_1 = \sigma_5$$

$$\sigma_2 = \sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_7^\dagger$$

$$\sigma_3 = 0$$

$$\{\sigma_4, \sigma_5\} = 0.$$

O comutador das matrizes σ_4 e σ_5 é dado por

$$[\sigma_4, \sigma_5] = \frac{1}{2} \sigma_3$$

e ainda,

$$\sigma_4 = \sigma_6 + \sigma_7$$

$$\sigma_5 = \sigma_6 - \sigma_7$$

$$\sigma_3 = 0, \text{ onde } \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_6 + \sigma_7.$$

As matrizes conjugadas hermitianas são dadas por

$$\sigma_0 = \sigma_0^\dagger$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^\dagger = -\sigma_1$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^\dagger$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^\dagger = 0.$$

Para dois espinores ψ_1 e ψ_2 e uma matriz M , 4×4 ,

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_2) = \bar{\psi}_2 (M^\dagger \psi_1), \quad (\text{A.4})$$

onde $\bar{\psi}_1 = \psi_1^\dagger \gamma_0$ e o símbolo $\bar{\psi}$ significa conjugação complexa. A identidade correspondente para campos anticomutantes de spin- $\frac{1}{2}$ envolve um sinal negativo a mais.

As matrizes de conjugação de carga obedecem às relações

$$C^2 = 1$$

$$C \gamma_5 C^{-1} = -\gamma_5$$

$$C \gamma_\mu C^{-1} = +\gamma_\mu$$

$$C (\gamma_5 \gamma_\mu) C^{-1} = (\gamma_5 \gamma_\mu)$$

As matrizes de Pauli são dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Podemos utilizar três representações para as matrizes γ_μ , a representação de Dirac, a representação de Majorana e a representação chiral, ou de Weyl, e, neste trabalho, estas representações serão utilizadas conforme a conveniência.

Na representação de Dirac [79], temos

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 4 = +^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& & 0 \ 0 \\
& \begin{array}{cc} \text{5} & \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 1 \ \wedge \end{array} \\
& & & \\
& & & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \\
& \begin{array}{cc} 5 \ 0 & \end{array} & \begin{array}{c} \cdot 2 \ \wedge \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \\
& & & \\
& \begin{array}{ccc} 5 & = & +^3 = \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\
& & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} 5 \ 0 & & \wedge \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\
& & & \\
& & & \begin{array}{c} 0 \ + \\ + \ 0 \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} \cdot 0 & \cdot 1 & \cdot \end{array} & \begin{array}{c} + \ 0 \\ + \ 0 \end{array} \\
& & & \\
& \begin{array}{ccc} + = L \ 0 & + = L & = L \end{array} & \begin{array}{c} + \ 0 \\ 0 \ + \end{array} \\
& & & \\
& & & \begin{array}{c} 0 \ +^2 \\ +^2 \ 0 \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} \wedge & 2 \ 0 & \cdot 1 \ \cdot 2 \end{array} & \begin{array}{c} +^2 \ 0 \\ +^2 \ 0 \end{array} \\
& & & \\
& \begin{array}{ccc} 2 = 2^\dagger = 2 & 22^\dagger = 2^\dagger 2 = 0 & 2^2 = 0. \end{array} & \text{(A.6)}
\end{array}$$

Na representação de Majorana [79], temos

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& & 0 \ +^2 \\
& \begin{array}{cc} 0 & \cdot 1 \ \cdot 2 \end{array} & \begin{array}{cc} +^2 & 0 \end{array} \\
& & \\
& & \begin{array}{c} 0 \ +^1 \\ +^1 \ 0 \end{array} \\
& \begin{array}{ccc} 1 & \cdot 1 & \cdot 1 \end{array} & \begin{array}{c} +^1 \ 0 \\ +^1 \ 0 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 2 \quad .3 \quad \wedge \\
 3 \quad .1 \quad .3 \\
 1 \quad \wedge \quad .3 \\
 2 \quad .2 \quad .2 \\
 3 = 0 \quad +1 = \\
 5 \quad .3 \quad .2 \\
 \wedge \quad .1 \quad .2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 \quad 0 \\
 0 \quad 0 \\
 0 \quad +^3 \\
 +^3 \quad 0 \\
 +^3 \quad 0 \\
 0 \quad +^3 \\
 0 \quad +^2 \\
 +^2 \quad 0 \\
 +^1 \quad 0 \\
 0 \quad +^1 \\
 +^2 \quad 0 \\
 0 \quad +^2 \\
 0 \quad +^2 \\
 +^2 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

e também satisfazem às relações (A.6). A relação entre a representação de Majorana e a representação de Dirac se dá através de

$$\text{Majorana} = \text{Dirac} \quad \dagger$$

com

$$= \dagger = \frac{1}{2} \begin{array}{l} 0 \quad +^2 \\ +^2 \quad 0 \end{array}$$

