Universidade Estadual de Londrina

JOICE CAROLINE SANDER PIEROBON GOMES

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:
CENÁRIOS PARA APRENDIZAGEM

Londrina
2023

JOICE CAROLINE SANDER PIEROBON GOMES

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

CENÁRIOS PARA APRENDIZAGEM

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof.ª Dr.ª Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

J74a Gomes, Joice Caroline Sander Pierobon.
Atividades de modelagem matemática nos anos finais do Ensino Fundamental : cenários para aprendizagem / Joice Caroline Sander Pierobon Gomes. - Londrina, 2023.
146 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Aprendizagem - Tese. 2. Modelagem matemática - Tese. 3. Anos finais do Ensino Fundamental - Tese. 4. Ambiente escolar - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU 51

JOICE CAROLINE SANDER PIEROBON GOMES

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:
CENÁRIOS PARA APRENDIZAGEM

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientador: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profª. Drª. Eleni Bisognin
Universidade Franciscana de Santa Maria – UNIFRA

____
Profª. Drª. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

____
Profª. Drª. Leônia Gabardo Negrelli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

____
Profª. Drª. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

Londrina, 15 de agosto de 2023.

Dedico este trabalho aos que mais amo:

À minha mãe Maria que é meu exemplo de vida, força e coragem.

À minha filha Mariana por ser um anjo enviado por Deus para iluminar minha vida.

Ao meu esposo Marcelo pelo incentivo e pelo amor que compartilhamos.

RESUMO

GOMES, Joice Caroline Sander Pierobon. **Atividades de modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental:** cenários para aprendizagem. 2023. 143 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

Esta pesquisa tem como foco compreender a aprendizagem no contexto de atividades de modelagem matemática, bem como as implicações desse processo quando as atividades são desenvolvidas no âmbito da sala de aula. Sendo assim, o objetivo é investigar contribuições da modelagem matemática para aprendizagem dos estudantes. Para compor os dados empíricos da pesquisa foram desenvolvidas atividades de modelagem em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede particular de ensino localizada em uma cidade no norte do Paraná ao longo do ano letivo de 2022. Os dados para a pesquisa foram compostos por gravações dos diálogos das aulas, captura de imagens, relatórios entregues pelos grupos e questionários. O referencial teórico para a pesquisa articula aprendizagem e modelagem matemática. Caracteriza-se modelagem matemática como alternativa pedagógica e seus encaminhamentos na sala de aula, bem como a denifição de aprendizagem apresentada por Knud Illeris, "qualquer processo que, em organismos vivos, leve a uma mudança permanente em capacidades e que não se deva unicamente ao amadurecimento biológico ou ao envelhecimento. Desta definição de aprendizagem, o modelo proposto por esse autor, caracteriza processos (internos e externos) e dimensões da aprendizagem (interação, conteúdo e incentivo) que estão interconectadas em qualquer situação de aprendizagem. Com uso da metodologia de pesquisa qualitativa, deliniamentos foram traçados com relação ao desenvolvimento, coleta e organização dos dados para as análises. Após a organização dos dados, cenas significativas foram selecionadas a fim de evidenciar manifestações de aprendizagens. A partir das análises realizadas, evidenciou-se que as atividades de modelagem matemática proporcionam condições de aprendizagens por meio de três aspectos fundamentais sendo essa associada à funcionalidade, sensibilidade e socialidade.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Anos finais do Ensino Fundamental; Dimensões da aprendizagem.

ABSTRACT

GOMES, Joice Caroline Sander Pierobon. **Mathematical modeling activities in the final years of elementary school:** scenarios for learning. 2023. 143 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

This research focuses on understanding learning in the context of mathematical modeling activities, as well as the implications of this process when activities are developed within the classroom. Therefore, the objective is to investigate contributions of mathematical modeling to student learning. To compose the empirical data of the research, modeling activities were developed in a class of the ninth grade of Elementary School in a private school located in a city in the north of Paraná during the academic year of 2022. The data for the research consisted of recordings of class dialogues, image capture, reports delivered by groups and questionnaires. The theoretical framework for the research articulates learning and mathematical modeling. Mathematical modeling is characterized as a pedagogical alternative and its referrals in the classroom, as well as the definition of learning presented by Knud Illeris, "any process that, in living organisms, leads to a permanent change in capabilities and that is not solely due to the biological maturation or ageing. From this definition of learning, the model proposed by this author characterizes processes (internal and external) and dimensions of learning (interaction, content and incentive) that are interconnected in any learning situation. Using the qualitative research methodology, delineations were drawn regarding the development, collection and organization of data for the analyses. After organizing the data, significant scenes were selected in order to show manifestations of learning. Based on the analyses, it was evident that mathematical modeling activities provide learning conditions through three fundamental aspects, which are associated with functionality, sensitivity and sociality.

Key-words: Mathematical Modeling; Final years of Elementary School; Learning dimensions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. *INTRODUÇÃO*

1.1 PRIMEIROS PASSOS

Toda pesquisa é movida por uma inquietação, pela procura de preenchimento de alguma lacuna sobre determinado tema. Por vezes os motivos que levam a influenciar esse processo de escolha estão relacionados às experiências anteriores, concepções, conhecimentos, entre outros. Conhecer os motivos que culminaram na escrita do relatório de pesquisa, descrevem uma revisão de quem sou[1].

Ao final do ano de 2018 concluí a pesquisa intitulada *Professoras dos anos iniciais em práticas de modelagem matemática* no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Nesse processo de pesquisa (GOMES, 2018) investiguei como as professoras dos Anos Iniciais lidam com a modelagem matemática nas diferentes etapas do processo de formação continuada. Como consequência da pesquisa, ficou evidente que o uso de atividades de modelagem contribuiu significativamente para a formação das professoras participantes, visto que puderam ressignificar, aprender e reaprender conceitos matemáticos, à medida que estas professoras agiam de maneira colaborativa nas diferentes etapas do processo de formação.

No ano de 2019, iniciei o doutorado como aluna regular do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL). Com gratidão pude continuar investigando sobre modelagem matemática[2], além de outras vertentes articuladas a essa temática ao participar do GRUPEMMAT - Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática - UEL.

Durante minha jornada de investigação, tive oportunidade de explorar conceitos e realizar uma pesquisa empírica em minha sala de aula, investigando contribuições da modelagem matemática para a aprendizagem dos estudantes. Confesso que ser orientada tanto no mestrado como no doutorado por pesquisadoras renomadas na área da

---

[1] O uso da primeira pessoa do singular é devido a reflexões pessoais da pesquisadora. Isso irá acontecer em alguns momentos no decorrer do relatório de pesquisa.

[2] Neste relatório, o uso das expressões modelagem matemática e modelagem apresentam o mesmo significado.

modelagem matemática encheu-me de orgulho e acrescentou um valor fundamental à elaboração deste relatório de pesquisa.

1.2 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA DE DOUTORADO

Ao longo da história, vem sendo observado interesse na investigação de questões relacionadas à aprendizagem, de modo que tem sido objeto de estudo por parte de diversos pesquisadores (ILLERIS, 2013; VYGOTSKY, 2001, MOREIRA, 2011). No século XX houve avanços no estudo da relação entre o indivíduo e seu ambiente. Esses estudos, baseados em experimentos e observações contribuíram para o surgimento de um campo de estudo que, posteriormente, se desenvolveu em torno de diferentes teorias cognitivistas e teorias de aprendizagem, enfatizando os processos de construção e desenvolvimento do conhecimento pelo aprendiz.

De acordo com Moreira (2011), uma teoria de aprendizagem pode ser vista como uma construção humana que busca interpretar circunstâncias e condições relacionadas à aprendizagem, representando uma perspectiva particular de ver as coisas, explicando-as a partir dessas condições. Assim, cada teoria

> [...] representa o ponto de vista de um ator/pesquisador sobre como interpretar o tema aprendizagem, quais as variáveis independentes, dependentes e intervenientes. Tenta explicar o que é aprendizagem, porque funciona e como funciona (MOREIRA, 2011, p. 12).

Na literatura são reconhecidas algumas teorias de aprendizagem que influenciaram a compreensão e a prática educacional ao longo dos anos. O Behaviorismo associado a pesquisadores como Ivan Pavlov, John Broadus Watson e Burrhus Frederic Skinner, enfatiza a aprendizagem como um processo de estímulo e resposta. Por outro lado, a teoria do construtivismo de Jean Piaget e a sociocultural de Lev Vygotsky, ressaltam o papel ativo do aprendiz na construção do conhecimento a partir de suas próprias experiências (PIAGET, 1973) e interações sociais (VYGOTSKY, 2001).

Do ponto de vista cognitivo, teorias de aprendizagem defendidas por Jerome Bruner e David Ausubel, destacam a importância dos processos mentais na aprendizagem. Nesta teoria, a aprendizagem é associada à construção de significado e essa acontece por meio da associação de novas informações a estruturas de conhecimento preexistentes (AUSUBEL, 2003). Reconhecida como teoria da aprendizagem significativa, essa teoria enfatiza a conexão do novo conhecimento com o conhecimento prévio do aprendiz (MOREIRA, 2011).

Por outro viés, David Kolb e John Dewey enfatizam que a experiência e a reflexão são indispensáveis no processo de aprendizagem. De acordo com a teoria da aprendizagem experiencial, a aprendizagem ocorre por meio da ação, da experimentação, da reflexão e da aplicação prática do conhecimento adquirido (MOREIRA, 2011).

Considerando as diferentes teorias, torna-se desafiador escolher a abordagem mais apropriada, seja isoladamente ou de forma combinada, para lidar com questões relacionadas à aprendizagem. Há teorias que abordam apenas uma área específica, o que não as torna necessariamente erradas ou inválidas, pois podem ser estudadas de maneira independente. No entanto, isso também implica que elas não abrangem completamente todas as condições necessárias para uma compreensão abrangente da aprendizagem.

Knud Illeris, pesquisador e professor contemporâneo no campo da aprendizagem, argumenta que obter uma visão abrangente da compreensão atual sobre o termo é algo complexo. Segundo o autor, ao longo dos anos, diversas teorias de aprendizagem buscam caracterizá-la como a aquisição de conhecimentos e habilidades. No entanto, o conceito de aprendizagem abrange um escopo muito mais amplo, incluindo dimensões cognitivas, emocionais e sociais (ILLERIS, 2013).

Com base em seus estudos, incluindo pesquisas empíricas, Illeris (2007, 2013) propõe uma definição de aprendizagem, buscando sintetizar ideias convergentes. De acordo com o autor, a aprendizagem pode ser definida como "qualquer processo que, em organismos vivos, leve a uma mudança permanente em capacidades e que não se deva unicamente ao amadurecimento biológico ou ao envelhecimento" (ILLERIS, 2013, p. 16). Essa definição ressalta que a aprendizagem vai além do desenvolvimento natural do organismo e envolve processos que levam a mudanças permanentes nas habilidades e competências dos indivíduos.

Em sua definição, Illeris (2013) abrange uma variedade de aspectos psicológicos, emocionais e sociais da aprendizagem. Ele reconhece que a aprendizagem envolve tanto processos internos, quanto processos externos. O autor estabelece três dimensões fundamentais da aprendizagem: a dimensão do incentivo, a dimensão do conteúdo e a dimensão da interação. Essas dimensões desempenham um papel essencial em qualquer processo de aprendizagem, influenciando a motivação dos aprendizes, o conteúdo do que está sendo aprendido e as interações entre os indivíduos e o ambiente de aprendizagem.

Conforme apontado por Scheiner (2020), na área de Educação Matemática, a busca por aspectos relativos à aprendizagem tem crescido nos últimos anos. Em geral, essas investigações visam, aprofundar entendimentos sobre como os estudantes aprendem matemática (SCHEINER, 2015; SCHEINER; PINTO, 2018); explorar abordagens pedagógicas que promovam a aprendizagem (BRITO, 2018; SOUZA, 2012); identificar e abordar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes (SANTI; SBARAGLI, 2008); além de fornecer *insights* para os professores buscando melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática (BORROMEO FERRI, 2012).

Quando se trata de abordagens pedagógicas que visam contribuir para a aprendizagem dos estudantes, a modelagem matemática apresenta uma dinâmica que vai além do simples desenvolvimento de técnicas de resolução. De acordo com Swan *et al.* (2007), atividades de modelagem envolvem o uso de diferentes tipos de representações matemáticas e estimulam a comunicação entre os estudantes por meio dessas representações, oferecendo a possibilidade da constituição de soluções alternativas em relação ao que se pretende estudar na atividade.

Ao trabalhar com modelagem matemática, os estudantes são desafiados a explorar e compreender conceitos matemáticos em um contexto real, o que os leva a refletir sobre diferentes soluções. Incentivando a interação entre os estudantes, a troca de ideias e a discussão de estratégias, permitem que construam conhecimentos de forma colaborativa (CASTRO, 2022).

Seguindo a concepção apresentada por Almeida, Silva e Vertuan (2012), considera-se a modelagem matemática na sala de aula como uma alternativa pedagógica na qual os estudantes investigam uma situação-problema que não é matemática. Nesse processo, busca-se na matemática os recursos necessários para resolver o problema investigado.

Neste entendimento, o foco não está apenas na criação do modelo matemático, mas nos encaminhamentos e procedimentos que estão envolvidos no desenvolvimento das atividades. Portanto, a modelagem matemática está relacionada à uma possibilidade, uma maneira, de conduzir uma aula em que se ensina e se visa a aprendizagem.

Considerando a importância da implementação de atividades de modelagem em diferentes níveis de escolaridade, importantes *insights* teóricos têm sido o foco de pesquisadores e grupos de pesquisa, com propósitos relacionados à caracterização de elementos da modelagem matemática, ampliação do conhecimento sobre modelagem, bem como as conexões entre a modelagem e outras teorias.

Dentre essas pesquisas, pode-se destacar os trabalhos realizados no âmbito do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), coordenados pela orientadora da presente pesquisa. Entre eles pode-se considerar a modelagem matemática articulada à aprendizagem (BRITO, 2018; SILVA, 2018); à autenticidade (OMODEI, 2021); à metacognição (VERTUAN, 2013; CASTRO, 2022); ao desenvolvimento de competências (ZANIN, 2021); aos usos da linguagem (SOUZA, 2017; SEKI, 2019); a semiótica (SILVA, 2013; RAMOS, 2020), entre outros.

Quando o foco é a aprendizagem na modelagem, há na literatura, pesquisas que têm se dedicado a investigar as condições que favorecem sua ocorrência. Em geral, essas pesquisas abordam diferentes aspectos, abrangendo tanto os elementos cognitivos (SOUZA, 2021; RAMÍREZ-MONTES; HENRIQUES; CARREIRA, 2021), quanto as interações do indivíduo com o ambiente, pessoas e objetos (BORSSOI; SILVA; FERRUZZI, 2021; LITTIG *et al*., 2018). Além disso, há uma consideração dos aspectos culturais e do uso da linguagem (SOUZA, 2012; TORTOLA, 2016, SOUZA; BARBOSA, 2019), bem como a associação de elementos provenientes dessas diferentes abordagens (BRITO, 2018; SILVA, 2018; BRITO; ALMEIDA, 2021).

O estudo realizado por Brito (2018) se concentra na investigação de como os estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental aprendem geometria em práticas de modelagem. O autor adota uma abordagem fenomenológica para analisar e compreender esse processo de aprendizagem. A partir de atividades desenvolvidas, *insights* sobre a aprendizagem da geometria foram agrupados em núcleos de ideias.

O primeiro núcleo refere-se à temporalidade na constituição da aprendizagem. Isso implica compreender como a aprendizagem ocorre ao longo do tempo e como os estudantes constroem seu conhecimento em geometria por meio das práticas de modelagem, ou seja, a aprendizagem não é um evento isolado, mas um processo contínuo e dinâmico. O segundo núcleo destacado por Brito (2018) está relacionado aos modos de proceder e à abertura para a aprendizagem, ou seja, aprender geometria em práticas de modelagem está relacionado às estratégias que os estudantes utilizam para resolver o problema e à capacidade de se adaptar e se abrir para novos conhecimentos e perspectivas.

O terceiro núcleo diz respeito à vivência da relação eu/outro/nós na aprendizagem, ou seja, refere-se à interação que se dá entre estudantes, professor e grupo de estudantes durante as práticas de modelagem. Por fim, o quarto núcleo evidenciado, aborda a conexão entre geometria/tema na aprendizagem, o que implica compreender como os estudantes estabelecem relações entre os conceitos e temas na atividade de modelagem.

Na pesquisa realizada por Silva (2012), o objetivo foi identificar que aprendizagem matemática se constitui na modelagem matemática. A partir do quadro teórico sobre aprendizagem matemática e do entendimento filosófico do uso da linguagem, foram realizados estudos teóricos e empíricos. A partir da pesquisa, foi possível identificar que a aprendizagem matemática, no contexto da modelagem, pode ser compreendida como o desenvolvimento da capacidade de utilizar a linguagem matemática de maneira adequada. Além disso, observou-se que os estudantes tomam como referência a produção discursiva dos professores como um modelo para identificar as regras relativas à matemática escolar que devem ser aplicadas na abordagem das situações-problema (SILVA, 2012).

Em levantamentos realizados sobre concepções de aprendizagem na modelagem (CRUZ; ARAÚJO; CAMPOS, 2011; CRUZ; ARAÚJO, 2017, GOMES; KOWALEK; ALMEIDA, 2022), identifica-se que muitos dos trabalhos utilizam a concepção de aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003) para definir aprendizagem em práticas de modelagem. Essa escolha se baseia na observação de características específicas dessa teoria durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, tais como a presença de subsunçores, o uso de materiais potencialmente significativos e a predisposição dos estudantes para aprender (SILVA, 2018; VENÂNCIO; KATO, 2009).

Deste modo, há de se reconhecer que o interesse de investigar o processo de aprendizagem na Educação Matemática, em especial sobre abordagens da modelagem matemática, tem aumentado nos últimos anos. Entretanto, ainda há um vasto campo de investigações a ser explorado no que se refere à relação entre modelagem e aprendizagem. Essas pesquisas podem oferecer *insights* valiosos e contribuir para o aprimoramento das práticas dos professores em sala de aula (TOMAZ; DAVID, 2008).

Nesse contexto, a presente pesquisa se volta à aprendizagem sob a perspectiva de Illeris (2013) e modelagem matemática, enquanto alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), concentrando-se de forma específica nas contribuições que a modelagem matemática proporciona aos estudantes do 9º do Ensino Fundamental quando desenvolvem atividades dessa natureza.

No contexto dos anos finais do Ensino Fundamental, o 9º ano é marcado por uma série de mudanças cognitivas, emocionais e sociais. No aspecto social, os estudantes têm aulas ministradas por professores específicos das disciplinas. No âmbito comportamental, estão em um período de transição entre a infância e a adolescência, o que pode influenciar em seu comportamento e suas interações sociais. No aspecto cognitivo, enfrentam um período de transição e abstração de conceitos, no qual são desafiados a desenvolver habilidades de pensamento mais complexas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tratando do Ensino Fundamental, aponta que, embora a matemática seja, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, na qual as demonstrações se apoiam em um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da matemática. Dessa forma, o ensino de matemática

> [...] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, [...]. (BRASIL, 2017, p. 263).

A BNCC (BRASIL, 2017, p. 264) destaca também que é compromisso do Ensino Fundamental "o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, [...] utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas". Neste sentido, para que esse compromisso possa ser cumprido, o mesmo documento sugere que:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2017, p. 264).

O documento destaca a importância de proporcionar aos estudantes experiências matemáticas, de modo que os conhecimentos matemáticos sejam percebidos em suas vidas por meio de suas próprias ações. Para alcançar esse objetivo, é importante que, em sala de aula, se utilize uma abordagem que promova a compreensão dos conceitos matemáticos ao contexto do dia a dia dos estudantes.

Em resumo, embora se reconheça a importância que as atividades de modelagem desempenham no processo de aprendizagem dos estudantes, ainda são poucos os estudos que visam discutir como esse processo atua no desenvolvimento da atividade, e quais contribuições podem ser evidenciadas. Diante dessas lacunas, apresenta-se os objetivos da pesquisa realizada.

1.3 OBJETIVO DA PESQUISA

A partir dos conceitos de Illeris sobre a aprendizagem como um processo complexo e contínuo, no qual o aprendiz adquire e desenvolve novos conhecimentos, habilidades e capacidades por meio de influências internas e externas que englobam aspectos cognitivos, emocionais e sociais (ILLERIS, 2007, 2013), o foco desta pesquisa reside na compreensão da aprendizagem no contexto da modelagem matemática, bem como as implicações desse processo na implementação da modelagem matemática em sala de aula.

Com o objetivo de *investigar as contribuições da modelagem matemática para a aprendizagem dos estudantes*, realizou-se um estudo empírico de natureza qualitativa, no qual foram desenvolvidas, ao longo do ano de 2022, atividades de modelagem matemática no contexto das aulas regulares de matemática, com uma turma composta por 32 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, sob a orientação da professora-pesquisadora.

1.4 ESTRUTURA DO RELATÓRIO DA PESQUISA DE DOUTORADO

O relatório da pesquisa de doutorado está estruturado em sete capítulos. Após a introdução, o Capítulo 2 aborda o referencial teórico para modelagem matemática. No Capítulo 3, são apresentados aspectos teóricos relativos à aprendizagem e, de forma particular, a constituição teórica proposta por Illeris (2007, 2013). O contexto do desenvolvimento da pesquisa e os aspectos metodológicos são descritos no Capítulo 4, que descreve o ambiente de coleta de dados, os participantes da pesquisa e a metodologia utilizada nas análises.

No capítulo 5, são detalhadas as atividades de modelagem matemática realizadas pelos grupos de estudantes analisados, denominados de cenários de aprendizagem. O capítulo 6 corresponde a análise específica das atividades de modelagem, em que foram selecionadas cenas significativas nas quais os estudantes manifestaram indicativos de aprendizagens.

No capítulo 7, são apresentadas as considerações finais, retomando o percurso investigativo da pesquisa, destacando os resultados, contribuições e limitações para o campo da Educação Matemática. Em seguida, são listadas as referências bibliográficas que embasaram o estudo, incluindo o termo de consentimento e questionários utilizados durante a coleta de dados.

2. *MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*

2.1 O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA

Com suas raízes advindas das contribuições de matemáticos e pesquisadores da Matemática Aplicada, a modelagem matemática, desde às últimas décadas possui diversas caracterizações na área da Educação Matemática, tanto nacionalmente, quanto internacionalmente (NISS et al, 2007; BARBOSA, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Dentre essas diferentes caracterizações, uma característica comum está associada à ideia de resolver problemas do mundo real por meio da Matemática, ou seja, a modelagem matemática pode ser entendida como um processo de busca por representações ou soluções que vão além dos problemas internos à matemática (MAAß, 2010; BASSANEZI, 2002).

Conforme destacado por Meyer (2020), no mundo real, as perguntas não são apresentadas de forma pronta e não existe um manual que indique qual abordagem matemática deve ser utilizada para resolvê-las. Muitas vezes, o processo de construção de uma resposta exige uma relação entre idas e vindas até que a solução faça sentido. Além disso, ao investigar as características de uma situação problemática do mundo real e formalizá-la em linguagem matemática, é fundamental buscar o uso de conhecimentos matemáticos.

Dessa forma, ao possibilitar a compreensão, explicação e resolução de um problema do mundo real em termos matemáticos, a modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade que tem como ponto de partida um problema, advindo de uma situação do mundo real, para o qual se busca entendimento por meio da matemática (ENGLISH, 2003; BORROMEO FERRI, 2018). A atividade de modelagem matemática se inicia em uma situação real e se finaliza em uma situação final, que consiste na solução do problema identificado (ALMEIDA, 2010).

Considerando que atividades de modelagem matemática podem ser inseridas no âmbito da sala de aula, podem se constituir distintas práticas de modelagem matemática na sala de aula considerando interesses do professor e particularidades da situação investigada.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E A SALA DE AULA

Nos últimos anos, muitos pesquisadores defendem a inclusão da modelagem matemática em sala de aula em diferentes níveis de escolaridade (BRITO, 2018; ALMEIDA; BRITO 2021; ALMEIDA, 2022; CASTRO, 2022; OMODEI, 2021). Kaiser e Stender (2013) consideram que essa inclusão está associada ao uso de diferentes perspectivas e objetivos. De acordo com Barbosa e Santos (2007),

> [...] propósitos diferentes implicam em diferenças nas formas de organizar e conduzir as atividades de Modelagem. Isso nos força a refletirmos sobre as maneiras como as práticas de sala de aula representam ou constituem perspectivas mais amplas sobre Modelagem Matemática (BARBOSA; SANTOS, 2007, p. 2).

Com base nessas ideias, Kaiser e Sriraman (2006) propõem uma classificação de seis perspectivas de modelagem matemática, que são categorizadas de acordo com seus objetivos centrais. Entre essas perspectivas estão: a modelagem realista ou aplicada; a modelagem contextual; a modelagem educacional, subdividida em modelagem didática e modelagem conceitual; a modelagem sociocrítica; e a modelagem teórica ou epistemológica.

Posteriormente, Blum (2015) apresenta quatro objetivos para a inclusão da modelagem matemática no currículo e nas salas de aula. Esses objetivos são: o objetivo "pragmático", que busca compreender e dominar situações do mundo real por meio da modelagem; o objetivo "formativo", que visa desenvolver as competências dos alunos nas atividades de modelagem matemática; o objetivo "cultural", que tem como propósito destacar as relações entre a matemática e o mundo extramatemático; e o objetivo "psicológico", que busca despertar o interesse e motivar os alunos em sua aprendizagem da matemática.

Todavia, é relevante ressaltar que a implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula pode abranger várias perspectivas e objetivos simultaneamente. Nesse sentido, conhecê-los e refletir sobre os aspectos relevantes em cada um deles, contribui para potencializar sua implementação, pois a maneira como o professor conduz a atividade direciona os objetivos e os aspectos relacionados a ela, visando atender interesses e necessidades em situações de ensino e aprendizagem (ALMEIDA; VERTUAN, 2015).

Segundo Kaiser (2020), embora diferentes perspectivas revelem diferentes usos da modelagem matemática, de modo geral, elas têm em comum a maneira como compreendem o processo de modelagem matemática, sendo uma relação entre a matemática e o resto do mundo. Para Bassanezi (2002), a "modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (p. 16). Ou seja, a modelagem matemática em sala de aula, pode ser entendida como uma alternativa pedagógica na qual, a partir de uma situação não necessariamente matemática, emerge um problema a ser resolvido por meio da Matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

A modelagem matemática pode ser utilizada como uma possibilidade para investigar fenômenos da realidade por meio da matemática, o que pode contribuir para diferentes aprendizagens (SOUZA, 2012; BRITO, 2018). Quando estão inseridos em uma atividade, os estudantes são incentivados a desenvolver habilidades e conhecimentos. Por exemplo, ao identificar problemas autênticos, formular questões, coletar dados relevantes, propor hipóteses e desenvolver modelos matemáticos, eles têm a oportunidade de explorar, analisar e interpretar situações da realidade, utilizando ferramentas matemáticas que contribuirão para a construção de conhecimentos bem como propiciar um desenvolvimento crítico e reflexivo frente às situações da realidade e à matemática.

Nesse contexto, a atividade de modelagem matemática oferece ao professor uma oportunidade de apoiar e motivar a compreensão de métodos e conteúdos matemáticos. É um meio de oportunizar o estudo de novos conceitos, bem como uma oportunidade de aplicar seus conhecimentos para lidar com situações reais, provenientes de diversos contextos (BLUM, 2002; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Cabe considerar neste relatório, a modelagem matemática do ponto de vista "pragmático" e "psicológico" ao passo que em sala de aula, a atividade proporciona compreender e dominar situações do mundo real por meio da matemática, as atividades contribuem para despertar o interesse e motivar os estudantes em sua aprendizagem.

Para Galbraith (2012) há duas abordagens com que a modelagem matemática pode ser incluída nas aulas: a modelagem como veículo e como conteúdo. Como veículo, as atividades de modelagem servem como base para as necessidades curriculares, sendo incorporada em um contexto para auxiliar na aprendizagem do conteúdo matemático (GALBRAITH; STILLMAN; BROWN, 2017). Nesse ponto de vista, "algumas partes de um processo de modelagem, ou aspectos relacionados à modelagem, são usados para aprimorar a aprendizagem de conceitos matemáticos ou processos que fazem parte da matemática curricular" (GALBRAITH, 2012, p. 13).

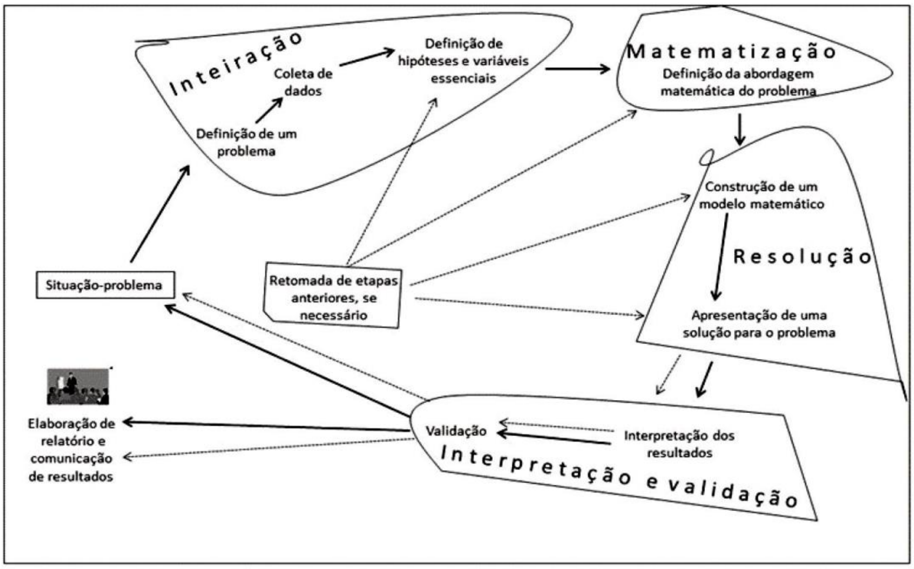
Como conteúdo, a modelagem matemática, "se propõe a capacitar os alunos a usar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais e dar continuidade ao desenvolvimento dessa capacidade ao longo do tempo" (GALBRAITH, 2012, p. 13), com o intuito de capacitá-los em lidar com situações-problema.

Seja como conteúdo ou seja como veículo, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em contextos educacionais, permite que diferentes procedimentos sejam realizados na busca a envolver os estudantes para o *fazer* modelagem.

Conforme sugerem Almeida e Vertuan (2015), os procedimentos realizados durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem ser caracterizados mediante cinco fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos dados e validação. Essas fases representam os procedimentos e ações e costumam ser representados, em geral, por meio de esquemas denominados, ciclos de modelagem.

A Figura 1 representa o processo de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Nesse ciclo, as setas pontilhadas representam as ações dos estudantes durante a atividade, enquanto as setas contínuas indicam as fases do processo. Essas setas destacam a dinamicidade e flexibilidade desse processo, visto que as etapas podem ser retomadas e revisitadas sempre que necessário (ALMEIDA; CASTRO; SILVA, 2021). Apesar de não ocorrerem de forma linear, as fases do ciclo funcionam como diretrizes para representar os passos percorridos pelos estudantes no desenvolvimento dessas atividades.

Figura 1: Fases da modelagem matemática



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021, p. 386).

O uso de ciclos em atividades de modelagem constitui um importante campo de pesquisa, devido à capacidade de ilustrar, cognitivamente, as ações dos estudantes ao desenvolver atividades dessa natureza, colaborando para investigar os processos de ensino e de aprendizagem (BORROMEO FERRI, 2006; ALMEIDA; SILVA, 2021).

A fase de Inteiração, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, envolve a busca por informações sobre o tema escolhido e a coleta de dados relevantes (ALMEIDA; VERTUAN, 2015). Nessa fase, é identificada a problemática a ser investigada. Conforme D'Amore (2007), uma "situação problemática" é o contexto no qual o problema apresenta significado, e, de forma resumida, leva à elaboração do problema, que, uma vez compreendido, desencadeia soluções que satisfazem a problemática (D'AMORE, 2007, p. 289).

Cabe destacar que na situação problemática pode acontecer a formulação de diferentes problemas[3] relacionados a um mesmo contexto. Kaiser e Schwarz (2010) defendem que definir o problema a ser solucionado é a parte mais importante e mais ambiciosa de um processo de modelagem matemática e que, em geral, é negligenciada em aulas de matemática.

Daí a importância da fase de inteiração, que está relacionada ao ato de inteirar-se. Nessa fase há o primeiro contato com as características e especificidades da situação que se pretende estudar. De modo geral, o objetivo nesta fase é compreender o problema e organizar informações. Niss (2013) destaca que ao coletar dados e informações relevantes para auxiliar na resolução do problema, o modelador constrói uma representação mental da situação problemática, que o auxiliará em suas estratégias de resolução. Embora a fase de inteiração seja o contato inicial do modelador com a situação-problema, o levantamento de informações pode ocorrer sempre que necessário, durante todo o desenvolvimento da atividade.

Após a coleta dos dados e informações necessários para se inteirar sobre a situação-problema, inicia-se a fase de matematização. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16), esta fase é caracterizada pela "transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática)" e segundo Almeida (2018) essa transição é mediada pelo conhecimento matemático e extramatemático.

Durante essa fase, ocorrem ações como levantamento de hipóteses, definição de variáveis e simplificação de informações, que orientam os modeladores na obtenção de

[3] Nessa pesquisa considera-se como problema uma situação para a qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para sua resolução.

um modelo matemático. Nesse contexto, a hipótese é definida como uma suposição bem fundamentada dentro do contexto do problema e se coloca no caminho para indicar direções (ALMEIDA; VERTUAN, 2015, p. 22).

Almeida e Silva (2015) destacam que o sucesso ou insucesso dos modeladores para uma atividade de modelagem matemática está diretamente associado à fase de matematização, visto que é nessa fase que se define como ocorre a relação entre a situação-problema e os procedimentos matemáticos que são utilizados durante a fase de resolução da atividade. Portanto a matematização pode ser considerada como um processo dinâmico e se aperfeiçoa na medida em que o modelador se familiariza com a atividades de modelagem (BORROMEO FERRI, 2006).

Na fase de resolução, tem-se como objetivo a construção de um modelo matemático. O modelo matemático pode ser entendido como "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma um objeto estudado" (BASSANEZZI, 2002, p. 20). Essa compreensão leva a considerar o modelo como um retrato ou uma simulação de um fenômeno. Nesse sentido, o modelo é uma construção matemática abstrata, simplificada, relacionada a uma parte da realidade e criada para um propósito específico, isto é, são modelos que imitam a realidade usando a linguagem da matemática (CASTRO, 2022).

Para Almeida e Vertuan (2015), o modelo matemático se traduz por "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático" (p. 2).

Tortola (2016) considera que as atividades de modelagem matemática, frequentemente, envolvem uma variedade de relações matemáticas que podem ser expressas de diferentes maneiras, sendo elas, pictóricas, textuais, tabulares, algébricas, entre outras. No entanto, o autor enfatiza que o fazer modelagem não pode se reduzir a produção de modelos matemáticos, visto que outras ações, como definir hipóteses, fazer simplificações, coletar dados são tão necessárias quanto elaborar um modelo que seja representativo para a situação. Os modelos matemáticos estão vinculados à matemática utilizada por aqueles que os formulam (TORTOLA, 2012).

Nessa fase, o modelo matemático construído pode permitir a descrição da situação-problema, realização de previsões ou a condução da tomada de decisões, tendo em vista o problema. Em outras palavras, o modelo matemático proporciona o uso de diferentes conhecimentos matemáticos, dando espaço à criatividade do modelador. Além disso, em sala de aula, os modelos podem ser comparados com os produzidos por outros, permitindo a análise dos aspectos relevantes da situação, além de verificar a utilidade dos modelos produzidos a fim de responder à(s) pergunta(s) formulada(s) sobre o problema investigado.

