Universidade Estadual de Londrina

DANIEL GALDINO SIMÃO

A EXTENSÃO HOLOMORFA DE FUNÇÕES CR

Londrina
2024

DANIEL GALDINO SIMÃO

A EXTENSÃO HOLOMORFA DE FUNÇÕES CR

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho

Londrina
2023

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

S232c Simão, Daniel Galdino.
A Extensão Holomorfa de Funções CR /
Daniel Galdino Simão. – Londrina, 2023.
74 f. : il.

Orientador: Paulo Antonio Liboni Filho.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2012.

Inclui Bibliografia.

1. Equações Diferenciais Parciais - Teses. 2. Variedades CR - Teses. 3. Teoria das Distribuições - Teses. 4. Teoremas de Aproximação - Teses. 5. Funções CR - Teses. I. Liboni Filho, Paulo Antonio. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

519.681-7

DANIEL GALDINO SIMÃO

A EXTENSÃO HOLOMORFA DE FUNÇÕES CR

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
Universidade Federal de Santa Catarina

Londrina, 19 de Março de 2024.

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo, agradeço a Deus por tudo que proporciona, mesmo sendo um pecador, mesmo com todos meus defeitos. Ele me estende a mão e me acalenta em seu colo. Da tristeza à alegria, do choro à felicidade, Ele sempre me protege.

Agradeço às pessoas mais importantes da minha vida, a quem também dedico este trabalho: os meus pais. Não havia perspectiva, mas construíram com seu suor a bases da minha vida. Mesmo nas dificuldades, asseguraram um cenário propício à minha formação acadêmica, batalharam por mim, seus ombros me sustentam. Por todo carinho oferecido, por todo apoio recebido, por todas as orações, pelo exemplo, por tudo, obrigado.

Claro que não poderia deixar de agradecer à minha avó materna, Izaltina *(in memoriam)*, pelo maior exemplo que alguém poderia ter de resiliência e bondade. Infelizmente não pude compartilhar os momentos felizes e tristes com a senhora nos últimos dois anos. Não caberia em um parágrafo expressar a gratidão e o amor que sinto por ela.

Agradeço também à minha irmã, Débora, às minhas tias, Simone e Rosa, aos meus tios, Carlos e Rodrigo, à minha avó paterna, Vicência, pelo apoio e ajuda.

Expresso minha gratidão a João Noboru, Celly, Alexandre e Renan, pois, sem dúvida, o convívio e a ajuda deles foram fundamentais para a minha formação.

Várias vezes me senti perdido na trivialidade matemática. Agradeço ao meu querido orientador, professor Paulo, que, com paciência e bom humor, me orientou de maneira extraordinária e sempre me direcionou da melhor forma possível.

Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática, tanto da UEL quanto da UTFPR, que contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, ao professor Anderson Paião por me instigar a seguir na carreira acadêmica.

Agradeço aos amigos do PGMAC, em especial ao Vinicíus pelas conversas jogadas fora.

Não poderia deixar de agradecer o melhor amigo que eu fiz nesses últimos anos, o Salomão, um gatinho extremamente dócil e que esteve comigo nos melhores e piores momentos.

Por fim, expresso minha gratidão à CAPES pelo financiamento deste projeto.

"Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas - para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções."
Albert Girard, 'Invention Nouvelle en Algèbre, 1629.

SIMÃO, Daniel Galdino. **A Extensão Holomorfa de Funções CR**. 2023. 112 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

O trabalho tem como principal objetivo o estudo das Variedades CR, conceito de fundamental importância para a teoria de estruturas diferenciáveis com variáveis complexas. Uma variedade suave é um espaço topológico de Hausdorff, localmente semelhante ao Espaço Euclidiano. Sendo assim, conceitos já familiares da analise no Espaço Euclidiano são extendidos pra variedades suaves, a saber: diferenciação, integração, campos vetoriais e formas diferenciais. Os espaços tangentes complexificados são a base do trabalho, a partir deles conseguimos definir Variedades CR. A Teoria das Distribuições e Correntes possuem um papel importante na construção desses conceitos.

Palavras-chave: Variedades CR. Variedades Suaves. Teoria das Distribuições. Correntes. Estruturas Diferenciáveis.

SIMÃO, Daniel Galdino. **The Holomorphic Extension of CR Functions**. 2023. 112. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

ABSTRACT

The main objective of this work is the study of CR Manifolds, a concept of fundamental importance in the theory of differentiable structures with complex variables. A smooth manifold is a Hausdorff topological space, locally similar to Euclidean Space. Thus, familiar concepts from analysis in Euclidean space are extended to smooth manifolds, including differentiation, integration, vector fields, and differential forms. Complexified tangent spaces form the basis of the work, from which CR Manifolds can be defined. The Theory of Distributions and Currents plays an important role in the construction of these concepts.

Keywords: CR Manifolds. Smooth Manifolds. Distribution Theory. Currents. Differentiable Structures.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Da teoria de Variedades CR, tem-se que "toda função holomorfa em $\mathbb{C}^n$ se restringe a uma função CR em uma subvariedade CR M de $\mathbb{C}^n$". No entanto nem todas as funções CR são as restrições de funções holomorfas. Assim, o objetivo deste trabalha é estudar o Teorema da Extensão CR. A principal referência utilizada no trabalho é [1], outras referências também foram utilizadas como apoio.

Para tal, apresentaremos no Capítulo 2 o conceito de variedade bem como os principais resultados, tais como: variedade, subvariedade, vetores e formas em variedades, derivada exterior e integração em variedades.

No Capítlo 3 são apresentados os conceitos de vetores e formas complexas, afim de generalizar alguns conceitos vistos em variedades, tais como: complexificação de um espaço vetorial real, estruturas complexas e quase complexas, formas complexificadas de grau elevado. Neste capítulo também apresentamos o Teorema de Frobenius, o qual nos permite simplificar a representação de um campo vetorial por meio de mudança de coordenadas. Outro objeto de estudo que será apresentado neste capítulo é o operador de Cauchy-Riemann.

No Capítulo 4 é apresentado a teoria das distribuições, desenvolvida por Laurent Schwartz no século XX, alguns dos conceitos estudados são: os espaços $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{E}'$, distribuições, operações com distribuições. Também é apresentado o Teorema de Extensão de Whitney o qual generaliza para dimensões maiores que para uma sequência infinita qualquer de números reais, existe uma função suave $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f^{(n)}(0) = a_n$ para $n = 0, 1, \cdots$. Outro importante resultado neste capítulo é que, pela teoria das distribuições, conseguimos obter soluções fundamentais para os operadores de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$ e Laplaciano em $\mathbb{R}^N$.

No Capítulo 5 veremos o espaço das correntes, que nada mais são para as formas o que as distribuições são para funções. Sendo uma teoria similar a teoria das distribuições com mais abstração.

Sendo M uma variedade suave de dimensão real N conseguimos tornar $T_p(M)$ um espaço complexo da seguinte forma: Tome o maior espaço J-invariante de $T_p(M)$, onde J é uma aplicação de estrutura complexa. Assim,

$$H_p(M) = T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}$$

é chamado de espaço tangente complexo de M, sendo $H_p(M)$ a base para as variedades CR. As variedades CR são os principais objetos de estudo da teoria de funções de variáveis complexas moderna. Ao longo do tempo houve grande avanço no estudo desses objetos, possibilitando grandes resultados na área. A partir dos conceitos de subvariedades CR surgem questões a serem respondidas e analisadas. Um exemplo é a extensão da definição do operador $\overline{\partial}$ para subvariedades CR.

No Capítulo 6 analisaremos essa e outras questões sobre Variedades CR e afins, tendo grande importância para um estudo posterior do Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann bem como Funções CR. No Capítulo 7, definiremos o principal objeto deste trabalho, as funções CR e também o Complexo Tangencial, objetos de grande importância na Extensão CR. O Complexo Tangencial na literatura é apresentado de duas formas, a intrínseca e a extrínseca, sendo assim, definiremos as duas formas com suas propriedades e, não somente, provaremos que ambas aproximações são isomorfas. Também é válido destacar que as funções CR em variedades complexas são semelhantes às funções holomorfas, porém uma das principais diferenças reside no fato que as funções CR nem sempre são suaves.

Sabemos que a restrição de uma função holomorfa em uma variedade CR é uma função CR, entretanto, nem todas restrições de funções CR são funções holomorfas, sendo assim necessitamos de ferramentas para determinar o porquê que isso ocorre e também determinar critério para que a restrição de uma função CR seja também uma função holomorfas. Para isso, o Capítulo 8 traz o objeto geométrico chave para a Extensão CR que é a forma de Levi, pois, à partir dela, podemos determinar quando houver ou não extensão, mas também o comportamento geométrico da extensão quando possível. Para encerrar, no Capítulo 9 enunciaremos o resultado principal do presente trabalho, suas consequências e a ilutração da Extensão CR com exemplos.

2 ANÁLISE EM VARIEDADES

2.1 VARIEDADES

Depois do estudo da análise no Espaço Euclidiano, o próximo passo é o estudo da análise em espaços localmente parecidos com o espaço euclidiano. O que nos leva ao conceito de variedade. Aqui, após algumas definições, generalizaremos as noções de vetores e formas para variedades.

Definição 2.1. *Uma variedade suave N-dimensional X é um espaço topológico de Hausdorff junto de uma cobertura aberta U_α de X (onde α percorre um conjunto de índices) e aplicações $\chi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com as seguintes propriedades:*

i) *χ_α é um homomorfismo com imagem em $\mathbb{R}^N$;*

ii) *Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}$ é um difeomorfismo de $\chi_\beta \{U_\alpha \cap U_\beta\} \subset \mathbb{R}^N$ para o conjunto $\chi_\alpha \{U_\alpha \cap U_\beta\} \subset \mathbb{R}^N$.*

Observação 2.2. Uma variedade localmente suave X se parece com $\mathbb{R}^N$ pois para qualquer ponto há um conjunto aberto U_α e uma aplicação $\chi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (chamado de carta) que leva U_α homeomorficamente para um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.3. *A coleção de cartas χ_α que satisfaz a condição anteterior é chamado de atlas e é denotado por $\mathcal{A} = \{\chi_\alpha\}$.*

Exemplo 2.4. Seja $X = \mathbb{R}^N$ e χ sendo a aplicação identidade, claramente é uma variedade suave.

Exemplo 2.5 (Esfera)**.** A esfera $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} : ||x|| = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$, com a topologia induzida, é uma variedade suave. Para isso, considere os conjuntos abertos
$U_\pm = S^n - \{0, \ldots, 0, \mp 1\}$ e defina as projeções estereográficas
$\phi_\pm : U_\pm \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por $\phi_\pm(x_1, \ldots, x_{N+1}) = \left(\dfrac{x_1}{1 \pm x_{N+1}}, \ldots, \dfrac{x_N}{1 \pm x_{N+1}}\right)$.

Exemplo 2.6. Seja X uma variedade suave N-dimensional e $Y \subset X$. Então $X \cap Y$ com a carta $\chi|_{X\cap Y}$ é uma variedade suave.

Exemplo 2.7 (Variedade Produto)**.** Seja X e Y duas variedades suaves de dimensões N e N', respectivamente. Então $X \times Y$ com a carta $\chi \times \chi' : U \times U' \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'}$ é uma variedade suave. À partir desta variedade obtemos que o toro $S^1 \times S^1$ é uma variedade suave.

Definição 2.8. *Suponha que X é uma variedade suave. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita de classe C^k $(k \geq 0)$ em X se para cada U_α, a função $f \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$ é de classe C^k no sentido euclidiano. Denota-se $\mathcal{E}(U)$ o conjunto das funções suaves.*

Observação 2.9. Como o domínio da $f \circ \chi_\alpha^{-1}$ é definido em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, faz sentido falar de diferenciabilidade de $f \circ \chi_\alpha^{-1}$ no sentido euclidiano. A Definição 2.8 pode ser generalizada para definir uma aplicação suave entre duas variedades, mas antes um exemplo.

Exemplo 2.10. Se X uma variedade suave N-dimensional, então as cartas χ_α são de classe C^0.

Definição 2.11. *Suponha que X é uma variedade suave com cartas $\chi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e que Y é uma variedade suave com cartas $\psi_\beta : V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação C^k se para cada α e β, $\psi_\beta \circ f \circ \chi_\alpha^{-1}$ é uma aplicação C^k de $\chi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^N$ à $\chi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^{N'}$. A aplicação f é chamada de difeomorfismo se $f : X \longrightarrow Y$ é C^1 e se f tem uma C^1 inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.*

2.2 SUBVARIEDADES

Definição 2.12. *Suponha que X é uma variedade suave real N-dimensional e seja M um subconjunto de X. Dizemos que M é uma subvariedade de X de dimensão real l se para cada ponto $p_0 \in M$, há uma vizinhança U de p_0 em X e uma aplicação suave $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que:*

i) $\chi : U \longrightarrow \chi(U) \subset \mathbb{R}^N$ *é um difeomorfismo;*

ii) $\chi(p_0)$ *é a origem em* $\mathbb{R}^N$*;*

iii) $\chi(U \cap M)$ *é um subconjunto aberto da origem na cópia de* $\mathbb{R}^l$ *dado por* $\left\{(t_1, \ldots, t_l, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N : (t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{R}^l\right\}$.

Exemplo 2.13. Seja X uma variedade suave de dimensão N. Dado $U \subset X$, então U é uma subvariedade.

Observação 2.14. A coleção de todas as cartas tais que $\chi|_{M \cap U} : M \cap U \longrightarrow \mathbb{R}^l$ serve como um atlas de M e, portanto, M é uma variedade suave l-dimensional.

A maior preocupação será com subvariedades do Espaço Euclidiano. Nesse caso, a aplicação $\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^N)$ é definida como um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^N$. De *iii)*, o conjunto $M \cap U$ pode ser visto como o conjunto zero comum das funções $\chi^{l+1}, \ldots, \chi^N$. Sendo χ um difeomorfismo, a derivada $D\left\{(\chi^{l+1}, \ldots, \chi^N)\right\}$ tem posto máximo, o que é equivalente à

$$d\chi^{l+1} \wedge \ldots \wedge d\chi^N \neq 0 \ \text{ em } \ U.$$

Uma coleção de funções $\left\{(\chi^{l+1}, \ldots, \chi^N)\right\}$ com essa propriedade será referida como um sistema de definição local para M. Então, sobre cada ponto de uma subvariedade, há um sistema de definição local. O inverso também é válido.

Lema 2.15. *Suponha que $M \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto com a propriedade que para cada $p_0 \in M$ há uma vizinhança U em $\mathbb{R}^N$ e funções suaves $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M \cap U = \{x \in U : \rho_1(x) = \cdots = \rho_{N-l}(x) = 0\}$ e $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_N \neq 0$ em p_0. Então, existe um difeomorfismo $\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^N)$ definido próximo de p_0, com $\chi^{l+1} = \rho_1, \ldots, \chi^N = \rho_{N-1}$. Em particular, M é uma subvariedade suave l-dimensional de $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Suponha que $p_0 \in M$ e $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l}$ são dadas. Desde que $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_N \neq 0$ em p_0, pode-se escolher coordenadas (x, y) para $\mathbb{R}^N$ com $x \in \mathbb{R}^l$ e $y \in \mathbb{R}^{N-l}$, então $D_y \{(\rho_1, \ldots, \rho_{N-l})\}$ em p_0 é uma matriz $(N-l) \times (N-l)$ não singular. Então, definimos $\chi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$\chi(x, y) = (x, \rho(x, y)) \text{ para } (x, y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l}$$

onde $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{N-l})$. Pela escolha das coordenadas, D_χ em p_0 é não singular e então, pelo Teorema da Função Inversa, χ é um difeomorfismo local. Portanto χ tem todas as propriedades enunciadas pelo lema. □

Exemplo 2.16. O Lema 2.15, ajuda na construção de muitos exemplos de subvariedades de $\mathbb{R}^N$. Um exemplo é a esfera unitária $\left\{x \in \mathbb{R}^N : |x|^2 - 1 = 0\right\}$ é uma subvariedade $(N-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^N$. Note que a esfera unitária é um caso particular da variedade S^n, vista no Exemplo 2.5.

Exemplo 2.17. Outro importante exemplo é o gráfico de uma função suave. Dadas coordenadas (x, y) em $\mathbb{R}^N$ com $x \in \mathbb{R}^l$ e $y \in \mathbb{R}^{N-l}$. Seja $h : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^{N-l}$ uma função suave. Defina

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^N ; y = h(x)\right\}.$$

M é chamado de gráfico de h. Seja $\rho_j(x, y) = y_j - h_j(x)$ para $1 \leq j \leq N - l$ onde escrevemos $h = (h_1, \ldots, h_{N-l})$. M é identicamente zero para $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l}$. Ainda, $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l}$ é não nula em todo ponto e então, pelo Lema 2.15, M é uma subvariedade l-dimensional. Nesse caso, χ é dado por $\chi(x, y) = (x, y - h(x))$. A volta sempre vale localmente. Logo, concluímos que uma subvariedade sempre pode ser escrita como o gráfico de uma função suave.

Lema 2.18. *Suponha que M é uma subvariedade suave l-dimensional de $\mathbb{R}^N$ e p_0 é um ponto em M. Existe um opredador linear afim $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, uma vizinhança U da origem e uma função suave $h : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^{N-l}$ tal que:*

i) $L(p_0)$ *é a origem;*

ii) $L(M) \cap U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{N-l} : y = h(x)\right\}$*;*

iii) $h(0) = 0$ *e* $Dh(0) = 0$.

Demonstração. Primeiro, transladando as coordenadas tal que p_0 é a origem. Dado R^N as coordenadas (x, y) com $x \in \mathbb{R}^l$ e $y \in R^{N-l}$. Seja $\rho_1, \ldots, \rho_{N-l}$ um sistema de definição local para M próximo a origem. Os vetores gradientes $\bigtriangledown\rho_1, \ldots, \bigtriangledown\rho_{N-l}$ são linearmente independentes na origem. Logo, pode-se encontrar uma aplicação linear não singular $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que leva $\bigtriangledown\rho_j(0)$ à $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ para $1 \leq j \leq N - l$. A variedade $L\{M\}$ tem um sistema de definição local $\{\widetilde{\rho_1}, \ldots, \widetilde{\rho}_{N-l}\}$ com $\widetilde{\rho_j} = \rho_j \circ L^{-1}$ e

$$\bigtriangledown\widetilde{\rho_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad 1 \leq j \leq N - l.$$

A matriz $(D_y\widetilde{\rho})(0)$ com $\widetilde{\rho} = (\widetilde{\rho_1}, \ldots, \widetilde{\rho}_{N-l})$ é a matriz identidade. Pelo Teorema da Função Implicita, existe uma função suave $h : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^{N-l}$ com $h(0)$ e

$$\widetilde{\rho}(x, h(x)) = 0, \text{ para } x \text{ pertode } 0.$$

Próximo da origem, $L\{M\}$ é o gráfico de h. Diferenciando essa equação e usando que $\bigtriangledown\widetilde{\rho_j} = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ para $1 \leq j \leq N - l$, obtém-se que $Dh(0) = 0$, como desejado. $\square$

Os Lemas 2.15 e 2.18, descrevem as formas mais freqeuentes de subvariedades quando analisadas localmente. Quando uma subvariedade é apresentada por um sistema de definição local, as funções em que o sistema de definição geram todas as funções que se anulam em M, como mostra o lema a seguir.

Lema 2.19. *Seja que M é uma subvariedade l-dimensional de $\mathbb{R}^N$ dado por $M = \{\rho_1 = \cdots = \rho_{N-l} = 0\}$ com $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge \rho_{N-l} \neq 0$ em M. Suponha que $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que se anula em M. Então, existem funções suaves $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-l}$ definidas próximo a M tais que*

$$f = \sum_{j=1}^{N-l} \alpha_j \rho_j \text{ perto de } M.$$

Demonstração. Dada as coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^N$ tal que $x \in \mathbb{R}^l$ e $y \in \mathbb{R}^{N-l}$. Próximo a um ponto dado em M, usando o Lema 2.15 para encontra um difeomorfismo local χ que leva uma vizinhança de M para o conjunto $\{y = 0\}$. A função f dada satisfaz $f \circ \chi^{-1} = 0$ em $\{y = 0\}$. Mostremos que

$$f \circ \chi^{-1} = \sum_{j=1}^{N-l} \alpha_j y_j \tag{2.1}$$

para alguma escolha de funções suaves $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-l}$. Compondo 2.1 em ambos os lados com

χ e note que $y_j \circ \chi = \rho_j$ pelo Lema 2.15. Seja $\widetilde{f} = f \circ \chi^{-1}$. Para encontrar α_j, então

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x,y) &= \widetilde{f}(x,y) - \widetilde{f}(x,0) \\
&= \sum_{j=1}^{N-l} \widetilde{f}(x,y_1,\ldots,y_j,0\ldots0) - \widetilde{f}(x,y_1,\ldots,y_{j-1},0\ldots0) \\
&= \sum_{j=1}^{N-l} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{\widetilde{f}(x,y_1,\ldots,y_{j-1},ty_j,0\ldots0)\right\} dt \\
&= \sum_{j=1}^{N-l} \left[\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y_j}(x,y_1,\ldots,y_{j-1},ty_j,0\ldots0)dt\right] \cdot y_j.
\end{aligned}$$

Basta tomar $\alpha_j = \left[\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y_j}(x,y_1,\ldots,y_{j-1},ty_j,0\ldots0)dt\right]$ e o resultado segue. $\square$

Agora será discutido o conceito de uma variedade com bordo. Da Definição 2.12, uma subvariedade l-dimensional é um conjunto que pode ser endireitado para um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^l$. A grosso modo, uma subvariedade l-dimensional com bordo é um conjunto que pode ser localmente endireitado para um meio espaço em R^l. Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição 2.20. *Um subconjunto S de uma variedade N-dimensional X é chamado de subvariedade l-dimensional com bordo se para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança U de p em X e um difeomorfismo $\chi : U \longrightarrow \chi(U) \subset \mathbb{R}^N$ com $\chi(p) = 0$ tal que uma das seguintes condições acontece:*

i) $\chi\{U \cap S\}$ *é uma vizinhança aberta da origem em* $\left\{t = (t_1,\ldots,t_N) \in \mathbb{R}^N : t_{l+1} = \cdots = t_N = 0\right\}$.

ii) $\chi\{U \cap S\}$ *é uma vizinhança aberta da origem em* $\left\{t = (t_1,\ldots,t_N) \in \mathbb{R}^N : t_l \geq 0 \text{ e } t_{l+1} = \cdots = t_N = 0\right\}$.

Exemplo 2.21. A bola fechada unitária

$$B^n(1) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$$

é uma subvariedade com bordo e seu bordo é $\partial B^n(1) = S^{n-1}$

Ambas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente para um ponto p dado. Um ponto em S que satisfaz a condição *i)* é chamado de ponto da variedade. Um ponto em S que que satisfaz a condição *ii)* é chamado de ponto do bordo. O conjunto dos pontos do bordo em S é denotado por ∂S. Note que ∂S é uma subvariedade suave $(l-1)$-dimensional de X. Por exemplo, suponha que $S = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x) \leq 0\right\}$ onde $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave com $d\rho \neq 0$ em S. Do Lema 2.15, S é uma subvariedade N-dimensional com bordo em $\mathbb{R}^N$. Seu bordo é o conjunto $\partial S = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x) = 0\right\}$.

2.3 Vetores em Variedades

Agora definiremos o conceito de vetores em uma variedade. Aqui e pelo resto do capítulo, mudaremos nossa notação. Denotaremos as compenentes das funções para nossa carta χ por $(x_1, \ldots, x_N)$ ao invés de $\chi_1, \ldots, \chi_N$. Queremos em $x_1, \ldots, x_N$ como coordenadas em X, ao invés de apenas compenente de funções. Para diferenciar essas coordenadas das coordenadas em R^N, denotaremos por $t = (t_1, \ldots, t_N)$.

Definição 2.22. *Seja X uma variedade suave N-dimensional e p_0 um ponto em X. Seja $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma carta definida em U contendo p_0. Para $p \in U$, defina o vetor $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ pela equação*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)_{\chi(p)} f \circ \chi^{-1}, \text{ para } f \in \mathcal{E}(U).$$

Definição 2.23. *Um vetor no ponto $p \in X$ é qualquer operador da forma*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \text{ onde cada } a_j \in \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os vetores de X em p é chamado espaço tangente de X em p e é denotado por $T_p(X)$, também podemos denotar por T_pM. Então, cada vetor em $T_p(X)$ é um funcional linear no espaço $\mathcal{E}(U)$.

Lema 2.24. *Seja M uma subvariedade l-dimensional de $\mathbb{R}^N$ definida por $M = \left\{t \in \mathbb{R}^N : \rho_1(t) = \cdots = \rho_{N-l} = 0\right\}$ com $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-l} \neq 0$ em M. Para um ponto $p \in M$*

$$T_p(M) = \left\{L \in T_p(\mathbb{R}^N) : L\left\{\rho_j\right\} = 0 \text{ em } p \text{ para } 1 \leq j \leq N-l\right\}.$$

Demonstração. Basta notar que cada $\bigtriangledown\rho_j$ para $1 \leq j \leq N-l$ é ortogonal à M. Assim, $T_p(M)$ consiste de todos os vetores em $\mathbb{R}^N$ que são ortogonais à $\{\bigtriangledown\rho_j(p) : 1 \leq j \leq N-l\}$. Como $L\left\{\rho_j\right\} = \bigtriangledown\rho_j \cdot L$, onde $(\cdot)$ é o produto interno Euclidiano, o lema segue. □

Definição 2.25. *A coleção de todos $\{T_p(X)\}$ para $p \in X$ é chamado de fibrado tangente de X e é denotado por $T(X)$.*

Definição 2.26. *Uma seção suave do fibrado tangente de X é chamado de campo vetorial em X. Mais precisamente, um campo vetorial L em X é uma função suave que leva cada ponto $p \in X$ em um vetor $L_p \in T_p(X)$. Aqui, suave significa que em qualquer aberto $U \subset X$ com carta $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, L pode ser expressado como*

$$L_p = \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \text{ para } p \in U \text{ e } a_j(p) \in \mathbb{R}.$$

Omitindo p, podemos escrever $L = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, onde a_j agora são funções suavem em U.

Exemplo 2.27. Em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, seja $p = (x, y)$. Então

$$L = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} = \left\langle \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle$$

é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Proposição 2.28 (Regra de Leibniz para um campo vetorial)**.** *Se L é um campo vetorial em X e f e g são funções suaves on um subconjunto aberto U de X, então $L(fg)$ satisfaz a regra de Leibniz*

$$L(fg) = fL(g) + gL(f).$$

Demonstração. Em cada ponto $p \in U$, o vetor L_p satisfaz a Regra de Leibniz

$$L_p(fg) = fL_p(g) + gL_p(f).$$

Como p varia sobre U, então isso se torna uma igualdade de funções

$$L(fg) = fL(g) + gL(f).$$

□

Exemplo 2.29. A função $L : \mathcal{E}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ definida por $L = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$ é um capo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ pelo fato das derivadas parcias satisfazerem a Regra de Leibniz e serem lineares.

Definição 2.30. *Chamados $\mathbb{L} \subset T(M)$ um subfibrado m-dimensional de $T(X)$ se $\mathbb{L}$ leva cada ponto $p \in X$ à um espaço vetorial m-dimensional $\mathbb{L}_p \subset T_p(M)$, com $M \subset X$. Esses espaços vetoriais são obrigados a se encaixarem suavemente no sentido de que perto de cada ponto fixo $p_0 \in X$, existem campos vetoriais suaves $L_1, \ldots, L_m$ tais que $\{(L_1)_p, \ldots, (L_m)_p\}$ é uma base para $\mathbb{L}_p$.*

Definição 2.31. *Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação suave entre duas variedades suaves X e Y. Isso induz a aplicação push forward $F_*(p) : T_p(X) \longrightarrow T_{F(p)}(Y)$ é definida por*

$$F_*(L_p)\{g\} = L_p\{g \circ F\}, \text{ para } L_p \in T_p(X).$$

E $F(L_p)$ é chamado de vetor tangente em $T_{F(p)}(Y)$.

Aqui, g é qualquer função suave definida em uma vizinhança de $F(p)$. Se L é um campo vetorial em X, então a equação anterior é da forma

$$(F_*L)_{F(p)}\{g\} = L_p\{g \circ F\}$$

para cada $p \in X$.

Proposição 2.32. *Se* $F : X \longrightarrow Y$ *e* $G : Y \longrightarrow Z$ *são funções suaves entre variedades e* $p \in X$*, então*

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*.$$

Demonstração. Seja $L_p \in T_p(X)$ e g uma função suave em $G(F(p))$ em Z. Então,

$$((G \circ F)_* L_p)g = L_p(g \circ G \circ F)$$

e

$$((G \circ F)_* L_p)g = (G_*(F_* L_p))g = (F_* L_p)(g \circ G) = L_p(g \circ G \circ F).$$

□

Ainda se F tem uma inversa suave, então $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$.

Exemplo 2.33. Da definição de $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ dada no começo da seção, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é o *push forward* de $\dfrac{\partial}{\partial t_j}$ via carta χ^{-1}, ou seja, $\dfrac{\partial}{\partial x_j} = \chi_*^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial t_j}\right)$.

A fórmula do *push forward* de um vetor é dada em termos da derivada da aplicação. Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação suave. Suponha p um ponto em X. Seja $\chi = (x_1, \ldots, x_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma carta para X com $p \in U$ e seja $\psi = (y_1, \ldots, y_{N'}) : V \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ uma carta para Y com $F(p) \in V$. Seja $F_j = y_j \circ F : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N'$. O coeficiente de $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ para o vetor

$$\left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]_{F(p)} \{y_j\}$$

que pela definição de *push forward* é igual à

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \{F_j\}.$$

Então,

$$\left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right]_{F(p)} = \sum_{j=1}^{N'} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \{F_j\} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)}, \; 1 \leq k \leq N.$$

2.4 Formas em Variedades

Assim como no Espaço Euclidiano, o espaço das 1-formas (ou formas de grau 1) em um ponto $p \in X$, detonado por $T_p^*(X)$, é o espaço de todos os funcionais lineares em $T_p(X)$, ou seja $T_p^*(X)$ é o espaço dual de $T_p(X)$. O valor de uma forma aplicado em um vetor no ponto p é denotado por $\langle \; , \; \rangle_p$.

Para uma carta $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, seja $\{dx_1, \ldots, dx_N\}$ a base dual para $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$. Então,

$$\left\langle dx_j, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle_p = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = k \\ 0, & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Se $\phi = \sum_{j=1}^{N} \phi_j dx_j$ é uma forma de grau 1 e $v = \sum_{j=1}^{N} v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ é um vetor, então

$$\langle \phi, v \rangle_p = \sum_{j=1}^{N} \phi_j v_j.$$

Definição 2.34. *O espaço das r-formas em p é a r-ésima exterior $\Lambda^r(T_p^*(X))$, que pode ser considerado como o espaço de todos os funcionais lineares em $\Lambda^r(T_p(X))$, ou seja, $\Lambda^r(T_p^*(X))$ é o dual de $\Lambda^r(T_p(X))$. Sendo $\Lambda^r(T_p(X))$ é o espaço dos r-vetores. Esses espaços tem as seguintes bases, respectivamente,*

$$\left\{dx^I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} : I = (i_1, \ldots, i_r)\right\}$$

e

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^I} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} : I = (i_1, \ldots, i_r)\right\}.$$

Vale notar que a coleção $\left\{dx^I\right\}$ é a base dual para $\left\{\frac{\partial}{\partial x^I}\right\}$.

Definição 2.35. *O fibrado das r-formas $\Lambda^r(T^*(X))$ é a união $\bigcup_{p \in X} \Lambda^r(T_p^*(X))$. Uma seção suave de $\Lambda^r(T^*(X))$ é chamada de forma diferencial de grau r, ou simplesmente, uma r-forma suave em X. Queremos dizer que para cada $U \subset X$ com carta $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, podemos expressar a forma como*

$$\phi(p) = \sum_{|I|=r} \phi_I(p) dx^I,$$

onde cada ϕ_I é uma função suave em U. O espaço das r-formas suaves em X será denotado por $\mathcal{E}^r(X)$. Pareando cada lado com $\frac{\partial}{\partial x^J} = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_r}}$, podemos expressar os coeficientes como

$$\phi_J(p) = \left\langle \phi(p), \frac{\partial}{\partial x_J} \right\rangle_p.$$

Definição 2.36. *Uma aplicação suave $F : \longrightarrow Y$ entre duas variedades induz o operador pull back $F^* : \Lambda^r(T_{F(p)}^*(Y)) \longrightarrow \Lambda^r(T_p^*(X))$. Esse é o operador duas do push forward e é definido para formas de grau 1 como*

$$\langle F^*\phi, L \rangle_p = \langle \phi, F_* L \rangle_{F(p)} \ \text{para} \ \phi \in T_{F(p)}^*(Y), L \in T_p(X).$$

Exemplo 2.37. Para uma carta $\chi = (x_1, \ldots, x_N)$, temos que $dx_j = \chi^* dt_j$, $1 \leq j \leq N$, onde $t = (t_1, \ldots, t_N)$ são coordenadas para $\mathbb{R}^N$.

Definição 2.38. *Para formas de grau maiores que* 1*, definimos o operador pull back como*

$$F^*(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r) = (F^*\phi_1) \wedge \ldots \wedge (F^*\phi_r),\ \phi_i \in T^*(Y).$$

Note que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$. Em particular, se F é invertível, então $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.

Exemplo 2.39. Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x - y, 2yz)$ e $\phi \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2)$ com $\phi = du \wedge dv$. Então,

$$\begin{aligned} F^*(\phi) &= d(x - y) \wedge d(2yz) \\ &= (dx - dy) \wedge (2zdy + 2ydz) \\ &= (2zdx \wedge dy + 2ydx \wedge dz - 2ydy \wedge dz). \end{aligned}$$

Agora, definiremos a derivada exterior $d : \mathcal{E}^r(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1}(X)$, mas antes mostremos que a escolha da carta independe para a derivada exterior de uma r-forma no Espaço Euclidiano.

Lema 2.40. *Sejam* $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *e* $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *duas cartas para a variedade* X*. Para* $\phi \in \mathcal{E}^r(X)$*,*

$$\chi^* \left\{ d_{\mathbb{R}^N}(\chi^{-1^*}\phi) \right\} = \psi^* \left\{ d_{\mathbb{R}^N}(\psi^{-1^*}\phi) \right\} \text{ em } U \cap V.$$

Demonstração. A notação $d_{\mathbb{R}^N}$ refere-se a derivada exterior Euclidiana. A afirmação do lema é equivalente à

$$\psi^{-1^*} \circ \chi^* \left\{ d_{\mathbb{R}^N}(\chi^{-1^*}\phi) \right\} = d_{\mathbb{R}^N} \left\{ \psi^{-1^*}\phi \right\}.$$

Usando o fato de que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ então, $\psi^{-1^*} \circ \chi^* = (\chi \circ \psi^{-1})^*$ e note que $\chi \circ \psi^{-1}$ é uma aplicação suave entre subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$. Como a derivada exterior em $\mathbb{R}^N$ comuta com o *pull back* , então

$$\begin{aligned} (\chi \circ \psi^{-1})^* \left\{ d_{\mathbb{R}^N}(\chi^{-1^*}\phi) \right\} &= d_{\mathbb{R}^N} \left\{ (\chi \circ \psi^{-1})^* \chi^{-1^*}\phi \right\} \\ &= d_{\mathbb{R}^N} \left\{ (\chi^{-1} \circ \chi \circ \psi^{-1})^*\phi \right\} \\ &= d_{\mathbb{R}^N} \left\{ \psi^{-1^*}\phi \right\} \end{aligned}$$

como desejado. □

Assim, o Lema 2.40 nos permite definir a derivada exterior sem ambiguidade.

Definição 2.41. *A derivada exterior em* X $d_X : \mathcal{E}^r(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1}(X)$ *é definida em* $U \subset \mathbb{R}^N$ *por*

$$d_X\phi = \chi^*(d_{\mathbb{R}^N} \left\{ \chi^{-1^*}\phi \right\})$$

onde $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é a carta correspondente. Se a variedade X está clara no contexto, então "X" frequentemente será omitido da notação de derivada exterior.

Se $\chi = (x_1, \ldots, x_N)$ é uma carta então, $\chi_* \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$ e $\chi^*(dt_j) = dx_j$ para $1 \leq j \leq N$. Então, da definição anterior

$$d_X \left\{\phi_I(p)dx^I\right\} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi_I}{\partial x_j}(p) dx_j \wedge dx^I$$

onde escrevemos $\left(\dfrac{\partial \phi_I}{\partial x_j}\right)(p) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \{\phi_I\}$.

Observação 2.42. A derivada exterior comuta com o *pull back* .

Lema 2.43. *Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação suave entre variedades. Então,* $d_X \circ F^* = F^* \circ d_Y$.

Demonstração. Seja $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ cartas para X e Y, respectivamente com $F\{U\} \cap V \neq \emptyset$. Usando a definição de derivada exterior, a afirmação do lema equivale à

$$\chi^* \circ d_{\mathbb{R}^N} \circ \chi^{-1^*} \circ F^* = F^* \circ \psi^* \circ d_{\mathbb{R}^{N'}} \circ \psi^{-1^*}$$

que por sua vez equivale à

$$d_{\mathbb{R}^N} \circ (F \circ \chi^{-1})^* = (\psi \circ F \circ \chi^{-1})^* \circ d_{\mathbb{R}^{N'}} \circ \psi^{-1^*}.$$

Comutando a derivada exterior no Espaço Euclidiano com o *pull back* da aplicação $\psi \circ F \circ \chi^{-1} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$, o lema segue. □

Exemplo 2.44. Seja $X = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x) = 0\right\}$ onde $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave com $d\rho \neq 0$ em X. Seja $j : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ a aplicação inclusão. Então, $j^* \circ d_{\mathbb{R}^N} = d_X \circ j^*$. Em particular, $j^* d_{\mathbb{R}^N}(\rho) = 0$ pois $j^*\rho = \rho \circ j = 0$ em X.

2.5 Integração em Variedades

Nesta seção definiremos a operação integração em variedades bem como resultados importantes deste conteúdo como o Teorema de Stokes e o Teorema da Divergência. Mas antes discutiremos o conceito de orientação.

Definição 2.45. *A forma $dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_N$ em $\mathbb{R}^N$ induz a orientação padrão em $\mathbb{R}^N$. Uma base de 1-formas $\phi_1, \ldots, \phi_N$ para $T_p^*(\mathbb{R}^N)$ é dita ser orientada se $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_N = \alpha dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_N$ com $\alpha > 0$, ou seja, a base de 1-formas $\phi_1, \ldots, \phi_N$ é orientada se seu produto exterior é uma combinação linear positiva do produto exteior de $dt_1, \ldots, dt_N$.*

Definição 2.46. *Uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ preserva orientação se $L^*\phi_1, \ldots, L^*\phi_N$ é orientada onde $\phi_1, \ldots, \phi_N$ é orientada. O que é equivalente ao determinante que representa a aplicação L é positiva. Uma aplicação suave $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ preserva orientação se $F^*(p) : T^*_{F(p)}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow T^*_p(\mathbb{R}^N)$ preserva orientação para cada ponto p no dominio da definição. O que é equivalente à $\det DF(p) > 0$ para cada ponto $p \in \mathbb{R}^N$ no domínio da definição da F.*

Definição 2.47. *Seja X uma variedade suave N-dimensional. Uma coleção C de cartas $\left\{\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N\right\}$ para X preserva orientação se $\chi \circ \psi^{-1}$ preserva orientação como uma aplicação de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$ para cada χ, ψ pertencente à C. A variedade X é dita ser orientável se existe uma coleção de cartas que preservam orientação. Se X é uma subvariedade com bordo, então nós definimos X orientável da mesma maneira.*

Definição 2.48. *Se a variedade X é orientável, então a coleção C de cartas que preservam orientação determinam uma orientação para $T^*_p(X)$, ou seja, um conjunto de 1-formas $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\} \in T^*_p(X)$ é dita ser orientada se $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_N$ em p é um múltiplo positivo de $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$ onde a carta $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ pertence à C. Desde que $\chi \circ \psi^{-1}$ preserva orientação para $\chi, \psi \in C$, a definição independe da escolha da carta $\chi \in C$. Tal qual uma orientação para $T^*_p(X)$ para cada $p \in C$, dizemos que X é uma variedade orientada e dizemos que $\chi \in C$ é uma carta orientada.*

Definição 2.49. *Se M é uma subvariedade l-dimensional orientada com bordo contida em uma variedade N-dimensional X, então definimos a orientação induzida em ∂M. Para $p \in \partial M$, seja $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma carta orientada com bordo, ou seja, uma carta $\chi \in C$ com $\chi(p) = 0$ e $\chi\{U \cap M\} = \left\{(t_1, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N : t_0 \geq 0 \text{ e } t_{l+1} = \cdots = t_N = 0\right\}$. Seja $n = -dx_l = -\chi^* dt_l$. Essa 1-forma é chamada de vetor conormal que aponta para fora para ∂M. Se $\psi V \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é outra carta orientada com bordo em M, então dy_l em p é um múltiplo positivo de dx_l em p. Aqui, podemos definir inequivocamente: uma coleção de 1-formas $\{\phi_1, \ldots, \phi_{l-1}\}$ tem orientação em M, ou seja, $n \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_{l-1}$ é um múltiplo positivo de $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$.*

Agora definiremos a integral de uma forma diferencial em $\mathbb{R}^N$. Para $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, definimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N = \int_{\mathbb{R}^N} \alpha dx_1 \ldots dx_N$$

onde o lado direito é computado na forma usual.

Definição 2.50. *Seja X uma variedade orientada N-dimensional e seja ϕ uma N-forma suave com suporte contido em $U \subset X$. Se $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é a carta orientada correspondente, então definimos*

$$\int_X \phi = \int_{\mathbb{R}^N} \chi^{-1^*} \phi.$$

Formalmente definimos a integral de uma r-forma em uma variedade N-dimensional ser zero se $r \neq N$.

Exemplo 2.51. Suponha $fdx + gdy + hdz$ uma 1-forma em um subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^3$ e seja $\chi : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suave. Então,

$$\int_X (fdx + gdy + hdz) = \int_{\mathbb{R}^3} (f(\chi(t))\chi_1'(t) + g(\chi(t))\chi_2'(t) + h(\chi(t))\chi_3'(t))dt.$$

Intuitivamente, a primeira coisa a se pensar sobre a Definição 2.50 se ela é dependente ou não da carta orientada. Para isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.52. *Seja X uma variedade orientada N-dimensional e ϕ uma N-forma suave com suporte contido em $U \cap V \subset X$. Se $\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^N$ são cartas orientadas correspondentes, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi^{-1^*}\phi = \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{-1^*}\phi.$$

Demonstração. Como $\chi \circ \psi^{-1}$ é uma aplicação suave e que preserva orientação de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$, $\det D(\chi \circ \psi^{-1}) > 0$. Usando a fórmula da mudança de variáveis para integração, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \chi^{-1^*}\phi &= \int_{\mathbb{R}^N} (\chi \circ \psi^{-1^*})^*(\chi^{-1^*}\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{-1^*}\chi^*\chi^{-1^*}\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi^{-1^*} \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Definição 2.53. *Seja ϕ uma N-forma com suporte compacto. Suponha que $\{U_1, \ldots, U_M\}$ uma coleção de conjuntos que cubram supp ϕ e seja $\chi^j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}^N$ as cartas orientadas correspondentes. Seja $\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ uma partição de unidade para supp ϕ com $\phi_j \in \mathcal{D}(U_j)$. Então, definimos*

$$\int_X \phi = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} (\chi^j)^{-1^*} \{\phi_j \phi\}.$$

Novamente, a definição independe da escolha das cartas.

Definição 2.54. *Se M é uma subvariedade l-dimensional de X, então definimos*

$$\int_M \phi = \int_M j^*\phi \text{ para } \phi \in \mathcal{D}^l(X)$$

onde $j : M \longrightarrow X$ é a aplicação inclusão.

Lema 2.55. *Seja X e Y variedades orientadas suaves N-dimensionais. Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação suave que preserva orientação. Se $\phi \in \mathcal{D}^N(Y)$, então*

$$\int_Y \phi = \int_X F^* \phi.$$

Aprova desse lema segue direto das definições juntamente com a mudança de variáveis em $\mathbb{R}^N$.

Agora estamos pronto para enunciar e provar o Teorema de Stokes, que para uma subvariedade M orientada com bordo, igual a integral de $d\phi$ sobre M com a integral de ϕ sobre ∂M. O examplo mais fácil do Teorema de Stokes é o Teorema Fundamental do Cálculo, onde M é o intervalo $\{a \leq x \leq b\}$ em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.56 (Teorema de Stokes)**.** *Seja M uma subvariedade orientada suave l-dimensional com bordo que está contida em uma variedade suave N-dimensional X. Se $\phi \in \mathcal{D}^{l-1}(M)$, então*

$$\int_M d_M \phi = \int_{\partial M} \phi.$$

Demonstração. Primeiro cubrimos o $supp\ \phi$ com um número finito de cartas orientadas $\chi^i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $i = 1, \ldots, m$ tais que $\chi^i \{U_i \cap M\} = \{(t_1, \ldots, t_N) : t_{l+1} = \cdots = t_N = 0\}$ (U é do tipo variedade) ou $\chi^i \{U_i \cap M\} = \{(t_1, \ldots, t_N) : t_l \geq 0, t_{l+1} = \cdots = t_N = 0\}$ (U é do tipo bordo) . Seja
$\{\phi_i \in \mathcal{D}(U_i)\}$ uma partição unitária para $supp\ \phi$. É suficiente provar que

$$\int_M d_M \{\phi_i \phi\} = \int_{\partial M} \phi_i \phi$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. O Teorema de Stokes segue somando sobre i e usando $\sum \phi_i = 1$ em $supp\ \phi$. De agora em diante, assumiremos que $supp\ \phi$ está contido em algum dos U_i.

Primeiro consideramos o caso onde $\chi : U \cap M \longrightarrow \mathbb{R}^l$ é uma carta do tipo variedade. Usando as definições de integral e derivada exterior em M, temos que

$$\int_M d_M \phi = \int_{\chi\{U \cap M\} \subset \mathbb{R}^l} d\left\{\chi^{-1^*} \phi\right\} = \int_{\mathbb{R}^l} d\left\{\chi^{-1^*} \phi\right\}.$$

Aqui e abaixo, d refere-se a derivada exterior em $\mathbb{R}^l$. Como $(\chi^{-1^*} \phi)$ é uma $(l-1)$-forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^l$ (compactly supported significa que o suporte é compacto?), podemos escrever

$$\chi^{-1^*} \phi = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \ldots \wedge dt_l$$

onde cada α_j pertence à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$. A notação $\widehat{dt_j}$ indica que dt_j foi omitido. Temos que

$$d\left\{\chi^{-1^*}\phi\right\} = \left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t_j}\right) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_l.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^l} d\left\{\chi^{-1^*}\phi\right\} &= \sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t_j}dt_1\ldots dt_l \\ &= 0.\end{aligned}$$

A última igualdade segue do Teorema Fundamental do Cálculo na variável t_j, usando o fato de que α_j tem suporte compacto. Assim, mostramos que se ϕ tem suporte em U, do tipo variedade, então $\int_M d_M\phi = 0$. Por outro lado, temos que $U \cap \partial M = \emptyset$ então, $\int_{\partial M}\phi$ também se anula e, portanto, fica estabelecido o Teorema de Stokes, $\int_M d_M\phi = \int_{\partial M}\phi$.

O caso remanescente a se considerar é onde ϕ tem suporte em U do tipo bordo. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}\int_M d_M\phi &= \int_{\chi\{U\cap M\}} d\left\{\chi^{-1^*}\phi\right\} \\ &= \int_{\substack{t\in\mathbb{R}^l \\ t_l\geq 0}} d\left\{\chi^{-1^*}\phi\right\}.\end{aligned}$$

Escrevemos,

$$\chi^{-1^*}\phi = \sum_{j=1}^{l}\alpha_j dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_j}\ldots\ldots dt_l$$

onde cada $\alpha_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$. Afirmamos que para cada $j = 1, \ldots, l$,

$$\int_{\{t_l\geq 0\}} d\left\{\alpha_j dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \ldots dt_l\right\} = (-1)^l\int_{\{t_l=0\}}\alpha_j dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \ldots dt_l. \qquad (2.2)$$

Isso é só o caso especial do Teorema de Stokes onde M é o meio espaço $\{t_l \geq 0\}$.

Se $j < l$, então

$$\begin{aligned}\int_{\{t_l\geq 0\}} d\left\{\alpha_j dt_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \ldots dt_l\right\} &= \int_{\{t_l\geq 0\}}(-1)^{j-1}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t_j}dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_l \\ &= 0.\end{aligned}$$

A última equação segue do Teorema Fundamental do Cálculo na variável t_j, usando o fato de que α_j tem suporte compacto. Como $j < l$, não existe termo de bordo. Se $j < l$, então o lado direito de (2.2) também se anula, pois o *pull back* de dt_l à $\{t_l = 0\}$ é zero. Portanto, ambos os lados de (2.2) se anulam para $j < l$.

Se $j = l$, então

$$\begin{aligned}\int_{\{t_l \geq 0\}} d\{\alpha_l dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{l-1}\} &= (-1)^{l-1} \int_{\{t_l \geq 0\}} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t_l} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_l \\ &= (-1)^{l-1} \int_{\{t_l = 0\}} \alpha_l(t_1, \ldots, t_{l-1}, 0) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{l-1}.\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema Fundamental do Cálculo na variável t_l. Isso pro (2.2) para $j = l$.

