Universidade Estadual de Londrina

RAFAEL FIGUEIREDO COBO

PODE A NÃO-COMUTATIVIDADE DO ESPAÇO INDICAR A DEPENDÊNCIA FUNCIONAL DA ENTROPIA COM A ÁREA?

Londrina
2009

RAFAEL FIGUEIREDO COBO

PODE A NÃO-COMUTATIVIDADE DO ESPAÇO INDICAR A DEPENDÊNCIA FUNCIONAL DA ENTROPIA COM A ÁREA?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre

Orientador: Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves.

Londrina
2009

Catalogação na Publicação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C657p Cobo, Rafael Figueiredo.
Pode a não-comutatividade do espaço indicar a dependência funcional da entropia com a área? / Rafael Figueiredo Cobo. – Londrina, 2009, 39p.

Orientador: Antônio Edson Gonçalves.
Dissertação (Mestrado em Física) − Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2009.
Inclui bibliografia.

1. Entropia – Teses. 2. Energia – Teses. 3. Teoria de campos (Física) – Teses.4. Espaços não comutativos – Teses. I. Gonçalves, Antônio Edson. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53.01

RAFAEL FIGUEIREDO COBO

PODE A NÃO-COMUTATIVIDADE DO ESPAÇO INDICAR A DEPENDÊNCIA FUNCIONAL DA ENTROPIA COM A ÁREA?

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Andrey Aleksandrovic Bytsenko
UEL – Londrina – PR

Prof^a. Dr^a. Hatsumi Mukai
UEM– Maringá– PR

Londrina, 22 de outubro de 2009.

Este trabalho é dedicado a todas as pessoas importantes para mim. Em especial, aos meus pais, Francisco e Thereza.

AGRADECIMENTOS

Obrigado ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves, que soube ser paciente e me ajudou a superar minhas dificuldades.

Agradeço as pessoas que colaboraram, mas também as pessoas que criticaram, pois estas me ajudaram a ver meus erros.

Obrigado a minha família, minhas tias, Anna e Astrogilda, que me apoiaram durante toda essa jornada.

Obrigado aos meus amigos que estiveram do meu lado e colaboraram diversas vezes, em discussões importantes. Entre eles, David e Rodrigo.

De forma bem simples, obrigado a todos que estiveram do meu lado, mesmo aqueles que não estando mais presentes de forma direta, mas ainda sim estiveram me apoiando.

"Trata-se de tornar tudo tão simples quanto possível.
Mas não mais simples."
Albert Einstein

COBO, R. F. **Pode a não-comutatividade do espaço indicar a dependência funcional da entropia com a área?**. 2009. 39p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina.

RESUMO

O cálculo da entropia de buracos negros é uma questão atual, não resolvida e de grande interesse uma vez que sua compreensão está estreitamente relacionada à problemas básicos como a construção de uma teoria quântica da gravidade, abordagem estatística do cálculo da entropia de buracos negro e a validade (ou não) do princípio holográfico. Neste trabalho abordamos um simples problema que considera a influência da não comutatividade na dependência da entropia com as dimensões espaciais. Resultados anteriores que consideram campos-B em teorias de cordas e membranas sugerem que o espaço não é comutativo e esta característica pode afetar a dependência funcional da entropia com o volume ou área. Utilizamos o campo escalar comutativo e não comutativo em diversas dimensões para compararmos os resultados das razões S/E.

Palavras-chave: Entropia. Energia. Razão entropia/energia. Espaços não comutativos..

COBO, R. F. **Can the noncommutativity of space to indicate the functional dependence of the entropy with the area?**. 2009. 39p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina.

ABSTRACT

Calculation of the entropy of black holes is an open subject. Such problem is very interesting due to its relationship with basic problems like; the construction of a quantum theory of the gravity, statistical approach of the calculation of black holes' entropy and the validity (or non validity) of the holographic principle. In this work we are looking for a simple problem that considers the influence of the non-commutativity in the dependence of the entropy with the space dimensions. Previous results that consider field-B in theories of strings and membranes suggest that the space is not commutative and this characteristic can affect the functional dependence of the entropy with the volume or area. In this work we consider the commutative and non-commutative scalar field in several dimensions for we compare the results of the reasons S=E.

Key-words: Entropy. Energy. Entropy/ energy ratio. Noncommutative spaces.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma das mais fundamentais questões a respeito do universo primordial é a questão da entropia. Relacionados a origem do universo e entropia, têm surgidos questões interessantes em trabalhos sobre gravidade quântica e campos quânticos em espaços curvos. A entropia gravitacional, a qual é tratada em trabalhos como esses, trás uma ocorrência impressionante, o processo de radiação de Hawking de buracos negros. Existem algumas limitações ainda para o entendimento da conexão entre área, entropia e uma quantidade geométrica, não tratada neste texto, nesses trabalhos.

Um desses problemas diz respeito a ordem de grandeza entre a entropia de um sistema ordinário e a entropia de um buraco negro, em que a segunda é numericamente muito maior do que a primeira, doze ordens de grandeza aproximadamente. No trabalho de Bekenstein[1] sistemas sem massa relativísticos são comparados a buracos negros, no qual não existe uma grande diferença na desordenamento entrópico . Essa não diferença provém de um limite superior da razão entropia/energia, até aqui desaparecido, de sistemas de não buracos negros de um dado raio efetivo[1], $S/E < 2\pi R$, em que $\hbar = k = c = G = 1$.

O limite nessa razão pode ser facilmente entendido, classicamente, considerando um sistema com energia E ou não maior igual a E. Essa quantidade equivale a uma limitação sobre o espaço dos momentos, avaliado sobre as componentes do sistema, que provém da energia potencial tendo um limite mínimo. Se o sistema é limitado no espaço, então o espaço de fases é limitado e também a entropia. O contorno aumenta com a energia, mas nada pode ser dito a respeito da linearidade e nem sobre a constante de proporcionalidade. De fato, sistemas de buracos negros são uma forma específica para o limite superior da razão S/E para sistemas com a gravidade desprezível[1]. Uma forma interessante para realizar um teste do contorno da razão entre a entropia e a energia é considerar um sistema físico simples. Um ponto importante é o resultado dessa razão em sistemas simples, de auto-gravidade desprezível, sobre espaços comutativos. Para essa análise pode-se considerar o problema da radiação de corpo negro, o qual obedece a estatística de Bose-Einstein[2]. Nesse sistema a energia total é dada por:

$$E = 3PV \tag{1}$$

sendo P a pressão e V o volume.