Referências

- [1] JUNGMAN, G., KAMIONKOWSKI, M. e GRIEST, K., Supersymmetric Dark Matter, *Physics Reports* 267 (1996) 195-373.
- [2] BERTONE, G., HOOPER, D. e SILK, J., Particle dark matter: evidence, candidates and constraints, *Physics Reports* 405 (2005) 279-390.
- [3] GRIFFITHS, D., *Introduction to Elementary Particles*, Jonh Wiley & Sons, London, 1987.
- [4] BERGSTRÖM, L., Non-baryonic dark matter: observational evidence and detection methods, *Reports on Progress in Physics*, 63 (2000) 793-841.
- [5] SILVA, C. O. e NATTI, P. L., Modelo de quarks e sistemas multiquarks, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 2 (2007) 175-187.
- [6] GOTO, M., *Supersimetria: Introdução pelo Formalismo dos Supercampos*, monografia do Instituto de Física Teórica - IFT.M.01/83, IFT, São Paulo, 1983.
- [7] BJORKEN, J. D. e DRELL, S. D., *Relativistic Quantum Field*, McGraw-Hill Book, New York, 1965.
- [8] ARFKEN, G., *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego, 1985.
- [9] WESS, J. e ZUMINO, B., *Nucl. Phys. B* 70 (1974) 39.

- [10] CHUNG, D. J. H., EVERETT, L. L., KANE, G. L., KING, S. F., LYKKEN, J., WANG, L. T., The Soft Supersymmetry-Breaking Lagrangian: Theory and Applications, *Phys. Rept.* 407 (2005) 1-203.
- [11] DIMOPOULOS, S., Soft Supersymmetry Breaking and the Supersymmetric Standard Model, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 101 (2001) 183-194.
- [12] GIRARDELLO, L. e GRISARU, M. T., Soft breaking of supersymmetry, *Nuclear Physics B* 194 (1982) 65-76.
- [13] PINFOLD, J. L., Links between astroparticle physics and the LHC, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 31 (2005) R1-R74.
- [14] ENQVIST, K. e MAZUMDAR, A., Cosmological consequences of MSSM at directions, *Physics Reports* 380 (2003) 99-234.
- [15] HOLLIK, W., Precision calculations in the Minimal Supersymmetric Standard Model, *Nuclear Physics B (Proceedings Supplements)* 160 (2006) 32-37.
- [16] BARGER, V., LANGACKER, P. e LEE, H. S., Lightest neutralino in extensions of the MSSM, *Physics Letters B* 630 (2005) 85-99.
- [17] GONDOLO, P. e EDSJÖ, J., Neutralino relic density including coannihilations, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 70 (1999) 120-122.
- [18] PROFUMO, S. e ULLIO, P., SUSY dark matter and quintessence, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 11 (2003) 006.
- [19] BERGSTRÖM, L. e ULLIO, P., Full one-loop calculation of neutralino annihilation into two photons, *Nuclear Physics B* 504 (1997) 27-44.
- [20] ULLIO, P. e BERGSTRÖM, L., Neutralino annihilation into a photon and a Z boson, *Physical Review D*, 57 (1998) 1962-1971.