Geralmente, é nessa fase que os alunos recorrem ao uso de ferramentas tecnológicas e computacionais para simular, sintetizar ou construir modelos precisos e eficientes. Cabe ressaltar, segundo Omodei (2021), que a fase de resolução não é a que finaliza a atividade, uma vez que somente os resultados matemáticos, apesar de importantes, não são suficientes para uma atividade de modelagem, visto que se a realidade do resultado matemático não é questionada pelos estudantes, então a modelagem matemática não faz sentido.

As fases em que se apresentam a avaliação dos resultados é denominada por Almeida e Vertuan (2015) como interpretação dos resultados e validação. Nestas fases ocorrem um processo avaliativo para analisar a resposta obtida para o problema, por meio do modelo matemático em que se deve considerar os procedimentos matemáticos utilizados e o quanto a representação obtida se adequa à representação da situação.

Nesse sentido, validar consiste em aceitar ou não o modelo matemático, sempre levando em consideração as características da situação-problema, os critérios (hipóteses, simplificações) que foram atribuídos, procedimentos matemáticos (conceitos, fórmulas, teoremas) e adequação do modelo matemático para a situação investigada.

Caso seja evidenciado que o modelo matemático obtido não foi capaz de atender às necessidades da situação, é preciso retornar o processo em alguma de suas fases anteriores. Nesse contexto, um modelo matemático não deve ser considerado como definitivo, podendo sempre ser melhorado, pois, dependerá do modelador que desenvolve a atividade, do tempo disponível e dos recursos disponíveis e procedimentos utilizados para melhor confronto com a realidade.

Segundo Brown e Edwards (2017, p. 187), "[...] a comunicação dos alunos acerca de suas soluções para atividades de modelagem, dá uma visão da profundidade de suas compreensões matemáticas e como eles utilizam o conhecimento prévio do contexto de uma atividade na sua solução". Todavia, em modelagem,

> [...] um resultado que poderia ser considerado errado não equivale naturalmente a uma nota baixa, a um risco com caneta vermelha. Vale sim, como um resultado testado, rejeitado e que pode indicar novos caminhos e estratégias, novas necessidades e rumos. Erros assim levam, muitas vezes, a

> uma nova compreensão do problema original e também do modelo matemático (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 58).

De modo geral, são as ações do professor e dos estudantes que determinam o movimento e a dinâmica no desenvolvimento das atividades de modelagem, essas ações, podem ser mais intensas ou menos intensas. Assim, ao fazer modelagem na sala de aula é necessário que o professor conheça seus estudantes e que esteja preparado para desenvolver a atividade, por outro lado, é preciso que os estudantes sejam capacitados para *fazer* modelagem.

De fato, desenvolver atividades de modelagem matemática em sala de aula, pode ser considerado um desafio, tanto para os estudantes, que de certa forma não estão habituados a conduzir atividade, quanto para professores que, por vezes, mantém o controle padrão da condução. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 24), consideram que a incorporação de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula “deve levar em consideração especificidades do contexto educacional, dando atenção aos professores, aos alunos e à própria estrutura escolar”.

Neste sentido, levando em consideração a importância do engajamento dos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, Almeida, Silva e Vertuan (2012) consideram à inserção gradativa de atividades de modelagem na sala de aula. Para esses autores, “[...] as atividades devem se configurar como um convite que vai se firmando e se confirmando no decorrer de experiências” (p. 26). A essa inserção Almeida, Silva e Vertuan (2012) definem como momentos de familiarização.

Nas atividades de primeiro momento de familiarização, o professor é o responsável por apresentar a situação-problema, bem como o problema já definido para ser investigado. As ações dos estudantes, como a definição de variáveis, formulação de hipóteses, simplificação, transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo, geralmente são orientadas de forma mais intensa pelo professor (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Em atividades de segundo momento, o professor ainda desempenha um papel na escolha da temática a ser investigada, porém, com orientação menos intensa. Nesse momento, o professor permite que os estudantes definam o problema a ser investigado, coletem dados, informações e desenvolvam um modelo matemático válido e representativo para a situação investigada. O professor atua como facilitador, fornecendo suporte e orientações conforme necessário (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

> Nestes termos, a orientação e a colaboração do professor, mais intensa no primeiro e segundo momentos, confere ao aluno confiança, independência e autoridade para delimitar uma situação-problema e buscar, por meio da matemática, uma solução (ALMEIDA; VERTUAN, 2012, p. 29).

As atividades de terceiro momento, requerem dos estudantes a responsabilidade pela condução da atividade. Trabalhando em grupos, eles são encarregados de identificar uma situação-problema a ser investigada, coletar dados e informações, obter um modelo matemático e realizar sua validação. Nesse momento, o papel do professor é minimizado, intervindo apenas quando necessário, como no caso de conceitos ou procedimentos matemáticos que ainda não são conhecidos pelos estudantes ou se eles estiverem seguindo um caminho que não os levará a resultados significativos (SCHWARZ, 2010).

Conforme pesquisas já realizadas (ALMEIDA; DIAS, 2007; SILVA, 2013; SOUSA, 2017; CASTRO, 2022), ao longo dos momentos de familiarização nas atividades de modelagem matemática, é possível observar o progresso dos estudantes relacionados à autonomia e confiança. Isso ocorre à medida que a orientação do professor, inicialmente intensa, como no primeiro momento, torna-se mais moderada no segundo e terceiro momento. Nesse contexto, o processo de ensino e aprendizagem na modelagem deixa de ocorrer apenas no sentido unidirecional do professor para o estudante, passando a ser o resultado da interação do estudante com os demais colegas e com professor no ambiente que ela acontece (BERTONE; BASSANEZI; JAFELICE, 2014).

O professor, ao propor uma atividade de modelagem, inicia a "condução" tendo uma intencionalidade quanto à aprendizagem dos estudantes. Com o desenrolar da(s) atividade(s), essa condução passa a ser do estudante que, ao tomar consciência dos conceitos matemáticos que conhece, das estratégias que pode utilizar frente a um problema específico e dos modos como se dá sua aprendizagem, conduz a atividade a sua maneira, alternando os papéis em um movimento de escuta e troca de experiências.

Com base nessas reflexões, é possível perceber que a modelagem matemática na sala de aula se distingue dos problemas considerados "tradicionais", presentes nas aulas de matemática. Para Bassanezi (2015),

> No ensino tradicional, o objetivo de estudo se apresenta quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência predeterminada, com um objetivo final muito claro que, muitas vezes, nada mais é que "cumprir o programa da disciplina"! Ora, ensinar a pensar matematicamente é muito mais que isso. Portanto, é imprescindível mudar métodos e buscar processos alternativos para transmissão e aquisição de conhecimentos (BASSANEZI, 2015, p. 11).

Neste sentido, é necessário que os professores estejam cientes da necessidade de desenvolver nos estudantes novas competências e habilidades (BRASIL, 2017). Isso implica em uma postura pedagógica que estimule a autonomia, a investigação, a reflexão e o trabalho colaborativo dos alunos, permitindo-lhes serem sujeitos da sua própria aprendizagem.

Neste sentido, *fazer* modelagem, vai para além de manipular dados fornecidos, ou aplicar algoritmos para obter sua solução como, por exemplo, em problemas de livros didáticos. Nas atividades de modelagem matemática, os estudantes são desafiados a trabalhar matematicamente em uma situação problemática real, permitindo investigar, analisar e interpretar fenômenos da realidade por meio da matemática (BORROMEO FERRI, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Assim, em contraste com uma abordagem de ensino considerada "tradicional", as atividades de modelagem têm como objetivo despertar o interesse dos estudantes e promover a construção de um conhecimento matemático mais crítico e reflexivo. Por meio da modelagem matemática, os estudantes são incentivados a explorar e investigar situações reais, o que permite uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e sua aplicação prática. Além disso, essa abordagem estimula o pensamento criativo, a resolução de problemas e a capacidade de tomar decisões informadas, preparando os estudantes para enfrentar desafios do mundo real que exigem habilidades matemáticas (BORROMEO FERRI, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Conforme Bassanezi (2002, p. 16) destaca, “os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja ao mesmo tempo interessante, por ser útil, e estimulante, por ser fonte de prazer”. De fato, ao considerar que em uma atividade de modelagem matemática, as ações, os procedimentos e os conceitos matemáticos que os estudantes utilizam são constituídos por suas aprendizagens, busca-se no próximo tópico, uma definição para o termo aprendizagem, a fim de definir o quadro teórico que sustenta as análises da pesquisa empírica.

3. *SOBRE APRENDIZAGEM*

3.1 CONCEITO GERAL

Discussões relativas à aprendizagem têm se direcionado por diferentes correntes epistemológicas e filosóficas. Para dar início às considerações sobre aprendizagem, trazemos à baila definições e denominações para os termos “aprender” e “aprendizagem”. Segundo Cunha (2007), o significado etimológico do verbo *aprender* deriva do latim *apprehendere*, que diz respeito ao significado de apoderar-se, tomar posse, “levar para junto de si”. Essa definição ressalta a ideia de adquirir conhecimento e habilidades em uma compreensão mais profunda, permitindo ao indivíduo se apropriar e integrar novas informações e experiências em sua vida.

No dicionário filosófico Nicola Abbagnano, o termo *aprendizado* ou aprendizagem refere-se à “aquisição de uma técnica qualquer, simbólica, emotiva ou de comportamento, ou seja, mudança nas respostas de um organismo ao ambiente, que melhore tais respostas com vistas à conservação e ao desenvolvimento do próprio organismo” (ABBAGNANO, 2007, p. 75). Para o dicionário da língua portuguesa Houaiss e Villar (2009), *aprender* significa “adquirir conhecimento (de)”, “adquirir habilidade prática (em)”, “vir a ter melhor compreensão (de algo)”.

Ao relacionar essas definições, percebe-se uma característica comum a todas elas, que é a consideração do indivíduo como um agente ativo na construção do conhecimento a partir de um contexto. Essa característica enfatiza o papel ativo do aprendiz na assimilação e incorporação de novos conhecimentos, a partir de suas experiências e interações com o ambiente como base para o processo de aprendizagem.

Neste contexto, as teorias de aprendizagem existentes, buscam investigar o aprendiz e as relações associadas a ele (ILLERIS, 2013). Fornecem um arcabouço teórico que auxilia educadores e pesquisadores a compreender e explicar, por exemplo, como as pessoas adquirem conhecimento, desenvolvem habilidades e modificam seu comportamento por meio da aprendizagem.

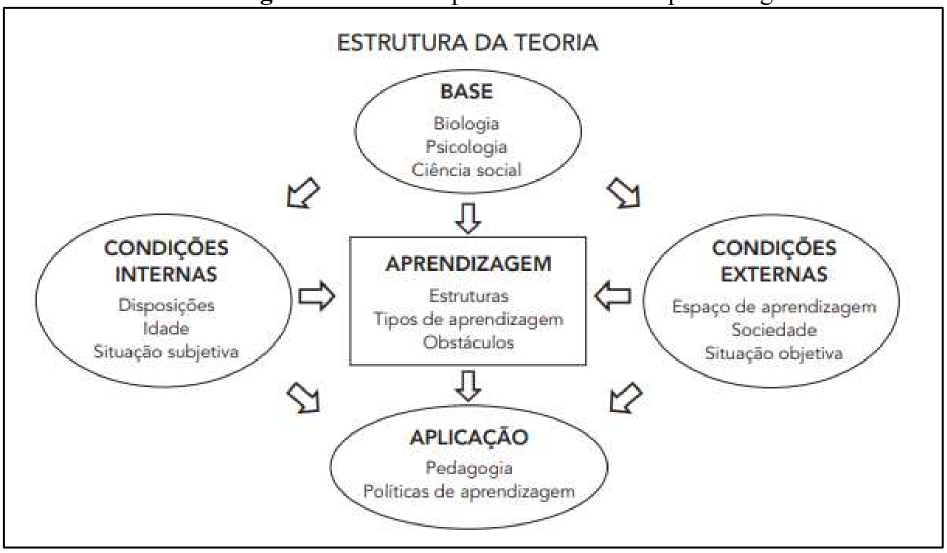
3.2 TEORIA DE APRENDIZAGEM PROPOSTA POR KNUD ILLERIS

Desde as últimas décadas do século XIX, foram propostas teorias e visões da aprendizagem por diferentes correntes epistemológicas e filosóficas. Dentre essas teorias, destaca-se a compreensão proposta por Knud Illeris, cientista e professor, nascido em 1939 na Dinamarca, que desde a década de 1970 vem desenvolvendo pesquisas na área da aprendizagem.

Ao elaborar sua teoria, Illeris se baseia em uma ampla seleção de construções teóricas sobre aprendizagem e incorpora uma visão holística e mais complexa desse processo. Para Illeris (2007), a aprendizagem pode ser definida como: “qualquer processo que, em organismos vivos, leve a uma mudança permanente em capacidades e que não se deva unicamente ao amadurecimento biológico ou ao envelhecimento” (ILLERIS, 2007, p. 3).

De acordo com essa definição, a aprendizagem é considerada um processo abrangente e contínuo, no qual as pessoas adquirem novos conhecimentos, habilidades e competências ao longo de sua vida, resultando em mudanças permanentes em suas capacidades. Em sua estrutura de teorização da aprendizagem (Figura 2), Illeris (2013) apresenta as principais áreas envolvidas e as conexões existentes que influenciam e são influenciadas no processo de aprendizagem.

Figura 2: Estrutura para uma teoria de aprendizagem



Fonte: Illeris (2013, p. 16).

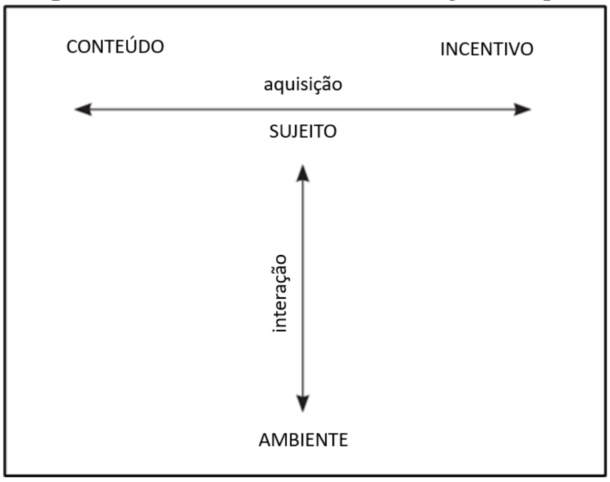
Na parte superior, encontra-se a base da teoria da aprendizagem, isto é, as áreas de conhecimento e compreensão que fundamentam, segundo Illeris (2013), o desenvolvimento de uma construção teórica abrangente e coerente. Por ser um processo complexo envolve aspectos psicológicos, biológicos e sociais que estão presentes em qualquer forma de aprendizagem.

No centro da estrutura encontra-se a aprendizagem associada a aspectos que a favorecem ou a dificultam. Do lado direito são destacadas as condições externas para a aprendizagem que incluem o ambiente social, cultural, material; do lado esquerdo estão as condições internas de elaboração e de aquisição que estão envolvidas diretamente no processo de aprendizagem. Por fim, na parte inferior da estrutura estão os contextos em que se utiliza uma teoria de aprendizagem, sendo elas no ambiente escolar, trabalho ou diferentes comunidades.

Para compreender a complexidade do processo de aprendizagem, Illeris (2013) elabora um modelo para explicar a possibilidade de aprendizagem (Figura 3) que busca descrever os processos fundamentais que ocorrem em qualquer situação específica de aprendizagem. Segundo o autor, a primeira condição é entender que "toda aprendizagem acarreta a integração de dois processos muito diferentes: um processo externo de interação entre o indivíduo e seu ambiente social, cultural ou material, e um processo psicológico interno de elaboração e aquisição" (ILLERIS, 2013, p. 19).

Nesse modelo, o autor identifica e caracteriza três dimensões em que se apoia a aprendizagem e são interligadas pela aquisição e interação (Figura 3). Estas dimensões são: o conteúdo, o incentivo e o ambiente.

Figura 3 : Processos fundamentais da aprendizagem



Fonte: Adaptado de Illeris (2013, p. 19).

A dimensão do conteúdo está relacionada ao desenvolvimento de conhecimentos e habilidades; a dimensão do incentivo, por sua vez, envolve a motivação, emoção e a volição. Por fim, a dimensão da interação ou ambiente diz respeito à participação e à integração. Segundo o autor,

> A dimensão do conteúdo diz respeito àquilo que é aprendido. Isso costuma ser descrito como conhecimento e habilidades, mas muitas outras questões, como opiniões, insights, significados, posturas, valores, modos de agir, métodos, estratégias, etc. podem estar envolvidos como conteúdo da aprendizagem e contribuir para construir a compreensão e a capacidade do aprendiz. A busca do indivíduo envolve construir significado e capacidade para lidar com os desafios da vida prática e, assim, desenvolver uma funcionalidade pessoal geral.
>
> A dimensão do incentivo proporciona e direciona a energia mental necessária para o processo de aprendizagem. Ela compreende elementos como sentimentos, emoções, motivação e volição. Sua função, em última análise, é garantir o equilíbrio mental contínuo do indivíduo e, assim, desenvolver simultaneamente uma sensibilidade pessoal (ILLERIS, 2013, p. 18).

Essas duas dimensões são iniciadas por impulsos que estabelecem a integração entre o sujeito e o ambiente em que ele se encontra, com o propósito de gerar o processo interno de elaboração e aquisição de conhecimento. Dessa forma,

> [...] o conteúdo da aprendizagem está sempre, por assim dizer, "obcecado" com os incentivos em jogo (p. ex., se a aprendizagem é motivada por desejo, interesse, necessidade ou compulsão). De maneira correspondente, os incentivos sempre são influenciados pelo conteúdo, por exemplo, novas informações podem mudar a condição do incentivo (ILLERIS, 2013, p. 18).

A dimensão da interação, por sua vez, proporciona os impulsos iniciais para o processo de aprendizagem. Esses impulsos podem se manifestar de diversas formas, como:

> [...] percepção, transmissão, experiência, imitação, atividade, participação, etc. (Illeris, 2007, p. 100). Ela serve à integração pessoal em comunidades e na sociedade e, assim, também constrói a socialidade do indivíduo. Todavia, essa construção ocorre necessariamente por meio das duas outras dimensões (ILLERIS, 2013, p. 19).

Dessa forma, a dimensão da interação não apenas propicia os impulsos iniciais do processo de aprendizagem, que são externos, mas também se incrementa e se desenvolve por meio dessa articulação com as dimensões do conteúdo e do incentivo, que são processos internos. É um modelo em que a interação impulsiona o processo de aprendizagem, enquanto, ao mesmo tempo, se fortalece e se potencializa por meio da interconexão com as outras dimensões.

No modelo proposto por Illeris (Figura 3), os processos internos e externos são representados por seta de duplo sentido. A seta na vertical indica o processo interno de interação entre o ambiente e o sujeito (aprendiz). Por sua vez, a seta na horizontal está relacionada ao processo psicológico individual do aprendiz, chamado de aquisição, que associa o conteúdo a ser aprendido com o incentivo do aprendiz. Nesse processo, duas funções psicológicas estão interligadas: a função de administrar o conteúdo da aprendizagem e a função de fornecer e direcionar a energia mental necessária para impulsionar o processo (Illeris, 2013, p. 17). O argumento de sua compreensão é que a aprendizagem é um processo dinâmico no qual são levados em consideração os aspectos individuais (aquisição) e sociais (interação).

Portanto, a aprendizagem não se restringe à aquisição de conhecimentos, mas também em mudanças permanentes nas capacidades do aprendiz que se desenvolvem por meio da sua interação com o ambiente. Para Illeris (2013), o conceito de "conteúdo", corresponde a uma concepção ampla da palavra, incorporando conteúdos cognitivos, procedimentais e atitudinais. Dessa forma, à medida que o aprendiz tem a capacidade de agir adequadamente nos diversos contextos em que está inserido, são desenvolvidos conhecimentos e habilidades que lhe permite enfrentar os desafios da vida prática e desenvolver sua *funcionalidade* pessoal.

Cabe destacar que, em grande parte, teorias mais tradicionais da aprendizagem têm se debruçado de maneira mais específica à dimensão do conteúdo (cognitiva). No entanto, Illeris (2013) destaca que no processo interno de aquisição, para que habilidades e conhecimentos sejam desenvolvidos, também deve-se levar em consideração os fatores afetivos que culminaram nesse desenvolvimento, ou não. Neste sentido, a dimensão do incentivo se relaciona à motivação, emoção e volição.

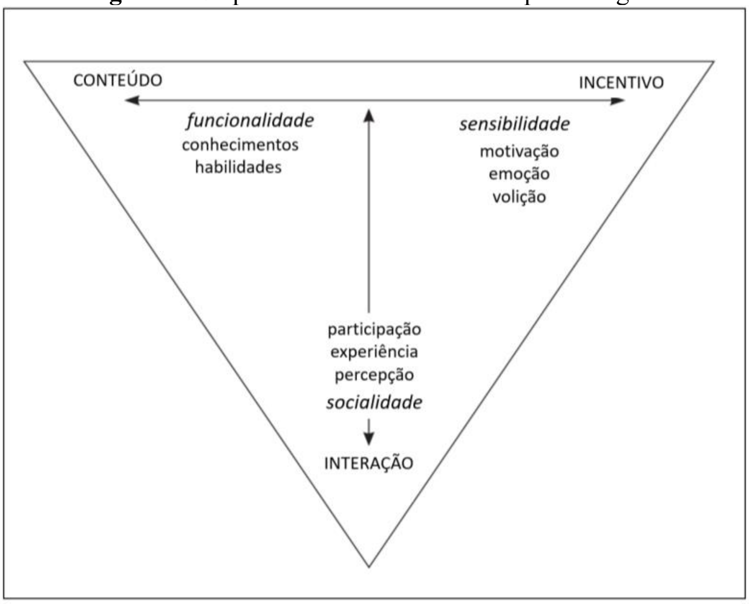
Illeris (2007) esclarece que o incentivo, proporciona e direciona a energia mental necessária para a aprendizagem. Trata-se de elementos afetivos que condicionam o aprendiz a desenvolver uma *sensibilidade* em relação a si mesmo e ao ambiente, pois ao buscar por novas informações desencadeadas por meio de incerteza, curiosidade ou necessidade, novos conhecimentos ou novas habilidades são desenvolvidas. Por exemplo, uma nova compreensão ou uma habilidade aprimorada pode alterar os padrões afetivos em relação a si mesmo e ao ambiente.

O conteúdo que se aprende é, portanto, marcado pela natureza do engajamento que mobiliza a energia mental necessária para que o processo de aprendizagem ocorra, seja, por exemplo, uma questão de envolvimento prazeroso ou necessidade. Por outro lado, a dimensão do incentivo também é influenciada pelo conteúdo de que trata a aprendizagem. Por exemplo, uma nova compreensão ou uma nova habilidade pode alterar padrões emocionais, motivacionais e também, volitivos do aprendiz.

Finalmente, a dimensão da interação ocorre fundamentalmente por intermédio das dimensões conteúdo e incentivo (cognitivo – emocional). Esta dimensão assegura os estímulos necessários que dão início ao processo de aprendizagem, podendo acontecer em diversas formas, como atividade, experiência, inteligência, transmissão, repetição, participação, entre outros (ILLERIS, 2013, p. 18). A dimensão da interação, promove a integração do aprendiz com o ambiente, desenvolvendo sua *socialidade*, ou seja, a capacidade de se engajar e agir adequadamente nas relações sociais.

Para ilustrar os processos e as dimensões da aprendizagem, Illeris (2013) apresenta um novo modelo triangular (Figura 4) em que acrescenta os componentes gerais relacionados à cada dimensão. Desse modo, o triângulo representa o que pode ser descrito como o campo de tensão da aprendizagem, estendido entre o desenvolvimento da *funcionalidade*, *sensibilidade* e *socialidade*.

Figura 4: Os processos e dimensões da aprendizagem



Fonte: Adaptado de Illeris (2013, p. 19).

Desse modo, para Illeris (2013), o conceito de aprendizagem está alicerçado em três categorias essenciais: a *funcionalidade*, relacionada ao conteúdo da aprendizagem e à compreensão do aprendiz; a *sensibilidade*, que acentua a importância do incentivo; e a *socialidade* voltada à interação com o outro e com o ambiente, num fazer sentido para o aprendiz. O Quadro 1 apresenta os aspectos essenciais de cada uma das dimensões da aprendizagem que, em síntese, estão sempre envolvidas em qualquer situação de aprendizagem.

Quadro 1: As três dimensões da aprendizagem

Dimensão	**Objetivo**	**Componentes**	**Função**
Do conteúdo	Contribuir para construir a compreensão e capacidade do aprendiz.	Conhecimentos e habilidades (opiniões, *insights*, significados, posturas, estratégicas, métodos, etc.)	Construir significado e capacidade para lidar com desafios da vida prática e assim desenvolver uma *funcionalidade* pessoal geral.
Do incentivo	Proporcionar e direcionar a energia mental necessária para o processo de aprendizagem.	Sentimentos, motivação, emoção, volição.	Garantir o equilíbrio mental contínuo do indivíduo e assim desenvolver uma *sensibilidade* pessoal.
Da interação	Possibilitar os impulsos que dão início ao processo de aprendizagem.	Participação, integração,	Servir à integração pessoal em comunidades e na sociedade, construindo a *socialidade* do indivíduo.

Fonte: Adaptado de Illeris (2013, p. 15-19).

As dimensões estão intrinsecamente interconectadas por processos internos e externos que se relacionam entre si, o que permite uma compreensão mais abrangente e contemporânea do processo de aprendizagem. Para compreender como tais processos e dimensões podem ser identificados no ambiente educacional, Illeris (2013) ilustra uma situação de aprendizagem possível de ocorrer em sala de aula.

> [...] Durante uma aula de química na sala de aula, o professor está explicando um processo químico. Os alunos deveriam estar ouvindo e talvez fazendo perguntas para garantir que entenderam a explicação corretamente. Os estudantes, desse modo, são envolvidos em um processo de interação. Todavia, ao mesmo tempo, eles devem absorver ou aprender aquilo que o professor está ensinando, isto é, relacionar psicologicamente o que é ensinado com o que já devem ter aprendido. O resultado deve ser que eles consigam lembrar aquilo que lhes ensinaram e, sob certas condições, reproduzi-lo, aplicá-lo e envolvê-lo na nova aprendizagem. Porém, às vezes, ou para alguns estudantes, o processo de aprendizagem não ocorre como pretendido, podendo haver erros ou desvios de muitos modos diferentes. Talvez a interação não funcione porque a explicação do professor não é suficientemente boa ou possa ser até incoerente, ou talvez haja perturbações na situação. Nesse caso, a explicação será absorvida apenas parcialmente ou de maneira incorreta, e a aprendizagem resultante será insuficiente. Todavia, o processo de aquisição dos estudantes também pode ser inadequado, por exemplo, por falta de concentração, e isso também leva à deterioração da aprendizagem resultante. Ou pode haver erros

> ou insuficiências na aprendizagem prévia de certos estudantes, tornando-os incapazes de entender a explicação do professor e, portanto, de aprender o que está sendo ensinado. Grande parte disso indica que a aquisição não é uma questão apenas cognitiva. Também existe outra área ou função relacionada com as posturas dos estudantes para a sua aprendizagem pretendida: seus interesses e mobilização de energia mental, isto é, a dimensão do incentivo. Em uma situação escolar, o foco, geralmente, está no conteúdo da aprendizagem; no caso descrito, está na compreensão dos alunos sobre a natureza do processo químico em questão. Todavia, a função de incentivo também é crucial, isto é, como a situação é vivida, que tipos de sentimentos e motivações estão envolvidos e, assim, a natureza e intensidade da energia mental que é mobilizada. O valor e a durabilidade da aprendizagem resultante estão intimamente relacionados com a dimensão do incentivo ao processo de aprendizagem. Além disso, o conteúdo e o incentivo dependem crucialmente do processo de interação entre o indivíduo e o ambiente social, cultural e material. Se a interação na aula de química não for adequada e aceitável para os estudantes, a aprendizagem sofrerá, ou eles podem aprender algo totalmente diferente, por exemplo, uma impressão negativa do professor, de outros alunos, do tema em estudo ou da situação escolar em geral (ILLERIS, 2013, p. 20-21).

O exemplo de Illeris enfatiza que, em sala de aula, a aprendizagem se dá pela relação entre o cognitivo, o emocional e o social, e que é desta interação que o aprendiz constrói seu próprio conhecimento. Todavia, o professor necessita criar condições para que o aprendiz vivencie esse processo, possibilitando uma aprendizagem com significados. Em síntese, com a finalidade de criar condições favoráveis para a aprendizagem dos estudantes em que a *funcionalidade*, a *sensibilidade* e a *socialidade* possam ser evidenciadas em atividades de modelagem matemática, o percurso metodológico da pesquisa empírica é contextualizado no capítulo seguinte.

4 ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Com o objetivo de *investigar contribuições da modelagem matemática para a aprendizagem dos estudantes,* considerando o quadro teórico apresentado nos capítulos anteriores, neste capítulo são apresentados o contexto e os participantes envolvidos na pesquisa empírica, juntamente das atividades e os procedimentos para coleta e tratamento dos dados. O último tópico do capítulo aborda a metodologia empregada para as análises, explicitando os passos que foram percorridos em relação aos aspectos da modelagem que favorecem a aprendizagem dos estudantes.

4.1 O CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO E OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa empírica foi realizada no ano de 2022 em uma escola da rede particular de ensino localizada em uma cidade do norte do Paraná. Devido ao uso de material apostilado na escola, surgiu o interesse em investigar as contribuições da modelagem matemática para a aprendizagem dos estudantes no contexto do nono ano do Ensino Fundamental, turma na qual a professora-pesquisadora lecionava naquele momento.

Nessa turma, as aulas de matemática eram ministradas por duas professoras, incluindo a professora-pesquisadora, que era responsável por conduzir três das cinco aulas semanais de matemática. Para garantir uma organização, as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas em uma aula específica por semana. Para avaliar o desempenho dos estudantes, foram atribuídas notas às atividades de modelagem matemática, juntamente com outras duas avaliações formais. Essas notas foram consideradas para calcular a média trimestral.

No momento da coleta de dados, a turma era composta por 32 estudantes, com idades entre 13 e 15 anos. Para preservar suas identidades[4], na descrição e análise das atividades de modelagem matemática, foi atribuído um código a cada um deles. Optou-se por utilizar uma codificação, seguindo a listagem numérica por ordem alfabética da turma. Por exemplo, o código E_{12} corresponde ao estudante de número doze na lista. Além disso, nas transcrições dos diálogos, para se referir à professora-pesquisadora foi utilizada a codificação Prof.

[4] O responsáveis pelos estudantes foram esclarecidos quanto à investigação realizada e assinaram um termo de consentimento (anexo A).

Os estudantes dessa turma, durante as aulas de matemática, estavam habituados ao ensino que se baseava no uso do material didático. De acordo com as respostas do questionário inicial, eles não tinham conhecimento prévio sobre a modelagem matemática e não haviam realizado atividades dessa natureza anteriormente.

As atividades de modelagem foram conduzidas em grupos formados pelos próprios estudantes e sua composição foi mantida durante todas as atividades. Para referir-se aos grupos na descrição e análise, utilizou-se a notação G seguida do número correspondente a cada grupo (G1, G2, ..., G6). O Quadro 2 apresenta a organização dos grupos e seus respectivos membros.

Quadro 2: Organização dos grupos de estudantes

	Grupos					
	G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**
estudantes por grupo	E_{29} E_{14} E_{10}	E_{23} E_{5} E_{12} E_{30} E_{32} E_{19}	E_{3} E_{18} E_{15} E_{29} E_{21} E_{2}	E_{10} E_{22} E_{16} E_{28} E_{31} E_{26}	E_{31} E_{20} E_{9} E_{11} E_{1} E_{4}	E_{8} E_{6} E_{7} E_{13} E_{25}

Fonte: Autora, 2023

Com base na quantidade de grupos e nas atividades desenvolvidas, para análise, foi dada atenção especial a três grupos (G2, G3 e G4). Esses grupos foram selecionados levando em consideração as diferentes estratégias adotadas durante o desenvolvimento das atividades e a participação de todos os integrantes do grupo nas atividades.

4.2 As atividades desenvolvidas

Nesta pesquisa, adotou-se a configuração proposta por Blum e Niss (1991) e Bassanezi (2002), ressaltada por Almeida e Dias (2004), que permite a modificação das práticas convencionais de Matemática por meio da modelagem matemática. Essa abordagem estabelece uma conexão entre os conceitos matemáticos presentes nos currículos escolares e a realidade dos estudantes, em consonância com as assertivas de Galbraith (2012) no que se refere a abordagem da modelagem matemática como veículo. Segundo esses autores, não basta aos estudantes dominar os conhecimentos matemáticos, é necessário que eles sejam capazes de lidar com situações reais e extramatemáticas durante as aulas de Matemática.

Portanto, a justificativa para o uso da modelagem matemática nas aulas de Matemática do nono ano do Ensino Fundamental se deu pelo fato de ser uma alternativa para inserir aplicações da Matemática no currículo escolar sem, no entanto, comprometer as formalidades inerentes ao currículo, a fim de proporcionar aos estudantes desta etapa escolar, experiências com situações-problema do seu cotidiano e fomentar a aprendizagem mediante o estudo dessas situações.

Considerando que uma atividade de modelagem matemática pode ser abordada de diferentes maneiras e requer do estudante a capacidade de definir o problema, tomar decisões e validar e interpretar suas previsões com base em um modelo matemático, a professora-pesquisadora planejou que as atividades seriam desenvolvidas seguindo a caracterização dos momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Sendo assim, de acordo com o planejamento anual da professora-pesquisadora, ficou estabelecido que as atividades de modelagem matemática de primeiro e de segundo momento de familiarização seriam desenvolvidas nos dois primeiros trimestres letivos, respectivamente, sendo utilizada uma aula por semana para esse fim, enquanto às atividades do terceiro momento aconteceriam no terceiro trimestre. O Quadro 3 sintetiza as atividades de modelagem desenvolvidas durante a pesquisa.

Quadro 3: Temáticas referente às atividades desenvolvidas[5]

Temática da atividade	Momento de familiarização	Grupos envolvidos	Tempo de duração da atividade
Furtos de fio de cobre	1º momento	G1, G2, G3, G4, G5 e G6	2 horas/aula
Salto alto	2º momento	G1, G2*, G3*, G4, G5 e G6	5 horas/aula
Otimização do tamanho de uma embalagem		G1, G2*, G3, G4*, G5 e G6	4 horas/aula
Usinas de energia renováveis	3º momento	G1	4 horas/aula
Carro elétrico e carro à combustão		G2	4 horas/aula
Vale alimentação		G3*	4 horas/aula
Casos de Covid-19 na cidade de Apucarana		G4*	4 horas/aula
Trabalho em *home office*		G5	4 horas/aula

[5] O símbolo "*" corresponde as atividades de modelagem matemática descritas e analisadas nesse relatório.

Investimentos rentáveis		G6	4 horas/aula

Fonte: Professora, 2023

Durante as aulas de Matemática destinadas às atividades de modelagem, que ocorriam uma vez por semana com duração de 50 minutos, os estudantes seguiam os procedimentos característicos da modelagem matemática. Em grupos, eles se reuniam para discutir, expressar ideias, confrontar opiniões e definir estratégias que levariam a resultados a serem validados e interpretados diante do problema investigado.

Nesse processo, a professora-pesquisadora desempenhou o papel de orientadora, fornecendo suporte e acompanhamento aos grupos de estudantes quando necessário. Sua função era orientar os estudantes no processo de modelagem, garantindo que compreendessem os conceitos e desenvolvessem as habilidades necessárias para resolver os problemas propostos.