A entropia é dada por;

$$S = \frac{4}{3}\frac{E}{T} \tag{2}$$

em que T é a temperatura do sistema.

Calculando a razão entre essas duas grandezas se obtem o resultado:

$$\frac{S}{E} = \frac{4}{3}\frac{1}{T}. \tag{3}$$

Este simples resultado mostra a proporcionalidade da razão S/E com o volume do sistema em um espaço 3-D. Esta proporcionalidade está expressa no fator 4/3 que resulta do volume de uma esfera em três dimensões. Isto é esperado, uma vez que a entropia é uma quantidade extensiva quando nos sistemas considerados a interação gravitacional é desprezível.

Apesar de considerarmos o campo escalar com auto-interação mas sem a interação gravitacional, consideraremos a não comutatividade do espaço como uma propriedade que pode alterar a propriedade extensiva da entropia. Para isto necessitamos inicialmente esboçar o aparato matemático necessário as nossas considerações. Neste contexto a fatoração da função zeta simplifica o tratamento de problemas em Teoria de Campos com temperatura finita em espaços escritos como produto cartesiano de secções espaciais compactas e infinitas. Devido as condições de renormalizabilidade da teoria do campo escalar e a possibilidade de compactar duas dimensões num espaço da forma $S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ ou $S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2$, em que S representa a esfera, $\mathbb{R}$ o espaço euclidiano e $\mathbb{T}$ o torus, restando um espaço-tempo com quatro dimensões observáveis, tratamos o espaço 6-D fatorado da forma acima. Consideramos inicialmente as quantidades (variáveis de estado) termodinâmicas necessárias à discussão de nosso problema, em seguida apresentamos as equações para a função zeta fatorada que muito facilita o cálculo da função de partição para modelos com temperatura finita em espaços fatorados como o produto cartesiano de secções espacias.

$$diag\,(g_{ij}) = (d+p,-1)\,, \quad \mathcal{D} = 1+d+p, \quad \hbar = c = 1 \tag{4}$$

Assim, calculando a entropia de contorno tem sido limitada pela CFT (sigla em inglês para teoria de campo conforme) e recentemente para campos escalares massivos em espaços com curvatura positiva[4] em espaços comutativos. Nesse trabalho começaremos por considerar a entropia do contorno para campos escalares em espaços não compactos não comutativos de $6D$ sendo $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2_\theta$ e espaços compactos não comutativos $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2_\theta$ em um loop de aproximação.

Nessa ordem para calcular a função termodinâmica usaremos a função zeta apropriada. Nesses termos, o logaritmo da função partição,

$$\log\left[Z^{(1)}\right] = -\frac{1}{2}\{\zeta\left(0|Al^2\right)\log l^2 - \zeta'\left(0|A\right)\} = \frac{1}{2}\zeta'\left(0|Al^2\right) \tag{5}$$

a energia livre,

$$F\left(\beta\right) = -\frac{1}{\beta}\log Z_\beta = F_0 + F_\beta, \tag{6}$$

a energia,

$$E = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta F\right), \tag{7}$$

e a entropia,

$$S = \beta\left(E-F\right) = \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}, \tag{8}$$

são escritas nas formas apresentadas acima.

Esse trabalho é organizado como segue-se: No capítulo 1 a fatorização da função zeta para a geometria $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^p$. No capítulo 2 usaremos esse formalismo para estudar as propriedades termodinamicas para campos escalares em uma geometria com secções compactas e não compactas $\mathcal{M}^d$. No capítulo 3 as propriedades termodinâmicas para campos escalares em $D = 6$ é utilizada. Finalmente nas conlusões, a influência da geometria não comutativa na razão entropia/energia será discutida.

CAPÍTULO 1
A FUNÇÃO ZETA FATORADA

Neste capítulo será considerado a propriedade de fatorização da função zeta, ζ, associada com o operador A, $\zeta(s|A)$, em um espaço $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^p$. Na ordem começaremos com uma revisão das propriedades de fatorização do *heat kernel* e a construção logaritmica da função partição em questão.

1.1 A Função Zeta Fatorada

Seguindo a referência [3], será considerado dois operadores elípticos A_1 e A_2 atuando sobre funções em $\mathbb{M}_1$ e $\mathbb{M}_2$. De acordo com a propriedade de fatorização, o *heat kernel* relacionado ao operador $A = A_1 + A_2$ é o produto de dois *kernels* relacionados aos operadores $A_1 A_2$

$$K(t, A) = K(t, A_1)\, K(t, A_2)\,. \tag{1.1}$$

Usando a relação para o traço do *heat kernel* na representação de Mellin, ver apêndice A, da função-ζ, pode-se escrever:

$$\zeta(s|A) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} K(t, A_1)\, K(t, A_2)\, \mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Dessa forma obteve-se uma representação interessante para $\zeta(s|A)$ em termos de $\zeta(s|A_1)\,\zeta(s|A_2)$.

Em particular, para teoria de campos a temperatura finita, o caso $\mathcal{M}^{\mathcal{D}} = S^1 \times \mathbb{M}^N$, no qual $A = A_1 + A_2 = -\partial_\tau{}^2 + L_N$; τ "está" sobre S^1 e satisfaz condições periódicas, L_N é um operador em $\mathbb{M}^N$. Os autovalores de A tem a forma:

$$\lambda^2{}_{n,j} = \left(\frac{2\pi n}{\beta}\right) + \omega_j{}^2, \tag{1.3}$$

em que β é o inverso da temperatura sendo a circunferência de S^1 e $\omega_j{}^2$ são os autovalores de L_N. Neste caso pode-se usar o somatório de Poisson[3], encontrando-se:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x - 2\pi n\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\pi}, \tag{1.4}$$

e a representação de Mellin para a função zeta, Eq.(1.2),

$$\begin{aligned}
\zeta\left(s|A\right) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta\left(s \mid L_N + [2\pi n/\beta]^2\right) \\
&= \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\pi}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s - \frac{1}{2}\Big|L_N\right) + \frac{\beta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}te^{in\beta t}\zeta\left(s|L_N + t^2\right) \\
&= \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\pi}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s - \frac{1}{2}\Big|L_N\right) + \frac{\beta}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}te^{s-3/2}e^{-n^2\beta^2/4t}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Da equação(1.2) pode-se obter uma representação da função zeta por uma integral complexa, usada particularmente para o estudo de expansões a altas temperaturas. Da referência [3]

$$\begin{aligned}
\zeta\left(s|A\right) &= \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\pi}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s - \frac{1}{2}\Big|L_N\right) \\
&+ \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\pi}\Gamma\left(s\right)2\pi i}\int_{\mathcal{R}_z=c} \mathrm{d}z\zeta_R\left(z\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \\
&\times \Gamma\left(\frac{z-1}{2} + s\right)\zeta\left(\frac{z-1}{2} + s\Big|L_N\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)}, \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

onde $\zeta_R\left(z\right)$ representa a usual função zeta de Riemann e $c > N+1$. Considerando agora a próxima decomposição. Supondo uma variedade topológica diferenciavel