Somando (2.2) sobre j, temos

$$\int_{\{t_l \geq 0\}} d\left\{\chi^{-1^*}\phi\right\} = (-1)^l \int_{\substack{\mathbb{R}^{l-1} \\ \{t_l = 0\}}} \chi^{-1^*}\phi.$$

Assim, o caso de que U é do tipo bordo é provado. Portanto, o a prova do Teorema de Stokes está completa.

$\square$

O Teorema de Stokes além da sua utilidade, também tem resultados imediatos interessantes, como os dois corolários seguinte: o Teorema da Divergência e a Fórmula de Green. Mas antes definamos alguns conceitos importantes. Seja $M = \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com bordo suave. Defina $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\rho(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \mathbb{R}^N - \Omega), & \text{se} \quad x \in \Omega \\ \text{dist}(x, \Omega), & \text{se} \quad x \in R^N - \Omega \end{cases}$$

Defina o campo vetorial $\mathbb{N} = \bigtriangledown\rho = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. $\mathbb{N}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora à $\partial\Omega$. A forma volume para $\partial\Omega$ é dada pela $(N-1)$-forma

$$\begin{aligned} d\sigma &= \mathbb{N} \lrcorner\, dx \text{ onde } dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N. \end{aligned}$$

Corolário 2.57 (Teorema da Divergência)**.** *Seja Ω um conjunto limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^N$. Seja $\sum_{j=1}^{N} F_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ um campo vetorial em $\overline{\Omega}$. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} (F \cdot \mathbb{N}) d\sigma = \int_{\Omega} (\text{Div} F) dx$$

onde $\mathrm{Div}F = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$ *e* $F \cdot \mathbb{N} = \sum_{j=1}^{N} F_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right)$.

Demonstração. Como $\mathbb{N}$ tem comprimento unitário, então $\mathbb{N} \lrcorner\, d\rho = 1$ em $\partial\Omega$. Então, se ϕ é uma $(N-1)$-forma suave em $\partial\Omega$, então da regra do produto para $\lrcorner$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \lrcorner\, (d\rho \wedge \phi) &= (\mathbb{N} \lrcorner\, d\rho)\phi - d\rho \wedge (\mathbb{N} \lrcorner\, \phi) \\ &= \phi - d\rho \wedge (\mathbb{N} \lrcorner\, \phi). \end{aligned}$$

Da definição de integral sobre uma subvariedade, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} d\rho \wedge (\mathbb{N} \lrcorner\, \phi) &= \int_{\partial\Omega} j^*(d\rho) \wedge j^*(\mathbb{N} \lrcorner\, \phi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pois $j^* d\rho = d(j^*\rho) = 0$ em $\partial\Omega$. Junto com a equação anterior, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \phi = \int_{\partial\Omega} \mathbb{N} \lrcorner\, (d\rho \wedge \phi).$$

Aplicando essa equação para a forma $\phi = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} F_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$ então,

$$\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int_{\partial\Omega} F_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} F_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \mathbb{N} \lrcorner\, (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N) \\ &= \int_{\partial\Omega} (F \cdot \mathbb{N}) d\sigma. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Stokes

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} F_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \sum_{j=1}^N d((-1)^{j-1} F_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N) \\
&= {}_\Omega \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \\
&= \int_\Omega (\mathrm{Div} F) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, a prova do Teorema da Divergência está completa. □

Exemplo 2.58. Pelo Teorema da Divergência, conseguimos determinar o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = zi + yj + xk$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Então, temos que

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int\int_E (\mathrm{Div} F) dV = \int\int\int_E 1 dV = \frac{3}{4}\pi.$$

Corolário 2.59 (Fórmula de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitada com bordo suave e f e g são funções suaves em $\overline{\Omega}$. Então,*

$$\int_{\partial\Omega} (f \mathbb{N} g - g \mathbb{N} f) d\sigma = \int_\Omega (f \bigtriangleup g - g \bigtriangleup f) dx$$

onde $\mathbb{N}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora à $\partial\Omega$.

Demonstração. Aplicando o Teorema da Divergência ao campo vetorial

$$F = g(\bigtriangledown f) = g \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

obtemos

$$\int_{\partial\Omega} g(\mathbb{N} \cdot \bigtriangledown f) d\sigma = \int_\Omega g(\bigtriangleup f) dx + \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx. \tag{2.3}$$

Agora, aplicando o Teorema da Divergência ao campo vetorial

$$G = f(\bigtriangledown g) = f \sum_{j=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

obtemos

$$\int_{\partial\Omega} f(\mathbb{N} \cdot \bigtriangledown g) d\sigma = \int_\Omega f(\bigtriangleup g) dx + \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx. \tag{2.4}$$

Subtraindo (2.3) de (2.4), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f(\mathbb{N} \cdot \bigtriangledown g) d\sigma - \int_{\partial\Omega} g(\mathbb{N} \cdot \bigtriangledown f) d\sigma &= \int_\Omega f(\bigtriangleup g) dx - \int_\Omega g(\bigtriangleup f) dx \\
\int_{\partial\Omega} (f \mathbb{N} g - g \mathbb{N} f) d\sigma &= \int_\Omega (f \bigtriangleup g - g \bigtriangleup f) dx
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

3 VETORES E FORMAS COMPLEXIFICADAS

Objetos como

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

ou

$$dz_j = dx_j + idy_j$$

são comumente encontradas na análise complexa. O primeiro é um vetor complexificado e o segundo é uma forma complexificada. Nesta seção, vamos definir essas noções e generalizar alguns conceitos para a forma complexificada.

3.1 Complexificação de um Espaço Vetorial Real

Definição 3.1. *Seja V um espaço vetorial real. A complexificação de V é o produto tensorial $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ou $V \otimes \mathbb{C}$. Como um espaço vetorial sobre os reais $V \otimes \mathbb{C}$ é gerado por $v \otimes 1$ e $v \otimes i$ para $v \in V$. $V \otimes \mathbb{C}$ pode ser transformado em um espaço vetorial complexo definido por*

$$\alpha\,(v \otimes \beta) = v \otimes \alpha\beta \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } v \in V.$$

Como um espaço vetorial complexo, $V \otimes \mathbb{C}$ é gerado por $v \otimes 1$ para $v \in V$. Se V é um espaço vetorial real de dimensão N, então $dim_{\mathbb{R}} V \otimes \mathbb{C} = 2N$ e $dim_{\mathbb{C}} V \otimes \mathbb{C} = N$. Para simplificar, denotaremos $v\alpha$ ou αv para $v \otimes v$. Naturalmente, definimos a conjugação do operador $V \otimes \mathbb{C}$ dada por $\overline{\alpha v} = \overline{\alpha} v = v \otimes \overline{\alpha}$.

Seja X uma variedade de dimensão N. Para $p \in X$, $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$ é chamado de espaço tangente complexificado e $T_p^*(X) \otimes \mathbb{C}$ é chamado de espaço cotangente complexificado. O espaço $T_p^*(X) \otimes \mathbb{C}$ pode ser visto como o espaço dual complexo de $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$ definindo

$$\langle\, \phi \otimes \alpha,\ L \otimes \beta \rangle_p = \langle\, \phi,\ L \rangle_p \,\alpha\beta$$

para $\phi \in T_p^*(X)$, $L \in T_p(X)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Se $F : X \leftrightarrow Y$ é uma aplicação suave entre variedades suaves, então os operadores *push forward* e *pull back* são extendidos à configuração complexificada. Definimos $F_*(L \otimes \alpha) = F_*(L) \otimes \alpha$ e $F^*(\phi \otimes \alpha) = F^*\phi \otimes \alpha$ para $L \in T_p(X)$, $\phi \in T^*_{F(p)}(Y)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

O fibrado tangente complexificado $T^{\mathbb{C}}(X)$ é definido analogamento ao fibrado tangente real, definico por

$$T^{\mathbb{C}}(X) = \bigcup_{p \in X} T_p(X) \otimes \mathbb{C}.$$

Similarmente, o cotangente fibrado complexificado é definido por

$$T^{*^{\mathbb{C}}}(X) = \bigcup_{p \in X} T_p^*(X) \otimes \mathbb{C}.$$

Um campo vetorial complexificado em X é uma seção suave de $T^{\mathbb{C}}(X)$, ou seja, L atribui cada ponto $p \in X$ à um vetor L_p pertencente a $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$. Em qualquer sistema de coordenadas $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^N$, podemos expressar L por

$$L_p = \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde cada a_j é uma função suave de valores complexos definidos em U. Um subfibrado $\mathbb{L}$ de $T^{\mathbb{C}}(X)$ de dimensão complexa m atribui um subespaço $\mathbb{L}_p$ de $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$ de dimensão complexa m à cada ponto $p \in X$. São requisitados que esses subespaços se encaixem suavemente, no sentido em que próximo a cada ponto $p_0 \in X$ existam m campos vetoriais linearmente independentes complexos suaves $L^1, \ldots, L^m$ tais que $\mathbb{L}_p$ é gerado por $L_p^1, \ldots, L_p^m$.

Se X é uma variedade complexa de dimensão n, então é importante diferenciar o fibrado tangente real e o fibrado tangente complexificado. Anteriormente, denotamos $T(X)$, onde pensamos X como uma variedade suave real de dimensão $2n$. Sua fibra, $T_p(X)$, tem dimensão real $2n$. A fibra do fibrado tangente complexificado é $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$ e tem dimensão complexa $2n$.

A r-ésima exterior de $T_p(X) \otimes \mathbb{C}$ e $T_p^*(X) \otimes \mathbb{C}$ são chamados de espaço dos r-vetores complexificados em p e r-formas complexificadas em p, respectivamente. Seja $p \in X$ um ponto qualquer, temos o fibrado dos r-vetores $\Lambda^r T^{\mathbb{C}}(X)$ e o fibrado das r-formas $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(X)$. O espaço das r-formas suaves de $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(X)$ é chamado de espaço das formas diferenciais complexas de grau r (ou, simplesmente, o espaço das r-formas suaves) e é denotado por $\mathcal{E}^r(X)$. Um elemente ϕ de $\mathcal{E}^r(X)$ pode ser expressado em coordenadas locais $\chi = (x_1, \ldots, x_N) : U \subset X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$\phi = \sum_{|I|=r} \phi_I dx^I$$

onde cada ϕ_I é uma função suave de valores complexos em U.

A derivada exterior e a integral são facilmente generalizadas à configuração complexa. Em coordenadas locais, definimos

$$d\phi = \sum_{|I|=r} d\phi_I \wedge dx^I \in \mathcal{E}^{r+1}(X)$$

onde

$$d\phi_I = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \phi_I}{\partial x_j} dx_j.$$

A prova que a derivada exterior independe da escolha da carta é análoga à prova do caso real, como provada anteriormente. A integral de uma forma diferencial complexa sobre uma variedade é definida analogamente como o casol real.

3.2 Estruturas Complexas

Definição 3.2. *Seja V um espaço vetorial real. Uma aplicação linear $J : V \longrightarrow V$ é chamada aplicação de estrutura complexa se $J \circ J = -I$, onde $I : V \longrightarrow V$ é a aplicação identidade. A saber, uma aplicação de estrutura complexa só pode ser definida em um espaço vetorial real de dimensão par, pois* $(\det J)^2 = (-1)^N$ *onde $N = dim_{\mathbb{R}} V$.*

Exemplo 3.3. Seja $V = T_p(R^{2n}) \simeq T_p(\mathbb{C}^n)$. Dada coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ em $\mathbb{R}^{2n}$. A estrutura complexa usual para $T_p(R^{2n})$ é definida por

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$1 \leq j \leq n$. Essa aplicação de estrutura complexa é designada para simular a multiplicação por $i = \sqrt{-1}$.

Exemplo 3.4. $J : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ onde $J(x, y, z, w) = (-y, x, -w, z)$ é uma aplicação de estrutura complexa.

De fato, seja $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{R}^4$, então

$$\begin{aligned} J(x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2) &= (-y_1, x_1, -w_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) \\ &= -y_1 x_2 + x_1 y_2 - w_1 z_2 + z_1 w_2 \\ &= (-x_1, -y_1, -z_1, -w_1) \cdot (-y_2, x_2, -w_2, z_2) \\ &= -(x_1, y_1, z_1, w_1) J(x_2, y_2, z_2, w_2). \end{aligned}$$

A aplicação de estrutura complexa usual para $\mathbb{R}^{2n}$ é uma isometria com respeito à métrica Euclidiana $(\cdot)$ em $\mathbb{R}^{2n}$, como mostra o lema seguinte.

Lema 3.5. *Para $v, w \in T_p(\mathbb{R}^{2n})$, então $Jv \cdot w = -v \cdot Jw$. Em particular, $Jv \cdot Jw = v \cdot w$.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_p(\mathbb{R}^{2n})$, suponha que v e w são tais que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \left(v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right);$$
$$w = \sum_{j=1}^{n} \left(w_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Aplicando J em v e w, então

$$Jv = \sum_{j=1}^{n} \left(-v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right);$$
$$Jw = \sum_{j=1}^{n} \left(-w_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Assim,

$$Jv \cdot w = \sum_{j=1}^{n} \left(-v_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{v_j w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right);$$
$$v \cdot Jw = \sum_{j=1}^{n} \left(v_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \overline{v_j w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Logo, $Jv \cdot w = -v \cdot Jw$.

Ainda mais,

$$\begin{aligned} Jv \cdot Jw &= \sum_{j=1}^{n} \left(-v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{v_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(-w_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(v_j w_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{v_j w_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \\ &= v \cdot w. \end{aligned}$$

O que prova o lema. $\square$

Exemplo 3.6. Voltando ao Exemplo 3.4. Seja $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_2, y_2, z_2, w_2) \in \mathbb{R}^4$ então,

$$\begin{aligned} J(x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) &= (-y_1, x_1, -w_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) \\ &= -y_1 x_2 + x_1 y_2 - w_1 z_2 + z_1 w_2 \\ &= (-x_1, -y_1, -z_1, -w_1) \cdot (-y_2, x_2, -w_2, z_2) \\ &= -(x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot (-y_2, x_2, -w_2, z_2) \\ &= -(x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot J(x_2, y_2, z_2, w_2). \end{aligned}$$

Ainda mais,

$$\begin{aligned} J(x_1,y_1,z_1,w_1)\cdot J(x_2,y_2,z_2,w_2) &= (-y_1,x_1,-w_1,z_1)\cdot(-y_2,x_2,-w_2,z_2) \\ &= y_1y_2+x_1x_2+w_1w_2+z_1z_2 \\ &= (x_1,y_1,z_1,w_1)\cdot(x_2,y_2,z_2,w_2). \end{aligned}$$

A aplicação de estrutura complexa padrão J^* para o espaço cotangente $T_p^*(\mathbb{R}^{2n})$ é definido como o dual de J. Para $p \in \mathbb{R}^{2n}$, temos que

$$\langle J^*\phi\ ,\ L\rangle_p = \langle \phi\ ,\ JL\rangle_p \quad \text{para} \quad \phi \in T_p^*(\mathbb{R}^{2n}) \ \text{ e } \ L \in T_p(\mathbb{R}^{2n}).$$

Colocando $\phi = dx_j$ ou dy_j e $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ ou $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$, obtemos que

$$\begin{aligned} J^*dx_j &= -dy_j \\ J^*dy &= dx_j \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Uma estrutura complexa pode ser definida em um fibrado tangente real de uma variedade complexa pelo *push forward* de $\mathbb{C}^n$ para X por uma carta. Para $p \in X$ e uma carta holomorfa $Z : U \subset X \longrightarrow \mathbb{C}^n$, definimos a aplicação de estrutura complexa $J_p : T_p(X) \longrightarrow T_p(X)$ por

$$J_p(L) = Z_*^{-1}(Z(p))\left\{JZ_*(p)(L)\right\}.$$

Onde J é uma aplicação de estrutura complexa em $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Segue da definição que se $Z = (z_1,\ldots,z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j$, então $J_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ e $J_p\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)$.

J_p independe da escolha da carta.

De fato, tomando uma carta holomorfa $W : U' \longrightarrow \mathbb{C}^n$, então $Z \circ W^{-1}$ é uma aplicação holomorfa de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^n$ e, logo, o *push forward* comuta com J. Portanto, $J_p : T_p(X) \longrightarrow T_p(X)$ está bem definido para cada $p \in X$. Analogamente, uma estrutura complexa J_p^* está definida em $T_p^*(X)$.

Se $J : V \longrightarrow V$ é uma estrutura complexa para o espaço vetorial real V, então J pode ser extendido como uma aplicação linear complexa na complexificação de V por

$$J(\alpha v) = \alpha J(v) \quad \text{para} \quad v \in V \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Note que

$$J\overline{v} = \overline{Jv} \quad \text{para} \quad v \in V \otimes \mathbb{C}$$

assim, para $v_1 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} J(\overline{\alpha v_1}) &= J(\overline{\alpha} v_1) \\ &= \overline{\alpha} J(v_1) \\ &= \overline{\alpha J(v_1)} \\ &= \overline{J(\alpha v_1)}. \end{aligned}$$

Como $J \circ J = -I$ em V, o mesmo vale em $V \otimes \mathbb{C}$. Portanto, $J : V \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V \otimes \mathbb{C}$ tem autovalores $+i$ e $-i$ com autoespaços correspondentes denotados por $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$. Temos, da álgebra linear elementar, que

$$V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}.$$

Como $J\overline{v} = \overline{Jv}$ para $v \in V \otimes \mathbb{C}$, temos que

$$\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}.$$

Uma base para $V^{1,0}$ e para $V^{0,1}$ pode ser facilmente construída. Primeiro note que para $v \in V$, os vetores v e Jv são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ pois J não tem autovalores reais. Intuitivamente, construimos uma base para V (sobre $\mathbb{R}$) da forma

$$v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n$$

onde $2n = dim_{\mathbb{R}} V$. Afirmamos que o conjunto

$$\{v_1 - iJ_1, \ldots, v_n - iJv_n\}$$

é uma base para o espaço vetorial complexo n-dimensional $V^{1,0}$. De fato, para cada vetor $v_j - iJ_j$ pertence à $V^{1,0}$ pois

$$\begin{aligned} J(v_j - iJv_j) &= -iJ^2 v_j + Jv_j \\ &= i(v_j - iJv_j). \end{aligned}$$

Ainda mais, esse conjunto de vetores são linearmente independentes em $\mathbb{C}$. O conjunto

$$\{v_1 + iJ_1, \ldots, v_n + iJv_n\}$$

é uma base para $V^{0,1}$. De fato, para cada vetor $v_j + iJ_j$ pertence à $V^{0,1}$ pois

$$\begin{aligned} J(v_j + iJv_j) &= iJ^2 v_j + Jv_j \\ &= i(v_j + iJv_j). \end{aligned}$$

Ainda mais, esse conjunto de vetores são linearmente independentes em $\mathbb{C}$.

Retornando para $T_p(X)$ onde X é uma variedade complexa n-dimensional. Seja $(z_1, \ldots, z_n)$ com $z_j = x_j + iy_j$ um conjunto de coordenadas holomorfas locais para X. Como mencionado anteriormente, a aplicação de estrutura complexa para $T_p(X)$ satisfaz $J_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ e $J_p\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Definindo os campos vetoriais

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Assim, uma base para $T_p^{1,0}(X)$ é dada por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial z_n}\right\}$ e uma base para $T_p^{0,1}(X)$ é dada por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\}$.

Analogamente, definindo as formas

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{e} \quad d\overline{z}_j = dx_j - idy_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Uma base para $T_p^{*^{1,0}}(X)$ é dada por $\{dz_1, \ldots, dz_n\}$ e uma base para $T_p^{*^{0,1}}(X)$ é dada por $\{d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$.

Assim, temos as seguintes combinações

$$\left\langle dz_k, \frac{\partial}{\partial z_k}\right\rangle_p = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = k \\ 0, & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

$$\left\langle d\overline{z}_k, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right\rangle_p = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad j = k \\ 0, & \text{se} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Além disso,

$$\left\langle dz_j, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\right\rangle_p = 0,$$

$$\left\langle d\overline{z}_j, \frac{\partial}{\partial z_k}\right\rangle_p = 0.$$

Em particular, $\langle\, \phi, L\,\rangle_p = 0$ para $\phi \in T_p^{*^{1,0}}(X)$ e $L \in T_p^{0,1}(X)$ e $\langle\, \psi,\ M\rangle_p = 0$ para $\psi \in T_p^{*^{0,1}}(X)$ e $M \in T_p^{1,0}(X)$.

O produto interno Hermitiano $(\cdot)$ em $T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$ é definido tomando que

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\right\}$$

é uma base ortonormal. Pela definição do produto interno Hermitiano, temos que

$$(\alpha U) \cdot V = \alpha \, (U \cdot V)$$

e

$$U \cdot (\alpha V) = \overline{\alpha} \, (U \cdot V)$$

para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $U, V \in T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$. Note que $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ e $T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ são ortogonais sob essa métrica. Podemos identificar $\mathbb{C}^n$ com $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ pela aplicação

$$(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

para $U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. Com essa identificação, temos que $U \cdot V = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v}_j$ para $U = (u_1, \ldots, u_n), V = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$.

Denotaremos o produto interno Hermitiano de U e $V \in \mathbb{C}^n$ por $H(U, V)$ e o produto interno Euclidiano de U e V por $S(U, V)$.

Lema 3.7. *Para $U, V \in \mathbb{C}^n$, $H(U, V) = S(U, V) + iS(U, JV)$.*

Demonstração. Sejam $U, V \in \mathbb{C}^n$, então, pela definição do produto Hermitiano, temos que

$$\begin{aligned}
H(U, V) &= \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v}_j \\
&= u_1 \overline{v}_1 + \cdots + u_n \overline{v}_n \\
&= (a_1 + ib_1)(x_1 - iy_1) + \cdots + (a_n + ib_n)(x_n - iy_n) \\
&= (a_1 x_1 - i a_1 y_1 + i x_1 b_1 - i^2 b_1 y_1) + \cdots + (a_n x_n - i a_n y_n + i x_n b_n - i^2 b_n y_n) \\
&= (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n) + i(-a_1 y_1 - \cdots - a_n y_n + b_1 x_1 + \cdots b_n x_n) \\
&= S(U, V) + iS(U, JV).
\end{aligned}$$

□

Analogamente, o produto interno Hermitiano em $T_p^*(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$ é definido tomando

$$\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$$

é uma base ortonormal.

Lema 3.8. *Seja que V é um espaço vetorial real de dimensão par. Suponha que $\mathbb{L}$ é um subespaço complexo de $V \otimes \mathbb{C}$ com as seguintes propriedades:*

i) $\mathbb{L} \cap \overline{\mathbb{L}} = \{0\}$;

ii) $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} = V \otimes \mathbb{C}$.

Então, existe uma única aplicação de estrutura complexa J em V tal que $\mathbb{L}$ e $\overline{\mathbb{L}}$ são os $+i$ e $-i$ autoespaços da extensão de J em $V \otimes \mathbb{C}$, respectivamente.

Demonstração. Primeiro, definimos $J^{\mathbb{C}} : V \otimes \mathbb{C} \longrightarrow V \otimes \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} J^{\mathbb{C}}(L) &= iL \text{ para } L \in \mathbb{L}, \\ J^{\mathbb{C}}(L) &= -iL \text{ para } L \in \overline{\mathbb{L}}. \end{aligned}$$

Da propriedade *i)* $J^{\mathbb{C}}$ está bem definida. Da propriedade *ii)* $J^{\mathbb{C}}$ pode ser extendida à uma aplicação de estrutura complexa definida em todo $V \otimes \mathbb{C}$. Claramente, $\mathbb{L}$ e $\overline{\mathbb{L}}$ são os $+i$ e $-i$ autoespaços para $J^{\mathbb{C}}$, respectivamente. Resta provar que $J^{\mathbb{C}}$ é uma aplicação que leva V à V, para então definirmos J como desejada sendo a restrição de $J^{\mathbb{C}}$ em V. Note que os vetores

$$X = L + \overline{L} \text{ para } L \in \mathbb{L}; \tag{3.1}$$

$$Y = i(L - \overline{L}) \text{ para } L \in \mathbb{L} \tag{3.2}$$

são reais, isto é, $\overline{X} = X$ e $\overline{Y} = Y$. Então, X e Y pertencem à $V \otimes 1$. Como $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} = V \otimes \mathbb{C}$, V é gerado pelos vetores das formas X e Y, dados acima. Como $J^{\mathbb{C}}X = Y$ e $J^{\mathbb{C}}Y = -X$, os quais pertencem à V, claramente $J^{\mathbb{C}}$ é uma aplicação que leva V em V, como desejado. □

3.3 Formas Complexificadas de Grau Elevado

Seja X uma variedade complexa de dimensão n. Para $0 \leq r \leq 2n$, definimos $\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(X)$ como o fibrado das r-formas complexas e $\mathcal{E}^r(X)$ o espaço das r-formas em X cujos coeficientes são funções suaves de valores complexos.

Para $0 \leq p, q \leq n$ e um ponto $z \in X$, definimos o espaço

$$\Lambda_Z^{p,q} T^*(X) = \Lambda^p \left\{ T_z^{*^{1,0}}(X) \right\} \widehat{\otimes} \Lambda^q \left\{ T_z^{*^{0,1}}(X) \right\}.$$

Aqui, $\widehat{\otimes}$ denota o produto tensorial antisimétrico. De melhor maneira, se $(z_1, \ldots, z_n)$ é um conjunto de coordenadas holomorfas locais para X, então $\Lambda_z^{p,q} T^*(X)$ [e o espaço vetorial gerado sobre $\mathbb{C}$ pelo conjunto

$$\left\{ dz^I \wedge d\overline{z}^J = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_q} \right\}$$

onde $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ e $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ percorre um conjunto de multi-índices

Analogamente, definimos o espaço

$$\Lambda_z^{p,q} T(X) = \Lambda^p T_z^{1,0}(X) \widehat{\otimes} \Lambda^q T_z^{0,1}(X)$$

que é gerado sobre $\mathbb{C}$ por
$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^I} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}^J}; |I| = p, |J| = q\right\}.$$

Variando $z \in X$, obtemos os fibrados $\Lambda^{p,q}(T^*(X))$ e $\Lambda^{p,q}T(X)$ na forma usual. O espaço das seções suaves é denotado por $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ e é chamado de espaço das formas diferenciais em M de bigrau (q, q). Um elemento ϕ de $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ pode ser expressado em coordenadas locais como
$$\phi = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \phi_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J$$
onde cada ϕ_{IJ} é uma função suave de valores complexos.

Em coordenadas locais $z_j = x_j + iy_j$, escrevemos $dx_j = \left(\frac{1}{2}\right)(dz_j + d\overline{z}_j)$ e $dy_j = -\left(\frac{i}{2}\right)(dz_j - d\overline{z}_j)$ para $1 \leq j \leq n$. Dessa forma, qualquer elemento de $\Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(X))$ pode ser escrito de forma única como a soma de formas bigraus, ou seja,
$$\Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(X)) = \Lambda^{r,0}(T^*(X)) \oplus \cdots \oplus \Lambda^{0,r}(T^*(X)).$$

Portanto
$$\mathcal{E}^r(X) = \mathcal{E}^{r,0}(X) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{0,r}(X).$$

Para $0 \leq 0, q \leq n$ com $p + q = r$, definimos a projeção natural
$$\pi^{p,q} : \Lambda^r(T^{*^{\mathbb{C}}}(X)) \longrightarrow \Lambda^{p,q}(T^*(X)).$$

Definição 3.9. *O operador de Cauchy-Riemann* $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X)$ *e o operador* $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X)$ *são definidos por*
$$\begin{aligned} \overline{\partial} &= \pi^{p,q+1} \circ d \\ \partial &= \pi^{p+1,q} \circ d. \end{aligned}$$

Para uma função suave $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, temos
$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j$$
que pode ser reescrito como
$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j.$$

O primeiro termo à direita é um elemento de $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ e o segundo termo é um elemento de $\mathcal{E}^{0,1}(X)$. Portanto,

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \tag{3.3}$$

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j. \tag{3.4}$$

Note que $df = \partial f + \overline{\partial} f$.

Teorema 3.10. *Seja X um conjunto aberto e $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função C^1, então f é holomorfa se, e somente se, $\overline{\partial} f = 0$.*

Demonstração. A prova segue em [8] e [2]. □

Para formas de grau maior, temos que

$$\begin{aligned} \partial \left\{ f dz^I \wedge d\overline{z}^J \right\} &= \partial f \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \ \text{ para } \ f \in \mathcal{E}(X) \\ \overline{\partial} \left\{ f dz^I \wedge d\overline{z}^J \right\} &= \overline{\partial} f \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \end{aligned}$$

então,

$$df = \partial f + \overline{\partial} f. \tag{3.5}$$

Observação 3.11. Outra importante observação é que $\partial^2 \phi = 0$, $\overline{\partial}^2 \phi = 0$ e $\partial \overline{\partial} \phi = -\overline{\partial} \partial \phi$ para $\phi \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$. Isso segue do fato que $0 = d^2 \phi = \partial^2 \phi + (\partial \overline{\partial} + \overline{\partial} \partial) \phi + \overline{\partial}^2 \phi$ e notando que $\partial^2 \phi$, $(\partial \overline{\partial} + \overline{\partial} \partial) \phi$ e $\overline{\partial}^2 \phi$ tem diferentes bigraus $(p+2, q)$, $(p+1, q+1)$ e $(p, q+2)$, respectivamente.

Lema 3.12. *i) $d = \partial + \overline{\partial}$;*

ii) $\partial^2 = 0$, $\partial \overline{\partial} = -\overline{\partial} \partial$ e $\overline{\partial}^2 = 0$.

Demonstração. i) Segue direto da Equação 3.5.

ii) Segue direto da Observação 3.11.

□

Lema 3.13. *Se $f \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$ e $g \in \mathcal{E}^{r,se}(X)$, então*

$$\overline{\partial}(f \wedge g) = \overline{\partial} f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial} g \tag{3.6}$$

$$\partial(f \wedge g) = \partial f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \partial g. \tag{3.7}$$

Demonstração. A demonstração segue da regra do produto para derivada exterior. □

O *pull back* de uma aplicação suave entre duas variedades suaves X e Y preserva o bigrau. Se X e Y são variedades complexas e a aplicação é holomorfa, então o *pull back* também preserva o bigrau.

Lema 3.14. *Sejam X e Y variedades complexas e $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa. Se ϕ é um elemento de $\Lambda^{p,q}_{F(z)}T^*(Y)$ então, $F^*\phi$ é um elemento de $\Lambda^{p,q}_{z}T^*(X)$.*

Demonstração. Se $w_1, \ldots, w_n$ é um conjunto de coordenadas locais para Y e se $F_j = w_j \circ F : X \longleftrightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, então

$$F^*dw_j = dF_j \text{ e } F^*d\overline{w}_j = d\overline{F}_j.$$

Como F é holomorfa então, $\overline{\partial}F_j = 0$. Conjugando obtemos que $\partial\overline{F}_j = 0$. Como $d = \partial + \overline{\partial}$, obtemos

$$F^*dw_j = \partial F_j \in \Lambda^{1,0}T^*(X)$$

e

$$F^*d\overline{w}_j = \overline{\partial F}_j \in \Lambda^{0,1}T^*(X).$$

Se $|I| = p$, $|J| = q$, então $F^*(dw^I \wedge d\overline{w}^J) \in \Lambda^{p,q}T^*(X)$. Como $\left\{dw^I \wedge d\overline{w}^J; |I| = p, |J| = q\right\}$ é uma base local para $\Lambda^{p,q}T^*(Y)$, o que prova o resultado. $\square$

Sabemos que o operador *pull back* comuta com a derivada exterior. Se a aplicação é uma aplicação holomorfa entre duas variedades complexas, então o operador *pull back* também comuta com ∂ e $\overline{\partial}$, como o mostra o lema a seguir.

Lema 3.15. *Sejam X e Y variedades complexas e $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa. Então, $F^* \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F$ e $F^* \circ \partial = \partial \circ F^*$.*

Demonstração. Como F^* comuta com a derivada exterior e também preserva bigrau, a prova do lema segue facilmente. $\square$

Lema 3.16. *Se f é uma função suave de valores complexos definida em uma variedade complexa X, então*

$$\begin{aligned} \partial f &= \frac{1}{2}(df - iJ^*df) \\ \overline{\partial} &= \frac{1}{2}(df + iJ^*df). \end{aligned}$$

O operador $J^* \circ d$ é comumente denotado por $d^{\mathbb{C}}$ na literatura. Logo, $\left(\frac{1}{2}\right) d^{\mathbb{C}} = \left(\frac{1}{2}\right) J^* \circ d$ é a parte imaginária do operador $\overline{\partial}$.

Demonstração. Dada uma função f, a 1-forma ∂f pertence à $T^{*^{1,0}}(X)$, a qual é o $+i$ autoespaço de J^*. Da mesma forma, $\overline{\partial}f$ pertence à $T^{*^{0,1}}(X)$, a qual é o $-i$ autoespaço de J^*. Aplicando J^* na equação $df = \partial f + \overline{\partial}f$, obtemos

$$J^*df = i\partial f - i\overline{\partial}f. \tag{3.8}$$

Somando $idf = i\partial f + \overline{\partial} f$ e dividindo por $2i$ na equação 3.8, obtemos $\partial f = \dfrac{1}{2}(df - iJ^* df)$. Similarmente, obtemos $\overline{\partial} f = \dfrac{1}{2}(df + iJ^* df)$. □

Para terminar este capítulo, faremos a computação de $\mathcal{L}^2$-adjunta de $\overline{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$. O produto interno hermitiano para $T^{*^{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}^n)$ pode ser extendido à um produto interno em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ declarando que o conjunto

$$\left\{dz^I \wedge d\overline{z}^J ; |I| = p; |J| = p\right\}$$

é uma base ortonormal para $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$. Seja $\mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ o espaço dos elementos de $\mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ com suporte compacto. Dotamos $\mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ com o seguinte produto $\mathcal{L}^2$-interno

$$(\phi, \psi)_{\mathcal{L}^2} = \int_{z \in \mathbb{C}^n} (\phi(z) \cdot \psi(z)) dv \quad \phi, \psi \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$$

onde $dv = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$ é a forma do volume usual para $\mathbb{C}^n$. O adjunto de $\overline{\partial}$ com respeito ao produto interno é denotado por $\overline{\partial}^* : \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{D}^{p,q-1}(\mathbb{C}^n)$. É definido por $(\overline{\partial}^* f, g)_{\mathcal{L}^2} = (f, \overline{\partial} g)_{\mathcal{L}^2}$ para $f \in \mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ e $g \in \mathcal{D}^{p,q-1}(\mathbb{C}^n)$.

Note que para $|I| = p$, $|J| = q$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \lrcorner (dz^I \wedge d\overline{z}^J) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j \notin J \\ (-1)^{p+k-1} dz^I \wedge d\overline{z}^{J'}, & \text{se} \quad j \in J \end{cases}$$

3.4 TEOREMA DE FROBENIUS

Nesta seção, discutiremos o Teorema de Frobenius. Também discutiremos a versão complexa desse teorema, que será de fundamental importância quando discutirmos variedades CR.

Seja $\mathbb{L}$ um subfibrado m-dimensional do fibrado tangente real para $\mathbb{R}^N$. O Teorema de Frobenius nos dá condições em que um subfibrado $\mathbb{L}$ em uma vizinhança U de um ponto p_0 dado que garante a existência de funções suaves localmente definidas $\rho_1, \ldots, \rho_{N-m} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\rho_j(p_0) = 0$, $1 \leq j \leq N - m$ e $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_{N-m} \neq 0$ em U tais que

$$L\{\rho_j\} = 0 \text{ em } U \text{ para } 1 \leq j \leq N - m, L \in \mathbb{L} \tag{3.9}$$

Assumindo que $\rho_1, \ldots, \rho_{N-m}$ existam e satisfaçam 3.9.

Para cada $c = (c_1, \ldots, c_{N-m}) \in \mathbb{R}^{N-m}$ próximo a origem, o conjunto

$$M_c = \left\{x \in U \subset \mathbb{R}^N ; \rho_1(x) = c_1, \ldots, \rho_{N-m}(x) = c_{N-m}\right\}$$

é uma subvariedade m-dimensional de U pelo Lema 2.15. Já pelo Lema 2.24, o fibrado tangente de cada M_c é gerado por esses campos vetoriais em $\mathbb{R}^N$ que satisfazem a condição 3.9 em M_c.

Definição 3.17. *Dados $L, M \in T(X)$ dois campos vetoriais e $f \in \mathcal{E}(X)$ definimos a função*

$$\begin{aligned} [\cdot,\cdot] : T(X) \times T(X) &\longrightarrow T(X) \\ (L, M) &\longmapsto L(M(f)) - M(L(f)) \end{aligned}$$

como colchete de Lie (ou comutador) entre dois campos vetorias.

Se L_1 e L_2 pertencem à $\mathbb{L}$, então $L_1\{\rho_j\} = L_2\{\rho_2\} = 0$ em U para $1 \leq j \leq N - m$. Portanto,

$$[L_1, L_2]\{\rho_j\} = L_1\{L_2\rho_j\} - L_2\{L_1\rho_j\} = 0 \text{ em } U.$$

O campo vetorial $[L_1, L_2]$ satisfaz a condição 3.9 e então, $[L_1, L_2]$ também pertence à $\mathbb{L}$. Um subfibrado $\mathbb{L}$ é dito ser involutivo se $[L_1, L_2]$ pertence à $\mathbb{L}$ sempre que L_1 e L_2 pertencem à $\mathbb{L}$. Então, a existência de $\rho_1, \ldots, \rho_{N-m}$ satisfazendo 3.9 implica que $\mathbb{L}$ é involutivo.

Teorema 3.18 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja $\mathbb{L}$ um subfibrado m-dimensional do fibrado tangente real de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $\mathbb{L}$ é involutivo, isto é, $[L_1, L_2]$ pertence à $\mathbb{L}$ sempre que que L_1 e L_2 pertencem à $\mathbb{L}$. Então, dado um ponto $p_0 \in \mathbb{R}^N$ existe uma vizinhança U de p_0 e um difeomorfismo $\chi = (\chi^1, \ldots, \chi^N) : U \longrightarrow \chi\{U\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que*

$$L\left\{\chi^j\right\} = 0 \text{ em } U \text{ para } m + 1 \leq j \leq N \text{ e } L \in \mathbb{L}.$$

Demonstração. Assumiremos que o ponto p_0 dado é a origem. Próximo a origem, existe um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_m$ que geram o subfibrado $\mathbb{L}$ sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Dada as coordenadas (y, x) em $\mathbb{R}^N$ com $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^{N-m}$.

Escrevemos

$$\widetilde{L}_j = \sum_{k=1}^{m} \mu_{jk} \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k=1}^{N-m} \gamma_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad 1 \leq j \leq m$$

onde μ_{jk} e γ_{jk} são funções suaves definidas próxima a origem. Como $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_m$ são linearmente independentes próxima a origem, reordenemos as coordenadas se necessário para que a matriz $m \times m$ $\mu = (\mu_{jk})_{k=1}^{m}$ é não singular próxima a origem. Multiplicando por μ^{-1} temos outra base localmente definida para $\mathbb{L}$ da forma $L_1, \ldots, L_m$ onde

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{N-m} \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad 1 \leq j \leq m.$$

Cada λ_{jk} é uma função suave de (y, x) e igual à (j, k)-ésima entrada do produto da matriz $\mu^{-1} \cdot \gamma$, onde γ é a matriz $m \times (N - m)$ com entradas γ_{jk}.

Computando explicitamente $[L_j, L_k]$ é claro que o $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_l}\right)$-coeficiente de $[L_j, L_k]$ se anula. Por outro lado, por hipótese, $[L_j, L_k]$ é uma combinação linear de $\{L_1, \ldots, L_m\}$. Qualquer combinação linear não trivial de $\{L_1, \ldots, L_m\}$ deve envolver uma combinação linear não trivial de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_m}\right\}$.

Portanto, concluímos que

$$[L_j, L_k] = 0 \text{ próximo à } 0, \quad 1 \leq j, k \leq m.$$

A prova do Teorema de Frobenius será completada após a prova do seguinte lema.

Lema 3.19. *Seja* $1 \leq m \leq N$ *e dado as coordenadas* (y, x) *em* $\mathbb{R}^N$ *com* $y \in \mathbb{R}^m$ *e* $x \in \mathbb{R}^{N-m}$. *Suponha que*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{N-m} \lambda_{jk}(y, x) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad 1 \leq j \leq m$$

onde cada λ_{jk} *é uma função suave definida próxima a origem. Em adição, suponha que* $[L_j, L_k] = 0$ *para* $1 \leq j, k \leq m$. *Então, existe uma vizinhança* U *da origem e um difeomorfismo suave* $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N) : U \longrightarrow \chi\{U\} \subset \mathbb{R}^N$ *tais que*

$$L_j\{\chi_k\} = 0 \text{ em } U, \quad 1 \leq j \leq m, \quad m+1 \leq k \leq N$$

e

$$\chi(0, x) = (0, x) \text{ para } x \in \mathbb{R}^{N-m} \text{ com } (0, x) \in U.$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre m, com $1 \leq m \leq N$. Primeiro consideremos o caso em que $m = 1$. Com certeza, qual campo vetorial L, a condição $[L, L] = 0$ sempre vale e também provém uma nova informação.

Construindo uma aplicação suave $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N)$ tal que $L = \dfrac{\partial}{\partial \chi_1}$ onde o campo vetorial $\dfrac{\partial}{\partial \chi_1}$ foi definido anteriormente como o *push forward* de $\dfrac{\partial}{\partial t_1}$ sob a aplicação χ^{-1}. Como $\left(\dfrac{\partial}{\partial \chi_1}\right)\{\chi_j\} = 0$ para $2 \leq j \leq N$, o que completa a prova do lema para o caso $m = 1$.

Seja (t, x) coordenadas para $\mathbb{R}^N$ com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^{N-1}$. Encontraremos um difeomorfismo local $F = (F_1, \ldots, F_N) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com

$$\left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]_{F(t,x)} = L_{F(t,x)} \tag{3.10}$$

para (t, x) próximo à origem e

$$F(0, x) = (0, x).$$

Então, a aplicação $\chi = F^{-1}$ satisfaz a condição inicial $\chi(0, x) = (0, x)$.

Ainda mais,

$$\frac{\partial}{\partial\chi_1} = \chi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = L,$$

como desejado.

Nas coordenadas $(y, x) = F(t, x)$, temos que

$$\left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]_{F(t,x)} = \frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x)\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N-m}\frac{\partial F_{k+1}}{\partial t}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Comparando essa expressão com

$$L = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{1k}(y,x)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

vemos que 3.10 é equivalente ao problema de valor inicial

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F_1(t,x)}{\partial t} & = & 1 \\ \dfrac{\partial F_2(t,x)}{\partial t} & = & \lambda_{1,1}(F(t,x)) \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial F_N(t,x)}{\partial t} & = & \lambda_{1,(N-1)}(F(t,x)) \\ F(0,x) & = & (0,x) \;\text{ para }\; x \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{array} \tag{3.11}$$

O Teorema da Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias garante uma solução suave $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que é definida em $\{|t| < \varepsilon, |x| < \varepsilon\}$ para algum $\varepsilon > 0$. Note que a condição inicial $F(0,x) = (o,x)$ implica que $F(0,0) = 0$ e

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}(0,0) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; j = k \\ 0, & \text{se } \; j \neq k \end{cases}$$

Junto com as equações diferenciais acima em $t = 0$ e $x = 0$, obtemos

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \lambda_{11}(0) & 1 & \bigcirc \\ \vdots & \ddots & \\ & \bigcirc & \\ \lambda_{1(N-1)}(0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $DF(0,0)$ é não singular. Pelo Teorema da Função Inversa, F tem uma inversa localmente suave definida $\chi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com $\chi(0) = 0$. Logo, χ é a aplicação desejada para o lema para o caso $m = 1$.

Para x fixado, a curva $\{F(t,x); |t| < \varepsilon\}$ é chamada uma curva integral para L. O campo vetorial $L = F_* \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ é tangente a essa curva. A solução para 3.10 determina uma única família de curvas integrais para L as quais satisfazem a condição inicial dada.

Agora assumindo que esse lema é válido para $m-1$ $(2 \leq m \leq N)$ e provemos o lema para m. Por suposição, existe um difeomorfismo local $\hat{\chi} = (\hat{\chi_1}, \ldots, \hat{\chi_N}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que

$$L_j \{\chi_k\} = 0 \text{ em } U, \; 1 \leq j \leq m, \; m+1 \leq k \leq N \tag{3.12}$$

e

$$\hat{\chi}(0, \ldots, 0, y_m, x_1, \ldots, x_{N-m}) = (0, \ldots, 0, y_m, x_1, \ldots, x_{N-m}).$$

Em particular, $\hat{\chi}(0,x) = (0,x)$, para $x \in \mathbb{R}^{N-m}$ próximo a origem. Seja $\widehat{F}$ a inversa de $\hat{\chi}$. Como $\hat{\chi}(0) = 0$, temos que $\widehat{F}(0) = 0$. De 3.12, vemos que L_j é tangente à qualquer conjunto de nível de $\hat{\chi_k}$ para $m \leq k \leq N$. Em particular, para $1 \leq j \leq m-1$, L_j é tangente à hipersuperfície

$$M_0 = \left\{\widehat{F}(t', 0.x); t' \in \mathbb{R}^{m-1}, x \in \mathbb{R}^{N-m}\right\}$$

cujo é o conjunto de nível $\{\hat{\chi_m} = 0\}$.

Seja (t', t_m, x) as coordenadas para $\mathbb{R}^N$ onde $t' = (t_1, \ldots, t_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t_m \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_{N-m}) \in \mathbb{R}^{N-m}$. Encontramos um difeomorfismo local $F : \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-m} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ com

$$\left[F_* \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)\right]_{F(t,x)} = [L_m]_{F(t,x)} \tag{3.13}$$

$$F(t', 0, x) = \widehat{F}(t', 0, x) \;\; t' \in \mathbb{R}^{m-1}, x \in \mathbb{R}^{N-m}.$$

Isso é realizado resolvendo um sistema de equações diferenciais ordinárias que são análogas à 3.11. A solução de 3.13 determina uma família de curvas integrais para L_m que satisfazem a condição inicial dada.

Afirmamos que F é um difeomorfismo em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$. Isso segue de duas observações. A primeira, a aplicação $(t', 0, x) \mapsto F(t', 0, x)$ parametriza M_0. E a segunda, a aplicação $t_m \mapsto F(t', t_m, x)$ parametriza uma curva integral para L_m que é transversal à M_0, pois L_m é transversal à $L_1, \ldots, L_{m-1}$ e ao conjunto $\left\{(0,x); x \in \mathbb{R}^{N-m}\right\}$.

Seja χ a inversa local de F. Afirmamos que χ é a aplicação desejada para o lema. Devemos mostrar que $\chi(0,x) = (0,x)$ e que $L_j(\chi_k) = 0$ para $1 \leq j \leq m$ e
$m+1 \leq k \leq N$. Claramente, $\chi(0,x) = (0,x)$ pois χ é a inversa de F e $F(0,x) = \widehat{F}(0,x) = (0,x)$.

Agora, mostramos que $L_m(\chi_k) = 0$ para $m+1 \leq k \leq N$. De 3.13, temos que $L_m = F_*\left(\dfrac{\partial}{\partial t_m}\right) = \chi_*^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial t_m}\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned} L_m(\chi_k) &= \chi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)\{\chi_k\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_m}\left\{\chi_k \circ \chi^{-1}\right\} \\ &= 0 \text{ se } m+1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

A última equação segue de que $\chi_k \circ \chi^{-1}(t', t_m, x) = x_{k-m}$ para $m+1 \leq k \leq N$ e que t_m e x_{k-m} são variáveis independentes.

Resta mostrar que $L_j\{\chi_k\} = 0$ para $1 \leq j \leq m-1$ e $m+1 \leq k \leq N$. Da condição inicial em 3.13, temos que $\chi = \hat{\chi}$ na hipersuperfície M_0. Como já mencionado, cada campo vetorial L_j, para $1 \leq j \leq m-1$, é tangente à M_0.

Portanto, 3.12 implica

$$L_j\chi_k = 0 \text{ em } M_0, \;\; m+1 \leq k \leq N.$$

Como $[L_j, L_m] =$ e $L_m\chi_k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} L_m(L_j\chi_k) &= L_j(L_m\chi_k) \\ &= 0 \text{ para } m+1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Como L_m é transversal à hipersuperfície M_0, vemos que $L_j\chi_k = 0 \text{ para } m+1 \leq k \leq N$, como desejado. O que prova o resultado. $\square$

A prova do lema completa a prova do Teorema de Frobenius. $\square$

A versão complexa do Teorema de Frobenius requer o seguinte lema.