Para fins de descrição e análise, foram selecionadas quatro atividades realizadas pelos três grupos durante o segundo e terceiro momento de familiarização. Duas dessas atividades, intituladas "Salto Alto" e "Otimização do Tamanho de uma Embalagem", foram temáticas propostas pela professora-pesquisadora. Outras duas atividades “Auxílio Alimentação” e “Casos de Covid-19 na Cidade de Apucarana” foram temáticas sugeridas pelos próprios estudantes.

De modo geral, os estudantes tiveram a oportunidade de selecionar um problema para investigar, coletar informações relevantes, identificar variáveis e formular hipóteses, realizando simplificações quando necessário. Eles conduziram o processo de modelagem, buscando obter, deduzir e interpretar o modelo matemático encontrado. Além disso, os estudantes elaboraram relatórios para ser entregue e comunicaram os resultados à turma, promovendo a socialização das aprendizagens.

Apesar dos diferentes encaminhamentos adotados pelos grupos durante o desenvolvimento das atividades, por vezes resultando em soluções semelhantes, optou-se por descrever analisar os grupos de estudantes que apresentaram em suas resoluções, estratégias distintas. Dessa forma, serão descritos e analisados os grupos G2, G3 e G4 em diferentes momentos de familiarização com as atividades conforme mostra o Quadro 4.

Quadro 4: Atividades selecionadas para descrição e análise

Grupo de estudantes	Atividades selecionadas	Momento de familiarização
G2	Salto alto	2º momento

	Otimização do Tamanho de uma Embalagem	
G3	Salto Alto	2º momento
	Auxílio Alimentação	3º momento
G4	Otimização do Tamanho de uma Embalagem	2º momento
	Casos de Covid-19 na Cidade de Apucarana	3º momento

Fonte: Professora, 2023

É importante ressaltar que, durante o desenvolvimento das atividades, alguns conceitos matemáticos necessários para responder ao problema investigado não eram conhecidos pelos estudantes. Nesse caso foi preciso realizar a sistematização de conceitos. Essa sistematização ocorreu durante as demais aulas de matemática da semana, nas quais a professora-pesquisadora facilitou a integração entre os conteúdos do currículo e a situação real investigada nas atividades de modelagem.

4.3 SOBRE A COLETA E O TRATAMENTO DOS DADOS

Os dados utilizados para análise foram coletados por meio de diferentes instrumentos ao longo da pesquisa, incluindo gravações em áudio das aulas, captura de imagens durante o desenvolvimento das atividades, relatórios produzidos pelos estudantes e resposta aos questionários. A utilização de diferentes recursos para coleta de dados proporcionou uma compreensão abrangente e detalhada das aprendizagens dos estudantes durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

As gravações eram feitas por meio de dispositivos celulares colocados em cada grupo, enquanto as capturas de imagens eram realizadas pela professora-pesquisadora, que percorria os grupos para registrar ações dos estudantes durante o desenvolvimento das atividades. Esses registros forneceram material para a análise das interações e dos processos de aprendizagem ocorridos durante as atividades de modelagem matemática.

Ao final de cada atividade, os estudantes deveriam entregar relatórios, que poderiam ser manuscritos ou arquivos eletrônicos. Esses relatórios constituíram uma parte importante da avaliação trimestral e neles deveriam ser descritos os procedimentos adotados, desde a definição do problema, coleta de dados e informações até a obtenção, validação e interpretação do modelo matemático. Esses relatórios foram importantes para compreender a abordagem adotada por cada grupo, bem como os processos de raciocínio empregados pelos estudantes.

Após a conclusão das atividades, os estudantes responderam questionários[6] que abordavam tanto a situação, quanto os conceitos matemáticos envolvidos. O objetivo desses questionários era capturar, de forma individual, evidências de aprendizagens ocorridas durante o desenvolvimento das atividades. Os questionários foram uma ferramenta importante para complementar a análise dos relatórios e fornecer uma visão mais individual das aprendizagens dos estudantes.

Para organizar o material e tratar os dados coletado, foram transcritas as gravações de áudio, registrando os diálogos dos estudantes enquanto estavam envolvidos no desenvolvimento das atividades em grupo. Foram selecionados trechos dos diálogos transcritos, trechos dos relatórios entregues e respostas dos questionários. Essa seleção teve como objetivo identificar aspectos que evidenciam as aprendizagens decorrentes das atividades de modelagem matemática e que evidenciam compreensão, aplicação e reflexão sobre os conceitos matemáticos relacionados aos problemas investigados.

4.4 A NATUREZA DA PESQUISA E A ANÁLISE DOS DADOS

Nos últimos anos, as pesquisas qualitativas têm desempenhado um papel importante na área da Educação Matemática (BORBA, 2004). De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa busca compreender os significados e características das situações apresentadas pelos entrevistados ou participantes em relação a determinado contexto.

Realizar uma pesquisa qualitativa significa adotar procedimentos reconhecidos como qualitativos, que reconhecem que o conhecimento não é isento de valores, intenções e do contexto em que a pesquisa está inserida, pois como já dizia Paulo Freire, a escolha da pergunta em si já é um ato de subjetividade.

Dessa forma, uma pesquisa qualitativa "aprofunda-se no mundo dos significados" (MINAYO, 2009, p. 22), buscando uma análise relacionada ao universo dos sentidos, com o objetivo de compreender atitudes, ações, comportamentos, valores, crenças, motivações, aspirações, contextos e outras características intrínsecas aos objetos

[6] Os questionários constam nos anexos B, C, D e E desta pesquisa.

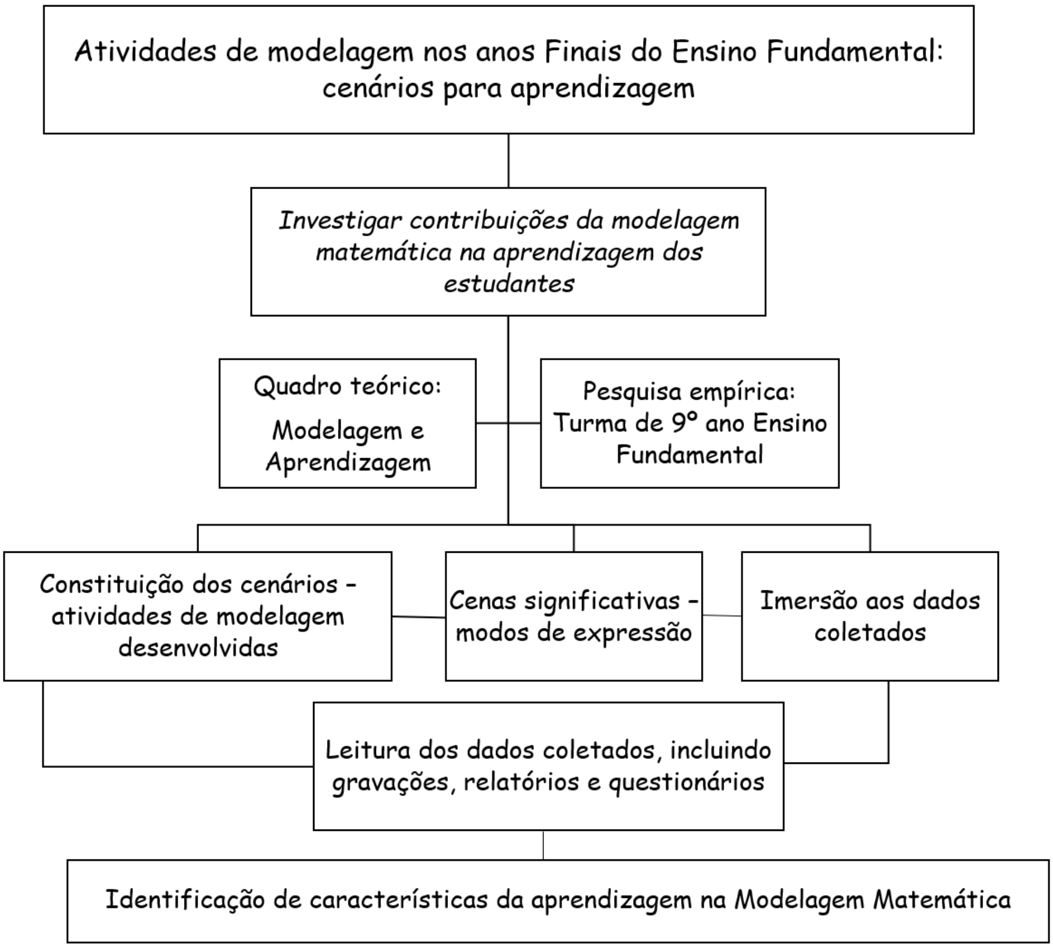
investigados. Para tanto, a pesquisa desenvolvida seguiu os princípios da pesquisa qualitativa, em particular um estudo de caso.

O estudo de caso busca examinar detalhadamente um ambiente, um sujeito ou uma situação específica e procura responder às perguntas "como" e "por quê" determinados fenômenos ocorrem. Esse tipo de estudo é útil quando o objetivo é investigar um fenômeno complexo e pouco compreendido, explorar relações de causa e efeito ou descrever e examinar processos em um contexto específico. É um método flexível e adaptável, que permite ao pesquisador explorar múltiplas perspectivas e obter uma compreensão abrangente do caso estudado (YIN, 2010).

Desta forma, para o processo de análise dos dados a primeira estratégia adotada foi realizar a transcrição dos registros em áudio. Em seguida, os cenários (atividades desenvolvidas) foram descritos, buscando coletar evidências de aprendizagem que permitissem identificar informações relevantes para a pesquisa e obter *insights*, conforme destacado por Miguel (2007). Após a descrição dos cenários, com base no referencial teórico adotado, foram selecionadas cenas significativas[7]que compõem o processo analítico dos dados. Esse processo foi indispensável, uma vez que, como afirmado por Zanelli (2002), os dados por si só não se expressam plenamente, eles devem ser conectados aos referenciais teóricos e pressupostos que orientam a pesquisa, a fim de construir um quadro consistente de análise. A figura 5, ilustra o processo de análise da pesquisa empírica e o capítulo 5 apresenta a constituição dos cenários das atividades.

[7] Nesta pesquisa, a compreensão para o termo cena está relacionada a um conjunto de elementos que conjuntamente indicam aprendizagens na atividade de modelagem.

Figura 5: Organização da pesquisa



Fonte: Pesquisadora, 2023.

5. *CENÁRIOS PARA APRENDIZAGEM: A PESQUISA EMPÍRICA*

Considerando cenário como sendo um espaço onde a história acontece, “ambiente que rodeia um acontecimento” (HOUAISS; VILLAR, 2009), são apresentados neste capítulo, atividades de modelagem matemática realizadas pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de *investigar as contribuições da modelagem matemática para aprendizagem dos estudantes*.

Para constituição desses cenários (Quadro 5), foram considerados os dados coletados durante o desenvolvimento das atividades, incluindo transcrições dos diálogos ocorridos em sala de aula, trechos dos relatórios elaborados pelos grupos e respostas aos questionários, os quais fornecem indicativo de aprendizagens.

O Cenário 1 descreve a atividade "Salto Alto", realizada pelos grupos G2 e G3. No Cenário 2, é apresentado o desenvolvimento da atividade "Otimização do tamanho de uma embalagem" pelos grupos G3 e G4. Os Cenários 3 e 4 correspondem às atividades "Vale alimentação" realizada pelo grupo G3 e "Casos de covid-19 na cidade de Apucarana" desenvolvida pelo grupo G4, conforme indicado no Quadro 5.

Quadro 5: Organização dos cenários

Cenários	Temática da atividade	Grupos de estudantes
Cenário 1	Salto alto	G2 e G3
Cenário 2	Otimização do tamanho de uma embalagem	G2 e G4
Cenário 3	Vale alimentação	G3
Cenário 4	Casos de covid-19 na cidade de Apucarana	G4

Fonte: Autora, 2023

5.1 CENÁRIO 1 – ATIVIDADE *SALTO ALTO*

A atividade relacionada à temática "Salto Alto" foi a segunda atividade de modelagem matemática realizada pelos estudantes. Essa temática foi planejada previamente pela professora-pesquisadora, que buscava explorar um fenômeno que despertasse o interesse dos estudantes e permitisse a aplicação de conceitos matemáticos em situações reais.

Considerando que o tema não é condição suficiente para que os estudantes se envolvam na investigação, a professora-pesquisadora estava consciente que deveria criar estratégias para provocar o interesse dos estudantes, e mantê-lo durante o desenvolvimento da atividade. Portanto, foram usadas estratégias de orientação, indicando possíveis caminhos, sugerindo procedimentos, esclarecendo dúvidas e oferecendo suporte quando necessário.

Para introduzir a temática aos estudantes, foi apresentado o texto com informações referentes à história dos calçados, em específico, os sapatos de salto alto, conforme descrito na Figura 6. Após a leitura do texto, os estudantes discutiram sobre o texto e sobre os diferentes tipos de saltos que existem, considerando saltos de diferentes modelos que alguns estudantes haviam trazido para a aula.

Figura 6: Texto entregue aos estudantes

Salto alto

Os pés, que são as principais "ferramentas" de locomoção humana e que sustentam e dão apoio ao corpo. Os calçados surgiram há milênios (Redação Terra, 2010; Valente, 2007), sendo que o mais antigo foi encontrado há 3.500a.C. (Figura 2). Sua necessidade decorreu da necessidade do homem de proteger e aquecer os pés (Gomes Filho, 2003). Mais tarde, quando se formavam as cidades, seu uso foi relacionado à diferenciação social, fazendo com que os mais nobres tivessem os melhores pares e os mais pobres muitas vezes não tinham possibilidade de tê-los.

Com o passar do tempo o calçado passou por uma mudança de valores e seu caráter funcional foi substituído pelo estético. Atualmente os diversos modelos de sapatos, além de estarem diretamente ligados às tendências da moda, carregam ainda significado semântico, como é o caso dos sapatos de salto alto. Para muitos, o uso do salto alto é considerado um sinônimo de elegância, feminilidade, sensualidade e beleza.

Fonte: Adaptado de Ergonomia Física Aplicada: O Caso do calçado de salto alto. Disponível em: 5668-Texto do artigo-15769-2-10-20141107.pdf

A partir das informações do texto e das discussões sobre os diferentes tipos de salto, a professora-pesquisadora questionou os grupos sobre possíveis investigações relacionadas à temática do salto alto. Surgiram então diversos problemas que poderiam ser explorados: qual é a altura máxima que um salto pode ter? Qual é a altura ideal do salto para uma pessoa que usa calçado tamanho 36? Qual é a porcentagem mínima do comprimento do pé que deve permanecer apoiada no chão para que uma pessoa tenha equilíbrio? Quais são os efeitos causados pelos sapatos de salto alto nas pessoas? Com essas questões em mente, os estudantes foram divididos em grupos e iniciaram a busca por informações e dados para solucionar alguns desses problemas.

Com o propósito de constituir o cenário para a temática "Salto Alto", são descritos os procedimentos adotados pelos grupos G2 e G3, que, apesar de terem abordado um problema semelhante, adotaram diferentes estratégias para resolvê-lo. Essa atividade foi desenvolvida no decorrer de cinco horas-aula.

Encaminhamentos do grupo G2 para o problema investigado: *Quão alto pode ser um salto*

O Grupo G2 era composto pelos estudantes E_{12}, E_5, E_{19}, E_{23}, E_{30} e E_{32} e o problema definido por esse grupo consiste em investigar *quão alto pode ser um salto.* Como não haviam levado sapatos de salto para aula, os estudantes utilizaram seus telefones celulares para coletar dados que poderiam ser relevantes para a resolução do problema.

Durante as pesquisas, os estudantes queriam de antemão, conhecer qual seria a maior altura[8] de um salto qualquer. No entanto, as pesquisas não apresentam valores exatos, mas sim, informações relativas à altura do salto que seriam mais indicadas para o uso considerando o conforto para os pés.

Além disso, analisavam algumas imagens que apareciam em suas pesquisas e notaram que ao utilizar um sapato de salto, o "peso" de uma pessoa não é dividido uniformemente em toda extensão do pé. Essa informação levou os estudantes a definir como hipótese que *quanto maior o salto, maior é a pressão exercida na parte anterior do pé (metatarso[9] e falanges[10])*, pois a angulação do pé em relação ao solo passa a ser maior.

Durante o desenvolvimento da atividade, dois estudantes ficaram responsáveis por anotar as informações enquanto os outros pesquisavam em seus celulares e compartilhavam com o grupo os dados relevantes que encontravam. Após a coleta de informações, o grupo decidiu simplificar a situação escolhendo um comprimento de pé específico para ser investigado. Assim, consideraram que o comprimento do pé de uma pessoa que calça sapato tamanho 36 seria de 23 centímetros aproximadamente.

Com as informações e definindo um tamanho de salto específico, os estudantes passaram a matematizar a situação. No entanto, o grupo não conseguia definir quais procedimentos poderiam adotar para resolver ao problema. Sendo assim, a professora-pesquisadora orientou-os a refletir sobre como poderiam fazer um esboço da situação, buscando destacar o que representa cada informação que haviam coletado (Figura 7).

[8] A altura do salto é medida em linha reta do calcanhar até o chão.
[9] Os metatarsos são cinco ossos longos e resistentes que ficam localizados no ante pé (região anterior aos dedos), que dão estabilidade na hora de caminhar ou correr.
[10] Ossos que formam os dedos das mãos e pés.

Figura 7: Esboço feito pelo grupo G2 para a investigação

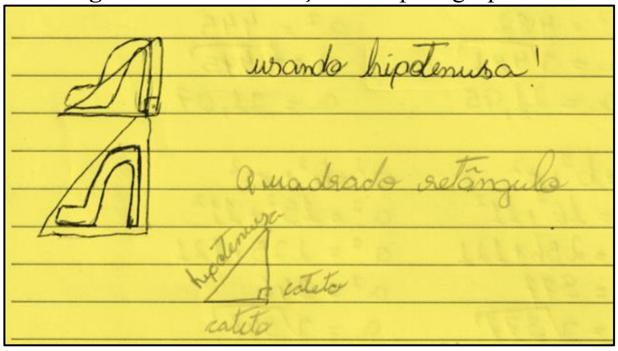
Fonte: Relatório entregue por G2

Após esboçarem a situação com uso de lápis e papel, os estudantes observaram que o desenho formado pelo salto poderia ser comparado a um triângulo. Decidiram que um dos lados do triângulo poderia estar relacionado ao comprimento do pé e que os outros dois estariam relacionados entre si, considerando que quanto maior o salto menor é a distância que há entre a altura do salto e a extremidade do pé.

Após esboçar a situação, os estudantes compreendiam que essa relação poderia ser investigada considerando uma figura triangular, mas não compreendiam como determinar as medidas dos lados dos triângulos conhecendo apenas alguma das medidas. Diante dessa dificuldade apresentada pelo grupo G2 para matematizar a situação, fez-se necessária a intervenção da professora-pesquisadora que durante as demais aulas de matemática da semana, apresentou aos estudantes a relação matemática conhecida como teorema de Pitágoras.

Na terceira aula destinada ao desenvolvimento da atividade, buscando determinar quão alto pode ser um salto, o grupo G2 decidiu, logo após tomarem conhecimento sobre o conceito relativo ao triângulo retângulo, fazer uso desse conceito para matematizar a situação, considerando um novo esboço em que o comprimento do pé seria a medida do lado maior do triângulo (hipotenusa) e os outros dois lados (catetos) seriam a distância entre a ponta do sapato até o salto e a altura do salto (Figura 8).

Figura 8: Matematização feita pelo grupo G2

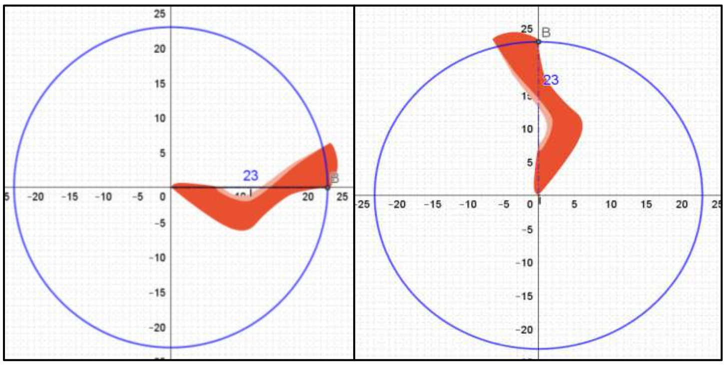


Fonte: relatório entregue por G2

Seguindo esses procedimentos, os estudantes perceberam que poderiam utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a altura máxima do salto para uma pessoa que usa sapato tamanho 36. Durante uma discussão entre os estudantes, o Grupo G2 chegou à conclusão, influenciado por um dos membros do grupo [E_{23}], de que a situação poderia ser matematizada usando um *software*. O estudante E_{23}, que tinha conhecimento e experiência com o *software* GeoGebra, solicitou permissão à professora-pesquisadora para usar seu notebook e mostrar aos outros membros do grupo como o software funcionava.

Após familiarizarem-se com alguns comandos do *software*, o Grupo decidiu construir uma representação da situação investigada no Geogebra. Eles seguiram os seguintes passos: inseriram uma circunferência com raio de 23 centímetros, representando o comprimento do pé de uma pessoa que usa sapato tamanho 36; adicionaram uma imagem de um sapato e marcaram um ponto B na posição onde o salto é fixado ao calçado; e inseriram um segmento para que, ao mover o ponto B dentro da circunferência, a altura do salto variasse entre $0 \leq x \leq 23$ (conforme ilustrado na Figura 9).

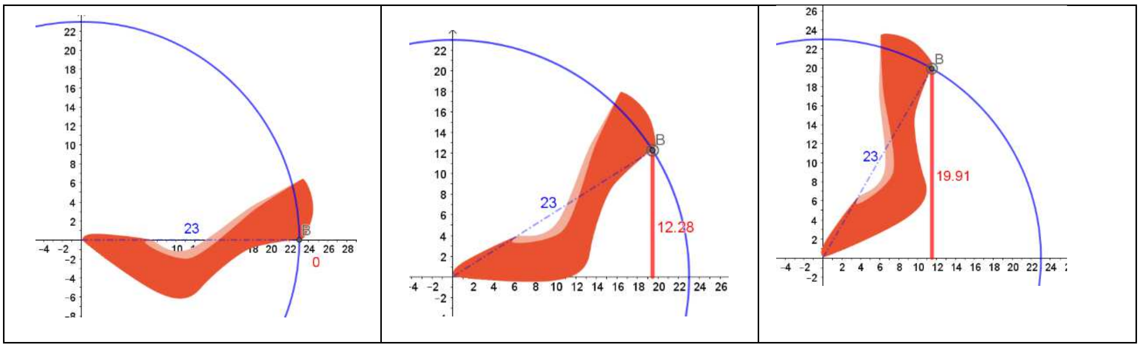
Figura 9: Construções inicias feita no *software* geogebra por G2



Fonte: Relatório do grupo G2

Após a construção realizada no *software*, os estudantes observaram que, ao manipular essa construção, poderiam encontrar a resposta para o problema investigado. Para isso, eles moviam o ponto B, que representava o salto do sapato, simulando diferentes alturas. Durante essa exploração, constataram que a hipótese estabelecida anteriormente, de que “quanto maior o salto, maior seria a pressão exercida na parte anterior do pé (falanges e metatarso)”, estava relacionada às medidas de um triângulo retângulo formado na representação. Eles também perceberam que, à medida que o salto aumentava, a distância entre a ponta do sapato e o salto diminuía, como ilustrado na Figura 10.

Figura 10: Construção feita no *software* geogebra por G2

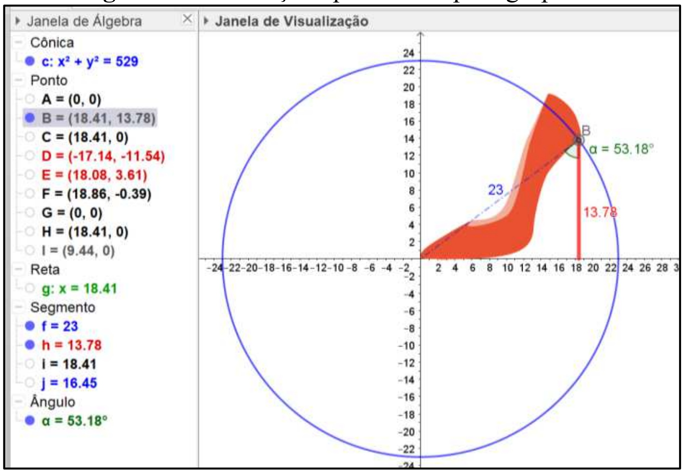


Fonte: Relatório do grupo G2

Após a realização das simulações com diferentes alturas, por meio do *software*, o grupo G2 constatou que a maior altura viável para um sapato de salto alto tamanho 36 seria de aproximadamente 13,8 centímetros. Essa conclusão foi alcançada ao considerar que, para saltos maiores, a inclinação do pé se tornaria cada vez mais acentuada, o que dificultaria a caminhada.

Utilizando os recursos do *software*, os estudantes puderam medir a angulação do pé em relação ao solo (conforme ilustrado na Figura 11) e chegaram à conclusão de que, para saltos superiores a cerca de 13,8 centímetros, a angulação do pé em relação ao solo se tornaria cada vez maior, o que provavelmente resultaria em menor equilíbrio e maior desconforto para quem estivesse usando o sapato de salto.

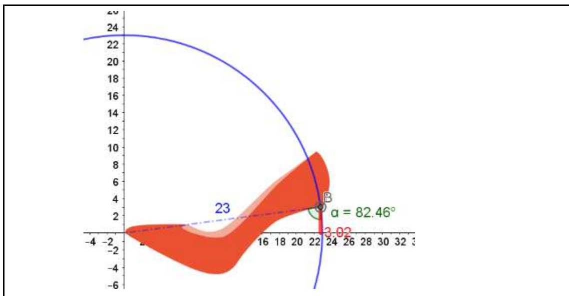
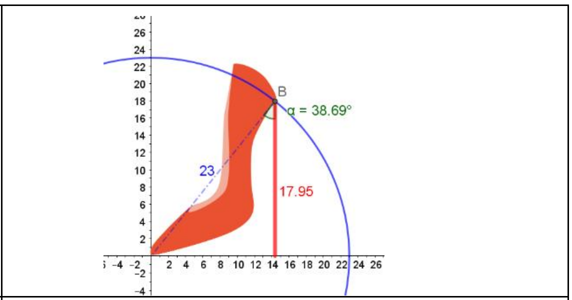
Figura 11: Resolução apresentada pelo grupo G2



Fonte: Relatório do grupo G2

Após essa verificação, (conforme ilustrado na Figura 11), os estudantes do grupo G2 chegaram à conclusão de que a maior altura adequada para um sapato de salto alto fino tamanho 36 é de 13,8 centímetros. Eles observaram que “saltos menores apresentam uma inclinação mais suave, o que os torna mais confortáveis. Por outro lado, à medida que a inclinação aumenta, o conforto do sapato diminui” [E23].

Figura 12: Conclusões estabelecidas pelo grupo G2

	
Saltos menores apresentam pouca inclinação, por isso são mais confortáveis [E23].	*Saltos maiores apresentam maior inclinação, por isso são menos confortáveis [E23].*

Fonte: Transcrição do áudio, 2022

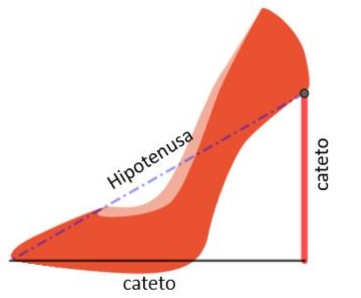
Durante a última aula dedicada à atividade, o grupo G2 compartilhou os resultados com a turma, apresentando a construção realizada no *software* e explicando seu funcionamento. Quando questionados pela professora-pesquisadora sobre como poderiam justificar e validar a simulação que havia construído, os estudantes sugeriram substituir as medidas obtidas no *software* na relação matemática do Teorema de Pitágoras e comparar os resultados.

No relatório entregue, além dos encaminhamentos já mencionados, o grupo G2 apresentou os cálculos que envolvem a relação matemática do Teorema de Pitágoras, a qual eles estudaram durante as demais aulas de matemática. Essa relação permitiu-lhes relacionar a construção do *software* a um triângulo retângulo, no qual a altura do salto e a distância da ponta do salto ao salto seriam os catetos e o comprimento do pé seria a medida da hipotenusa, chegando à conclusão de que "o quadrado do comprimento do pé da pessoa é igual à soma dos quadrados da altura do salto e da distância entre o salto e o início do sapato [conforme relatório entregue pelo grupo G2] e ilustrado na Figura 13.

Figura 13: Análise da resolução estabelecidas pelo grupo G2

$$hipotenusa = comprimento\ do\ pé$$
$$cateto = maior\ altura\ do\ salto$$
$$cateto = distância\ entre\ o\ salto\ e\ o\ início\ do\ sapato$$

"O quadrado do comprimento do pé da pessoa é igual à soma dos quadrados da altura do salto e da distância entre o salto e o início do sapato"



Fonte: Relatório dos estudantes

Dessa forma, os estudantes utilizaram a relação matemática do Teorema de Pitágoras para embasar e reforçar a validade dos resultados obtidos na atividade e fortalecer a compreensão do grupo sobre a relação entre as medidas envolvidas no problema investigado.

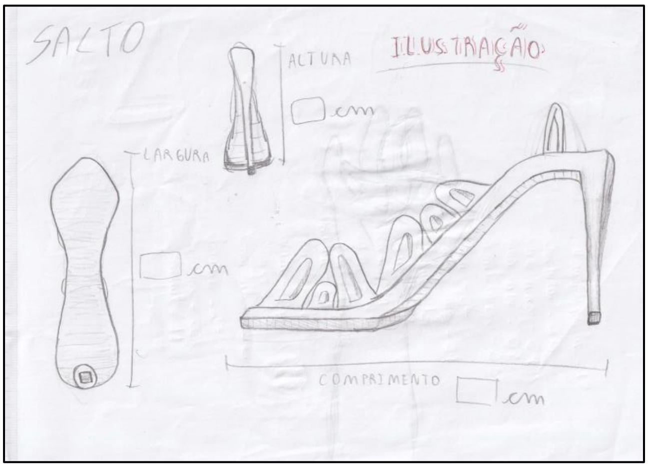
Após a conclusão da atividade, a professora-pesquisadora solicitou que o grupo G2 respondesse a um questionário (Anexo B) contendo questões relacionadas à situação investigada e aos conteúdos matemáticos utilizados durante a atividade. O objetivo do questionário era avaliar a compreensão dos estudantes em relação ao tema abordado e verificar indicativos de aprendizagens.

Encaminhamentos do grupo G3 para os problemas: *Qual a maior altura para um sapato de salto alto? Quais os efeitos causados por sapatos de salto alto nas pessoas?*

O grupo G3, composto pelos estudantes E_3, E_{18}, E_{15}, E_{29}, E_{21} e E_2, optou por investigar dois problemas, sendo o primeiro relacionado à maior altura de salto que uma pessoa poderia usar e o segundo relacionado aos efeitos causados por esse tipo de sapato nas pessoas.

Neste grupo, um dos estudantes [E_{15}] havia trazido para a sala de aula um sapato de salto pertencente à sua mãe, que tinha tamanho 35. Após manipularem o sapato, o grupo considerou necessário construir um esboço do salto para que pudessem inserir e verificar as informações referente ao comprimento, largura e altura do sapato de salto, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14: Esboço feito no grupo G3 do salto investigado



Fonte: Relatório entregue por G3

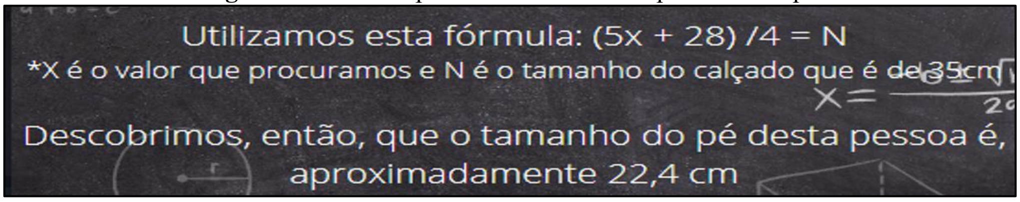
Após a construção do esboço, os estudantes coletaram informações específicas do sapato de salto que estavam investigando (Figura 15). Inicialmente, eles pretendiam determinar a maior altura possível para esse tipo de salto e, posteriormente, estender a análise para outros tamanhos.

Figura 15: Coleta de dados e informações realizada pelo grupo G3

Fonte: Acervo de imagens da pesquisadora, 2023.

Após realizar algumas medições, os estudantes perceberam que para determinar a maior altura de um sapato de salto tamanho 35, era necessário utilizar o comprimento do pé da pessoa que usa essa numeração. Por meio de pesquisas na internet, eles descobriram uma fórmula utilizada para determinar o número do calçado, que é $N = \frac{5c+28}{4}$, em que N representa o número do calçado e c é o comprimento do pé em centímetros. Assim, eles substituíram o número 35 na fórmula e, isolando a incógnita c, encontraram o comprimento do pé de uma pessoa que usa sapato tamanho 35, obtendo o valor de 22,4 centímetros, como mostrado na Figura 16.

Figura 16: Cálculo para determinar o comprimento do pé



Fonte: relatório de atividade do grupo G3

Ao determinar o comprimento do pé para uma pessoa que calça sapatos de numeração 35, o grupo G3 planejou trazer, para próxima aula destinada à atividade, saltos de diferentes alturas (Figura 17). A intenção era investigar o que acontece em relação à altura e distância entre o salto e a parte do pé que fica apoiada no chão (antepé).

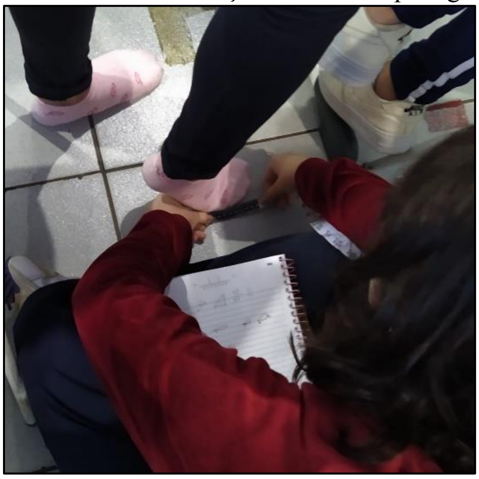
Figura 17: Diferentes tipos de sapatos utilizados para investigação do grupo G3

Fonte: Acervo de imagens da pesquisadora, 2023.

Ao coletar as informações da altura do salto e da distância que a parte do pé que fica apoiada no chão em cada sapato, a professora-pesquisadora os indagou sobre como poderiam relacionar tais informações. O grupo verificou que “quanto maior for a altura do salto, menor será a distância entre o salto e a parte que fica apoiada no chão” [E_{29}]. Para eles essa relação se trata de uma proporção.

Os estudantes tinham conhecimento de que deveria existir um comprimento mínimo para a parte do pé que fica apoiada no chão ao usar um sapato de salto alto. Com isso em mente, eles realizaram um experimento hipotético com uma estudante do grupo para determinar qual seria a menor medida da parte do pé que ficaria em contato com o chão, conforme ilustrado na Figura 18.

Figura 18: Coleta de informações realizadas pelo grupo G3



Fonte: Acervo de imagens da pesquisadora, 2023.

Após essa investigação, os estudantes determinaram que, para a numeração 35 do sapato, uma pessoa não suportaria uma medida inferior à 7,6 centímetros aproximadamente para a parte do pé que fica apoiada no chão, ou seja, em termos percentuais, isso representa aproximadamente $\frac{7,6}{22,4} = 0,34 = 34\%$ do comprimento total do pé.