$\mathbb{M}^N = \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^p$, neste caso a propriedade de fatorização do *heat kernel* e a representação de Mellin para a função zeta é dado por:

$$\frac{\zeta\left(s|A_N\right)}{Vol\left(\mathbb{R}^d\right)} = \frac{\Gamma\left(s-\frac{d}{2}\right)}{\left(4\pi\right)^{\frac{d}{2}}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s-\frac{d}{2}\Big|L_P\right). \tag{1.7}$$

Com esse procedimento pode-se tomar a seguinte representação para a função zeta:

$$\begin{aligned}\frac{\zeta\left(s|A\right)}{\Omega_d} &= \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{d+1}{2}\right)}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}}\zeta\left(s-\frac{d}{2}\Big|L_p\right)\\ &+ \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{d}{2}\right)}{\pi\left(4\pi\right)^{\frac{1}{2}}}\Gamma\left(s\right)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{in\beta t}\zeta\left(s-\frac{p}{2}\Big|L_p\right)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\zeta\left(s|A\right)}{\Omega_d} &= \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{d+1}{2}\right)}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s-\frac{d}{2}\Big|L_p\right)\\ &+ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}\left(4\pi\right)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(s\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}t^{s-\frac{d+3}{2}}e^{-\frac{n^2\beta^2}{4t}}K\left(t|L_p\right)\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\zeta\left(s|A\right) &= \frac{\zeta\left(s|A\right)}{\Omega_d} = \frac{\beta\Gamma\left(s-\frac{d+1}{2}\right)}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(s\right)}\zeta\left(s-\frac{d+1}{2}\Big|L_p\right)\\ &+ \frac{1}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}}\frac{1}{\pi i\Gamma\left(s\right)}\int_{\mathcal{R}_z=C}\zeta_R\left(z\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\\ &\times \Gamma\left(\frac{z-d-1}{2}+s\right)\zeta\left(\frac{z-d-1}{2}+s\Big|L_p\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Nessa ordem, para calcular o logaritmo da função partição ou, equivalentemente, da energia livre, é necessário conhecer a derivada da função zeta no ponto zero. Para isso, é conveniente considerar as representações (1.8), (1.9) e (1.10) e suas derivadas para o sector do espaço $\mathbb{M}^d$ com d par e ímpar. Assim, para a função-ζ, (1.8), com $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\frac{\zeta'(0|A)}{\Omega_d} = \frac{\beta}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(-n-\frac{1}{2}\Big|L_p\right)$$
$$+ \frac{\beta}{\pi(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{il\beta t}\zeta(-n|L_p)\,\mathrm{d}t\right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{il\beta t}\zeta'(-n|L_p)\,\mathrm{d}t\right]. \qquad (1.11)$$

como para $d = n - 1$:

$$\frac{\zeta'(0|A)}{\Omega_d} = \frac{\beta}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\zeta(-n|L_p)+\zeta'(-n|L_p)\right]$$
$$+ \frac{\beta\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{\pi(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{il\beta t}\zeta\left(-n+\frac{1}{2}\Big|L_p\right)\mathrm{d}t \qquad (1.12)$$

e para a função-ζ, Eq.(1.9), com $d = 2n$,

$$\frac{\zeta'(0|A)}{\Omega_d} = \frac{\beta}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)\zeta\left(-n-\frac{1}{2}\Big|L_p\right)$$
$$+ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^{-n-\frac{3}{2}}e^{-\frac{l^2\beta^2}{4t}}K(t|L_p)\,\mathrm{d}t, \qquad (1.13)$$

e para $d = 2n - 1$

$$\frac{\zeta'(0|A)}{\Omega_d} = \frac{\beta}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\zeta(-n|L_p)+\zeta'(-n|L_p)\right]$$
$$+ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^{-n-1}e^{-\frac{l^2\beta^2}{4t}}K(t|L_p)\,\mathrm{d}t. \qquad (1.14)$$

Finalmente para a representação apropriada para altas temperaturas, Eq.(1.10), com $d = 2n$

$$\frac{\zeta'\left(0|A\right)}{\Omega_d} = \frac{\beta\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}}\zeta\left(-n-\frac{1}{2}\Big|L_p\right) + \frac{1}{\pi i\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}}$$
$$\times \int\limits_{\mathcal{R}_z=c} \zeta_R\left(z\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z-2n-1}{2}\right)\zeta\left(\frac{z-2n-1}{2}\Big|L_p\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)} \mathrm{d}z \quad (1.15)$$

e para $d = 2n - 1$

$$\frac{\zeta'\left(0|A\right)}{\Omega_d} = \frac{\beta}{\left(4\pi\right)^{\frac{d+1}{2}}}\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\zeta\left(-n|L_p\right) + \zeta'\left(-n|L_p\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\pi i\left(4\pi\right)^n} \times \int\limits_{\mathcal{R}_z=c} \zeta_R\left(z\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z-2n}{2}\right)\zeta\left(\frac{z-2n}{2}\Big|L_p\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)} \mathrm{d}z \, (1.16)$$

As equações (1.9, 1.10, 1.16) são apropriadas para o cálculo, em altas temperaturas, para todas as propriedades termodinâmicas em uma aproximação de um loop de campos quânticos na geometria $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{M}^d \times \mathbb{M}^p$. Além da formula de Chowla-Selberg[5], essas representações provém a continuação analítica da função-ζ para todo o plano complexo-z e aparte da função zeta na secção $\mathbb{M}^p$, a estrutura dos pólos explícitos tornam-se visíveis.