Lema 3.20. *Seja $1 \leq m \leq n$ e que $\mathbb{C}^n$ tem coordenadas (ζ, z) com $\zeta \in \mathbb{C}^m$, $z \in \mathbb{C}^{n-m}$. Se*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} + \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_{jk}(\zeta, z)\frac{\partial}{\partial z_k} \text{ para } 1 \leq j \leq m,$$

onde cada λ_{jk} é uma função holomorfa definida em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$. Então, existe uma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^n$ e uma aplicação biholomorfa

$$Z = (Z_1, \ldots, Z_n) : U \longrightarrow Z\{U\} \subset \mathbb{C}^n,$$

com

$$L_j\{Z_k\} = 0 \text{ em } U \text{ com } 1 \leq j \leq m, \;\; m+1 \leq k \leq n$$

e

$$Z(0,z) = (0,z) \text{ para } z \in \mathbb{C}^{n-m} \text{ com } (0,z) \in U.$$

Demonstração. A prova desse lema é similar com a prova do Lema 3.19. $\square$

Definição 3.21. *Um campo vetorial* $\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)$ *em* $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ *é chamado de campo vetorial holomorfo se cada* $a_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *é holomorfo. Um subfibrado holomorfo ou analítico de dimensão* m *é um subfibrado de* $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ *que é localmente gerado sobre* $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ *pelos campos vetoriais* m*-holomorfos que são linearmente independentes.*

Teorema 3.22 (Teorema Analítico de Frobenius)**.** *Se* $\mathbb{L}$ *é um subfibrado* m*-dimensional holomorfo e involutivo de* $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$*. Então, dado um ponto* $p_0 \in \mathbb{C}^n$ *existe uma vizinhança* U *de* $\mathbb{C}^n$ *e uma aplicação biholomorfa* $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) : U \longrightarrow Z(U) \subset \mathbb{C}^n$ *tais que*

$$L\{Z_j\} = 0 \text{ em } U \text{ para } m+1 \leq j \leq n \text{ e } L \in \mathbb{L}.$$

Note que para $p \in U$, cada $L_j|_p$ é tangente à variedade m-dimensional complexa

$$X_p = \{z \in U \subset \mathbb{C}^n; Z_j(p),\ m+1 \leq j \leq n\}.$$

3.5 Estruturas quase Complexas

Definição 3.23. *Sejam* X *uma variedade suave e* $\mathbb{L}$ *um subfibrado suave de* $T^{\mathbb{C}}(X)$*. Dizemos que o par* $(X, \mathbb{L})$ *é uma estrutura quase complexa se*

i) $\mathbb{L} \cap \overline{\mathbb{L}} = \{0\}$*;*

ii) $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} = T^{\mathbb{C}}(X)$*.*

Uma estrutura quase complexa pode existir somense se a dimensão real de X é par. Note que uma variedade complexa X junto de $\mathbb{L} = T^{1,0}(X)$ é um exemplo de uma estrutura quase complexa.

Teorema 3.24 (Newlander-Nirenberg)**.** *Se* $(X, \mathbb{L})$ *é uma estrutura quase complexa e que* $\mathbb{L}$ *é involutivo. Então, próximo a qualquer ponto* $p_0 \in X$*, existe uma estrutura complexa para* X *que faz* X *uma variedade complexa tal que* $\overline{\mathbb{L}} = T^{0,1}(X)$*.*

Teorema 3.25. *Seja* J *a aplicação de estrutura complexa usual em* $\mathbb{C}^n$*. Se* M *é uma subvariedade suave de* $\mathbb{C}^n$ *tal que* $J\{T_p(M)\} = T_p(M)$ *para cada* $p \in M$*. Então,* M *é uma subvariedade complexa de* $\mathbb{C}^n$*.*

Demonstração. Provaremos que próximo de qualquer ponto fixado $p_0 \in M$, podemos exibir M como o gráfico sobre o espaço seu espaço tangente em p_0 de uma aplicação holomorfa. Por translação, tomamos que o ponto p_0 é a origem. Então, usando uma aplicação linar complexa tal que o espaço tangente de M em 0 é uma cópia de $\mathbb{C}^k$ dado por $\left\{(0,w) \in \mathbb{C}^n; w \in \mathbb{C}^k\right\}$ onde $2k = dim_{\mathbb{R}} M$. Como $T_0(M)$ é J-invariante por hipótese, a complemento ortogonal de $T_0(M)$, $T_0(M)^{\perp}$ também é J-invariante. Ainda mais, J não possui autovalores reais. Portanto, existe uma base real para $T_0(M)^{\perp}$ da forma

$$v_1, Jv_1, \ldots, v_{n-k}, Jv_{n-k},$$

e uma base real para $T_0(M)$ da forma

$$v_{n-k+1}, Jv_{n-k+1}, \ldots, v_n, Jv_n.$$

Dado as coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ em $\mathbb{R}^{2n}$. Assim.

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Definindo a aplicação linear $A : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\begin{aligned} A(v_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \\ A(Jv_j) &= \frac{\partial}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Então, extendendo A à todos de $T_0(\mathbb{R}^{2n})$ pela linearidade. Note que $A(Jv_j) = JA(v_j)$, $1 \leq j \leq n$. Portanto $A \circ J = J \circ A$ em $T_0(\mathbb{R}^{2n})$. Visto como uma aplicação de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$, A é linear complexa. Em particular, A é holomorfa e então, $A\{M\}$ também satisfaz a hipótese do teorema.

Seja $w_1 = x_{n-k+1} + iy_{n-k+1}, \ldots, w_k = x + n + iy_n$. O espaço tangente real de $A\{M\}$ na origem pode ser identificada com

$$\left\{(0,w) \in \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k; w \in \mathbb{C}^k\right\}.$$

Portanto, próximo a origem, $A\{M\}$ é o gráfico de uma aplicação suave $h : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{n-k}$, isto é,

$$A\{M\} = \left\{(h(w), w); w \in \mathbb{C}^k\right\}.$$

Para mostrar que $A\{M\}$ é uma subvariedade complexa de $\mathbb{C}^n$, devemos mostrar que h é holomorfa. O que é equivalente a mostrar

$$h_*(p) \circ J = J \circ h_*(p)$$

para cada $p \in \mathbb{R}^{2k} \simeq \mathbb{C}^k$. Aqui, $h_*(p)$ é a aplicação *push forward* de h em p onde h é visto como uma aplicação de $\mathbb{R}^{2k} \mapsto \mathbb{R}^{2n-2k}$. Então, J na esquação acima é a aplicação de estrutura complexa para $\mathbb{R}^{2k}$, assim como J na direita é a aplicação de estrutura complexa para $\mathbb{R}^{2(n-k)}$.

Definindo $H : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k$ por

$$H(w) = (h(w), w) \;\; \text{para} \;\; w \in \mathbb{C}^k.$$

Seja L um vetor em $T_0(\mathbb{R}^{2k})$. Para $p \in \mathbb{R}^{2k} \simeq \mathbb{C}^k$ próximo de 0, temos

$$\begin{aligned} J\{H_*(p)(L)\} &= J\{(h_*(p)(L), L)\} \in \mathbb{R}^{2(n-k)} \times \mathbb{R}^{2k} \\ &= (J\{h_*(p)(L)\}, JL). \end{aligned}$$

Como H é a aplicação gráfico para $A\{M\}$ sobre $\mathbb{R}^{2k}$, $H_*(p)(L)$ pertence à $T_{H(p)}(A\{(M)\})$. Como $T_{H(p)}(A\{(M)\})$ é J-invariante, $J\{H_*(p)(L)\}$ também pertence à $T_{H(p)}(A\{(M)\})$.

Agora para qualquer vetor em $T_{H(p)}(A\{(M)\})$ é da forma

$$(h_*(p)(W), W)$$

para algum veetor $W \in T_0(\mathbb{R}^{2k})$. Igualando essas duas expressões para $J\{H_*(p)(L)\}$, vemos que $W = J(L)$ e portanto $h_*(p)(JL) = Jh_*(p)(L)$. Isso estabelece que $h_*(p) \circ J = J \circ h_*(p)$ e então, h é holomorfa, como desejado. $\square$

4 TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

A discussão de soluções para equações diferenciais parciais é facilidada pela Teoria das Distribuições. Nesse capítulo, definiremos e discutiremos distribuições bem como as operações básicas com distribuições. Também discutiremos uma versão do Teorema de Extensão de Whitney e, por fim, as computações de uma solução fundamental para o Operador Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$ e uma solução fundamental para o Laplaciano em $\mathbb{R}^N$.

4.1 Os espaços $\mathcal{D}'$ e $\mathcal{E}'$

Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$. Definimos $\mathcal{E}(\Omega)$ como o espaço das funções suaves de valores complexos em Ω. A topologia desse espaço é descrita pelas seminormas a seguir. Seja $\{K_n\}$ uma sequência de subconjuntos compactos de Ω tais que cubram Ω, ou seja, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. As normas $\rho_n : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas por

$$\rho_n(f) = \sup_{\substack{x \in K_n \\ |\alpha| \leq n}} |D^\alpha f(x)| \ \text{ para } \ f \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Essas seminormas satisfazem as seguintes propriedades

i) $\rho_n(cf) = |c|\rho_n(f)$ para $c \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{E}(\Omega)$;

ii) $\rho_n(f+g) \leq \rho_n(f) + \rho_n(g)$ para $f, g \in \mathcal{E}(\Omega)$;

iii) $f \equiv 0$ se, e somente se, $\rho_n(f) = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Temos que $f_m \longrightarrow f$ em $\mathcal{E}(\Omega)$ se, e somente se, $\rho_n(f_m) - \rho_n(f) \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow \infty$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Munido dessa topologia, $\mathcal{E}(\Omega)$ é completo e tem por propriedade: uma sequência (f_n) converge para f em $\mathcal{E}(\Omega)$ quando $D^\alpha f_n$ conver uniformemente para $D^\alpha f$ em cada subconjunto compacto de Ω, para cada multiíndice $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_N)$, onde

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} \ \text{ e } \ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N.$$

Ainda, um espaço vetorial topológico completo com a topologia definida por uma coleção de seminormas enumerável é chamado de Espaço de Fréchet.

Definimos $\mathcal{D}(\Omega)$ como o espaço dos elementos em $\mathcal{E}(\Omega)$ com suporte compacto.

Definição 4.1. *Uma sequência (ϕ_n) é dita convergir à ϕ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um conjunto compacto fixado K que contém o suporte de cada ϕ_n e tal que $D^\alpha \phi_n$ converge uniformemente à $D^\alpha \phi$ em K para cada multiíndice α. Onde $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ é munido da topologia do subespaço.*

Definição 4.2. *Dado um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$, o espaço das dstribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$ é definido como o espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto é, $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço de todos os funcionais lineares contínuos T de $\mathcal{D}(\Omega)$ à $\mathbb{C}$. Analogamente, $\mathcal{E}'(\Omega)$ é definido como o espaço dual de $\mathcal{E}(\Omega)$. O pareamento entre um elemento T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e um elemento ϕ de $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotádo por $(T,\phi)_\Omega \in \mathbb{C}$.*

Observação 4.3. Note que $\mathcal{E}'(\Omega)$ é subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ pois $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ e como uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$ converge, então também convergirá em $\mathcal{E}(\Omega)$.

Exemplo 4.4. Seja T uma função localmente integrável em Ω. Então, T pode ser visto como um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ definido por

$$(T,\phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} T(x)\phi(x)dx \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com efeito, sejam $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned}
(T,\phi+\alpha\psi)_\Omega &= \int_{x\in\Omega} T(x)(\phi+\alpha\psi)(x)dx \\
&= \int_{x\in\Omega} T(x)\phi(x) + \alpha T(x)\psi(x)dx \\
&= \int_{x\in\Omega} T(x)\phi(x)dx + \alpha\int_{x\in\Omega} T(x)\psi(x)dx \\
&= (T,\phi)_\Omega + \alpha(T,\psi)_\Omega.
\end{aligned}$$

A continuidade decorre da estimativa que

$$|(T,\phi)_\Omega| \leq \sup|\phi(t)| \int_{x\in\Omega} |f(x)|dx,$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
|(T,\phi_n)_{Omega} - (T,\phi)_\Omega| &= \left|\int_{x\in\Omega} f(x)\phi_n(x)dx - \int_{x\in\Omega} f(x)\phi(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{x\in\Omega} f(x)(\phi_n(x)-\phi(x))\right| dx \\
&\leq \sup|\phi_n(t)-\phi(t)| \int_{x\in\Omega} |f(x)|dx \ \ , \ \ (\phi_n), \phi \in \mathcal{D}(\Omega).
\end{aligned}$$

Se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então, $(T,\phi_n)_\Omega \longrightarrow (T,\phi)_\Omega$. Portanto, $T = (T,\cdot)_\Omega$ define um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se $supp\,T$ é um conjunto compacto de Ω, então $T = (T,\cdot)_\Omega$ é um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Exemplo 4.5. Para um ponto $p \in \mathbb{R}^N$, a função delta em p, δ_p define uma $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$-distribuição definida por

$$(\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N} = f(p) \ \ , \ \ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, dados $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(\delta_p, f + \alpha g)_{\mathbb{R}^N} = (f + \alpha g)(p) = f(p) + \alpha g(p) = (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N} + \alpha(\delta_p, g)_{\mathbb{R}^N}$$

o que prova a linearidade. Quanto a continuidade, sejam $(f_n), f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, então

$$|(\delta_p, f_n)_{\mathbb{R}^N} - (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N}| = |f_n(p) - f(p)|,$$

ou seja, se $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ então, $(\delta_p, f_n)_{\mathbb{R}^N} \longrightarrow (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N}$ em $\mathbb{C}$.

Algumas vezes, enfatizaremos a "variável de integração"em Ω escrevendo

$$(T(x), \phi(x))_{x\in\Omega} = (T, \phi)_\Omega \text{ para } T \in \mathcal{D}'(\Omega), \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uma distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou $\mathcal{E}'(\Omega)$ é dita se anular em um subconjunto aberto U de Ω se $(T, \phi)_\Omega = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(U)$. O suporte de uma distribuição T, denotado como $supp\ T$, é definido como o menor conjunto fechado em Ω em que T não se anula. No Exemplo 4.4, o suporte de T como uma distribuição é o suporte usual de T como uma função definida em Ω. No exemplo 4.5, $supp\ \{\delta_p\}$ é o conjunto unitário $\{p\}$.

Lema 4.6. *Se T é um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$, então, existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$, um inteiro $M > 0$ e uma constante $C > 0$ tais que*

$$|(T, f)_\Omega| \leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq M \\ x\in K}} |D^\alpha f(x)| \text{ para todo } f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{4.1}$$

Em particular, $supp\ T \subset K$. Reciprocamente, se T é um elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $supp\ T$ é compacto em Ω, então T define um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Demonstração. É um fato padrão da toplogia que uma aplicação linear contínua de valores complexos definidas em um espaço de Fréchet deve ser limitada. Assim, a Desigualdade 4.1 segue para algum inteiro M, uma constante C e um conjunto compacto K. Em particular, $supp\ T$ deve estar contido em K, caso contrário, deveria existir um elemento $f \in \mathcal{D}(\Omega - K)$ com $(T, f)_\Omega \neq 0$. O que contradiz a Desigualdade 4.1.

Para a recíproca, suponha que T pertencente à $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $supp\ T$ é compacto. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ uma função corte com $\phi = 1$ em uma vizinhança de $supp\ T$. Defina

$$(T, f)_\Omega = (T, \phi f)_\Omega \text{ para } f \in \mathcal{E}(\Omega). \tag{4.2}$$

O lado direito de 4.2 está bem definido pois ϕf pertence à $\mathcal{D}(\Omega)$ e T pertence à $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ainda, se $f_n \longrightarrow f$ em $\mathcal{E}(\Omega)$, então $\phi f_n \longrightarrow \phi f$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Portanto, essa definição faz de T uma distribuição distribuição em $\mathcal{E}'(\Omega)$ bem definida. Como $1 - \phi$ se anula em uma vizinhança de

$supp\, T$, claramente

$$(T,(1-\phi)f)_\Omega = 0 \quad \text{para cada} \quad f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A definição acima de T, como uma aplicação linear atuando em $\mathcal{E}(\Omega)$, vai de acordo com a definição original de T, como uma aplicação linear atuando em $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. O que prova o resultado. □

Os espaços $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{E}'(\Omega)$ são munidos da topologia chamada topologia fraca. Sendo definida tomando uma sequência $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ convergindo à T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ou $\mathcal{E}'(\Omega)$) se

$$(T_n, \phi)_\Omega \longrightarrow (T, \phi)_\Omega$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (ou $\mathcal{E}(\Omega)$). Essa convergência não é requirida ser uniforme em ϕ.

4.2 Operações com Distribuições

Nesta seção definiremos as principais operações da Teoria das Distribuições. Sendo todas as definições motivadas pelo caso onde a distribuição é uma função suave.

Definição 4.7. *A soma e o produto por escalares de distribuições define-se de maneira usual.*
Sejam $T, G \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, definimos a soma de distribuições e o produto por escalar, respectivamente:

$$\begin{aligned} (T+G,\phi)_\Omega &= (T,\phi)_\Omega + (G,\phi)_\Omega \\ (\lambda T,\phi)_\Omega = &= \lambda(T,\phi)_\Omega. \end{aligned}$$

4.2.1 Multiplicação de uma distribuição por uma função suave

Definição 4.8. *Se T e ψ são funções suaves em Ω, então $T \cdot \psi$ define uma $\mathcal{D}'(\Omega)$-distribuição por*

$$(T\psi, \phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} T(x)\psi(x)\phi(x)dx \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Note que $(T\psi, \phi)_\Omega = (T, \psi\phi)_\Omega$. Assim se T é uma $\mathcal{D}'(\Omega)$-distibuição e $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, então definimos a distribuição $T\psi$ por

$$(T\psi, \phi)_\Omega = (T, \psi\phi)_\Omega \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

4.2.2 Diferenciação de distribuições

Se T é uma função suave em Ω e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}(D^\alpha T, \phi)_\Omega = \int_{x\in\Omega} (D^\alpha T)\phi dx &= (-1)^{|\alpha|}\int_{x\in\Omega} TD^\alpha \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}(T, D^\alpha\phi)_\Omega.\end{aligned}$$

Se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então, a sequência $D^\alpha\phi_n$ também converge à $D^\alpha\phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Portanto, $(D^\alpha T, \cdot)_\Omega$ é contínua e então, $D^\alpha T$ é uma $\mathcal{D}'(\Omega)$-distribuição bem definida.

Exemplo 4.9. Para a distribuição δ_p temos que

$$(D^\alpha\delta_p, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha\phi)(p) \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Exemplo 4.10. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, a fórmula de integração por partes prova que a derivada da f no sentido das distribuições conincide com a distribuição definida pela sua derivada f' . Por exexmplo, suponha $f(x) = 3x^2 - 1$ em $C^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, então temos que

$$\begin{aligned}(D(3x^2-1), \phi)_\mathbb{R} &= (-1)(3x^2-1, \phi')_\mathbb{R} = -\int (3x^2-1)\phi' dx \\ &= \int (3x^2-1)'\phi dx = \int 6x\phi dx = (6x, \phi)_\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aqui, $D(3x^2-1)$ é a derivada de $(3x^2-1)$ no sentido das distribuições.

Se uma sequência de distribuições $\{T_n\}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge à distribuição T quando $n \longrightarrow \infty$, então $D^\alpha T$ também converge à $D^\alpha T$. Isso segue da definição de topologia fraca em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4.2.3 Convolução

Aqui, será considerado o caso especial onde $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Se T pertence à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e ψ pertence à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então definimos a convolução $T * \psi$ como a função suave

$$(T*\psi)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^N} T(y)\psi(x-y)dy.$$

Como uma distribuição em $\mathbb{R}^N$, temos que

$$\begin{aligned}(T*\psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= \int_{x\in\mathbb{R}^N}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^N} T(y)\psi(x-y)dy\right)\phi(x)dx, \ \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^N}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^N}\psi(x-y)\phi(x)dx\right)dy.\end{aligned}$$

Tomando $\widehat{\psi}(t) = \psi(-t)$, então temos que

$$\begin{aligned}(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= \int_{y \in \mathbb{R}^N} T(y)(\widehat{\psi} * \phi(y) \\ &= (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

Note que $\widehat{\psi} * \phi$ pertence à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pois tanto ψ quanto ϕ pertencem à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Portanto $(T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N}$ está bem definido para T em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Definição 4.11. *Se T é uma $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$-distribuição arbitrária, então definimos*

$$(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \text{ para } \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{\psi} * \phi_n \longrightarrow \widehat{\psi} * \phi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $T * \psi$ está bem definido em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. A Definição 4.11 pode ser feita para o caso em que $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{\psi} * \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Assim a mesma definição pode ser usada para definir a convolução de uma $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$-distribuição T com um elemento ψ de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$.

Se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então um quociente da diferença para ψ converge em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à derivada correspondente de ψ. Então, se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, então

$$D^\alpha \{T * \psi\}(x) = (T(y), (D^\alpha \psi)(x - y))_{y \in \mathbb{R}^N}.$$

Isso mostra que $T * \psi$ é uma função suave em $\mathbb{R}^N$. Pela definição da derivada de uma distribuição, temos também que

$$D^\alpha \{T * \psi\}(x) = (D^\alpha T, \psi(x - y))_{y \in \mathbb{R}^N}.$$

Portanto $D^\alpha \{T * \psi\}$ pode ser escrito tanto como $T * D^\alpha \psi$ ou $D^\alpha T * \psi$. Essa discussão é debatida no próximo lema.

Lema 4.12. *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Então, a distribuição $T * \psi$ é dada pelo pareamento com a função suave*

$$T * \psi(x) = (T(y), \psi(x - y))_{y \in \mathbb{R}^N}.$$

Ainda mais, $D^\alpha \{T * \psi\} = D^\alpha T * \psi = T * D^\alpha \psi$. O operador $\psi \mapsto T * \psi$ é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Usando a linearidade e continuidade de

T, então

$$
\begin{aligned}
(T * \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (T, \widehat{\psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}^N} T(y) \left(\int_{x \in \mathbb{R}^N} \psi(x-y)\phi(x)dx \right) dy \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^N} T(y)\psi(x-y)dy \right) \phi(x)dx \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}^N} (T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N} \phi(x)dx \\
&= \big((T(y), \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}, \phi(x) \big)_{x \in \mathbb{R}^N} .
\end{aligned}
$$

Logo, a distribuição $T * \psi$ é dada por

$$
x \mapsto (T(y, \psi(x-y))_{y \in \mathbb{R}^N}. \tag{4.3}
$$

A Fórmula 4.3 generaliza a fórmula usual de convulução quando T é uma função suave.

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\psi} * D^\alpha \phi)(y) &= \int_{x \in \mathbb{R}^N} \psi(x-y) D^\alpha \phi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{x \in \mathbb{R}^N} D^\alpha \psi(x-y)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} (\widehat{D^\alpha \psi} * \phi)(y),
\end{aligned}
$$

assim, para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

$$
\begin{aligned}
(D^\alpha (T * \psi), \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (-1)^{|\alpha|} (T * \psi, D^\alpha \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= (-1)^{|\alpha|} (T, \widehat{\psi} * D^\alpha \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= (T, \widehat{D^\alpha \psi} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \\
&= (T * D^\alpha \psi, \phi)_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}
$$

Portanto $D^\alpha \{T * \psi\} = D^\alpha T * \psi = T * D^\alpha \psi$ e $T * \psi$ é uma função suave. □

Podemos também definir a convolução de uma $\mathcal{D}'$-distribuição com uma $\mathcal{E}'$-distribuição imitando a Definição 4.11 da convolução de um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ com um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Primeiro, definimos $\widehat{T}$ para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ por

$$
(\widehat{T}, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \widehat{\phi})_{\mathbb{R}^N} \text{ para } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),
$$

com $\widehat{\phi}(t) = \phi(-t)$. Dessa definição temos $\widehat{T}(x) = T(-x)$ quando T é uma função suave. Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $G \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, então a distribuição $T * G$ é definida por

$$
(T * G, \phi)_{\mathbb{R}^N} = (T, \widehat{G} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \text{ para } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).
$$

Como $\widehat{G} * \phi$ é uma função suave com suporte compacto, então o lado direito está bem definido. A mesma definição pode ser usada se T é uma $\mathcal{E}'$-distribuição e G é uma $\mathcal{D}'$-distribuição.

Lema 4.13. *Para* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$*, então* $\delta_0 * T = T$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}(\delta_0 * T, \phi)_{\mathbb{R}^N} &= (\delta_0, \widehat{T} * \phi)_{\mathbb{R}^N} \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\\ &= (\widehat{T} * \phi)(0)\\ &= (\widehat{T}(y), \phi(0-y))_{y\in\mathbb{R}^N}\\ &= (T(y), \widehat{\phi}(-y))_{y\in\mathbb{R}^N}\\ &= (T, \phi)_{\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

Portanto $\delta_0 * T = T$. □

Se T é uma função em $\mathbb{R}^N$, então o Lema 4.13 pode ser estabelecido diretamente usando o Lema 4.12

$$(\delta_0 * T)(x) = (\delta_0(y), T(x-y))_{y\in\mathbb{R}^N} = T(x).$$

O Lema 4.13 mostra que δ_0 representa o operador identidade na convolução. O que será importante mais para frente, onde discutiremos soluções fundamentais para operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes. Além disso, a convolução nos permite mostrar que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é a menor extensão de $\mathcal{D}(\Omega)$ onde a diferenciação está bem definida. Porém, antes de provarmos, precisamos definir uma classe de funções.

Definição 4.14. *Definimos a classe de funções mollifier* $\{\phi_\epsilon : \epsilon > 0\} \subset D^\infty(\Omega)$*, sendo*

$$\phi = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & se|x| < 1\\ 0 & se|x| \geq 1.\end{cases}$$

e

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{\phi(x/\epsilon)}{||\phi||_{L^1(\Omega)}}\phi^{-N}.$$

Teorema 4.15. *Para um conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*,* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é um subconjunto denso de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *com a topologia fraca.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Preenchemos Ω por uma sequência crescente $\{K_n\}$ de conjuntos compactos em Ω. Seja $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ uma função corte igual à 1 em uma vizinhança K_n. Claramente, $\phi_n T$ converge à T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando n tendo ao infinito. Então, é suficiente aproximar qualquer elemento $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ por uma sequência de funções suaves em Ω' onde $\Omega' \subset \Omega$ é uma vizinhança do suporte de T. Seja $\{\phi_\epsilon; \epsilon > 0\}$. Assim, $\phi_\epsilon * \phi \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{E}(\Omega')$ quando

$\epsilon \longrightarrow 0$, provando que ϕ é um elemento de $\mathcal{E}(\Omega)$. Do Lema 4.12, $T * \phi_\epsilon$ é uma função suave cujo suporte está contido em Ω. Das definições, temos que

$$\begin{aligned}(T * \phi_\epsilon, \phi)_{\Omega'} &= (T, \widehat{\phi_\epsilon} * \phi)_{\Omega'} \\ &= (T, \phi_\epsilon * \phi)_{\Omega'} \\ &\to (T, \phi)_{\Omega'}.\end{aligned}$$

Portanto, $T * \phi_\epsilon \longrightarrow T$ em $\mathcal{E}'(\Omega')$, como desejado. □

4.2.4 Produto tensorial

Definição 4.16. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$. Definimos o produto tensorial $T \otimes G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$ por*

$$((T \otimes G)(x, y), \phi(x)\psi(y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^k} = (T, \phi)_{\mathbb{R}^N} \cdot (G, \psi)_{\mathbb{R}^k},$$

para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$. Seja g um elemento de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$. A função

$$x \longmapsto (G(y), g(x, y))_{y\in\mathbb{R}^k} \text{ para } x \in \mathbb{R}^N$$

é uma função suave com suporte compacto. Isso segue do fato que G é linear e o quociente da diferença de $g(x, y)$ na variável x converge em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$ a x-derivada correspondente de $g(x, y)$. Portanto o pareamento

$$(T(x), (G(y), g(x, y))_{y\in\mathbb{R}^k})_{x\in\mathbb{R}^N},$$

está bem definido para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Exemplo 4.17. Considere o produto tensorial de δ_0 em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e 1 em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$. Para $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$, temos que

$$\begin{aligned}(\delta_0 \otimes 1, g(x, y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^k} &= (\delta_0(x), (1(y), g(x, y))_{y\in\mathbb{R}^k})_{x\in\mathbb{R}^N} \\ &= \left(\delta_0(x), \int_{y\in\mathbb{R}^k} g(x, y)dy\right)_{x\in\mathbb{R}^N} \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}^k} g(0, y)dy.\end{aligned}$$

4.2.5 Composição de uma distribuição com um difeomorfismo

Definição 4.18. *Sejam Ω e Ω' conjuntos abertos conexos em $\mathbb{R}^N$ e $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ é um difeomorfismo. Se T é uma função suave de valores complexos em Ω', então $T \circ F$ é uma função* *suave em Ω. Como uma distribuição em Ω, temos que*

$$\begin{aligned}(T \circ F, \phi)_\Omega &= \int_{y \in \Omega} T(F(y))\phi(y)dy \text{ para } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &= \int_{\Omega'} T(x)\phi(F^{-1}(x))|\det DF^{-1}|dx\end{aligned}$$

e, pela mudança de variáveis, tomando $x = F(y)$. Então,

$$(T \circ F, \phi)_\Omega = (T, (\phi \circ F^{-1})|\det DF^{-1}|)_{\Omega'}.$$

Como F é um difeomorfismo, $\det DF^{-1}$ é sempre positivo ou sempre negativo em Ω'. Então, $(\phi \circ F^{-1})|\det DF^{-1}|$ é uma função suave com suporte compacto em Ω'. Portanto, definimos para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a distribuição $T \circ F \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

4.3 Teorema de Extensão de Whitney

Na forma mais simples, o Teorema de Extensão de Whitney estabelece que dada uma sequência infinita qualquer de números reais, existe uma função suave $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f^{(n)}(0) = a_n$ para $n = 0, 1, \cdots$, onde $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada de f. Queremos provar esse teorema junto com sua generalização natural para dimensões maiores. Mas, antes disso, precisamos provar um resultado preliminar da teoria de distribuições.

Teorema 4.19. *Sejam (x, y) coordenadas para $\mathbb{R}^N$ com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{N-k}$. Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ e $\Omega_0 = \{(x, 0) \in \Omega; x \in \mathbb{R}^k\}$. Suponha que T é um elemento de $\mathcal{E}'(\Omega)$ com suporte em Ω_0. Então, existe um inteiro $M \geq 0$ e uma coleção de distribuições $\{T_\alpha \in \mathcal{E}'(\Omega_0); \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k}) \text{ com } |\alpha| \leq M\}$ tais que*

$$T(x, y) = \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{1}{\alpha!} T_\alpha(x) \otimes \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha} \delta_0(y).$$

Demonstração. Como $supp\, T \subset \{y = 0\}$, pelo Lema 4.6 existe um conjunto compacto K em $\mathbb{R}^N$, uma constante $C > 0$ e um inteiro $M \geq 0$ tais que

$$|(T, f)_{\mathbb{R}^N}| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq M \\ (x,0) \in K}} |D^\alpha_{x,y} f(x, 0)| \text{ para } f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N). \tag{4.4}$$

Aqui, $D^\alpha_{x,y}$ é um operador diferencial parcial em x e y de ordem $|\alpha| \leq M$. Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k})$ com $|\alpha| \leq M$, define a distribuição $T_\alpha \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ por

$$(T_\alpha(x), \phi(x))_{x \in \mathbb{R}^k} = (-1)^{|\alpha|}(T(x, y), \phi(x) y^\alpha)_{(x,y) \in \mathbb{R}^N} \text{ para } \phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^k).$$

Afirmamos que $\{T_\alpha\}$ satisfaz os requisitos do teorema.

Dado $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, sua expansão de Taylor na variável y é

$$f(x,y) = \sum_{|\beta| \leq M} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial y^\beta}(x,0) y^\beta + e(x,y).$$

O resto de Taylor e satisfaz

$$(D^\beta_{x,y} e(x,0) = 0 \;\; |\beta| \leq M.$$

De 4.4 temos que

$$(T,f)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{|\beta| \leq M} \frac{1}{\beta!} \left(T(x,y), \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial y^\beta}(x,0) y^\beta \right)_{(x,y)\in\mathbb{R}^N}. \tag{4.5}$$

Por outro lado, da expansão de Taylor de f, temos que

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq M} \frac{1}{\alpha!} T_\alpha \otimes \frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0}{\partial y^\alpha}, f \right)_{\mathbb{R}^N} =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq M} \sum_{|\beta| \leq M} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(T_\alpha(x), \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial y^\beta (x,0)} \right)_{x\in\mathbb{R}^k} \cdot \left(\frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0}{\partial y^\alpha}, y^\beta \right)_{y\in\mathbb{R}^{N-k}}.$$

Claramente,

$$\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0(y)}{\partial y^\alpha}, y^\beta \right)_{y\in\mathbb{R}^{N-k}} = \begin{cases} 0 & \text{se}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-k}) \neq (\beta_1,\ldots,\beta_{N-k}) \\ (-1)^{|\alpha|}\alpha! & \text{se}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-k}) = (\beta_1,\ldots,\beta_{N-k}). \end{cases}$$

Portanto,

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq M} \frac{1}{\alpha!} T_\alpha \otimes \frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0(y)}{\partial y^\alpha}, f \right)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(T_\alpha(x), \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x,0) \right)_{x\in\mathbb{R}^k}.$$

Pela definição T_α, o lado direito é igual à

$$\left(T(x,y), \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x,0) y^\alpha \right)_{(x,y)\in\mathbb{R}^N}.$$

E, por (4.5), temos que

$$(T,f)_{\mathbb{R}^N} = \left(T(x,y), \sum_{|\alpha| \leq M} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x,0) y^\alpha \right)_{(x,y)\in\mathbb{R}^N}.$$

O que completa a prova do teorema. □

Teorema 4.20 (Teorema de Extensão de Whitney). *Suponha que $\mathbb{R}^N$ tenha coordenadas (x,y)*

com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{N-k}$. Seja Ω_0 um conjunto aberto em $\mathbb{R}^k$. Seja a_α é um elemento de $\mathcal{E}(\Omega_0)$ para cada índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k})$ com $\alpha_j \geq 0$, $1 \leq j \leq N-k$. Então, existe uma função $f \in \mathcal{E}(\Omega_0 \times \mathbb{R}^{N-k})$ tal que para cada α

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x, 0) = a_\alpha(x) \text{ para } x \in \Omega_0.$$

Então, a função f é o módulo único do espaço das funções suavem em $\Omega_0 \times \mathbb{R}^{N-k}$ que se anulam em infinita ordem em $\Omega_0 \times \{0\}$.

Demonstração. A unicidade é óbvia. Então, concentraremos em provar a parte da existência.

Se $N = 1$ e $k = 0$, então o teorema se reduz a mostrar que para dada uma sequência de números reais $\{a_0, a_1, \ldots\}$, então existe uma função suave $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$f^{(n)}(0) = a_n, \text{ para } n = 0, 1, \ldots.$$

Isso pode ser feito explicitamente pela primeira escolha de uma função corte, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ com

$$\phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |y| \geq 2. \end{cases}$$

Então, seja

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n y^n}{n!} \phi(\epsilon_n^{-1} y). \tag{4.6}$$

Então, existe ϵ_n tal que para qualquer inteiro $\alpha \geq 0$

$$\left| D_y^\alpha \left\{ \frac{a_n y^n}{n!} \phi(\epsilon_n^{-1} y) \right\} \right| \leq C 2^{-n}$$

onde C é uma constante uniforme dependendo somente de α. Portanto, a soma em 4.6 converge na topologia de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Desde que $\phi \equiv 1$ em uma vizinhança da origem, $f^{(n)}(0) = a_n$, para $n = 0, 1, \ldots$, como desejado.

Consideremos o espaço

$$\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$$

onde $\prod_\alpha$ denota o produto cartesiano infinito indexado por $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-k})$ onde cada α_i é um inteiro não negativo. Elementos desse espaço são ênuplas (a_α) onde cada a_α é um elemento de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$. Esse espaço é dado pela topologia produto, ou seja, uma sequência (a_α^n) para $n = 1, \ldots$ é dita convergir à (a_α) em $\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ quando $n \to \infty$ se cada cada fixado α, $a_\alpha^n \to a_\alpha$ em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$. Isso torna $\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ um espaço de Fréchet. Defina a aplicação π :

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}) \longrightarrow \prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ por

$$(\pi f)_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x,0) \text{ para cada } \alpha.$$

Queremos mostra que a aplicação π é sobrejetiva. Olhando para o subespaço dos polinômios em $\mathbb{R}^N$, é claro da definição da topologia de $\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ que a imagem de π é densa. Então, é suficiente provar que a imagem de π é fechada. Pelo Teorema da Imagem Fechada para Espaços de Fréchet, é suficiente provar que a imagem do dual à π

$$\pi' : \left\{\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)\right\}' \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$$

é fechado. Aqui, π' é definido por

$$(\pi'(T), f)_{\mathbb{R}^N} = (T, \pi f)$$

para $T \in \left\{\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)\right\}'$ e $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$\left\{\prod_\alpha \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)\right\}' = \sum_\alpha \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$$

, onde, pela definição, os elementos de $\sum_\alpha \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ são ênuplas infinitas (T_α)com $T_\alpha \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ tal que somente um número finito dos T_α são não negativos. Um elemento (T_α) em $\sum_\alpha \mathcal{E}'(\mathbb{R}^k)$ age em um elemento $(f_\beta) \in \prod_\beta \mathcal{E}(\mathbb{R}^k)$ por

$$((T_\alpha), (f_\beta)) = \sum_\alpha (T_\alpha, f_\alpha)_{\mathbb{R}^k}.$$

A soma na direita está bem definida desde que somente um número finito dos T_α são não negativos.

Agora computaremos π'. Temos que

$$\begin{aligned} (\pi'\{(T_\alpha)\}, f)_{\mathbb{R}^N} &= ((T_\alpha), \pi f) \\ &= \sum_\alpha \left(T_\alpha(x), \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y^\alpha}(x,0)\right)_{x\in\mathbb{R}^k} \\ &= \sum_\alpha \left(T_\alpha(x) \otimes \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0(y)}{\partial y^\alpha}, f(x,y)\right)_{(x,y)\in\mathbb{R}^N}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\pi'\{(T_\alpha)\}(x,y) = \sum_\alpha T_\alpha(x) \otimes \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}\delta_0(y)}{\partial y^\alpha}$$

cujo tem seu suporte no conjunto $\Omega_0 = \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}^k\right\}$. Essa equação junto do Teorema

4.19 implica que o imagem de π' é o conjunto de todos os elementos em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k})$ cujo suporte está contido em Ω_0. Esse conjunto de distribuições é fechado com respeito à topologia fraca em $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k})$. Como mencionado anteriormente, o Teorema da Imagem Fechada implica que o imagem de π é fechado. Como π também tem imagem densa, π precisa ser sobrejetiva e então, a prova do teorema está completa. $\square$

4.4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Como mencionado no começo deste capítulo, uma das razões para introdução da teoria de distribuições é que ela provém uma linguagem conveniente no estudo de soluções para equações diferenciais parciais. Começaremos definindo uma solução fundamental para um operador diferencial parcial com coeficiente constante

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \text{ com } a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Definição 4.21. *$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fundamental para $P(D)$ se*

$$P(D)\{T\} = \delta_0.$$

A razão para o nome "solução fundamental", é que uma solução para a equação $P(D)\{u\} = \phi$ para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pode ser encontrado pela convolução com T, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 4.22. *Seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes. Suponha que T é uma solução fundamental para $P(D)$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então $u = T * \phi$ é uma solução para a equação diferencial $P(D)\{u\} = \phi$.*

Demonstração. Dos lemas 4.12 e 4.13, temos que

$$P(D)\{T * \phi\} = (P(D)\{T\}) * \phi = \delta_0 * \phi = \phi.$$

Portanto, $P(D)\{T * \phi\} = \phi$, como desejado. $\square$

Se $P(D)$ tem coeficientes variáveis, então o teorema não é válido. Isso se dá pois o passo $P(D)\{T * \phi\} = (P(D)\{T\} * \phi$ não é válido, aplicada as derivadas em T, integração por partes é requirida e expressões envolvendo as derivadas dos coeficientes de $P(D)$ irão aparecer.

Teorema 4.23. *A distribuição $T(z) = \dfrac{1}{\pi z}$ é uma solução fundamental para o operador de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Note que $T(z) = \dfrac{1}{\pi z}$ é uma função localmente integrável em $\mathbb{C}$ e então, T define um elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$. Para provar esse teorema, devemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\frac{1}{\pi z}\right\} &= \delta_0 \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left\{\frac{1}{\pi z}\right\}, \phi\right)_{\mathbb{C}} &= (\delta_0, \phi)_{\mathbb{C}} \\
\Longleftrightarrow -\left(\frac{1}{\pi z}, \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}}\right)_{\mathbb{C}} &= (\delta_0, \phi)_{\mathbb{C}},
\end{aligned}$$

que é equivalente à

$$-\int_{z\in\mathbb{C}}\int \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z}} \frac{1}{\pi z} dxdy = \phi(0) \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}). \tag{4.7}$$

Escolhendo R de tal forma que $supp\phi \subset \{|z| < R\}$. Então, para $0 < \epsilon < R < \infty$, definimos o disco

$$\triangle_{R,\epsilon} = \{z \in \mathbb{C}; \epsilon < |z| < R\}.$$

Pelo Teorema de Stokes, temos que

$$\int_{\partial \triangle_{R,\epsilon}} \frac{\phi(z)dz}{2\pi i z} = \int_{\triangle_{R,\epsilon}}\int d\left\{\frac{\phi(z)dz}{2\pi i z}\right\}. \tag{4.8}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\phi(z)}{2\pi i z}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\phi(z)}{2\pi i z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial x}\frac{1}{2\pi i z} + i\frac{\partial \phi(z)}{\partial y}\frac{1}{2\pi i z}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i z}\left(\frac{\partial \phi(z)}{\partial x} + i\frac{\partial \phi(z)}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i z}\frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z}}.
\end{aligned}$$

Aplicando na Equação 4.8, temos que

$$\int_{\triangle_\epsilon}\int \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\phi(z)}{2\pi i z}\right) 2idxdy = \int_{\triangle_\epsilon}\int \frac{1}{\pi z}\frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z}} dxdy. \tag{4.9}$$

A curva $\partial \triangle_{\epsilon,R}$ é orientada como o bordo do conjunto aberto $\triangle_{\epsilon,R}$, o que significa que $\{|z| = R\}$ é orientada no sentido anti-horário e $\{|z| = \epsilon\}$ é orientada no sentido horário.

Como $d = \partial + \overline{\partial}$ e $\phi = 0$ em $\{|z| = R\}$, das equações 4.8 e 4.9 temos que

$$-\oint_{\{|z|=\epsilon\}} \frac{\phi(z)dz}{2\pi i z} = \int_{\triangle_{\epsilon,R}} \int \frac{1}{\pi z} \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z}} dxdy. \tag{4.10}$$

Note que $\phi = 0$ em $\{|z| \geq R\}$ os discos $\triangle_\epsilon$ são conjuntos encaixados, isto é, quando $\epsilon_1 < \epsilon_2$ tem-se $\triangle_{\epsilon_2} \subset \triangle_{\epsilon_1}$. Ainda temos que $\bigcup_{0<\epsilon<R} \triangle_\epsilon = \{|z| < R\} - \{0\}$. Como o integrando é localmente integrável em $\mathbb{C}$ e adicionando o ponto $z = 0$ não altera o valor da integral, quando $\epsilon \longrightarrow 0$, o lado direito da equação 4.10 converge para

$$\int_{\mathbb{C}} \int \frac{1}{\pi z} \frac{\partial \phi(z)}{\partial \overline{z}} dxdy.$$

Pela parametrização de $\{|z| = \epsilon\}$ por $z = \epsilon e^{it}$, então temos do lado esquerdo da equação 4.10

$$-\oint_{\{|z|=\epsilon\}} \frac{\phi(z)dz}{2\pi i z} = -\int_0^{2\pi} \frac{\phi(\epsilon e^{it})}{2\pi i \epsilon e^{it}} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon e^{it}) dt.$$

Da continuidade de ϕ em 0, dado $\zeta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(0)| < \zeta.$$

Em particular,

$$|\epsilon e^{it}| < \delta \Rightarrow |\phi(\epsilon e^{it}) - \phi(0)| < \zeta.$$

Logo, se $|\epsilon e^{it}| < \delta$ então,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon e^{it}) dt - \phi(0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon e^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(0) dt \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon e^{it}) - \phi(0) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(\epsilon e^{it}) - \phi(0)| dt \\
&< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta dt = \zeta.
\end{aligned}$$

Portanto, o lado esquerdo da Equação 4.10 converge à $-\phi(0)$ quando $\epsilon \to 0$. O que prova a Equação 4.7 e, em consequência, prova o teorema. $\square$

Teorema 4.24. *Seja*

$$T(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & se\ \ N=2 \\ \frac{1}{(2-N)\omega_{N-1}}|x|^{2-N} & se\ \ N\geq 3. \end{array} \right\},$$

onde $\omega_{N-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$ *é o volume da esfera unitária em* $\mathbb{R}^N$*. Então,* T *é uma solução fundamental para o Laplaciano* $\triangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$ *em* $\mathbb{R}^N$*.*

Demonstração. Para $N=2$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

implicando em

$$\triangle = 4\left(\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}\right).$$

Além disso, sabe-se que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2\pi}\log|z|\right\} = \frac{1}{4\pi z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

e assim, segue do Teorema 4.23 que

$$\begin{aligned} \triangle\left\{\frac{1}{2\pi}\log|z|\right\} &= 4\left(\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}\partial z}\right)\left\{\frac{1}{2\pi}\log|z|\right\} \\ &= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{4\pi z}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_0. \end{aligned}$$

O que prova o teorema para $N=2$. Já para $N \geq 3$, devemos mostrar que

$$\triangle\{T\} = \delta_0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
(\triangle\{T\},\phi)_{\mathbb{R}^N} &= \left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\{T\},\phi\right)_{\mathbb{R}^N}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\right)\{T\},\phi)_{\mathbb{R}^N}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(T,\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\phi\right)_{\mathbb{R}^N}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_j^2}dx\right)\\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x_j^2}\right)dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{x\in\mathbb{R}^N} T(x)\triangle\phi(x)dx = \phi(0),\ \ \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Tomando $0 < R < \infty$ de forma que $supp\ \phi \subset \{|x| < R\}$ e $0 < \epsilon < R$ e definindo o disco $\triangle_\epsilon = \left\{x\in\mathbb{R}^N; \epsilon < |x| < R\right\}$. Aplicando a Fórmula de Green em $\triangle_\epsilon$ com $u = T$ e $v = \phi$.

Tem-se que $\triangle T = 0$. Com efeito,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(|x|^{2-N}) = \frac{(2-N)}{|x|^N}\left(1 - \frac{Nx_j^2}{|x|^2}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\triangle(|x|^{2-N}) &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(|x|^{2-N}) = \frac{(2-N)}{|x|^N}\left(N - \frac{N|x|^2}{|x|^2}\right) = 0\\
&\Rightarrow\ \triangle T = \frac{1}{(2-N)\omega_{N-1}}\triangle(|x|^{2-N}) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, da Fórmula de Green, temos que

$$\int_{\triangle_\epsilon} T(x)\triangle\phi(x)dx = \int_{\partial\triangle_\epsilon}[T(x)(\mathbb{N}\phi)(x) - \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)]d\sigma(x), \tag{4.11}$$

onde $\mathbb{N}$ é o vetor normal unitário externo ao campo $\partial\triangle_\epsilon$. Sabemos que $\phi = 0$ em uma vizinhança de $\{|x| = R\}$ pela escolha de R. Logo, na equação 4.11 temos

$$\int_{\triangle_\epsilon} T(x) \triangle \phi(x)dx = \int_{\{|x|=R\}} [T(x)(\mathbb{N}\phi)(x) - \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)]d\sigma(x). \tag{4.12}$$

Analogamente ao que foi feito no Teorema 4.23, como T é localmente integrável em $\mathbb{R}^N$, tem-se

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\triangle_\epsilon} T(x) \triangle \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} T(x) \triangle \phi(x)dx.$$

Por outro lado, note que $|T(x)| \leq c|x|^{2-N} = c\epsilon^{2-N}$ em $\{|x| = \epsilon\}$, onde c é constrante. Assim,

$$\left| \int_{\{|x|=\epsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x) \right| \leq \int_{\{|x|=\epsilon\}} |\mathbb{N}\phi(x)|d\sigma(x)c\epsilon^{2-N}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $|\mathbb{N}\phi(x)|$ e como $\{|x| = \epsilon\}$ é compacto,

$$\left| \int_{\{|x|=\epsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x) \right| \leq \max_{|x|=\epsilon} | \bigtriangledown \phi(x)| \int_{\{|x|=\epsilon\}} d\sigma(x)c\epsilon^{2-N} = c_2\epsilon^{N-1}\epsilon^{2-N} = c_2\epsilon.$$

Logo,

$$\left| \int_{\{|x|=\epsilon\}} T(x)\mathbb{N}\phi(x)d\sigma(x) \right| \longrightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(|x|^{2-N}) = \dfrac{(2-N)x_j}{|x|^N}$, assim

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}T(x) &= -\left\langle \bigtriangledown T(x), \left(\frac{\partial |x|}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial |x|}{\partial x_N}\right) \right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{1}{\omega_{N-1}} \left(\frac{x_1}{|x|^N}, \dots, \frac{x_N}{|x|^N}\right), \left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_N}{|x|}\right) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{\omega_{N-1}} \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^2}{|x|^{N+1}} \\
&= -\frac{1}{\omega_{N-1}} \frac{|x|^2}{|x|^{N+1}} = -\frac{1}{\omega_{N-1}}|x|^{1-N}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$-\int_{\{|x|=\epsilon\}} \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)d\sigma(x) = \frac{\epsilon^{1-N}}{\omega_{N-1}} \int_{\{|x|=\epsilon\}} \phi(x)d\sigma(x).$$

Fazendo a mudança de variável em $x = \epsilon z$, temos no lado direito

$$-\int_{\{|x|=\epsilon\}} \phi(x)(\mathbb{N}T)(x)d\sigma(x) = \frac{1}{\omega_{N-1}} \int_{\{|z|=1\}} \phi(\epsilon z)d\sigma(z).$$

Pela continuidade de ϕ em $x = 0$, o lado direito converge à $\phi(0)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. O que prova o teorema. $\square$

5 CORRENTES

A grosso modo, correntes estão para formas como distribuições estão para funções.

Vamos considerar dois espaços de formas. Para um subconjunto aberto de Ω de uma variedade suave, sejam

$\mathcal{E}^r(\Omega)$ o espaço das formas diferenciais suaves de grau r;

$\mathcal{D}^r(\Omega)$ o espaço dos elementos em $\mathcal{E}^r(\Omega)$ com suporte compacto.