Portanto, como resposta para o primeiro problema, os estudantes concluíram que a maior altura para um salto de numeração 35 seria aquela que permitisse que, no mínimo, 34% do comprimento do pé ficasse apoiado no chão. Quando questionados pela professora-pesquisadora sobre como determinar a maior altura possível para o salto, os estudantes concluíram que poderiam fazer uso do Teorema de Pitágoras, considerando as informações relacionadas às medidas dos saltos.

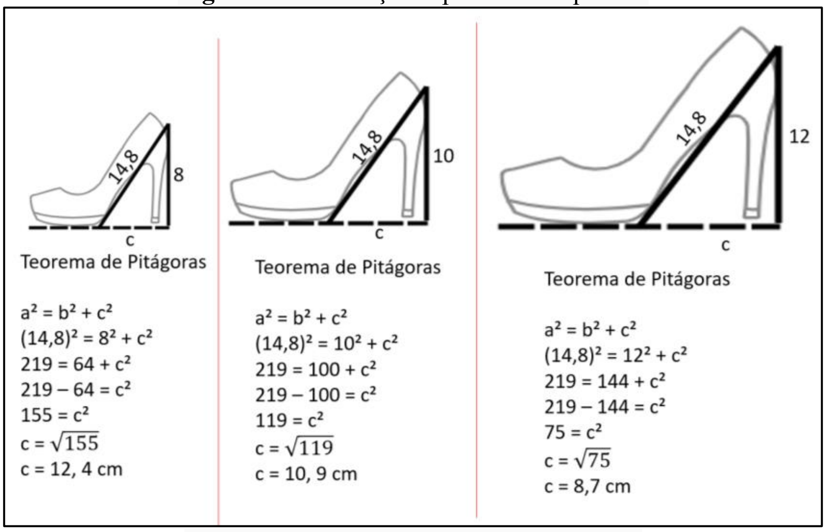
Assim, os estudantes utilizaram a informação sobre a menor distância que uma pessoa suportaria para o contato com o chão (7,6 centímetros) e subtraíram essa medida do comprimento total do pé (22,4 centímetros), resultando em 14,8 centímetros que seria a parte do pé que não fica apoiada no chão. Em seguida, eles consideraram um triângulo retângulo no sapato de salto (Figura 19), em que a hipotenusa corresponde a essa medida e um dos catetos representa as alturas dos diferentes saltos que estavam investigando, sendo essas alturas de 8, 10 e 12 centímetros, respectivamente.

Figura 19: Matematização estabelecida por G3

Fonte: Relatório entregue por G3

Ao substituírem os valores para cada lado do triângulo retângulo na relação Pitagórica, eles obtiveram a distância do salto até a parte que fica apoiada no chão. Eles verificaram que esses valores eram próximos uns dos outros, o que indicava consistência entre os cálculos e as medições experimentais conforme Figura 20.

Figura 20: Resoluções apresentadas por G3



Fonte: Relatório entregue pelos estudantes

Após validarem a relação inicial de que "quanto maior a altura do salto, menor a distância entre o salto e a parte apoiada no chão", os estudantes observaram que a altura do salto não poderia ultrapassar a medida da hipotenusa do triângulo, ou seja, 14,8 centímetros. Durante o diálogo entre os estudantes, foi mencionado que o salto não poderia ser maior que essa medida, pois o pé ficaria totalmente inclinado e não seria possível obter um triângulo retângulo, visto que a distância entre o salto e a parte que fica apoiada no chão seria reduzida a zero e para saltos maiores que essa medida, a projeção seria negativa, o que não seria possível na situação real nem na relação matemática dos lados do triângulo retângulo. Essa constatação foi embasada na compreensão de que o quadrado do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Durante a comunicação dos resultados à turma, os estudantes apresentaram suas respostas para os dois problemas investigados. Para o problema qual a maior altura para um sapato de salto, explicaram que pessoas que usam sapatos de numeração 35 podem utilizar saltos inferiores à altura de 14,8 centímetros. Destacaram que alturas próximas a esse valor podem causar desconforto e desequilíbrio aos pés. Os estudantes destacaram que para confirmar essa conclusão, consultaram a mãe do estudante E_{15} dona do sapato que haviam investigado. A mãe do estudante relatou ser capaz de colocar um salto dessa altura, porém não conseguiria caminhar com ele por muito tempo, segundo ela, o salto mais confortável dentre os investigados era o de altura 8 centímetros.

Para responder ao segundo problema "os efeitos dos sapatos de salto alto nas pessoas", os estudantes descobriram, por meio de suas pesquisas, que existe uma relação para determinar a altura ideal[11] do salto. Essa relação leva em consideração a altura da pessoa e o comprimento de suas pernas, ambos medidos em centímetros. Ponderando que essa pode variar de pessoa para pessoa, os estudantes relataram que fatores como a estrutura física, a preferência pessoal e a finalidade de uso também são levadas em consideração. De todo modo, a altura ideal de um salto encontra-se no equilíbrio entre a estética proporcionada pelo salto e o conforto durante o uso prolongado, a fim de evitar sobrecarregar os músculos e articulações.

$$Altura\ do\ salto\ ideal^{12} = \left(\frac{Estatura}{Comprimento\ das\ pernas} - 1{,}61\right).10$$

Com base nessa relação, os estudantes optaram por verificar qual seria a altura do salto ideal para algumas meninas da turma (Figura 21). Durante essa experiência, eles

[11] A altura do salto ideal refere-se à medida considerada mais adequada para um sapato de salto alto, levando em consideração o conforto, a estabilidade e a saúde dos pés e das pernas.
[12] Disponível em: dicas eficazes para escolher a medida ideal do salto alto (gadoo.com.br)

obtiveram valores inferiores a 6 centímetros para a altura ideal do salto. Ao questionar se as medidas encontradas poderiam ser válidas, as meninas que participaram da experiência, consideraram essa altura válida, pois conforme afirmaram "saltos maiores causam desconforto durante o uso" [E_{21}].

Figura 21: Cálculos para o salto de maior altura

Salto ideal

Aluna E28:

Altura = 162 centímetros
Comprimento das pernas = 77 centímetros

$$\left(\frac{162}{77} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}10 - 1{,}61).10$$
$$0{,}49\ .\ 10$$
$$4{,}9\ centímetros$$

Aluna E8:

Altura = 157 centímetros
Comprimento das pernas = 71 centímetros

$$\left(\frac{157}{71} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}21 - 1{,}61).10$$
$$0{,}6\ .\ 10$$
$$6\ centímetros$$

Aluna E14:

Altura = 159 centímetros
Comprimento das pernas = 73 centímetros

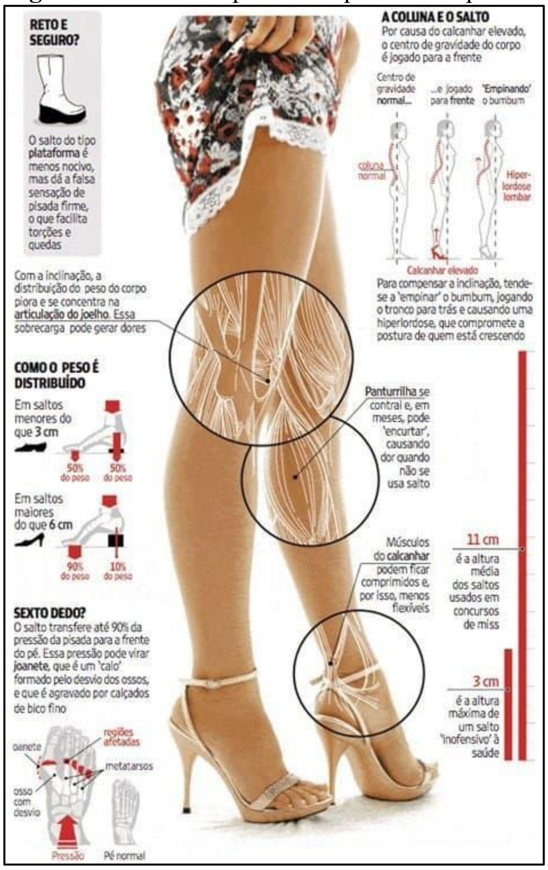
$$\left(\frac{159}{73} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}18 - 1{,}61).10$$
$$0{,}57\ .\ 10$$
$$5{,}7\ centímetros$$

Fonte: relatório entregue pelos estudantes

Após essa análise, os estudantes enfatizaram que "saltos com altura superior a 7 centímetros fazem com que os pés fiquem mais inclinados, o que, de acordo com pesquisas, pode resultar em dores e desconforto, mesmo após um curto período de uso" [E_2]. O grupo também compartilhou, durante a socialização dos resultados, um folder explicativo (Figura 22) sobre os efeitos ergonômicos[13] relacionados ao uso de sapatos de salto.

[13] Qualquer fator que possa interferir nas características psicofisiológicas de uma pessoa, causando desconforto ou afetando sua saúde.

Figura 22: Folder explicativo apresentado por G3



Fonte: relatório entregue por G3 (disponível em: Uso Do Salto Alto - Cuidados Que Dever Ter - Dr. Márcio Silveira (drmarciosilveira.com).

Após a apresentação dos resultados, a professora-pesquisadora direcionou a atenção de todos os estudantes para as diversas respostas obtidas pelos grupos, incentivando a reflexão sobre as abordagens adotadas por cada um deles. Ela destacou as semelhanças e diferenças entre os grupos, promovendo uma discussão articulando à situação real investigada e os conceitos matemáticos envolvidos. O grupo G3, por sua vez, entregou o relatório e respondeu ao questionário finalizando a atividade.

5.2 CENÁRIO 2 – ATIVIDADE *OTIMIZAÇÃO DO TAMANHO DE UMA EMBALAGEM*

O cenário 2 refere-se à temática "Otimização do tamanho de uma Embalagem" e são descritos procedimentos adotados pelos grupos G2 e G4. Embora ambos os grupos tenham abordado um problema semelhante, optaram por estratégias diferentes para sua resolução. A atividade teve duração total de quatro horas-aula.

A escolha da atividade foi planejada pela professora-pesquisadora, motivada pela oportunidade de explorar o conceito de otimização com os estudantes. O termo "otimizar" significa criar condições mais favoráveis para o desenvolvimento de algo, buscando obter o melhor valor possível de uma determinada grandeza (HOUAISS; VILLAR, 2009). Na matemática, o conceito de otimização é frequentemente usado para se referir a métodos que buscam determinar os valores extremos que uma função pode assumir em um determinado intervalo.

A proposta da temática esteve aliada à ideia de oportunizar aos estudantes a construção de diferentes embalagens a partir de uma folha de sulfite, com o objetivo de determinar qual seria a caixa com o maior volume. Essa temática também seguiu os procedimentos estabelecidos para o 2º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática. Para realizar a atividade, a professora solicitou previamente aos estudantes materiais, como régua, tesoura e cola.

Após entregar um texto aos estudantes sobre o processo de otimização de uma embalagem, (Figura 24), a professora-pesquisadora iniciou uma discussão em sala de aula para explorar quais aspectos eram necessários levar em consideração na construção de uma embalagem. Além disso, os questionou sobre como poderiam construir uma embalagem a partir de uma quantidade fixa de material, como por exemplo, uma folha de formato A4.

Figura 23: Situação-problema sobre otimização

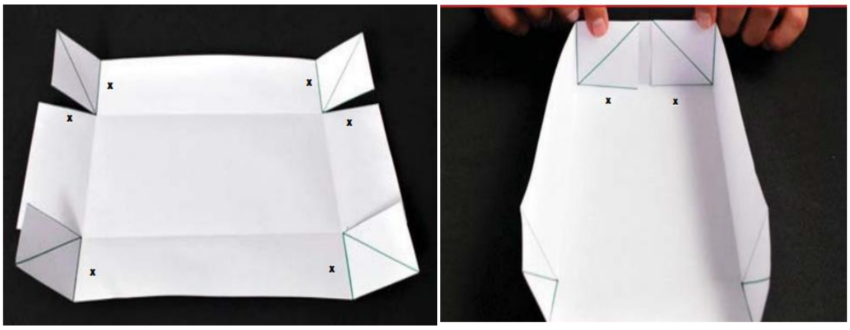
Atividade - Otimização do tamanho de uma embalagem
O processo de otimização de embalagens, peças e recipientes é um assunto frequente na indústria de maneira geral. Embalagens são todos os materiais que envolvem um determinado produto e tem como objetivo proteger e ao mesmo tempo manter as características originais do mesmo, durante o seu transporte e armazenamento até chegar ao consumidor final. Podemos observar que alguns produtos se apresentam com mais de uma embalagem, por exemplo: os medicamentos, que, geralmente, contém um frasco, um tubo e etc. Desenvolver uma embalagem otimizada, na maioria das vezes, tem como objetivo minimizar gastos, porém, existem outras variáveis que influenciam na determinação do formato de uma embalagem. Fazer uma escolha errada do material ou do formato, por exemplo, pode causar prejuízos desde a fase logística até danos ou perda do conteúdo. Além disso, a satisfação do consumidor é diretamente influenciada pela qualidade e adequação da embalagem ao produto.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

Para essa atividade, a professora-pesquisadora entregou três folhas de sulfite para cada grupo. De modo geral, os estudantes ao se dividir nos pequenos grupos, destacaram a ideia que poderiam planificar a caixa na folha de sulfite, para posteriormente, montá-la. Como a temática levava em consideração a otimização do tamanho de uma embalagem, a professora-pesquisadora também os questionou sobre como poderiam obter a embalagem com maior volume possível, considerando a folha de sulfite.

Embora os estudantes tivessem conhecimento da necessidade de planificar a embalagem antes de montá-la, eles encontraram dificuldades na construção. Para ajudá-los nesse processo, a professora-pesquisadora apresentou aos estudantes um vídeo explicativo que demonstrava passo a passo como construir uma embalagem sem tampa. O vídeo apresentava os procedimentos necessários, oferecendo orientações para a construção da embalagem, conforme ilustrado na Figura 24.

Figura 24: Procedimentos para construção da caixa



Fonte: Disponível em: https://www.youtube.com/results?search_query=como+construir+uma+caixa+sem+tampa

Encaminhamentos do grupo G2 para o problema *Como otimizar uma embalagem feita de papel A4?*

O problema abordado pelo grupo G2 durante a atividade consistiu em otimizar uma embalagem feita de papel A4, com o objetivo de determinar qual embalagem teria o maior espaço interno, utilizando uma quantidade fixa de material. Para isso, os estudantes coletaram informações sobre as dimensões da folha de sulfite, estabelecendo que utilizariam medidas aproximadas de 29 centímetros de comprimento e 21 centímetros de largura.

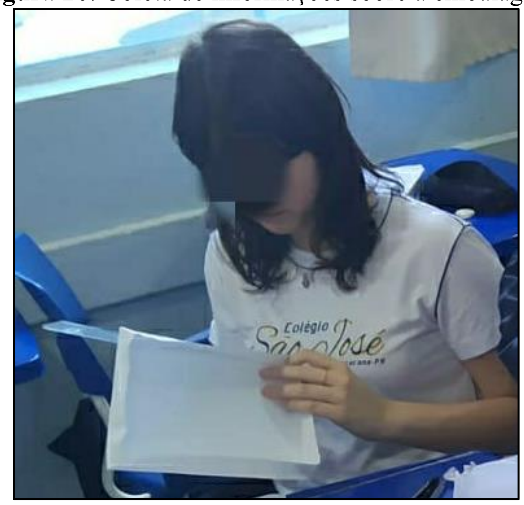
Durante as discussões, os estudantes do grupo G2 inicialmente acreditavam que “quanto maior a altura da caixa, maior seria o aproveitamento do espaço interno”. Dessa forma, optaram por construir (Figura 25) três embalagens com alturas distintas: 1 centímetro, 4 centímetros e 7 centímetros, respectivamente. Essa escolha por diferentes alturas foi realizada de maneira intencional, a fim de observar o comportamento das embalagens, abrangendo “uma embalagem com altura menor, uma embalagem com altura intermediária e uma embalagem com altura maior” [relatório entregue].

Figura 25: Construção das caixas feitas pelo grupo G2

Fonte: Acervo da professora-pesquisadora, 2023.

Percebendo que os estudantes apresentavam dificuldades em calcular o espaço interno das embalagens, a professora-pesquisadora os incentivou a relembrar da relação matemática para o cálculo do volume. Com isso, eles coletaram informações sobre a largura, a altura e o comprimento das embalagens (Figura 26).

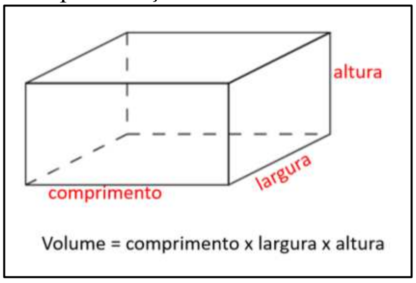
Figura 26: Coleta de informações sobre a embalagem



Fonte: Acervo da professora pesquisadora, 2023.

Em diálogo com os estudantes, a professora-pesquisadora retomou como poderia ser calculado o volume de uma embalagem, considerando-a como um paralelepípedo retângulo, multiplicando-se as medidas de comprimento, largura e altura, conforme indica a Figura 27.

Figura 27: Representação das dimensões da embalagem



Fonte: Relatório entregue por G2

Com base nas medidas das três embalagens, os estudantes realizaram o cálculo do volume, como mostrado na Figura 28, e constataram que a embalagem com altura intermediária, ou seja, 4 centímetros, apresentava o maior espaço interno entre elas. Isso significa que essa embalagem tinha maior capacidade de armazenamento em comparação com as outras embalagens que haviam construído.

Figura 28: Cálculo do volume para as embalagens

Volume = comprimento x largura x altura

$$V = 27 \times 19 \times 1 = 513$$

$$\boxed{V = 13 \times 21 \times 4 = 1092}$$

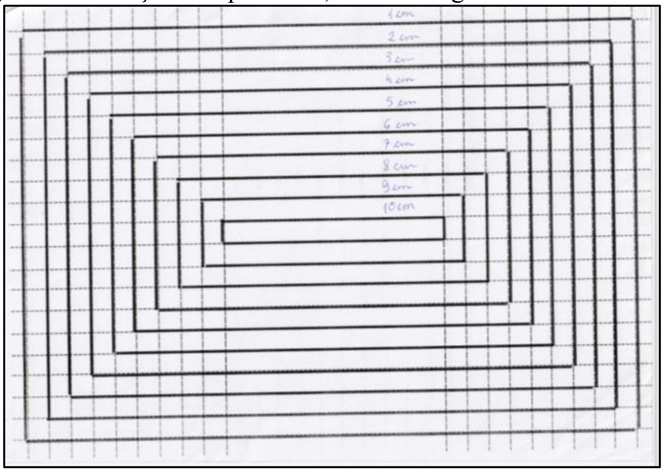
$$V = 7 \times 14 \times 7 = 686$$

Fonte: Relatório entregue por G2

Ao retornar as ideias iniciais de que “quanto maior a altura da embalagem, maior seria o aproveitamento do espaço interno”, os estudantes perceberam que essa hipótese não havia sido confirmada. Ao aumentarem a altura das caixas, o volume não aumentou proporcionalmente, o que os levou a admitir que não existe uma relação diretamente proporcional entre a altura e o volume das embalagens, sendo necessário considerar outros fatores além da altura na otimização do espaço interno de uma embalagem, mantendo a área da folha de sulfite.

Considerando essas observações, o grupo G2 decidiu analisar as ponderações de um dos estudantes do grupo, que sugeriu verificar “o que acontece com as medidas da embalagem, quando se aumenta a altura da embalagem a cada 1 centímetro”. Com base na nova ideia, os estudantes optaram por desenhar em uma única folha de sulfite, linhas que representassem a base da caixa, aumentando a altura a cada 1 centímetro. Dessa forma, eles puderam visualizar e analisar o comportamento resultante, conforme ilustrado na Figura 29.

Figura 29: Relação comprimento, altura e largura na folha de sulfite



Fonte: Relatório entregue pelos estudantes

Após realizar o esboço, os estudantes constataram que a altura das caixas construídas a partir de uma única folha de sulfite deveria variar entre 1 e 10 centímetros. Isso ocorreu porque alturas inferiores a 1 centímetro tornariam as laterais da caixa muito “frágeis”, enquanto alturas superiores a 10 centímetros tornariam a construção da caixa inviável, seguindo o modelo de construção definido. Essa restrição permitiu aos estudantes delimitar o intervalo de altura das embalagens, variando entre $0 \leq altura \leq 10$.

Além disso, os estudantes observaram que a altura da embalagem influenciava nas medidas da largura e do comprimento da base da caixa. Segundo as ponderações de um dos estudantes, "para determinar o volume das caixas, as medidas do comprimento e da largura são reduzidas duas vezes em relação ao comprimento definido para a altura" [E_{12}]. Essa relação entre as dimensões da embalagem permitiu aos estudantes compreender como ajustar a largura e o comprimento de acordo com a altura escolhida, a fim de obterem a embalagem com maior volume possível.

Seguindo essas ideias, os estudantes coletaram as informações necessárias sobre as dimensões das embalagens e calcularam o volume de cada uma delas. Eles adotaram uma relação na qual a medida da altura das caixas era multiplicada pelo comprimento da folha de sulfite, menos duas vezes a altura e a largura das embalagens, conforme Figura 30. Mantendo as dimensões da folha, eles verificaram que, ao aumentar a altura em um centímetro, tanto o comprimento quanto a largura da caixa diminuíam em dois centímetros.

Figura 30: Relação entre o comprimento, altura e largura na folha de sulfite

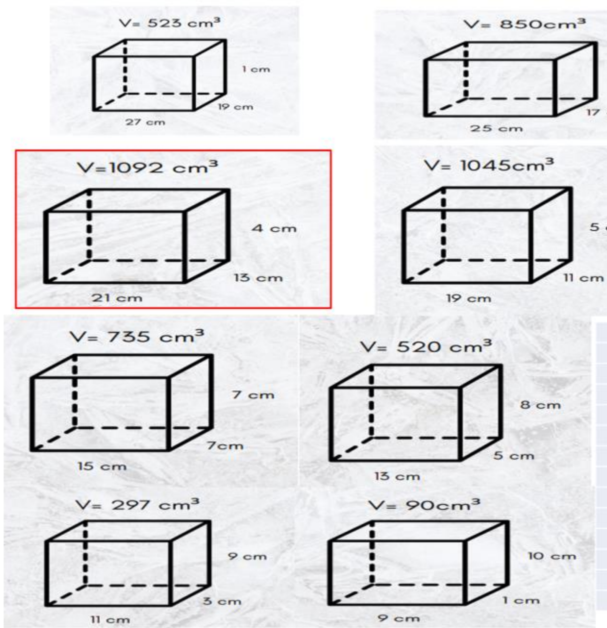
> Se a altura da caixa for 3 centímetros, por exemplo, a altura vai ser 29 menos duas vezes a altura e a largura vai ser 21 menos duas vezes a altura também [E_{12}].

Fonte: Transcrição dos diálogos

Seguindo essas ideias, os estudantes coletaram informações sobre as dimensões das embalagens e calcularam o volume de cada uma delas. Com isso, verificaram que mantendo as dimensões da folha, aumentar a altura em um centímetro implica em considerar que tanto o comprimento da caixa quanto a largura, diminuem em dois centímetros.

Como resposta ao problema de otimização do volume de uma embalagem feita de papel A4, os estudantes optaram por representar em um único arquivo de apresentação (Figura 31) esboços das embalagens indicando em cada uma delas, as medidas da largura, comprimento, altura e volume obtido, em centímetros cúbicos. Dessa forma, o grupo G2 seguiu um processo de resolução que envolveu determinar o volume das embalagens, a partir da ideia de que, para calcular o volume, as medidas do comprimento e da largura são reduzidas duas vezes em relação ao comprimento definido para a altura.

Figura 31: Matematização elaborada pelo grupo G2



DIMENSÕES DAS CAIXAS

comprimento	largura	altura	volume
29	21	0	0
27	19	1	513
25	17	2	850
23	15	3	1035
21	13	4	1092
19	11	5	1045
17	9	6	918
15	7	7	735
13	5	8	520
11	3	9	297
9	1	10	90

Fonte: Relatório entregue por G2

Durante a última aula dedicada a essa atividade, ao compartilhar os resultados com a turma, os estudantes do grupo G2 enfatizaram que, ao variar à altura, constataram que a embalagem com 4 centímetros de altura, 21 centímetros de comprimento e 13 centímetros de largura apresentava o maior espaço interno.

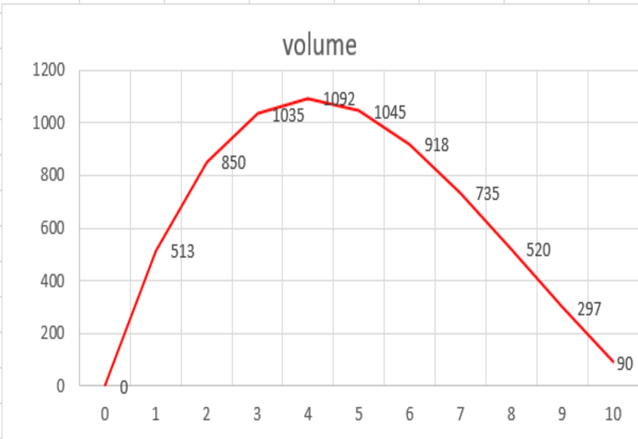
Quando questionados pela professora-pesquisadora sobre a possibilidade de generalizar uma relação que pudesse descrever o comportamento entre altura e volume das embalagens, os estudantes incluíram no relatório entregue um gráfico construído no *software excel* (Figura 32), no qual o eixo horizontal representava as alturas das embalagens e o eixo vertical correspondia aos respectivos volumes.

A partir da representação gráfica elaborada pelos estudantes, eles puderam compreender que a curva obtida, ao ligar os pontos apresentava um ponto de máximo, que correspondia à embalagem com o maior volume. Confirmaram, então, que a embalagem em formato de paralelepípedo retângulo, sem tampa, com as medidas de 4 centímetros de altura, 21 centímetros de comprimento e 13 centímetros de largura, construída a partir de uma folha de sulfite A4, era a que possuía o maior espaço interno.

Além disso, destacaram que, embora essa embalagem não seja a mais adequada para receber líquidos, o volume da caixa de maior espaço interno com 1092 centímetros cúbicos correspondia a uma capacidade um pouco superior a 1 litro.

Figura 32: Modelo matemático desenvolvido pelo grupo G2

comprimento	largura	altura	volume
29	21	0	0
27	19	1	513
25	17	2	850
23	15	3	1035
21	13	4	1092
19	11	5	1045
17	9	6	918
15	7	7	735
13	5	8	520
11	3	9	297
9	1	10	90



Fonte: relatório entregue por G2

O relatório elaborado pelo grupo G2 (Figura 33), fornece uma visão das estratégias utilizadas pelos estudantes para solucionar o problema investigado.

Figura 33: Registro do grupo G2 para atividade sobre otimização

O papel A4 tem como medida 21 x 29 cm. A idéia inicial obtida pelo grupo era usar várias folhas, e montar várias caixas de tamanhos variados para descobrir qual tinha o maior aproveitamento. Mais tarde, colocamos a idéia de tracejar as linhas em um único papel simulando a altura de 1cm em 1cm para analisar as modificações, em prática. Percebemos que a cada centímetro que era aumentado na altura diminuia 2 centímetros no comprimento e largura, esse será o espaço "descartado" pelo recorte e colagem necessários para montar a embalagem mas será utilizado para reforçar os cantos da caixa. Utilizando a fórmula: comprimento x largura x altura, descobrindo a capacidade de cada uma. O tamanho de caixa feito de papel A4 que mais otimizará o espaço é 4cm de altura. Sua base deverá ser de 13 x 21 cm.	O papel A4 tem como medida 21cm x 29 cm. A ideia inicial obtida pelo grupo era usar várias folhas e montar várias caixas de tamanhos variados para descobrir qual tinha o maior aproveitamento. Mais tarde, colocamos a ideia de tracejar as linhas em um único papel simulando a altura de 1cm em 1cm para analisar as modificações, em prática. Percebemos que a cada centímetro que era aumentado na altura, diminuía dois centímetros no comprimento e largura. Esse será o espaço "descartado" pelo recorte e colagem necessários para montar a embalagem, mas será utilizado para reforçar os cantos da caixa. Utilizando a fórmula: comprimento x largura x altura, descobrimos o volume de cada uma. O tamanho de cada caixa feito de papel A4 que mais otimizará o espaço é a que possui 4 centímetros de altura. Sua base deverá ser de 13cm x 21cm.

Fonte: Relatório entregue por G2

O grupo G2 respondeu a um questionário (Anexo C) logo após a conclusão da atividade, que continha questões específicas relacionadas a aspectos matemáticos da situação, bem como sobre as etapas da modelagem matemática. Os estudantes foram solicitados a refletir sobre os cálculos realizados, as estratégias adotadas e as conclusões obtidas. As respostas fornecidas pelo grupo G2 contribuíram para uma análise mais aprofundada do processo de aprendizagem durante a atividade.

Encaminhamentos do grupo G4 para o problema: *Qual volume máximo de uma caixa construída a partir de uma folha de sulfite?*

O grupo G4, composto pelos estudantes (E_{10}, E_{22}, E_{16}, E_{28}, E_{31} e E_{26}), formulou um problema semelhante ao grupo G2, relacionado à otimização do tamanho de uma embalagem. Como o objetivo era determinar o volume máximo de uma caixa construída a partir de uma folha de sulfite, o grupo optou por considerar as medidas exatas da folha de sulfite, que eram de 21 centímetros de comprimento e 29,7 centímetros de largura.

Com as informações sobre as medidas da folha de sulfite em mãos, os estudantes optaram por escolher uma altura aleatória e construir uma única caixa, sem tampa, no formato de paralelepípedo retângulo. O propósito dessa construção era investigar as dimensões da caixa, como altura, comprimento, área da base e volume.

A caixa construída pelo grupo G4 tinha uma altura de 2 centímetros. A escolha dessa altura foi justificada pelos estudantes com base em suas ideias iniciais, nas quais eles acreditavam que quanto maior a área da base, maior seria o volume da caixa. Portanto, eles optaram por investigar a caixa com altura 2 centímetros (Figura 34) para investigar a relação entre a área da base e o volume da caixa.

Figura 34: Caixa construída pelo grupo G4

Fonte: Acervo da professora pesquisadora, 2023.

Após a construção da caixa, o grupo G4 verificou que suas dimensões eram 2 centímetros de altura, 17 centímetros de largura e 25,7 centímetros de comprimento. Ao serem questionados pela professora-pesquisadora sobre suas observações e possíveis encaminhamentos para responder ao problema, considerando suas ideias iniciais, os estudantes perceberam que ter apenas uma caixa construída não seria suficiente para determinar o maior volume possível.

Considerando que os estudantes do grupo G4 buscavam estabelecer uma relação entre a área da base da caixa e o seu volume, recordaram que *a área da base de um paralelepípedo é obtida multiplicando o comprimento pela largura* [E_{22}], enquanto *o volume é calculado multiplicando as três dimensões, comprimento, largura e altura* [E_{10}], conforme Figura 35.

Figura 35: Cálculos apresentados por G4

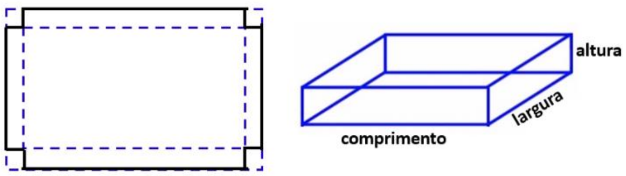
$$\text{Área da base} = comprimento \ x \ largura$$
$$\text{Área da base} = 25{,}7 \ x \ 17$$
$$\text{Área da base} = 336{,}9 \ cm^2$$

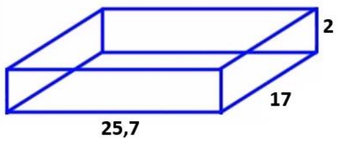
$$Volume = comprimento \ x \ largura \ x \ altura$$
$$Volume = 25{,}7 \ x \ 17 \ x \ 2$$
$$Volume = 873{,}8 \ cm^3$$

Fonte: Relatório entregue por G4

Após perceberem que apenas uma caixa não seria suficiente para determinar qual teria o maior volume, os estudantes decidiram construir mais duas caixas com alturas diferentes da anteriormente construída. Optaram por construir caixas com 3 e 4 centímetros de altura, respectivamente, e coletar as informações do comprimento, altura e largura de cada uma delas. Posteriormente, calcularam a área da base e volume dessas (Figura 36). Gostariam de verificar se existia uma relação de proporcionalidade entre a área da base e o volume.

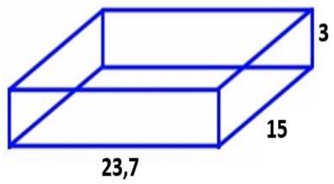
Figura 36: Matematização estabelecida pelo grupo G4





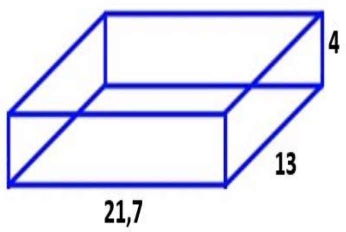
$$\text{Área da base} = comprimento \ x \ largura$$
$$\text{Área da base} = 25{,}7 \ x \ 17$$
$$\text{Área da base} = 436{,}9 \ cm^2$$

$$Volume = altura \ x \ comprimento \ x \ largura$$
$$Volume = 2 \ x \ 25{,}7 \ x \ 17$$
$$Volume = 873 \ cm^3$$



$$\text{Área da base} = comprimento \ x \ largura$$
$$\text{Área da base} = 23{,}7 \ x \ 15$$
$$\text{Área da base} = 355{,}5 \ cm^2$$

$$Volume = altura \ x \ comprimento \ x \ largura$$
$$Volume = 3 \ x \ 23{,}7 \ x \ 15$$
$$Volume = 1\ 066{,}5 \ cm^3$$



$$\text{Área da base} = comprimento \ x \ largura$$
$$\text{Área da base} = 21{,}7 \ x \ 13$$
$$\text{Área da base} = 282{,}1 \ cm^2$$

$$Volume = altura \ x \ comprimento \ x \ largura$$
$$Volume = 4 \ x \ 21{,}7 \ x \ 13$$
$$Volume = 1\ 128{,}4 \ cm^3$$

Fonte: Relatório entregue por G4

Ao realizar os cálculos, os estudantes constataram que a área da base diminuiu para as caixas de 3 e 4 centímetros, respectivamente. Já o volume havia aumentado. Na caixa com 3 centímetros de altura, o volume aumentou de 873 cm^3 para 1066,5 cm^3 em relação à caixa com 2 centímetros de altura. Isso significa que ao aumentar a altura em 1 centímetro, houve um acréscimo de 193,5 cm^3 no volume. De maneira correspondente, ao analisar o comportamento dos volumes entre as caixas de 3 e 4 centímetros de altura essa diferença era de 61,9 cm^3.

Diante da percepção de que o volume das caixas estava aumentando e a área da base diminuindo, o grupo G4 organizou as medidas das dimensões das caixas construídas em uma tabela, como mostrado na Figura 37.

Figura 37: Dimensões da caixa (centímetros)

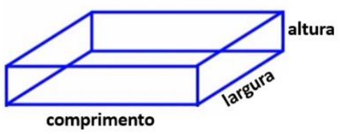
Altura da caixa (cm)	Comprimento (cm)	Largura (cm)	área da base (cm²)	Volume (cm³)
2	25,7	17	436,9	873
3	23,7	15	355,5	1 066,5
4	21,7	13	282,1	1 128,4

Fonte: Relatório entregue por G4

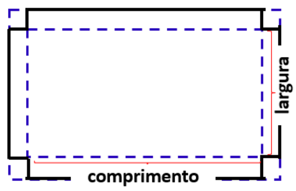
Após perceberem que suas ideias iniciais não se confirmaram (que quanto maior a área da base, maior seria o volume da caixa), a professora-pesquisadora questionou os estudantes se seria necessário construir mais caixas, pois ao aumentar a altura, a área da base diminuía, o que poderia afetar no volume das caixas. Diante dessas considerações, o grupo G4 decidiu construir uma nova caixa com 5 centímetros de altura para verificar se o comportamento do volume continuava a aumentar, enquanto a área da base da caixa diminuía. Assim, calcularam conforme mostra a Figura 38.