CAPÍTULO 2
CAMPOS ESCALARES EM ESPAÇOS COMUTATIVOS

Nesse capítulo iremos aplicar o formalismo previamente desenvolvido para a avaliação das funções termodinâmicas para o campo escalar:

$$S = \int \mathrm{d}^6 x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right), \tag{2.1}$$

em uma secção não compacta e compacta $\mathbb{M}^p$ sobre o espaço $\mathcal{M}$. Esse resultado é muito bem conhecido, mas é muito importante para nossas considerações futuras, quando nós iremos igualar, comparar, esses resultados com os campos escalares não comutativos. Outro interesse é o caso massivo sendo o limite para a massa zero sendo considerada.

2.1 O Campo Escalar em um Espaço $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$

A motivação para o estudo do campo escalar em tal espaço é relacionado com a renormalização do modelo não comutativo nessa dimensão, como mostraremos nessa secção. Para continuarmos com os cálculos iniciaremos usando as representações (1.10) e (1.16) apropriada na ordem, considerando o caso $d = 3, n = 2$, e $p = 2$:

$$\frac{\zeta(s|A)}{\Omega_2} = \frac{\beta \Gamma(s-2)}{(4\pi)^2 \Gamma(s)} \zeta(s-2|L_2) + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{\pi i \Gamma(s)}$$

$$\times \int\limits_{\mathcal{R}_z = c} \zeta_R(z) \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z-4}{2} + s\right) \zeta\left(\frac{z-4}{2} + s \Big| L_2\right) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)} \mathrm{d}z, \tag{2.2}$$

$$\frac{\zeta'(s|A)}{\Omega_2} = \frac{\beta}{(4\pi)^2}\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\zeta(-2|L_2) + \zeta'(-2|L_2)\right] + \frac{1}{\pi i\,(4\pi)^2}$$

$$\times \int\limits_{\mathcal{R}_z = c} \zeta_R(z)\,\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z-4}{2}\right)\zeta\left(\frac{z-4}{2}\Big|L_2\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)}\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

A função-ζ associada com o operador laplaciano atuando na secção compacta $\mathbb{R}^2$, possui um espectro contínuo:

$$\lambda^2 = m^2 + \mathbf{k}^2. \tag{2.4}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^N y}{(y^2 + c)^{-\alpha}} = \frac{\pi^{N/2} c^{\frac{N}{2}-\alpha}\Gamma\left(\alpha - \frac{N}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \quad c > 0, \quad \mathcal{R}_\alpha > \frac{N}{2}, \tag{2.5}$$

a continuação analítica da função zeta correspondente é:

$$\begin{aligned} \zeta(a|L_2) &= \frac{Vol(\mathbb{R}^2)}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2 k \left(m^2 + \mathbf{k}^2\right)^{-\alpha} \\ &= \frac{Vol(\mathbb{R}^2)}{4\pi}\frac{m^{2(1-\alpha)}}{(\alpha - 1)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

e a sua derivada:

$$\zeta'(a|L_2) = -\frac{Vol(\mathbb{R}^2)}{4\pi(\alpha-1)}\left[2m^{2(1-\alpha)}\log(m) + \frac{1}{\alpha - 1}\right]. \tag{2.7}$$

Usando os resultados anteriores nas equações (2.6), (2.7) e executando a integração, com o teorema do resíduo, nos pólos simples $z = 6, 4, 2, 1, -2n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$; e o pólo de segunda ordem em $z = 0$, nos podemos construir um conjunto completo de funções termodinâmicas (5),(6) e (7):

$$
\begin{aligned}
F_V(\beta) &= -\frac{1}{(4\pi)^3}\Bigg\{ + \frac{256}{315}\pi^6\beta^{-6} - \frac{16}{45}\pi^4 m^2\beta^{-4} + \frac{2}{3}\pi^2 m^4\beta^{-2} - \frac{8}{25}\pi m^5\beta{-1} \\
&+ \frac{m^6}{6}\left[\log\left(\frac{2l}{\beta}\right) + \frac{1}{6}\left(\log(2\pi) - \gamma - \frac{11}{2}\right)\right] \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{\pi^{2n}2^n(2n+6)}\zeta_R(2n+1)\frac{m^{2n+6}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(j+2)}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2n}\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
E_V(\beta) &= -\frac{2}{(4\pi)^3}\Bigg\{\frac{128}{315}\pi^6(-5)\beta^{-6} - \frac{8}{45}\pi^4 m^2(-3)\beta^{-4} + \frac{\pi^2}{3}m^4(-1)\beta^{-2} \\
&+ \frac{m^6}{6}\left[\log\left(\frac{2l}{\beta}\right) + \frac{1}{6}\left(\log(2\pi) - \gamma - \frac{17}{2}\right)\right] + O(\beta)^2\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

$$
\begin{aligned}
S_V(\beta) &= -\frac{2}{(4\pi)^3}\left[\frac{128}{315}\pi^6(-6)\beta^{-5} - \frac{8\pi^4}{45}m^2(-4)\beta^{-3}\right. \\
&\left. + \frac{\pi^2}{3}m^4(-2)\beta^{-1} + \frac{4\pi}{15}m^5 - \frac{m^6}{12}\beta + O\left(\beta^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Fazendo alguns comentários a respeito das propriedades da energia livre. As notações usadas nas equações (2.8), (2.9) e (2.10) para indicar a densidade de energia livre, energia e entropia $X_V(\beta) = \frac{X(\beta)}{Vol(\mathbb{R}^3 Vol\mathbb{R}^2)}$. A razão entropia/energia para esse caso é:

$$
\lim_{\beta\to 0}\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta - \frac{7}{200\pi^2}m^2\beta^3 - \frac{13}{200\pi^4}m^4\beta^5 + O\left(\beta^7\right). \tag{2.11}
$$