O espaço $\mathcal{E}^r(\Omega)$ é munido da seguinte topologia: em coordenadas locais, $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_N) : U \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$, uma sequência $f_n \in \mathcal{E}^r(\Omega) n = 1, \ldots$, pode ser escrita como

$$f_n(x) = \sum_{|I|=r} f_n^I(x) dx^I,$$

onde cada f_n^I é um elemento de $\mathcal{E}(U)$. Dizemos que f_n converge à $f = \sum_{|I|=r} f^I dx^I$ no arranjo de coordenadas U se cada função componente f_n^I converge à f^I quando $n \to \infty$ na topologia de $\mathcal{E}(U)$, ou seja, convergência uniforme em conjuntos compactos em cada derivada. A sequência $f_n \in \mathcal{E}^r(\Omega)$ é dita convergir à forma f em $\mathcal{E}^r(\Omega)$ se f_n converge para f em cada arranjo de coordenadas U de Ω. Essa definição de convergência independe da escolha da carta.

A topologia de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é definida analogamente. Aqui, uma sequência ϕ_n, $n = 1, \ldots$ é dita convergiar à ϕ em $\mathcal{D}^r(\Omega)$ se existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ com $supp\ \phi_n \subset K$ para $n = 1, \ldots$ e cada derivada das funções coeficientes de ϕ_n converge para a derivada correspondente a função coeficiente de ϕ.

Definição 5.1. *Para um conjunto aberto Ω de uma variedade suave, o espaço dual de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é denotado por $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ e é chamado de espaço de correntes de dimensão r. Da mesma forma, o espaço dual de $\mathcal{E}^r(\Omega)$ é denotado por $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$.*

O espaço dual de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é o espaço de todos os funcionais lineares complexos contínuos definidos em $\mathcal{D}^r(\Omega)$. Como $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é um subespaço de $\mathcal{E}^r(\Omega)$ e como a aplicação inclusão é contínua, claramente $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$ é um subespaço de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$.

O pareamento entre elementos de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ e $\mathcal{D}^r(\Omega)$ é denotado por $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$. Ocasionalmente, enfatizamos a variável em Ω escrevendo

$$\langle\, T(x), f(x)\, \rangle_{x\in\Omega} = \langle\, T, f\, \rangle_\Omega \quad para\ \ T \in \{\mathcal{D}^r(\Omega)\}', f \in \mathcal{D}^r(\Omega).$$

Exemplo 5.2. Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $T = T_J dx^J$ uma forma de grau $N - r$. Suponha $T_J : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ localmente integrável. T pode ser visto como uma corrente $\mathcal{D}^r(\Omega)$ pela definição

$$\langle\, T, f\, \rangle_\Omega = \int_{x\in\Omega} T(x) \wedge f(x) \ \text{ com }\ f \in \mathcal{D}^r(\Omega).$$

$T \wedge f$ é uma forma de grau N em Ω com coeficientes integráveis e assim o lado direito está bem definido.

Se $f = f_I dx^I$, $|I| = r$, para alguma função $f_I \in \mathcal{D}(\Omega)$, então

$$\langle\, T, f\,\rangle_\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se } \; dx^J \wedge dx^I = 0 \\ (-1)^{\epsilon_{IJ}} & \text{se } \; dx^J \wedge dx^I \neq 0. \end{cases}$$

onde $(-1)^{\epsilon_{IJ}}$ é definido por

$$dx^J \wedge dx^I = (-1)^{\epsilon_{IJ}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N.$$

Note que $\int_\Omega T_J f_I dx$ é a mesma do pareamento entre a distribuição $T_J \in \mathcal{D}'(\Omega)$ com a função $f_I \in \mathcal{D}(\Omega)$. Assim, correntes possuem uma ligação estrita com distribuições, como veremos em uma lema posterior.

Exemplo 5.3. Considere o ponto $p \in \mathbb{R}^N$. Então, $[p]$ é uma corrente em $\left\{\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^N)\right\}'$ definindo

$$\langle\, [p], f\,\rangle_{\mathbb{R}^N} = f(p) \;\text{ para }\; f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^N).$$

Esse exemplo é análogo a função delta de p dada no capítulo anterior.

Exemplo 5.4. Seja M uma subvariedade orientada de $\mathbb{R}^N$ de dimensão r. Então, $[M]$ pode ser vista como uma corrente em $\{\mathcal{D}^r(M)\}'$ com a definição

$$\langle\, [M], f\,\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_M f \;\text{ para }\; f \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R}^N).$$

Se M for compacto, então podemos tomar $f \in \mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N)$ e nesse caso $[M]$ é um elemento de $\left\{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N)\right\}'$.

Os últimos dois exemplos ilustram a razão do espaço $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ ser chamado de espaço das correntes de dimensão r. Um exemplo básico de que uma corrente é dada pela integração sobre uma subvariedade r-dimensional.

Definição 5.5. *Seja Ω um subconjunto aberto de uma variedade orientada N-dimensional e seja $0 \leq q \leq N$. Definimos $\mathcal{D}'^q(\Omega)$ o espaço das q-formas cujo coeficientes são $\mathcal{D}'(\Omega)$-distribuições. Esse espaço será chamado de espaço das correntes de grau q. Da mesma forma, definimos $\mathcal{E}'^q$ o espaço das q-formas cujo coeficientes são $\mathcal{E}'(\Omega)$-distribuições.*

Lema 5.6. *Seja Ω um subconjunto aberto de uma variedade orientada N-dimensional e seja $0 \leq r \leq N$. Então, $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ é isomorfo à $\mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$.*

Demonstração. Nos concentremos primeiro no caso em que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Dados $T = T_J dx^J \in \mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$ e $f = f_I dx^I \in \mathcal{D}^r(\Omega)$, definimos T como uma corrente em

$\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ por

$$\langle\, T, f\,\rangle_\Omega = \begin{cases} \quad 0 & \text{se} dx^I \wedge dx^J = 0 \\ (-1)^{\epsilon_{IJ}} & \text{se} dx^I \wedge dx^J \neq 0. \end{cases}$$

onde $(-1)^{\epsilon_{IJ}}$ é definido por $dx^I \wedge dx^J = (-1)^{\epsilon_{IJ}} dx$, assim como no exemplo 5.2. Como T_J é uma $\mathcal{D}'(\Omega)$-distribuição e F_I é um elemento de $\mathcal{D}(\Omega)$, claramente o lado direito está bem definido. Portanto, qualquer corrente de grau $N-r$ pode ser considerado como um elemento de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$.

Reciprocamente, suponha T um elemento de $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$. Para qualquer multi-índice crescente J de comprimento $N-r$, defina a distribuição $T_J \in \mathcal{D}(\Omega)$ por

$$(T_J, \phi)_\Omega = \left\langle\, T, \phi dx^{J'} \,\right\rangle_\Omega \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

onde J' é o multi-índice crescente de comprimento r formada pelos índices $\{1, \ldots, N\}$ que não pertencem à J. Assim, obtemos que

$$T = \sum_{|J|=N-r} (-1)^{\epsilon_{IJ}} T_J dx^J.$$

A prova do lema para variedades orientadas é a mesma. Nesse caso, a forma dx é substituída pela forma do volume $d\sigma$. □

Agora descreveremos os exemplos 5.2, 5.3 e 5.4, pelo ponto de vista do Lema 5.6. O Exemplo 5.2 já é apresentado com os coeficientes sendo distribuições. Para o Exemplo 5.3, temos que

$$\langle\, [p], f\,\rangle_{\mathbb{R}^N} = f(p) = (\delta_p, f)_{\mathbb{R}^N},$$

logo $[p] = \delta_p dx \in \mathcal{E}'^N(\mathbb{R}^N)$. Para o Exemplo 5.4, suponha que M é uma fronteira suave de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com a orientação usual. Considere $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N; \rho(x) < 0\right\}$ onde $\rho : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave e que $|\bigtriangledown \rho| = 1$ em M. Seja μ_M a medida de Hausdorff de dimensão $(N-1)$ em M.

Afirmamos que

$$[M] = \mu_M d\rho,$$

exibe M como uma corrente de grau 1.

Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então

$$(\mu_M, \phi)_{\mathbb{R}^N} = \int_M \phi d\sigma,$$

onde $d\sigma$ é a forma do volume em M. Como $|\bigtriangledown \rho| = 1$ em M

$$d\sigma = \bigtriangledown \rho \lrcorner\, dx.$$

Seja $g = \phi dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$ com $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Das definições, temos que

$$\begin{aligned} \langle\, \mu_M d\rho, g \,\rangle_{\mathbb{R}^N} &= (-1)^{j-1}\left(\mu_M, \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)_{\mathbb{R}^N} \\ &= (-1)^{j-1}\int_M \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}d\sigma. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g &= (\bigtriangledown\rho \lrcorner\, d\rho)\, g \;\; (\text{como } \;|\bigtriangledown \rho| = 1) \\ &= \bigtriangledown\rho \lrcorner\, (d\rho \wedge g) + d\rho \wedge (\bigtriangledown\rho \lrcorner\, g), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da regra do produto para $\lrcorner$

Como $j^* d\rho = 0$ em M onde $j : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é a aplicação inclusão, temos que

$$\begin{aligned} \langle\, [M], g \,\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \int_M g \\ &= \int_M \bigtriangledown\rho \lrcorner\, (d\rho \wedge g). \end{aligned}$$

Inserindo $g = \phi dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N$ e usando $d\sigma = \bigtriangledown\rho \lrcorner\, dx$, obtemos que

$$\langle\, [M], g \,\rangle_{\mathbb{R}^N} = (-1)^{j-1}\int_M \phi\frac{\partial\rho}{\partial x_j}d\sigma.$$

Logo, $[M] = \mu_M d\rho$. Analogamente, se
$M = \big\{x \in \mathbb{R}^N; \rho_1(x) = \cdots = \rho_d(x) = 0\big\}$, então a corrente $[M]$ é dado por

$$\mu_M \alpha d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d$$

onde $\alpha = |d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$ ou $-|d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$ dependendo da orientação dada em M.

5.1 Operações com Correntes

Analogamente à Teoria de Distribuições, as definições das operações com correntes são motivadas considerando o caso em que a corrente é uma forma suave.

5.1.1 Produto Exterior de uma Corrente com uma Forma Suave

Se T é uma forma suave de grau q em Ω e f é uma forma suave de grau r em Ω, então $T \wedge f$ é uma forma suave de grau $q + r$. Como corrente em Ω

$$\begin{aligned} \langle\, T \wedge f, \phi \,\rangle_\Omega &= \int_\Omega (T \wedge f) \wedge \phi \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{D}^{N-q-r}(\Omega) \\ &= \langle\, T, f \wedge \phi \,\rangle_\Omega \,. \end{aligned}$$

Definimos $T \wedge f$ para uma corrente $T \in \mathcal{D}'^q(\Omega)$ e uma forma suave $f \in \mathcal{E}^r(\Omega)$ pela fórmula

$$\langle\, T \wedge f, \phi \,\rangle_\Omega = \langle\, T, f \wedge \phi \,\rangle_\Omega \ \text{ para } \ \phi \in mathcalD^{N-q-r}(\Omega).$$

O resultado, $T \wedge f$, é uma corrente em $\mathcal{D}'^{q+r}(\Omega)$.

5.1.2 Derivada Exterior

Suponha que T é uma forma suave de grau $N - r$ e seja $\phi \in \mathcal{D}^{r-1}(\Omega)$. Então, dT é um elemento de $\mathcal{E}^{N-r+1}(\Omega)$ e

$$\langle\, dT, \phi \,\rangle_\Omega = \int_\Omega dT \wedge \phi.$$

Pela Regra do Produto para a Derivada Exterior, temos que

$$\langle\, dT, \phi \,\rangle_\Omega = \int_\Omega d(T \wedge \phi) + (-1)^{N-r+1} \int_\Omega T \wedge d\phi.$$

Como $T \wedge \phi$ tem suporte compacto em Ω, a primeira integral do lado direito se anula pelo Teorema de Stokes. Então,

$$\begin{aligned} \langle\, dT, \phi \,\rangle_\Omega &= (-1)^{N-r+1} \int_\Omega T \wedge d\phi \\ &= (-1)^{N-r+1} \langle\, T, d\phi \,\rangle_\Omega \,. \end{aligned}$$

Portanto, definimos dT para $T \in \mathcal{D}'^{N-r}(\Omega)$ pela fórmula

$$\langle\, dT, \phi \,\rangle_\Omega = (-1)^{N-r+1} \langle\, T, d\phi \,\rangle_\Omega \ \text{ para } \ \phi \in \mathcal{D}^{r-1}(\Omega).$$

Note que a derivada exterior aumenta um grau da corrente e, por outro lado, diminui uma dimensão do espaço.

Suponha que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Se $T = T_I dx^I$, $|I| = N - r$, e $T_I \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então, uma expressão equivalente para dT é dada por

$$dT = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial T_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx^I$$

onde $\dfrac{\partial T_I}{\partial x_j}$ é a derivada de T_I no sentido das distribuições. Essa fórmula generaliza a derivada exterior usual para formas suaves. Como com distribuições, se $T_n \longrightarrow T$ em $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ então, a sequência dT_n converge à dT em $\{\mathcal{D}^{r-1}(\Omega)\}'$.

Teorema 5.7. *Suponha que M é uma subvariedade orientada de dimensão r com o bordo contido em uma variedade suave X de dimensão N. Então, $d[M] = (-1)^{N-r+1}[\partial M]$.*

Demonstração. A prova seguirá do Teorema de Stokes. Suponha que ϕ é um elemento de $\mathcal{D}^{r-1}(X)$. Então,

$$\begin{aligned} \langle\, d[M], \phi \,\rangle_X &= (-1)^{N-r+1} \langle\, [M], d\phi \,\rangle_X \\ &= (-1)^{N-r+1} \int_M d\phi \\ &= (-1)^{N-r+1} \int_{\partial M} \phi \quad (\text{TeoremadeStokes}) \\ &= (-1)^{N-r+1} \langle\, [\partial M], \phi \,\rangle_X , \end{aligned}$$

como desejado. □

Para um subconjunto aberto Ω de uma variedade complexa, relembremos que $d = \partial + \overline{\partial}$ onde $\partial : \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q}(\Omega)$ e $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(\Omega)$ são definidos por $\partial = \pi^{p+1,q} \circ d$ e $\overline{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d$. Essas mesmas fórmulas extendem a definição de ∂ e $\overline{\partial}$ à correntes. Da definição da derivada exterior de uma corrente, se $T \in \mathcal{D}'^{p,q}(\Omega)$ então,

$$\langle\, \partial T, \phi \,\rangle_\Omega = (-1)^{p+q+1} \langle\, T, \partial\phi \,\rangle_\Omega \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}^{n-p-1,n-q}(\Omega)$$

$$\left\langle\, \overline{\partial} T, \phi \,\right\rangle_\Omega = (-1)^{p+q+1} \left\langle\, T, \overline{\partial}\phi \,\right\rangle_\Omega \quad \text{para} \quad \phi \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-1}(\Omega).$$

Exemplo 5.8. Suponha que Ω é um conjunto aberto dado por $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) < 0\}$ onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com $|\bigtriangledown \rho| = 1$ em $\partial\Omega$. A corrente $[\Omega]$ tem grau 0 e dimensão $2n$. Do Teorema 5.7, temos que

$$d[\Omega] = -[\partial\Omega].$$

Logo,

$$\partial[\Omega] = -[\partial\Omega]^{1,0} \;\text{ e }\; \overline{\partial}[\Omega] = -[\partial\Omega]^{0,1}.$$

Note que

$$\begin{aligned}\left\langle\, [\partial\Omega]^{1,0}, \phi \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n} &= \left\langle\, [\partial\Omega], \phi^{n-1,n} \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n} \quad \text{para } \phi \in \mathcal{D}^{2n-1}(\mathbb{C}^n)\\ &= \int_{\partial\Omega} \phi^{n-1,n}\end{aligned}$$

e

$$\left\langle\, [\partial\Omega]^{0,1}, \phi \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n} = \left\langle\, [\partial\Omega], \phi^{n,n-1} \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n} = \int_{\partial\Omega} \phi^{n,n-1}.$$

Assim, o pareamento entre $[\partial\Omega]^{0,1}$ e uma forma ϕ de grau $2n-1$ é a mesmo como a integral usual sobre $\partial\Omega$ de ϕ de bigrau $n, n-1$.

5.1.3 Push Forward de uma Corrente sobre uma Aplicação Suave

Suponha que Ω e Ω' sejam conjuntos abertos de variedades suaves, e seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação suave. O operador *pull back* $F^* : \mathcal{E}^r(\Omega') \longrightarrow \mathcal{E}^r(\Omega)$ pode ser dualizado para obter uma aplicação definida em correntes.

Definição 5.9. *Seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação suave. Para $T \in \{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$ o push forward de T via F, denotado por F_*T, é a corrente em $\{\mathcal{E}^r(\Omega')\}'$ definida por*

$$\langle\, F_*T, \phi \,\rangle_{\Omega} = \langle\, T, F^*\phi \,\rangle_{\Omega}\,, \quad \text{para } \phi \in \mathcal{E}^r(\Omega').$$

Como $F^*\phi$ é um elemento de $\mathcal{E}^r(\Omega)$, o lado direito dessa definição está bem definido. Ainda mais, se $\phi_n \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{E}^r(\Omega')$ então, $F^*\phi_n \longrightarrow F^*\phi$ em $\mathcal{E}^r(\Omega)$ e então, F_*T é um funcional linear contínuo em $\mathcal{E}^r(\Omega')$. Assim, F_*T está bem definido como uma $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$-corrente.

O *push forward* preserva dimensão, mas não grau, pois F^* preserva grau. Note que $F^*\phi$ não necessariamente tem suporte compacto quando ϕ tem suporte compacto. Por esta razão, o *push forward* de um elemento em $\{\mathcal{D}^r(\Omega)\}'$ não está bem definido.

Para funções suaves F e G temos que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ em formas. Portanto, temos que $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$.

Exemplo 5.10. Suponha que M e M' são subvariedades orientadas suaves de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^{N'}$, respectivamente. Seja $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ uma aplicação suave bijetiva que preserva orientação com $M' = F\{M\}$. Então, $F_*[M] = [M']$ pois

$$\begin{aligned}\langle\, F_*[M], \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^{N'}} &= \langle\, [M], F^*\phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad \text{para } \phi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^{N'})\\ &= \int_M F^*\phi\\ &= \int_{M'} \phi \quad \text{(como } F \text{ preserva orientação)}\\ &= \langle\, [M'], \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^{N'}}\,.\end{aligned}$$

Exemplo 5.11. Suponha que $\pi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é a projeção $\pi(x,y) = y$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^k$. Vamos computar π_* no subespaço $\mathcal{D}^{N+k+r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k) \subset \left\{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k\right\}'$. Para $T \in \mathcal{D}^{N+k-r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k)$ e $\phi \in \mathcal{D}^r(\mathbb{R}^k)$

$$\begin{aligned}\langle \pi_* T, \phi \rangle_{\mathbb{R}^k} &= \langle T, \pi^* \phi \rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^k} T \wedge \pi^* \phi \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^k} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^N} T(x,y) \right) \wedge \phi(y).\end{aligned}$$

A integral interior de x é zero a menos que todos os dx estejam presentes. Então, escrevemos

$$T(x,y) = \sum_{r=0}^{N} \sum_{|I|=r} dx^I \wedge T_I(x,Y),$$

onde cada T_I é a forma nas y-variáveis com coeficientes que dependem de x e y. Com essa notação, temos que

$$\int_{x \in \mathbb{R}^N} T(x,Y) = \int_{x \in \mathbb{R}^N} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge T_{1\ldots N}(x,y).$$

Todos os x e dx são integrados deixando uma forma diferencial em y. Assim, temos que

$$\langle \pi_* T, \phi \rangle_{R^k} = \left\langle \int_{x \in \mathbb{R}^N} T(x,y), \phi(y) \right\rangle_{y \in \mathbb{R}^k},$$

e então,

$$(\pi_* T)(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^N} T(x,y) \text{ para } y \in \mathbb{R}^k.$$

Portanto, o *push forward* sob π é o mesmo que a operação de integral de π.

Lema 5.12. *Defina* $\tau : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *por* $\tau(y,x) = x - y$. *Se* $T \in \mathcal{D}^{2N-r}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \subset \left\{\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)\right\}'$, *então*

$$(\tau_* T)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^N} (s^* T)(y,x),$$

onde $s : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *é definido por* $s(y,x) = (y, x+y)$.

Demonstração. Suponha que ϕ é um elemento de $\mathcal{D}^r(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}\langle\, \tau_* T, \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \langle\, T, \tau^* \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} T \wedge \tau^* \phi.\end{aligned}$$

Agora, $Det(Ds) = 1$ e então, s é um isomorfismo linear que preserva orientação. Pela mudança de variáveis para integração, temos que

$$\begin{aligned}\langle\, \tau_* T, \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (s^* T) \wedge (s^* \tau^* \phi) \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{y \in \mathbb{R}^N} s^* T(y, x) \wedge \phi(x)\end{aligned}$$

onde a última equação segue de que $s^* \circ \tau^* = (\tau \circ s)^*$ e também que $(\tau \circ s)(y, x) = x$. Portanto

$$\langle\, \tau_* T, \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N} = \left\langle\, \int_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{y \in \mathbb{R}^N} (s^* T)(y, x), \phi(x) \,\right\rangle_{x \in \mathbb{R}^N}$$

e a prova do lema está completa. □

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, note que $\left\{s(y, x); y \in \mathbb{R}^N\right\} = \tau^{-1}(x)$. Então, novamente, vemos que a operação de *push forward* é a mesma operação de integração. Essa ideia é ilustrada é ilustrada em um contexto mais geral logo mais.

Como o próximo lema mostrará, a operação de *push forward* via um difeomorfismo que preserva orientação é a mesma operação de *pull back* via sua inversa.

Lema 5.13. *Suponha que Ω e Ω' sejam subconjuntos abertos de variedades orientadas de dimensão N. Seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ um difeomorfismo que preserva orientação. Para $T \in \mathcal{D}^{N-r}(\Omega) \subset \{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$, então*

$$F_* T = (F^{-1})^* T.$$

Se F reverte orientação, então $F_* T = -(F^{-1})^* T$.

Demonstração. Seja ϕ um elemento de $\mathcal{D}^r(\Omega')$. Então,

$$\begin{aligned}\langle\, F_* T, \phi \,\rangle_{\Omega'} &= \int_{\Omega'} (F^{-1^*} T) \wedge \phi \\ &= \left\langle\, F^{-1^*} T, \phi \,\right\rangle_{\Omega'},\end{aligned}$$

e, portanto, a prova do lema está completa. □

Como o operador *pull back* em formas diferenciais comuta com a derivada exterior, o operado *push forward* comuta com a derivada exterior a menos do sinal.

Lema 5.14. *Suponha que Ω e Ω' sejam subconjuntos abertos de variedades orientadas X e Y com dimensões reais N e N', respectivamente. Seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação suave. Então,*

$$F_* \circ d_X = (-1)^{N+N'} d_Y \circ F_*$$

como operadores de $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}'$ à $\{\mathcal{E}^{r-1}(\Omega')\}'$.

Demonstração. Suponha que T é um elemento de $\{\mathcal{E}^r(\Omega)\}' \simeq \mathcal{E}'^{N-r}(\Omega)$ e seja $\phi \in \mathcal{E}^{r-1}(\Omega')$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle\, F_* d_X T, \phi \,\rangle_{\Omega'} &= \langle\, d_X T, F^*\phi \,\rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle\, T, d_X(F^*\phi) \,\rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle\, T, F^*(d_Y * \phi) \,\rangle_{\Omega} \\
&= (-1)^{N-r+1} \langle\, F_* T, d_Y * \phi \,\rangle_{\Omega'} \\
&= (-1)^{N+N'} \langle\, d_Y F_* T, \phi \,\rangle_{\Omega'} ,
\end{aligned}$$

e, portanto, a prova do lema está completa. □

Agora, suponha que Ω e Ω' sejam subconjuntos abertos de variedades complexas e seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação holomorfa. Do Lema 3.14, F^* preserva bigrau. O dual dessa hipótese é que F_* preserva a bidimensão das correntes. Isso junto ao Lema 5.14 implica que F_* comuta com o operador de Cauchy-Riemann.

Lema 5.15. *Suponha que Ω e Ω' seja subconjuntos abertos de variedades complexas de dimensões complexas n e n', respectivamente. Seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação holomorfa. Então,*

$$F_*\overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F_*$$

como operadores de $\{\mathcal{E}^{p,q}(\Omega)\}'$ à $\{\mathcal{E}^{p,q-1}(\Omega')\}'$.

Como a dimensão real de uma variedade complexa é par, então não há sinal de fator nesse lema.

5.1.4 Pull Back de uma Corrente via uma Aplicação Suave

Definir o *pull back* de uma corrente é, talvez, pouco usual. No entanto, como o espaço das formas diferenciais abrange uma grande subclasse de correntes e, também, o *pull back* de uma forma diferencial está bem definida, encontraremos uma forma conveniente de extender o *pull back* às correntes. Primeiro de tudo, o operador *pull back* é definido como o dual do operador *push forward*. Sendo mais preciso, devemos mostrar que o operador *push forward* envia formas suaves à formas suaves de maneira contínua. Isso é claro para as aplicações π e τ, como mostradas anteriormente. Agora, provaremos que isso vale de forma geral.

Lema 5.16. *Suponha que Ω e Ω' sejam subconjuntos abertos de variedades orientadas de dimensões N e N', respectivamente. Seja $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ uma aplicação suave sobrejetiva tal que $F_*(p) : T_p(\Omega) \longrightarrow T_{F(p)}(\Omega')$ tem ranque maximal em cada ponto $p \in \Omega$. Então, F_* é uma aplicação contínua de $\mathcal{D}^r(\Omega)$ à $\mathcal{D}^{r+N'-N}(\Omega')$.*

Demonstração. Pelo argumento da partição da unidade e pelo uso de coordenadas locais, assumimos que Ω e Ω' são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^{N'}$, respectivamente. Seja p_0 um ponto arbitrário em Ω. Como $DF(p_0)$ tem ranque maximal N', arranjando as coordenadas (x, y) para $\mathbb{R}^N$ tal que $x \in \mathbb{R}^{N-N'}$ e $y \in \mathbb{R}^N$ e tal que $(D_yF)(p_0)$ é uma matriz não-singular $N' \times N'$. Seja $p_0 = (x_0, y_0)$. Do Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança de $(x_0, F(p_0))$ em $\mathbb{R}^{N-N'} \times \mathbb{R}^{N'}$ da forma $U' \times V'$ com $V' \subset \Omega'$ e um difeomorfismo $G : U' \times V' \longrightarrow G\{U' \times V'\} \subset \Omega$ tal que $F(G(x, y)) = y$ para $y \in V'$. Assim, $F \circ G : U' \times V' \longrightarrow V'$ é a projeção $\pi : U' \times V' \longrightarrow V'$, $\pi(x, y) = y$.

Seja ϕ um elemento de $\mathcal{D}^r(G\{U' \times V'\})$. Então,

$$F_*\phi = (F \circ G)_*(G_*^{-1}\phi).$$

Como $G_*^{-1}\phi = G^*\phi$ ou $-G^*\phi$, G_*^{-1} é uma forma suave com suporte compacto em $U' \times V'$. Como G é um difeomorfismo, a aplicação $\phi \longrightarrow G_*^{-1}\phi$ é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{D}^r(G\{U' \times V'\})$ à $\mathcal{D}^r(U' \times V')$. Ainda mais, como $F \circ G = \pi$, então

$$(F_*\phi)(y) = (\pi_* G_*^{-1}\phi)(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^{N-N'}} (G_*^{-1}\phi)(x, y) \tag{5.2}$$

onde a integral no lado direito envolve a variável x e todos os dx, deixando uma forma diferencial em y. Dessa expressão, segue que $F_*\phi$ é uma forma suave com suporte compacto em $V' \subset \Omega'$ em que a aplicação $\phi \longrightarrow F_*\phi$ é uma aplicação linear contínua de $\mathcal{D}^r(G\{U \times V'\})$ à $\mathcal{D}^{N'-N+r}(V')$. A dimensão de $F_*\phi$ é $N - r$ como F_* preserva dimensão. Portanto, o grau de $F_*\phi$ em $\Omega' \subset \mathbb{R}^{N'}$ é $N' - N + r$. O caso geral para $\phi \in \mathcal{D}^r(\Omega)$ agora segue pelo argumento da partição de unidade para uma cobertura aberta de Ω pelos conjuntos abertos da forma $G\{U' \times V'\}$ como acim. Assim, a prova do teorema está completa. □

Como $G_*^{-1}\phi = G^*\phi$ or $-G^*\phi$, 5.2 mostra que a operação do *push forward* é a mesma operação de integração.

Definição 5.17. *Suponha que Ω e Ω' são subconjuntos abertos de variedades orientadas X e Y com dimensões N e N' ($N \geq N'$), respectivamente. Suponha que $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ é uma aplicação suave sobrejetiva tais que $F_*(p) : T_p(\Omega) \longrightarrow T_{F(p}(\Omega')$ tem ranque maximal N' em cada ponto $p \in \Omega$. Para uma corrente $T \in \mathcal{D}'^r(\Omega')$, definimos o pull back $F^*T \in \mathcal{D}'^r(\Omega)$ por*

$$(F^*T, \phi\rangle_\Omega = (T, F_*\phi\rangle_{\Omega'} \text{ para } \phi \in \mathcal{D}^{N-r}(\Omega).$$

O Lema 5.16 garante que F^*T é um elemento bem definido de $\mathcal{D}'^r(\Omega)$. Note que como o operador *push forward* preserva dimensão, o operador *pull back* preserva o grau de uma corrente. No caso onde T é dada por uma forma suave, então F^*T está definida como o *pull back* usual.

Como $\mathcal{D}^r(\Omega')$ é denso em $\mathcal{D}'^r(\Omega')$, podemos aplicar o *pull back* da mesma maneira que em formas diferenciais. Por exemplo, suponha

$$T = \sum_{|I|=r} T_I dx^I,$$

onde cada T_I é uma função localmente integrável em Ω'. Então,

$$F^*T = \sum_{|I|=r} (T_I \circ F)(dF^I).$$

Lema 5.18. *Seja* $\tau : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *é dado por* $\tau(y,x) = x - y$*. Seja* $\triangle = \{(x,x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; x \in \mathbb{R}^N\}$*. Então,* $\tau^*[0] = [\triangle]$.

Demonstração. Uma forma atraente de se provar pode ser dada escrevendo $[0]$ e $[\bigtriangledown]$ como formas com coeficientes sejam distribuições. Dos exemplos anteriores, temos que

$$[0] = \delta_0(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$$

$$[\triangle] = \delta_0(x-y) d(x_1 - y_1) \wedge \ldots \wedge d(x_N - y_N).$$

O lema é então formalmente provado substituindo x por $\tau(y,x) = x - y$ e dx_j por $d\tau_j(y,x) = d(x_j - y_j)$, este argumento ser mais rigoroso aproximando $[0]$ por uma sequência de formas suaves. No entanto, aqui é outra aproximação usando a Definição 5.17. Seja $\phi \in \mathcal{D}^N(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Escrevemos

$$\phi(y,x) = \sum_{|I|+|J|=N} \phi_{IJ}(y,x) dy^I \wedge dx^J,$$

onde cada ϕ_{IJ} é um elemnto de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Então,

$$\begin{aligned} \langle\, \tau^*[0], \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} &= \langle\, [0], \pi_* \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N} \quad \text{(pela Definição 5.17)} \\ &= \left\langle\, [0], \int_{y \in \mathbb{R}^N} \phi(y, x+y) \,\right\rangle_{x \in \mathbb{R}^N}, \quad \text{(pelo Lema 5.12)} \end{aligned}$$

onde

$$\phi(y, x+y) = \sum_{|I|+|J|=N} \phi_{IJ}(y, x+y) dy^I \wedge d(x+y)^J.$$

Como somente a parte de $\phi(y, x+y)$ de grau N em dy contribui para a integral, obtemos

$$\int_{y \in \mathbb{R}^N} \phi(y, x+y) = \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y \in \mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y, x+y) dY^I \wedge dy^J.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle\, \tau^*[0], \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} &= \left\langle\, [0], \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y, x+y) dY^I \wedge dy^J \,\right\rangle_{x\in\mathbb{R}^N} \\
&= \sum_{|I|+|J|=N} \int_{y\in\mathbb{R}^N} \phi_{IJ}(y, x+y) dY^I \wedge dy^J \\
&= \int_{\triangle} \phi \\
&= \langle\, [\triangle], \phi \,\rangle_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}
\end{aligned}$$

como desejado. □

Lema 5.19. *Suponha que Ω e Ω' sejam subconjuntos abertos de variedades orientadas de dimensões N e N' $(N \geq N')$, respectivamente. Suponha $F : \Omega \longrightarrow \Omega'$ é uma aplicação suave sobrejetiva tal que $F_*(p) : T_p(\Omega) \longrightarrow T_p(\Omega')$ tem ranque maximal N' para cada $p \in \Omega$. Então, $F^* \circ d = d \circ F^*$ como operadores de $\mathcal{D}'^r(\Omega')$ à $\mathcal{D}'^{r+1}(\Omega)$. Ainda mais, Ω e Ω' são variedades complexas e F é holomorfa, então $F^* \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ F^*$ como operadores de $\mathcal{D}'^{p,q}(\Omega')$ à $\mathcal{D}'^{p,q+1}(\Omega)$.*

Demonstração. A prova segue análoga aos lemas 5.14 e 5.15 no contexto de *pull back* . □

6 VARIEDADES CR

Começaremos esse capítulo com a definição de uma variedade CR mergulhada, a qual é a classe mais simples das variedades CR. Logo após, apresentaremos definições e propriedades de outras classes de variedades CR, a saber subvariedades CR genéricas e subvariedades quadráticas. Por fim, apresentaremos a definição de uma variedade CR abstrata, como o nome já diz, trata-se de uma classe mais difícil de se imaginar. A medida que nos aprofundarmos mais no contexto das variedades CR, torna-se cada vez mais abstrato pensarmos em exemplos, mais no contexto $\mathbb{C}^n$ ainda conseguimos exemplos.

6.1 VARIEDADE CR MERGULHADA

Aqui, nos concentraremos no caso de uma variedade CR mergulhada em $\mathbb{C}^n$. Poderíamos facilmente substituir $\mathbb{C}^n$ por uma variedade complexa geral mas isso seria desnecessariamente complicado.

Para uma subvariedade suave M de $\mathbb{C}^n$, relembremos que $t_p(M)$ é o espaço tangente real de M em um ponto $p \in M$. Em geral, $T_p(M)$ não é invariante sob a aplicação de estrutura complexa J para $T_p(\mathbb{C}^n)$. Portanto, daremos uma denominação especial ao maior subespaço J-invariante de $T_p(M)$.

Definição 6.1. *Para um ponto $p \in M$, o espaço tangente complexo de M em p é o espaço vetorial*

$$H_p(M) = T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}.$$

O espaço $H_p(M)$ é, às vezes, chamado de espaço tangente holomorfo. Esse espaço vetorial real deve ter dimensão par, pois

$$J \circ J|_{H_p(M)} = -I,$$

e portanto

$$\left[\det J_{H_p(M)}\right]^2 = (-1)^m,$$

onde $m = \dim_R H_p(M)$. Note que se $A : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é uma aplicação linear complexa, ou seja, $J \circ A = A \circ J$, então

$$\begin{aligned} A\{H_p(M)\} &= A\{T_p(M) \cap J\{T_p(M)\}\} \\ &\subset A\{T_p(M)\} \cap A \circ J\{T_p(M)\} \\ &= T_{A(p)}(A(M)) \cap J\left\{T_{A(p)}(A(M))\right\} = H_{A(p)}(A\{M\}). \end{aligned}$$

Definição 6.2. *A parte real total do espaço tangente de M é o espaço quociente*

$$X_p(M) = \frac{T_p(M)}{H_p(M)}.$$

Usando o produto interno Euclidiano em $T_p(\mathbb{R}^{2n})$, podemos identificar $X_p(M)$ com o complemento ortogonal de $H_p(M)$ em $T_p(M)$, denotado por $H_p(M)^{\perp}$. Com essa identificação, note que $J\{X_p(M)\} \cap X_p(M) = \{0\}$, pois $H_p(M)$ é o maior subespaço J-invariante de $T_p(M)$. Temos que $T_p(M) = H_p(M) \oplus X_p(M)$. Do Lema 3.5, $J\{X_p(M)\}$ é ortogonal à $H_p(M)$. Portanto, $J\{X_p(M)\}$ é transversal à $T_p(M)$.

Lema 6.3. *Suponha que M é uma subvariedade real de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$. Então,*

$$2n - 2d \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq 2n - d$$

e

$$0 \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq d.$$

Demonstração. Primeiro, note que $H_p(M) \subset T_p(M)$ e então,

$$\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) \leq \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) = 2n - d.$$

Para provar a outra desigualdade, note que

$$T_p(M) + J\{T_p(M)\} \subset T_p(\mathbb{R}^{2n}),$$

e então,

$$\dim_{\mathbb{R}} T_p(M) + \dim_{\mathbb{R}} J\{T_p(M)\} - \dim_{\mathbb{R}} \{H_p(M)\} \leq \dim T_p(\mathbb{R}^{2n}).$$

Como J é uma isometria,

$$\dim_{\mathbb{R}} J\{T_p(M)\} = \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) = 2n - d,$$

segue que

$$\dim_{\mathbb{R}} T_p(M) + \dim_{\mathbb{R}} J\{T_p(M)\} - \dim T_p(\mathbb{R}^{2n}) \quad \leq \quad \dim_{\mathbb{R}} H_p(M),$$

daí

$$2n - d + 2n - d - 2n = 2n - 2d \leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M).$$

Ainda,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} X_p(M) &= \dim_{\mathbb{R}} T_p(M) - \dim_{\mathbb{R}} H_p(M)\\ &\leq 2n-d-(2n-2d)=d.\end{aligned}$$

$\square$

A dimensão real de $X_p(M)$ é chamada de codimensão CR de M. O lema estabelece que $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ é um número par entre $2n-2d$ e $2n-d$. Se M é uma hipersuperfície real, assim $d=1$ e então, a única possibilidade é $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)=2n-2$. Em particular, a dimensão de $H_p(M)$ nunca muda. Se $d>1$, então existem mais possibilidades.

Exemplo 6.4. Seja $M=\{z\in\mathbb{C}^n; |z|=1 e \mathrm{Im} z_1=0\}$. M é a esfera unitária em $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-2$, então $2n-4\leq \dim_{\mathbb{R}} H_p(M)\leq 2n-2$, para $p\in M$.

No ponto $p_1=(z_1=0,z_2=1,z_3=0,\ldots,z_n=0)\in M$, $T_{p_1}(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial y_3},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$.

Os vetores $J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial y_1}$ e $J\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ são ortogonais à T_{p_1} e portanto $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y_2}$ geram $X_{p_1}(M)$.

Os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial y_3},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$ geram o subespaço J-invariante $H_{p_1}(M)$.

Então nesse caso, $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_1}(M)=2n-4$ e $\dim_{\mathbb{R}} X_{p_1}(M)=2$.

Agora considerando o ponto $p_2=(z_1=1,z_2=0,\ldots,z_n=0)\in\mathbb{M}$. Aqui, $T_{p_2}(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial y_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$ que é J-invariante. Portanto, $H_{p_2}(M)=T_{p_2}(M)$ e $X_{p_2}(M)=\{0\}$. Nesse caso, $\dim_{\mathbb{R}} H_{p_2}(M)=2n-2$ e $\dim X_{p_2}(M)=0$.

Nesse exemplo, a dimensão de $H_p(M)$ varia de acordo p. O requerimento básico de uma variedade CR é que $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ indepedenda de $p\in M$.

Definição 6.5. *Uma subvariedade M de $\mathbb{C}^n$ é chamada uma variedade CR mergulhada or uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$ se $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ indepedenda de $p\in M$.*

Exemplo 6.6. i) Qualquer hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$ é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$.

ii) Qualquer subvariedade complexa de $\mathbb{C}^n$ é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$.

Definição 6.7. *Uma subvariedade M em $\mathbb{C}^n$ é ditar ser totalmente real se $H_p(M)=\{0\}$, para cada $p\in M$.*

Exemplo 6.8. Um exemplo de uma subvariedade totalmente real é a cópia de $\mathbb{R}^n$ dada por $\{(x+iy)\in\mathbb{C}^n; y=0\}$.

Uma definição equivalente de uma subvariedade totalmente real é que $X_p(M) = T_p(M)$, para $p \in M$. Do Lema 6.3, a dimensão real de uma subvariedade totalmente real sempre é n.

As complexificações de $T_p(M)$, $H_p(M)$ e $X_p(M)$ são denotadas por $T_p(M)\otimes\mathbb{C}$ e $X_p(M)\otimes\mathbb{C}$, respectivamente A aplicação de estrutura complexa J em $T_p(\mathbb{R}^{2n})\otimes\mathbb{C}$ restringe à uma aplicação de estrutura complexa em $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ pois $H_p(M)$ é J-invariante. Temos que $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ é a soma direta dos autoespaços $+i$ e $-i$ de J cujos são denotados por $H_p^{1,0}(M)$ e $H_p^{0,1}(M)$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} H_p^{1,0}(M) &= T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\} \\ H_p^{0,1}(M) &= T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\} \\ H_p^{0,1}(M) &= \overline{H_p^{1,0}(M)}. \end{aligned}$$

Será muito útil ter essa forma de identificar esses espaços em termos de um sistema de definição local para M.

Exemplo 6.9. Voltando ao Exemplo 6.4, onde $M = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| = 1e\mathrm{Im} z_1 = 0\}$. Como visto anteriormente, uma base para $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ é dada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} \text{ com } \frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}\right), \quad 1 \le i \le n.$$

Já uma base para $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ é dada por

$$\{v \otimes 1, v \otimes i\},$$

onde v é um elemento da base de $T_p(M)$, e, também, pelo exemplo 6.4, $T_p(M)$ é gerado sobre $\mathbb{R}$ por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}.$$

Portanto, $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial z_2}$ não pertencem à $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Daí, concluímos que $H_p^{1,0}(M) = T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}$ é gerada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_3}\right), \dots, \frac{1}{2}(\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right\},$$

que também é base para esses espaços.

E uma base para $H_p^{0,1}(M) = T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}$ é

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{z_3}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right\}.$$

Lema 6.10. *Seja M uma subvariedade suave de $\mathbb{C}^n$ definida próxima a um ponto $p \in M$, onde $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho_1(z) = \cdots = \rho_d(z) = 0\}$, onde $\rho_1, \ldots, \rho_d$ são funções suaves de valores reais com $d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d \neq 0$ próximo a p.*

a) Um vetor $W = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ pertence à $H_p^{1,0}(M)$ se e somente se

$$W\{\rho_k\}(p) = \langle\, \partial\rho_k, W \,\rangle_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_k}{\partial z_j}(p) w_j = 0, \;\; 1 \leq k \leq d.$$

b) Um vetor $W = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \in T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ pertence à $H_p^{0,1}(M)$ se e somente se

$$W\{\rho_k\}(p) = \left\langle\, \overline{\partial}\rho_k, W \,\right\rangle_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_k}{\partial \overline{z}_j}(p) w_j = 0, \;\; 1 \leq k \leq d.$$

Relembrando que $W\{\rho_k\}$ deota a ação de um vetor W em uma função ρ_k e que $\langle\ ,\ \rangle_p$ denota o pareamento entre formas e vetores.

Demonstração. Temos $H_p^{1,0}(M) = T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n) \cap \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\}$ e

$$T_p(M) \otimes \mathbb{C} = \Big\{ W \in T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}; \langle\, d\rho_k, W \,\rangle_p = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq d \Big\}.$$

Claramente, $\left\langle\, \overline{\partial}\rho_k, W \,\right\rangle_p = 0$ para $W \in T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ pois $\overline{\partial}\rho_k$ é a forma de bigrau $(0,1)$. Ainda, $d\rho_k = \partial\rho_k + \overline{\partial}\rho_k$. Portanto, $W \in H_p^{1,0}(M)$ se e somente se $\langle\, \partial\rho_k, W \,\rangle_p = 0$. A parte *b)* é provada analogamente. □

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então as dimensões de $H_p^{1,0}(M)$, $H_p^{0,1}(M)$ e $H_p(M) \otimes \mathbb{C}$ são independentes do ponto $p \in M$. Definiremos os seguintes subconjuntos de $T^{\mathbb{C}}(M)$:

$$\begin{aligned} H^{\mathbb{C}} &= \bigcup_{p \in M} H_p(M) \otimes \mathbb{C} \\ H^{1,0}(M) &= \bigcup_{p \in M} H_p^{1,0}(M) \\ H^{0,1}(M) &= \bigcup_{p \in M} H_p^{0,1}(M). \end{aligned}$$

Um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}$ é um objeto que atribui cada ponto $p \in M$ à um subespaço de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$ cuja dimensão independe de p. Ainda mais, desses subespaços são requiridos encaixarem suavemente no sentido em que sejam localmente gerados por uma base de campos vetoriais suaves. Esse último requerimento é facilmente satisfeito pelos espaços $H^{1,0}(M)$, $H^{0,1}(M)$ e $H^{\mathbb{C}}(M)$. Para M localmente definido por $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$, então próximo a um ponto $p_0 \in M$, podemos escolher de $\{\partial\rho_1, \ldots, \partial\rho_d\}$ uma coleção de k-elementos $\partial\rho_i, \ldots, \partial\rho_{i_k}$ com

$1 \leq k \leq d$ são linearmente independentes. O número k é a codimensão CR de M. Da álgebra linear, existem campos vetoriais suaves linearmente independentes $L_1, \ldots, L_{n-k}$ que são anulados $\partial\rho_i, \ldots, \partial\rho_{i_k}$. Esses campos vetoriais localmente geram $H^{1,0}(M)$ pelo Lema 6.10 e, então, $H^{1,0}(M)$ é um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$. Analogamente, $H^{0,1}(M)$ e $H^{\mathbb{C}}(M)$ também são subfibrados de $T^{\mathbb{C}}(M)$.

Lema 6.11. *Suponha que M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$. Então,*

a) $H_p^{1,0}(M) \cap H_p^{0,1}(M) = \{0\}$ para cada $p \in M$.

b) Os subfibrados $H^{0,1}(M)$ e $H^{1,0}(M)$ são involutivos.

Demonstração. A prova da parte *a)* segue do fato que a interseção de autoespaços de qualquer aplicação linear correspondentes a autovalores diferentes é sempre trivial. Para a parte *b)*, primeiro note que

$$H^{1,0}(M) = T^{\mathbb{C}}(M) \cap \left\{T^{1,0}(\mathbb{C}^n)|_M\right\}.$$

O fibrado $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ é involutivo pois o colchete de Lie de quaisquer dois campos vetoriais gerados por $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ é também gerado por $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$. Ainda, $T^{\mathbb{C}}(M)$ é involutivos pois o fibrado tangente de qualquer variedade é involutivo. Então, $H^{1,0}(M)$ é involutivo, como desejado. Como $H^{0,1}(M) = \overline{H^{1,0}(M)}$, $H^{0,1}(M)$ também é involutivo. $\square$

As propriedades *a)* e *b)* do lema anterior são muito importantes, pois elas são propriedades da definição de uma variedade CR abstrata que veremos posteriormente. O lema não implica que $H^{\mathbb{C}} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$ é involutivo, em geral, isso não é verdadeiro. De fato, a forma de Levi, que também discutiremos posteriormente, mede o grau em que $H^{\mathbb{C}}(M)$ falha ser involutivo.

O Lema 6.10 implica que $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = n - k$, onde k é o número de elementos linearmente independentes de $\{\partial\rho_1(p), \ldots, \partial\rho_d(p)\}$. Se $\partial\rho_1 \wedge \ldots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ então, $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = n - d = \dim_{\mathbb{C}} H_p^{0,1}(M)$ e então, $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n - 2d$. De acordo com o Lema 6.3, esse é o valor mínimo da dimensão para $H_p(M)$.

Definição 6.12. *Uma subvariedade CR M é chamada genérica se* $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M)$ *é minimal.*

Exemplo 6.13. i) Uma hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$ é sempre genérica. Pelo Lema 6.3, uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ cujo codimensão real é ao menos n deve ser totalmente real.

ii) Qualquer subvariedade complexa de $\mathbb{C}^n$ que não seja um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ é um exemplo de uma subvariedade CR não genérica.

Lema 6.14. *Suponha que M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$ com* $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-d$, $0 \leq d \leq d$. *São equivalentes*

a) M é genérica.

b) $\dim_{\mathbb{R}} H_p(M) = 2n - 2d$*, para* $p \in M$.

c) A codimensão CR de M *é igual a* d.

d) $\partial\rho_1 \wedge \ldots \wedge \partial\rho_d \neq 0$ *em* M *para cada sistema de definição local* $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ *para* M.

e) $T_p(\mathbb{C}^n) = T_p(M) \oplus J\{X_p(M)\}$.

Demonstração. A prova segue facilmente das definições e do Lema 6.10. □

Exemplo 6.15. Retornando ao caso do Exemplo 6.4, onde $M = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| = 1 \text{ e } \operatorname{Im} z_1 = 0\}$. Definindo as funções $\rho_1(z) = |z|^2 - 1$ e $\rho_2(z) = (1/2i)(z_1 - \overline{z_1})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\partial\rho_1(z) &= \partial(|z|^2 - 1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(|z|^2 - 1)}{\partial z_j} dz_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 + y_j^2)\right) - i\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j^2 + y_j^2)\right)\right) dz_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)dz_j = \sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}dz_j = \overline{z}dz. \\
\partial\rho_2(z) &= \partial\left(\left(\frac{1}{2i}\right)(z_1 - \overline{z_1})\right) = \frac{1}{2i}dz_1.
\end{aligned}$$

Claramente, $\partial\rho_1 \wedge \partial\rho_2 = 0$ somente nos pontos $z = (z_1, \ldots, z_n) \in M$ com $z_2 = \cdots = z_n = 0$, $z = \pm 1$. Então, M não é uma subvariedade CR. No entanto, o conjunto

$$\widetilde{M} = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in M; z_1 \neq \pm 1\},$$

é uma subvariedade CR genérica (não compacta) de $\mathbb{C}^n$.