Figura 38: Cálculo do volume e área da base

$$Volume = altura\ x\ comprimento\ x\ largura$$
$$Volume = 5\ x\ 19{,}7\ x\ 11$$
$$Volume = 1\ 083\ centímetros\ cúbicos$$



$$Área\ da\ base = comprimento\ x\ largura$$
$$Área\ da\ base = 19{,}7\ x\ 11$$
$$Área\ da\ base = 216{,}7\ centímetros\ quadrados$$



Fonte: Relatório entregue por G4

Ao constatarem que o volume e a área da base diminuíram para a caixa com altura de 5 centímetros, os estudantes chegaram à conclusão de que, para as caixas construídas a partir de uma folha de sulfite, não há uma relação proporcional entre a área da base e o volume. Além disso, por meio da construção dessas caixas, observaram que aumentando a altura, o volume continuaria diminuindo. Portanto consideraram que a caixa que possui maior volume (Figura 39) é a de altura 4 centímetros, comprimento 21,7 centímetros e largura 13 centímetros.

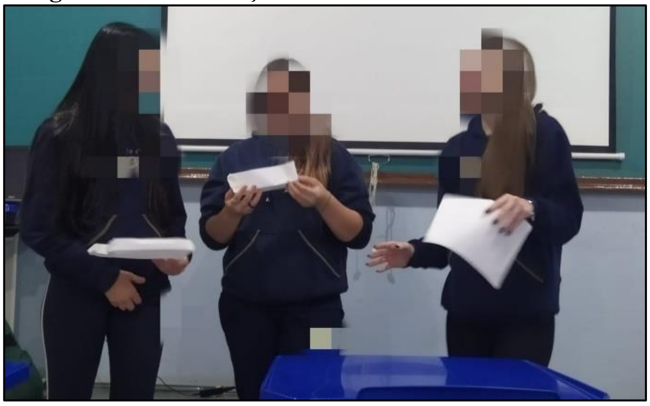
Figura 39: Dimensões da caixa (centímetros)

Altura da caixa (cm)	Comprimento (cm)	Largura (cm)	área da base (cm^2)	Volume (cm^3)
2	25,7	17	436,9	873
3	23,7	15	355,5	1 066,5
4	21,7	13	282,1	1 128,4
5	19,7	11	216,7	1 083

Fonte: Relatório entregue por G4

Ao compartilhar os resultados com a turma (Figura 40), o grupo G4 ressaltou que foi capaz de resolver o problema ao construir caixas com diferentes alturas para observar seu comportamento. Eles justificaram que somente após construir a caixa com altura de 5 centímetros, puderam concluir que o volume não seguia o mesmo padrão ao aumentar a altura. Quando questionados pela professora-pesquisadora sobre a necessidade de construir caixas com alturas ainda maiores, os estudantes chegaram à conclusão de que, ao aumentar a altura da caixa, o volume diminui[A22].

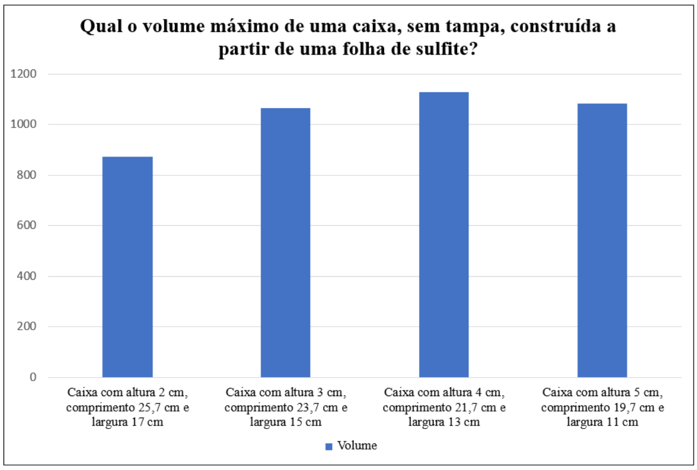
Figura 40: Socialização dos resultados à turma



Fonte: Acervo da professora-pesquisadora, 2023.

Como solução para o problema os estudantes apresentaram um gráfico de colunas verticais (Figura 41) destacando para cada coluna, o volume obtido a partir das combinações entre as medidas da altura, comprimento e largura das caixas.

Figura 41: Gráfico elaborado por G4 para atividade otimização

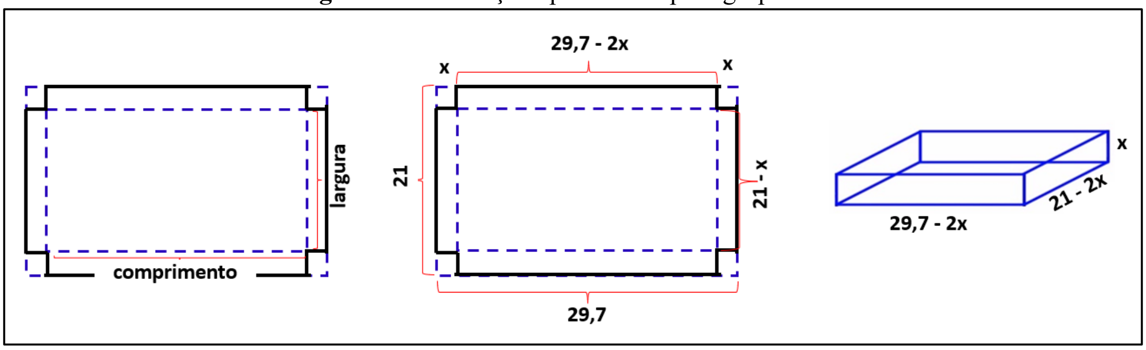


Fonte: Relatório entregue pelo grupo G4

Após a socialização dos resultados, a professora-pesquisadora fez algumas perguntas para complementar ou aprimorar a resolução do problema. Uma das perguntas levantadas foi se as medidas de altura das caixas precisavam ser obrigatoriamente números inteiros. Outra questão levantada foi como os estudantes poderiam observar regularidades entre o comprimento e a largura das caixas a partir dos dados organizados na tabela.

Posteriormente, ao refletirem sobre tais considerações, os estudantes entregaram o relatório da atividade e complementaram a solução apresentada durante a socialização dos resultados. Como consequência da regularidade observada entre o comprimento e a largura das caixas, os estudantes concluíram que, dado o modelo de caixa construído sem tampa, no formato de paralelepípedo retângulo, o volume da caixa poderia ser expresso por medidas em função de x como apresentado na Figura 42.

Figura 42: Resolução apresentada pelo grupo G4



Fonte: Relatório entregue por G4

Considerando a folha de sulfite têm 29,7 centímetros de comprimento e 21 centímetros de largura, os estudantes verificaram que, ao retirar quatro peças quadradas dos cantos da folha para possibilitar a dobradura e montagem da caixa (Figura 42), poderiam determinar o volume utilizando uma variável "x" para representar a medida desses quadrados. Feito isso, realizaram o cálculo do volume multiplicando o comprimento, largura e altura da caixa, em que:

$$x = altura\ da\ caixa\ (cm);$$
$$v = volume\ da\ caixa\ (cm^3)$$
$$comprimento\ da\ caixa = 29{,}7 - 2x$$
$$largura\ da\ caixa = 21 - 2x$$

$$Volume = (comprimento\ x\ largura\ x\ altura)$$
$$V = [(29{,}7 - 2x)\,.\,(21 - 2x)\,.\,x]$$
$$V = [(623{,}7 - \ 59{,}4\,x - 42\,x + x^2).x]$$
$$V = [(29{,}7 - 2x)\,.\,(21 - 2x)\,.\,x]$$
$$V = [(29{,}7 - 2x)\,.\,(21 - 2x)\,.\,x]$$
$$V = [623{,}7 - 59, 4x - 42\,x + 4x^2].\,x$$
$$V = [4x^2 - 101{,}4\,x + 623{,}7].\,x$$
$$V = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$$

Assim, a expressão polinomial de grau 3 representa o volume da caixa em função da medida "x", que corresponde à medida dos quadrados retirados dos cantos da folha de sulfite. A partir dessa função polinomial, os estudantes decidiram realizar algumas substituições para os valores de “x”. Notaram que esses valores deveriam estar entre 0 e 10,5 centímetros, pois se for zero a caixa não tem volume, porque não tem altura e se for 10,5 centímetros não dá para construir a caixa considerando o corte dos quadrados nos cantos da folha [relatório entregue].

Para validar a resposta ao problema investigado e verificar se a caixa de maior volume construída a partir de uma folha de sulfite é a de altura 4 centímetros, comprimento 21,7 centímetros e largura 13 centímetros, os estudantes retomaram as considerações da professora e substituíram na função polinomial dois valores próximos a 4 centímetros para a variável "x" (altura da caixa).

Ao realizar essas substituições e calcular o valor correspondente do volume para cada caixa, os estudantes obtiveram os resultados apresentados no Quadro 6. Esses resultados validaram o modelo polinomial, reafirmando que o volume máximo de uma caixa construída a partir de uma folha de sulfite é de 1128 centímetros cúbicos, com dimensões de 4 centímetros de altura, 21,7 centímetros de comprimento e 13 centímetros de largura.

Quadro 6: Cálculo do volume feito pelo grupo G4

Altura (centímetros)	Volume (centímetros cúbicos)
3,8	$V = 4.(3,8)^3 - 101,4.(3,8)^2 + 623,7.\ 3,8 = 219,49 – 1462,22 + 2370,06 = 1\ 127,33\ cm^3$
4	$\mathbf{V = 4.(4)^3 - 101,4.(4)^2 + 623,7.\ 4 = 256 – 1622,40 + 2494,80 = 1\ 128,4\ cm^3}$
4,2	$V = 4.(4,2)^3 - 101,4.(4,2)^2 + 623,7.\ 4,2 = 296,35 – 1788,7 + 2619,54 = 1\ 127,19\ cm^3$

Fonte: Relatório entregue pelo grupo G4

Ao término da atividade, o grupo G4 respondeu ao questionário (Anexo C) relacionado à temática da otimização do tamanho de uma embalagem. Esse questionário forneceu informações sobre o problema investigado, as estratégias utilizadas e as conclusões obtidas no desenvolvimento da atividade.

5.3 CENÁRIO 3 – ATIVIDADE *VALE ALIMENTAÇÃO*

O cenário 3 refere-se à atividade desenvolvida pelo grupo G3, com o tema "vale alimentação". Essa atividade seguiu os encaminhamentos estabelecidos para o 3º momento de familiarização dos estudantes com a modelagem matemática. A escolha desse tema foi definida pelos estudantes durante as discussões em sala de aula sobre quais temas poderiam investigar.

O grupo G3 demonstrou interesse em investigar o aumento dos preços dos alimentos, ressaltando que "os alimentos estão cada vez mais caros" [E_{15}]. Durante suas primeiras discussões, os estudantes identificaram a possibilidade de realizar duas análises: verificar o valor mínimo necessário em reais para que uma família se sustentasse por um mês, ou calcular quantas horas uma pessoa precisaria trabalhar para cobrir os custos de alimentação. No entanto, ao buscar as primeiras informações, eles consideraram que esse valor poderia variar de acordo com diversos fatores, como localização, quantidade de membros na família, hábitos alimentares, entre outros.

Porém, durante a conversa com a professora-pesquisadora sobre a alta nos preços dos alimentos destacaram:

Prof: Pessoal vocês já sabem o que vão investigar?
E_3: Queremos investigar sobre a alta nos preços dos alimentos.
E_{15}: Pensamos em dois problemas: ver quantas horas uma pessoa precisa trabalhar para se alimentar, ou quanto uma família precisa ganhar para comprar alimentos por mês.
Prof: Muito bom! São problemas legais para investigar.
E_2: Professora, meu pai recebe um vale alimentação, será que dá para investigar isso também?

Prof: Acho muito interessante. Com o vale alimentação de seu pai, é possível fazer as compras do mês?
E_2: Minha mãe sempre comenta que não.
Prof: Então porque vocês não investigam algo nesse sentido?

Ao mencionar que o pai de um dos estudantes recebia um valor adicional por meio do vale alimentação para auxiliar nas compras mensais, o grupo percebeu uma oportunidade de investigar essa situação. Eles viram nessa atividade a possibilidade de compreender se o valor fornecido pelo vale alimentação seria suficiente para a compra de alimentos básicos. Sendo assim, o problema formulado pelo grupo G3 consistiu em investigar: *O valor do vale alimentação é suficiente para compra de itens básicos?*

Para se inteirar da situação, o grupo buscou informações sobre a temática. Durante as pesquisas, descobriram que, de acordo com a Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), o vale-alimentação não é uma obrigação imposta ao empregador. Trata-se de um benefício que a empresa pode oferecer aos seus funcionários, visando promover a saúde e o bem-estar, além de valorizar o pacote de benefícios oferecido aos trabalhadores.

Além disso, constataram que esse benefício passou a ser utilizado pelas empresas, pois de acordo com a OMS, Organização Mundial da Saúde, uma boa alimentação pode aumentar a produtividade em 20%, resultando em melhorias para a empresa. Após entenderem como funcionava o vale alimentação, o estudante [E_2] coletou informações referente ao valor do vale alimentação recebido pelo seu pai que era de R$450,00. Esses dados foram necessários para dar continuidade aos encaminhamentos da atividade.

Ao constatarem que o valor do vale alimentação não seria suficiente para cobrir todos os gastos com alimentação, os estudantes decidiram verificar quais alimentos poderiam ser comprados com esse valor (Figura 44). Para isso, considerando a família do estudante E_2, composta por dois adultos, um adolescente e uma criança, definiram uma lista de alimentos básicos a serem considerados.

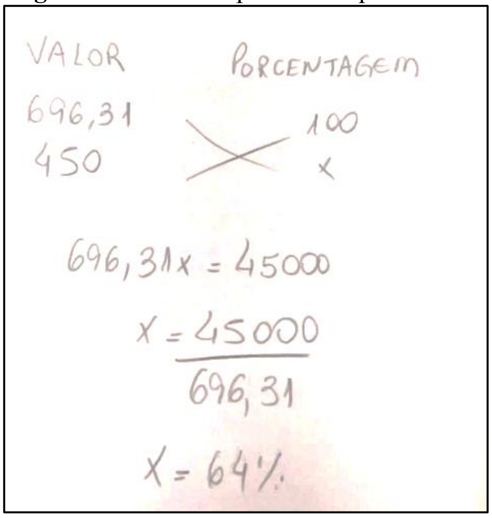
Figura 43: Discussão entre os integrantes do grupo G3

Fonte: Acervo da professora-pesquisadora, 2023.

Após consultar a professora sobre quais alimentos escolher, a mesma destacou que poderiam pesquisar no *site* do DIEESE[14] (Departamento Intersindical de Estudos Econômicos e Socioeconômicos) e verificar a composição da cesta básica[15]. Ao realizar essa pesquisa, constataram que o valor relativo à cesta básica no estado do Paraná, correspondia, em média, a R$696,31[16].

Com base no conhecimento de que o valor do vale alimentação não seria suficiente para cobrir os gastos com os alimentos básicos do mês, os estudantes decidiram calcular a porcentagem que seria paga pelo vale alimentação em relação ao preço da cesta básica. Após realizar os cálculos, eles concluíram que o valor pago pelo vale alimentação correspondia a aproximadamente 64% do preço da cesta básica, como mostrado na Figura 44.

Figura 44: Cálculo apresentado por G3



Fonte: Relatório entregue pelo grupo G3

Dada as informações do DIEESE, os estudantes identificaram que a cesta básica é composta por treze itens, incluindo arroz, feijão, carnes, manteiga, pão francês, frutas, leite, farinha de trigo, óleo de soja, açúcar, batata, café em pó e tomate. Conscientes de que o valor recebido do vale alimentação não seria suficiente para adquirir todos esses alimentos, decidiram restringir a seleção aos alimentos e incluir outros que não estavam na lista, considerados pelo grupo como "essenciais" para complementar a composição dos itens básicos, conforme mostra a Figura 45.

[14] DIEESE: Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos
[15] Cesta Básica é o nome dado a um conjunto de bens necessários a uma família mensalmente. Este conjunto de bens possui gêneros alimentícios, produtos de higiene pessoal e limpeza.
[16] Informação disponível em Cesta básica em Curitiba volta a apresentar alta, indica Dieese; Economia | G1 (globo.com).

Figura 45: Itens básicos definidos por G3

Itens básicos

Arroz – Macarrão – Molho de tomate – Feijão – Café - Óleo de soja - Farinha de trigo - Leite – Açúcar e Bolacha salgada – manteiga – sabonete – shampoo e papel higiênico.

Fonte: Relatório entregue por G3

Os itens básicos definidos pelos estudantes foram arroz, macarrão, molho de tomate, feijão, café, óleo de soja, farinha de trigo, leite de caixinha, açúcar, bolacha salgada, manteiga, sabonete, shampoo e papel higiênico. Para coletar os valores dos itens, os estudantes decidiram realizar uma pesquisa de preços em três supermercados diferentes. Para não haver divergência de marcas, os estudantes definiram que o valor final de cada item seria obtido por meio da média aritmética dos preços encontrados nos estabelecimentos. A quantidade estabelecida para cada item foi inspirada na lista do DIEESE e o preço final foi calculado considerando tais quantidades, de acordo com a Figura 46.

Figura 46: Cálculos apresentados por G3

Item	Quantidade	Preço 1	Preço 2	Preço 3	Média	Valor final
arroz	2 pct - 5kg	R$ 28,80	R$ 29,90	R$ 26,90	R$ 29,53	R$ 59,07
feijão	5 un - 1kg	R$ 8,70	R$ 8,99	R$ 9,85	R$ 8,89	R$ 44,47
molho de tomate	2 un - 300g	R$ 2,60	R$ 1,99	R$ 2,40	R$ 2,19	R$ 4,39
açucar	2 pct - 5kg	R$ 18,50	R$ 17,99	R$ 19,90	R$ 18,16	R$ 36,32
Bolacha salgada	4 un - 370g	R$ 4,70	R$ 4,99	R$ 4,89	R$ 4,89	R$ 19,57
leite	15 un - 1L	R$ 4,70	R$ 4,89	R$ 4,99	R$ 4,83	R$ 72,40
macarrão	4 un - 500g	R$ 4,85	R$ 4,60	R$ 4,29	R$ 4,68	R$ 18,73
farinha de trigo	4 un - 1kg	R$ 5,80	R$ 5,40	R$ 5,29	R$ 5,53	R$ 22,13
óleo de soja	5 un - 1L	R$ 5,49	R$ 5,80	R$ 5,69	R$ 5,70	R$ 28,48
café	3 un - 500g	R$ 14,40	R$ 13,99	R$ 14,29	R$ 14,13	R$ 42,38
manteiga	2 un - 500g	R$ 9,20	R$ 9,50	R$ 9,29	R$ 9,40	R$ 18,80
sabonete	8 un - 85g	R$ 2,99	R$ 2,85	R$ 2,89	R$ 2,90	R$ 23,17
shampoo	1 un - 325ml	R$ 8,99	R$ 9,49	R$ 9,29	R$ 9,32	R$ 9,32
papel higiênico	2pct - 12un	R$ 24,99	R$ 22,99	R$ 23,98	R$ 23,66	R$ 47,31
Total						R$ 446,55

Fonte: Relatório entregue por G3

Como solução para o problema, os estudantes verificaram que o valor dos itens básicos por eles definidos, ficaria próximo ao valor recebido pelo pai do estudante E_2, ou seja, R$ 446,55. Para validar suas conclusões, os estudantes decidiram questionar a mãe do estudante E_2, considerando que ela era responsável pela compra e manutenção dos itens em casa, segundo ela, *alguns itens até que são utilizados em um mês, mas outros são necessários muito mais. Aqui em casa o valor do vale alimentação só compra parte desses alimentos* [trecho da entrevista da mãe do estudante E_2 – relatório entregue pelos estudantes].

Ao compartilhar os resultados com a turma, os estudantes apresentaram uma tabela na lousa, exibindo os itens selecionados por eles e os respectivos valores encontrados. Durante os questionamentos levantados por outros colegas para solucionar o problema, muitos expressaram discordância em relação à escolha feita pelo grupo, principalmente em relação à ausência de produtos como carne, frutas e verduras em detrimento de outros itens.

No relatório entregue, os estudantes apresentaram os encaminhamentos realizados para o desenvolvimento da atividade e concluíram que *o valor do vale alimentação contribui para compra de itens básicos, porém para compra de uma cesta básica, esse valor deveria ser reajustado* [E_{18}].

No questionário, os estudantes consideraram que essa atividade proporcionou diferentes aprendizagens, *aprendi que o vale alimentação é um benefício muito importante para as famílias, pois ajuda na compra de alimentos* [E_{15}], *aprendi como é calculado o valor da cesta básica* [E_{18}], *aprendi que dá para gente pensar em um problema e resolver por meio de cálculos* [E_2].

5.4 **CENÁRIO 4 – ATIVIDADE *CASOS DE COVID-19 NA CIDADE DE APUCARANA***

No cenário 4, o grupo G4 adotou uma abordagem relacionada à pandemia do Covid-19 na cidade de Apucarana, localizada no estado do Paraná. A temática foi escolhida devido à relevância do assunto no momento em que a atividade foi realizada. A proposta de investigação surgiu da curiosidade dos estudantes em investigar uma temática relacionada à saúde das pessoas.

Com base em uma matéria publicada no jornal local da cidade, os estudantes destacaram que, embora o número de vacinados havia aumentado consideravelmente nos últimos meses, o número de positivados ainda era um assunto de grande relevância para a população, principalmente, pois em período de recesso escolar esse aumento havia sido mais acentuado, conforme Figura 47.

Figura 47: Trecho da reportagem relativa ao aumento dos casos de Covid-19

Após o recesso escolar, em menos de 15 dias, várias cidades registraram um aumento nos casos de Covid-19. Esse aumento foi observado tanto nas capitais como nas cidades do interior, devido ao retorno de pessoas infectadas que viajaram durante o período. É importante destacar que as vacinas recomendadas pela OMS contra a Covid-19 têm demonstrado alta eficácia na prevenção de doenças graves, hospitalização e óbito, independentemente das variantes do vírus SARS-CoV-2, incluindo as variantes Delta e Omicron. Além disso, as vacinas também têm se mostrado eficazes na redução da transmissão do vírus, embora não garantam uma proteção completa contra a infecção. É provável que as pessoas vacinadas que contraírem o vírus apresentem sintomas leves ou até mesmo sejam assintomáticas. Isso ressalta a importância da vacinação como uma medida efetiva na proteção individual e coletiva contra a Covid-19. (Fonte: http://www.apucarana.pr.gov.br/site/coronavirus)

Fonte: Relatório entregue por G4

Após a discussão sobre a reportagem, o grupo G4 optou por investigar o aumento de casos positivos de Covid-19 na cidade de Apucarana, ocorrido após o período de recesso escolar. Com o intuito de compreender melhor essa questão, realizaram pesquisas utilizando seus dispositivos celulares. Com isso, coletaram informações (Figura 48) sobre o surgimento do Covid-19 em escala mundial; número de pessoas infectadas; grupos de risco e a taxa de mortalidade associada à doença.

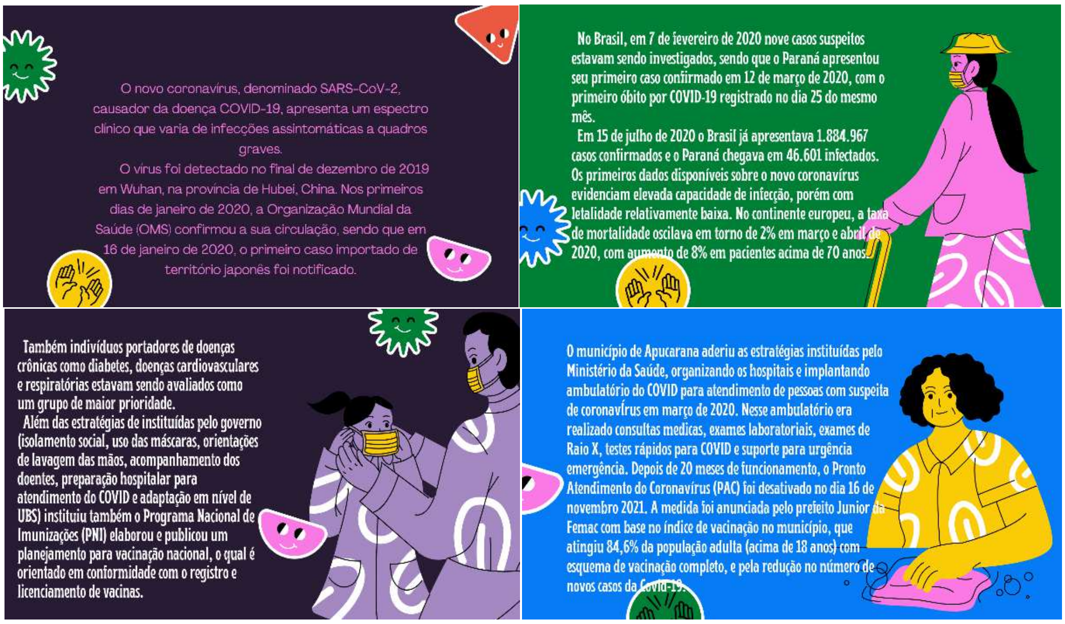
Figura 48: Coleta de informações do grupo G4

Fonte: Acervo da professora-pesquisadora, 2023.

Além disso, os estudantes coletaram informações específicas sobre a pandemia na cidade, utilizando recursos como o acesso ao *site* da prefeitura e às redes sociais da central de casos do município. Por meio dessas fontes, os estudantes puderam obter dados atualizados, orientações oficiais, medidas de prevenção adotadas pela prefeitura, bem como outras informações relevantes relacionadas à situação da pandemia em Apucarana.

Essas informações (figura 49) foram essenciais para direcionar o trabalho de investigação do grupo e auxiliar na matematização do problema investigado.

Figura 49: Coleta de informações para atividade sobre o *Covid-19*



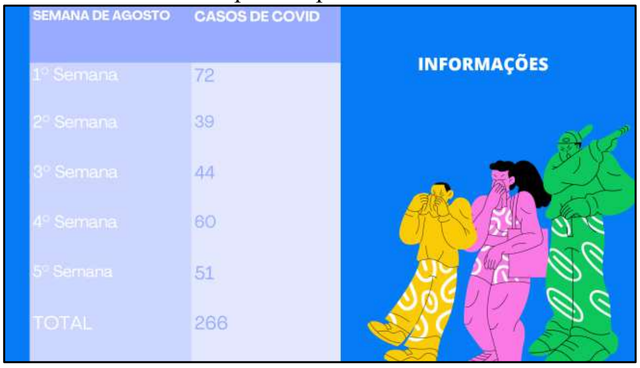
Fonte: Relatório entregue por G4

Com o objetivo de investigar a evolução da pandemia após o período de recesso escolar, os estudantes optaram por coletar dados sobre o número de casos positivados nos meses de julho, agosto e setembro. Considerando que o período de recesso escolar ocorreu na primeira quinzena de julho, os estudantes consideraram que o aumento no número de casos seria observado a partir do mês de agosto.

Verificaram que no mês de julho, o número de infectados havia atingido uma quantidade de 187 casos. Para o mês de agosto, os estudantes coletaram os dados semanalmente e ao realizar o somatório, concluíram que o número de casos positivos de Covid-19 no mês de agosto, totalizou 266 casos. Essa contagem permitiu ter uma visão quantitativa da situação da pandemia na cidade durante esse período específico.

Em diálogo com a professora-pesquisadora sobre os encaminhamentos adotados para responder ao problema, os estudantes destacaram que, com base nos dados de positivados para o mês de agosto (Figura 50), poderiam verificar tendências ou padrões que poderiam ajudar na resposta para o problema investigado.

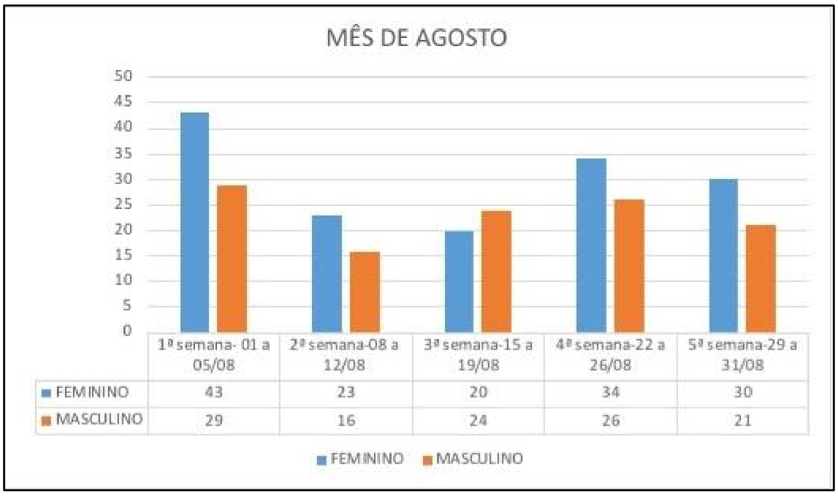
Figura 50: Dados coletados por G4 para atividade *casos de covid-19*



Fonte: Relatório entre por G4.

A fim de investigar possíveis evidências no número de casos positivados, os estudantes decidiram realizar uma análise do total de casos no mês de agosto com base no gênero. Para isso, eles criaram um gráfico de colunas (Figura 51) para visualizar a quantidade de casos positivados entre indivíduos do sexo feminino e masculino. A representação gráfica permitiu uma análise comparativa da quantidade de casos a cada semana.

Figura 51: Número de casos positivados para Covid-19 no mês de agosto



Fonte: Relatório entregue pelo grupo G4

Ao analisar o gráfico, os estudantes constataram que a primeira semana de agosto registrou o maior número semanal de casos positivos, sendo 43 pessoas do sexo feminino e 29 pessoas do sexo masculino, totalizando 72 casos. Além disso, observaram que a quantidade de casos positivados no mês de agosto foi maior entre pessoas do sexo feminino, 150 casos. Essa análise permitiu identificar uma diferença significativa na distribuição de casos entre os gêneros por semana, além de confirmar o aumento de casos após o período de recesso escolar, como mencionado na reportagem, "na primeira semana teve mais casos e se fizer as contas, dá os 15 dias depois das férias, como a reportagem dizia" [E16].

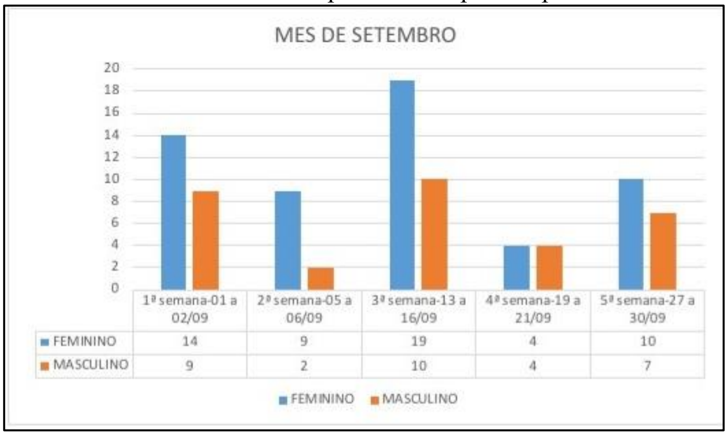
Com o objetivo de comparar o número de casos do mês de agosto com o mês de setembro, os estudantes realizaram uma coleta de informações semelhante à do mês anterior. Eles obtiveram dados sobre o número de casos positivados para o mês de setembro, conforme apresentado na Figura 52. Essas informações foram importantes para realizar a comparação entre os dois períodos.

Figura 52: Dados apresentados por G4 dos *casos de covid-19* no mês de setembro

Fonte: Relatório entregue pelos estudantes do grupo G4.

Ao observarem a quantidade de pessoas infectadas no mês de setembro, que totalizou 88 casos positivos, os estudantes constataram uma redução significativa no número de casos em comparação ao mês anterior. Ao separarem os casos por gênero, observaram que 56 casos ocorreram entre pessoas do sexo feminino e 32 casos entre pessoas do sexo masculino, como apresentado na Figura 53. Mesmo com a diminuição geral de casos, os estudantes notaram que as pessoas do sexo feminino ainda eram as mais afetadas pela doença. Essa análise permitiu verificar tanto a diminuição geral de casos quanto a persistência de diferenças na incidência entre os gêneros.

Figura 53: Gráfico do número de casos apresentados por G4 para o mês de setembro



Fonte: Relatório entregue pelos estudantes do grupo G4.

Quando questionados pela professora sobre que matemática poderiam utilizar para responder ao problema investigado, os estudantes concluíram que poderiam utilizar conceitos relativos à regra de três para apresentar a evolução do número de casos Covid-19, nos meses analisados, como mostra a Figura 55. Essa estratégia permitiu aos estudantes calcular a evolução do número de casos de Covid-19, em percentual, nos meses de agosto e setembro.

Figura 54: Porcentagem do número de infectados pela covid-19

Fonte: Relatório entregue pelos estudantes do grupo G4.

Considerando a quantidade de casos no mês de agosto como 100%, calcularam a taxa percentual corresponde aos casos do mês de setembro. Assim, verificaram uma diminuição de 67% do número total de casos. De maneira análoga a esses cálculos, os estudantes calcularam as taxas percentuais para as pessoas do sexo feminino e do sexo masculino para os meses de agosto e setembro. Com isso observaram que a diminuição para as pessoas do sexo feminino foi de 63%, enquanto as pessoas do sexo masculino foram de 72%, conforme mostra a Figura 55.

Figura 55: Porcentagem do número de infectados por gênero

Fonte: Relatório entregue pelos estudantes do grupo G4.

Após a análise realizada, os estudantes concluíram que, de fato, houve um aumento significativo no número de casos positivos de Covid-19 no mês de agosto, após o período de recesso escolar. No entanto, eles também observaram que, com o avanço da vacinação, a maioria dos casos evoluiu sem gravidade, não necessitando de maiores cuidados, como por exemplo, internação hospitalar. Além disso, destacaram que, durante os meses analisados, não ocorreram registros de óbitos relacionados ao vírus na cidade.

Dessa forma, mesmo que tenha ocorrido um aumento no número de casos positivos de Covid-19 no mês de agosto, os estudantes observaram uma diminuição significativa no mês seguinte, quando as pessoas retomaram suas rotinas habituais. Essa tendência reforçou a importância da vacinação, uma vez que ela desempenha um papel fundamental na redução da gravidade dos casos e na prevenção de complicações mais graves da doença. Concluíram, então, sobre a importância da imunização como uma medida eficaz para controlar a propagação do vírus e minimizar os impactos da pandemia.

No questionário (Anexo D), os estudantes destacaram para questão: *O que você aprendeu com a atividade*, que: *aprendi que apenas a imunização em massa protege as pessoas e diminui o risco de contágio* [E28], *aprendi que o número de internações e de mortes por Covid-19 é consideravelmente maior entre as pessoas que não se vacinaram e que independentemente de qual tenha sido a causa da não aplicação da vacina (negacionismo ou impossibilidade), é evidente que a imunização é fundamental no combate à pandemia* [E28], *aprendi que dá para analisar a evolução da pandemia por usando a matemática e que vacinas podem salvar vidas* [E22].