- [21] BOUDJEMA, F., SEMENOV, A. e TEMES, D., Self-annihilation of the neutralino dark matter into two photons or a Z and a photon in the MSSM, *Phys. Rev. D* 72 (2005) 055024.
- [22] ROSATI, F., Supergravity models of quintessence and supersymmetry breaking, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 95 (2001) 74-77.
- [23] FORNENGO, N., Cold Dark Matter and Neutralinos, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 124 (2003) 170-173.
- [24] ZWICK, F., *Helv. Phys. Acta*, 6, 110 (1933).
- [25] SOUZA, R. E., *Introdução à Cosmologia*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.
- [26] CORBELLI, E. e SALUCCI, P., The Extended Rotation Curve and the Dark Matter Halo of M33, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 311 (2000) 441-451.
- [27] TURNER, M. S., Dark matter and dark energy in the universe, *The 3rd Stromlo Symposium: The Galactic Halo of ASP Conference Series*, Vol. 666 (1999).
- [28] FIELDS, B. D e OLIVE, K. A., Big bang nucleosynthesis, *Nuclear Physics, Section A*, 777 (2006) 208-225.
- [29] EINASTO, J., Large scale structure, *New Astronomy Reviews* 45 (2001) 355-372.
- [30] SCHARAMM, D.N., The consistency problems of large scale structure, *Progress in Particle and Nuclear Physics* 17 (1986) 51-58.
- [31] BONOMETTO, S.A. e Valdarnini, R., Nature of dark matter and pancake mass, *Physics Letters A* 103 (1984) 369-373.
- [32] STEFFEN, F. D., Gravitino dark matter and cosmological constraints, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 09 (2006) 001.

- [33] WRIGHT, E.L., Latest COBE Results, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements 51 (1996) 54-58.
- [34] WRIGHT, E.L., The WMAP data and results, New Astronomy Reviews 47 (2003) 877-881.
- [35] HINSHAW, G. et al, First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: The Angular Power Spectrum, Astrophys. Journal 148 (2003) 135.
- [36] PRIMACK, J. R., Status of Cold Dark Matter Cosmology, Nuclear Physics B Proceedings Supplements 124 (2003) 3-12..
- [37] PERLMUTTER, S., TURNER, M. S. e WHITE, M., Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 670-673.
- [38] SPERGEL, D. N., Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology, The Astrophysical Journal Supplement Series 170 (2007) 377-408.
- [39] HINSHAW, G. et al, Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Temperature Analysis, Astrophys. Journal 170 (2007) 288.
- [40] SWINGS, J. P., Gravitational lensing, Classical and Quantum Gravity 11 (1994) A183-A193.
- [41] WEINBERG, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [42] MÖRTSELL, E. e SUNESEON, C., Strong lensing, cosmology and lensing halos, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 01 (2006) 012.
- [43] FALCO, E. E., A most useful manifestation of relativity: gravitational lenses, New Journal of Physics 7 (2005) 200.

- [44] BERNARDEAU, F., Gravitational lenses to probe the universe, *New Astronomy Reviews* 45 (2001) 379-393.
- [45] WAMBSGANSS, J., Gravitational Lensing in Astronomy, *Living Reviews in Relativity*, vol. 1 (1998).
- [46] CARAVEO, P. e RONCADELLI, M., O Enigma da Matéria Escura, *Revista Científica American (Brasil)*, edição n° 3, agosto de 2002.
- [47] ALLEN, S. W. e SCHMIDT, R. W., The dark matter halos of massive, relaxed galaxy clusters observed with Chandra, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 379 (2007) 209.
- [48] NAVARRO, J. F., FRENK, C. S. e WHITE, S. D. M., The Structure of Cold Dark Matter Halos, *Astrophys. J.* 462 (1996) 563-575.
- [49] BERGSTRÖM, L., Dark matter constituents, *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)* 138 (2005) 123-129.
- [50] BOTTINO, A., DONATO, F., FORNENGO, N. e SCOPEL, S., Non-baryonic dark matter, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 114 (2003) 27-37.
- [51] LAZARIDES, G. e SHAFI, Q., Monopoles, axions and intermediate mass dark matter, *Physics Letters B* 489 (2000) 194-202.
- [52] SARKAR, S., Big Bang Nucleosynthesis and Physics Beyond the Standard Model, *Rept. Prog. Phys.* 59 (1996) 1493-1610.
- [53] TURNER, M. S., The dark side of the universe: from Zwicky to accelerated expansion, *Physics Reports* 333 (2000) 619-635.
- [54] FUKUDA et al (SuperKamiokande Collaboration), Study of the atmospheric neutrino flux in the multi-GeV energy range, *Physics Letters B* 436 (1998) 33-41.
- [55] KUBO, J. e SUEMATSU, D., Neutrino masses and CDM in a non-supersymmetric model, *Physics Letters B* 643 (2006) 336-341.