Todas as funções termodinâmicas anteriores são analíticas na massa m significando que podemos tomar o limite para o caso sem massa e assim:

$$
\lim_{m\to 0} F_V(\beta) = -\frac{4\pi^3}{315}\beta^{-6},
$$

$$\begin{aligned}\lim_{m\to 0} E_V(\beta) &= \frac{20\pi^3}{315}\beta^{-6},\\ \lim_{m\to 0} S_V(\beta) &= \frac{24\pi^3}{315}\beta^{-5},\end{aligned}$$

e para a razão entropia/energia temos:

$$\left.\frac{S}{E}\right|_{\beta\to 0} = \frac{6}{5}\beta \tag{2.12}$$

Este resultado mostra que para o caso do campo escalar sem massa, não existe uma contribuição polinômial na temperatura, somente o termo linear que também aparece no limite dos modelos massivos a alta temperatura. Isso é importante para mostrar que as contribuições para todos os pólos na energia livre no caso massivo. Estas são expressões para as funções termodinâmicas para os campos escalares massivos na geometria $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. Nós temos constribuições vindo somente do pólo $z = 6$. Diferentemente do caso massivo, no qual a estrutura depende da energia livre na temperatura provindo todos os pólos da integral complexa, como para o caso sem massa temos somente a contribuição dos pólos em $z = \mathcal{D} = 1 + d + p = 6$.

2.2 O Campo Escalar no Espaço $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2$

Vamos iniciar considerando as propriedades termodinâmicas do campo escalar sem massa existindo em um espaço com uma secção espacial compacta bidimensional $\mathbb{T}^2$. O procedimento da análise está estreitamente relacionada com o procedimento acima, secção 2.1 . Nessa ordem o cálculo da função-ζ (1.10) e sua derivada (1.16). O primeiro passo é executar o cálculo da função zeta e sua derivadas associando o operador de Laplace-Beltrami L_2 atuando na secção T^2 nos pontos $\zeta\left(\alpha|L_2\right)|_{\alpha=0}$ e $\zeta'\left(\alpha|L_2\right)|_{\alpha=-2}$. A função zeta para o torus bidimensional pode ser calculada do espectro do operador de Laplace-Beltrami sujeito as condições de contorno periódicas nas duas direções com raios compactados R (podemos considerar aqui $R_1 = R_2 = R$). O espectro lê-se como;

$$\Omega_n^2 = \frac{n_1^2}{R_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^2} = \frac{1}{R^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right), \tag{2.13}$$

e associada as funções zeta:

$$\zeta\left(\alpha|L_2\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2/\{0\}} \left[\Omega_n\right]^{-\alpha}. \tag{2.14}$$

Essa relação é fechada relatada para;

$$\zeta\left(\alpha|L-2\right) = R^{2\alpha}\mathbb{Z}_2 \left\|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\|(\alpha), \tag{2.15}$$

onde $Z_p \left\|\begin{matrix}\mathbf{g}\\\mathbf{h}\end{matrix}\right\|(s,\phi)$ é a função-ζ de Epstein[11] associada com a forma quadrática $\phi\left[a\left(\mathbf{n}+\mathbf{g}\right)\right] = \sum_j a_j\left(n_j + g_j\right)^2$. Para $\Re_s > p$, $Z_p \left\|\begin{matrix}\mathbf{g}\\\mathbf{h}\end{matrix}\right\|(s,\phi)$ é dado pela fórmula[9]:

$$\mathbb{Z}\left\|\begin{matrix}g_1\cdots h_p\\g_1\cdots h_p\end{matrix}\right\|(s,\phi) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^p}\left\{\phi\left[a\left(\mathbf{n}+\mathbf{g}\right)\right]\right\}^{-s/2} e^{2\pi i(\mathbf{n},\mathbf{h})}, \tag{2.16}$$

onde g_j e h_j são alguns números reais, e omite-se o primeiro termo com, para todos g_i inteiros, $(n_1, n_2, \cdots, n_p) = (g_1, g_2, \cdots, g_p)$. A equação funcional para $Z_p \left\|\begin{matrix}\mathbf{g}\\\mathbf{h}\end{matrix}\right\|(s,\phi)$ é escrita como:

$$Z_p \left\|\begin{matrix}\mathbf{g}\\\mathbf{h}\end{matrix}\right\|(s,\phi) = \frac{1}{(det\, a)^{1/2}}\pi^{(1/2)(2s-p)}\frac{\Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}e^{-2\pi i(\mathbf{g}+\mathbf{h})} \times \mathbb{Z}_2\left\|\begin{matrix}\mathbf{h}\\-\mathbf{g}\end{matrix}\right\|(p-s,\phi^*)$$

em que $\phi^* [a(\mathbf{n}+\mathbf{g})] = \sum_j a_j^{-1}(n_j + g_j k)^2$. A função-$\zeta$ bidimendional de Epstein aparecendo na Eq.(2.15), pode ser apresentada como[9] [10]:

$$\mathbb{Z}_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| (\alpha) = 4\zeta(\alpha)\beta(\alpha), \tag{2.17}$$

onde $\zeta(\alpha)$ é a usual função zeta de Riemann e $\beta(\alpha)$ é a função-β de Dirichlet,analítica em todo plano complexo, com zeros em $\alpha = -2n-1, n = 0, 1, 2, \cdots$; definido por:

$$\beta(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\alpha}\cdot \tag{2.18}$$

A equação funcional para $\beta(\alpha)$ escreve-se:

$$\beta(1-\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\alpha \sin\left(\frac{\pi z}{\alpha}\right)\Gamma(\alpha)\beta(\alpha). \tag{2.19}$$

Finalmente, a função zeta para o torus T^2 pode ser apresentada na simples forma:

$$\zeta(\alpha|L_2) = R^{2\alpha}\zeta(\alpha)\beta(\alpha). \tag{2.20}$$

Usando a equação (2.20) em (1.10) e (1.16) e realizando a integral complexa nos pólos simples $z = 6, 4, 1, 0, -2n$; para n ímpar, a expressão para a energia livre, entropia e energia podem ser fechadas e relacionadas com;

$$\begin{aligned} F_V(\beta) &= \frac{R^{-4}}{8\pi^2}\zeta'(-2) - \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{32}{945}\pi^7 R^2\beta^{-6} - \frac{2}{45}\pi^4\beta^{-4}\right. \\ &+ \left.\frac{4}{3}\pi\zeta\left(-\frac{3}{2}\right)\beta\left(-\frac{3}{2}\right)R^{-3}\beta^{-}1 - \frac{1}{4}\frac{\zeta(3)}{(2\pi)^2}R^{-4} + O(\beta)\right\}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} E_V(\beta) &= \frac{R^{-4}}{8\pi^2}\zeta'(-2) + \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{32}{189}\pi^7 R^2\beta^{-6}\right. \\ &- \left.\frac{2}{15}\pi^4\beta^{-4} + \frac{1}{4}\frac{\zeta(3)}{(2\pi)^2}R^{-4} + O(\beta)\right\}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} S_V(\beta) &= \frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{64}{315}\pi^7 R^2\beta^{-5} - \frac{8}{45}\pi^4\beta^{-3}\right. \\ &+ \left.\frac{4}{3}\pi\zeta\left(-\frac{3}{2}\right)\beta\left(-\frac{3}{2}\right)\beta^{-}1 + O\left(\beta^2\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