6. A APRENDIZAGEM NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

6.1. CENAS SIGNIFICATIVAS

O processo de análise iniciou com a organização e seleção de elementos com indicativos de aprendizagem à luz da teorização de Illeris (2007, 2013). Esses elementos foram organizados em cenas significativas. As cenas significativas são organizadas e apresentadas em quadros, com o objetivo de evidenciar aprendizagens associadas aos modos de expressão (BRITO, 2018). Nesse sentido, as cenas exibem transcrições de diálogos, captura de imagens, excertos do relatório entregue, resposta ao questionário, ou qualquer gesticulação que implique indícios de aprendizagem.

Cena 1 – Buscando a compreensão da situação

No Quadro 7 são exibidos excertos de diálogos entre a professora-pesquisadora e os estudantes do grupo G2, durante as etapas iniciais da atividade "Salto Alto". Ao se inteirarem da situação, os estudantes discutem sobre características do sapato e determinam um problema a ser investigado relacionado ao salto de maior altura que uma pessoa pode suportar.

Quadro 7 – Compreensões acerca da situação

A professora realiza questionamentos a fim de garantir que os estudantes do grupo G2 compreendam a situação.

[...] Discussão entre os estudantes e a professora

Prof: Pessoal vocês sabem o que é um sapato de salto alto?
E$_{23}$: É esse aqui *prof* [*pegando um sapato de salto grosso*].
E$_{30}$: Mas esse não tem salto fino.
Prof: Ah, então temos diferenças no tipo de salto alto?
E$_{15}$: Tem salto tipo fino, plataforma, quadrado.
Prof: Verdade, um sapato de salto pode receber diferentes denominações.

E_{23}: Eu nunca que conseguiria andar com um sapato desse [*tentando colocar no pé em um sapato de salto alto*].
Prof: Pois é, será que podemos investigar então o sapato de salto alto do tipo fino?
E_{30}: Tipo o que professora?
Prof: Ah será que dá para saber se podemos usar qualquer salto alto fino?
E_{23}: Acho que não, porque se for muito alto nem consigo andar.
E_{15}: Tem até um vídeo de uma mulher que tá desfilando e cai por conta da altura do salto.
E_{30}: Verdade é até engraçado.
Prof: Então será que não dá para usar um salto fino de qualquer altura?
E_{30}: Se for desse jeito acho que não prof.
Prof: Então porque não investigamos isso? Será que dá para pensar em um problema?
E_{32}: Acho que dá prof.
E_{23}: E se a gente ver qual é a altura máxima do salto?
Prof: Mas o que é máximo, E_{23}?
E_{23}: É o maior.
E_{30}: Acho que ele quer dizer salto de maior altura prof.
E_{15}: Mas será que vale para qualquer pessoa?
Prof: Bom acho que vocês podem investigar talvez alguma numeração e depois ver se vale para qualquer pessoa.

[...] No 2º dia destinado à atividade

Prof: E aí já pensaram em como vão resolver o problema?
E_{12}: Fizemos algumas pesquisas Prof.
Prof: Legal, e encontraram informações necessárias?
E_{30}: Sabemos que uma pessoa que calça 36 tem um pé com 23 centímetros.
Prof: Essa informação pode ser útil para determinar qual seria o sapato de salto de maior altura.

Fonte: Da pesquisa, 2023

Nesta cena é possível identificar duas evidências que demonstram a compreensão da situação real. Ao iniciar a fase de inteiração com a atividade de modelagem, os estudantes se deparam com uma temática a ser investigada envolvendo o uso de sapatos de salto, o que os leva a questionar-se sobre as características e especificidades desse tipo de sapato, para posteriormente denominar e classificá-los corretamente.

Outra compreensão surge na cena quando o estudante E_{23} sugere ao grupo o problema: *qual é a altura máxima que um salto pode ter para não causar desconforto*? A discussão aqui apresentada gira em torno do significado da palavra máximo. De fato, embora os estudantes provavelmente conheçam o que significa "máximo" fora do contexto da matemática, o que deveriam aprender é como essa palavra é entendida na matemática.

Desta cena, o que parece ter se esclarecido para os estudantes é que "máximo" é o *maior valor possível para uma quantidade variável*. A sequência de diálogos indica que os estudantes foram impulsionados a aprender sobre os diversos tipos de saltos, incluindo a indagação sobre qual seria a altura máxima de um salto que a pessoa pode usar.

Neste caso o que aprenderam sobre a situação parece ter sido resultante da interação entre a professora-pesquisadora e os estudantes, apontando para a ideia de Illeris (2013) relativamente à relevância da interação entre o meio e o sujeito para que algo possa ser aprendido.

Cena 2 – Matematizando a situação da realidade

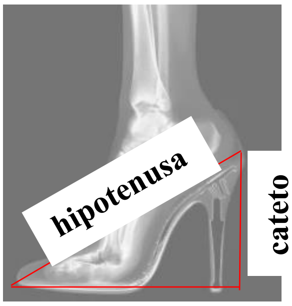
A cena 2 (Quadro 8) retrata os desdobramentos de dois grupos durante a fase de matematização. O Quadro 8 destaca o processo de matematização conduzido pelo grupo G2, que busca investigar "qual é a altura máxima que um salto pode ter para evitar desconforto?". Por sua vez, o Quadro 9 apresenta os desenvolvimentos do grupo G3, que explora a questão da altura máxima de um salto, bem como os efeitos provocados por esse tipo de calçado nas pessoas.

Quadro 8 – Matematização do grupo G2

Os estudantes do grupo G2 buscam articular o conteúdo matemático que estudaram durante aulas regulares de matemática associado ao problema real.

[...] Discussão entre os estudantes

E_{23}: Gente será que dá para usar sobre o negócio que a professora tinha dito na aula?
E_{30}: Do teorema de Pitágoras?
E_{23}: Isso, dos catetos e hipotenusa.
E_{32}: Mas o que seria cada coisa?
E_{30}: Bom acho que dá para considerar que o sapato é um triângulo e o salto é um cateto e o comprimento do pé é a hipotenusa.
E_{23}: Então dá para usar o teorema de Pitágoras!
E_{32}: Acho que dá sim.
E_{30}: Também acho.



A relação matemática que há entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo é denominada Teorema de Pitágoras. Esse teorema, na geometria euclidiana, afirma que em quaisquer triângulos retângulos, o quadrado do comprimento da hipotenusa deste triângulo será igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

[...] Discussão entre os estudantes do grupo e professora

Prof: E aí pessoal já sabem como prosseguir?
E_{23}: Vamos usar o teorema de Pitágoras.
Prof: Legal, e encontraram informações necessárias?
E_{30}: Sabemos que uma pessoa que calça 36 tem um pé com 23 centímetros.
Prof: Essa informação ajuda a responder ao problema?
E_{32}: A medida 23 centímetros pode ser a medida da hipotenusa do triângulo.
Prof: Isso mesmo. Vocês podem considerar a medida da hipotenusa sendo o comprimento do pé da pessoa.

[...] Socialização dos resultados à turma e recortes do relatório entregue

E_{23}: *Prof* o teorema de Pitágoras nos ajudou a "ver" o sapato de salto como um triângulo retângulo.
E_{30}: Vimos que o quadrado do comprimento do pé da pessoa é igual ao quadrado da medida da altura do salto mais o quadrado da distância entre o salto até o início do sapato, ou seja,

$$a = comprimento\ do\ pé$$
$$b = altura\ do\ salto$$
$$c = distância\ entre\ o\ salto\ e\ o\ início\ do\ sapato$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

[...] Resposta ao questionário

[...] Nesta atividade tivemos que determinar quão alto pode ser um salto **[E_{23}]**.
[...] Encontrar o salto de maior altura é encontrar a medida de um dos catetos **[E_{30}]**.
Aprendi como aquilo que se chama teorema de Pitágoras pode ser usado **[E_{23}]**.
Aprendi o que significa a relação entre catetos e hipotenusa no triângulo retângulo **[E_{32}]**.
Aprendi que o teorema de Pitágoras que é a elevado ao quadrado, igual a b ao quadrado, mais c ao quadrado e que pode ser usado para determinar a maior altura de um salto que uma pessoa pode suportar **[E_{32}]**.

Fonte: Da pesquisa, 2023

Na medida em que os estudantes visam definir procedimentos para resolver o problema, surgem compreensões relacionadas à matematização de uma situação da realidade. Quando o estudante E_{23} sugere fazer uso do Teorema de Pitágoras para resolver o problema, revela um entendimento de como a matemática pode funcionar nessa situação.

De acordo com Illeris (2013), o processo de aprendizagem acontece quando os estudantes conseguem se lembrar e, sob determinadas condições, reproduzir ou aplicar aquilo que foi ensinado a eles. Neste sentido, o estudante reconhece que um conteúdo já foi utilizado em outra oportunidade nas aulas e pode ser útil para a situação investigada. De fato, associar as medições de um salto com as três medidas de um triângulo retângulo é indicativo de que esse conteúdo foi apreendido pelo estudante.

Essa compreensão foi impulsionada pelo estudante E_{23} que, ao destacar o uso do conceito matemático – Teorema de Pitágoras para responder ao problema investigado, promoveu incentivo e direcionou a energia mental dos demais integrantes do grupo para o processo de aprendizagem, ampliando assim a compreensão do conceito a partir de uma aplicação prática do conhecimento adquirido ou aprendizagem.

As respostas dos estudantes ao questionário (Anexo B) indicam que foram capazes de resolver o problema investigado após entendimento do conteúdo que haviam estudado. Isso significa que, por meio da atividade de modelagem, os estudantes deste grupo puderam atribuir significado ao conceito matemático abordado nas aulas regulares: *aprendi uma aplicação prática do teorema de Pitágoras*.

No Quadro 9, a cena destaca procedimentos dos estudantes do grupo G3 durante a fase de matematização na atividade denominada “Salto alto”. A partir das discussões, os estudantes buscam informações relativas ao problema e definem a resolução.

Quadro 9 – Matematização do grupo G3

Os estudantes do grupo G3 buscam responder ao problema fazendo uso de diferentes conceitos matemáticos.

[...] Discussão entre os estudantes do grupo e a professora

E_{29}: Precisamos verificar qual é o comprimento do pé da pessoa que usa sapato tamanho 35.

Prof: Vocês coletaram informações do salto que E_{21} trouxe?
E_2: Sim, no salto de 10 centímetros a distância do salto ao antepé era de 10,4 centímetros.
E_{15}: No salto de 8 centímetros a distância do salto ao antepé era de 12 centímetros.
Prof: Será que existe uma relação que leva em consideração essas informações que coletaram?
E_{29}: Prof, parece que conforme a altura do salto aumenta a parte do pé que fica apoiada no chão vai diminuindo.
Prof: Será que pode ter uma medida limite para essa parte então?
E_2: Acho que sim.

[...] Discussão entre os estudantes do grupo

E_{29}: Gente lembra que na atividade do ladrão, utilizamos a relação entre o comprimento do pé e o número do sapato? Dá pra pesquisar qual é e descobrir qual é o tamanho do pé de quem calça 35.
E_2: Verdade.
E_{29}: A fórmula é 5c mais 28 dividido por 4 igual a N. O c é o comprimento do pé e o N é o número do calçado.
E_2: Vamos substituir então.
E_{15}: Fiz aqui, deu 22, 4 centímetros.

Os estudantes percebem que existe um limite para que o pé fique apoiado no chão e definem a partir que essa medida seria de 7,6 centímetros.

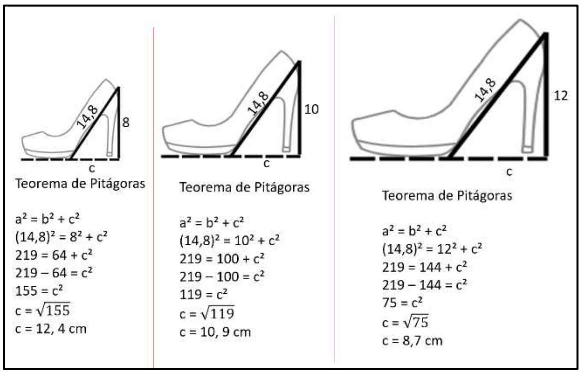
[...] Discussão entre os estudantes do grupo e professora

Prof: Estão conseguindo responder ao problema?
E_{29}: Prof nós conseguimos determinar o comprimento mínimo que a pessoa consegue ficar com um salto.
E_2: Aí usamos essa medida e verificamos qual a porcentagem do pé que fica apoiada no chão, deu 34%.
Sim, no salto de 10 centímetros a distância do salto ao antepé era de 10,4 centímetros.
Prof: Muito bom e será que a partir dessa informação dá para saber até qual é o salto de maior altura para a numeração 35?
E_{29}: Vamos usar o teorema de Pitágoras, acho que vai dar certo.

[...] Socialização dos resultados à turma e recortes do relatório entregue

E_{15}: O salto não pode ser maior que a medida 14,8 centímetros.
E_8: Se for maior o pé fica totalmente inclinado.
E_{21}: Não vai ter triângulo.

Os estudantes justificaram que para quem utiliza numeração 35 poderiam utilizar saltos com até 14,8 centímetros de altura. No entanto essa altura máxima traria muito desconforto e desequilíbrio as pessoas. Para validar o resultado por eles encontrado, os estudantes questionaram a mãe do estudante E_{15} sobre utilizar um salto com essa altura, que segundo ela, poderia até colocar no pé, mas não conseguiria caminhar com o mesmo por muito tempo. Segundo ela, o salto mais suportável, dentre os que haviam utilizado na investigação seria o de altura 8 centímetros.



[...] Em relação ao segundo problema investigado

E_{19}: Na pesquisa que fiz, apareceu que uma relação para determinar a altura do salto ideal.
E_2: Legal, dá para gente tentar fazer com algumas meninas e ver qual é o valor que dá.

$$Altura\ do\ salto\ ideal^{17} = \left(\frac{Estatura}{Comprimento\ das\ pernas} - 1{,}61\right).10$$

Salto ideal

Aluna E28:

Altura = 162 centímetros
Comprimento das pernas = 77 centímetros

$$\left(\frac{162}{77} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}10 - 1{,}61).10$$
$$0{,}49.10$$
$$4{,}9\ centímetros$$

Aluna E8:

Altura = 157 centímetros
Comprimento das pernas = 71 centímetros

$$\left(\frac{157}{71} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}21 - 1{,}61).10$$
$$0{,}6.10$$
$$6\ centímetros$$

Aluna E14:

Altura = 159 centímetros
Comprimento das pernas = 73 centímetros

$$\left(\frac{159}{73} - 1{,}61\right).10$$
$$(2{,}18 - 1{,}61).10$$
$$0{,}57.10$$
$$5{,}7\ centímetros$$

E_{15}: Realizamos essa experiência com algumas meninas da sala e obtivemos valores de salto menores que 6 centímetros. Elas consideram válida essa medida porque consideram que essa altura não causa desconforto.

Fonte: Da pesquisa, 2023

Nesta cena, a aprendizagem relacionada ao conteúdo matemático viabilizou a articulação de tal conteúdo à situação real em estudo. Ou seja, o fato de os estudantes terem aprendido o Teorema de Pitágoras foi determinante para associarem esse conteúdo ao processo de resolução do problema e obtenção de uma solução.

A matematização de uma situação da realidade neste caso acionou elementos da dimensão da aprendizagem caracterizados por Illeris (2013). De fato, a modelagem matemática atuou como incentivo e se conectou com o conteúdo mediante *insights* que articularam um conteúdo previamente abordado com outros e que estes, conjuntamente, possibilitaram resolver o problema.

[17] Disponível em: dicas eficazes para escolher a medida ideal do salto alto (gadoo.com.br)

Nesse caso pode-se considerar que a dimensão do conteúdo se constituiu de um processo cumulativo em que a partir de conhecimentos já estudados anteriormente, os estudantes conseguiram incorporar novos entendimentos, visto que conseguiram matematizar a situação e prosseguir na resolução da atividade.

Usar atividades de modelagem matemática em sala de aula, por um lado, possibilita aos alunos um novo uso da matemática que eles conhecem e, por outro, a oportunidade de o professor trabalhar novos conteúdos matemáticos para que os alunos possam usá-los como ferramenta para responder à investigação realizada, algo que é bastante discutido na literatura, por exemplo, em Almeida Silva e Vertuan (2012), Almeida (2014) e Almeida, (2018).

Cena 3 – Utilizando um recurso tecnológico: o *software* promovendo a aprendizagem

Na cena três (Quadro 10), é possível evidenciar compreensões dos estudantes do grupo G2 em relação à dinamicidade do *software* para representar a situação real. Por meio do recurso Geogebra, os estudantes estabelecem conexões entre a linguagem natural e a linguagem matemática.

Quadro 10 – O *software* como facilitador da aprendizagem

Os estudantes buscam utilizar um recurso tecnológico para responder ao problema investigado.

[...] *Discussões entre os estudantes e a professora*

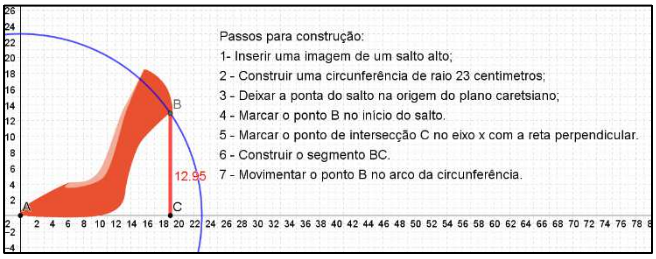
E_{12}: Será que a gente vai ter que ir fazendo vários cálculos de cada vez?
E_{30}: Vai dar muito trabalho.
E_{23}: Galera, eu sei mexer no geogebra, acho que dá para tentar fazer isso nele.
E_{32}: Geogebra, como assim?
E_{23}: Geogebra é um programa que meu pai mexe e me ensinou. Dá para fazer algumas simulações nele e ver o que acontece.
E_{32}: Mas estamos sem computador, como vamos fazer?
E_{23}: O geogebra dá para mexer até no celular, mas dá para pedir para a professora o notebook dela emprestado. Quer que eu mostre para vocês?
E_{30}: Prof pode vir aqui? Pode emprestar seu computador?
Prof: Posso sim, só um minuto.
Prof: O que querem fazer no computador?
E_{23}: Quero mostrar o geogebra para eles.
Prof: Legal, e pensam em usar ele para ajudar a responder o problema?
E_{23}: sim.
Prof: Ótimo, podem usar!

[...] *Discussões entre os estudantes*

E12: Será que dá para gente fazer um triângulo retângulo?
E30: Acho que deve dar, né E23?
E23: Sim, no Geogebra dá para fazer muitas coisas, eu acho que a gente pode tentar fazer uma simulação do que acontece quando o salto vai aumentando. Meu pai pode me ajudar nisso.
E32: Nossa aí é massa heim.
E23: Dá para eu perguntar para meu pai e na próxima aula podemos fazer, o que acham?
E12: Pode ser**.**

[...] *Discussões entre os estudantes e a professora*

Prof: E aí conseguiram utilizar o *software* Geogebra?
A32: Sim prof, a gente fez tipo uma simulação.
E23: A gente inseriu a imagem de um salto e usou a medida 23 centímetros em uma circunferência e essa medida foi o raio.



Prof: Certo, e chegaram na resposta para o problema?
E15: Dá para movimentar aqui [apontando para a construção feita no *software*].
E30: Prof, quando aumentamos o segmento associado ao salto, ele vai se aproximando da parte que fica apoiada no solo.
E19: Ele vai diminuindo a distância do salto ao antepé.
Prof: Ótimo e tem uma altura limite que o salto alto que uma pessoa consegue aguentar?
E23: Sim prof, pelo que vimos o máximo que alguém que usa sapato 36 pode aguentar é quase 14 centímetros.
Prof: Que legal o que vocês fizeram no geogebra, assim vocês conseguem analisar visualmente o que está acontecendo conforme o salto vai aumentando.
E12: Eu achei muito massa prof. O pai do E23 ajudou ele a fazer e ele nos ensinou.

[...] Resposta ao questionário - Descreva o que foi diferente para você nessa atividade com relação às atividades que constam na apostila.

Eu achei legal conhecer o *software*. As atividades da apostila nunca pedem que a gente faça esse tipo de coisa [E19];
Com o *software* não precisamos fazer os cálculos no papel porque ao movimentar o ponto, vai dando para saber a que altura o salto pode estar, isso é diferente de usar a apostila [E23].
Utilizar o geogebra. Eu não conhecia, foi legal aprender sobre seu funcionamento E32.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

Segundo Illeris (2013), a dimensão do incentivo relacionado à *sensibilidade* envolve a capacidade de perceber, interpretar e responder às informações e estímulos do ambiente. Neste sentido, ao perceberem a possibilidade de associar as medidas de um triângulo retângulo à imagem de um sapato de salto, os estudantes reconhecem a necessidade de realizar diversas substituições na relação pitagórica, para obter as medidas relacionadas à altura dos saltos. Além disso, um dos estudantes do grupo menciona ter conhecimento sobre o *software* Geogebra e sugere sua utilização para resolução do problema.

Desta forma, incentivados a conhecer e fazer uso do *software*, os estudantes são direcionados a adquirir conhecimentos sobre as ferramentas e aplicabilidades do *software*. a fim de construir um simulador para representar a situação real. Ao inserir a imagem do salto; construir a circunferência; traçar segmentos; medi-los, e movimentá-los, evidencia que os estudantes desenvolveram a *funcionalidade*, que por sua vez, contribuiu para a construção de significados (ILLERIS, 2007).

Fazer uso do *software*, oportunizou aos estudantes, realizar simulações e fazer previsões. Neste sentido, a *socialidade* do processo de aprendizagem pode ser evidenciada em resposta ao problema investigado. Em atividades de modelagem, a utilização de recursos tecnológicos contribui para o desenvolver habilidades, estimula a criatividade, a curiosidade e a capacidade de aplicar a matemática em contextos reais (BORSSOI, 2021).

Além disso, na cena em questão, é evidenciado que o estudante E_{23} já conhecia o *software*. Ele menciona ter aprendido a utilizar o recurso com seu pai, o que evidencia o processo interno de construção de conhecimento ao relacionar a situação investigada com suas experiências anteriores.

Quando questionados sobre o que foi diferente nesta atividade, das demais realizadas com o material apostilado, os estudantes revelam que aprender sobre esse recurso tecnológico foi interessante pelo fato de que puderam escolher a maneira de resolver o problema, sem precisar dos recursos que estão habitualmente acostumados a utilizar nas aulas: *a gente não precisou responder o problema no papel, deu para usar o computador* [E_{30}], *as atividades da apostila nunca pedem que a gente faça esse tipo de coisa* [E_{19}]. *Eu não aprendi a mexer nele ainda, mas achei bem legal conhecer esse software*. [E_{12}]: *Com o software não precisamos fazer os cálculos no papel porque ao movimentar o ponto, vai dando para saber a que altura o salto pode estar*. [E_{15}].

Aprender sobre o *software* pode ser considerado um facilitador da aprendizagem. No entanto, cabe destacar que ninguém aprende pelo outro, ou seja, cada estudante obteve seu processo individual de aprendizagem ao manipular o *software*, desta forma, pode ser observado que o ritmo dessa aprendizagem variou de estudante para estudante, ou seja, embora todos estudantes do grupo tiveram a oportunidade de desenvolver suas próprias habilidades e competências ao interagir com o *software*, explorando suas ferramentas e aplicabilidades, nem todos conseguiram, de fato, aprender a utilizar o *software* naquele momento.

Cena 4 – Compreendendo o que é otimizar

Nesta cena, durante o diálogo sobre a temática "Otimização do Tamanho de uma Embalagem", os estudantes do grupo G4 buscam compreender o conceito de otimização e sua aplicação em um contexto real, como retratado no Quadro 11. No Quadro 12, é destacada uma discussão em que a professora incentiva os estudantes do grupo G3 a utilizar os conceitos aprendidos para calcular o volume, com base nas três caixas construídas. A cena se desenvolve enquanto a professora percorre a sala e questiona o grupo sobre as estratégias adotadas para resolver o problema em questão.

Quadro 11: Compreendendo um conceito matemático

Aprendendo o que é otimizar

[...] Discussões entre os estudantes e a professora

E_{12}: Gente eu não entendi direito o que é esse negócio de otimizar.
E_{32}: Pelo que a prof falou e do que está aqui na *internet*, otimizar uma embalagem é construir a embalagem mais eficaz.
E_{12}: Tipo a que cabe mais coisa dentro?
E_{23}: Isso mesmo, otimizar uma embalagem é escolher o tamanho de embalagem correto e os materiais certos para equilibrar a durabilidade e o custo.
E_{12}: Envolve o quanto de coisa pode caber dentro e o material então.
E_{23}: Prof a gente vai ter que construir diferentes embalagens então?

Prof: Sim, vocês podem utilizar os sulfites que disponibilizei.
E_{30}: A gente só vai dobrar a folha assim? [gesticula indicando como dobrar a folha]
E_{23}: Então a gente não pode cortar a folha, porque vamos perder material.
Prof: Vou mostrar um vídeo para vocês de como podem planificar a embalagem.
E_{30}: Gente, vamos ter que ver como otimizar o espaço de uma embalagem feita de uma sulfite
E_{12}: Deixa-me fazer uma, aí podemos ter ideia de como vai ficar.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

Em atividades de modelagem matemática, a dimensão da interação pode se iniciar na fase de inteiração em que os estudantes organizam dados e procuram entender a situação. Quando se deparam com a situação a ser investigada "otimização do tamanho de uma embalagem", o estudante E_{12} destaca a falta de entendimento sobre o significado do termo "otimizar". Neste momento, os demais integrantes do grupo, buscam informações necessárias para sanar a dúvida do estudante e complementar seus entendimentos sobre a situação.

Ao dialogarem sobre o que cada um havia entendido a respeito, os levou a uma compreensão do termo otimizar, que corresponderia escolher as dimensões da embalagem corretamente para obter o maior espaço interno, equilibrando durabilidade e custo. Deste modo, ao expressar suas opiniões sobre o entendimento do conceito, os estudantes puderam construir significado, o que conforme Illeris (2013) relaciona-se à dimensão da aprendizagem relacionada ao conteúdo.

Todavia, a dimensão do incentivo também esteve presente nessa cena, pois motivados em determinar a embalagem com maior espaço interno, a partir da folha de sulfite A4, os estudantes, em grupo, iniciam os primeiros procedimentos para responder o problema investigado.

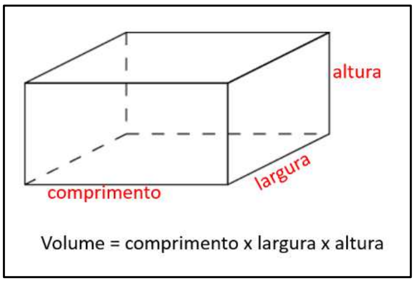
Diante dessa situação, fica evidente que a modelagem matemática, ao promover o ambiente colaborativo, desempenha um importante papel no processo de aprendizagem dos estudantes, visto que durante o desenvolvimento da atividade, os estudantes demonstram interesse a alcançar um objetivo comum, compartilhando ideias, argumentos e pensamentos que, neste contexto, possibilitaram compreender o conceito de otimização atrelado à situação problemática investigada.

Quadro 12: Calculando volumes

Os estudantes buscam compreensões sobre o cálculo do volume

[...] Primeira discussão entre estudantes e professora

E_{12}: Prof a gente construiu as embalagens.
Prof: Ótimo! E aí conseguiram chegar a uma conclusão?
E_{32}: Acho que não, porque fizemos a embalagem com 1 centímetro, 4 centímetros e 7 centímetros, mas ainda não sabemos qual tem maior espaço?
E_{23}: Nós pensamos que quanto maior a altura, maior vai ser o espaço interno.
Prof: E como vocês conseguem comprovar essa ideia?
E_{12}: Não tem um cálculo prof?



Prof: Quando vocês constroem as embalagens, podemos obter três dimensões certo?
E_{30}: É, tem a largura, altura e o comprimento.
Prof: Tem alguma relação que trabalha com essas dimensões
E_{23}: Gente, tem o volume! Não é professora?
Prof: Sim!
E_{23}: Volume é altura vezes comprimento vezes largura?
Prof: É sim. Vocês conseguem encontrar qual embalagem tem o maior volume.

[...] Segunda discussão entre estudantes e professora

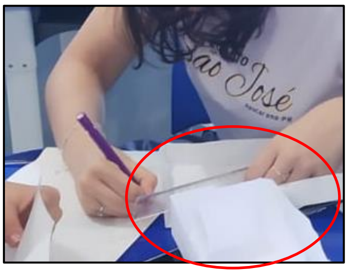
Prof: Conseguiram comprovar a ideia de vocês?
E_{23}: Não deu certo prof. A embalagem com 7 centímetros teve volume menor que a embalagem com 4 centímetros.
Prof: O que está acontecendo com as medidas quando vocês aumentam ou diminuem a altura da embalagem?

Volume = comprimento x largura x altura

$$V = 27 \times 19 \times 1 = 513$$

$$\boxed{V = 13 \times 21 \times 4 = 1092}$$

$$V = 7 \times 14 \times 7 = 686$$



E_{32}: A folha de papel é retangular. Quando vamos construir a caixa construímos um quadrado em cada canto. O tamanho do quadrado é a altura da caixa.
Prof: Legal, sendo assim o que acontece com as dimensões da embalagem?
E_{23}: O comprimento diminui e a largura também.
Prof: Será que dá para pensar em alguma relação matemática que considere as três dimensões para responder o problema?

Fonte: Da pesquisa, 2023.

No Quadro 12, ao dialogar com a professora sobre os encaminhamentos adotados na atividade. Os estudantes explicam que construíram as embalagens, selecionando alturas de forma aleatória. No entanto, admitem não conseguir responder o problema apenas analisando visualmente as embalagens.

Como não sabiam como proceder na atividade, a professora os incentivou a reorganizar suas estruturas mentais e articularem ao conceito matemático relacionado ao cálculo do volume de uma embalagem no formato de paralelepípedo. Quando os estudantes calculam os volumes das três embalagens, multiplicando o comprimento, largura e altura de cada embalagem, o estudante E_{23} percebe que a ideia inicial *quanto maior a altura da embalagem, maior é o aproveitamento do espaço*, não era uma hipótese válida para a situação, ou seja, não se tratava de uma relação proporcional.

Essa consideração levou os estudantes a reformular uma nova hipótese passando a verificar o que acontece com as medidas do comprimento, largura e altura para diferentes embalagens. Essas ações direcionam os estudantes para ir em busca à situação investigada.

Dessa forma, foi possível evidenciar que a dimensão do conteúdo, que envolve o cálculo do volume de um paralelepípedo, foi impulsionada diretamente pela dimensão do incentivo, promovida pelos diálogos entre a professora e os estudantes. No entanto, os incentivos que levaram a essas compreensões foram influenciados por essas relações. A dimensão da interação proporciona os impulsos iniciais, desencadeando a articulação entre as dimensões do conteúdo e do incentivo, ao mesmo tempo em que também é incrementada por meio dessa articulação (ILLERIS, 2013).

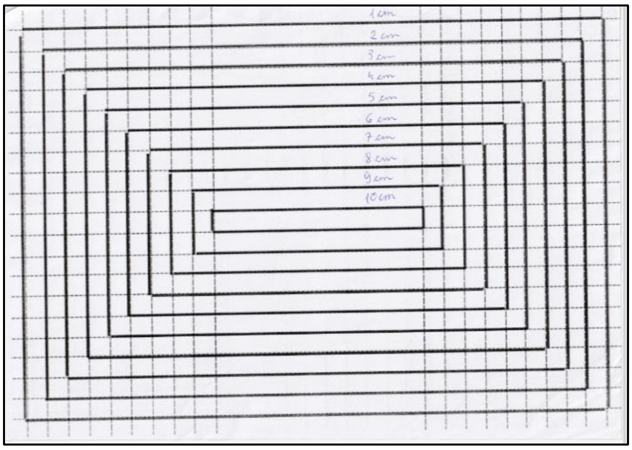
Nessa cena, pode-se considerar que a atividade de modelagem matemática desempenha um papel importante na atribuição de significados aos conceitos matemáticos. Por meio das interações, os estudantes foram guiados a refletir sobre suas estratégias e a ajustar seus entendimentos, resultando em uma compreensão do conteúdo matemático.

Cena 5 – Determinando uma resposta para o problema

A cena significativa ressalta as compreensões dos estudantes do grupo G2, em relação à resposta o problema relacionado à “otimização do tamanho de uma embalagem” como mostra o Quadro 13, enquanto o Quadro 14 representa os procedimentos adotados pelo grupo G3 para responder ao problema investigado: vale alimentação.

Quadro 13: Resolução do grupo G2.

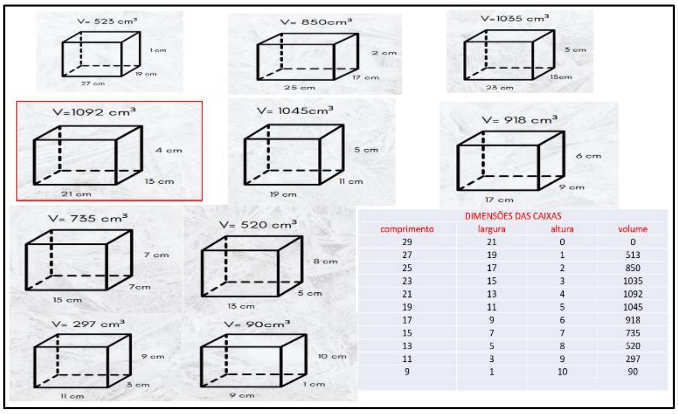
Responder ao problema qual maior volume da embalagem?



Considerando nova ideia do grupo G2, os estudantes optaram por esboçar em uma única folha de sulfite linhas que representariam a base da caixa aumentando a cada 1 centímetro sua altura. Feito isso calcularam os volumes das caixas com altura variando entre 1 a 10 centímetros.

[...] Socialização dos resultados à turma

E₁₂: Primeiro nós construímos as caixas e verificamos que não ia dar para dizer qual seria a mais otimizada. Depois representamos em uma única folha o que acontecia ao aumentar a altura a cada 1 centímetro. Calculamos os volumes e colocamos os resultados em uma tabela. Conseguimos verificar que a caixa mais otimizada é a que possui 4 centímetros de altura e sua base deverá ser de 13cm x 21cm.



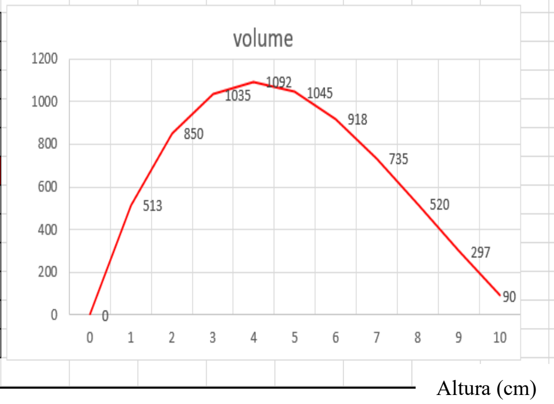
DIMENSÕES DAS CAIXAS

comprimento	largura	altura	volume
29	21	0	0
27	19	1	513
25	17	2	850
23	15	3	1035
21	13	4	1092
19	11	5	1045
17	9	6	918
15	7	7	735
13	5	8	520
11	3	9	297
9	1	10	90

[...] Discussão entre professora e estudantes

Prof: Muito bem, vocês conseguem representar esses cálculos de outra maneira?
E₁₂: A professora quer que encontremos uma fórmula?
Prof: É possível vocês encontrarem uma fórmula, pois para calcular o volume vocês não multiplicam as três dimensões? Vocês verificaram que ao aumentar a altura da caixa, a área da base é influenciada pelo comprimento e pela largura. Tentem encontrar uma relação que represente essa situação.
E₂₃: Será que dá para fazer um gráfico?
Prof: Penso que sim! Vocês poderiam relacionar a altura com o volume, por exemplo.
E₃₂: Tá prof. Nós vamos pensar nisso.

comprimento	largura	altura	volume
29	21	0	0
27	19	1	513
25	17	2	850
23	15	3	1035
21	13	4	1092
19	11	5	1045
17	9	6	918
15	7	7	735
13	5	8	520
11	3	9	297
9	1	10	90



[...] Respostas ao questionário:
Quais as grandezas envolvidas para resolver o problema? Foi possível relacioná-las por meio de qual relação matemática? E O que você pensa ter aprendido resolvendo o problema da determinação do tamanho da caixa que pode ser construída usando uma folha de papel sulfite (A4)?