Se M é uma superfície real, então $X_p(M)$ é um subespaço de dimensão real de $T_p(M)$. Pelo Lema 3.5, $J\{X_p(M)\}$ é ortogonal à $X_p(M)$ e $H_p(M)$. Portanto, $J\{X_p(M)\}$ pode ser identificado com o complemento ortogonal de $T_p(M)$. Para codimensões maiores, tanto $X_p(M)$ e $J\{X_p(M)\}$ são ortogonais à $H_p(M)$. No entanto, em geral, $J\{X_p(M)\}$ não é ortogonal à $X_p(M)$ e portanto $J\{X_p(M)\}$ não pode ser identificado como o complemento ortogonal de $T_p(M)$ de uma maneira natural.

Exemplo 6.16. Seja $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2 = 0\}$. M é totalmente real e uma base para $T_0(M)$ é dada por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}.$$

Note que $J\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}$ não é ortogonal à $\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$.

6.2 Uma Forma normal para uma subvariedade CR genérica

Nesta seção, apresentaremos uma descrição de coordenadas conveniente de uma subvariedade CR genérica. Primeiramente, caracterizaremos o gráfico localmente de uma subvariedade CR sobre o espaço tangente real. Então, mostraremos que a função gráfico pode ser escolhida tal que certos "termos puros"em sua expansão de Taylor se anulam. O caso analítico real será feito primeiro, depois disto, uma versão C^k segue facilmente.

Lema 6.17. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$, $1 \leq d \leq n$. Suponha p_0 um ponto em M. Existe uma aplicação linear complexa afim e não-singular $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, uma vizinhança aberta U de p_0 e uma função suave $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tais que*

$$A\{M \cap U\} = \left\{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\right\}.$$

Demonstração. Primeiro, vamos transladar o ponto p_0 tal que seja a origem. Assim é suficiente achar uma aplicação linear complexa afim e não-singular $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que leva $T_0(M)$ ao espaço $\{y = 0\}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, onde $y = \mathrm{Im} z \in \mathbb{R}^d$. Então, para a função gráfico, h, para $A\{M\}$ satisfará as propriedades requisitadas.

A fim de encontrar a aplicação A desejada, seja $\widehat{v_1}, \ldots, \widehat{v_d}$ seja uma base ortonormal para $X_0(M)$. O espaço J-invariante $H_0(M)$ é ortogonal à ambos $X_0(M)$ e $J\{X_0(M)\}$. Ainda mais, J não tem autovalores reais e $Jv \cdot w = -v \cdot Jw$ para $v, w \in T_0(\mathbb{R}^{2n})$. Portanto, existe uma base ortonormal para $H_0(M)$ da forma $\widehat{v_{d+1}}, J\widehat{v_{d+1}}, \ldots, \widehat{v_n}, J\widehat{v_n}$. Como M é genérica, o conjunto

$$\{\widehat{v_1}, J\widehat{v_1}, \ldots, \widehat{v_n}, J\widehat{v_n}\}$$

é uma base para $T_0(\mathbb{R}^{2n})$, pelo Lema 6.14.

Agora seja $z = x + iy \in \mathbb{C}^d$ e $w = u + iv \in \mathbb{C}^{n-d}$. Aqui, x e y pertence à $\mathbb{R}^d$ e u, v pertence à $\mathbb{R}^{n-d}$. Definindo a aplicação linear real $A : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ da forma

$$\begin{aligned} A(\widehat{v_j}) &= \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad A(J\widehat{v_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j} \quad 1 \leq j \leq d \\ A(\widehat{v_j}) &= \frac{\partial}{\partial u_{j-d}}, \quad A(J\widehat{v_j}) = \frac{\partial}{\partial v_{j-d}} \quad d+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Como $J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$ e $J(\partial/\partial u_k) = \partial/\partial v_k$, claramente $A \circ J = J \circ A$ em elementos da base de $T_0(\mathbb{R}^{2n})$ e portanto $A \circ J = J \circ A$ em todo $T_0(\mathbb{R}^{2n})$. Visto como uma aplicação de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{C}^n$, A é linear e complexa. Claramente

$$A\{T_0(M)\} = \left\{(x, 0, u, v); x \in \mathbb{R}^d \text{ e } u, v \in \mathbb{R}^{n-d}\right\} = \{y = 0\},$$

como desejado. O que completa a prova do teorema. $\square$

Como A é linear e complexa, temos que $A\{H_p(M)\} = H_0(A\{M\})$ e então, a extensão de A à $T_p(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}$ satisfaz $A\left\{H_p^{1,0}(M)\right\} = H_0^{1,0}(A\{M\})$ e $A\left\{H_p^{0,1}(M)\right\} = H_0^{0,1}(A\{M\})$. Ainda, A leva uma base ortonormal de $T_p(M)$ à uma base ortonormal de $T_0(A\{M\})$. Em particular, $A\{X_p(M)\} = X_0(A\{M\})$. Em novas coordenadas, temos que

$$\begin{aligned} T_0(M) &= \left\{(x, 0, u, v); x \in \mathbb{R}^d \text{ e } u, v \in \mathbb{R}^{n-d}\right\} \\ H_0(M) &= \left\{(0, 0, u, v); u, v \in \mathbb{R}^{n-d}\right\} \\ X_0(M) &= \left\{(x, 0, 0, 0); x \in \mathbb{R}^d\right\}. \end{aligned}$$

$H_0^{1,0}(M)$ pode ser identificado como $\left\{(0, w); w \in \mathbb{C}^{n-d}\right\}$ na forma complexa linear, onde $w = u + iv$.

Nossa maior preocupação é e será com subvariedades CR genéricas. No entante, devemos apontar uma versão diferente do 6.3 vale em um caso não genérico. Seja k a codimensão CR de M e seja d a codimensão real de M. Para o caso não genérico, temos que $0 \leq k < d$ e então, $n - d < \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M) \leq n$ pelo Lema 6.3. Defina o inteiro j por $\dim_{\mathbb{C}}^{1,0}(M) = n - d + j$. Temos que

$$\begin{aligned} 2n - d &= \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M) + \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M) + \dim_{\mathbb{R}} X(M) \\ &= 2n - 2d + 2j + k. \end{aligned}$$

Portanto, $2j + j = d$. Como $J\{X_p(M)\}$ é um subespaço k-dimensional tal que é transverso à $T_p(M)$, existe um subespaço J-invariante de $T_p(\mathbb{C}^n)^{\perp}$ de dimensão real $2j$ que é transverso à $T_p(M) \oplus J\{X_p(M)\}$. A prova do Lema 6.3 pode ser modificada para que haja uma mudança complexa linear de coordenadas, definindo as equações para M então,

$$\begin{aligned} z_1 &= H_1(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}) \\ &\vdots \\ z_j &= H_j(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}) \\ y_{j+1} &= h_{j+1}(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}) \\ &\vdots \\ y_{d-j} &= h_{d-j}(x_{j+1}, \ldots, x_{d-j}, w_1, \ldots, w_{n-d+j}). \end{aligned}$$

onde $H_1, \ldots, H_j$ são funções suaves de valores complexos com $H_l(0) = 0$ e $DH_l(0) = 0$, $1 \leq l \leq j$, e onde $h_{j+1}, \ldots, h_{d-j}$ são funções suaves de valores reais com $h_l(0) = 0$ e $Dh_l(0) = 0$ para $j + 1 \leq l \leq d - j$.

Teorema 6.18. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica, analítica e real de $\mathbb{C}^n$ com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$, com $1 \leq d \leq n$. Suponha que que p_0 é um ponto em M. Existem uma* *vizinhança U de p_0 em $\mathbb{C}^n$, um biholomorfismo $\Phi : U \longrightarrow \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^n$ e uma aplicação analítica real $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tais que*

$$\Phi\{M \cap U\} = \left\{(x + iy, w) \in \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\right\}.$$

Ainda,

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h}{\partial x^\alpha \partial w^\beta}(0) = 0$$
$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h}{\partial x^\alpha \partial \overline{w}^\beta}(0) = 0$$

para todos os multi-índices α e β. Outra maneira de descrever a função gráfico h é olhar sua expansão de Taylor sobre a origem

$$h(x, w) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha w^\beta \overline{w}^\gamma$$

onde

$$a_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!}\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}h}{\partial x^\alpha \partial w^\beta \partial \overline{w}^\gamma}(0).$$

Os termos da expansão de Taylor com $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ são chamados de termos puros.

Demonstração. Pelo Lema 6.17, assumimos que dado um ponto p_0 é a origem e

$$M = \left\{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\right\}$$

onde $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Como M é analítica e real, sua função gráfico $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é analítica e real. A expansão de Taylor de h é dada por

$$h(x, w, \overline{w}) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha w^\beta \overline{w}^\gamma.$$

Note que enfatizamos que h não é holomorfa em w pela notação $h(x, w, \overline{w})$, cuja ilustra a dependência de h em $\overline{w}$. Substituímos $\overline{w}$ por uma coordenada independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$ e x por $z \in \mathbb{C}^d$ e definimos a aplicação holomorfa $\widetilde{h} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ por

$$\widetilde{h}(z, w, \eta) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} z^\alpha w^\beta \eta^\gamma.$$

Essa série converge para $\{|z|, |w|, |\eta| < \delta\}$ para algum $\delta > 0$.

Como $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$, temos que $\widetilde{h}(0) = 0$ e $D\widetilde{h}(0) = 0$. Pelo Teorema da Função Implícita para aplicações holomorfas, existe uma única aplicação holomorfa

$\phi : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ definida próxima a origem tal que

$$\phi(z + i\widetilde{h}(z, w, 0), w) = z \text{ para } |z|, |w| < \delta \tag{6.1}$$

para algum, possivelmente, pequeno $\delta > 0$. Defina a mudança de variáveis holomorfa $(\widehat{z}, \widehat{w}) = \Phi(z, w)$ onde

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= z - i\widetilde{h}(\phi(z, w), w, 0) \in \mathbb{C}^d \\ \widehat{w} &= w \in \mathbb{C}^{n-d}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Como $D\widetilde{h}(0, 0, 0) = 0$, então $D\Phi(0, 0)$ é a identidade. Assim, para um $\delta > 0$ apropriado, a aplicação Φ é um biholomorfismo de $\{|z|, |w| < \delta\}$ à uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$.

Seja $\widehat{M}$ a imagem de de $M \cap \{|z|, |w| < \delta\}$ sob Φ. Desejamos encontrar uma função definida para $\widehat{M}$ em $\widehat{z} = \widehat{x} + i\widehat{y}$, onde $\widehat{w}$ são coordenadas da forma

$$\widehat{y} = \widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w})$$

tal que $\widehat{h}$ satisfaça as propriedades requiridas na hipótese do teorema.

De 6.2,

$$\widehat{y} = y - \text{ Re}\left\{\widetilde{h}(\phi(z, w), w, 0)\right\}.$$

Se $(\widehat{z}, \widehat{w})$ pertence à $\widehat{M}$, então (z, w) pertence à M e então,

$$y = \widetilde{h}(x, w, \overline{w}) \in \mathbb{R}^d.$$

Substituindo essa equação na anterior, temos que

$$\widehat{y} = \text{Re}\left\{\widetilde{h}(x, w, \overline{w}) - \widetilde{h}(\phi(x + i\widetilde{h}(x, w, \overline{w}), w), w, 0)\right\} \tag{6.3}$$

para $(\widehat{z}, \widehat{w}) = \Phi(z, w) \in \widehat{M}$.

Para obter uma equação definida para $\widehat{M}$ nas coordenadas $(\widehat{z}, \widehat{w})$, precisamos transformar o lado direito de 6.3 em uma função de $\widehat{x}$ e $\widehat{w}$. Como Φ é um biholomorfismo local, claramente $(z, w) = \Phi^{-1}(\widehat{z}, \widehat{w})$ e escrevemos

$$\begin{aligned} z &= z(\widehat{z}, \widehat{w}) \\ w &= \widehat{z} \end{aligned}$$

onde $z : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ é holomorfo perto à origem. Portanto $x = \text{Re}z$ é uma função analítica e real de Re$\widehat{z}$, Re$\widehat{w}$, w e escrevemos $x = x(\widehat{z}, \widehat{w})$. Substituindo $x = x(\widehat{z}, \widehat{w})$ e $w = \widehat{w}$ no lado direito de 6.3 resultaria em uma função gráfico local para $\widehat{M}$, exceto que poderia envolver a variável $\widehat{y} = \text{Im}\widehat{z}$. Uma função gráfico deve somente envolver as variáveis $\widehat{x}$ e $\widehat{w}$

Para remediar isso, usamos o fato que $D\widetilde{h}(0,0,0) = 0$ e o Teorema da Função Implícita para concluirmos que variável $\widehat{y} = \widehat{y}(\widehat{x}, \widehat{w}, \widehat{w})$ em 6.3 é uma função analítica real de $\widehat{x}$, Re $\widehat{w}$, Re $\widehat{w}$ próxima à origem. Substituindo $\widehat{y}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ por $\widehat{y} = \text{Im } \widehat{z}$ em $x(\widehat{z}, \widehat{w})$ temos uma nova função que denotamos por $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$. Essa função é analítica real em uma vizinhança da origem.

Agora, substituindo $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ por x e $\widehat{w}$ oir w, 6.3 se torna

$$\widehat{y} = \text{Re}\left\{\widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})\right\} \text{ para } (\widehat{z}, \widehat{w}) \in \widehat{M}$$

onde

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) &= \widetilde{h}(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) \\ &\quad -\widetilde{h}(\phi(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) + i\widetilde{h}(x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}, \overline{\widehat{w}}), \widehat{w}), \widehat{w}, 0).\end{aligned}$$

Portanto, Re $\widehat{h}$ é a função gráfico para $\widehat{M}$.

Falta ainda provar que

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \text{Re } \widehat{h}}{\partial \widehat{x}^{\alpha} \partial \widehat{w}^{\beta}}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \text{Re } \widehat{h}}{\partial \widehat{x}^{\alpha} \partial \overline{\widehat{w}}^{\beta}}(0) = 0. \tag{6.4}$$

A segunda equação segue pela conjugação da primeira, então é suficiente provar a primeira.

A função

$$(\widehat{x}, \widehat{w}) \longrightarrow x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$$

é analítica real próxima a origem e portanto pode ser expressada como uma série de potência em $\widehat{x}$, $\widehat{w}$, e $\overline{\widehat{w}}$. Substituindo $\widehat{x}$ por $\widehat{z} \in \mathbb{C}^d$ e $\overline{\widehat{w}}$ por $\widehat{\eta} \in \mathbb{C}^{n-d}$, obtemos a aplicação

$$x : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$$

cuja é holomorfa em uma vizinhança da origem. Substituindo $x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta})$ por $x(\widehat{x}, \widehat{w}, \overline{\widehat{w}})$ e $\widehat{\eta}$ por $\overline{\widehat{w}}$ na definição de $\widehat{h}$, obtemos a função $\widehat{h} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ dada por

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}) &= \widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}, \widehat{\eta}) \\ &\quad -\widetilde{h}(\phi(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}) + i\widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}, \widehat{\eta}), \widehat{w}), \widehat{w}, 0)\end{aligned}$$

que é holomorfa para $(\widehat{z}, \widehat{w}, \widehat{\eta})$ em uma vizinhança da origem. Para estabelecer a primeira equação em 6.4, devemos mostrar que

$$\widehat{h}(\widehat{z}, \widehat{w}, 0) = 0.$$

De 6.1 com z substituído por $x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0)$ e w substituído por $\widehat{w}$, obtemos

$$\phi(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0) + i\widetilde{h}(x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0), \widehat{w}, 0), \widehat{w}) = x(\widehat{z}, \widehat{w}, 0).$$

Substituindo isso em $\widehat{h}$ temos que

$$\begin{aligned}\widehat{h}(\widehat{z},\widehat{w},0) &= \widetilde{h}(x(\widehat{z},\widehat{w},0),\widehat{w},0) - \widetilde{h}(x(\widehat{z},\widehat{w},0),\widehat{w},0)\\ &= 0\end{aligned}$$

como desejado. Portanto vale 6.4 e a prova do teorema está completa. $\square$

Uma versão C^k do Teorema 6.18 segue facilmento da versão analítica real. Suponha que $M = \{y = h(x,w)\}$ onde h é de classe C^k para $k \geq 2$. Da k-ésima ordem da expansão de Taylor de h, temos que

$$h(x,w) = p(x,w,\overline{w}) + e(x,w)$$

onde p é um polinômio de grau k nas variáveis $x, w, \overline{w}$ e onde o resto de Taylor e satisfaz

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}e(0)}{\partial x^\alpha \partial w^\beta \partial \overline{w}^\gamma} = 0 \text{ para } |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \leq k.$$

Portanto, as variedades M e $\widehat{M} = \{y = p(x,w,\overline{w}\}$ satisfazem a ordem k na origem. Como p é analítico real, o Teorema 6.18 se aplica à $\widehat{M}$. As imagens M e $\widehat{M}$ em novas coordenadas também satisfazem a ordem k na origem.

Teorema 6.19. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ de classe C^k ($k \geq 2$) com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$ ($1 \leq d \leq n$). Suponha que p_0 é um ponto em M. Existem uma vizinhança U de p_0 em $\mathbb{C}^n$, um biholomorfismo $\Phi : U \longrightarrow \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^n$ e uma função $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$ tais que*

$$\Phi\{M \cap U\} = \left\{(x+iy,w) \in \Phi\{U\} \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x,w)\right\}.$$

Ainda mais

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^\alpha \partial w^\beta} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}h(0)}{\partial x^\alpha \partial \overline{w}^\beta}(0) = 0 \text{ para } |\alpha| + |\beta| \leq k.$$

Agora voltando a questão de encontrar uma base local canônica para $H^{1,0}(M)$ e $H^{0,1}(M)$. Assumimos que $M = \{y = h(x,w)\}$ onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe C^k ($k \geq 2$), onde $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Os espaços $H_0^{1,0}(M)$ e $H_0^{1,0}(M)$ são gerados sobre $\mathbb{C}$ por $\frac{\partial}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_{n-d}}$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{w}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{w}_{n-d}}$, respectivamente. Nosso desejo é extender esses vetores à campos vetoriais que são localmente gerados por $H^{1,0}(M)$ e $H^{0,1}(M)$, respectivamente.

Teorema 6.20. *Suponha que $M = \left\{(x+iy,w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x,w)\right\}$ onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe C^k com $k \geq 2$ com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Uma base para $H^{1,0}(M)$ próximo a origem é dado por $L_1, \ldots, L_{n-d}$ com*

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i \sum_{l=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial w_j} \frac{\partial}{\partial z_l} \right), \quad 1 \leq j \leq n-d$$

onde μ_{lk} é o (l,k)-ésimo elemento da matriz $d \times d$

$$\left(I - i\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-1}.$$

Uma base para $H^{0,1}(M)$ próxima a origem é dada por $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$.

Como $Dh(0) = -$, note que $L_j|_0 = \partial/\partial w_j$ e $\overline{L}_j|_0 = \partial/\partial \overline{w}_j$, para $1 \leq j \leq n-d$.

Demonstração. Seja

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + \sum_{k=1}^{d} A_{kj}\frac{\partial}{\partial z_k} \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n), \;\; 1 \leq j \leq n-d$$

onde A_{kj} são funções suaves escolhidas tais que $L_j|_M$ pertencem à $H^{1,0}(M)$.

Seja $\rho_j(z,q) = \text{Im } z_j - h_j(x,w)$, $1 \leq j \leq d$. A variedade M é o conjunto zero de $\rho_1, \ldots, \rho_d$. Pelo Lema 6.10, um campo vetorial L em $T^{1,0}(\mathbb{C}^n)|_M$ pertence à $H^{1,0}(M)$, então

$$\langle\, \partial\rho_l, L \,\rangle = 0 \;\text{ em }\; M \;\text{ para }\; 1 \leq l \leq d,$$

onde $\langle\;,\;\rangle$ denota o pareamento entra l-formas e vetores. Inserindo $L = L_j$ nessa equação, obtemos

$$\frac{1}{2i}A_{lj} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial h_l}{\partial x_k}A_{kj} - \frac{\partial h_l}{\partial w_j} = 0,$$

para $1 \leq l \leq d$ e $1 \leq j \leq n-d$. Podendo ser reescrito na forma de matriz como

$$\frac{1}{2i}\left[I - i\frac{\partial h}{\partial x}\right] \cdot (A) = \frac{\partial h}{\partial w}.$$

A fórmula para L_j dado no teorema é provada. Como $H^{0,1}(M) = \overline{H^{1,0}(M)}$ o conjunto

$$\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}\}$$

forma uma base local para $H^{0,1}(M)$. $\square$

A função gráfico h em M independe da variável x, então uma base local no Teorema 6.20 para $H^{1,0}(M)$ tem uma forma mais simples de ser expressada

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i\sum_{l=1}^{d}\frac{\partial h_l}{\partial w_j}\frac{\partial}{\partial z_l} \;\; 1 \leq j \leq n-d.$$

Cuja variedade damos um nome especial.

Definição 6.21. *Uma subvariedade CR da forma*

$$M = \left\{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(w)\right\}$$

onde $h : \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *é suave com* $h(0) = 0$ *e* $Dh(0) = 0$ *é chamada rígida.*

6.3 Subvariedades Quadráticas

Pelo Teorema 6.19 , uma subvariedade CR genérica e suave de $\mathbb{C}^n$ tem uma função gráfico h localmente definida sem termos na sua expansão de Taylor até certa ordem. Em particular, os termos quadráticos na expansão de Taylor de h não contém termos envolvendo as coordenadas x. Portanto todas as informações de segunda ordem estão contidas no termo

$$q(w, \overline{w}) = \sum_{j,k=1}^{n-d} \frac{\partial h^2(0)}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} w_j \overline{w}_k.$$

Substituindo $\overline{w}$ pela variável independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$, obtemos uma forma quadrática.

Definição 6.22. *Uma aplicação* $q : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^d$ *é uma forma quadrática se*

i) q *é bilinear sobre* $\mathbb{C}$*;*

ii) q *é simétrica, ou seja,* $q(w, \eta) = q(\eta, w)$ *para* $w, \eta \in \mathbb{C}^m$*;*

iii) $\overline{q(w, \eta)} = q(\overline{w}, \overline{\eta})$ *para* $w, \eta \in \mathbb{C}^m$.

Definição 6.23. *Uma subvariedade* $M \subset \mathbb{C}^n$ *definida por*

$$M = \left\{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = q(w, \overline{w})\right\},$$

onde $q : \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ *é uma forma quadrática é chamada de subvariedade quadrática de* $\mathbb{C}^n$.

Os requerimentos *ii)* e *iii)* da Definição 6.22 implicam que $q(w, \overline{w})$ é um vetor em $\mathbb{R}^d$. Logo, a subvariedade quadrática da Definição 6.23 é uma subvariedade de dimensão real $2n - d$ bem definida.

Subvariedades quadráticas são rigidas pois suas funções gráfico são independentes de x. Como veremos, a classe de subvariedades quadráticas garante exemplos mais fáceis de serem estudados. Da discussão do começo dessa seção, qualquer subvariedade CR genérica pode ser aproximada à terceira ordem na origem por uma subvariedade quadrática. Portanto, uma subvariedade quadrática serve frequentemente como um modelo para uma subvariedade CR mais geral.

Outra razão do porquê subvariedades quadráticas são interessantes é que cada subvariedade quadrática tem uma estrutura de grupo, cuja estrutura deescreveremos agora.

Definição 6.24. *Seja* $q : \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ *uma forma quadrática. Para* $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$*, define*

$$(z_1, w_1) \circ (z_2, w_2) = (z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2), w_1 + w_2).$$

Lema 6.25. *A operação* $\circ$ *define uma estrutura de grupo em* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ *que se restringe a uma estrutura de grupo em* $M \times M$*, onde* $M = \{y = q(w, \overline{w})\}$*.*

Demonstração. Sejam $(z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, então

$$\begin{aligned}
[(z_1, w_1) \circ (z_2, w_2)] \circ (z_3, w_3) &= (z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2), w_1 + w_2) \circ (z_3, w_3) \\
&= (z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2) + z_3 + 2iq(w_1 + w_2, \overline{w_3}), w_1 + w_2 + w_3) \\
&= (z_1 + z_2 + z_3 + 2iq(w_2, \overline{w_3}) + 2iq(w_1, \overline{w}_2 + \overline{w_3}), w_1 + w_2 + w_3) \\
&= (z_1, w_1) \circ [(z_2 + z_3 + 2iq(w_2, \overline{w_3}), w_2 + w_3) \\
&= (z_1, w_1) \circ [(z_2, w_2) \circ (z_3, w_3)].
\end{aligned}$$

o que prova a associatividade da opreação $\circ$.

Queremos determinar um elemento neutro $(z_e, w_e) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tal que

$$\begin{aligned}
(z, w) \circ (z_e, w_e) = (z_e, w_e) \circ (z, w) = z, w) \\
(z + z_e + 2iq(w, \overline{w}_e), w + w_e) = (z_e + z + 2iq(w_e, \overline{w}), w_e + w).
\end{aligned}$$

Claramente $w_e = z_e = 0$, logo o elemento neutro da operação $\circ$ é a origem de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Agora, determinemos o elementro simétrico da operação $\circ$. Seja $(z', w') \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ então,

$$\begin{aligned}
(z, w) \circ (z', w') = (z', w') \circ (z, w) = (0, 0) \\
(z + z' + 2iq(w, \overline{w}'), w + \overline{w}') = (z' + z + 2iq(w', \overline{w}), w' + w) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Claramente $w' = -w$. Assim

$$\begin{aligned}
z + z' + 2iq(w, -w) &= 0 \\
z' &= -z - 2iq(w, -w) \\
&= -z + 2iq(w, \overline{w}).
\end{aligned}$$

Agora resta mostrar que a operação $\circ$ se restringe a uma estrutura de grupo em $M \times M$. Se (z_1, w_1) e (z_2, w_2) pertencem a M, então Im $z_1 = q(w_1, \overline{w}_1)$ e Im $z_2 = q(w_2, \overline{w}_2)$.

Portanto,

$$\text{Im } \{z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2)\} = q(w_1, \overline{w}_1) + q(w_2, \overline{w}_2) + 2\text{Re } q(w_1, \overline{w}_2).$$

Usando as propriedade de q da Definição 6.22, isso pode ser reescrito como

$$\text{Im } \{z_1 + z_2 + 2iq(w_1, \overline{w}_2)\} = q(w_1 + w_2, \overline{w}_1 + \overline{w}_2).$$

O que mostra que $M \times M$ é fechado sob a operação $\circ$. A prova que (z', w') também pertence a M segue facilmente. Isso completa a prova do lema. $\square$

O lema implica que uma subvariedade quadrática é um grupo de Lie, o que significa que a operação de grupo $(\circ) : M \times M \longrightarrow M$ é uma função suave. Para
$p_0 = (z_0, w_0) \in M$, define a aplicação $G_{p_0} : M \longrightarrow M$

$$\begin{aligned} G_{p_0}(z, w) &= (z, w) \circ (z_0, w_0) \\ &= (z + z_0 + 2qi(w, \overline{w}_0), w + w_0). \end{aligned}$$

$G_{p_0}(z, w)$ é uma função suave em ambos (z, w) e p_0. Para um ponto fixado p_0, G_{p_0} é a restrição de uma aplicação holomorfa pois q é uma função linear complexa.

Do Teorema 6.20, os geradores para $H^{1,0}(M)$ são

$$L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial q_l}{\partial w_j} \frac{\partial}{\partial z_l} \quad 1 \leq j \leq n - d$$

onde temos que $q = (q_1, \ldots, q_d)$.

Do mesmo modo, os geradores para $H^{0,1}(M)$ são $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$. Esses capos vetoriais são globalmente definidos pois M é globalmente apresentado como o gráfico de q. Também note que $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/x_d$ são globalmente gerados pela parte totalmente real do fibrado tangente $X(M)$.

Esses campos vetoriais $L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}$ e $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/x_d$ possuem outra propriedade importante. Eles são invariantes sob a ação de grupo $(\circ)$ para M. Isso significa que a aplicação $(z, w) \longrightarrow G_{p_0}(z, w)$ leva a origem ao ponto $p_0 = (z_0, w_0) \in M$. Portanto, $(G_{p_0})_*(0)$ é uma aplicação linear complexa de $T_0(M) \otimes \mathbb{C}$ à $T_{p_0}(M) \otimes \mathbb{C}$.

Definição 6.26. *Um campo vetorial $L \in T^{\mathbb{C}}(M)$ é dita ser invariante à esquerda para o grupo de ação $(\circ)$ para M se*

$$(G_p)_*(0) \{L_0\} = L_p \quad \textit{para cada} \;\; p \in M$$

onde $G_p(z, w) = (z, w) \circ p$.

Como $G_{p_1} \circ G_{p_2} = G_{p_1 \circ p_2}$ e $(G_{p_1} \circ G_{p_2})_* = (G_{p_1})_* \circ (G_{p_2})_*$, com $p_1, p_2 \in M$, então um campo L invariante à esquerda satisfaz

$$(G_{p_1})_*(p_2)\left\{L_{p_2}\right\} = L_{p_2 \circ p_1} \text{ para } p_1, p_2 \in M.$$

Teorema 6.27. *Os campos vetoriais*

$$\begin{aligned} L_j = \frac{\partial}{\partial w_j} + 2i\sum_{l=1}^{d} \frac{\partial q_l}{\partial w_j}\frac{\partial}{\partial z_l} &\quad l \leq j \leq n-d \\ \overline{L}_j &\quad l \leq j \leq n-d \\ \frac{\partial}{\partial x_j} &\quad l \leq j \leq d \end{aligned}$$

são invariantes para o grupo de ação $(\circ)$ *definidos em* $M = \{y = q(w, \overline{w})\}$.

Demonstração. Se $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ é uma aplicação suave, então

$$\begin{aligned} G_*(0)\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\right\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial \zeta_j}(0)\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial \overline{G}_k}{\partial \zeta_j}(0)\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_k}, \\ G_*(0)\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_j}\right\} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_k}{\partial \overline{\zeta}_j}(0)\frac{\partial}{\partial \zeta_k} + \overline{\left(\frac{\partial \overline{G}_k}{\partial \zeta_j}(0)\right)}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_k} \end{aligned}$$

onde escrevemos $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ como coordenadas de $\mathbb{C}^n$ e as funções componentes de G como $G = (G_1, \ldots, G_n)$.

No nosso caso, a aplicação $G_p(\zeta) = G_p(z, w)$ é holomorfa em $\zeta = (z, w) \in \mathbb{C}^n$, e também $\partial G_p/\partial \overline{\zeta}_j = 0\partial(\overline{G}_p)/\partial \zeta_j$. Usando a fórmula para L_j e escrevendo $\partial/\partial x_j = \partial/\partial z_j + \partial/\partial \overline{z}_j$, a prova do teorema se reduz a um simples cálculo. □

Exemplo 6.28. Um dos mais importantes de uma subvariedade quadrática é o grupo de Heisenberg. Isso é a hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$ definida por

$$M = \left\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}; \operatorname{Im} z = |w|^2\right\}.$$

Aqui, $q(w, \eta) = w \cdot \eta = \sum_{j=1}^{n-1} w_j \eta_j$ para $w = (w_1, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. A ação de grupo dada por

$$(z^1, w^1) \circ (z^2, w^2) = (z^1 + z^2 + 2iqw^1 \cdot \overline{w}^2, w^1 + w^2)$$

para $(z^1, w^1), (z^2, w^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$.

Os geradores invariantes para $H^{1,0}(M)$ são dados por

$$L_j = 2i\overline{w}_j\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w_j} \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Os campos vetorial $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-1}$ geram $H^{0,1}(M)$ e o campo vatorial invariante $\partial/\partial x$ (onde $x = \text{Re } z$) geram $X(M)$.

Concluíremos essa seção em superfícies quadráticas pela derivação de uma forma normal para as superfícies quadráticas de codimensão real dois em $\mathbb{C}^4$. Essa forma normal será útil para exibir vários tipos de extensões CR.

Seja (z_1, z_2, w_1, w_2) as coordenadas para $\mathbb{C}^4$ e escrevemos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Uma codimensão dois quadrática em $\mathbb{C}^4$ tem a forma

$$M = \left\{ \begin{array}{c} y_1 = q_1(w, \overline{w}) \\ y_2 = q_2(w, \overline{w}) \end{array} \right\},$$

onde q_1 e q_2 são formas quadráticas de valores escalares em $\mathbb{C}^2$. Dizemos que q_1 e q_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ se as restrições de q_1 e q_2 ao conjunto $\{(w, \overline{w}; w \in \mathbb{C}^2\}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ no sentido usual. Das propriedades de uma forma quarática dada na Definição 6.22, é fácil ver que q_1 e q_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ se e somente se q_1 e q_2 como funções de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 6.29. *Seja M uma subvariedade quadrática de codimensão dois de $\mathbb{C}^4$ definida por*

$$M = \left\{ \begin{array}{c} y_1 = q_1(w, \overline{w}) \\ y_2 = q_2(w, \overline{w}) \end{array} \right\}.$$

a) Se q_1 e q_2 são linearmente dependentes sobre $\mathbb{R}$, então existe uma mudança de coordenadas complexa linear e não singular em $\mathbb{C}^4$ tal que nas novas coordenadas

$$M = \left\{ \begin{array}{cl} y_1 & = q_1(w, \overline{w}) \\ y_2 & = 0 \end{array} \right\}$$

onde q_1 é uma forma quadrática de valores escalares.

b) Se q_1 e q_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, então existe uma mudança de coordenadas complexa linear e não singular em $\mathbb{C}^4$ tal que nas novas coordenadas M tem uma das seguintes formas:

i) $M = \left\{ \begin{array}{c} y_1 = |w_1|^2 \\ y_2 = |w_2|^2 \end{array} \right\}$

ii) $M = \left\{ \begin{array}{cl} y_1 & = |w_1|^2 \\ y_2 & = \mathit{Re}\,(w_1\overline{w}_2) \end{array} \right\}$

iii) $M = \left\{ \begin{array}{c} y_1 = \mathit{Re}\,(w_1\overline{w}_2) \\ y_2 = \mathit{Im}\,(w_1\overline{w}_2) \end{array} \right\}.$

Demonstração. Para a parte *a)*, se $q_2 = \lambda q_1$ para alguma $\lambda \in \mathbb{R}$, então temos a seguinte mudança de variáveis linear complexa e não singular

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 \\ \widehat{z}_2 &= z_2 - \lambda z_1 \\ \widehat{w}_1 &= w_1 \\ \widehat{w}_2 &= w_2. \end{aligned}$$

Nas novas coordenadas

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1 = \text{Im}\, \widehat{z}_1 &= \text{Im}\, z_1 \\ &= q_1(w, \overline{w}) \text{ para } (z, w) \in M \\ &= q_1(\widehat{w}, \widehat{w}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{y} = \text{Im}\, \widehat{z}_2 &= \text{Im}\, z_2 - \lambda \text{Im}\, z_1 \\ &= q_2(w, \overline{w}) - \lambda q_1(w, \overline{w}) \text{ para } (z, w) \in M \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $\widehat{M}$ é a imagem de M sob a aplicação $(z, w) \longrightarrow (\widehat{z}, \widehat{w})$, então $\widehat{M}$ é definido por

$$\begin{aligned} \widehat{y}_1 &= q_1(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) \\ \widehat{y}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Isso completa a prova da parte *a)*.

Para a parte *b)*, começaremos pela diagonalização da matriz de q_1. Isso pode ser feito por uma mudança unitária de coordenadas somente em w_1 e w_2. Após isso, existem três casos para considerar:

1. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 + |w_2|^2$ (q_1 é positivo)
2. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 - |w_2|^2$ (q_1 tem autovalores de sinais opostos)
3. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2$ (q_1 tem um autovalor)

No caso 1 também inclue o caso onde q_1 é negativo, para esse caso, a mudança de variáveis $\widehat{z} = -z$ e $\widehat{w} = w$ tornará o resultado de q_1 positivo.

Seja

$$q_1(w, \overline{w}) = A|w_1|^2 + 2\text{Re}(\lambda w_1, \overline{w}_2) + C|w_2|^2,$$

onde A e C são reais e λ é complexo.

Caso 1. (q_1 é positivo). Primeiramente, olhando para os números complexos a e b, com $b \neq 0$, e o número real t tais que

$$q_2(w,\overline{w}) + tq_1(w,\overline{w}) = |aw_1 + bw_2|^2.$$

Expandindo essa equação, vemos que a, b e t devem satisfazer

$$\begin{aligned} a\bar{b} &= \lambda \\ |a|^2 &= A + t \\ |b|^2 &= C + t. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, então seguimos da seguinte forma. Temos $A > C$ ou $C > A$, para $A = C$ e $\lambda = 0$, então q_1 e q_2 são linearmente dependentes. Trocando as posições de w_1 e w_2 se necessário, assumimos $C > A$. Seja $a = 0$. Assim temos $t = -A$, daí $|b|^2 = C - A > 0$. Então, seja $b = \sqrt{C - A}$. Com essas escolhas, as equações do sistema 6.5 são satisfeitas com $b \neq 0$.

Se $\lambda \neq 0$, então devemos escolher a e b não nulos. Do sistema de equações 6.5, temos que

$$A + t = |a|^2 = \frac{|\lambda|^2}{|b|^2} = \frac{|\lambda|^2}{C + t}.$$

Isso pode ser rearranjado como a equação quadrática em t da forma

$$t^2 + (A + C)t + (AC - |\lambda|^2) = 0. \tag{6.5}$$

O discriminante, $(A+C)^2 - 4(AC - |\lambda|^2) = (A - C)^2 + 4|\lambda|^2$, é positiva pois $\lambda \neq 0$. Portanto, de 6.5 possui duas raízes reais distintas. Seja t a maior raíz.Claramente, $t + A > 0$ e $t + C > 0$ pois $(t + A)(t + C) = |\lambda|^2 > 0$. Seja θ o argumento de λ. As equações do sistema 6.5 são satisfeitas pela escolha de t e

$$\begin{aligned} a &= (t + A)^{1/2} e^{i\theta} \\ b &= (t + C)^{1/2} > 0. \end{aligned}$$

Com essa escolha de a, b, t, temos que

$$\begin{aligned} q_1(w,\overline{w}) &= |w_1|^2 + |w_2|^2 \\ q_2(w,\overline{w}) + tq_1(w,\overline{w}) &= |aw_1 + bw_2|^2. \end{aligned}$$

Definindo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 \\ \widehat{z}_2 &= z_2 + tz_1 \\ \widehat{w}_1 &= w_1 \\ \widehat{w}_2 &= aw_1 + bw_2. \end{aligned}$$

Essa é uma aplicação linear não singular pois $b \neq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \text{Im } \widehat{z}_1 &= \text{Im } z_1 \\ &= q_1(w, \overline{w}) \ \ (\text{se } (z, w) \in M) \\ &= |w_1|^2 + |w_2|^2 \\ &= |\overline{w}_1|^2 + \left| \frac{1}{2}(\widehat{w}_2 - a\widehat{w}_1) \right|^2 \\ &= \alpha |w_1|^2 + 2\text{Re}(\gamma \widehat{2}_1 \overline{\widehat{w}}_2) + \beta |\widehat{w}_2|^2 \end{aligned}$$

onde α e β são números reais positivos e γ é um número complexo. Analogamente

$$\begin{aligned} \text{Im } \widehat{z}_2 &= \text{Im } z_2 + t\text{Im } z_1 \\ &= q_2(w, \overline{w}) + tq_1(w, \overline{w}) \ \ (\text{se } (z, w) \in M) \\ &= |aw_1 + bw_2|^2 \\ &= |\widehat{w}_2|^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $\widehat{M}$ é a imagem de M sob a aplicação linear $(z, w) \longrightarrow (\widehat{z}, \widehat{w})$, então, em novas coordenadas, $\widehat{M} = \left\{ \text{Im } \widehat{z} = \widehat{q}(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) \right\}$ com $\widehat{q} = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2)$ onde

$$\begin{aligned} \widehat{q}_1(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) &= \alpha |\widehat{w}_1|^2 + 2\text{Re}(\gamma \widehat{w}_1 \overline{\widehat{w}}_2) + \beta |\widehat{w}_2|^2 \\ \widehat{q}_2(\widehat{w}, \overline{\widehat{w}}) &= |\widehat{w}_2|^2. \end{aligned}$$

Agora, completamos a raíz em $\widehat{q}_1$. Após de remover o $\wedge$, obtemos

$$q_1(w, \overline{w}) = |\alpha^{1/2} w_1 + \overline{\gamma} \alpha^{-1/2} w_2|^2 + (\beta - |\gamma|^2 \alpha^{-1}) |w_2|^2$$

Fazendo mais uma mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \widehat{z}_1 &= z_1 - (\beta - |\gamma|^2 \alpha^{-1}) z_2 \\ \widehat{z}_2 &= z_2 \\ \widehat{w}_1 &= \alpha^{1/2} w_1 + \overline{\gamma} \alpha^{-1/2} w_2 \\ \widehat{w}_2 &= w_2. \end{aligned}$$

Essa mudança de coordenadas é não singular pois $\alpha > 0$. Novamente, seja $\widehat{M}$ a imagem de M sob a aplicação $(z, w) \longrightarrow (\widehat{z}, \widehat{w})$. A equação definida para $\widehat{M}$ em novas coordenadas é dada por

$$\widehat{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Im } \widehat{z}_1 = |\widehat{w}_1|^2 \\ \text{Im } \widehat{z}_2 = |\widehat{w}_2|^2 \end{array} \right\},$$

o que é a forma normal em *i)* da parte *b)* do teorema.

Caso 2. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2 - |w_2|^2$ (q_1 tem autovalores de sinais opostos). Nesse caso, fazemos a seguinte mudança de coordenadas linear e não singular

$$\begin{aligned} z_1 &= \widehat{z}_1 \\ z_2 &= \widehat{z}_2 \\ w_1 &= \frac{1}{2}(\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2) \\ w_2 &= \frac{1}{2}(\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2). \end{aligned}$$

Nas novas coordenadas, a imagem de M, após remover $\wedge$, é dada por

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Im } z_1 & = \text{Re}(w_1\overline{w}_2) \\ \text{Im } z_2 & = A|w_1|^2 + 2\text{Re}(\lambda w_1 \overline{w}_2) + B|w_2|^2 \end{array} \right\},$$

para alguma escolha de $A, B \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Seja

$$\lambda = r + si \;\text{ e }\; r, s \in \mathbb{R}.$$

Após a mudança de variáveis $\widehat{z}_1 = z_1, \widehat{z}_2 = z_2 - 2rz_1, \widehat{w}_1 = w_1, \widehat{w}_2 = w_2$, M é dada, removendo $\wedge$, por $\{\text{Im } z_1 = q_1(w, \overline{w}), \text{Im } z_2 = q_2(w, \overline{w})\}$ onde

$$\begin{aligned} q_1(w, \overline{w}) &= \text{Re}(w_1\overline{w}_2) \\ q_2(w, \overline{w}) &= A|w_1|^2 - 2s\text{Im}(w_1\overline{w}_2) + B|w_2|^2. \end{aligned}$$

Na forma de mattriz, temos que

$$q_2(w, \overline{w}) = (\overline{w}_1, \overline{w}_2) \begin{pmatrix} A & -is \\ is & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Se o determinante $AB - s^2$ é positivo, então a matriz de q_2 é positiva ou negativa e daí caímos no Caso 1 com as posições de q_1 e q_2 trocadas. Isso nos leva a forma normal dada *i)* da parte *b)*. Então, assumimos que

$$AB - s^2 \leq 0.$$

Primeiro, provemos que o coeficiente de $|w_1|^2$ em q_2 se anula em uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{aligned} z_1 &= \widehat{z}_1 \\ z_2 &= \widehat{z}_2 \\ w_1 &= \widehat{w}_1 \\ w_2 &= \widehat{w}_2 + it\widehat{w}_1, \end{aligned}$$

para um $t \in \mathbb{R}$ apropriado que será escolhido posteriormente. Essa mudança de variáveis preserva q_1, então obtemos

$$q_2(w, \overline{w}) = (A + 2st + Bt^2)|\widehat{w}_1|^2 - 2(s + Bt)\text{Im}(\widehat{w}_1\overline{\widehat{w}}_2) + B|\widehat{w}_2|^2.$$

Existe uma raíz real t para a equação quadrática $A + 2st + Bt^2 = 0$ pois o discriminante $4(s^2 - AB)$ é não negativo. Com essa escolha de t, o coeficiente de $|\widehat{w}_1|^2$ se anula e então, depois de remover $\wedge$, temos que

$$\begin{aligned} q_1(w, \overline{w}) &= \text{Re}(w_1\overline{w}_2) \\ q_2(w, \overline{w}) &= \alpha\text{Im}(w_1\overline{w}_2) + \beta|w_2|^2, \end{aligned}$$

onde α e β são números reais.

Se $\alpha = 0$ então, β deve ser não nulo, caso contrário $q_2 \equiv 0$. Após reescalar na variável z_2, M é uma forma normal dada em *ii)* da parte *b)* com as posições de w_1, w_2, z_1 e z_2 revertidas.

Se $\alpha \neq 0$, então forçamos o coeficiente de $|w_2|^2$ se anular por uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{aligned} z_1 &= \widehat{z}_2 \\ z_2 &= \widehat{z}_2 \\ w_1 &= \widehat{w}_1 + it\widehat{w}_2 \\ w_2 &= \widehat{w}_2, \end{aligned}$$

onde t é um número real. Novamente, qualquer mudança de variáveis dessa forma preserva q_1. Temos

$$q_2(w, \overline{w}) = \alpha\text{Im}(\widehat{w}_1, \overline{\widehat{w}}_2) + (\beta + \alpha t)|\widehat{w}_2|^2.$$

Como $\alpha \neq 0$, seja $t = -\beta\alpha^{-1}$, que força o coeficiente de $|w_2|^2$ se anular. Após uma reescala na variável na variável z_2, M agora é a forma normal dada em *iii)* da parte *b)*.

Caso 3. $q_1(w, \overline{w}) = |w_1|^2$ (q_1 tem um autovalor nulo). Seja

$$q_2(w, \overline{w}) = A|w_1|^2 + 2\text{Re}(\alpha w_1\overline{w}_2) + B|w_2|^2,$$

onde A e B são reais e λ é complexo. Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1 &= z_1\\ \widehat{z}_2 &= z_2 - Az_1\\ \widehat{w}_1 &= w_1\\ \widehat{w}_2 &= w_2.\end{aligned}$$

Agora em novas variáveis, M é definida por

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Im } \widehat{z}_1 & = |\widehat{w}_1|^2 \\ \text{Im } z_2 & = 2\text{Re}(\lambda \widehat{w}_1 \overline{\widehat{w}}_2) + B|\widehat{w}_2|^2 \end{array} \right\}.$$

Seja $q_2(w, \overline{w}) = 2\text{Re}(\alpha w_1 \overline{w}_2) + B|w_2|^2$. A matriz que representa q_2 é

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha} \\ \alpha & B \end{pmatrix}.$$

Se $\alpha \neq 0$, então o determinante dessa matriz é $-|\lambda|^2$ que é negativa. Logo, os autovalores da matriz de q_2 tem sinais opostos e isso cai no Caso 2 acima com as posições de q_1 e q_2 revertidas. Se $\alpha = 0$ então, após uma reescala, M tem uma forma normal dada em *i)* da parte *b)*. A prova do teorema está completa. □

6.4 VARIEDADES CR ABSTRATAS

Até aqui, estamos lidando com subvariedades CR de $\mathbb{C}^n$. Nessa seção, definiremos o conceito de uma variedade CR abstrata que não requer menção de um ambiente $\mathbb{C}^n$ ou uma variedade complexa.

Seja M uma variedade $\mathbb{C}^\infty$ abstrata. Como definido anteriormente, $T^{\mathbb{C}}(M)$ denota o fibrado tangente complexificado cuja fibra em cada ponto $p \in M$ é $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, do Lema 6.11, então

i) $H^{1,0}(M) \cap \overline{H^{1,0}(M)} = \{0\}$

ii) $H^{1,0}(M)$ e $H^{0,1}(M)$ são involutivos.

Essas duas propriedades não fazem menção de uma estrutura complexa em $\mathbb{C}^n$ além de definir o espaço $H^{1,0}(M)$. Portanto, definimos uma variedade CR abstrata sendo uma variedade junto de um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$ que satisfaça as propriedades i) e ii).

Definição 6.30. *Seja M uma variedade C^∞ e suponha que $\mathbb{L}$ é um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$. O par $(M, \mathbb{L})$ é chamado de variedade CR abstrata ou estrutura CR se*

a) $\mathbb{L}_p \cap \overline{\mathbb{L}}_p = \{0\}$ para cada $p \in M$.

b) $\mathbb{L}$ *é envolutivo, ou seja,* $[L_1, L_2]$ *pertence à* $\mathbb{L}$ *sempre que* $L_1, L_2 \in \mathbb{L}$.

É claro que da discussão acima que se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então o par $(M, \mathbb{L}$ com $\mathbb{L} = H^{1,0}(M)$ é uma estrutura CR.

Pela caso da variedade mergulhada, chamamos $\dim_{\mathbb{C}} \left\{T^{\mathbb{C}}(M)/\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}\right\}$ a codimensão CR de $(M, \mathbb{L})$.