- [56] BERGSTRÖM, L., Dark Matter: Models and Detection Methods, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 118 (2003) 329-340.
- [57] DOLGOV, A. D., Neutrinos in cosmology, Physics Reports 370 (2002) 333-535.
- [58] GRIEST, K. e KAMIONKOWSKI, M., Supersymmetric Dark Matter, Physics Reports 333-334 (2000) 167-182.
- [59] SALATI, P., Quintessence and the Relic Density of Neutralinos, Phys. Lett. B 571 (2003) 121-131.
- [60] ENQVIST, K., KAINULAINEN, K. e MAALAMPI, J., Cosmic abundances of very heavy neutrinos, Nuclear Physics B 317 (1989) 647-664.
- [61] DUFFY, L. D., SIKIVIE, P., TANNER, D. B., ASZTALOS, S. J., HAGMANN, C., KINION, D., ROSENBERG, L. J., VAN BIBBER, K., YU, D. B., BRADLEY, R. F., A High Resolution Search for Dark-Matter Axions, Phys. Rev. D 74 (2006) 012006.
- [62] BRANDENBURG, A., COVI, L., HAMAGUCHI, K., ROSZKOWSKI, L. e STEFFEN, F. D., Signatures of Axinos and Gravitinos at Colliders, Phys. Lett. B 617 (2005) 99-111.
- [63] FENG, J. L., RAJARAMAN, A. e TAKAYAMA, F., Superweakly Interacting Massive Particles, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 011302.
- [64] COVI, L., ROSZKOWSKI, L., AUSTRI, R. R. e SMALL, M., Axino Dark Matter and the CMSSM, JHEP 0406 (2004) 003.
- [65] AMALDI, U., DE BOER, W. e FURSTENAU, H., Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP, Physics Letters B 260 (1991) 447-455.
- [66] ALEPH Collaboration, Absolute mass lower limit for the lightest neutralino of the MSSM from e^+e^- data at $\sqrt{s} = 209$ GeV, Physics Letters B 583 (2004) 247-263.

- [67] EDSJÖ, J. e GONDOLO, P., Neutralino Relic Density including Coannihilations, *Phys. Rev. D* 56 (1997) 1879-1894.
- [68] ELLIS, J., FALK, T. e OLIVE, K., Neutralino-Stau Coannihilation and the Cosmological Upper Limit on the Mass of the Lightest Supersymmetric Particle, *Phys. Lett. B* 444 (1998) 367-372.
- [69] CHUNG, D. J. H., KOLB, E. W. e RIOTTO, A., Superheavy dark matter, *Phys. Rev. D* 59 (1999) 023501.
- [70] BEREZINSKY, V., KACHELRIESS, M. e VILENKIN, A., Ultra-high energy cosmic rays without GZK cut, *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 4302-4305.
- [71] BLASI, P., DICK, R. e KOLB, E. W., Ultra-high energy cosmic rays from annihilation of superheavy dark matter, *Astropart. Phys.* 18 (2002) 57-66.
- [72] KUSENKO, A., KUZMIN, V., SHAPOSHNIKOV, M. e TINYAKOV, P. G., Experimental signatures of supersymmetric dark-matter Q-balls, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 3185-3188.
- [73] DE RUJULA, A., GLASHOW, S. L. e SARID, U., Charged Dark Matter, *Nuclear Physics B* 333 (1990) 173-194.
- [74] DAVE, R., SPERGEL, D. N., STEINHARDT, P. J., WANDEL, B. D., Halo Properties in Cosmological Simulations of Self-Interacting Cold Dark Matter, *Astrophys. J.* 547 (2001) 574-589.
- [75] HEBECKER, A. e WETTERICH, C., Natural quintessence?, *Physics Letters B* 497 (2001) 281-288.
- [76] CARR, J., LAMANNA, G. e LAVALL, J., Indirect detection of dark matter, *Reports on Progress in Physics* 69 (2006) 2475-2512.

- [77] EDSJÖ, J., BERGSTRÖM, L. e ULLIO, P., Cosmic antiprotons as a probe for supersymmetric dark matter?, *Astrophys. Journal* 526 (1999) 215-235.
- [78] BOEHM, C., ORLOFF, J. e SALATI, P., Light dark matter annihilations into two photons, *Physics Letters B* 641 (2006) 247-253.
- [79] ITZYKSON, C. e ZUBER, J. B., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore, 1985.