Ao construir várias embalagens, verificamos que a altura, o comprimento e a largura são utilizados para calcular o volume. A relação altura e volume não é uma relação entre grandezas diretamente proporcionais [E_{12}].
Sabendo que o volume é o que cabe mais em um recipiente e é calculado multiplicando altura, comprimento e largura, montamos uma tabela e colocamos quais seriam os volumes aumentando 1 centímetro na altura. O resultado obtido para caixa mais otimizada foi a embalagem com 4 centímetros de altura [E_{23}].
Trabalhamos com o que aprendemos em aula para resolver e colocamos em prática [E_{30}].

Fonte: Da pesquisa, 2023.

Considerando a nova ideia do grupo G2, os estudantes optaram por representar, em uma única folha de sulfite, as dimensões relativas ao comportamento das medidas do comprimento e largura das embalagens, aumentando a altura em 1 centímetro, variando entre 0 e 10 centímetros. Embora a representação ser bidimensional devido à folha de sulfite, o objetivo era determinar a embalagem que apresentasse a melhor combinação entre as medidas do comprimento, largura e altura para o cálculo do volume. Essa melhor combinação corresponderia à embalagem com o maior espaço interno.

Os incentivos atrelados à solução para o problema, conduziram os estudantes a determinar o volume para cada uma das embalagens. Ao organizarem os dados em uma tabela e analisarem as diferenças entre os volumes das embalagens, os estudantes puderam compreender a não proporcionalidade entre a altura e o volume. Essa interação com os dados e a observação das diferenças contribuíram para a compreensão do problema e para a identificação da embalagem com o maior espaço interno.

No relatório entregue, os estudantes converteram os dados da tabela em um registro gráfico. Essa conversão de registros, motivada pela interação com a professora e pela necessidade de descrever o comportamento do volume das embalagens, permitiu uma melhor visualização e comunicação das informações. Na modelagem matemática, as representações semióticas desempenham um papel fundamental na comunicação e compreensão dos problemas e conceitos matemáticos (VERONEZ, 2013).

A atividade de modelagem matemática proporcionou aos estudantes uma experiência, na qual as dimensões do incentivo, do conteúdo e da interação foram evidenciadas durante a fase de resolução. O incentivo relacionado à nova ideia, o conteúdo matemático relacionado às medidas e cálculos de volume, e a interação com os dados e as representações, por meio do incentivo da professora foram essenciais para que determinassem uma relação que descrevesse o comportamento do volume das embalagens.

Quadro 14: Matematizando a situação

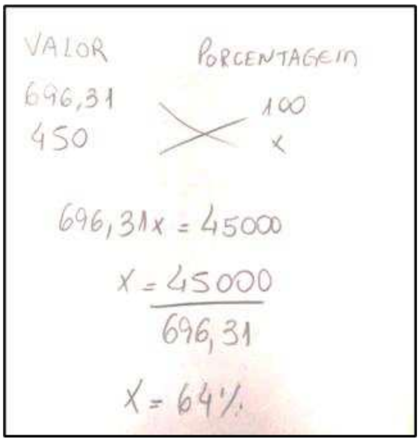
Os estudantes determinam procedimentos para o desenvolvimento da atividade

[...] Discussões entre os estudantes e a prof

E$_{18}$: Gente sabemos que o vale alimentação do pai do E$_2$ é R$450, 00.
E$_{15}$: Vimos também que o valor da cesta básica no estado do Paraná está custando, em média, R$696,31.
E$_{21}$: Então já sabemos que o benefício do vale alimentação não cobre o valor da cesta básica.
E$_{18}$: Prof, o que podemos fazer já que sabemos que o valor do benefício não é suficiente?
Prof: Vocês podem verificar a relação entre os valores.
E$_{18}$: Tipo calcular a porcentagem referente?
Prof: Isso mesmo, pode ser uma possibilidade.

[...] Discussões entre os estudantes

E$_2$: No cálculo da porcentagem eu faço por regra de três. O valor da cesta é referente ao 100 por cento e o valor do vale alimentação é referente ao x. daí multiplicamos cruzado. [...] vai dar aproximadamente 64%.
E$_{29}$: Pouco mais de 50% então.
E$_{15}$: É pouco né.
E$_{18}$: É uma pequena ajuda. Mas entre ter esse benefício e não ter, é melhor ter.



[...] No 2º dia destinado à atividade

E$_{15}$: Já que o problema é investigar se o vale alimentação é suficiente para compra de alimentos básicos, podemos verificar quais são esses alimentos.
E$_{18}$:Podemos selecioná-los dentre os itens da cesta básica.

$\mathbf{E_{2}}$: Vamos selecioná-los então.
$\mathbf{E_{18}}$: Penso que é melhor não considerar nem itens perecíveis, nem verduras e legumes.
$\mathbf{E_{15}}$: Ok, vamos fazer uma lista então.
$\mathbf{E_{18}}$: Como vamos fazer para pesquisar os valores dos produtos?
$\mathbf{E_{15}}$: Dá para verificar em vários mercados.
$\mathbf{E_{29}}$: Mas é melhor fazer uma média dos preços, fica mais real.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

No Quadro 14, os estudantes do grupo G3 utilizam as informações coletadas para matematizar a situação. Eles calculam a porcentagem correspondente ao valor do vale alimentação em relação ao custo da cesta básica. Essas ações exemplificam a presença da dimensão do conteúdo nessa cena, que envolve, entre outros aspectos, a capacidade de lidar de forma prática com os desafios que surgem (ILLERIS, 2013).

Após constatar que o valor do vale alimentação correspondia a 64% do custo da cesta básica, os estudantes decidem identificar quais itens básicos poderiam ser adquiridos com esse valor. Ao matematizar a situação, os estudantes do grupo, buscam transpor a linguagem natural em linguagem matemática.

De acordo com Almeida (2018, p. 2), "a matematização é um aspecto relevante no desenvolvimento de atividades de modelagem". Nesta fase, hipóteses são elaboradas, variáveis são selecionadas, além de serem realizadas simplificações necessárias para a resolução do problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Os encaminhamentos propostos pelos estudantes, ilustram a maneira espontânea de tomada de decisão para o levantamento de dados e informações e a matemática empregada na resolução.

Illeris (2013, p. 20) considera que "os estudantes devem absorver ou aprender aquilo que o professor está ensinando, ou seja, relacionar psicologicamente o que é ensinado com o que já devem ter aprendido". Neste sentido, as ações dos estudantes nesta cena demonstraram que os estudantes conseguiram se lembrar daquilo que lhes ensinaram e conseguiram aplicá-lo e envolvê-lo em uma nova aprendizagem.

Cena 6 - Identificando uma situação-problema

Considerando as atividades do terceiro momento de familiarização, essa cena significativa está relacionada a explorar uma situação da realidade, pensada pelos próprios estudantes, levando em consideração seu cotidiano. O Quadro 15 refere-se ao grupo G3 e o Quadro 16, ao grupo G4.

Quadro 15: Identificando uma situação problema

Os estudantes manifestam compreensões sobre o que seria um problema do mundo real

[...] Discussões entre os estudantes

E_{18}: Vamos investigar sobre o que?
E_{15}: A prof deixou livre para gente escolher o tema.
E_{18}: Mas pode ser qualquer coisa? Tipo sobre qualquer assunto né?
E_{21}: Sim, podemos investigar alguma coisa que temos curiosidade, que faça parte da nossa realidade.
E_{15}: Alguém tem alguma sugestão?
E_{2}: Meus pais sempre dizem que os alimentos estão muito caros. Será que daria para gente fazer uma investigação sobre isso?
E_{18}: Dá sim, só precisamos saber se todos topam.
E_{15}: Por mim, tranquilo.
E_{3}: Para mim também.

[...] Discussão entre os estudantes do grupo e a professora

Prof: E aí já sabem o que vão investigar?
E_{18}: Temos uma ideia.
E_{15}: Queremos investigar a alta nos preços dos alimentos.
Prof: Muito bom. É um assunto interessante.
E_{18}: O problema que temos que formular também precisa ser real não é prof.
Prof: Isso mesmo. Vocês precisam definir um problema que esteja relacionado a situação-problema.

[...] Discussão entre os estudantes na 2º aula destinada à atividade

E_{15}: Gente o que vocês acham então de pesquisar sobre o valor da compra do mês ou algo assim?
E_{18}: É uma possibilidade.
E_{2}: Eu estive pensando e o que vocês acham de investigar um problema que acontece lá em casa.
E_{15}: Qual seria?
E_{2}: Meu pai recebe vale alimentação. Será que podíamos investigar se com esse valor dá para comprar itens básicos para o mês?
E_{15}: Nossa esse problema é super real. Vai dar certinho para investigar.
E_{18}: Boa.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

Nesta cena, pode-se considerar que os estudantes manifestaram aprendizagens e dificuldades sobre como poderiam definir o problema para ser investigado. Kaiser e Schwarz (2010) defendem que definir um problema para ser solucionado é a considerada a parte mais importante e ambiciosa no processo de modelagem matemática e que, em geral, é negligenciada nas aulas de matemática.

Entretanto, diferentemente de um problema de aplicação no qual os estudantes estão acostumados a resolver em sala de aula, manipulando algoritmos para obter a solução, os problemas de modelagem exigem dos estudantes uma postura autônoma e criativa para trabalhar matematicamente em uma situação da realidade.

Neste sentido, ao se deparar com a proposta de pensar em uma situação real e definir um problema a ser investigado contribuiu para compreensão de que ao investigar uma situação e definir um problema em atividades de modelagem, pode ser encarada como um meio para promover uma aprendizagem que faça sentido e tenha significado, uma vez que a resolução resulta de um processo de clarificação progressiva sobre relações de meio-e-fim fundamentadas na formulação, verificação e rejeição de hipóteses alternativas (KAISER; SCHWARZ, 2010). O estudante precisa vivenciar atividades de modelagem matemática a fim de 'aprender' a desenvolvê-las.

Aliado às fases da modelagem, a dimensão da interação pode ser evidenciada quando os estudantes discutiram sobre suas primeiras ideias para a temática. Essas ideias serviram à integração pessoal dos estudantes com grupo, construindo assim a socialidade do indivíduo (ILLERIS, 2013).

Quadro 16: Casos de Covid-19 na cidade de Apucarana.

Os encaminhamentos para investigar um problema

[...] Discussão entre os estudantes

E$_{10}$: Gente nessa atividade precisamos definir uma situação para pesquisarmos.

E$_{16}$: Pode ser sobre qualquer assunto.
E$_{23}$: Que tal fazermos sobre futebol?
E$_{26}$: Eu gostaria de pesquisar algo relacionado à saúde.
E$_{28}$: Bom, dá para considerar o aumento nos preços dos combustíveis ou algo assim.
E$_{31}$: E se pesquisássemos sobre a pandemia?
E$_{23}$: Acho que podemos fazer uma pesquisa.
E$_{10}$: E se pesquisarmos algo e na próxima aula a gente traz algumas informações sobre o tema que queremos investigar e daí podemos fazer uma votação.

[...] Discussão entre estudantes e Prof

Prof: Oi pessoal, e aí conseguiram pensar em algum tema?

E_{16}: Por aqui temos algumas ideias de tema, mas não conseguimos definir sobre o que pesquisar.
E_{23}: Pensamos em futebol, saúde, pandemia e alta nos preços dos combustíveis.
***Prof*:** Muito bom. Como vocês têm diferentes possibilidades, tentem investigar a princípio sobre elas para depois definir sobre o que vão fazer.
E_{10}: É isso mesmo que pensamos em fazer.

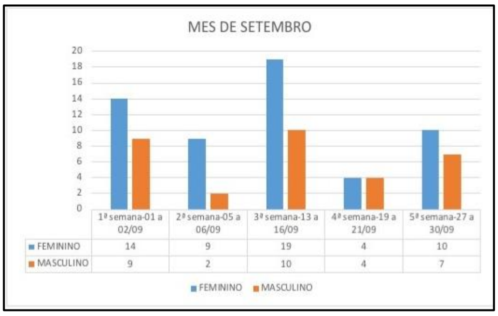
[...] Na 2ª aula destinada à atividade

E_{10}: E aí pessoal, vocês realizaram as pesquisas?
E_{23}: Eu até pesquisei mas não sei o que poderíamos investigar sobre futebol, a chance do meu time ganhar o campeonato, mas ainda não sei.
E_{26}: Eu pensei sobre a saúde, mas ficou muito vago, pois tem muita coisa para ser pesquisada, como casos covid-19, sedentarismo, doenças.
E_{31}: Eu e o E_{10} pesquisamos sobre a pandemia. Minha mãe trabalha na saúde e disse que mesmo com as vacinas, o número de casos de covid-19 ainda continua sendo alto em alguns meses. A única diferença é que os casos não são tão graves.
E_{23}: E se então fizéssemos sobre a pandemia mesmo. É um tema atual ainda.
E_{26}: Dava para pesquisar os casos da nossa cidade então.
E_{10}: Então vocês topam fazer sobre essa temática?
E_{26}: Eu topo.
E_{23}: Eu também.

[...] Discussão entre estudantes e professora

***Prof*:** Escolheram a situação que vão investigar?
E_{10}: Sim! Vamos ficar com o tema da pandemia do covid-19.
Prof: Legal, e pensaram no problema?
E_{23}: Ainda não, mas pensamos em verificar sobre nossa cidade mesmo.
Prof: Legal, tem várias vertentes que poderiam investigar como o número de casos, número de pessoas que faleceram, a vacinação, diminuição do número de casos.
E_{10}: Verdade prof acho que vai ser legal.

Após a discussão os estudantes realizam pesquisas e encontram informações no site da prefeitura da cidade, como número de vacinados, número de casos positivados diários, número de mortes e entre outros.



[...] Socialização dos resultados à turma

E_{10}: Quando a gente decidiu pesquisar sobre esse tema, fomos em busca de definir um problema que pudéssemos investigar. Durante as pesquisas, vimos uma reportagem que destacava o aumento no número de casos de covid-19 após período de festividades (disponível em Aumento de casos de Covid-19 é esperado após festividades, diz infectologista (cnnbrasil.com.br). Com isso, decidimos verificar se de fato isso aconteceu na cidade de Apucarana.

E_{16}: Sendo assim, resolvermos investigar o período pós recesso no mês de julho, considerando que muitas famílias viajaram nesse período.

E_{23}: Assim, decidimos investigar os casos de covid-19 para os meses de agosto e setembro. Com isso, concluímos que no mês de agosto no número de casos realmente havia sido maior com relação ao mês de setembro, o que nos fez considerar realmente o número de casos aumenta após períodos de recessos.
E_{26}: No mês de julho de 2022, haviam sido 94 casos.
E_{28}: Verificamos que em relação ao mês de setembro houve uma diminuição de 63% para as pessoas do sexo feminino e 72% para as pessoas do sexo masculino. No geral essa diminuição foi de 67%.
E_{10}: Mesmo com a vacina não podemos relaxar. Evitar aglomerações ainda é uma forma de garantir a diminuição do número de casos.

Fonte: Da pesquisa, 2023.

O grupo G4, ao iniciar a atividade de terceiro momento de familiarização não havia estabelecido *a priori* o tema que iria investigar. No entanto, após o processo de interação com a atividade, passou a levantar possibilidades de temática que poderiam culminar em um problema a ser investigado.

Neste contexto, verificou-se que a interação dos estudantes ao definir a temática investigada promoveu os impulsos necessários para o processo de aprendizagem. De fato, essa interação entre o grupo se manteve durante todo desenvolvimento da atividade, seja ao decidirem a situação a ser estudada, coletar dados e informações, bem como todo o encaminhamento da definição e resolução do problema proposto.

Sendo assim, por meio da dimensão da interação, os estudantes apresentaram aprendizagens relativas à autonomia, visto que puderam estabelecer decisões, refletindo com a professora sobre orientações ou validações dos procedimentos utilizados.

Dentre os possíveis temas levantados, a pandemia do covid-19 teve maior aceite para os integrantes do grupo. Ao pesquisar e demonstrar interesse e motivação pela temática a ser estudada, o estudante E_{31} apresenta argumentos que fazem com que os demais integrantes sejam influenciados e sintam-se motivados a pesquisar sobre. A natureza e intensidade da energia mobilizada por esse estudante, culminou no aceite e aprovação de todos os outros integrantes do grupo.

Além disso, a interlocução com agentes externos à sala de aula, como E_{31} ao conversar com sua mãe sobre a temática, garantiu que a proposta a ser investigada seria interessante a válida para o contexto.

Ao interpretar a resposta para o problema investigado para turma, os estudantes puderam refletir sobre quais influências foram responsáveis pelo aumento no número de casos no mês de agosto como também a diminuição do número de casos no mês de setembro. Como destaca Almeida e Vertuan (2015), ao interpretar os resultados, o estudante se depara com a necessidade de comparar e articular conhecimentos de diferentes áreas.

Os estudantes tomaram atitudes que os tornaram sujeitos ativos no decorrer da atividade, discutindo sobre escolhas pessoais, se atualizando de conhecimentos externos a matemática, traçando caminhos e se planejando para chegar à resolução do problema investigado.

Desta forma, percebe-se que reconheceram a importância em estabelecer a relação entre a resolução matemática com a situação real. Momento esse em sala de aula na qual pode ser encarado como instrumento político pautado de tomada de decisões onde o estudante é o indivíduo do processo cognitivo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013).

Neste sentido, a dimensão da aprendizagem relacionada ao incentivo, proporcionou e direcionou a energia mental necessária para o processo de aprendizagem. De fato, essa dimensão só foi possível ser evidenciada, considerando também a dimensão do conteúdo, pois ambas são iniciadas por impulsos dos processos de interação e integradas no processo interno de elaboração e aquisição.

> Portanto, o conteúdo da aprendizagem está sempre, por assim dizer, “obcecado” com os incentivos em jogo (ex., se a aprendizagem é motivada por desejo, necessidade, interesse e compulsão). De maneira correspondente, os incentivos sempre são influenciados pelo conteúdo, por exemplo, novas informações podem mudar a condição do incentivo (ILLERIS, 2013, p. 18).

6.2. RESULTADOS

A partir das análises das cenas significativas nos cenários das atividades de modelagem matemática, é possível inferir sobre o papel da modelagem matemática na aprendizagem dos estudantes, considerando o modelo teórico de aprendizagem proposto por Illeris (2013). Com base nas cenas significativas selecionadas a partir da descrição dos cenários, é possível destacar três características da aprendizagem em atividades de modelagem matemática: *a aprendizagem envolve a transformação da experiência em conhecimento*; *a aprendizagem é uma transformação que se dá em cada pessoa; e a aprendizagem se associa aos diferentes modos de expressão.*

A primeira característica da aprendizagem em atividades de modelagem matemática está fundamentada no princípio estabelecido por Illeris (2013), que afirma que "aprender é transformar a experiência em conhecimento" (p. 103). Dessa forma, pode-se afirmar que a aprendizagem ocorre por meio da observação e reflexão sobre uma determinada experiência, que resulta na formação de conceitos e generalizações que poderão ser aplicados em novas experiências, auxiliando na tomada de decisões e na resolução de problemas.

A partir dessas considerações, foram identificados aspectos da modelagem que contribuem para a transformação da experiência em conhecimento em diversos contextos. Um exemplo ocorre durante a atividade de modelagem matemática relacionada à temática "salto alto", em que os estudantes buscam utilizar conceitos do Teorema de Pitágoras para matematizar a situação. Ao estabelecer a conexão entre os lados de um triângulo retângulo e as medidas relacionadas ao salto, os estudantes conseguem compreender tanto os princípios matemáticos envolvidos para a resolução do problema, quanto o fenômeno em estudo. Essa compreensão está alinhada com o que Illeris (2013) ressalta sobre a dimensão do conteúdo, ou seja, está relacionada ao que é aprendido, bem como à capacidade do aprendiz de compreendê-los.

Nesse contexto, outro exemplo evidenciado nas cenas é quando os estudantes se deparam com o problema da "otimização do tamanho de uma embalagem" e buscam determinar qual embalagem teria o maior espaço interno. Ao construírem as embalagens, os estudantes percebem que o espaço interno está relacionado ao volume da embalagem. Para resolver esse problema, eles se baseiam em experiências anteriores em que aprenderam a calcular o volume de uma caixa em formato de paralelepípedo, estabelecendo conexões com o problema investigado. Além disso, são capazes de realizar conversões entre diferentes registros, como tabelas, figuras e gráficos, que do ponto de vista semiótico permite acessar e interpretar informações de maneiras distintas, evidenciando preferências e habilidades individuais em relação a um mesmo objeto matemático (VERONEZ, 2013).

Assim sendo, a aprendizagem ocorreu a partir de experiências anteriores, e a acumulação dessas experiências levou à organização de novos padrões de comportamento que foram incorporados pelos estudantes. De acordo com Illeris (2013), é importante que os estudantes assimilem aquilo que o professor ensinou e estabeleçam uma conexão psicológica entre o que está sendo ensinado e o que eles já devem ter aprendido anteriormente.

Dessa forma, pode-se inferir que a modelagem matemática promove uma aprendizagem ativa, na qual a experiência se converte em conhecimento. Os estudantes não apenas absorvem informações de forma passiva, mas também participam ativamente do processo de construção do conhecimento, relacionando-o com suas experiências anteriores, possibilitando internalizar e aplicar os conceitos matemáticos de maneira eficaz.

Nas respostas aos questionários, é possível constatar essa evidência quando os estudantes expressaram seus entendimentos e compreensões decorrentes da atividade de modelagem matemática, como por exemplo: "Aprendi que quando a altura da embalagem aumenta, o volume não aumenta junto" [E_{15}], "Recordei como calcular o volume" [E_{32}], "Aprendi que altura da caixa e volume não são grandezas diretamente proporcionais" [E_{23}].

Por meio das atividades de modelagem é possível constatar que os estudantes são capazes de vivenciar e aplicar os conhecimentos matemáticos já adquiridos em contextos autênticos. Conforme ressalta Omodei (2021), o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática está centrado no estudante, e a autenticidade é sustentada pela autonomia que eles demonstram ao se envolver nessas atividades.

Integrada ao processo interno psicológico do aprendiz de elaboração e aquisição, a dimensão do conteúdo envolve, portanto, a construção de significado e a capacidade de lidar com os desafios da vida prática, permitindo assim o desenvolvimento de uma *funcionalidade* (ILLERIS, 2013). Nesse contexto, as atividades de modelagem matemática proporcionam aos estudantes a oportunidade de atribuir significado aos conceitos matemáticos, aplicá-los em situações reais e desenvolver habilidades para resolver problemas, contribuindo para sua funcionalidade pessoal e sua capacidade de enfrentar desafios de forma mais efetiva.

Sendo assim, podemos considerar que durante as atividades de modelagem, os estudantes desempenharam um papel ativo na construção de seus próprios conhecimentos. Nos cenários 3 e 4, em particular, os estudantes escolheram uma temática para investigar, identificaram um problema a ser investigado, planejaram os passos necessários para resolver o problema, tomaram decisões, estabeleceram hipóteses, buscaram informações relevantes, determinaram uma solução matemática para o problema e interpretaram os resultados em relação à situação real. Desenvolveram habilidades de resolução de problemas, de trabalho em equipe e de comunicação matemática. Além disso, tiveram a oportunidade de explorar estratégias e refletir sobre o que haviam aprendido.

Foi observado que em algumas atividades de modelagem, recursos tecnológicos foram empregados para auxiliar tanto na coleta de dados e informações, quanto na resolução dos problemas. Um exemplo disso foi o uso do *software* Geogebra pelos estudantes do grupo G2, que permitiu determinar a altura máxima de um sapato de salto na numeração 36. Esse modelo matemático enfatiza o potencial para utilizar a modelagem matemática aliada ao uso de tecnologias, pois segundo o estudante E_{30}, *o GeoGebra colaborou com a resolução para o problema, em que foi possível simular e movimentar o salto para saber qual teria a maior altura*.

A utilização do *software* como recurso no processo de resolução da atividade revelou-se vantajosa, pois facilitou a visualização e deu suporte para matematizar a situação sem, necessariamente, recorrer ao uso de lápis e papel. A utilização da tecnologia na atividade de modelagem, permite experimentar, testar hipóteses e realizar simulações em um ambiente virtual, fornecendo *feedback* imediato. Essa abordagem possibilitou uma maior compreensão dos fenômenos em estudo e incentivou a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento, permitindo maior engajamento por parte dos estudantes em seu processo de aprendizagem.

Diante dessas reflexões, é importante ressaltar que em atividades de modelagem, a matemática envolvida assume para os estudantes sentidos e significados que provavelmente diferem das aulas convencionais (ALMEIDA; BRITO, 2005), conforme Skovsmose (2000) classifica como paradigma do exercício. Isso se deve à diferença nos papéis desempenhados pelos estudantes em ambos os contextos. Na modelagem matemática, especificamente, o estudante deixa de ser apenas um receptor passivo de informações e algoritmos, tornando-se um construtor ativo do seu próprio conhecimento no processo de aprendizagem, à medida que participa do desenvolvimento da atividade (SANTANA; BARBOSA, 2012).

É perceptível que a proposta de desenvolver atividades de modelagem matemática em sala de aula, desperta nos estudantes uma compreensão de múltiplos significados. Ao estarem envolvidos nas temáticas das atividades, tanto pela professora-pesquisadora durante o segundo momento, quanto pelos próprios estudantes durante o terceiro momento, despertou interesse, curiosidade e engajamento nas atividades. A modelagem matemática não apenas amplia o repertório de conhecimentos matemáticos dos estudantes, mas promove o desenvolvimento de competências essenciais para sua formação integral, como a capacidade de enfrentar desafios, tomar decisões fundamentadas e resolver problemas do mundo real.

Ao se envolverem com as situações propostas, os estudantes puderam coletar informações por meio de uma variedade de recursos. No primeiro cenário, por exemplo, os estudantes coletaram dados a partir dos saltos que haviam trazido para a sala de aula, além de realizarem pesquisas em seus dispositivos móveis. No segundo cenário, eles construíram caixas experimentalmente e obtiveram informações a partir dessas experiências.

No terceiro cenário, as pesquisas foram conduzidas com base nas informações fornecidas pela família de um dos membros do grupo. Já no quarto cenário, os dados foram coletados em *sites* especializados que tratavam de casos de infecção por Covid-19. Essa abordagem possibilitou que as atividades de modelagem explorassem o campo investigativo, oferecendo aos estudantes oportunidades de aprendizado que ultrapassam os limites da sala de aula e fornecem significado para o ensino da matemática.

A segunda característica observada diz respeito à aprendizagem como uma transformação que ocorre em cada pessoa, ou seja, é a própria pessoa que se transforma por meio da aprendizagem, destacando assim a pessoalidade da aprendizagem (ILLERIS, 2013). A aprendizagem é considerada intransferível de um indivíduo para outro, isto é, ninguém pode aprender por outra pessoa. O modo como um sujeito assimila, interpreta e aplica novos conhecimentos é influenciado por sua bagagem pessoal, sua motivação intrínseca e suas perspectivas individuais. Dessa forma, cada pessoa determina o ritmo e seu próprio caminho para a aprendizagem.

Ao promover a interação entre os estudantes com diferentes situações, é possível incentivar a reflexão crítica por parte deles. Quando discutiram sobre os efeitos do uso de sapatos de salto alto nas pessoas (cenário 1), ou sobre o valor do vale alimentação e o aumento do número de casos de Covid-19 após o período de recesso escolar, os estudantes foram estimulados a refletir sobre questões sociais e tomar decisões. Conforme destacado por Bassanezi (2015), em atividades de modelagem matemática, os estudantes são estimulados a uma formação integral e crítica das situações, fortalecendo suas habilidades para tomar decisões e agir em sociedade.

Essa observação está em conformidade com o que Illeris (2013) considera como a dimensão da interação, na qual a integração pessoal em comunidades e na sociedade contribui para a construção da *socialidade* do indivíduo. Ao desenvolver atividades de modelagem, os estudantes interagem com a temática, com os colegas e com a sociedade em geral, o que promove o desenvolvimento de habilidades sociais, a consciência das interações humanas e a compreensão do impacto de suas decisões e ações no contexto social.

É possível constatar que a interação no desenvolvimento das atividades de modelagem facilitou o trabalho colaborativo entre os estudantes, conforme evidenciado pelas respostas ao questionário como, por exemplo, "Aprendi a trabalhar em grupo, foi muito bom" [E_{15}], "Aprendi a resolver um problema em grupo" [E_{12}], "Fiz novos amigos a partir da atividade" [E_{10}]. Nesse contexto, a predominância do diálogo e a troca de conhecimentos contribuíram para a socialidade dos estudantes. Todavia, essa construção ocorreu necessariamente por meio das outras duas dimensões - incentivo e conteúdo - e esteve diretamente integrada ao processo externo de interação entre o indivíduo e seu ambiente social.

As atividades de modelagem proporcionam um ambiente propício para a interação e não se limita apenas ao contexto da sala de aula, mas se estende para além disso, considerando interações entre a sociedade em geral. Ao interagir com os colegas e discutir ideias, os estudantes ampliam sua perspectiva, aprendem a ouvir e respeitar diferentes opiniões, e desenvolvem habilidades de comunicação e colaboração, fortalecendo para além das habilidades cognitivas dos estudantes, as habilidades sociais.

A terceira característica da aprendizagem é que ela está associada a diferentes formas de expressão. A aprendizagem é um processo que envolve sensações, pensamentos, emoções e outros elementos, os quais são expressos por meio de diferentes meios, como a fala, a escrita, registros simbólicos, textuais e gestos. Essas formas de expressão são essenciais para evidenciar o processo de aprendizagem, conforme destacado por Brito (2018).

Durante o processo de aprendizagem, os estudantes utilizam uma variedade de recursos para expressar suas ideias, compreensões e experiências. Eles podem expressar seus pensamentos por meio da verbalização, compartilhar suas reflexões por escrito, criar representações gráficas, elaborar registros simbólicos ou textuais, ou utilizar qualquer forma de comunicação que envolva significados. No entanto essa diversidade de modos de expressão não se limita apenas ao aspecto verbal ou escrito, mas engloba elementos como emoções, sentimentos e motivação.

Illeris (2013) afirma que o incentivo que é dado na atividade é o que proporciona e direciona a energia mental para o processo de aprendizagem. Trata-se de elementos afetivos que condicionam o sujeito a desenvolver uma *sensibilidade* em relação a si e ao ambiente. Essa dimensão do incentivo desempenha um papel importante no processo de aprendizagem, uma vez que as emoções podem influenciar a motivação, o engajamento e a construção do conhecimento.

Durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes assumiram um papel ativo ao relacionar a situação investigada com o conteúdo matemático, reorganizando suas ideias e estratégias. Puderam se envolver em todas as fases do processo de modelagem, desde a coleta de dados, matematização da situação, busca por uma solução para o problema e a apresentação dos resultados à turma.

Um exemplo foi observado na cena significativa referente a temática “Salto Alto”, em que um dos estudantes do grupo G2 demonstrou iniciativa e incentivo aos demais integrantes a conhecer e utilizar esse recurso para auxiliar na resposta ao problema investigado. Essa atitude revela que as atividades de modelagem promovem o desenvolvimento da autonomia pois permite explorar diferentes recursos e estratégias no processo de resolução.

Proporcionar esse tipo de experiências incentivam os estudantes a se tornarem sujeitos ativos em seu processo de aprendizagem. Ao buscar soluções criativas, tomar iniciativas e compartilhar conhecimentos com seus colegas, fortalece habilidades de autonomia, colaboração e liderança. Quando os estudantes realizaram a transição da linguagem natural para a linguagem matemática e (re)organizaram suas ideias se tornaram sujeitos ativos ao longo de todo o desenvolvimento das atividades, mobilizando estratégias para coletar dados, matematizar a situação, responder ao problema investigado e compartilhar os resultados à turma.

No cenário 3, os estudantes direcionaram sua atenção para investigar a realidade de um colega, analisando se o valor recebido pelo pai em forma de vale alimentação seria o suficiente para adquirir itens básicos, possibilitou utilizar a modelagem matemática no contexto social, permitindo aos estudantes explorar e compreender a relação entre recursos financeiros e necessidades básicas.

Já no cenário 4, as cenas significativas evidenciam como os estudantes utilizaram a modelagem matemática para analisar a situação da pandemia de Covid-19. Estabeleceram critérios e determinaram o valor percentual da diminuição de casos, utilizando a matemática como uma ferramenta para compreender e interpretar os dados relacionados à propagação do vírus. Dessa forma, os estímulos para resolver aos problemas investigados estavam diretamente relacionados ao próprio interesse dos estudantes.

Almeida e Vertuan (2015) destacam que a familiaridade dos estudantes com atividades de modelagem pode levar a um aumento do repertório de estratégias de resolução, para além da simples utilização dos conceitos matemáticos. Quando um estudante toma consciência dos conceitos matemáticos que possui, das estratégias que pode utilizar diante de um problema específico e dos modos como ocorre sua aprendizagem, ele pode otimizar suas ações de forma a potencializar a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento cognitivo.

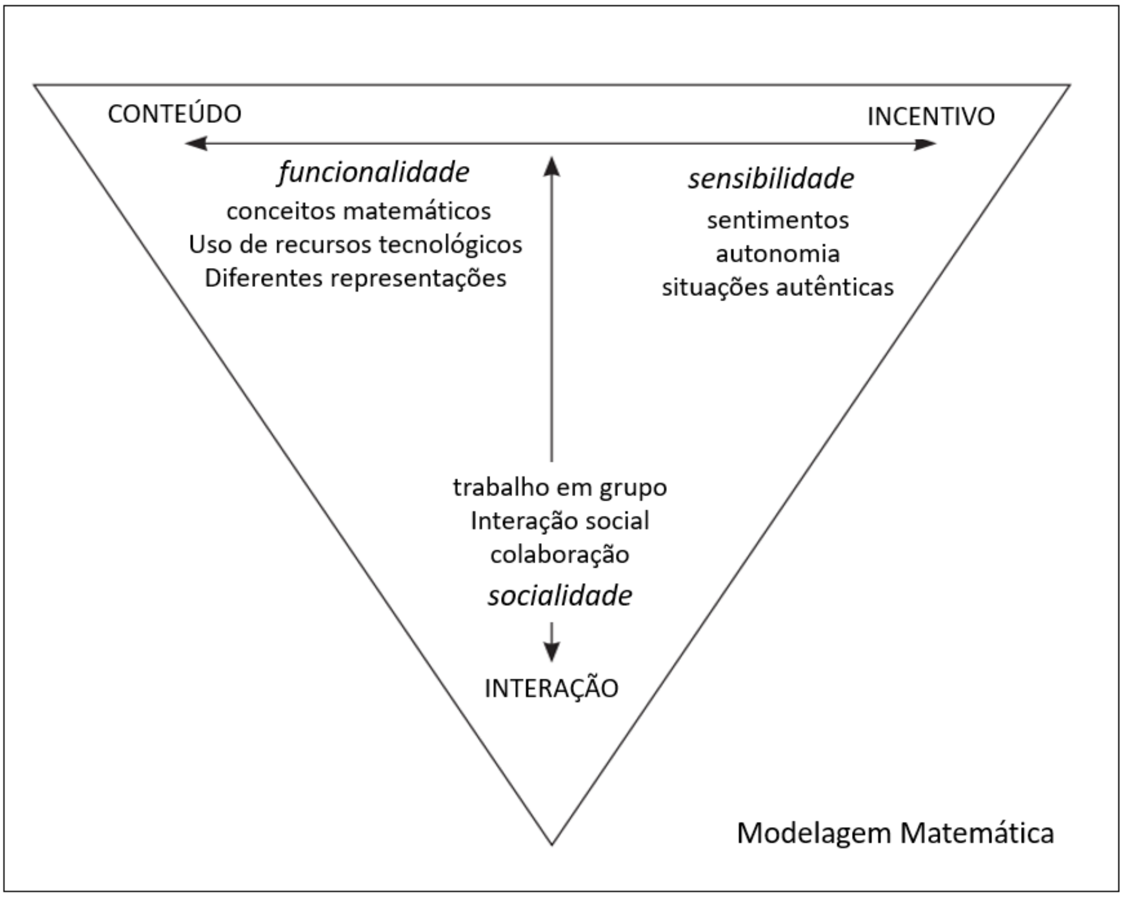
Ao engajar-se em atividades de modelagem, os estudantes são desafiados a refletir sobre suas próprias estratégias e processos de aprendizagem, o que permite que desenvolvam uma abordagem metacognitiva em relação ao seu próprio conhecimento (CASTRO, 2022). Todavia, em atividades de modelagem, em que o estudante se depara com o problema a ser resolvido e a partir dele emerge a necessidade do uso de conhecimentos matemáticos para solucioná-los, contribui diretamente para o processo de aprendizagem dos estudantes.