A razão entropia/energia nesse caso é:

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta - \frac{21}{200\pi^3}\left(\frac{\beta^3}{R^2}\right) + O\left(\beta^5\right). \tag{2.24}$$

CAPÍTULO 3
CAMPOS ESCALARES EM ESPAÇOS NÃO COMUTATIVOS

O ponto principal desse capítulo é o cálculo das funções termodinâmicas para o campo escalar em espaços planos não comutativos. A ação para um campo escalar interagente sem massa é o que estamos preferindo, este é dado por

$$S_{scalar} = \int \left(\frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{\lambda}{r!} \phi \star \phi \star \cdots \star \phi \right) \mathrm{d}^D x \cdot \tag{3.1}$$

Desde que se divida com uma teoria de campo escalar renormalizavel, r, o número de campos escalares no produto estrela ($\star$), pode ser escolhido como um inteiro dado por $r = D/D\,(D-2)$. Como é bem conhecido, as escolhas são somente $D = 3; r = 6; D = 4; r = 4;$ e $D = 6; r = 3$. Nesse cálculo, o primeiro caso, $D = 3; r = 6;$, não é levado em consideração, pois não tem sentido uma dimensão não comutativa. Isso é facilmente verificado, pois o espaço com essa escolha se torna, por exemplo $S^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^1$. Para o segundo caso, a função zeta associada com a secção não comutativa do espaço plano é infinita

$$\zeta\,(s|L-2) = \mathcal{A} \left(\frac{\Lambda}{\theta^2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{2+2s}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2s-2}{4}\right)}{\Gamma\,(s)}\,, \tag{3.2}$$

e precisamos mais cálculos envolvidos[8]e não precisamos dividir isso agora. Vamos considerar o caso $\mathcal{M} = S^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2_\theta$.

3.1 O Campo Escalar no Espaço $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2_\theta$

Na ordem para o cálculo da função zeta, para essa geometria, apropriada para expansões em alta temperatura, nós iremos considerar a representação (2.1) e (2.2). Primeiramente é necessário calcular a função zeta especifica para a secção $\mathbb{R}^2_\theta$.

O espectro do operador de Laplace na secção $\mathbb{R}^2_\theta$ escreve-se[7]

$$\lambda_n^2 = \mathbf{k}^2 + \left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\frac{1}{\mathbf{k}^2} \tag{3.3}$$

a função zeta associada a esse espectro pode ser calculada da expressão (2.5)

$$\zeta\left(\alpha|L_2\right) = \frac{Vol\left(\mathbb{R}^2_\theta\right)}{8\pi}\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)}\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(s\right)} \tag{3.4}$$

$$\zeta\left(-2|L_2\right) = 0 \tag{3.5}$$

$$\zeta'\left(-2|L_2\right) = \frac{2}{3}Vol\left(\mathbb{R}^2_\theta\right)\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.6}$$

A expressão para a função zeta (2.2) e sua derivada (2.3) no ponto zero pode ser calculada usando as equações (3.4), (3.5) e (3.6) e o resultado é fechado e relacionado com

$$\frac{\zeta\left(0|L_2\right)}{\Omega_6} = 0, \tag{3.7}$$

e

$$\frac{\zeta'\left(0|L_2\right)}{Vol\left(\mathbb{R}^3\right)Vol\left(\mathbb{R}^2_\theta\right)} = \frac{\beta}{48\pi^2}\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\left(4\pi\right)^4 i}$$
$$\times \int\limits_{\mathcal{R}_z=c} \zeta_R\left(z\right)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z-2}{4}\right)\Gamma\left(\frac{z-6}{4}\right)\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{6-z}{4}}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)}\mathrm{d}z. \tag{3.8}$$

O integrando possui pólos simples em $z = 6, 1, 0$ e pólos de segunda ordem para $z = 2, z = -2n, n = 2l - 1, l = 0, 1, 2, \cdots$. Usando o teorema do resíduo nós podemos realizar o cálculo da integral e pelo uso dos resultados e das equações (3.7) e da energia livre (5) na ordem temos:

$$
\begin{aligned}
F_V(\beta) &= -\frac{1}{128\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{945}\beta^{-6} + \frac{4\pi^2}{3}\left\{\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4\frac{\Lambda}{\theta^2}\right] - log\,(256)\right.\right. \\
&- \left. 48\zeta'(-1) - 3\right\}\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\beta^{-2}\right) \\
&+ \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{5}{4}}\beta^{-1} + \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}\beta^0 \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{\pi}}{(l+1)(l!)^2}\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{l+1}\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{4l-2}\Gamma\left(2l-\frac{1}{2}\right)\left\{2\zeta'(4l-1)\right. \\
&+ \zeta(4l-1)\left\{\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right. \\
&- \left.\left.\left.\left.\frac{1}{2(l+1)}\psi\left(2l-\frac{1}{2}\right) + \gamma - \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}\right\}\right\}\right\}\right\}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Da equação anterior, a energia (6) e da entropia (8) em sistemas a altas temperaturas escreve-se:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0} E_V(\beta) = \frac{1}{128\pi^3}&\left\{\frac{5\pi^6}{945}\beta^{-6} + \frac{4\pi^3}{3}\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\right]\right. \\
&\left.\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\beta^{-2} + O\left(\beta^2\right)\right\}, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0} S_V(\beta) = \frac{1}{128\pi^3}&\left\{\frac{6\pi^6}{945}\beta^{-5} + \frac{8\pi^3}{3}\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\right]\right. \\
&\left.\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\beta^{-1} + O\left(\beta^3\right)\right\}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Para a razão entropia/energia, as equações (3.10) e (3.11) fornece:

$$\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta + \frac{4}{5}\left(\frac{252}{\pi^3}\right)\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\right]\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\beta^5 + O\left(\beta^9\right). \tag{3.12}$$