Existe uma aplicação de estrutura complexa J definida em um subfibrado real que gera $\mathbb{L}$ então, os autoespaços da extensão de J à $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ são $\mathbb{L}$ para o autovalor $+i$ e $\overline{\mathbb{L}}$ para o autovalor $-i$.

Exemplo 6.31. Dizemos que o par $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura quase complexa se $\mathbb{L}$ é um subfibrado de $T^{\mathbb{C}}(M)$ com $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} = T^{\mathbb{C}}(M)$. Em particular, $\mathbb{L} \cap \overline{\mathbb{L}} = \{0\}$. Portanto, uma estrutura involutiva quase complexa é um exemplo de uma estrutura CR.

Como uma variedade complexa pode ser localmente mergulhada em $\mathbb{C}^n$ (definição), isso incita a questão análoga para variedades CR. Se $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR abstrata, então existe um difeomorfismo localmente definido $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\Phi(M)$ é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$ com $\Phi_* \{\mathbb{L}\} = H^{1,0}(\Phi\{M\})$? Esse último requerimento para Φ implica que a estrutura CR para M (nomeadamente $\mathbb{L}$) tem a ação do *push forward* a estrutura CR para $\Phi\{M\}$ (nomeadamente $H^{1,0}(\Phi\{M\})$). A resposta para essa questão é um sonoro sim. Se M é analítica real, então existe uma incorporação, como veremos posteriormente. Se M é somente suave, então a resposta, no geral, é não, como também veremos posteriormente, onde apresentaremos o contraexemplo de Nirenberg. Existem outras condições em uma estrutura CR suave que garantem uma incorporação local e discutiremos brevemente.

7 FUNÇÕES E APLICAÇÕES CR

Neste capítulo definiremos o objeto de estudo mais importante deste trabalho: as funções CR, porém antes precisamos definir o operador Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann. Sendo assim, começaremos com a definição para prosseguir da forma desejada.

Para uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, existem duas formas de definir o complexo tangencial de Cauchy-Riemann e ambas estratégias são encontradas na literatura, dessa forma apresentaremos as duas. A primeira forma é uma aproximação extrínseca que usa o $\overline{\partial}$-complexo do ambiente $\mathbb{C}^n$. A segunda forma é uma aproximação intrínseca que não usa o ambiente de $\mathbb{C}^n$ e portanto se generaliza para variedades CR. No caso da variedade mergulhada, essas aproximações levam ao complexo tangencial diferencial de Cauchy-Riemann.

7.1 Aproximação Extrínseca

Lembremos que o fibrado das (p,q)-formas em $\mathbb{C}^n$ é denotado por $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$. O espaço das seções suaves de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ sobre um conjunto aberto U em $\mathbb{C}^n$ é denotado por $\mathcal{E}^{p,q}(U)$. Relembremos também que propriedades do fibrado das (p,q)-formas e sua relação com o operador $\overline{\partial} : \mathcal{E}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}$ foram dados anteriormente. Ainda, para cada ponto $p_0 \in \mathbb{C}^n$, o produto interno Hermitiano em $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$ é definido declarando que o conjunto $\left\{dz^I \wedge d\overline{z}^J; |I| = p, |J| = q\right\}$, com I, J crescentes, é uma base ortonormal.

Seja M uma subvariedade CR suave genérica de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real $2n-d$. Definimos $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é a restrição do fibrado $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ a M, ou seja, $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é união de $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$ onde p_0 percorre M. Esse espaço é diferente do espaço

$$\{j^*\omega; \omega \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)\},$$

onde $j : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ é a aplicação inclusão. Uma seção suave de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ é um elemento da forma

$$f = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} f_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n),$$

com funções coeficientes f_{IJ} restritas à M.

Para $0 \leq p, q \leq n$, definimos $I^{p,q}$ o ideal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ que é gerado por ρ e $\overline{\rho}$ onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função suave que se anula em M. Os elementos de $I^{p,q}$ são somas de formas do tipo

$$\Phi_1\rho + \Phi_2 \wedge \overline{\partial}\rho, \;\; \Phi_1 \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n), \;\; \Phi_2 \in \Lambda^{p,q-1}T^*(\mathbb{C}^n).$$

Se $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ é um sistema de local definido para M, então $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ localmente gera o ideal de todas as funções de valores real que se anulam em M. Portanto, $I^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ é localmente gerado por

$$\rho_1, \ldots, \rho_d, \overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d.$$

A restrição de $I^{p,q}$ a M, denotado por $I^{p,q}|_M$, é o ideal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ localmente gerado por $\overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d$. Como M é CR, a dimensão da fibra $I^{p,q}|_M$ independe do ponto $p_0 \in M$. Portanto, $I^{p,q}|_M$ é um subfibrado de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$.

Seja $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é o complemento ortogonal de $I^{p,q}|_M$ em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Elementos em $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(M)$ para $p_0 \in M$ são ortogonais ao ideal em $\Lambda^{p,q}_{p_0}T^*(\mathbb{C}^n)$ gerados por $\overline{\partial}\rho_1(p_0), \ldots, \overline{\partial}\rho_d(p_0)$. Seja k o número de elementos linearmente independentes de

$$\left\{\overline{\partial}\rho_1(p_0), \ldots, \overline{\partial}\rho_d(p_0)\right\},$$

ou seja, k é a codimensão CR de M. Como M é CR, k independe do ponto $p_0 \in M$. Logo, o espaço $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é um subfibrado de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Note que $\Lambda^{p,q}T^*(M) = 0$ se $p > n$ ou $q > n - k$. Se M é genérica, então $k = d$ pelo Lema 6.14.

O espaço $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ não é intrínsico a M, ou seja, não é um subespaço da álgebra exterior gerada pelo fibrado cotangente complexificado de M. Isso se dá ao fato que se $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se anula em M, então, $\overline{\partial}\rho = (1/2)(d\rho + iJ^*d\rho)$ m]ap é ortogonal ao fibrado cotangente de M pela presença de $J^*d\rho$.

Para $0 \leq s$, seja

$$\Lambda^s_M = \Lambda^{s,0}T^*(M) \oplus \cdots \oplus \Lambda^{0,s}T^*(M)$$

onde alguns dos fatores à direita podem se anular. O espaço Λ^s_M não é o mesmo espaço que $\Lambda^s T^*(M)$. O espaço $\Lambda^s T^*(M)$ é intrínseco a M enquanto o espaço Λ^s_M não.

Exemplo 7.1. Seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; \mathrm{Im}\, z = 0\}$, então $\rho(z, w) = (2i)^{-1}(z - \overline{z})$. Temos que $\overline{\partial}\rho = -(i/2)d\overline{z}$ e então, $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é o espaço das (p, q)-formas em M que são ortogonais ao ideal gerado por $d\overline{z}$. Em particular, $\Lambda^{2,1}T^*(M)$ é gerado pela forma $dz \wedge dw \wedge d\overline{w}$ e $\Lambda^{1,2}T^*(M) = 0$. Portanto, $\Lambda^3_M = \Lambda^{2,1}T^*(M)$, onde $\Lambda^3 T^*(M)$ é o espaço gerado por $dx \wedge dw \wedge d\overline{w}$ onde $x = \mathrm{Re}\, z$. Note que $\{j^*\omega; \omega \in \Lambda^3_M\} = \Lambda^3 T^*(M)$.

Para um conjunto aberto $U \subset M$, o espaço das seções suaves de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ sobre U será denotado por $\mathcal{E}^{p,q}_M(U)$ e $\mathcal{D}^{p,q}_M(U)$ denotará o espaço dos elementos de $\mathcal{E}^{p,q}_M(U)$ com suporte compacto.

Para $0 \leq 0$, seja

$$\mathcal{E}^s_M(U) = \mathcal{E}^{s,0}_M(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{0,s}_M(U)$$

onde algum dos fatores da soma à direita podem se anular. Novamente, note que $\mathcal{E}^s_M \neq \mathcal{E}^2(U)$.

Seja $t_M : \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*(M)$ a projeção ortogonal. De uma forma $f \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$, frequentemente escrevemos f_{t_M} para $t_M(f)$ e denominamos isso de parte tangencial de f. Se f é uma (p,q)-forma suave em $\mathbb{C}^n$, então f_{t_M} é um elemento de $\mathcal{E}_M^{p,q}$. Reciprocamente, qualquer forma $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(U)$ pode ser extendida a um elemento $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$, onde $\widetilde{U}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ com $\widetilde{U} \cap M = U$. Isso é feito escrevendo

$$f = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} f_{IJ} dz^I \wedge d\overline{z}^J \ \text{ com } \ f_{IJ} \in \mathcal{E}(U)$$

e extendendo cada função coeficiente f_{IJ} à um conjunto aberto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$.

Definição 7.2. *Para um conjunto aberto $U \subset M$, o complexo tangencial de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} : \mathcal{E}_M^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{E}_M^{p,q+1}(U)$ é definido a seguir. Para $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(U)$, seja $\widetilde{U}$ um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ com $\widetilde{U} \cap M = U$ e seja $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$ com $\widetilde{f}_{t_M} = f$ em $\widetilde{U} \cap M = U$. Então,*

$$\overline{\partial}_M f = (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M}.$$

A forma $\overline{\partial}_M f$ é calculada extendendo à um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$, então aplicando $\overline{\partial}$ e tomando a parte tangencial do resultado. Devido a existência de muitas possibilidades da extensão de um elemento de $\mathcal{E}_M^{p,q}$, mostraremos que a definição de $\overline{\partial}_M$ independe da extensão.

Lema 7.3. *O operador $\overline{\partial}_M$ está bem definido, ou seja, se $\widetilde{f}_1$ e $\widetilde{f}_2$ são elementos em $\mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$ com $(\widetilde{f}_1)_{t_M} = (\widetilde{f}_2)_{t_M}$ em $M \cap \widetilde{U}$, então $(\overline{\partial}\widetilde{f}_1)_{t_M} = (\overline{\partial}\widetilde{f}_2)_{t_M}$ em $M \cap \widetilde{U}$.*

Demonstração. Note que $(\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2)$ é um elemento de $I^{p,q}$. Portanto, é suficiente provar que $\overline{\partial}$ é uma aplicação suave de $I^{p,q}$ à $I^{p,q+1}$. Se $\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(\widetilde{U})$ e $\beta \in \mathcal{E}^{p,1-1}(\widetilde{U})$ e se $\rho : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ se anula em $M \cap \widetilde{U}$, então

$$\overline{\partial}(\alpha\rho + \beta \wedge \overline{\partial}\rho) = (\overline{\partial}\alpha)\rho + (\alpha + \overline{\partial}\beta) \wedge \overline{\partial}\rho.$$

Onde o lado direito claramente é um elemento de $I^{p,q+1}$. □

Como mencionado anteriormente, os espaços $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ não são intrínsecos a M. Portanto, os espaços $\mathcal{E}_M^{p,q}$ e o operador tangencial de Cauchy-Riemann não são intrínsecos a M. Por essa razão, referimos a Definição 7.2 que o complexo tangencial de Cauchy-Riemann está extrinsicamente definido.

É útil termos uma maneira de computar $\overline{\partial}_M$. Mostremos o caso de uma hipersuperfície real.

Lema 7.4. *Suponha $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) = 0\}$ é uma hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$ onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave com $|d\rho| = 1$ em M. Seja $\mathbb{N} = 4(\partial\rho/\partial z) \cdot \partial/\partial\overline{z} = 4\sum_{j=1}^n (\partial\rho/\partial z_j)(\partial/\partial\overline{z}_j)$. Então,*

$$\phi_{t_M} = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial} \wedge \phi) \ \ para \ \ \phi \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$$

e

$$\overline{\partial}_M f = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \overline{\partial}\widetilde{f}) \ \ para \ \ f \in \mathcal{E}_M^{p,q},$$

onde $\widetilde{f}$ é qualquer (p,q)-forma suave definida com $\widetilde{f}_{t_M} = f$ em M

Demonstração. Como $|d\rho| = 1$, o campo vetorial N é dual a forma $\overline{\partial}\rho$. Se $\phi \in \Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \Lambda^{p,q-1}T^*(\mathbb{C}^n)$, temos

$$(\mathbb{N} \lrcorner \phi) \cdot \psi = \phi \cdot (\overline{\partial}\rho \cdot \psi)$$

onde $(\cdot)$ é o produto interno Hermitiano em $\Lambda^*T^*(\mathbb{C}^n)$. Portanto

$$\mathbb{N} \lrcorner \phi = 0 \text{ em } M \text{ se e somente se } \phi \in \Lambda^{p,q}T^*(M).$$

Da Regra do Produto para $\lrcorner$, temos que

$$\mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \phi) = (\mathbb{N} \lrcorner \overline{\partial}\rho)\phi - \overline{\partial}\rho \wedge (\mathbb{N} \lrcorner \phi).$$

Como $\mathbb{N} \lrcorner \overline{\partial}\rho = |d\rho|^2 = 1$ em M, isso se torna

$$\phi = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \phi) + \overline{\partial}\rho \wedge (\mathbb{N} \lrcorner \phi). \tag{7.1}$$

Agora, $\mathbb{N}\lrcorner(\mathbb{N}\lrcorner) \equiv 0$ e então, $\mathbb{N}\lrcorner(\overline{\partial}\rho\wedge\phi)|_M$ é um elemento de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$. A forma $\overline{\partial}\rho\wedge(\mathbb{N}\lrcorner\phi))$ é um elemento de $I^{p,q}$. Portanto, a Equação 7.1 nos dá uma decomposição ortogonal de um elemento ϕ de $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ em uma parte tangencial $\phi_{t_M} \in \Lambda^{p,q}T^*(M)$ e a componente de ϕ em $I^{p,q}|_M$. Em particular, $\phi_{t_M} = \mathbb{N} \lrcorner (\overline{\partial}\rho \wedge \phi)$, como dito. A fórmula para $\overline{\partial}_M f$ segue da expressão para ϕ_{t_M} e da definição de $\overline{\partial}_M$. □

O termo $\mathbb{N} \lrcorner \phi$ é chamado de componente normal de ϕ e é denotado por ϕ_{n_M}. A Equação 7.1 então, é lida como

$$\phi = \phi_{t_M} + \overline{\partial}\rho \wedge \phi_{n_M} \text{ em } M.$$

Lema 7.5. *Suponha que M é uma subvariedade CR suave de $\mathbb{C}^n$.*

a) $\overline{\partial}_M(f \wedge g) = \overline{\partial}_f \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial}_M g$ *para* $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ *e* $g \in \mathcal{E}_M^{r,s}$.

b) $\overline{\partial}_M \circ \overline{\partial}_M = 0$

Demonstração. A parte *a)* segue facilmente da regra do produto para $\overline{\partial}$

A parte *b)* basta notar que $\overline{\partial}_M f$, então $\overline{\partial} g = 0$. □

É importante interpretar a equação $\overline{\partial}_M f = g$ em termos de correntes. Se M é uma subvariedade suave orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $(1 \leq d \leq n)$, então a corrente integração sobre M é definida por

$$\langle\, [M], \phi\, \rangle_{\mathbb{C}^n} = \int_M \phi \text{ para } \phi \in \mathcal{D}^{2n-d}(\mathbb{C}^n).$$

$[M]$ é uma corrente de grau d e portanto pode ser escrita da forma

$$[M] = [M]^{d,0} + \cdots + [M]^{0,d}.$$

Em particular,

$$\langle\, [M], \phi \,\rangle_{\mathbb{C}^n} = \int_M \phi^{n,n-d} \;\text{ para }\; \phi \in \mathcal{D}^{2n-d}(\mathbb{C}^n),$$

onde $\phi^{n,n-d}$ indica que a parte ϕ de bigrau $(n, n-d)$. Pelo Teorema de Stokes, temos $d[M] = 0$. Como $\overline{\partial}[M]^{0,d}$ é a parte de $d[M]$ de bigrau $(0, d+1)$, temos

$$\overline{\partial}[M]^{0,d} = 0.$$

Lema 7.6. *Seja M uma subvariedade CR genérica e orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$, $1 \leq d \leq n$. Suponha $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$. Então, $f_{t_M} = 0$ em M se e somente se $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ como uma corrente em $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Pelo argumento da partição de unidade, é suficiente provar o lema para formas f com suporte em uma $\mathbb{C}^n$-vizinhança U de dado um ponto $p_0 \in M$. A corrente $[M]$ é dada por $\mu_M \alpha d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d$ onde $\{\rho_1, \ldots, \rho_d\}$ é um sistema de definição local para M próximo à p_0 e $\alpha = |d\rho_1 \wedge \ldots \wedge d\rho_d|^{-1}$. Aqui, μ_M é a distribuição dada pela medida de Hausdorff em M. A parte de bigrau $(0, d)$ dessa corrente é

$$[M]^{0,d} = \mu_M \alpha \overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d.$$

Portanto, para $f \in \mathcal{D}^{p,q}(U)$, $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ se e somente se

$$\overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d \wedge f = 0 \;\text{ em }\; M \cap U.$$

Como M é genérica, temos que $\overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d \neq 0$ e

$$\overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d \wedge f = \overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d \wedge f_{t_M}.$$

Daí segue que $[M]^{0,d} \wedge f = 0$ que é equivalente a $f_{t_M} = 0$ em M. □

Suponha que f é um elemento de $\mathcal{E}_M^{p,q}$. A corrente $[M]^{0,d} \wedge f$ não está bem definida pois $[M]^{0,d}$ é uma corrente em $\mathbb{C}^n$ e f não é definida em $\mathbb{C}^n$. No entanto, podemos definir $[M]^{0,d} \wedge f$ como $[M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}$ onde $\widetilde{f}$ é qualquer (p,q)-forma suave definida com $\widetilde{f}_{t_M} = f$. O 7.6 implica que a definição indeppende da extensão de f.

Lema 7.7. *Suponha M é uma subvariedade CR genérica e orientada de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n-d$. Seja $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{E}_M^{p,q+1}$. A equação $\overline{\partial} f = g$ em M é equivalente a equação de* *corrente*

$$\overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) = g \wedge [M]^{0,d} \quad em \quad \mathbb{C}^n.$$

Demonstração. Do Lema 7.6 e do fato que $\overline{\partial}[M]^{0,d} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) &= \overline{\partial} f \wedge [M]^{0,d} \\ &= (\overline{\partial} f)_{t_M} \wedge [M]^{0,d}. \end{aligned}$$

Portanto $\overline{\partial}(f \wedge [M]^{0,d}) = g \wedge [M]^{0,d}$, como desejado. □

Ambos operadores $\overline{\partial}$ e d satisfazem a fórmula da integração por partes. Para $f \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ e $g \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-1}(\mathbb{C}^n)$, temos

$$\left\langle\, \overline{\partial} f, g \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n} = (-1)^{p+q+1} \left\langle\, f, \overline{\partial} g \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

A mesma fórmula segue, pela definição, se f é uma corrente de bigrau (p,q). Dessa equação, obtemos uma fórmula de integração por partes para $\overline{\partial}_M$. Relembremos que $\langle\ ,\ \rangle_M$ denota o pareamento de correntes em M. Extenderemos o pareamento de correntes aos espaços $\mathcal{D}^r_M$ por

$$\begin{aligned} \langle\, f, g \,\rangle_M &= \int_M f \wedge g \\ &= \langle\, [M] \wedge f, g \,\rangle_{\mathbb{C}^n}, \end{aligned}$$

para $f \in \mathcal{E}^r_M(M)$ e $g \in \mathcal{D}^{2n-d-r}_M(M)$. Para uma variedade genérica M, $\Lambda^{p,q}T^*(M) = 0$ se $p > n$ ou $q > n-d$. Portanto, se $f \in \mathcal{E}^{p,q}_M$ e $g \in \mathcal{D}^{2n-d-(p+q)}_M$, então

$$\langle\, f, g \,\rangle_M = \left\langle\, f, g^{n-p,n-q-d} \,\right\rangle_M,$$

onde $g^{n-p,n-q-d}$ é a parte de bigrau $(n-p, n-q-d)$ de g. Se $f \in \mathcal{E}^{p,q}_M$ e $g \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-d}_M$, então $f \wedge g$ tem bigrau $(m, n-d)$ e então,

$$\begin{aligned} \langle\, f, g \,\rangle_M &= \int_M f \wedge g \\ &= \left\langle\, [M]^{0,d} \wedge f, g \,\right\rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Lema 7.8. *Suponha M é uma subvariedade CR genérica e orientada de $\mathbb{C}^n$ com dimensãoo real $2n-d$. Seja $f \in \mathcal{E}^{p,q}_M(M)$ e $g \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-d-1}_M(M)$. Então,*

$$\left\langle\, \overline{\partial}_M f, g \,\right\rangle_M = (-1)^{p+q+1} \left\langle\, f, \overline{\partial}_M g \,\right\rangle_M.$$

Demonstração. Da discussão anterior ao lema, temos que

$$\left\langle\ \overline{\partial}_M f, g\ \right\rangle_M = \left\langle\ [M]^{0,d}, (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M} \wedge \widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n}$$

onde $\widetilde{f} \in \mathcal{E}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$ e $\widetilde{g} \in \mathcal{D}^{n-p,n-q-d-1}(\mathbb{C}^n)$ são extensões de f e g. Temos que

$$\begin{aligned} \left\langle\ \overline{\partial}_M f, g\ \right\rangle_M &= \left\langle\ [M]^{0,d}, (\overline{\partial}\widetilde{f})_{t_M} \wedge \widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= \left\langle\ [M]^{0,d} \wedge \overline{\partial}\widetilde{f}, \widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \quad \text{(pelo Lema 7.6)} \\ &= (-1)^d \left\langle\ \overline{\partial}\left\{[M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}\right\}, \widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= (-1)^{p+q+1} \left\langle\ [M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}, \overline{\partial}\widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \end{aligned}$$

onde a última equação segue da definição de $\overline{\partial}$ aplicada a uma corrente. Pelo Lema 7.6, temos que $[M]^{0,d} \wedge \overline{\partial}\widetilde{g} = [M]^{0,d} \wedge (\overline{\partial}\widetilde{g})_{t_M}$. Portanto

$$\begin{aligned} \left\langle\ \overline{\partial}_M f, g\ \right\rangle_M &= (-1)^{p+q+1} \left\langle\ [M]^{0,d} \wedge \widetilde{f}, \overline{\partial}\widetilde{g}\ \right\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &= (-1)^{p+q+1} \left\langle\ f, \overline{\partial}_M g\ \right\rangle_M \end{aligned}$$

como desejado. □

Essa fórmula de integração por partes nos permite extendender a definição de $\overline{\partial}_M$ a correntes em M. O espaço das correntes em M de bidimensão (p, q) é o dual do espaço $\mathcal{D}_M^{p,q}$ e é denotado por $\{\mathcal{D}_M^{p,q}\}'$.

Definição 7.9. *Suponha M uma subvariedade CR genérica e orientada de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real $2n - d$. Seja $T \in \mathcal{D}_M'^{p,q}$, então $\overline{\partial}_M T \in \mathcal{D}_M'^{p,q+1}$ é a corrente definida por*

$$\left\langle\ \overline{\partial}_M T, g\ \right\rangle_M = (-1)^{p+q+1} \left\langle\ T, \overline{\partial} g\ \right\rangle_M, \ \ \textit{para} g \in \mathcal{D}_M^{n-p,n-q-d-1}.$$

7.2 Aproximação Intrínseca

Aqui trabalharemos com a definição do operador de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$ definido anteriormente.

Assumindo que $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR abstrata. Logo, $\mathbb{L}$ é um subfibrado involutivo de $T^{\mathbb{C}}(M)$ e $\mathbb{L} \cap \overline{\mathbb{L}} = \{0\}$. Será necessário escolher um subconjunto complementar para $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$. Para isso, assumidos que M está munida com a métrica Hermitiano para $T^{\mathbb{C}}(M)$ tal que $\mathbb{L}$ é ortogonal a $\overline{\mathbb{L}}$. Se M é uma subvariedade de $\mathbb{C}^n$, então a métrica natural é usar a restrição de $T^{\mathbb{C}}(M)$ da métrica Hermitiana usual em $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$. Se M é uma variedade abstrata, então uma métrica pode ser construída localmente declarando uma base local de campos vetoriais ser ortonormal. Essa métrica pode ser extendida globalmente pela partição de unidade.

Para cada ponto $p_0 \in M$, seja X_{p_0} o complemento ortogonal de $\mathbb{L}_{p_0} \oplus \overline{\mathbb{L}}_{p_0}$ em $T_{p_0}(M) \otimes \mathbb{C}$. Claramente, os espaços $\{X_{p_0}; p_o \in M\}$ se encaixa suavemente e então, o espaço

$$X(M) = \bigcup_{p_0 \in M} X_{p_0},$$

forma um subconjunto de $T^{\mathbb{C}}(M)$.

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então $\mathbb{L} = H^{1,0}(M)$ e $\overline{\mathbb{L}} = H^{0,1}(M)$. Nesse caso, $X(M)$ é a parte totalmente real do fibrado tangente.

Defina os subfibrados

$$\begin{aligned} T^{1,0} &= \overline{\mathbb{L}} \\ T^{0,1} &= \mathbb{L} \oplus X(M). \end{aligned}$$

Enfatizamos que $T^{1,0}(M)$ não é análogo a $H^{1,0}(M)$ para uma variedade CR mergulhada, a menos que $X(M) = \{0\}$.

O dual desses espaços são denotados $T^{*^{0,1}}(M)$ e $T^{*^{1,0}}(M)$, respectivamente. Formas em $T^{*^{0,1}}(M)$ anulam vetores em $T^{1,0}(M)$ e formas em $T^{*^{1,0}}(M)$ anulam vetores em $T^{0,1}(M)$.

Defina o fibrado

$$\Lambda^{p,q}T^*(M) = \Lambda^p(T^{*^{1,0}}(M))\widehat{\otimes}\Lambda^q(T^{*^{0,1}}(M)),$$

este espaço é chamado de espaço das (p, q)-formas em M.

A métrica pontual em $T^{\mathbb{C}}(M)$ induz a métrica dual pontual em $T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$ de maneira usual. Seja $\phi_1, \ldots, \phi_{m+d}$ uma base ortonormal para $T^{*^{1,0}}(M)$ e seja $\psi_1, \ldots, \psi_m$ uma base ortonormal para $T^{*^{0,1}}(M)$. A métrica para $T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$ extende a métrica em $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ declarando que o conjunto

$$\left\{\phi^I \wedge \psi^J; |I| = p, |J| = q\right\},$$

onde I e J são multiíndices crescentes, é uma base ortonormal. Também declaramos que $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ é ortogonal a $\Lambda^{r,s}T^*(M)$ se $p \neq r$ ou $q \neq s$. Temos a seguinte decomposição ortogonal

$$\Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(M) = \Lambda^{r,0}T^*(M) \oplus \cdots \oplus \Lambda^{0,r}T^*(M),$$

onde algumas dessas somas se anulam se $r > m$. Seja

$$\pi_M^{p,q} : \Lambda^r T^{*^{\mathbb{C}}}(M) \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*(M) \ \text{ para } \ p + q = r,$$

a aplicação projeção natural.

O espaço das r-formas em um conjunto aberto $U \subset M$ é denotado por $\mathcal{E}_M^r(U)$. O espaço das seções suaves de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ sobre U é denotado por $\mathcal{E}_M^{p,q}(U)$ e $\mathcal{D}_M^{p,q}(U)$ é o espaço dos elementos de $\mathcal{E}_M^{p,q}(U)$ com suporte compacto. O "U"pode ser omitida da notação se não for importante no contexto discutido.

A definição do operador tangencial de Cauchy-Riemann intrínseco, agora, pode ser definido em termos da derivada exterior $d_M : \mathcal{E}_M^r \longrightarrow \mathcal{E}_M^{r+1}$.

Definição 7.10. *O operador tangencial de Cauchy-Riemann é definido por $\overline{\partial}_M = \pi_M^{p,q+1} \circ d_M$. A definição de $\overline{\partial}_M$ é analoga a definição de $\overline{\partial}$ em $\mathbb{C}^n$ ou qualquer variedade complexa.*

Lema 7.11. *Se M é uma variedade CR, então*

$$d_M \left\{\mathcal{E}_M^{p,q}\right\} \subset \mathcal{E}_M^{p+2,q-1} \oplus \mathcal{E}_M^{p+1,q} \oplus \mathcal{E}_M^{p,q+1}.$$

Isto significa que a derivada exterior de uma (p,q)-forma ϕ pode ser uma somatória de uma forma de bigraus. Porém somente os componentes de d_M não nulos possuem bigraus igual a $(p+2, q-1)$, $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$.

Demonstração. Primeiramente, foquemos no caso caso $p = 1$, $q = 0$. Devemos mostrar que $\pi^{0,2}(d_M\phi) = 0$ se $\phi \in \mathcal{E}_M^{1,0}$. Isso é equivalente a mostrar que

$$\left\langle\, d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \,\right\rangle = 0 \;\text{ para todo }\; \overline{L}_1, \overline{L}_2 \in \overline{\mathbb{L}} = T^{0,1}(M).$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o pareamento entra formas e vetores. Assim temos que,

$$\begin{aligned}\left\langle\, d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \,\right\rangle &= \overline{L}_1 \left\{\left\langle\, \phi, \overline{L}_2 \,\right\rangle\right\} - \overline{L}_2 \left\{\left\langle\, \phi, \overline{L}_1 \,\right\rangle\right\} \\ &- \left\langle\, \phi, [\overline{L}_1, \overline{L}_2] \,\right\rangle.\end{aligned}$$

Como $\phi \in \mathcal{E}_M^{1,0}$ e $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \in T^{0,1}(M)$, temos que $\left\langle\, \phi, \overline{L}_1 \,\right\rangle = \left\langle\, \phi, \overline{L}_2 \,\right\rangle = 0$. Pela definição de uma estrutura CR, $\overline{\mathbb{L}}$ é involutivo, e então $[\overline{L}_1, \overline{L}_2] \in \overline{\mathbb{L}}$. Portanto $\left\langle\, \phi, [\overline{L}_1, \overline{L}_2] \,\right\rangle = 0$, daí $\left\langle\, d_M\phi, \overline{L}_1 \wedge \overline{L}_2 \,\right\rangle = 0$, como desejado. Isso prova o lema para o caso $p = 1$, $q = 0$. Note que o lema automaticamente segue para $p = 0$ e $q = 1$.

Para $p, q \geq 1$, $\mathcal{E}_M^{p,q}$ é gerado pelos seguintes termos:

$$\phi_1 \ldots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q$$

onde cada ϕ_j é uma $(1,0)$-forma suave e cada ψ_j é uma $(0,1)$-forma suave. O caso geral agora segue usando a regra do produto para d_M e o caso do lema de uma $(1,0)$-forma ou $(0,1)$-forma. □

Lema 7.12. *Se M é uma variedade CR, então $\overline{\partial}_M \circ \overline{\partial}_M = 0$.*

Demonstração. Suponha ϕ uma (p,q)-forma suave, então $\overline{\partial}_M\phi = \pi^{p,q+1}(d_M\phi)$. O Lema 7.11 implica

$$\overline{\partial}_M\phi = d_M\phi - [\pi^{p+2,q-1}(d_M\phi) + \pi^{p+1,q}(d_M\phi)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_M\overline{\partial}_M\phi &= \pi^{p,q+2}[d_M(\overline{\partial}_M\phi)]\\ &= -\pi^{p,q+2}[d_M\pi^{p+2,q-1}(d_M\phi)+d_M\pi^{p+1,q}(d_M\phi)],\end{aligned}$$

onde a última equação usa o fato de que $d_M \circ d_M = 0$. Do Lema 7.11, o termo à direita se anula. Portanto, $\overline{\partial}_M\overline{\partial}_M\phi = 0$, como desejado. □

Lema 7.13. *Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e $g \in \mathcal{E}_M^{r,s}$, então*

$$\overline{\partial}_M(f \wedge g) = (\overline{\partial}_M f) \wedge g + (-1)^{p+q} f \wedge \overline{\partial}_M g.$$

Demonstração. A prova segue da Regra do Produto da derivada exterior. □

Lema 7.14. *Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$ e g é qualquer forma suave em M com suporte compacto, então*

$$\int_M (\overline{\partial}_M f) \wedge g = (-1)^{p+q+1} \int_M f \wedge \overline{\partial}_M g.$$

Demonstração. Seja m a dimensão de $\mathbb{L}$ e $\overline{\mathbb{L}}$, e d a dimensão de $X(M)$. Portanto, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{L} \oplus X) = \dim_{\mathbb{C}} T^{1,0}(M) = m + d$ e $\dim_{\mathbb{C}} T^{0,1}(M) = m$. $T^{\mathbb{C}}(M)$ tem dimensão complexa $2m + d$ que é a mesma dimensão real de M. Então, uma forma de grau maior em M tem bigrau $(m + d, m)$. Se $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}$, então $\overline{\partial}_M f \in \mathcal{E}_M^{p,q+1}$ e então, $\overline{\partial}_M f$ emparelha com formas de bigrau $(m + d - p, m - q - 1)$. Seja $g \in \mathcal{D}_M^{m+d-p,m-q-1}$. Da Regra do Produto, temos que

$$\in_M (\overline{\partial}_M f) \wedge g = \int_M \overline{\partial}_M(f \wedge g) + (-1)^{p+q+1} \int_M f \wedge \overline{\partial}_M g. \tag{7.2}$$

O bigrau de $f \wedge g$ é $(m + d, m - 1)$. Como o grau maior em M é $(m + d, m)$, temos que

$$\overline{\partial}_M(f \wedge g) = d_M(f \wedge g).$$

Como g tem suporte compacto em M, temos que

$$\int_M d_M(f \wedge g) = 0$$

pelo Teorema de Stokes. Desse fato junto da Equação 7.2, a prova do lema segue. □

Assim como o caso extrínseco, a integração por partes nos permite encontrar uma fórmula de modo a extender a definição de $\overline{\partial}$ a correntes. Pela definição, o espaço das correntes de bidimensão (p, q) em um conjunto aberto $U \subset M$ é o dual do espaço $\mathcal{D}_M^{p,q}(U)$.

Definição 7.15. *Se $T \in \mathcal{D}_M'^{p,q}$, então a corrente $\overline{\partial}_M T \in \mathcal{D}_M'^{p,q+1}$ é definido por*

$$\left\langle\, \overline{\partial}_M T, g \,\right\rangle_M = (-1)^{p+q+1} \left\langle\, T, \overline{\partial}_M g \,\right\rangle_M.$$

Usando a definição juntamente com o Lema 7.12, mostra que $\overline{\partial}(\overline{\partial}T) = 0$ para uma corrente $T \in \mathcal{D}'^{p,q}_M$.

7.3 A Equivalência Entre os Complexos Tangenciais de Cauchy-Riemann Extrínseco e Intrínseco

Para uma subvariedade CR M de $\mathbb{C}^n$, existe uma escolha de dois pontos de vista para o complexo tangencial de Cauchy-Riemann, a extrínsica e intrínseca. Esses dois complexos são diferentes, mas nessa seção mostraremos que são isomorfos. Mas antes de estabelecer esse isomorfismo, precisamos definir o que é um isomorfismo entre dois complexos.

Definição 7.16. *a) Um complexo é uma coleção de espaços vetorais*

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_q; q \in \mathbb{Z}, q \geq 0\}$$

com aplicações $d_q : \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathcal{A}_{q+1}$ tal que $d_{q+1} \circ d_q = 0$ para $q \geq 0$.

b) Suponha que $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_q, d_q; q \geq 0\}$ e $A = \{A_q, D_q; q \geq 0\}$ sejam dois complexos. Esses complexos são isomorfos se existe uma coleção de isomorfismos de espaços vetoriais $P_q : A_q \longrightarrow \mathcal{A}_q$ tal que $P_{q+1} \circ D_q = d_p \circ P_q$.

Exemplo 7.17. Seja M e N variedades suaves e suponha $F : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo. Os complexos $\{d_M : \mathcal{E}^r(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1}(M)\}$ e $\{d_N : \mathcal{E}^r(N) \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1}(N)\}$ são isomorfos e o isomorfismo é dado por $F^* : \mathcal{E}^r(N) \longrightarrow \mathcal{E}^r(M)$.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos que os complexos tangenciais extrínseco e intrínseco são isomorfos, devemos enunciar e demonstrar os seguintes lemas técnicos.

Lema 7.18. *Para cada ponto $p_0 \in M$, j^* é um isomorfismo de $\Lambda^{p,q}T^*_{p_0}(M)$ extrínseco a $\Lambda^{p,q}T^*_{p_0}(M)$.*

Demonstração. Para a simplificação de notação, provaremos esse lema para o caso onde M é genérica. Do Lema 6.17, podemos encontrar uma mudança de coordenadas linear complexa $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que dado o ponto $p_0 \in M$ é a origem e

$$M = \left\{(x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\right\}$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é suave com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Como mencionado, A preserva o espaço tangente holomorfo de M, o espaço tangente totalmente real de M e a métrica para o espaço tangente real de M. Portanto, a definição de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ intrínseco é invariante sob essa mudança de coordenadas. Ainda, o pull back de A comuta com $\overline{\partial}$. Portanto, da definição de $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco também é invariante sob essa mudança de coordenadas.

Os seguintes argumentos podem ser facilmente modificados para o caso não genérico usando as observações da prova do Lema 6.17.

Um sistema de definição local para M é dado por $\{\rho_1, \dots, \rho_d\}$ onde $\rho_j(z,w) = \text{Im } z_j - h_j(\text{Re } z, w)$. Como $Dh(0) = 0$, temos que $\overline{\partial}\rho_j(0) = -(2i)^{-1}d\bar{z}_j$. Pela definição, $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco é o complemento ortogonal em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ do ideal gerado por $\overline{\partial}\rho_1, \dots, \overline{\partial}\rho_d$. Portanto, uma base para $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ extrínseco na origem é dado por

$$\left\{dz^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K; |I| + |J| = p, |K| = q\right\}$$

onde I, J, K são multiíndices crescentes.

Uma base para $\mathbb{L}_0^* = H_0^{*^{1,0}}(M)$ é dado por $\{dw_1, \dots, dw_{n-d}\}$ e uma base para $\overline{L}_0^* = H_0^{*^{0,1}}(M)$ é dada por $\{d\overline{w}_1, \dots, d\overline{w}_{n-d}\}$. Como $X_0^*(M)$ é o complemento ortogonal de $\mathbb{L}^* \oplus \overline{\mathbb{L}}^*$ em $T_0^{*^{\mathbb{C}}}(M)$, uma base para $X_0^*(M)$ é dada por $\{dx_1, \dots, dx_d\}$. Portanto, uma base para $\Lambda^{p,q}T_0^*(M)$ intrínseco é dado por

$$\left\{dx^I \wedge dw^J \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K; |I| + |J| = p, |K| = q\right\}$$

onde I, J, K são multiíndices crescentes.

Como $Dh(0) = 0$, as relações seguintes são válidas na origem:

$$\begin{aligned} j^*(dw_k) &= dw_k \;\; 1 \le k \le n-d \\ j^*(d\overline{w}_k) &= d\overline{w}_k \;\; 1 \le k \le n-d \\ j^*(dy_k) &= 0 \;\; 1 \le k \le d \\ j^*(dx_k) &= dx_k \;\; 1 \le k \le d. \end{aligned}$$

Em particular, $j^*(dz_k) = dx_k$ para $1 \le k \le d$ e então,

$$j^*(dz^I \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K) = dx^I \wedge dw^J \wedge dw^J \wedge d\overline{w}^K.$$

Logo, j^* leva uma base para $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ a uma base para $\Lambda^{p,q}T^*(M)$. Isso completa a prova do lema. □

Lema 7.19. *Para inteiros* p, q

$$j^* \circ t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1} = \pi_M^{p,q+1} \circ j^*$$

como aplicações de $\{\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n) \oplus \Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)\}\,|_M$ *a* $\Lambda^{p,q+1}T^*(M)$ *intrínseco.*

Demonstração. Para cada ponto $p_0 \in M$, as aplicações nesse lema levam o espaço

$$\left\{\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n) \oplus \Lambda^{p+1,q}T^*(\mathbb{C}^n)\right\}|_M$$

ao espaço definido intrinsicamente $\Lambda^{p,q+1}T^*_{p_0}(M)$. Como a prova do Lema 7.18, assumimos que M é genérica, o ponto p_0 é a origem e

$$M = \{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x,w)\}$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é suave com $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. Na origem, $j^*(dw_k) = dw_k$, $j^* d\overline{w}_k = d\overline{w}_k$ para $1 \leq k \leq n-d$ e $j^*(dz_k) = j^*(d\overline{z}_k) = dx_k$ para $1 \leq k \leq d$.

Primeiramente, suponha ϕ um elemente de $\Lambda^{p,q+1}T^*_0(\mathbb{C}^n)$. Temos

$$\phi = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{s=0}^{\min(d,q+1)} \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=s}} \phi^{r,s}_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J$$

onde cada $\phi^{r,s}_{IJ}$ é uma forma em 0 de bigrau $(p-r, q+1-s)$ que somente envolve

$$dw_1, \ldots, dw_{n-d}, d\overline{w}_1, \ldots, d\overline{w}_{n-d}.$$

Na origem, t_M anula $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_d$. Portanto

$$t_M \circ \pi^{p,q+1}_{\mathbb{C}^n}(\phi) = t_M(\phi) = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi^{r,0}_I \wedge dz^I.$$

Como $j^* dz_k = dx_k$, temos que

$$j^* \circ t_M \circ \pi^{p,q+1}_{\mathbb{C}^n}(\phi) \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi^{r,0}_I \wedge dx^I. \tag{7.3}$$

Por outro lado,

$$\pi^{p,q+1}_M \circ j^*(\phi) = \pi^{p,q+1}_M \left\{ \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{s=0}^{\min(d,q+1)} \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=s}} \phi^{r,s}_{IJ} \wedge dx^I \wedge dx^J \right\}.$$

Cada dx_k pertence a $\Lambda^{1,0}T^*_0(M)$ intrínseco e $\phi^{r,s}_{IJ}$ pertence a $\Lambda^{p-r,q+1-s}T^*_{)}(M)$ intrínseco. Devido a presença de $\pi^{p,q+1}_M$, o único termo que contribui para a soma no lado direito ocorre quando $s = 0$. Portanto

$$\pi^{p,q+1}_M \circ j^*(\phi) = \sum_{r=0}^{\min(d,p)} \sum_{|I|=r} \phi^{r,0}_I \wedge dx^I. \tag{7.4}$$

Comparando as Equações 7.3 e 7.4, temos que

$$j^* \circ t_M \circ \pi^{p,q+1}_{\mathbb{C}^n} = \pi^{p,q+1}_M \circ j^*. \tag{7.5}$$

no espaço $\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$, onde ambas aplicações são nulas nesse espaço. Concluímos que

7.5 sempre é válido no espaço $\Lambda^{p,q+1}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$ e, portanto, a prova do lema está completa. $\square$

Teorema 7.20. *Suponha que M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$. Os complexos tangencial de Cauchy-Riemann extrínseco e intrínseco são isomorfos.*

Demonstração. Fixando p com $0 \leq p \leq n$. Para $q \geq 0$, seja

$$\begin{aligned} A_q &= \mathcal{E}_M^{p,q} \ - \ \text{via definição extrínseca} \\ \mathcal{A}_q &= \mathcal{E}_M^{p,q} \ - \ \text{via definição intrínseca.} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_q$ é o espaço das seções suaves do fibrado definido extrinsicamente $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ cuja pela definição é o complemento ortogonal de $I^{p,q}$ em $\Lambda^{p,q}T^*(\mathbb{C}^n)|_M$. Por outro lado, $\mathcal{A}_q$ é o espaço das seções suaves do fibrado definido intrinsicamente $\Lambda^{p,q}T^*(M)$ cuja definição é

$$\Lambda^p\left\{H^{*^{1,0}}(M) \oplus X^*(M)\right\}\widehat{\otimes}\Lambda^q\left\{H^{*^{0,1}}(M)\right\}.$$

Seja

$$\begin{aligned} &D_q : A_q \longrightarrow A_{q+1} \ \text{ seja definido extrinsecamente } \overline{\partial}_M \\ &\mathcal{D}_q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_{q+1} \ \text{ seja definido intrinsecamente } \overline{\partial}_M. \end{aligned}$$

O operador D_q é a parte tangencial de $\overline{\partial}$, ou seja, $t_M \circ \overline{\partial}$, e $d_q = \pi_M^{p,q+1} \circ d_M$ onde d_M é a derivada exterior em M e $\pi_M^{p,q+1}$ é a projeção de $\Lambda^{p+q+1}T^*(M)$ em
$\Lambda^p\left\{H^{*^{1,0}}(M) \oplus X^*(M)\right\}\widehat{\otimes}\Lambda^q\left\{H^{*^{0,1}}(M)\right\}$.
Seja $j : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ a aplicação inclusão. Vamos mostrar que j^* é o isomorfismo desejado entre os complexos $\{D_q : A_q \longrightarrow A_{q+1}\}$ e $\{d_q : \mathcal{A}_q \longrightarrow \mathcal{A}_{q+1}\}$. As seguintes afirmações devem ser mostradas:

i) A aplicação j^* leva A_q a $\mathcal{A}_q$ isomorficamente.

ii) $j^* \circ D_q = d_q \circ j^*$.

O item *i)* segue direto do Lema 7.18.

Para provar *ii)*, primeiro note das definições

$$\begin{aligned} D_q &= t_M \circ \overline{\partial} = t_M \circ \pi_{\mathbb{C}^n}^{p,q+1} \circ d_{\mathbb{C}^n} \\ d_q &= \pi_M^{p,q+1} \circ d_M. \end{aligned}$$

Como $j^* \circ d_{\mathbb{C}^n} = d_M \circ j^*$, o item *ii)* segue do Lema 7.19.

$\square$

7.4 Funções e Aplicações CR

Nesta seção, apresentaremos as definições e propriedades básicas de funções CR e aplicações CR. Funções CR são análogas às funçõe holomorfas em uma variedade complexa. No entanto, existem diferenças consideráveis. Por exemplo, funções CR nem sempre são suaves. Existem relações entre funções CR em uma variedade CR mergulhada e funções holomorfas no ambiente $\mathbb{C}^n$. Por exemplo, a restrição de uma função holomorfa a uma subvariedade CR é uma função CR. No entanto, funções CR nem sempre extendem a funções holomorfas. Esses conceitos são o cerne deste trabalho, estudar casos de extensão de funções CR a funções holomorfas. Ainda mostraremos que funções CR analíticas reais em uma subvariedade CR analítica real extende localmente a funções holomorfas. Uma versão C^∞ também é dada. Por fim, discutiremos aplicações CR entre variedades CR.

7.4.1 Funções CR

Definição 7.21. *Suponha que $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR. Uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ (ou distribuição) é chamada de função CR se $\overline{\partial}_M f = 0$ em M.*

A definição acima aplica-se a qualquer variedade CR, seja ela abstrata ou mergulhada em $\mathbb{C}^n$. Agora, apresentaremos outras formas de caracterizar uma função CR.

Lema 7.22. *a) Suponha que $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR. Uma função C^1 $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é CR se, e somente se, $\overline{L} f = 0$ em M para todo $\overline{L} \in \overline{\mathbb{L}}$.*

b) Suponha $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho_1(z) = \cdots = \rho_d(z) = 0\}$ é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$. Uma função C^1 $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é CR se, e somente se, $\overline{\partial}\widetilde{f} \wedge \overline{\partial}\rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\rho_d = 0$ em M onde $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ é qualquer extensão C^1 de f.

Demonstração. Para a parte de *a)*, relembremos que $\overline{\partial}_M f = \pi^{0,1} d_M f$. Como $\pi^{0,1}$ é a projeção de $T^{*^{\mathbb{C}}}(M)$ em $T^{*^{0,1}}(M) = \overline{L}^*$, temos que $\pi^{0,1}(d_M f) = 0$ se, e somente se, $\left\langle\, d_M f, \overline{L} \,\right\rangle = 0$ para todo $\overline{L} \in \overline{\mathbb{L}}$. E daí, a parte *a)* segue da equação

$$\left\langle\, d_M f, \overline{L} \,\right\rangle = \overline{L}\,\{f\}$$

que é a definição da derivada exterior de uma função.

Para a parte *b)*, segue da definição extrínseca de $\overline{\partial}_M f$ como a parte de $\overline{\partial}\widetilde{f}|_M$ que é ortogonal ao ideal gerado por $\left\{\overline{\partial}\rho\right\}$, onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave com $\rho = 0$ em M. □

Se M é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$, então qualquer função holomorfa em uma vizinhança M em $\mathbb{C}^n$ restringe a uma função CR de M pela parte *b)* do lema anterior. No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, funções CR nem sempre extendem como funções holomorfas.

Exemplo 7.23. Seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2;\ \text{Im } z = 0\}$. Aqui, $\overline{\mathbb{L}} = H^{0,1}(M)$ é gerado sobre $\mathcal{E}(M)$ pelo campo vetorial $\dfrac{\partial}{\partial \overline{w}}$. Um função $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é CR se

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(x, w) = 0 \quad (x = \text{ Re } z).$$

Uma função CR em M é uma função que é holomorfa em w com $x \in \mathbb{R}$ fixado. Como não existe condição no comportamento de uma função CR na variável x, uma função arbitrária de x automaticamente é CR. Portanto qualquer função nã-analítica de x é um exemplo de função CR que não extende a uma função holomorfa em uma vizinhança de M em $\mathbb{C}^2$.

Nesse exemplo, uma função CR analítica real em $M = \{y = 0\}$ é sempre a restrição de uma função holomorfa definida próximo a M. Uma função CR analítica real em M pode ser representada próxima a origem por uma série de potências em x e w. A extensão holomorfa é obtida substituindo x por z nessa série de potências.

Teorema 7.24. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica analítica real de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real maior ou igual a n. Suponha $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função CR analítica real em M. Então, existe uma vizinhança U de M em $\mathbb{C}^n$ e uma única função holomorfa $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ com $F|_M = f$.*

Antes de demonstrar esse teorema, devemos enunciar e provar o seguinte lema.