Em outras palavras, essas atividades promovem a autonomia dos estudantes frente aos problemas, capacitando-os a agir e resolver os problemas investigados, preparando-os para enfrentar desafios futuros e tomar iniciativas tanto no ambiente educacional, quanto na vida pessoal e profissional.

Considerando as observações apresentadas, de forma geral, foi possível identificar diversas contribuições da modelagem para a aprendizagem dos estudantes. Essas contribuições abrangem diferentes aspectos que favorecem o processo de aprendizagem, incluindo o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes, a promoção do diálogo e da participação ativa em sala de aula, a construção de um aprendizado matemático com significado, a utilização de ferramentas tecnológicas, a compreensão de que a matemática está presente em situações reais e a superação do ensino tradicionalista de matemática, que se limita ao material didático e ao currículo estabelecido.

Inspirado no modelo teórico apresentado por Illeris (2013), é possível representar na Figura 57 os aspectos que favorecem o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula, visando a aprendizagem dos estudantes.

Figura 57: A aprendizagem na modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Illeris, 2013.

No esquema representado na Figura 57, a aprendizagem na modelagem matemática é compreendida como um processo dinâmico, no qual os processos internos e externos estão em constante interação. As três dimensões da aprendizagem - interação, conteúdo e incentivo - estão representadas nos vértices do triângulo e estão interligadas por meio das setas de duplo sentido.

Essa representação ressalta a importância da interconexão entre essas dimensões no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. A interação entre os estudantes, o professor e o ambiente de aprendizagem desempenham um papel fundamental na construção coletiva do conhecimento, na troca de ideias e no compartilhamento de conhecimentos.

O conteúdo matemático utilizado na modelagem matemática deve estar diretamente relacionado com a situação real abordada, garantindo que os estudantes compreendam como aplicar os conceitos matemáticos na resolução do problema investigado. Dessa forma, eles constroem significado e percebem a utilidade da matemática em suas vidas.

O incentivo, por sua vez, desempenha um papel importante no processo de aprendizagem. As emoções e a motivação dos estudantes podem influenciar sua disposição para se engajar nas atividades de modelagem matemática, afetando diretamente a construção do conhecimento.

É importante destacar que essas dimensões não atuam isoladamente, mas estão em constante interação. O desenvolvimento da interação, o conteúdo matemático relevante e o incentivo adequado são elementos essenciais para uma aprendizagem com significado na modelagem matemática. Portanto, o esquema ilustra a compreensão da aprendizagem na modelagem matemática como um processo complexo e interconectado, no qual a interação, o conteúdo e o incentivo desempenham papéis complementares e essenciais.

Em sala de aula, a modelagem matemática pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades e competências. Desta forma, a partir das análises estabelecidas, juntamente com o modelo teórico para aprendizagem apresentado por Illeris (2013), a modelagem matemática se configura como um cenário para aprendizagem, por meio de três aspectos fundamentais:

- A interação entre os estudantes, o professor e o ambiente de aprendizagem desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática em sala de aula, uma vez que, ao trabalhar em grupo, promove o compartilhamento de ideias, a busca por soluções e a construção coletiva do conhecimento. Isso fortalece as interações sociais e promove um ambiente de aprendizagem colaborativo, no desenvolvimento da *socialidade* do estudante.
- É essencial nas atividades de modelagem que o conteúdo matemático esteja diretamente relacionado à situação real. Os estudantes devem compreender como aplicar os conceitos matemáticos na resolução do problema investigado, o que lhes permite construir significado e capacidade para lidar com os desafios da vida real e assim desenvolver uma *funcionalidade* pessoal.
- Os elementos afetivos como motivação, emoção e volição, desperta o interesse e a curiosidade dos estudantes nas atividades de modelagem, pois envolvem situações autênticas e significativas do mundo real. Isso garante o equilíbrio mental e os motiva a se engajarem ativamente no processo de aprendizagem, uma vez que, incentiva os estudantes a assumirem um papel ativo em seu próprio processo de aprendizagem, são encorajados a tomar decisões, escolher estratégias e refletir sobre suas ações, promovendo a autonomia e *sensibilidade* pelo próprio aprendizado.

Ao considerar esses aspectos, as atividades de modelagem matemática proporcionam não apenas habilidades matemáticas, mas também competências cognitivas, sociais e emocionais que são fundamentais para enfrentar desafios do mundo real e para uma participação ativa na sociedade.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de cenários que muitas vezes priorizam práticas educativas que não oferecem uma construção com significado para o ensino da matemática, buscou-se com essa pesquisa, apresentar alternativas que possibilitassem uma mudança nesse comportamento. Neste contexto, diversas inquietações e questionamentos levaram a investigar: *contribuições da modelagem matemática para aprendizagem dos estudantes*.

As atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas e analisadas em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, durante as aulas regulares de matemática, com o objetivo de explorar o ambiente da sala de aula como espaço de investigação.

Com base no referencial teórico apresentado nos capítulos 2 e 3, adotou-se uma definição de aprendizagem como "qualquer processo que, em organismos vivos, leve a uma mudança permanente em capacidades e que não se deva unicamente ao amadurecimento biológico ou ao envelhecimento" (ILLERIS, 2013, p. 16).

Ao considerar os processos e dimensões descritos por Illeris (2013) como integrados em uma abordagem de aprendizagem, foi possível destacar a modelagem matemática como uma alternativa para investigar aprendizagens em sala de aula, constituindo cenários de aprendizagem. Esses cenários foram descritos a partir das quatro atividades de modelagem matemática desenvolvidas e analisadas neste relatório.

Após a coleta dos dados, foram selecionadas as cenas que se mostraram relevantes para evidenciar as aprendizagens decorrentes do desenvolvimento das atividades de modelagem. Nas análises dessas cenas significativas, considerou-se as manifestações de aprendizagem dos estudantes, observando como eles se envolveram durante o desenrolar da atividade. Com essa configuração de análise, o objetivo também foi fornecer reflexões sobre como a modelagem se constitui na aprendizagem dos estudantes.

Considerando que as atividades de modelagem possam desencadear atributos comuns, foram identificadas três características da aprendizagem na modelagem matemática. A primeira delas é a *funcionalidade*, que envolve a capacidade dos estudantes de lidar com desafios reais. Durante as atividades, os estudantes buscaram estabelecer conexões entre situações reais e conceitos matemáticos, resultando em aprendizagens significativas. Essas aprendizagens englobaram tanto conceitos matemáticos já conhecidos, como o cálculo de volume, porcentagens e taxas, quanto conhecimentos novos, como o Teorema de Pitágoras.

Ao relacionar a matemática com situações práticas, os estudantes puderam perceber a utilidade e a aplicabilidade dos conceitos estudados, o que fortaleceu seu entendimento e engajamento na aprendizagem. A *funcionalidade* proporcionada pela modelagem matemática permitiu que os estudantes enfrentassem desafios reais e desenvolvessem habilidades necessárias para resolver problemas do mundo real.

A segunda característica associada à *socialidade* na aprendizagem por meio da modelagem matemática pode ser identificada ao analisar as cenas em que a dimensão da interação foi evidenciada. Essa dimensão foi estabelecida a partir dos estímulos iniciais que deram início ao processo de aprendizagem, como, por exemplo, quando os estudantes buscaram compreender a situação real na atividade do salto alto ou quando buscaram compreender o conceito de otimização na atividade de tamanho de uma embalagem.

De acordo com Illeris (2013), a dimensão da interação contribui para a construção da socialidade do indivíduo. Na atividade de modelagem matemática, isso pode ser evidenciado pelos momentos de diálogo entre os estudantes e a professora, bem como pelas pesquisas realizadas em conjunto. No entanto, assim como ocorre com a não linearidade das fases em uma atividade de modelagem, a construção da socialidade não segue um caminho linear e é fortemente influenciada pelas outras duas dimensões: a *funcionalidade* e a *sensibilidade*.

Os momentos em que as emoções e os sentimentos foram evidenciados, direcionando a energia mental dos estudantes para o processo de aprendizagem, estiveram diretamente relacionados à dimensão do incentivo. Esses momentos foram observados, por exemplo, quando os estudantes se sentiram motivados e demonstraram interesse em investigar realidade do colega na atividade do vale alimentação, ou quando se empenharam em investigar possíveis influências no aumento de casos de Covid-19.

Segundo Illeris (2013), a dimensão do incentivo na aprendizagem está relacionada à forma como a situação é vivenciada, ou seja, aos sentimentos, motivações e à intensidade da energia mental mobilizada. Nas atividades de modelagem desenvolvidas, a dimensão do incentivo esteve relacionada aos estímulos promovidos pelos questionamentos da professora, ou pelos próprios estudantes, visando garantir o equilíbrio mental dos estudantes e desenvolver sua *sensibilidade* diante das situações investigadas.

À medida que os estudantes interagem com o ambiente social, cultural e material ao seu redor, adquirem conhecimentos, vivenciam experiências e estabelecem conexões significativas. Essas interações contribuem para a construção do conteúdo a ser aprendido e também influenciam a percepção de incentivo para se envolver e se dedicar ao processo de aprendizagem (ILLERIS, 2013).

Nas atividades de modelagem matemática, a maneira como os estudantes aplicaram os conceitos matemáticos às situações apresentadas esteve diretamente influenciada pela forma como as atividades foram introduzidas e pelos questionamentos e orientações oportunizados no desenvolvimento das atividades.

De forma geral, essas atividades despertaram a curiosidade dos estudantes, estimularam a socialização e a interpretação dos resultados, exigiram discussões e troca de experiências, o que proporcionou uma maior interação, incentivo e aprendizagem de conteúdos tanto entre os estudantes quanto entre os estudantes e a professora.

Nas aulas de matemática, é comum os estudantes se depararem com problemas fechados, que não exigem discussões ou reflexões. No entanto, ao participarem das atividades de modelagem, os estudantes passaram a ter uma nova visão da matemática, por exemplo: *a matemática é um conjunto de números [E_{12}], para a matemática nos ajuda a resolver problemas do dia a dia* [E_{12}]; *a matemática é uma disciplina em que se estuda formas geométricas, números, frações e fórmulas* [E_{30}], para *a matemática nos ajuda a compreender o mundo e a resolver problemas por meio de diversos conceitos* [E_{30}]; *a matemática é uma matéria exata [E_{15}] para, a matemática é uma linguagem para interpretar no mundo [E_{15}].*

A percepção de que não há uma única resposta correta nas atividades de modelagem estimulou o espírito crítico nos estudantes. O interesse em resolver problemas reais contribuiu diretamente para o desenvolvimento da autonomia, fazendo com que os estudantes assumissem um papel ativo em seu próprio processo de aprendizagem.

A modelagem matemática constituiu-se como uma alternativa potencialmente válida para o processo de aprendizagem, visto que além de trabalhar conceitos matemáticos exigidos pelo currículo, serviu como motivação para outras aprendizagens: a*prendi que o vale alimentação não é obrigatório ao funcionário, mas faz uma grande diferença na renda das pessoas que o recebem* [E_{28}], *aprendi que se manter em casa durante um problema de saúde como a pandemia do Covid-19 é a melhor maneira de diminuir a taxa transmissão do vírus* [E_{28}].

Sendo assim, nas aulas de matemática, propor exercícios em sala não pode servir apenas como a única alternativa de verificação do aprendizado do estudante. Para isso deve-se oferecer oportunidades para que consigam compreender e aplicar conceitos em diferentes momentos de sua vida, garantindo uma aprendizagem que faça sentido e tenha significado.

O uso da modelagem em sala de aula configura-se como “diferenciada” ao passo que não enfatiza a memorização e procedimentos mecânicos (PEREIRA JUNIOR, 2020, p. 119). A modelagem oportuniza uma maior interação entre o conceito matemático à situação real construindo significado, desenvolve diferentes concepções acerca de um determinado conteúdo, gerando novos conhecimentos e incentiva a vivenciar novas experiências a fim de resolver o problema, despertando o interesse e a motivação.

De fato, é comum em sala de aula, alguns estudantes demonstrarem certo desinteresse nas aulas de matemática. Para muitos um simples enunciado, ou problema proposto com um contexto diferente ao habitual, já é suficiente para não seguir em frente na resolução, o que acarreta constantes indagações ao professor sobre quais conceitos adotar para obter a resposta, sem um processo interno de interpretação.

Face a essas considerações, a modelagem matemática vai de encontro a essas ideias, servindo de motivação e incentivo para o aprendizado. Ao desenvolver atividades dessa natureza, os estudantes passam a perceber a importância da matemática para resolver problemas reais.

Embora essa pesquisa tenha apresentado muitas contribuições para a aprendizagem dos estudantes, deve-se destacar algumas limitações e dificuldades nas atividades de modelagem desenvolvidas na sala de aula. Acerca da professora, uma limitação identificada, refere-se à preocupação do cumprimento dos conteúdos curriculares presentes no material apostilado, considerando que em atividades dessa natureza o conteúdo não é previsto, ele emerge das atividades.

Outra dificuldade da professora foi inserir as atividades de modelagem nos parâmetros avaliativos tradicionais adotado pela escola. Durante todo o desenvolvimento das atividades, os estudantes estavam sendo avaliados com relação ao trabalho em grupo e também em relação às fases da modelagem por meio da construção de estratégia inspirada na escala holística (SILVA; DALTO, 2017), elaborada pela própria professora

O uso dessas estratégias de avaliação consistia em verificar as ações dos estudantes durante as fases no desenvolvimento das atividades de modelagem, em que os estudantes, reunidos em grupos e com a orientação da professora foram responsáveis pela condução da atividades, sendo capazes de identificar a situação problemática, coletar dados, matematizar a situação identificando conceitos matemáticos úteis para responder ao problema e obtenção e validação do modelo matemático, interpretando e validando à situação.

Em relação aos estudantes, uma dificuldade apresentada foi o fato deles não estarem acostumados com atividades que exigem atitudes autônomas e críticas. Durante o desenvolvimento das atividades a insegurança, o esquecimento de conceitos ou a não familiarização com conceitos matemáticos que surgiram, fizeram com que alguns grupos de estudantes recorressem, por diversas vezes, à professora sobre o que poderiam fazer para responder ao problema, como transpor a linguagem natural para a linguagem matemática.

Além disso, muitos não conseguiam formalizar respostas, perceber erros cometidos individualmente ou pelos colegas do grupo, fazendo com que houvesse a intervenção constante da professora-pesquisadora para intervir e questioná-los sobre as respostas. Tais dificuldades podem ter ocorrido pelo fato de que os estudantes estavam habituados com o formato marcante da aula tradicional.

Por fim, inspirados nos documentos atuais formativos, sabe-se que o papel da educação nos dias atuais é contribuir diretamente para a formação de cidadãos autônomos, aptos para a vivência em sociedade, nos quais devem agir de forma crítica e reflexiva em meio a situações cotidianas. Dessa forma, utilizar a modelagem enquanto alternativa pedagógica nas aulas regulares de matemática ao longo do ano letivo de 2022 se apresentou de grande relevância.

Despertar no estudante a oportunidade de investigar um problema relacionado ao seu cotidiano, permitiu aos estudantes problematizar e investigar o mundo que os cerca. Nesta pesquisa os resultados encontrados apontam que modelagem se constituiu como uma alternativa potencialmente válida para o processo de ensino e principalmente para o processo de aprendizagem, visto que foi possível evidenciar que os processos internos e externos e as dimensões integração, conteúdo e incentivo estiveram sempre envolvidos no processo de aprendizagem.

Sendo assim, evidenciou-se com essa pesquisa que em sala de aula, a professora-pesquisadora criou condições de aprendizagens, seja por um aspecto interno ou externo, em que o estudante esteve envolvido no processo, se inteirando e sendo incentivado para aprender novos conhecimentos. Cientes de que o processo aprendizagem é continuum e depende da articulação entre o desenvolvimento da *funcionalidade*, *sensibilidade* e *sociabilidade*.

Considera-se então, que essa pesquisa pode contribuir para o campo da Educação Matemática e também para os professores que buscam alternativas para suas práticas de sala de aula com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Por meio da pesquisa empírica e do referencial teórico adotado, foi possível descrever como a modelagem potencializa a aprendizagem dos estudantes, destacando os aspectos que influenciam e são influenciados durante esse processo, reafirmando a importância de estudos sobre modelagem matemática e aprendizagem.

Caminhando para finalização dessa pesquisa, pode-se afirmar que a mesma abriu possibilidades para estudos futuros nos quais podem ser investigados contribuições da modelagem para aprendizagem da matemática e de outras aprendizagens nas diferentes etapas da Educação Básica; aprendizagens relacionadas aos diferentes modelos matemáticos; ou como as atividades de modelagem podem ser integradas ao currículo em sala de aula, entre outros.

Em síntese, assim como Garcia (2009) afirma que todo professor pesquisador é aquele que busca por questões relativas à sua prática com o objetivo de aperfeiçoá-las, considero que é dever de todo professor realizar experimentações em suas aulas, a fim de fazer delas um laboratório, abrindo os olhos dos estudantes para diferentes caminhos que favoreçam seu aprendizado. Posso afirmar que vivenciar essa experiência de pesquisa me trouxe muitas aprendizagens e, especialmente, na escrita deste relatório.

De fato, a Joice que se inseriu na pós-graduação há seis anos, distingue-se da pesquisadora e profissional de hoje. Afinal, nesse movimento investigativo e de qualificação profissional, pude repensar, aprender e ressignificar conhecimentos e práticas que fizeram toda diferença para minha profissão como professora e pesquisadora. Certamente as considerações apresentadas até aqui não esgotam o campo de investigação, mas representam a contribuição da Joice enquanto pesquisadora abrindo portas para pesquisas futuras que busquem tratar do tema aprendizagem no contexto da sala de aula, ainda há muito muito para estudar!

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. DE. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, p. 387–414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**-Boletim de Educação Matemática, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J.; ARAÚJO, J. L.; CALDEIRA, A. D. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. 1ed.
Recife: Biblioteca do Educador Matemático, 2007, v. 03, p. 253-268.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Práticas de professores com Modelagem Matemática: algumas configurações. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 6-15, 2015.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Critica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educacao Matematica Pesquisa**, v. 12, n. 2, p. 221-241, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. **Vidya**, Santa Maria, v. 42, n. 2, p. 121-145, 2022.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação** (Bauru). v.11, n.3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; CASTRO, É. M. V.; SILVA, M. H. S. Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. **Alexandria**: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 14, n. 2, p. 383-406, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. A. P. Modelagem Matemática em Foco. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. p. 1 – 21.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**, p. 19, 2015.

ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K. P. Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos. **REnCiMa,** v.12, n.2, p. 1-27, 2021.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção do conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano. 2003. 243 p.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião anual da Anped, 24, 2001, Caxambu. Rio de Janeiro: **ANPED**,2001. CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 293–301, 2006.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Uberlândia, MG, UFU, 2014.

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). The Proceddings of the 12th Internacional Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: **Springer**, p. 73-96, 2015.

BLUM, W.; NISS, M. **Applied mathematical problem solving**, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. Educational studies in mathematics, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. Trends in teaching and learning of mathematical modelling, p. 15-30, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORROMEO FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORROMEO FERRI, R. Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. **Springer**, 2018.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Aprendizagem colaborativa no contexto de uma atividade de modelagem matemática. **Bolema**, v. 35, p. 937-958, 2021.

BORSSOI, A. H. (2004). **A aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino**. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina.

BRAGA, R. M. **Aprendizagem em modelagem matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engestrom**. 2015. 133 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2015. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2017. 600p.

BRITO, D. S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. Número total de folhas. Tese (Doutorado em Londrina, 2018.

BRITO, D.; ALMEIDA, L. M. W. de. (2021). Practicas de modelagem matemática e dimensiões da aprendizagem da geometría. **Revista Actualidades Investigativas en Educación**, 21(1), 1-29. Doi. 10.15517/aie.v21i1.42595.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.). Mathematical Modellling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: **Springer**, 2017. p. 187-197.

CASTRO, E. M. V. **Metacognição em atividades de modelagem matemática**. 2022. 229 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

CRUZ, W. F. N; ARAÚJO, J. L. Concepções de aprendizagem presentes nos trabalhos apresentados na X CNMEM. In: X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2017, Maringá - PR. **Anais**. 2017. CD-ROM.

CUNHA, A. G. **Dicionário etimológico da língua portuguesa**. 3 ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2007.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Editora Livraria da Física, 2007.

ENGLISH, L. D. Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. Educational Studies in Mathematics, v. 54, n. 2, p. 225-248, 2003.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Gneres, Purposes or Perspectives. **Jornal of Mathematical Modelling and Aprofessora-pesquisadoralication,** Vol.1, No. 5, 3-16, 2012.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G.; BROWN, J.; EDWARDS, I. Facilitating Middle Secondary Modelling Competencies. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. Mathematical Modelling Education, Engineering and Economics- -**ICTMA** 12, p. 130-140, 2017.

GARCIA, V. C. G. Fundamentação teórica para as perguntas primárias: O que é Matemática? Porque Ensinar? Como se ensina e como se aprende? In: **Revista Educação**. Vol. 32. nº 2. Porto Alegre, 2009.

GILBRAM, D. F. R.; ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Concepções de aprendizagem em trabalhos apresentados na VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. In: X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 2011, Belém - PA. **Anais**. 2011. CD-ROM.

GOMES, J. C. S. P. **Práticas de professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de Modelagem Matemática**. 2018. 205p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2018.

GOMES, J. C. S. P.; KOWALEK, R. M.; ALMEIDA, L. M. W. Concepções de Aprendizagem na Modelagem Matemática: um olhar para dois eventos da área. In: IX Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. 2022. União da Vitória – PR. **Anais**.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. Elaborado pelo Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

ILLERIS, K. **Teorias Contemporâneas da Aprendizagem** (Org.). Tradução de Ronaldo Cataldo Costa. Porto Alegre: Penso, 2013.

ILLERIS, K. **How we learn**: learning and no-learning in school and beyond. New York: Routledge, 2007.

KAISER, G. Mathematical Modelling and Applications in Education. In: Encyclopedia of Mathematics Education. Lerman, S. (ed.). **Springer**, 2020.

KAISER, G., SCHWARZ, B. Authentic modelling problems in mathematics education – Examples and experiences. **Journal für Mathematik-Didaktik**, vol. 31, 2010. p. 51–76.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KAISER, G.; STENDER, P. Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds) Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice. Holanda: **Springer**, 2013. p. 277-294.

LITTIG, J. *et al*. A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 1, p. 1-13, 2018.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 31, n. 2, p. 285-311, 2010.

MEYER, J. F. C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’a Matemática da necessidade... **Com a Palavra, o Professor**, v. 5, n. 11, p. 140-149, 2020.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S**. Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

MOREIRA, M. A. **Teoria de aprendizagem**. São Paulo: E.D.U., 2011. MORRIS, Charles.

NISS, M. (Ed.). Cases of assessment in mathematics education: An ICMI study. **Springer** Science & Business Media, 2013.

NISS, M., BLUM, W., GALBRAITH, P. Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.) Modelling and applications in mathematics education (pp. 3–32). New York: **Springer**. 2007.

OMODEI, L. B. C. **Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática**: da Aprendizagem para o Ensino em um Curso de Formação de Professores. 2021. 189 f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. O Uso da linguagem por alunos do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática. 2020. 159 f. **Tese** (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

PIAGET, J. **A psicologia**. 2. Ed. Lisboa: Livraria Bertrand, 1973.

PONTES, E. A. S. A Práxis do Professor de Matemática por Intermédio dos Processos Básicos e das Dimensões da Aprendizagem de Knud Illeris. **Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, V.2, p.78-88, 2021.

RAMÍREZ-MONTES, G.; HENRIQUES, A.; CARREIRA, S. Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, v. 21, n. 2, p. 357-377, 2021.

RAMOS, D. C. **Modelagem matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos**. 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

SANTI, G.; SBARAGLI, S. **Misconceptions and semiotic**: a comparision. In: Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno. Nicosia: Univ. of Cyprus. Proceedings of Conference of Five Cities: Nicosia, Bologna, Palermo, Locarno. Nicosia. 2008. p. 57-72.

SCHEINER, T. New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 91, n. 2, p. 165-183, 2015.

SCHEINER, T. Dealing with opposing theoretical perspectives: Knowledge in structures or knowledge in pieces? **Educational Studies of Mathematics**, Dordrecht, v. 104, n. 1, p. 127-145, 2020.

SCHEINER, T.; PINTO, M. M. F. Theoretical advances in mathematical cognition. In: PME REGIONAL CONFERENCE: SOUTH AMERICA, 1., Rancagua, Chile, 2018. **Proceedings** […]. Rancagua: PME, 2018, p. 97-104.

SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. (2017). **Uma estratégia de Avaliação de Atividades de Modelagem Matemática**. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. 12(2), 1-17, dez.

SEKI, J. T. P. **Modelagem matemática, compreensão e linguagem**: interlocuções fundamentadas na filosofia de Wittgenstein. 2019. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

SILVA, C. **Aprendizagem Significativa em atividades de Modelagem Matemática**. 2018. 147f. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SOUSA, B. N. P. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. 2012. p. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, UFBA, Salvador, 2012.

SOUZA, J. S. S. Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa: uma relação subjacente. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 241-247, 2021.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, v. 22, n. 1, p. 39-66, 31 mar. 2019.

SWAN, M., TURNER, R., YOON, C.; MULLER, E. (2007). The roles of modelling in learning mathematics. In Blum, Werner, Galbraith, Peter and Niss, Moggens (Eds.), Modelling and aprofessora-pesquisadoralications in mathematics education: The 14th ICMI Study. NY: **Springer**.

TOMAZ, V. S., DAVID, M. M. M. S. Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula. Belo Horizonte: **Autêntica**, 2008.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. 2012. 168 f. **Dissertação** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2012.

VENÂNCIO, S., KATO, L. A. A modelagem matemática como ambiente favorecedor da aprendizagem significativa. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 6., 2009, Londrina. **Anais**... Londrina: UEL, 2009. 1 CD-ROM.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática**. Tese de Doutorado (Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013. 247p.

VYGOTSKY, L.S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes. 2001.

YIN. R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZANELLI, J. C. **Pesquisa qualitativa em estudos da gestão de pessoas**. Estudos da Psicologia, n. 7, p. 79-88, 2002.

ZANIM, A. P. **Um método para a análise de competências dos alunos em atividades de modelagem matemática**. 2021. 136f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ANEXOS

ANEXOS A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA MENORES DE IDADE.

AUTORIZAÇÃO

Eu, ____,

Portador da cédula de identidade, R.G Nº _________________________________,

inscrito no CPF Nº ____________________, Residente à Rua__________________

Nº_______, Bairro: ________________ na cidade de _________________________,

autorizo por meio deste instrumento particular Joice Caroline Sander Pierobon Gomes e Lourdes Maria Werle de Almeida respectivamente, estudante de pós-graduação e docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que utilizem produções escritas, imagens, e diálogos do (a) estudante ______________________________________ matriculado(a) no 9º ano do Ensino Fundamental, para fins de pesquisa do trabalho de doutorado intitulado Modelagem Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental: cenários para aprendizagem, podendo ser divulgadas em publicações científicas, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, desde a presente data.

Declaro ainda que fui devidamente informado (a) e esclarecido acerca da investigação que será desenvolvida. Abdicando diretos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Apucarana, _______ de _________________ de 2022.

Assinatura do responsável:____

Assinatura do estudante: ____

Data de Nascimento: _______/_______/_______

Telefone para contato: (   ) ____________________________

ANEXO B, C, D, E

INSTRUMENTOS PARA COLETA DE DADOS

ANEXO B

Questionário sobre a atividade – Salto alto

1) Qual foi o problema investigado?

2) O que significa, em termos matemáticos, encontrar o maior salto que uma pessoa pode suportar?

3) Enumere de 1 a 4, sendo 1 o que você aprendeu, 2 o que você já sabia, 3 o que você aprendeu pouco e 4 o que você não aprendeu com a atividade.

( ) Teorema de Pitágoras
( ) definição do que é cateto
( ) definição do que é hipotenusa
( ) Relação de proporcionalidade
( ) Unidades de medidas
( ) Soma do quadrado de um número
( ) Semelhança de triângulos
( ) ângulo reto
( ) Porcentagem
( ) Divisão em partes iguais
( ) Representação geométrica do teorema de Pitágoras
( ) terna pitagórica
( ) Outros ______________________

4) Considerando a atividade de modelagem matemática do salto alto, enumere de 1 a 5 (**1 para maior importância e 5 para menor importância**) o que pensa ter aprendido nessa atividade.
( ) Aprendi como aquilo que se chama teorema de Pitágoras pode ser usado.
( ) Olhando para a figura do salto alto, aprendi o que significa a relação entre catetos e hipotenusa no triângulo retângulo.
( )Aprendi que a matemática pode ser usada para determinar a altura máxima do salto de um sapato usado por uma pessoa.

5) Você e seu grupo mudaram alguma vez o modelo matemático encontrado?
a) sim, ele foi aprimorado/complementado
b) sim, descartamos a primeira versão e fizemos um novo modelo

c) não, apenas realizamos ajustes na primeira versão
d) não, o modelo pensado inicialmente foi o que permaneceu.

6) Enumere de 1 a 3 (1 para maior e 3 para menor) os meios utilizados pelo seu grupo para avaliar o que fizeram na atividade do salto alto.
( ) Verificar se os cálculos estavam corretos.
( )Verificar se os resultados finais correspondem às condições iniciais definidas.
( ) Usar algum recurso (softwares, sites, aplicativos,) para observar se a resposta obtida ;e razoável.
( ) Consultar colegas de outro grupo para conferir se as respostas estavam parecidas.

7) Enumere as lacunas de 1 a 5, sendo 1 muito difícil e 5 muito fácil.

Processos	1	2	3	4	5
Definir hipóteses					
Fazer a validação					
Obter o modelo					
Entender o que o problema pedia para resolver					
Planejar o desenvolvimento da atividade					
Trabalhar em grupo					
Entender as informações recebidas sobre o problema					
Simplificar os dados					
Selecionar e organizar as informações que seriam úteis					
Entender os conceitos relacionados à trigonometria no triângulo retângulo					
Encontrar informações em fontes confiáveis					
Fazer os cálculos necessários					
Generalizar o modelo					
Definir as variáveis					

8) Descreva o que foi diferente para você nessa atividade com relação às atividades que constam na apostila.

ANEXO C

Questionário sobre a atividade – Otimização do tamanho de uma embalagem

1) Como foi obtido o tamanho máximo de uma caixa sem tampa construída com uma folha de papel sulfite (A4)?

2) Usando o material recebido pela professora sobre a construção de uma caixa, seu grupo:

( ) planejou como faria para determinar o tamanho máximo da caixa;

( ) conversou buscando identificar o que já sabiam sobre o tema e sobre a matemática que seria utilizada para resolver o problema;

( ) não identificou como proceder e esperou orientações da professora.

3) Quais as grandezas envolvidas para resolver o problema? Foi possível relacioná-las por meio de qual relação matemática?

4) O que você pensa ter aprendido resolvendo o problema da determinação do tamanho da caixa que pode ser construída usando uma folha de papel sulfite (A4)?

ANEXO D

<u>Questionário sobre a atividade Vale alimentação</u>

1) O que acha que aprendeu com a atividade?

2) Qual o motivo da escolha da temática que seu grupo investigou?

3) O que você pensa ter aprendido com seus colegas na atividade?

4) Teve algum momento que lhe causou frustação na atividade? Poderia descrever.

5) Você considera que experiências como essa que você vivenciou são importantes para a aprendizagem e podem ser incorporadas em outras séries? Justifique.

ANEXO E

Questionário sobre a atividade Vacinação na cidade de Apucarana

1) O que acha que aprendeu com a atividade?

2) Qual o motivo da escolha da temática que seu grupo investigou?

3) O que você pensa ter aprendido com seus colegas na atividade?

4) Teve algum momento que lhe causou frustação na atividade? Poderia descrever.

5) Você considera que experiências como essa que você vivenciou são importantes para a aprendizagem e podem ser incorporadas em outras séries? Justifique.

ANEXO F

AS OUTRAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Devido às limitações de espaço no relatório de pesquisa, não foi possível descrever detalhadamente todos os encaminhamentos das atividades de modelagem matemática. No entanto, de forma resumida, são apresentadas as ideias, procedimentos e conceitos matemáticos explorados pelos estudantes ao longo do desenvolvimento das demais atividades.

- *Atividade de primeiro momento de familiarização*

A atividade sobre "furtos de fio de cobre" foi proposta pela professora-pesquisadora, seguindo os encaminhamentos do 1º momento de familiarização. Os dados e informações necessários foram fornecidos no texto entregue aos estudantes. O principal objetivo dessa atividade foi familiarizar os alunos com a modelagem matemática, permitindo que eles vivenciassem as diferentes fases e ações envolvidas nesse processo. O problema investigado nessa atividade consistiu em estimar a altura do ladrão com base no tamanho da pegada deixada por ele. Cabe salientar que essa atividade foi adaptada de Blum e Ferri (2009).

- *Atividades do terceiro momento de familiarização*

A atividade intitulada "Carro Flex e Carro a Diesel" foi desenvolvida pelo grupo G1. A escolha desse tema para investigação ocorreu devido à grande discrepância de preços entre os combustíveis atualmente. Utilizando cálculos de proporção, eles constataram que, após o período da Covid-19, é mais vantajoso optar pelo carro flex em termos de gastos, em reais.

No grupo G5, a temática escolhida foi investigar o "custo para preparar a sobremesa favorita da família". O grupo decidiu verificar o valor gasto, em reais, para preparar uma sobremesa que fosse suficiente para toda a família. Ao observar que a receita originalmente utilizada por um dos estudantes do grupo era suficiente para três pessoas, utilizaram o conceito de proporcionalidade para determinar o aumento necessário para essa receita ser suficiente para oito pessoas.

No grupo G6, os estudantes decidiram investigar as usinas de energia renovável. Essa escolha foi motivada pela participação dos alunos em uma feira de ciências, que despertou o interesse pelo tema. Após pesquisarem sobre os estados brasileiros, o grupo decidiu analisar qual das cinco formas de energia renovável investigadas - energia elétrica, energia solar, energia eólica, energia maremotriz e energia biomassa - seria a mais rentável no Brasil. Ao considerarem a produção e o custo-benefício de cada uma delas, os estudantes chegaram à conclusão de que a energia gerada pelas usinas hidroelétricas é a melhor opção de energia renovável a ser utilizada. Isso se deve ao fato de os custos de construção e manutenção serem relativamente baixos em comparação com os altos índices de lucratividade.