3.2 O Campo Escalar no Espaço $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2_\theta$

A função zeta-ζ associada ao espectro[7]

$$\Omega_n^2 = \frac{\varphi(n)}{R^2}\left[1 - \frac{\Lambda(\theta)R^4}{\varphi(n)^2}\right], \quad \Lambda(\theta) = \frac{\lambda}{(4\pi)^3\theta^2} \tag{3.13}$$

é calculada na referência [10]. θ é o parâmetro não comutativo e $\varphi(n) = \sum_j R^{-2}n_j^2$ foi escolhida para um propósito simplificado, o raio do torus igual a R. Entretanto, aqui podemos reproduzir de forma parecida, resultados sobre a mesma linha do formalismo desenvolvido na secção 1. Com o procedimento parecido da secção 3.1 da função zeta e suas derivadas na origem são:

$$\frac{\zeta(0|A)}{Vol\left(\mathbb{R}^2_\theta\right)} = \frac{3\Lambda(\theta)\beta}{2(4\pi)^2}\left[1 + \frac{2}{3}\pi^2 K\Lambda(\theta)R^2\right], \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(0|A)}{Vol\left(\mathbb{R}^3\right)} &= \frac{\beta}{32\pi^2}\left[\frac{3}{2}\zeta(-2|L_2) + \zeta'(-2|L_2)\right] + \frac{1}{(4\pi)^2\pi i} \\ &\times \int\limits_{\mathcal{R}_z=c} \zeta_R(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z-4}{2}\right)\zeta\left(\frac{z-4}{2}\middle|L_2\right)\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-(z-1)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\zeta\left(s - \frac{d+1}{2}\middle|L_2\right) = \frac{1}{R^{d+1-2s}}\sum_{l=0}^{\frac{d+1}{2}-s}\frac{\left[-\Lambda(\theta)R^4\right]^l}{l!\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{d+3}{2} - s - j\right)}\mathbb{Z}_2\left(\frac{2s+4l-d-1}{2}\right)$$

O integrando da equação $\zeta'(0|A)$ tem uma estrutura rica em pólos que merece uma análise cuidadosa. Isto é por causa da função zeta associada com o operador L_2. A função zeta de Riemann e as funções gama que aparecem no integrando das representações (1.10) na fatorização apropriada. As estruturas dos pólos são resumidas na seguinte tabela:

z	k	n	$0 \leq l \leq 2+k$	ordem do pólo
6			$=0$	1°
4				1°
2			$=1$	2°
1			$\forall$	1°
$-2k$	$2n$	0	$=0$	1°
			$=1,2$	2°
		≥ 1	$\geq n+1$	1°
	$2n+1$		$=2n+2$	2°
			$\geq n+3$	1°

As estruturas dos pólos são consideradas em detalhes na referência [8], para uma variedade topológica diferenciavel D-dimensional. Nossas presentes considerações é um caso particular para campos escalares , $\alpha = 2$ existindo em um espaço $D = 1 + d + p = 6 = 1 + 3 + 2$, então, com p pares:

$$F_V(\beta) = -\frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{32\pi^7}{945}R^2\beta^{-6} - \frac{2\pi^4}{45}\beta^{-4} + 2\pi\Lambda(\theta)R^2\left[C - \frac{\pi}{6}\log\left(\frac{\beta}{2R}\right)\right]\beta^{-2} + \frac{4}{3}R^{-3}\sum_{l=0}^{\infty}h_l(\theta)\beta^{-1} - \frac{\zeta(3)}{8\pi^2}R^{-4}\beta^0 + \frac{1}{2}A\Lambda(\theta)\log\left(\frac{\beta}{2R}\right) + O\left(\beta^2\right)\right\} \quad (3.16)$$

$$E_V(\beta) = -\frac{1}{4\pi^2}\left\{-5\frac{32\pi^7}{945}R^2\beta^{-6} + \frac{6\pi^4}{45}\beta^{-4} - 2\pi\Lambda(\theta)R^2\left[C - \frac{\pi}{6}\left(\log\left(\frac{\beta}{2R}\right) - 1\right)\right]\beta^{-2} + \frac{1}{2}A\Lambda(\theta)\left[1 + \log\left(\frac{\beta}{2R}\right)\right] + O\left(\beta^0\right)\right\} \quad , \quad (3.17)$$

$$S_V(\beta) = -\frac{1}{4\pi^2}\left\{ -6\frac{32\pi^7}{945}R^2\beta^{-5} + \frac{8\pi^4}{45}\beta^{-3} - 2\pi\Lambda(\theta)R^2\left[2C\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\pi}{3}\left(\log\left(\frac{\beta}{2R}\right)+\frac{1}{2}\right)\right]\beta^{-1} - \frac{4}{3}R^{-3}\sum_{l=0}^{\infty} h_l(\theta)\beta^0 + O\left(\beta^0\right)\right\} \quad , \tag{3.18}$$

$$\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta - \frac{3}{5}\frac{7}{20}\frac{1}{\pi^3 R^2}\Lambda(\theta)\pi, \log\left(\frac{\beta}{2R}\right)\beta^5 + O\left(\beta^7\right) \tag{3.19}$$

em que $\Lambda(\theta)$ foi definida na equação (3.13) e as outras funções de teta e as constantes são definidas como:

$$h_l(\theta) = \frac{[\Lambda(\theta)]^l}{l!}R^{4l}\zeta\left(2l-\frac{3}{2}\right)\beta\left(2l-\frac{3}{2}\right)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{5}{2}-j\right), \tag{3.20}$$

$$C = \frac{\pi^2}{6}\left\{\ln 2 + \frac{3}{2}\ln\pi - 2\ln\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right] + \zeta'(2)\right\}, \tag{3.21}$$

$$A = 1 + \frac{\pi^2}{3}KR^4\Lambda(\theta). \tag{3.22}$$

CONCLUSÕES

Primeiramente podemos reescrever aqui os resultados obtidos anteriormente para a razão entropia/energia observando a qual espaço cada um desses pertencem. Reescrever é simplesmente uma maneira de poder compará-los reunindo-as como em um quadro. Dessa maneira escreve-se:

$$\left.\frac{S}{E}\right|_{\beta\to 0} = \frac{6}{5}\beta, \tag{3.23}$$

pertencendo a um espaço comutativo $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$, juntamente com a equação:

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta - \frac{21}{200\pi^3}\left(\frac{\beta^3}{R^2}\right) + O\left(\beta^5\right), \tag{3.24}$$

no qual o produto cartesiano das secções compactas é feita na forma $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2$. As duas próximas equações pertencem a um espaço não comutativo, sendo:

$$\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta + \frac{4}{5}\left(\frac{252}{\pi^3}\right)\log\left[\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^4\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\right]\left(\frac{\Lambda}{\theta^2}\right)\beta^5 + O\left(\beta^9\right), \tag{3.25}$$

no qual o espaço é $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2_\theta$ e

$$\frac{S}{E} = \frac{6}{5}\beta - \frac{3}{5}\frac{7}{20}\frac{1}{\pi^3 R^2}\Lambda\left(\theta\right)\pi\log\left(\frac{\beta}{2R}\right)\beta^5 + O\left(\beta^7\right), \tag{3.26}$$

sendo $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2_\theta$.

As equações (3.23) e (3.24) pertencem a um espaço comutativo, mas a última pertence a um espaço escrito com uma secção compacta diferente, neste caso o torus. A mudança na topologia do espaço muda o resultado da razão entropia/energia como pode ser observado. As equações (3.25) e (3.26) pertencem a um espaço não comutativo e de imediato percebe-se uma contribuição de termos de ordem superiores em β.

Comparando a equação (3.23) com a equação (3.25), observa-se que a primeira traz um resultado esperado, no qual a razão entropia/energia é proporcional a β e o fator de proporcionalidade remete ao volume do espaço, enquanto a segunda, pertencente a um espaço não comutativo, também possui o termo linear e mais termos adicionais de ordem superiores em beta. Esses fatores de proporcionalidade, nos termos polinômiais, não remetem a uma superfície, ou seja, a área e também não revelam uma dependência com o volume. A comparação entre as equações (3.24) e (3.26) fornece um resultado similar ao anterior, devido a não comutatividade do espaço.

Esses resultados mostram que a não comutatividade do espaço pode alterar a propriedade extensiva da entropia, pois existe uma contribuição polinômial em ordens superiores de β. Esses resultados revelam uma natureza semi-extensiva, ou não extensiva, pois não são proporcionais ao volume, mas nada dizem de concreto a respeito de uma proporcionalidade com a área, por isso, a não comutatividade do espaço pode sugerir uma alteração da natureza extensiva da entropia, mas esses resultados são inconclusivos e não se pode afirmar, de maneira concreta, que a natureza extensiva é alterada e sim apenas ressaltar uma indicação de que isso possa ocorrer.

REFERÊNCIAS

[1] J.D. Bekenstein *Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems*, Phys. Rev.**D 23** (1981) 287-288

[2] R. K. Pathria *Statistical Mechanics 2nd Edition*, British Library Cataloguing in Publication Data ,London, (1996).

[3] A.A. Bytsenko, G. Cognola, L.Vanzo, S. Zerbini, *Quantum Fields and Extended Objects in Space-Times with Constant Curvature Spacial Section* Phys. Rept. **266** (1996) 1-126

[4] E. Elizalde, A.C. Tort, *Entropy bounds for massive scalar field in positive curvature space*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 105024

[5] E. Elizalde,*Explicit zeta functions for bosonic and fermionic fields on a noncommutative toroidal spacetime*, Nucl. Phys. **104** (Proc. Suppl.)(2002) 157[hep-th/0012154];*Spectral zeta function in noncommutative spacetimes*, [hep-th/01055145]

[6] A.A. Bytsenko, E. Elizalde e S. Zerbini *Effective finite temperature partition function for fields on noncommutative flat manifolds*, Phys. Rev. **D 64** (2001) 105024

[7] S. Minwalla, M.V. Raamsdonk e N. Seiberg *Noncommutative pertubative dinamics*, J. High Energy Phys. **0002** (2000) 020[hep-th/9912072]; J. Gomis, T. Mehen e M.B Wise *Quantum field theory with compact noncommutative extra dimensions*, J. High Energy Phys. **0008** (2000) 029[hep-th/00061160]; S. Nam *Casimir force in compact noncommutative extra dimensions and radius stabilization*, J. High Energy Phys. **0010** (2000) 044[hep-th/0008083]; W.H. Huang, *Casimir effect on the radius stabilization of the noncommutative torus*, Phys. Lett. **B 497** (2001) 317-322

[8] A.A. Bytsenko, A.E. Gonçalves e S. Zerbini *One-loop effective Potential for scalar and vector fields on Higher Dimensional Noncommutative Flat Manifolds*, Mod. Phys. Lett. **A 16** (2001) 1479-1486

[9] Staff of the Bateman Manuscript Project. *Higher Transcendental Functions* (A. Erdélyi, Ed.) Vol. 1 e 3, MacGraw-Hill Book, Inc, New York, (1953)

[10] Yu.P. Gonchorov e A.A. Bytsenko, Nucl. Phys. **B 271**(1986) 726-748; I.J. Zucher, J. Phys. **A 7**, 1568 (1974); **A 8**, (1975) 1734

[11] E. Elizalde, S.D. Odintsov, A. Romeo A.A Bytsenko e S. Zerbini *Zeta Regularization Techniques with Applications* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd ,1994).

[12] `http://pt.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Mellin`, acessados dia 5 de outubro de 2009.

APÊNDICE

APÊNDICE A – Representação de Mellin

A representação de Mellin utilizada no capítulo um para a função-ζ e simplesmente uma forma de escrever zeta em uma representação integral. A transformada de Mellin[12] é definida como:

$$M_f(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1} \mathrm{d}t \tag{A.1}$$

no qual s são números complexos e para essa representação a integral seja convergente.

Usando a transformada de Mellin pode-se construir uma relação entre uma série de Dirichlet e uma série de potências. Isso é dado por:

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty F\left(e^{-t}\right) t^{s-1} \mathrm{d}t \tag{A.2}$$

Como partimos das seguintes relações;

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \;\; e \;\; F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{A.3}$$

o que para todos $a_n = 1$ resulta para f a funcão zeta de Riemann;

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t \tag{A.4}$$