Lema 7.25. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica e suave de $\mathbb{C}^n$ de dimensão real $2n - d$, $0 \leq d \leq n$. Se f é holomorfa em uma vizinhança conectade de M em $\mathbb{C}^n$ e se f é nula em M, então f é identicamente nula.*

Demonstração. Pelo Teorema da Identidade para funções holomorfas, é suficiente provar que todas as derivadas de f são nulas em um ponto fixado $p_0 \in M$. Próximo a $p_0 \in M$, existe uma base local para $H^{1,0}(M)$ consistindo de campos vetoriais suaves $L_1, \ldots, L_{n-d}$. A coleção de vetores $\{\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}\}$ forma uma base local para $H^{0,1}(M)$. Seja $X_1, \ldots, X_d$ a base local para o fibrado tangente totalmente real, $X(M)$. Extendendo os coeficientes, assumimos que esses campos vetoriais são definidos em uma vizinhança de p_0 em $\mathbb{C}^n$. Esses campos vetoriais $N_1 = JX_1, \ldots, N_d = JX_d$ são transversais a M. Como M é genérico, uma base para $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ próximo a p_0 é dado por

$$\{L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}, X_1, \ldots, X_d, N_1, \ldots, N_d\}.$$

Os campos vetoriais $L_1, \ldots, L_{n-d}, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{n-d}, X_1, \ldots, X_d$ serão chamados de tangenciais. Os campos vetoriais $N_1, \ldots, N_d$ serão chamados de tranversais.

Para provar que $D^\alpha f = 0$ próximo a p_0 em M para todos os operadores diferenciais d^α, usamos um argumento de indução dupla na ordem do operador diferencial D^α e o número, m, de campos vetoriais tranversos em D^α .

Se $m = 0$, então D^α envolve somente campos vetoriais tangenciais e então, $D^\alpha f = 0$ em M pois $f = 0$ em M.

Agora, assumindo por indução que para $m \geq 0$, $D^\alpha f = 0$ em M para todos os operadores diferenciais que envolvem somente os campos vetoriais m-tranversos. Mostraremos que

$$N_{j_1} \dots N_{j_{m+1}} \{f\} = 0 \text{ em } M,$$

onde $j_1, \dots, j_{m+1}$ são índices do conjunto $\{1, \dots, d\}$. Das equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}^n$, temos que $(X + iJX)(f) = 0$ para $X \in T(\mathbb{C}^n)$. Portanto,
$N_{j_{m+1}} \{f\} = JX_{j_{m+1}} \{f\} = iX_{j_{m+1}} f$ próximo a p_0 em $\mathbb{C}^n$. Logo,

$$N_{j_1} \dots N_{j_{m+1}} \{f\} = iN_{j_1} \dots N_{j_m} X_{j_{m+1}} \{f\}.$$

O lado direito envolve um operador diferencial somente com campos vetoriais m-tranversos e portanto é nulo em M, como desejado.

Para completar a indução dupla, assumimos o seguinte: para inteiros $N \geq 0$, $m \geq 1$

$$D^\alpha f = 0 \text{ em } M,$$

para $|\alpha| \leq N$ e onde D^α envolve somente campos vetoriais m-transversos. Também assumimos $D^\alpha f = 0$ em M para operadores de qualquer ordem que envolva no máximo campos vetoriais $(m-1)$-tranversos. Devemos mostrar que $D^\alpha f = 0$ em M para $|\alpha| = N+1$ e onde D^α envolve campos vetoriais m-transversos.

Devemos considerar dois casos.

Caso i). $D^\alpha = T \circ D^{\alpha'}$.

Aqui, T é o campo vetorial tangencial e $D^{\alpha'}$ é um operador diferencial de ordem $|\alpha'| \leq N$ que envolve somente campos vetoriais m-transversos. Nesse caso, $D^{\alpha'} f = 0$ em M pela hipótese de indução e então, $T\left\{D^{\alpha'} f\right\} = 0$ em M, como desejado.

Caso ii). $D^\alpha = N_j \circ D^{\alpha'}$.

Aqui, $N_j = JX_j$ é transverso e $D^{\alpha'}$ é um operador diferencial de ordem $|\alpha'| \leq N$ que envolve somente campos vetoriais $(m-1)$-transversos. Nesse caso,

$$\begin{aligned} D^\alpha f &= N_j\left\{D^{\alpha'} f\right\} \\ &= D^{\alpha'}\{N_j f\} + [N_j, D^{\alpha'}]\{f\}, \end{aligned}$$

onde $[,]$ denota o comutador. O primeiro termo é igual a $iD^{\alpha'}\{X_j f\}$ pelas equações de Cauchy-Riemann. Esse termo se anula em M pela hipótese de indução pois $D^{\alpha'} X_j$ envolve somente campos vetoriais $(m-1)$-transversos. O segundo termo é um operador diferencial de ordem N e então, se anula em M, novamente pela hipótese de indução.

Da indução dupla, segue que $D^\alpha f = 0$ próximo a p_0 em M para todos os operadores diferenciais e então, f é nula identicamente. A prova do lema está completa.

□

Para a existência do Teorema 7.24, daremos duas provas. A primeira mais simples, mas a segunda pode ser modificada para lidar com uma versão C^∞ do Teorema 7.24.

Primeira Prova de Existência. A primeira prova trata ζ e $\overline{\zeta} \in \mathbb{C}^n$ como coordenadas independentes. Provaremos que dada uma função CR analítica real f extende à uma função holomorfa em C^{2n}. Usando as equações de Cauchy-Riemann, provaremos que a extensão holomorfa de f é independente da coordenada $\overline{\zeta}$ e então restringe à uma função holomorfa em $\mathbb{C}^n$, que é a extensão desejada de f.

Dada uma função CR, é suficiente extendê-la a uma vizinhança de um ponto fixado $p_0 \in M$. A extensão global pode ser obtida unindo as extensões locais.

Do Lema 6.17, assumimos que o ponto p_0 é a origem e

$$M = \left\{(z = x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d};\ y = h(x, w)\right\},$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é analítica real em uma vizinhança da origem e $Dh(0) = 0$. Do Teorema 6.20, uma base local para $H^{0,1}(M)$ é dada por

$$\overline{L}_j = -2i \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j},\ \ 1 \leq j \leq n-d,$$

onde μ_{lk} é a (l,k)-ésima entrada da matriz $(I + i(\partial h/\partial x))^{-1}$.

Como h é a função analítica real próxima a origem, h pode ser expressada em uma série de potências nas variáveis $z, \overline{z} \in \mathbb{C}^d$ e $w, \overline{w} \in \mathbb{C}^{n-d}$. Substituindo $\overline{z}$ pela variável independente $\zeta \in \mathbb{C}^d$ e $\overline{w}$ pela variável independente $\eta \in \mathbb{C}^{n-d}$ em séries de potências para h, obtemos uma função holomorfa $\widetilde{h} : \mathbb{C}^d \times C^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$, com
$\widetilde{h}(z, \overline{z}, w, \overline{w}) = h(x, w)$. Defina

$$M_{\mathbb{C}} = \left\{(z, \zeta, w, \eta) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d};\ \frac{1}{2i}(z - \zeta) = \widetilde{h}(z, \zeta, w, \eta)\right\}.$$

Também defina $\triangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d}$ por

$$\triangle(z, w) = (z, \overline{z}, w, \overline{w}).$$

$M_{\mathbb{C}}$ é uma subvariedade complexa de $\mathbb{C}^{2n}$ com dimensão complexa $2n - d$. Ainda mais, $\triangle\{M\}$ é mergulhada como uma subvariedade totalmente real de $M_{\mathbb{C}}$.

Se $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica real em M então, como substituimos $\overline{z}$ por ζ e $\overline{w}$ por η, em séries de potência de f produz uma função holomorfa $\widetilde{f} : M_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$

com $\widetilde{f} \circ \triangle = f$. Similarmente, os coeficientes analíticos reais de $\overline{L}_j$ podem ser extendidos holomorficamente aos campos vetoriais $\widetilde{L}_1, \ldots, \widetilde{L}_{n-d} \in T^{1,0}(M_{\mathbb{C}})$ com

$$\widetilde{L}_j = -2i \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \mu_{lk}(z, \zeta, w, \eta) \frac{\partial \widetilde{h}_k}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \zeta_l} + \frac{\partial}{\partial \eta_j}, \ \ 1 \leq j \leq n-d. \tag{7.6}$$

Como $\widetilde{f}$ é holomorfa, temos $(\widetilde{L}_j \widetilde{f}) = \triangle_* \overline{L}_j \left\{ \widetilde{f} \right\}$ em $\triangle \{M\}$. Se f é CR, então

$$\begin{aligned} (\widetilde{L}_j \widetilde{f}) \circ \triangle &= \overline{L}_j \left\{ \widetilde{f} \circ \triangle \right\} \\ &= \overline{L}_j f = 0 \ \text{ em } \ M. \end{aligned}$$

Como $\triangle \{M\}$ é uma subvariedade genérica de $M_{\mathbb{C}}$ com dimensão real $2n-d$, temos que

$$\widetilde{L}_j \widetilde{f} \equiv 0, \tag{7.7}$$

em $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$ pelo Lema 7.25.

Cada vetor $\partial/\partial\zeta_j$ é transversal à $M_{\mathbb{C}}$ pois $D\widetilde{h}(0) = 0$. Defina $\widetilde{F} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}$ sendo a extensão de $\widetilde{f} : M_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ que é independente de ζ. Então

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \zeta_j} = 0 \ \text{ próximo à origem}, \ 1 \leq j \leq d. \tag{7.8}$$

Também afirmamos que

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} = 0 \ \text{ próximo à origem}, \ 1 \leq j \leq n-d. \tag{7.9}$$

Para ver isso, note que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \zeta_j} \right) = 0.$$

Como vimos em 7.6 e 7.8, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \eta_j} &= \widetilde{L}_j \widetilde{F} \ \text{ em } \ M_{\mathbb{C}}, \ 1 \leq j \leq n-d \\ &= 0 \ \text{ em } \ M_{\mathbb{C}} \ \text{ (por 7.7)}. \end{aligned}$$

A extensão holomorfa de f em $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ é obtida fazendo $F = \widetilde{F} \circ \triangle$. De 7.8 e 7.9, $\widetilde{F}$ é independente de ζ e η e então as séries de potência de $F = \widetilde{F} \circ \triangle$ é independente de $\overline{z}$ e $\overline{w}$. Portanto, F é holomorfa em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$. Ainda mais $F|_M = f$ pois

$$\begin{aligned} F|_M &= \widetilde{F} \circ \triangle|_M \\ &= \widetilde{f} \circ \triangle|_M \\ &= f. \end{aligned}$$

$\square$

Segunda Prova de Existência. Começamos com M próxima à origem como

$$M = \left\{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x,w)\right\},$$

onde h é analítica real e $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. Se M é *flat*, ou seja, $h \equiv 0$, então uma função CR analítica real próxima à origem é uma série de potências convergente em x e w. A extensão holomorfa desejada é obtida substituindo x com $z = x + iy$ na sua série de potência. Queremos replicar esse processo tanto quando possível para o caso geral. O problema é que, em geral, uma função CR analítica real dependerá de $\overline{w}$. No entanto, sua dependência de $\overline{w}$ é intimamente ligada com a dependência da série de potências de h em $\overline{w}$. Ao invés de deixar $\overline{w}$ ser uma coordenada complexa independente como na primeira prova, mudaremos a estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$ tal que h se tornará holomorfa.

Na série de potências de h, substituímos x por z. Então h é definida em $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ e $h(z,w)$ é holomorfa em z próxima à origem. Defina $H : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ por

$$H(z,w) = (z + ih(z,w), w).$$

Seja $H_1, \ldots, H_n$ as funções componentes para H. Usamos $H = (H_1, \ldots, H_n)$ como um sistema de coordenadas para definir uma nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$. Uma função g é holomorfa com respeito à nova estrutura complexa se existe uma função holomorfa G no sentido usual com $g = G \circ H$. Esse estrutura complexa vai de acordo com a estrutura usual complexa nas z-variáveis como H é holomorfa em $z \in \mathbb{C}^d$ no sentido usual.

Os $T^{0,1}$-campos vetoriais para essa nova estrutura complexas são aqueles campos vetoriais nulos nas funções coordenadas $H_1, \ldots, H_n$.

Lema 7.26. *Uma base local para o fibrado $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ para as novas estruturas complexas é dado por*

$$\Lambda_j = -i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{l,k}(z,w) \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j}(z,w) \frac{\partial}{\partial z_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \; 1 \le j \le n-d, \; \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}, \; 1 \le j \le d,$$

onde μ_{lk} é a (l,k)-ésima entrada da matrix $d \times d$ $[I + i(\partial h/\partial z)]^{-1}$.

Demonstração. A prova desse lema segue mostrando que para $1 \le l \le n$, $\Lambda_j\{H_l\} = 0$ para

$1 \leq j \leq n-d$, e $(\partial/\partial\overline{z}_j)\{H_l\} = 0$ para $1 \leq j \leq d$. Também note que esses campos vetoriais são linearmente independentes próxima à origem pois $Dh(0) = 0$. □

Seja $H_0 = H|_{\{\text{Im } z=0\}}$. A aplicação $H_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow M$ é uma parametrização para M. Seja $\pi : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ seja a aplicação projeção dada por $\pi(x+iy, w) = (x, w)$. Claramente, $\pi|_M$ é a inversa de H_0.

Do Teorema 6.20, uma base local para $H^{0,1}(M)$ é dada por

$$\overline{L}_j = -2i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j} \quad 1 \leq j \leq n-d,$$

onde μ_{lk} é a (l,k)-pesima entrada da matriz $[I + i(\partial h/\partial x)]^{-1}$. Uma função C^1 $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função CR se e somente se $\overline{L}_j f = 0$, $1 \leq j \leq n-d$. Isso é equivalente à
$\pi_* \overline{L}_j \{f \circ H_0\} = 0$ em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ pois $H_0 \circ \pi$ é a aplicação identidade em M. O campo vetorial $\pi_* \overline{L}_j$ pode ser computada usando $\pi_*(\partial/\partial y_j) = 0$, $\pi_*(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial x_j$ e $\pi_*(\partial/\partial \overline{w}_j) = \partial/\partial \overline{w}_j$. Temos que

$$\pi_* \overline{L}_j = -i \sum_{k,l=1}^{d} \mu_{lk} \frac{\partial h_k}{\partial \overline{w}_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}_j}, \quad 1 \leq j \leq n-d.$$

Suponha que $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função CR analítica real. Seja $f_0 = f \circ H_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}$. A função f_0 é uma função analítica real de $x \in \mathbb{R}^d$ e $w \in \mathbb{C}^{n-d}$. Seja $F_0 : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}$ a extensão de f_0 obtida substituindo x por $z = x + iy$ na expansão da série de potências de f_0 sobre a origem. Como F_0 e h são holomorfas em $z \in \mathbb{C}^d$, temos que $\partial h/\partial z_k = \partial h/\partial x_k$, $\partial F_0/\partial z_k = \partial F_0/\partial x_k$. Comparando essas expressões para Λ_j e $\pi_* \overline{L}_j$, obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda_j F_0|_{\{\text{Im } z=0\}} &= \pi_* \overline{L}_j \{f_0\} \\ &= 0 \ \text{(Como } f \text{ é CR).} \end{aligned}$$

Como $\Lambda_j F_0$ é holomorfa em $z \in \mathbb{C}^d$ e se anula em $\{\text{Im } z = 0\}$, $\Lambda_j F_0$ deve se anular identicamente. Ainda $\Lambda_j F_0 = 0$ e $\partial F_0/\partial \overline{z}_k = 0$, a função F_0 é holomorfa com respeito a nova estrutura complexa. Existe uma função $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ que é holomorfa no sentido usual definido em uma vizinhança da origem com $F_0 = F \circ H$. A restrição de F à M é f pois $f \circ H_0 = F \circ H_0$ em $\{\text{Im } z = 0\}$. Isso completa a segunda prova da existência do Teorema 7.24.

□

Teorema 7.27. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica e C^∞ de $\mathbb{C}^n$ com dimensão real $2n-d$, $1 \leq d \leq n$. Se f é uma função CR e C^∞ em M, então existe uma função C^∞ F definida em $\mathbb{C}^n$ tal que $\overline{\partial} F$ se anula em M em ordem infinita em $F|_M = f$. F é módulo único do espaço das funções que se anulam em ordem infinita em M.*

Se M ou f é somente de classe C^k, $k \geq 2$, então uma modificação da prova produz uma extensão c^k, F, tal que $\overline{\partial} F$ se anula em M em ordem $k-1$.

O ingrediente chave na prova do Teorema 7.24 é o fato que uma função real analítica $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ é localmente a restrição de uma função holomorfa $\Phi : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}$. Na prova do Teorema 7.27, precisamos substituir essa ideia com o seguinte lema.

Lema 7.28. *a) Suponha que $\phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, $d \geq 1$, é uma função C^∞. Então existe uma função C^∞ $\Phi : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\overline{\partial}\Phi$ se anula em ordem infinita em $\{Im\ z = 0\}$ em $\Phi = \phi$ em $\{Im\ z = 0\}$.*

b) Φ na parte a) é módulo único do espaço das funções suaves que se anulam em ordem infinita em $\{Im\ z = 0\}$.

Demonstração. Seja $z = x + iy$. O requisito que $\Phi = \phi$ em $\{y = 0\}$ determina que todas as x-derivadas de Φ em $\{y = 0\}$. O requisito que $\overline{\partial}\Phi$ se anula em ordem infinita em $\{y = 0\}$ é equivalente à

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} - i\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right\} = 0 \text{ em } \{y = 0\}, \ \ 1 \leq j \leq d, \tag{7.10}$$

para todos os índices α. Essa equação intuitivamente determina que todas as y-derivadas de Φ em $\{y = 0\}$. A Parte *a)* segue do Teorema de Extensão de Whitney.

Para a Parte *b)*, se Φ se anula em $\{y = 0\}$, então todas as x-derivadas de Φ também se anulam em $\{y = 0\}$. Se $\overline{\partial}\Phi$ se anula em ordem infinita em $\{y = 0\}$ então de 7.10, segue que todas as derivadas de Φ se anulam em $\{y = 0\}$. □

Prova do Teorema 7.27. A parte da unicidade do Teorema 7.27 é similar a prova do Lema 7.25.

Para a existência, o que devemos mostrar é se $F = 0$ em M e se $\overline{\partial}F$ se anula em ordem infinita em M, então todas as derivadas de F também devem se anular em M. A prova da Existência do Teorema 7.27 é análoga à Segunda Prova da Existência do Teorema 7.24. A função gráfico h para M, e então para H, pode ser extendida à $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ como funções suaves tais que $\overline{\partial}_z h$ e $\overline{\partial}_z H$ se anula em infinita ordem em $\{\text{Im } z = 0\}$ pelo Lema 7.28. Como feito anteriormente, usamos $H = (H_1, \ldots, H_n)$ para definir uma nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$. O Lema 7.26, que exibe uma base local $\{\Lambda_j, \partial/\partial\overline{z}_j\}$ para o fibrado $T^{0,1}$ desta nova estrutura complexa ainda é válido. Para uma função CR suave f em M, seja $f_0 = f \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}}$. Extenda f_0 à $F_0 : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\overline{\partial}_z F_0$ se anula em ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$. A computação que $\Lambda_j F_0$ se anula em $\{\text{Im } z = 0\}$ ainda é válida. Como $\overline{\partial}_z h$ e $\overline{\partial}_z F_0$ se anula em ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$, $\overline{\partial}_z \{\Lambda_j F_0\}$ também se anula em ordem infita em $\{\text{Im } z = 0\}$. Pela Parte *b)* do Lema 7.28, $\Lambda_j F_0$ se anula em ordem infita em $\{\text{Im } z = 0\}$. Assim, ambos $\Lambda_j F_0$ e $\partial F_0/\partial\overline{z}_j$ se anula em ordem infinita em $\{\text{Im } z = 0\}$.

Como $H : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ é um difeomorfismo próximo à origem, então definimos

$$F = F_0 \circ H^{-1}.$$

Como feito anteriormente, $F|_M = f$ pois $F \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}} = f_0 = f \circ H|_{\{\text{Im } z=0\}}$. Falta provar que $\overline{\partial}F$ se anula em infinita ordem em M. Isso é equivalente à mostrar que $\overline{L}F$ se anula em infinita ordem em M para todo $\overline{L}$ pertencente à $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ para a estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$. Já sabemos que $\overline{L}F_0$ se anula em infinita ordem em $\{\text{Im } z = 0\}$ para todos $\overline{L}$ no fibrado $T^{0,1}$ para a nova estrutura complexa para C^n. Como $H : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ é o sistema de coordenadas para a nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$, o *push forward* sob H^{-1} leva o fibrado $T^{0,1}$ para a estrutura complexa usual para $\mathbb{C}^n$ ao fibrado $T^{0,1}$ para a nova estrutura complexa para $\mathbb{C}^n$. Portanto, $(H_*^{-1}\overline{L})F_0$ se anula em infinita ordem em $\{\text{Im } z = 0\}$ para todo $\overline{L}$ no fibrado $T^{0,1}$ para a estrutura complexa usual para $\mathbb{C}^n$. Como $F = F_0 \circ H^{-1}$, concluímos que $\overline{L}F$ se anula em infinita ordem em M para todo $\overline{L}$ no fibrado $T^{0,1}$ para a estrutura complexa usual para $\mathbb{C}^n$, como desejada. Assim, a Prova do Teorema 7.27 está completa. $\square$

7.4.2 Aplicações CR

Suponha que M e N são variedades CR e $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação C^1. Se o espaço de destino N é uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^m$, então f tem funções componentes $(f_1, \dots, f_m)$. Nesse caso, é razoável chamar f de *aplicação CR* se cada função componente for uma função CR. Essa definição precisa ser modificada no caso onde N não é mergulhada em $\mathbb{C}^m$. Para motivar a definição astrata, vamos examinar mais perto o caso onde ambos M e N são subvariedades CR de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$. Usando o Teorema 7.27, podemos extender $f = (f_1, \dots, f_m) : M \longrightarrow N$ à uma função $F = (F_1, \dots, F_m)$ definida em $\mathbb{C}^m$ tal que $\overline{\partial}F_j = 0$ em M, $1 \leq j \leq m$. Então, para $p \in M$, $F_*(p)$ é uma aplicação de $T_p^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ à $T_{F(p)}^{1,0}(\mathbb{C}^n)$ e de $T_p^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ à $T_{F(p)}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$. Ainda mais, $F_*(p)$ é uma aplicação de $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ à $T_{F(p)}^{\mathbb{C}}(N)$, pois F é uma aplicação de M à N. Portanto, para $p \in M$, $F_*(p)$ é uma aplicação de $H_p^{1,0}(M)$ à $H_{F(p)}^{1,0}(N)$ e de $H_p^{0,1}(M)$ à $H_{F(p)}^{0,1}(N)$. Para uma estrutura CR abstrata $(M, \mathbb{L})$, o subfibrado $\mathbb{L}$ toma o lugar de $H^{1,0}(M)$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 7.29. *Suponha que $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$ sejam estruturas CR. Uma aplicação C^1 $f : M \longrightarrow N$ é chamada de aplicação CR se $f_* \{\mathbb{L}_M\} \subset \mathbb{L}_N$.*

A extensão de f_* à $T^{\mathbb{C}}(M)$ satisfaz $f_*(\overline{L}) = \overline{f_*(L)}$ para qualquer $L \in T^{\mathbb{C}}(M)$. Portanto, a Definição 7.29 é equivalente à $f_* \left\{\overline{\mathbb{L}}_M\right\} \subset \overline{\mathbb{L}}_N$. Em particular, $f_* \left\{\mathbb{L}_M \oplus \overline{\mathbb{L}}_M\right\}$ $\subset \mathbb{L}_N \oplus \overline{\mathbb{L}}_N$.

Lema 7.30. *Suponha que $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR. Uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_m) : M \longrightarrow \mathbb{C}^m$ é uma aplicação CR se, e somente se, cada f_j é uma função CR.*

Demonstração. Nosso objetivo é a estrutura CR $(\mathbb{C}^m, T^{1,0}(\mathbb{C}^m))$. A aplicação f é CR se, e somente se, $f_*(\overline{L})$ pertence à $T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$ para cada $\overline{L} \in \overline{\mathbb{L}}$. Para $1 \leq j \leq m$, seja z_j a j-ésima função coordenada para $\mathbb{C}^m$. Temos que

$$\begin{aligned}(f_*(\overline{L})\{z_j\}) \circ f &= \overline{L}\{z_j \circ f\} \\ &= \overline{L}\{f_j\}.\end{aligned}$$

Segue que $f_*(\overline{L})$ pertence à $T^{0,1}(\mathbb{C}^m)$ se, e somente se, $\overline{L}\{f_j\} = 0$ para $1 \leq j \leq m$. A prova do lema segue da Parte *a)* do Lema 7.22. $\square$

Defina o subfibrado

$$H(M) = \left\{L + \overline{L}; L \in \mathbb{L}_M\right\}.$$

Esse é um subfibrado do fibrado rangente real à M. Do Lema 3.8, existe uma aplicação de estrutura complexa $J : H(M) \longrightarrow H(M)$ tal que a extensão de J à $H^{\mathbb{C}}(M)$ $= \mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ tem auto-espaços $\mathbb{L}$ e $\overline{\mathbb{L}}$ correspondentes ao autovalores $+i$ e $-i$. O seguinte teorema nos dá uma caracterização alternativa de uma aplicação CR em termos da ação de f_* em $H(M)$ e a aplicação J.

Teorema 7.31. *Suponha que $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$ são estruturas CR. Sejam $J_M : H(M) \longrightarrow H(M)$ e $J_N : H(N) \longrightarrow H(N)$ as aplicações de estruturas complexas associadas. Uma aplicação C^1 $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação CR se, e somente se, para cada $p \in M$, $f_*(p)\{H_p(M)\} \subset H_{f(p}(N)$ e*

$$J_N \circ f_*(p) = f_*(p) \circ J_M \ \ em \ \ H_p(M).$$

Demonstração. Primeiramente, assumimos que f é uma aplicação CR como na Definição 7.29. Para $L \in \mathbb{L}_M$

$$f_*(L + \overline{L}) = f_*(L) + \overline{f_*(L)}.$$

Como $f_*(L) \in \mathbb{L}_N$, claramente $f_*(L + \overline{L})$ é um elemento de $H(N)$. Ainda mais, $\mathbb{L}_M$ e $\overline{\mathbb{L}}_M$ são os $+i$ e $-i$ auto-espaços para J_M. Portanto

$$\begin{aligned} f_*(J_M(L + \overline{L})) &= f_*(iL - i\overline{L}) \\ &= i(f_*(L) - \overline{f_*(L)}). \end{aligned}$$

Como $f_*(L)$ é um elemento de $\mathbb{L}_N$, que é o $+i$ auto-espaço de J_N, as equações acima tornam-se

$$f_*(J_M(L + \overline{L})) = J_N(f_*(L + \overline{L})).$$

Portanto, $f_* \circ J_M = J_N \circ f_*$ em $H(M)$, como desejado.

Para a recíproca, note que cada elemento L em $\mathbb{L}_M$ pode ser escrito como

$$L = X - iJ_M X,$$

onde $X = 1/2(L + \overline{L}) \in H(M)$. Temos que

$$\begin{aligned} f_*(L) &= f_*(X) - if_*(J_M X) \\ &= f_*(X) - iJ_N f_*(X). \end{aligned}$$

$\mathbb{L}_N$ é gerado pelos vetores da forma $Y - iJ_NY$ para $Y \in H(N)$. COmo $f_*(X)$ pertence à $H(N)$, as equações acima mostram que $f_*(L)$ pertence à $\mathbb{L}_N$, como desejado. A prova do teorema está completa. $\square$

Lema 7.32. *Suponha que $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação CR entre estruras CR $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$. Então*

a) $F^*\left\{T^{*^{1,0}}(N)\right\} \subset T^{*^{1,0}}(M)$;

b) Para $p, q \geq 0$

$$F^*\left\{\Lambda^{p,q}T^*(N)\right\} \subset \Lambda^{p,q}T^*(N) \oplus \cdots \oplus \Lambda^{p+r,q-r}T^*(N),$$

onde $r = min\,\{q, n-p\}$ *com* $n = \dim_{\mathbb{C}} T^{*^{1,0}}(M)$.

Demonstração. Para a Parte *a)*, seja $\phi \in T^{*^{1,0}}(N)$. Devemos mostrar que

$$\left\langle\ F^*\phi, \overline{L}\ \right\rangle \quad \text{para todo} \quad \overline{L} \in T^{0,1}(M) = \overline{\mathbb{L}}_M,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o pareamento entre formas e vetores. Como F é CR, $F_*\overline{L}$ é um elemento de $\overline{\mathbb{L}}_N = T^{0,1}(N)$ e então $0 = \left\langle\ \phi, F_*\overline{L}\ \right\rangle = \left\langle\ F^*\phi, \overline{L}\ \right\rangle$, como desejado.

Para a Parte *b)*, segue escrevendo um termo típico em $\Lambda^{p,q}T^*(N)$ como

$$\phi = \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q,$$

onde cada $\phi_i \in T^{*^{1,0}}(N)$ e $\psi_j \in T^{*^{0,1}}(N)$ e então usando a Parte *a)* para$F^*\phi_i$. Note que $F^*\psi_j$ geralmente tem componentes não-triviais do tipo $(1,0)$ e $(0,1)$. $\square$

Teorema 7.33. *Suponha que M e N são variedades CR e $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação CR. Então,*

$$\overline{\partial}_M \circ \pi_M^{p,q} \circ f^* = \pi_M^{p,q+1} \circ f^* \circ \overline{\partial}_N,$$

como aplicações de $\mathcal{E}_N^{p,q}$ à $\mathcal{E}_M^{p,q+1}$.

Demonstração. Seja ϕ um elemento de $\mathcal{E}_N^{p,q}$. Do Lema 7.32, temos

$$\pi^{p,q}F^*\phi = F^*\phi - [\pi_M^{p+1,q-1}(F^*\phi) + \cdots + \pi_M^{p+r,q-r}(F^*\phi)].$$

Da definição de $\overline{\partial}_M$, temos que

$$\overline{\partial}_M(\pi^{p,q}F^*\phi) = \pi_M^{p,q+1}d_MF^*\phi - \pi_M^{p,q+1}\left\{\sum_{j=1}^{r} d_M(\pi_M^{p+j,q-j}f^*\phi)\right\}. \tag{7.11}$$

Pelo Lema 7.11,

$$d_M\left\{\pi_M^{p+j,q-j}F^*\phi\right\} \in \mathcal{E}_M^{p+j+2,q-j-1} \oplus \mathcal{E}_M^{p+j+1,q-j} \oplus \mathcal{E}_M^{p+j,q-j+1}.$$

Como $j \geq 1$, a soma à direita da Equação 7.11 é nula. Portanto,

$$\overline{\partial}_M(\pi_M^{p,q}F^*\phi) = \pi_M^{p,q+1}(d_M F^*\phi).$$

Usando o fato que d_M comuta com F^*, temos que

$$\overline{\partial}_M(\phi_M^{p,q}F^*\phi) = \pi_M^{p,q+1}(F^* d_N\phi). \tag{7.12}$$

Da definição de $\overline{\partial}_N$ e do Lema 7.11, temos que

$$d_N\phi = \overline{\partial}_N\phi + [\pi_N^{p+1,q}(d_N\phi) + \pi_N^{p+2,q-1}(d_N\phi)]. \tag{7.13}$$

Do Lema 7.32, $F^*(\pi_N^{p+1,q}(d_N\phi))$ é uma soma de termos do tipo $(p+1+j, q-j)$ para $0 \leq j \leq \min(q, n-p-1)$. Em particular, $\pi_M^{p,q+1}(F^*\pi_N^{p+1,q}(d_N\phi)) = 0$. Similarmente, $\pi_M^{p,q+1}(F^*\pi_N^{p+2,q-1}(d_N\phi)) = 0$. Esses desses resultados junto das Equações 7.12 e 7.13, temos

$$\overline{\partial}_M\pi^{p,q}F^*\phi = \phi^{p,q+1}F^*d_N\phi = \phi^{p,q+1}F^*\overline{\partial}_N\phi.$$

O que prova o resultado $\square$

Definição 7.34. *Sejam $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$ estruturas CR, dizemos que elas são CR equivalentes se existe um difeomorfismo CR entre M e N. Dizemos que o o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann é solúvel em bigrau (p,q) se para qualquer forma $f \in \mathcal{E}_M^{p,q}(M)$ com $\overline{\partial}_M f = 0$, então existe uma forma $u \in \mathcal{E}_M^{p,q-1}(M)$ com $\overline{\partial}_M u = f$.*

Corolário 7.35. *Suponha que $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$ sejam estruturas CR equivalentes. O Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann é solúvel no bigrau (p,q) em M se, e somente se, o mesmo for verdadeiro para N.*

Demonstração. Suponha que $F : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo CR e $f \in \mathcal{E}_N^{p,q}(N)$ com $\overline{\partial}_N f = 0$. Pelo Teorema 7.33, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_M(\pi_M^{p,q}F^*f) &= \pi_M^{p,q+1}F^*\overline{\partial}_N f \\ &= 0 \text{ em } M. \end{aligned}$$

Se o $\overline{\partial}$-complexo é solúvel em bigrau (p,q) em M, então existe uma forma $u \in \mathcal{E}_M^{p,q-1}(M)$ com

$$\overline{\partial}_M u = \pi_M^{p,q}F^*f.$$

Aplicando $\pi_N^{p,q} \circ F^{-1^*}$ e usando o Teorema 7.33, substituindo M por N e F por F^-1, obtemos

$$\overline{\partial}_N\left\{\pi_N^{p,q-1}(F^{-1^*}u)\right\} = \pi_N^{p,q}(F^{-1^*}\pi_M^{p,q}F^*f). \tag{7.14}$$

Do Lema 7.32, temos que

$$(\pi_M^{p,q} F^* f) = F^* f - \left(\sum_{j=1}^{r} \pi_M^{p+j,q-j}(F^* f) \right),$$

onde $r = \min(q, n-p)$. Aplicando $\pi_N^{p,q} \circ F^{-1^*}$ e o Lema 7.32, substituindo F^{-1} por F, temos que

$$\begin{aligned} \pi_N^{p,q}(F^{-1^*}(\pi_M^{p,q} F^* f)) &= \pi_N^{p,q} F^{-1^*} F^* f \\ &= \pi_N^{p,q}(f) \\ &= f \ \text{(como } f \in \mathcal{E}_N^{p,q}\text{)}. \end{aligned}$$

Substituindo a Equação 7.15 na Equação 7.13, temos que

$$\overline{\partial}_N \left\{ \pi_N^{p,q-1}(F^{-1^*} u) \right\} = f \ \text{ em } \ N.$$

Portanto, a solubilidade de $\overline{\partial}_M$ implica na solubilidade de $\overline{\partial}_N$. A recíproca é análoga. $\square$

8 A FORMA DE LEVI

A Forma de Levi possui grande importância no principal resultado deste trabalho, pois, à partir dela, conseguimos definir uma das hipóteses para a extensão holomorfa de funções CR. Nos capítulos anteriores, conceitos como o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann são introduzidos primeiro para variedades CR mergulhadas e depois para variedades CR abstratas. Aqui, faremos o contrário. Primeiramente, daremos a definição da forma de Levi para o caso de uma estrutura CR abstrata e, então, procederemos dando representações mais concretas da forma de Levi no caso de uma variedade CR mergulhada. A forma de Levi para o caso de uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$ é discutida em algum detalhe. Em particular, a relação entre a Forma de Levi e a primeira forma fundamental de uma hipersuperífcie é apresentada.

8.1 DEFINIÇÕES

Uma das propriedades definidas de uma estrutura CR $(M, \mathbb{L})$ é que $\mathbb{L}$ é involutivo. O subfibrado $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} \subset T^{\mathbb{C}}(M)$ não é necessariamente involutivo. De fato, a forma de Levi para M é definida de modo que mede o grau em que $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ falha em ser involutivo.

Para $p \in M$, seja

$$\pi_p : T_p(M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \{T_p(M) \oplus \mathbb{C}\} / (\mathbb{L}_p \otimes \overline{\mathbb{L}}_p),$$

a aplicação projeção natural.

Definição 8.1. *A forma de Levi em um ponto $p \in M$ é a aplicação $\mathcal{L}_p : \mathbb{L}_p \longrightarrow \{T_p(M) \oplus \mathbb{C}\} / (\mathbb{L}_p \otimes \overline{\mathbb{L}}_p)$ definida por*

$$\mathcal{L}_p(L_p) = \frac{1}{2i} \pi_p \left\{ [\overline{L}, L]_p \right\} \quad \textit{para} \;\; L_p \in \mathbb{L}_p,$$

onde L é quaquer campo vetorial em $\mathbb{L}$ que é igual à L_p em p.

O campo vetorial $[\overline{L}, L]$ está em $T^{\mathbb{C}}(M)$ pois $T^{\mathbb{C}}(M)$ é involutivo. Então, a forma de Levi mede o pedaço de $(1/2i)[\overline{L}, L]_p$ que está fora de $\mathbb{L}_p \oplus \overline{\mathbb{L}}_p$. O fator $1/wi$ é introduzido para que $\overline{\mathcal{L}}_p = \mathcal{L}_p$.

Para mostrar que a forma de Levi está bem definida, devemos mostrr que sua definição independe da escolha do $\mathbb{L}$-campo vetorial de extensão do vetor $L_p \in \mathbb{L}_p$.

Lema 8.2. *Suponha que L e Z são dois campos vetoriais em $\mathbb{L}$ com $L_p = Z_p$, então*

$$\pi_p[\overline{L}, L]_p = \pi_p[\overline{Z}, Z]_p.$$

Demonstração. Fixando $p \in M$ e tomando $\{L_1, \ldots, L_m\}$ uma base para $\mathbb{L}$ que está definido próximo à p. PAra uma única coleção de funções suaves $a_1, \ldots, a_m$ e $b_1, \ldots, b_m$, temos que

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^{m} a_j L_j \\ Z &= \sum_{j=1}^{m} b_j L_j \;\text{ próximo de }\; p. \end{aligned}$$

A suposição que $L_p = Z_p$ significa que $a_j(p) = b_j(p)$ para $1 \leq j \leq m$. Expandindo o colchete de Lie, temos que

$$\begin{aligned} [\overline{L}, L] &= \left[\sum_{j=1}^{m} \overline{a}_j \overline{L}_j, \sum_{k=1}^{m} a_k L_k\right] \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} \overline{a}_j a_k [\overline{L}_j, L_k] \mod (\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi_p[\overline{L}, L]_p = \sum_{j,k=1}^{m} \overline{a}_j(p) a_k(p) \pi_p [\overline{L}_j, L_k]_p.$$

Analogamente, temos que

$$\pi_p[\overline{Z}, Z]_p = \sum_{j,k=1}^{m} \overline{b}_j(p) b_k(p) \pi_p [\overline{L}_j, L_k]_p.$$

Como $a_j(p) = b_j(p)$, a prova do lema está completa. $\square$

Se $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação CR entre estruturas CR $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$, então $F_*(p)$ é uma aplicação de $(\mathbb{L}_M \oplus \overline{\mathbb{L}}_M)_p$ à $(\mathbb{L}_N \oplus \overline{\mathbb{L}}_N)_{F(p)}$. Portanto, $F_*(p)$ induz uma aplicação nos espaços quocientes

$$[F_*(p)] : \{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\} / (\mathbb{L}_M \oplus \overline{\mathbb{L}}_M)_p \longrightarrow \left\{T_{F(p)}(N) \otimes \mathbb{C}\right\} / (\mathbb{L}_N \oplus \overline{\mathbb{L}}_N)_{F(p)}.$$

Lema 8.3. *Suponha que $(M, \mathbb{L}_M)$ e $(N, \mathbb{L}_N)$ são estruturas CR e sejam $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_N$ suas respectivas formas de Levi. Se $F : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo CR, então para $p \in M$*

$$[F_*(p)] \circ \mathcal{L}_p^M = \mathcal{L}_{F(p)}^N \circ F_*(p),$$

como aplicações de $\{\mathbb{L}_M\}_p$ à $\left\{T_{F(p)}(N) \otimes \mathbb{C}\right\} / (\mathbb{L}_N \oplus \overline{\mathbb{L}}_N)_{F(p)}$.

Demonstração. A prova segue das definições e do fato que $F_*[\overline{L}, L] = [\overline{F_*(L)}, F_*(L)]$. $\square$

Definição 8.4. *Dizemos que uma estrutura CR $(M, \mathbb{L})$ é Levi flat se a forma de Levi de M é nula em cada ponto em M.*

Exemplo 8.5. Seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}; \text{Im } z = 0\}$. Uma base para $\mathbb{L} = H^{1,0}(M)$ é dada por $\partial/\partial w_1, \ldots, \partial/\partial w_{n-1}$. Como $[\partial/\partial \overline{w}_k, \partial/\partial w_j] = 0$, M é Levi *flat*. Note também que M é folheado pelas variedades complexas

$$M_x = \left\{(x, w); w \in \mathbb{C}^{n-1}\right\} \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

O fibrado tangente complexificado de cada M_x é dado por $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$.

Teorema 8.6. *Suponha que $(M, \mathbb{L})$ é uma estrutura CR Levi flat. Então, M é localmente folheado por variedades complexas cujo fibrado tangente complexificado é dado por $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{L}$ e $\overline{LL}$ são involutivos pela definição de variedade CR, $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ é involutivo se, e somente se, $[\overline{L}_1, L_2]$ é um elemento de $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ sempre que L_1 e L_2 pertencem à $\mathbb{L}$. Como M é Levi *flat*, $[\overline{L}_1, L_1]$, $[\overline{L}_2, L_2]$ e $[\overline{L}_1 + \overline{L}_2, L_1 + L_2]$ pertencem à $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$. Após expandir $[\overline{L}_1 + \overline{L}_2, L_1 + L_2]$, vemos que

$$A = [\overline{L}_1, L_2] - \overline{[\overline{L}_1, L_2]} \in \mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}.$$

Uma computação análoga envolvendo $[\overline{L}_1 + \overline{iL}_2, L_1 + iL_2]$ implica que o campo vetorial

$$B = [\overline{L}_1, L_2] + \overline{[\overline{L}_1, L_2]} \in \mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}.$$

Somando A e B, vemos que $[\overline{L}_1, L_2] \in \mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ e, então, $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ é involutivo.

O fibrado tangente subjacente para $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ é o espaço

$$H(M) = \left\{L + \overline{L}; L \in \mathbb{L}\right\}.$$

Como $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}}$ é involutivo, $H(M)$ é um subfibrado real involutivo de $T(M)$. O Teorema de Frobenius, implica que M é folheado por subvariedades, $\{M'\}$, tal que $T_p(M') = H_p(M)$ para cada $p \in M'$. O espaço tangente complexificado para M' em p é dado por
$H_p(M) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{L}_p \oplus \overline{\mathbb{L}}_p$. Como $\mathbb{L}$ é involutivo, $(M', \mathbb{L})$ forma uma estrutura quase complexa involutiva. Pelo Teorema de Newlander-Nirenber, existe uma estrutura complexa para M' tal que o $T^{1,0}(M)$-fibrado resultante é $\mathbb{L}$. Isso completa a prova do teorema. □

8.2 A forma de Levi para uma Variedade CR Mergulhada

Computações com a forma de Levi são facilitadas identificando o espaço quociente $\{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\} / (\mathbb{L}_p \oplus \overline{\mathbb{L}}_p)$ como um subespaço de $T_p(M) \otimes \mathbb{C}$. Isso se dá escolhendo uma métrica para $T^{\mathbb{C}}(M)$ e, então, identificando o espaço quaociente $\{T_p(M) \otimes \mathbb{C}\} / (\mathbb{L}_p \oplus \overline{\mathbb{L}}_p)$ como o complemento ortogonal de $\mathbb{L}_p \oplus \overline{\mathbb{L}}_p$

Para uma variedade CR mergulhada M, uma métrica natural existe, chamada a restração da métrica Euclidiana de $T^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ à $T^{\mathbb{C}}(M)$. Nesse caso, $\mathbb{L} = H^{1,0}(M)$ e $\overline{\mathbb{L}}H^{0,1}(M)$.

E o espaço quociente

$$T^{\mathbb{C}}(M)/\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}},$$

é identificado como a parte totalmente real complexificada do fibrado tangente. Como mencionado anteriormente, $\overline{\mathcal{L}_p(L_p)} = \mathcal{L}_p(L_p)$ e, então, a imagem da forma de Levi está contida em $X_p(M)$, que é a parte totalmente real do espaço tangente real de M em p.

Com isso, a forma de Levi de uma subvariedade CR M no ponto $p \in M$ é a aplicação $\mathcal{L}_p : H_p^{1,0}(M) \longrightarrow X_p(M)$, dada por

$$\mathcal{L}_p(L_p) = \frac{1}{2i}\pi_p[\overline{L}, L]_p, \quad L_p \in H_p^{1,0}(M),$$

onde $\pi_p : T_p(M) \longrightarrow X_p(M)$ é a preojeção ortogonal e onde L é qualquer $H^{1,0}(M)$-campo vetorial de extensão do vetor L_p.

Algumas vezes é conveniente pensar na forma de Levi de uma variedade CR mergulhada como uma aplicação do espaço normal de M em p, denotado $N_p(M)$, que é o complemento ortogonal de $T_p(M)$ em $T_p(\mathbb{R}^{2n})$. Isso se dá compondo $\mathcal{L}_p$ com J e, então, projetando em $N_p(M)$. Seja $\widetilde{\pi}_p : T_p(\mathbb{C}^n) \longrightarrow N_p(M)$ a aplicação projeção ortogonal.

Definição 8.7. *A forma de Levi extrínseca de M em p é a aplicação $\widetilde{\mathcal{L}}_p : H_p^{1,0}(M) \longrightarrow N_p(M)$ dado por $\widetilde{\pi}_p \circ J \circ \mathcal{L}_p$.*

Como $H_p^{1,0}(M)$ e $H_p^{0,1}(M)$ são J-invariantes, temos que

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(L_p) = \frac{1}{2i}\widetilde{\pi}_p(J[L, \overline{L}]_p),$$

onde L é qualquer $H^{1,0}(M)$-campo vetorial de extensao de L_p.

Teorema 8.8. *Suponha que $M = \{\zeta \in \mathbb{C}^n; \phi_1(\zeta) = \cdots = \phi_d(\zeta) = 0\}$ é uma subvariedade CR suave de $\mathbb{C}^n$, com $1 \leq d \leq n$. Seja p um ponto em M e que $\{\bigtriangledown\rho_1(p), \ldots, \bigtriangledown\rho_d(p)\}$ seja uma base ortonormal para $N_p(M)$. Então a forma de Levi extrínseca é dada por*

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(W) = -\sum_{l=1}^{d}\left(\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\phi_l(p)}{\partial\zeta_j\partial\overline{\zeta}_k}w_j\overline{w}_k\right)\bigtriangledown\rho_l(p,)$$

para $W = \sum_{k=1}^{n} w_k(\partial/\partial\zeta_k) \in H_p^{1,0}(M)$.

Demonstração. Temos da definição de $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ que

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(W) = \frac{1}{2i}\widetilde{\pi}_p(J[\overline{W}, W]_p),$$

para $W \in H^{1,0}(M)$. Como $\{\bigtriangledown\rho_1(p), \ldots, \bigtriangledown\rho_d(p)\}$ é uma base ortonormal para $N_p(M)$, a projeção $\widetilde{\pi}_p : T_p(\mathbb{C}^n) \longrightarrow N_p(M)$ é dada por

$$\widetilde{\pi}_p(v) = \sum_{l=1}^{d} \langle \, d\rho_l(p), v \, \rangle \bigtriangledown \rho_l(p),$$

onde $\langle \; , \; \rangle$ denota o pareamento entre 1-formas e vetores. Então, a l-ésima componente de $\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p)$ é dada por

$$\frac{1}{2i} \left\langle \, d\rho_l(p), J[\overline{W}, W]_p \, \right\rangle.$$

Usando o dual de J, denotado $J^* : T_p^*(\mathbb{C}^n) \longrightarrow T_p^*(\mathbb{C}^n)$, obtemos l-ésima componente de $\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p) = \dfrac{1}{2i} \left\langle \, J^* d\rho_l(p), [\overline{W}, W]_p \, \right\rangle$. Relembrando que $d = \partial + \overline{\partial}$, $J^* \circ \partial = i\partial$ e $J^* \circ \overline{\partial} = -i\overline{\partial}$. Portanto, a l-ésima componente de $\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p)$ é dada por

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p) = \frac{1}{2} \left\langle \, (\partial - \overline{\partial})\rho_l(p), [\overline{W}, W]_p \, \right\rangle. \tag{8.1}$$

Para uma 1-forma e os campos vetoriais L_1, L_2, temos que

$$\langle \, d\phi, L_1 \wedge L_2 \, \rangle = L_1 \{ \langle \, \phi, L_2 \, \rangle \} - L_2 \{ \langle \, \phi, L_1 \, \rangle \} - \langle \, \phi, [L_1, L_2] \, \rangle. \tag{8.2}$$

Aplicando essa fórmula com $\phi = (1/2)(\partial - \overline{\partial})\rho_l$ e $L_1 = \overline{W} \in H^{0,1}(M)$, $L_2 = W \in H^{1,0}(M)$. Temos que

$$\langle \, \phi, L_2 \, \rangle = \frac{1}{2} \langle \, \partial\rho_l, W \, \rangle - \frac{1}{2} \left\langle \, \overline{\partial}\rho_l, W \, \right\rangle. \tag{8.3}$$

Como W é do tipo $(1,0)$ e $\overline{\partial}\rho_l$ é uma forma de bigrau $(0,1)$, o segundo termo à direita da Equação 8.3 é nulo. O primeiro termo à direita da Equação 8.3 também é nulo pelo Lema 6.10. Portanto, temos que $\langle \, \phi, L_2 \, \rangle = 0$. Analogamente, temos que $\langle \, \phi, L_1 \, \rangle = 0$. Aplicando na Equação 8.2, temos que

$$\left\langle \, d(\partial - \overline{\partial})\rho_l, \overline{W} \wedge W \, \right\rangle = - \left\langle \, (\partial - \overline{\partial})\rho_l, [\overline{W}, W] \, \right\rangle.$$

Comparando com a Equação 8.1, temos que a l-ésima coordenada de $\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p)$ é

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p) &= -\frac{1}{2} \left\langle \, d(\partial - \overline{\partial})\rho_l, \overline{W} \wedge W \, \right\rangle_p \\ &= - \left\langle \, \partial\overline{\partial}\rho_l, \overline{W} \wedge W \, \right\rangle_p \quad (\text{como } d = \partial + \overline{\partial}) \\ &= - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_l(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k, \end{aligned}$$

para $W_p = \sum_{k=1}^{n} w_k (\partial / \partial \zeta_k)$. A prova do teorema agora está completa. □

O Teorema 8.8 é frequentemente usado em conjunção com o Lema 6.17. No lema, o ponto $p \in M$ é a origem das coordenadas $\zeta = (z = x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ são

escolhidos tais que as funções definidas para M são $\rho_l(z,w) = y_l - h_l(x,w)$, $1 \leq l \leq d$, com $h_l(0) = 0$ e $Dh_(0) = 0$. Note que $\bigtriangledown\rho_l(0) = \partial/\partial y_l$ e, então, $\{\bigtriangledown\rho_1(0), \ldots, \bigtriangledown\rho_d(0)\}$ é uma base ortonormal para $N_0(M)$. Identificamos $N_0(M)$ como $\mathbb{R}^d$ via a aplicação
$y = (y_1, \ldots, y_d) \longrightarrow \sum_{l=1}^{d} y_l(\partial/\partial y_l) \in N_)(M)$. Também identificamos $H_0^{1,0}(M)$ como $\mathbb{C}^{n-d}$ via a aplicação $w = (w_1, \ldots, w_{n-d}) \longrightarrow \sum_{k=1}^{n-d} w_k(\partial/\partial w_k)$.

Corolário 8.9. *Suponha que* $M = \left\{(x+iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x,w)\right\}$, *onde* $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *é suave e* $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. *Então a forma de Levi extrínseca em* 0 *é dada por*

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_0(W) &= (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d \\ y_l &= \sum_{j,k=1}^{n-d} \frac{\partial^2 h_l(0)}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} w_j \overline{w}_k, \end{aligned}$$

para $W = (w_1, \ldots, w_{n-d}) \in \mathbb{C}^{n-d}$.

Demonstração. A prova segue expandindo $[\overline{L}_k, L_j]$, onde $L_1, \ldots, L_{n-d}$ é a base local para $H^{1,0}(M)$ dado no Teorema 6.20. $\square$

Voltamos a atenção ao caso de uma variedade quadrática

$$M = \{y = q(w, \overline{w})\},$$

onde $q : \mathbb{C}^{n-d} \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ é uma forma quarática. Do Corolário 8.9, a forma de Levi de M na origem é dada por

$$w = (w_1, \ldots, w_{n-d}) \longrightarrow \sum_{j,k=1}^{n-d} \frac{\partial^2 q(0)}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} w_j \overline{w}_k = q(w, \overline{w}) \in \mathbb{R}^d.$$

Em outras palavras, a forma de Levi na origem de uma subvariedade quadrática é a forma quadrátrica associada q (restrita à $\left\{(w, \overline{w}); w \in \mathbb{C}^{n-d}\right\}$).

Do Teorema 6.29, que descreve uma forma normal para quadráticas de codimensão dois em $\mathbb{C}^4$, agora podemos interpretar em termos da forma de Levi. Nesse caso, $N_0(M)$ é uma cópia de $\mathbb{R}^2$ e $H_0^{1,0}(M)$ é uma cópia de $\mathbb{C}^2$. Na Parte *a)* do Teorema 6.29, $M = \{y_1 = q_1(w, \overline{w}), y_2 = 0\}$ e a imagem da forma de Levi de M em 0 está contido no eixo y_1 em $\mathbb{R}^2$. Em todos os três casos da Parte *b)* do Teorema 6.29, a imagem da forma de Levi é um cone de dimensão dois em $\mathbb{R}^2$. No caso *i)*, $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = |w_2|^2\}$ e a imagem da forma de Levi é o quadrante fechado $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$.

No caso *ii)*, $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = \text{ Re}(w_1\overline{w}_2)\}$ e a imagem da forma de Levi é o meio espaço aberto $\{y_1 > 0\}$ junto com a origem.

No caso *iii)*, $M = \{y_1 = \text{ Re}(w_1\overline{w}_2), y_2 = \text{ Im}(w_1\overline{w}_2)\}$ e a imagem da forma de Levi é todo $\mathbb{R}^2 \simeq N_0(M)$. Em todos esses casos, a imagem da forma de Levi é um cone convexo em $N_0(M)$. Em geral, a imagem da forma de Levi é um cone em $N_p(M)$.

8.3 A FORMA DE LEVI DE UMA HIPERSUPERFÍCIE REAL

Uma das classes mais estudades de variedades CR é a classe das hipersuperfícies reais em $\mathbb{C}^n$. Dedicaremos uma seção para o estudo da forma de Levi para uma hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$. Seja $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) = 0\}$, onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave. Se $p \in M$ com $| \bigtriangledown \rho(p)| = 1$, então do Teorema 8.8, a forma de Levi extrínseca é dada por

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(W) = -\left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k}(p) w_j \overline{w}_k\right) \bigtriangledown \rho(p), \tag{8.4}$$

para $W = \sum_{k=1}^{n} w_k(\partial/\partial\zeta_k) \in H_p^{1,0}(M)$. Nesse caso, $N_p(M)$ é isomorfo à reta real via aplicação $t \longrightarrow t \bigtriangledown \rho(p), t \in \mathbb{R}$. Por essa razão, $\bigtriangledown\rho(p)$ é frequentemente deixado de lado e a forma de Levi é identificada como a restrição da hessiana complexa de ρ à $H_p^{1,0}(M)$.

A Fórmula 8.4, requer que $| \bigtriangledown \rho(p)| = 1$ que pode ser sempre arranjada multiplicando ρ por um escalar. No entanto, é importante notar que se $\widetilde{\rho}$ é outra equação de definição para M com $d\widetilde{\rho} \neq 0$ em M, então a aplicação

$$W = (w_1, \ldots, w_n) \longrightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{\rho}(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k \ \text{ para } \ W \in H_p^{1,0}(M),$$

é um múltiplo não-nulo da forma de Levi em p. Para ver isso, note que $\widetilde{\rho} = \alpha\rho$ para alguma função suave $\alpha : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que é não-nula próximo à M. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{\rho}(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k &= \alpha(p) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k \\
&+ 2\mathrm{Re}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(p)}{\partial \zeta_j} w_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha(p)}{\partial \overline{\zeta}_k} \overline{w}_k\right)\right\} &(8.5) \\
&+ \rho(p) \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k. &(8.6)
\end{aligned}$$

O termo 8.6 é nulo, pois $\rho(p) = 0$ para $p \in M$. O termo 8.5 se anula pois $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\partial\rho/\partial\zeta_j)w_j = 0$ para $W = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j(\partial/\partial\zeta_j) \in H^{1,0}(M)$ pelo Lema 6.10. Portanto, a hessiana complexa de $\widetilde{\rho}$ aplicada no vetor $W = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j(\partial/\partial\zeta_j) \in H^{1,0}(M)$ difere da forma de LEvi de M em p pelo fator $\alpha(p)$. Em particular, informação sobre a forma de Levi sobre o número de autovalores não-nulos pode ser determinado examinando a hessiana complexa de qualquer função de definição para M.

Definição 8.10. *Uma hipersuperfície real M é chamada estritamente pseudoconvexa em um ponto $p \in M$ se a forma de Levi em p é definida positiva ou negativo, ou seja, se existe uma função de definição ρ para M tal que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k > 0,$$

para todo $W = \sum_{j=1}^{n} w_j(\partial/\partial \zeta_j) \in H_p^{1,0}(M)$.

Uma hipersuperfície real M é chamada estritamente pseudoconvexa se M é extritamente pseudoconvexa em cada ponto $p \in M$.

Teorema 8.11. *Suponha que $M \subset \mathbb{C}^n$ é uma hipersuperfície real e suave que é estritamente pseudoconvexa em um ponto $p \in M$. Então existe uma aplicação biholomorfa F definida em uma vizinhança U de $p \in \mathbb{C}^n$ tal que $F\{M \cap U\}$ é uma hipersuperfície estritamente convexa em $F\{U\} \subset \mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 1, página 164. □

Seja M é uma hipersuperfície real em $\mathbb{R}^N$ que localmente separa $\mathbb{R}^N$ em dois conjuntos abertos D e $\mathbb{R}^N - \overline{D}$. Seja $\mathbb{N}$ o campo vetorial unitário que aponta para fora de D à M. Asumindo que M é localmente orientada de acordo com $\mathbb{N}$, que significa que uma coleção de vetores $X_1, \ldots, X_{N-1}$ em $T_p(M)$ é considerado orientada positivamente se $\{\mathbb{N}_p, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$ tem mesma orientação de $\mathbb{R}^N$.

Seja $W = \sum w_j(\partial/\partial x_j)$ é uma campo vetorial em $\mathbb{R}^N$ e seja V_p um elemento de $T_p(\mathbb{R}^N)$. Definindo o vetor $\bigtriangledown V_p W \in T_p(\mathbb{R}^N)$ por

$$\bigtriangledown V_p W \in T_p(\mathbb{R}^N) = \sum_{j=1}^{N} V_p\{w_j\} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Em outras palavras, $\bigtriangledown v_p W$ é a derivada de W na direção de V_p. Se ambos V e W são campos vetoriais, então $[V, W]_p = \bigtriangledown V_p W - \bigtriangledown W_p V$.

Definição 8.12. *A segunda forma fundamental é a aplicação $\mathbb{I}_p : T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por*

$$\mathbb{I}_p(V_p, W_p) = -(\bigtriangledown V_p \mathbb{N}) \cdot W_p \ \ para \ \ V_p, W_p \in T_p(M),$$

onde $(\cdot)$ é o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^N$.

Seja ρ a seguinte função de definição para M

$$\rho(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, M), & \text{se} \quad x \in D \\ \ \ \text{dist}(x, M), & \text{se} \quad x \in R^N - D \end{cases}$$

Se M é C^∞ então ρ é C^∞ próximo de M em $\mathbb{R}^N$ e $\bigtriangledown\rho = \mathbb{N}$ em M.

Lema 8.13. *Sejam $p \in M$ e V_p, W_p elementos em $T_p(M)$. Suponha que V e W sejam quaisquer $T(M)$-campos vetoriais de extensão de V_p e W_p, respectivamente. Então*

a) $\mathbb{I}_p(V_p, W_p) = (\bigtriangledown V_p W) \cdot N_p$;

b) Se $V_p = \sum_{j=1}^N v_j(\partial/\partial x_j)$ e $W_p = \sum_{k=1}^N w_k(\partial/\partial x_k)$, então

$$\mathbb{I}_p(V_p, W_p) = -\sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial^2\rho(p)}{\partial x_j \partial x_k} v_j w_k.$$

Demonstração. Para a Parte *a)*, note que $\mathbb{N} \cdot W = 0$, como $W \in T(M)$ e $\mathbb{N}$ é unitário normal. Da Regra do Produto, temos que

$$0 = V\{\mathbb{N} \cdot W\} = (\bigtriangledown V\mathbb{N}) \cdot W + \mathbb{N} \cdot (\bigtriangledown VW),$$

daí a a prova segue.

Para a Parte *b)*, escrevendo $\mathbb{N} = \bigtriangledown\rho = \sum(\partial\rho/\partial x_k)(\partial/\partial x_k)$. Então

$$\bigtriangledown V_p\mathbb{N} = \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial\rho^2(p)}{\partial x_j \partial x_k} v_j \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Tomando o produto interno desse vetor com W_p, a prova segue. $\square$

Para comparar a forma de Levi com a sgunda forma fundamental, o primeiro problema a se contornar é que $\mathbb{I}_p$ está definido no espaço tangente real onde $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ está definido em $H_p^{1,0}(M)$ como um subespaço do espaço tangente complexificado de M. Se W_p é um elemento de $H_p^{1,0}(M)$ então $W_p = X_p - JX_p$ onde $X_p = 1/2(W_p + \overline{W}_p) \in H_p(M) \subset T_p(M)$. Se X é um $H(M)$- campo vetorial de extensão de X_p, então $W = X - iJX$ é um $H^{1,0}(M)$-campo vetorial de extensão de W_p. Temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_p(W_p) &= \widetilde{\pi}_p\left\{\frac{1}{2i}J[\overline{W}, W]_p\right\} \\
&= \widetilde{\pi}_p\left\{\frac{1}{2i}J[X + iJX, X - iJX]_p\right\} \\
&= -\widetilde{\pi}_p\left\{J[X, JX]_p\right\}.
\end{aligned}$$

Identificando X_p como $W_p = X_p - iJX_p$. Então, $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ é identificada como a aplicação $\widetilde{\mathcal{L}}_p(X_p) = -\widetilde{\pi}_p\{J[X, JX]\}$, para $X_p \in H_p(M)$.

A projeção $\widetilde{\pi}_p : T_p(\mathbb{C}^n) \longrightarrow N_p(M)$ é dada por $\widetilde{\pi}_p(V) = (V \cdot \mathbb{N}_p)\mathbb{N}_p$. Portanto,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_p(X_p) = -J[X, JX]_p \cdot \mathbb{N}_p.$$

O colchete de Lie $[X, JX]$ pode ser expressado como $\bigtriangledown X(JX) - \bigtriangledown JX(X)$. Também temos que $J(\bigtriangledown XY) = \bigtriangledown XJY$ computando os termos. Portanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_p(X_p) &= -J\left\{\bigtriangledown X_p(JX) - \bigtriangledown JX_p(X)\right\} \cdot \mathbb{N}_p \\
&= (\bigtriangledown X_p(X)) \cdot \mathbb{N}_p + (\bigtriangledown JX_p(JX)) \cdot \mathbb{N}_p \\
&= \mathbb{I}_p(X_p, X_p) + \mathbb{I}_p(JX_p, JX_p) \ \text{(pelo Lema 8.13)}.
\end{aligned}$$

Teorema 8.14. *$\widetilde{\mathcal{L}}_p(X_p) = \mathbb{I}_p(X_p, X_p) + \mathbb{I}_p(JX_p, JX_p)$, para $X_p \in H_p(M)$, onde X_p é identificado como $W_p = X_p - iJX_p \in H_p^{1,0}(M)$ na definição da forma de Levi.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 2, página 168. □

9 A EXTENSÃO HOLOMORFA DE FUNÇÕES CR

Como visto anteriormente, toda função holomorfa em $\mathbb{C}^n$ se restringe a uma função CR em uma subvariedade CR M de $\mathbb{C}^n$. No entanto, nem todas as funções CR são restrições de funções holomorfas. Neste capítulo, examinaremos condições geométricas em M que garantem que funções CR em M extendem como funções holomorfas em algum conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^n$. Sob certas condições geométricas em M, o conjunto aberto Ω contém um conjunto aberto de M, e sob outras condições geométricas, Ω pertence a um lado de M.

Estamos especialmente interessados na extensão CR à um conjunto aberto que a função é independente. Para isso, temos a seguinte questão: Dado um conjunto aberto ω em M, existe algum conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^n$ tal que cada função CR em ω extende à uma função holomorfa em Ω? Isso é diferente da questão respondida pelo Teorema 7.24, que mostra que qualquer função CR analítica real em uma subvariedade CR analítica real de $\mathbb{C}^n$ extende holomorficamente à um conjunto aberto em $\mathbb{C}^n$ que pode depender da função CR. Se não existem mais condições geométricas na subvariedade CR, então a extensão CR à um conjunto aberto que a função é independente é impossível, mesmo quando a subvariedade CR é real analítica.

Exemplo 9.1. Como exemplo, seja $M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; \text{Im } z = 0\}$. Cada função CR analítica real em um conjunto aberto $\omega \subset M$ extende à uma função holomorfa em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ com $\Omega \cap M = \omega$. Por outro lado, temos

$$\omega = \bigcap_{\epsilon>0} \Omega_\epsilon,$$

onde

$$\Omega_\epsilon = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; (\text{Re } z, w) \in \omega \text{ e } |\text{Im } z| < \epsilon\right\}.$$

Se ω é convexo, então cada Ω_ϵ é convexo e, então, um domínio holomorfo. Temos que se uma função holomorfa $f_\epsilon : \Omega_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ existe, então ela não pode ser analiticamente contínua em nenhuma parte do bordo de Ω_ϵ. A restrição de f_ϵ à ω é um exemplo de uma função CR analítica real em ω que não pode ser extendida analiticamente em nenhuma parte do bordo de Ω_ϵ. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que não existe um único conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ onde todas as funções CR em ω extendem holomorficamente.

No exemplo acima, M é Levi *flat*. Uma construção similar de Ω_ϵ pode ser replicada para qualquer subvariedade Levi *flat* em $\mathbb{C}^n$. Isso sugere que a forma de Levi tem um papel fundamente na extensão CR. Como mostraremos, a forma de Levi é um objeto geométrico chave que determina a extensão CR à um conjunto aberto se possível. Para uma hipersuperfície real M em $\mathbb{C}^n$, apresentaremos o Teorema de Hans Lewy, estabelecendo que se a forma de Levi em um ponto é não-nulo, então as funções CR extendem holomorficamente à um conjunto aberto que pertence à um lado de M. Se a forma de Levi de M tem autovalores de sinais opostos, então as funções CR extendem holomorficamente à um conjunto aberto que contém ambos lados de M. Também iremos generalizar esse teorema onde M tem codimensão maior.

São utilizadas duas aproximações para a prova do Teorema de Extensão CR, essas técnicas da prova são tão importantes quanto o resultado. Essa primeira aproximação envolve o uso de discos analíticos, que é uma ideia pioneira de Lewy e Bishop. A segunda usa transformada de Fourier. Essa técnica foi primeiramente aplicada ao problema de extensão CR por Baouendi e Treves. Ambas técnicas são usadas atualmente em problemas. Aqui não apresentaremos as provas mas elas seguem nos Capítulos 15 e 16 de [1].

9.1 Um Teorema de Arpoximação

Ambas aproximações para a extensão CR usam um Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves. O Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves é estabelecido com sistemas de Equações Diferenciais Parciais mais gerais, no entanto, nós estabeleceremos e provaremos no caso de equações de Cauchy-Riemann tangencial em uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^n$.

Teorema 9.2. *Seja p um ponto em uma subvariedade CR genérica M de $\mathbb{C}^n$ de classe C^2 com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n-d$, $0 \leq d \leq n$. Dada uma vizinhança ω_1 de p em M, então existe uma conjunto aberto ω_2 em M com $p \in \omega_2 \subset \omega_1$ tal que cada função CR de classe C^1 em ω_1 pode ser aproximado uniformemente em ω_2 por uma sequência de funções inteiras em $\mathbb{C}^n$.*

A prova do teorema requer os dois lemas que enunciaremos e provaremos, mas antes será necessário mudar coordenadas holomorfas para $\mathbb{C}^n$. Para isso, dado um ponto p na origem e

$$M = \left\{(z = x + iy, w) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}; y = h(x, w)\right\},$$

onde $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe C^2 com $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$. Seja $w = u+iv \in \mathbb{C}^{n-d}$; $t = (x, u) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$, e $s = (y, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^n$. Note que as coordenadas para $\mathbb{C}^n$ podem ser escritas como $\zeta = t + is$.

Defina $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ por

$$H(t, v) = (h(x, u + iv), v) \text{ (com } t = (x, u)).$$

Como $h(0) = 0$ e $Dh(0) = 0$, temos que $H(0) = 0$ e $\partial H(0)/\partial t = 0$. Estamos preocupados comente com uma pequena vizinhança da origem e então multiplicando h por uma função *cutoff* adequada e assumindo que h tem suporte em uma vizinhança $U_1 \times U_2$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d}$ da origem. Escolhendo U_1 e U_2 suficientemente pequenos, podemos arranjar

$$\left|\frac{\partial H}{\partial t}(t, v)\right| \leq \frac{1}{2} \text{ para todo } (t, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d}.$$

Aqui, $|A|$ denota a norma da matriz, ou seja, $|A| = \sup_{|v|=1} |A(v)|$.

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|H(t_1, v) - H(t_2, v)| \leq \frac{1}{2}|t_1 - t_2|, \tag{9.1}$$

para todos $(t_1, v), (t_2, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d}$.

Próximo à origem, M é parametrizada por H, ou seja,

$$M = \left\{t + iH(t, v); (t, v) \in U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d}\right\}.$$

M é folheado também pelas fatias n-dimensionais M_v para $v \in U_2$ onde

$$M_v = \{(t + iH(t, v); t \in U_1 \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Para $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, seja

$$\begin{aligned} |\zeta|^2 &= \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_n^2 \\ d\zeta &= d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n. \end{aligned}$$

Lema 9.3. *Seja $g \in \mathcal{D}(_1)$ com $g \equiv 1$ em uma vizinhança U_1' com $0 \in U_1' \subset\subset U_1 \subset \mathbb{R}^n$. Extenda g à $\mathbb{C}^n$ tal que $g(\zeta)$ é independente de Im ζ, para $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Então, para $\zeta \in M_v \cap \{U_1' \times U_2\}$*

$$f(\zeta) = \lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-n/2} \epsilon^{-n} \int_{\zeta' \in M_v} g(\zeta') f(\zeta') e^{-\epsilon|\zeta - \zeta'|^2} d\zeta'.$$

Mais ainda, esse limite é uniforme para $v \in U_2$ e $\zeta \in M_v \cap \{U_1' \times U_2\}$.

Demonstração. Defina $\zeta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-d} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$\zeta(t, v) = t + iH(t, v).$$

Fixando $v \in U_2 \subset \mathbb{R}^{n-d}$, a aplicação $t' \longrightarrow \zeta(t', v)$ para $t' \in U_1$ parametriza M_v. Para provar o lema é suficiente mostrar que

$$f(\zeta(t, v)) = \lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-n/2} \epsilon^{-n} \int_{t' \in \mathbb{R}^n} g(t') f(\zeta(t', v)) e^{-\epsilon|\zeta(t,v) - \zeta(t',v)|^2} \det\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t'}(t', t)\right) dt',$$

onde o limite é uniforme em $(t, v) \in U_1' \times U_2$. Aqui, escrevemos $t' = (t_1', \ldots, t_2') \in \mathbb{R}^n$; $dt' = dt_1' \ldots dt_2'$ e $(\partial\zeta/\partial t')(t', v)$ é a matriz complexa $n \times n$ com entradas $(\partial\zeta_j/\partial t_k')(t', v)$ para $1 \leq j, k \leq n$.

Substituindo t' por $t - \epsilon s$ para t fixado, na integral anterior, temos

$$\pi^{-n/2} \int_{s\in\mathbb{R}^n} g(t-\epsilon s) f(\zeta(t-\epsilon s, v)) e^{-\epsilon^2 |\zeta(t,v)-\zeta(t-\epsilon s,v)|^2} \det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t-\epsilon s, v)\right) ds. \tag{9.2}$$

Se $t \in U_1'$, então $g(t-\epsilon s) \to 1$ quando $\epsilon \to 0$. Ainda mais,

$$\zeta(t,v) - \zeta(t-\epsilon s, v) = \frac{-\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\cdot(\epsilon s) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Portanto, temos que

$$\epsilon^{-2}[\zeta(t,v) - \zeta(t-\epsilon s,v)]^2 = \left[\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\cdot s\right]^2 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Isso significa que pontualmente em s (mas uniformemente em $t \in U_1'$ e $v \in U_2$), o integrando em 9.2 converge, quando $\epsilon \to 0$, à

$$f(\zeta(t,v)) e^{-[\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\cdot s]^2} \det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\right).$$

Para mostrar que a integral converge, devemos dominar o integrando em 9.2 por uma função integrável de $s \in \mathbb{R}^n$. Certamente, $g \cdot f \cdot \partial\zeta/\partial t$ é globalmente limitado. Então é suficiente dominar o termo exponencial. Temos

$$\left| e^{-\epsilon^{-2}[\zeta(t,v)-\zeta(t-\epsilon s,v)]^2} \right| = e^{-\epsilon^{-2}\mathrm{Re}\left\{[\zeta(t,v)-\zeta(t-\epsilon s,v)]^2\right\}}.$$

Como $\zeta(t,v) = t + iH(t,v)$, obtemos

$$\mathrm{Re}\left\{[\zeta(t,v) - \zeta(t-\epsilon s,v)]^2\right\} = \epsilon^2|s|^2 - [H(t,v) - H(t-\epsilon s,v)]^2.$$

De 9.1, temos que

$$\mathrm{Re}\left\{[\zeta(t,v) - \zeta(t-\epsilon s,v)]^2\right\} \geq \frac{3}{4}\epsilon^2|s|^2.$$

Então o termo exponencial é dominado por $e^{-3/4|s|^s}$ que é uma função integrável de $s \in \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema da ConvergÊncia Dominada, a integral em 9.2 converge (quando $\epsilon \to 0$) à

$$\pi^{-n/2} f(\zeta(t,v)) \int_{s\in\mathbb{R}^n} e^{-[\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\cdot s]^2} \det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}(t,v)\right) ds$$

e o limite é uniforme em $t \in U_1'$ e $v \in U_2$.

Temos que $(\partial\zeta/\partial t)(t,v) = (\partial/\partial t)(t + iH(t,v)) = I + i(\partial H/\partial t)(t,v)$. Ainda mais, $|(\partial H/\partial t)(t,v)| \leq 1/2$. Portanto, a prova do lema estará completa após mostrarmos que

$$\pi^{-n/2}\int_{s\in\mathbb{R}^n} e^{-[A\cdot s]^2}(\det A)ds = 1, \tag{9.3}$$

para todas as matrizes A no conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{cl} n\times n & \text{matrizes complexas, } A, \text{tais que } |\text{Im } A| \leq \frac{1}{2}|\text{Re } A| \\ \text{e Re } A & \text{é não-singular.} \end{array} \right\}.$$

A integral em 9.3 é uma função holomorfa de entradas em $A \in \mathcal{A}$. Em adição, se Im $A = 0$ então 9.3 segue da mudança de variáveis de $s' = A \cdot s \in \mathbb{R}^n$ e um cálculo de coordenada polar, e isso vale para todas as matrizes $A \in \mathcal{A}$. Portanto, a prova do lema segue aplicando 9.3 na matriz $A = (\partial\zeta/\partial t)(t,v)$.

$\square$

Lema 9.4. *Suponha que f é uma função CR de classe C^1 em uma vizinhança ω_1 da origem em M. Então, existe uma vizinhança ω_2 em M com $0 \in \omega_2 \subset\subset \omega_1 \subset M$ tal que para $\zeta \in \omega_2$*

$$f(\zeta) = \lim_{\epsilon\to 0}\pi^{-n/2}\epsilon^{-n}\int_{\zeta'\in M_0} g(\zeta')f(\zeta')e^{-\epsilon^{-2}[\zeta-\zeta']^2}d\zeta'.$$

Ainda mais, esse limite é uniforme em $\zeta \in \omega_2$.

Demonstração. Para $\zeta \in \zeta\{U_1 \times U_2\} \subset M$, temos que

$$\zeta = t + iH(t,v),$$

para algum único $t \in U_1$ e $v \in U_2$. Para um $v \in U_2$ fixado, seja

$$\widetilde{M}_v = \{\zeta(t',\lambda v) = t' + iH(t',\alpha v) \in M; t' \in U_1 \subset \mathbb{R}^n \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

$\widetilde{M}_v$ é uma subvariedade $(n+1)$-dimensional de M e seu bordo é a união de M_0, M_v e o conjunto $\{\zeta(t',\alpha v); t' \in \partial U \text{ e } 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Estamos preocupado com funções cujo t'-suporte está contido em U_1 e, assim, os componentes do bordo de $\widetilde{M}_v$, são M_0 e M_v. Usando o Teorema de Stokes para transformar a integral no Lema 9.3 sobre M_v em soma de uma integral sobre M_0 e uma integral sobre $\widetilde{M}_v$. Para $\zeta \in \zeta\{U_1' \times U_2\}$, temos que

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \lim_{\epsilon\to 0}\pi^{-n/2}\epsilon^{-n}\int_{\zeta'\in M_0} g(\zeta')f(\zeta')e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2}d\zeta' \\ &+ \lim_{\epsilon\to 0}\pi^{-n/2}\epsilon^{-n}\int_{\zeta'\in\widetilde{M}_v} d_{\zeta'}\left\{g(\zeta')f(\zeta')e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2}\right\}d\zeta'. \end{aligned}$$

A integral sobre $\widetilde{M}_v$ envolve a derivada exterior $d_{\zeta'} = \partial_{\zeta'} + \overline{\partial}_{\zeta'}$, mas devido a presença de $d\zeta' = d\zeta_1' \wedge \ldots \wedge d\zeta_n'$, o único termo contribuinte vem de $\overline{\partial}_{\zeta'}$. Do Teorema 7.27, assumimos que dada a função CR f é extendida à $\mathbb{C}^n$ tal que $\overline{\partial} f = 0$ em $\omega_1 \subset M$. Assumindo que U_1 e U_2 no Lema 9.3 são escolhidos suficientemente pequeno tal que $\zeta\left\{U_1 \times U_2\right\} \subset \omega_1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-n/2} \epsilon^{-n} \int_{\zeta' \in M_0} g(\zeta') f(\zeta') e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2} d\zeta' \\ &+ \lim_{\epsilon \to 0} \pi^{-n/2} \epsilon^{-n} \int_{\zeta' \in \widetilde{M}_v} (\overline{\partial}_{\zeta'} g(\zeta')) f(\zeta') e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2} d\zeta'. \end{aligned} \tag{9.4}$$

A prova do lema estará completa após mostrarmos que o segundo limite à direita de 9.4 é zero.

Lembrando que $\zeta = t + iH(t,v)$. Para $\zeta' \in \widetilde{M}_v$, então existe um único λ com $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que

$$\zeta' = \zeta(t', \lambda v) = t' + iH(t', \lambda v).$$

Para estimar $\left| e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2} \right|$, precisamos estimar a parte real do expoente. Temos que

$$\text{Re}\left\{[\zeta - \zeta 1]^2\right\} = |t-t'|^2 - |H(t,v) - H(t', \lambda v)|^2. \tag{9.5}$$

Do Teorema do Valor Médio e da estimativa $|\partial H / \partial t| \leq 1/2$, temos que

$$\begin{aligned} |H(t,v) - H(t', \lambda v)| &\leq |H(t,v) - H(t',v)| + |H(t',v) - H(t', \lambda v)| \\ &\leq \frac{1}{2}|t-t'| + C|v - \lambda v|, \end{aligned}$$

onde C é alguma constante uniforme que depende somente na C^1-norma de H. Elevando a desigualdade acima e usando o fato que $2ab \leq (a^2 + b^2)$ para $a, b \geq 0$, obtemos

$$|H(t,v) - H(t', \lambda v)|^2 \leq \frac{1}{2}|t-t'|^2 + 2C^2|v - \lambda v|^2.$$

Notando que $|v - \lambda v| \leq |v|$, para $0 \leq \lambda \leq 1$, a desigualdade acima junto de 9.5, obtemos

$$\text{Re}\left\{[\zeta - \zeta 1]^2\right\} \geq \frac{1}{2}|t-t'|^2 - 2C^2|v|^2.$$

Agora $g(\zeta')$ depende somente em $t' = \text{Re}\zeta'$. Também, $\overline{\partial}_{\zeta'} g$ é nula em uma vizinhança da origem, (como $g \equiv 1$ em U_1'). Então, se $\zeta' = t' + iH(t', \lambda v)$ pertence ao suporte de $\overline{\partial} g$, então $|t'|$ deve ser limitado fora de 0. Ainda mais, $\zeta = t + iH(t,v) \to 0$ se, e somente se, ambos $t \to 0$ e $v \to 0$. Desses fatos e da desigualdade acima, vemos que existem contantes $r_1, r_2 > 0$ tais que se $\zeta \in M_v$ com $|\zeta| < r_2$ e se $\zeta \in$ *supp* $\overline{\partial} g$, então

$$\text{Re}\left\{[\zeta - \zeta']^2\right\} \geq r_1.$$

Portanto,

$$\left| \epsilon^{-n} \int_{\zeta' \in \widetilde{M}_v} (\overline{\partial}_{\zeta'} g(\zeta')) f(\zeta') e^{-\epsilon^{-2}|\zeta-\zeta'|^2} d\zeta' \right| \leq C \epsilon^{-n} e^{-\epsilon^{-2} r_1},$$

para todos $\zeta \in M_v \subset M$ com $|\zeta| < r_2$. Aqui, C é uma constante uniforme que é independente de ϵ, v e ζ. Essa desigualdade mostra que a segunda integral à direita de 9.4 converge à 0 quando $\epsilon \to 0$, pois $\zeta \in M$ com $|\zeta| < r_2$. Portanto, a prova do lema agora está completa. □

Prova do Teorema 9.2. O ponto do Lema 9.4 é que se f é CR, então o domínio da integração (M_0) é independente da variável ζ. Como o integrando é uma função inteira de $\zeta \in \mathbb{C}^n$, a prova do Teorema 9.2 está completa. □

Para a parte da unicidade da extensão CR que será estabelecido, precisamos saber que funções holomorfas em um cone em $\mathbb{C}^n$ podem ser aproximadas por uma sequência de funções inteiras. Por definição, um cone é um conjunto aberto da forma $\omega + \{\Gamma \cap B_\epsilon\}$, onde $\omega \subset M$ é uma vizinhança aberta de dado um ponto $p \in M$, Γ é um cone em $N_p(M)$ e B_ϵ é a bola em $N_p(M)$ de raio ϵ centrada em p.

Teorema 9.5. *Seja ω_1 uma vizinhança de um ponto $p \in M$ e dado $\epsilon_1 > 0$. Seja Γ um cone em $N_p(M)$. Então, existe $\epsilon_2 > 0$ e uma vizinhança ω_2 de $p \in M$ com $\omega_2 \subset \omega_1$ tal que se F é holomorfa em $\omega_1 + \{\Gamma \cap B_{\epsilon_1}\}$ contínua acima à ω_1, então F é limite uniforme em $\omega_2 + \{\Gamma \cap B_{\epsilon_2}\}$ de uma sequência de funções inteiras.*

Demonstração. Basta mudar as provas dos Lemas 9.3 e 9.4 para o contexto do enunciado. □

9.2 Teorema de Extensão CR de Lewy para Hipersuperfícies

Aqui apresentaremos o principal resultado do trabalho, o Teorema de Extensão CR de Lewy, também apresentaremos uma generalização desse teorema para subvariedades CR de codimensão maior. Também apresentaremos exemplos desse Teorema.

Seja $M = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) = 0\}$ seja uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$, onde $\rho : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é suave com $d\rho \neq 0$ em M. Se ρ é tal que $|\bigtriangledown \rho(p)| = 1$, então do Teorema 8.8, a forma de Levi de M em p é a aplicação

$$W \to \left(- \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial \zeta_j \partial \overline{\zeta}_k} w_j \overline{w}_k \right) \bigtriangledown \rho(p) \text{ para } W = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \in H_p^{1,0}(M).$$

Quando falamos dos autovalores da forma de Levi de M em p, estamos nos referindo aos autovalores da matriz que representa a forma de Levi.

Seja $\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) > 0\}$ e $\Omega^- = \{z \in \mathbb{C}^n; \rho(z) < 0\}$. Agora, podemos enunciar o Teorema de Hans Lewy.

Teorema 9.6 (Teorema de Extensão CR de Hans Lewy)**.** *Seja M uma hipersuperfície real em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ de classe C^k, $3 \leq k \leq \infty$, e seja p um ponto em M.*

a) Se a forma de Levi de M em p tem ao menos um autovalor positivo então cada conjunto aberto ω em M com $p \in \omega$, existe um conjunto aberto U em $\mathbb{C}^n$ com $p \in U$ tal que para *cada função CR f de classe C^1 em ω, existe uma única função F que é holomorfa em $U \cap \Omega^+$ e contínua em $U \cap \overline{\Omega^+}$ tal que $F|_{U\cap M} = f$.*

b) *Se a forma de Levi de M em p tem ao menos um autovalor negativo então cada conjunto aberto ω em M com $p \in \omega$, existe um conjunto aberto U em $\mathbb{C}^n$ com $p \in U$ tal que para cada função CR f de classe C^1 em ω, existe uma única função F que é holomorfa em $U \cap \Omega^-$ e contínua em $U \cap \overline{\Omega^-}$ tal que $F|_{U\cap M} = f$.*

c) *Se a forma de Levi de M em p tem autovalores de sinais opostos, então para cada conjunto aberto ω em M com $p \in \omega$, existe um conjunto aberto U em $\mathbb{C}^n$ com $p \in U$ tal que para cara função CR de classe C^1 em ω é a restrição em $U \cap \omega$ de uma única função holomorfa em U.*

As Partes *a)* e *b)* descreve a extensão CR em um lado enquanto a Parte *c)* descreve a extensão CR nos dois lados.

É fácil entender o significado geométrico do teorema escolhendo coordenadas tais que o ponto p é a origem e então a função de definição ρ tem a forma $\rho(x+iy, w) = y - h(x, w)$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}^{n-1}$. Do Corolário 8.9, a forma de Levi pode ser identificada com a aplicação

$$W = (w_1, \ldots, w_n) \longrightarrow \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 h(0)}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} w_j \overline{w}_k.$$

Como podemos arranjar coordenadas tais que todos os termos puros de segunda ordem na expanção de h são nulos, a forma de Levi de M descreve a concavidade de segunda ordem de M próxima a origem. Um autovalor positivo da forma de Levi indica que M é localmente concavo para cima ao longo de uma direção em $H_0^{1,0}(M)$. Nesse caso, o Teorema de Lewy estabelece que funções CR extendem holomorficamente acima de M. Um autovalor negativo da forma de Levi siginifica que M é localmente concavo para baixo ao longo de uma direção em $H_0^{1,0}(M)$. Nesse caso, as função CR extendem holomorficamente abaixo de M. Se a forma de Levi tem autovalores de sinais opostos, então a origem é um ponto de sela para M e, então, a extensão CR em ambos os lados de M é possível.

Como funções holomorfas são analíticas reais, a Parte *c)* do teorema implica no seguinte resultado de regularidade para funções CR.

Voltando ao Exemplo 9.1, com o Teorema de Hans Lewy, sabemos o porquê a variedade $M = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \text{Im } = 0\}$ não possui extensão e isto se dá pela variedade ser Levi *flat*. As hipóteses do Teorema nos dá as condições que uma variedade deve satisfazer para possuir extensão, e se uma variedade for *flat* diverge dessas hipóteses. O que nos leva a mais uma questão: Como podemos contornar o problema da variedade ser *flat*?

Uma direção para esse questionamento é tentar definir uma variedade da forma $M = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; \text{Im } = \phi(w, \overline{w})\}$, e à partir dessa função ϕ trabalhar de modo que a variedade satisfaça o Teorema de Extensão.

Teorema 9.7. *Suponha que M é um hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$ de classe C^k, $3 \leq k \leq \infty$ e que p é um ponto em M onde a forma de Levi tem autovalores de sinais opostos. Então cada função CR em M que é uma priori C^1 em uma vizinhança de p deve ser de classe C^k em uma vizinhança de p. Se ainda M é analítica real, então uma função CR a priori C^1 definida próximo de p deve ser analítica real próximo de p.*

Demonstração. Ver [1], Teorema 2, página 199. □

9.3 O Teorema de Extensão CR para Codimensão Maior

A forma de Levi também é um objeto geométrico chave para a extensão CR de uma subvariedade CR de codimensão maior. Se M é uma subvariedade CR genérica de dimensão real $2n - d$, $1 \leq d \leq n - 1$, então o espaço normal de M em um ponto $p \in M$ é isomorfo à $\mathbb{R}^d$ com p como a origem em $N_p(M)$. Consideramos a forma de Levi extrínseca em p, $\widetilde{\mathcal{L}}_p : H_p(M) \longrightarrow N_p(M)$. A definição de $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ já foi dada anteriormente.

Para $p \in M$, seja

$$\Gamma_p = \left\{ \text{o cone convexo da imagem de } \widetilde{\mathcal{L}}_p \right\} \subset N_p(M).$$

Γ_p é um cone, ou seja, se $v \in \Gamma_p$, então $\lambda v \in \Gamma_p$ para todo $\lambda \geq 0$.

Se M é uma hipersuperfície real, então $N_p(M) \simeq \mathbb{R}$ e Γ_p é $\{0\}$ se $\widetilde{\mathcal{L}}_p \equiv 0$, ou uma semirreta se $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ é semidefinido positivo ou negativo, ou ainda todo $\Gamma_p \simeq \mathbb{R}$ se $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ tem autovalores de sinais opostos. A translação do Teorema da Hipersuperfície de Lewy nesses termos é a seguinte: se Γ_p é uma semirreta, então a extensão CR é possível à um lado de M, se Γ_p é todo $N_p(M) \simeq \mathbb{R}$, então a extensão CR é possível à ambos os lados de M.

Se $d = codim_{\mathbb{R}} M$ é maior que 1, então
$widetilde \mathcal{L}_p$ é de valor vetorial e, então, Γ_p se torna mais complicado. Como veremos, Γ_p determina o formato e o tamanho do conjunto aberto que as funções CR extendem holomorficamente. Antes de estabelecermos o próximo teorema, precisamos definir novos objetos.

Definição 9.8. *Para dois cones Γ_1 e Γ_2 em $N_p(M)$ dizemos que Γ_1 é menor que Γ_2, denotando $\Gamma_1 < \Gamma_2$, se $\Gamma_1 \cap S_p$ é um subconjunto compacto do interior de $\{\Gamma_2\} \cap S_p$, onde S_p é a esfera unitária em $N_p(M)$.*

Para $\epsilon > 0$, seja B_ϵ a bola aberta em $N_p(M)$ centrada na origem p de raio ϵ. Para dois conjuntos A e B em $\mathbb{C}^n$, definimos $A + B = \{a + b; a \in A \;\; e \;\; b \in B\}$.

Teorema 9.9 (Extensão CR para Codimensão Maior)**.** *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ de classe C^k, $4 \leq k \leq \infty$, com $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n - d$, $1 \leq d \leq n - 1$. Seja p um ponto em M tal que Γ_p tem interior não vazio com respeito à $N_p(M)$. Então, para toda* *vizinhança ω de p em M, existe um conjunto aberto ω' em M e um conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^n$ tal que*

a) $p \in \omega' \subset \overline{\Omega} \cap M \subset \omega$;

b) para cada cone aberto $\Gamma_1 < \Gamma_p$, existe uma vizinhança conectado ω_1 de p em M e $\epsilon > 0$ tal que

$$\omega_1 + \{\Gamma_1 \cap B_\epsilon\} \subset \Omega;$$

c) para cada função CR f de classe C^1 em $\omega \subset M$, existe uma única função holomorfa F definida em Ω e contínua em $\Omega \cup \omega'$ com $F = f$ em ω'.

Como no caso da hipersuperfície, o conjunto Ω depende somente em ω e Γ_p e não na função CR definida em ω.

No Teorema 9.9, se $\Gamma_p - N_p(M)$, então podemos assumir que $\Gamma_1 = N_p(M)$ pois $N_p(M)$ é menor que ele mesmo. Nesse caso, Ω contém um conjunto aberto $\{\omega_1 + B_\epsilon\}$, que é uma vizinhança aberta de p em $\mathbb{C}^n$. Portanto, se $\Gamma_p = N_p(M)$, então cada função CR próxima de p é localmente a restrição de uma função holomorfa definida em uma vizinhança de p. Isso é análogo ao resultado da extensão CR em dois lados (Parte *c)*) do Teorema de Lewy para uma hipersuperfície.

Teorema 9.10. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ de classe C^k, $4 \leq k \leq \infty$, e p um ponto em M com $\Gamma_p = N_p(M)$. Então, para cada vizinhança ω de p em M, existe um conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^n$ com $p \in \Omega$ tal que cada função CR que é de classe C^1 em ω é a restrição de uma única função holomorfa definida em Ω.*

Como funções holomorfas são analíticas reais e, então, C^∞, o Teorema 9.10 implica no seguinte resultado de regularidade para funções CR.

Teorema 9.11. *Suponha que M é uma subvariedade CR genérica de $\mathbb{C}^n$ de classe C^k, $4 \leq k \leq \infty$, e p é um ponto em M com $\Gamma_p = N_p(M)$. Então, cada função CR que é uma priori C^1 em uma vizinhança de p em M deve ser de classe C^k em uma vizinhança de p. Ainda mais, se M é analítica real, então cada função CR que é uma priori C^1 em uma vizinhança de p deve ser analítica real em uma vizinhança de p.*

No Teorema 9.9, a hipótese que o interior de Γ_p em $N_p(M)$ é não-vazio impõe algumas restrições na codimensão de M. Por exemplo, se $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = 1$, então a imagem da forma de Levi está contida em um subespaço 1-dimensional real de $N_p(M)$. Portanto, se $codim_{\mathbb{R}} M \geq 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} H_p^{1,0}(M) = 1$, então as hipóteses dos Teoremas 9.9, 9.10 ou 9.11 nunca são satisfeitas. Usando a bilinearidade e conjugar a simetria da forma de Levi, o interior de Γ_p em $N_p(M)$ é não-vazio, então $m(m+1) \geq 2d$ onde $m = n - d = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(M)$ e $d = codim_{\mathbb{R}} M$.

9.4 EXEMPLOS

Após a análise do teorema de extensão CR para hipersuperfícies reais, o próximo passo é fazer a análise em outras classes de subariedades. Para isso, analiseremos para a classe de subvariedades quadráticas de $\mathbb{C}^4$ com codimensão real 2. Estabelecemos que tais subvariedades quadráticas são biholomorfas para uma das quatro formas normais. Aqui, as coordenadas para $\mathbb{C}^4$ são dadas por (z_1, z_2, w_1, w_2) com $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$.

i) $M = \{y_1 = q(w, \overline{w}), y_2 = 0\}$, onde $q : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma forma quadrática de valores escalares;

ii) $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = |w_2|^2\}$;

iii) $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2)\}$;

iv) $M = \{y_1 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2), y_2 = \text{Im}(w_1\overline{w}_2)\}$.

Analisando a extensão CR para cada um desses quatro exemplos, podemos caracterizar a extensão CR local em todas as subvariedades quadráticas de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$. Lembrando que a forma de Levi na origem da subvariedade quadrática $\{y = q(w, \overline{w})\}$ pode ser identificada com a forma quadrática de valor vetorial $w \longrightarrow q(w, \overline{w})$.

Exemplo 9.12. Seja $M = \{y_1 = q(w, \overline{w}), y_2 = 0\}$ e $p = 0$ a origem. A imagem da forma de Levi, $w \longrightarrow (q(w, \overline{w}), 0)$, está contida na reta $\{(y_1, 0); y_1 \in \mathbb{R}\}$. Nesse caso, o interior de Γ_0 com respeito à $N_0(M) \simeq \mathbb{R}^2$ é vazio e, então, o Teorema de Extensão CR não se aplica. De fato, a extensão CR à uma função independente em um conjunto aberto é impossível, pois M está contida em $\bigcap_{\epsilon>0} \Omega_\epsilon$ onde cada $\Omega_\epsilon = \{|y_2| < \epsilon\}$ é um domínio da holomorfia.

Exemplo 9.13. Seja $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = |w_2|^2\}$. A imagem da forma de Levi $(w_1, w_2) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{L}}_0(w_1, w_2) = (|w_1|^2, |w_2|^2)$ é o quadrante $\Gamma_0 = \{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ que é convexo. O Teorema de Extensão CR estabelece que funções CR em uma vizinhança da origem em M extende à funções holomorfas em um conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^4$ cuja seção transversal normal (na origem) contém conjuntos do tipo $B_\epsilon \cap \Gamma_1$ onde Γ_1 é qualquer subcone menor que $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ em $N_0(M) \simeq \mathbb{R}^2$ e onde $\epsilon > 0$ depende em Γ_1. Note que M é a intersecção dos bordos convexos $\{y_1 = |w_1|^2\}$ e $\{y_2 = |w_2|^2\}$. Portanto, funções CR em M não podem extender holomorficamente $\{y_1 \geq |w_1|^2, y_2 \geq |w_2|^2\}$. Em particular, isso mostra que em geral, não podemos tomar $\Gamma_1 = \Gamma_1$ na conclusão do Teorema de Extensão CR, pois nesse exemplo $B_\epsilon \cap \Gamma_0$ não está contido em $\{y_1 \geq |w_1|^2, y_2 \geq |w_2|^2\}$. Esse exemplo também mostra que em geral, ϵ deve depender no cone Γ_1, para se $\epsilon > 0$ está fixado, então $B_\epsilon \cap \Gamma_1$ não está contida em $\{y_1 \geq |w_1|^2, y_2 \geq |w_2|^2\}$ fornecido Γ_1 é suficientemente perto à $\Gamma_0 = \{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$.

Exemplo 9.14. Seja $M = \{y_1 = |w_1|^2, y_2 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2)\}$. A imagem da forma de Levi $\widetilde{\mathcal{L}}_0(w_1, w_2) = (|w_1|^2, \text{Re}(w_1\overline{w}_2))$ é o meio espaço $\{y_1 > 0\}$ junto da origem. A imagem de $\widetilde{\mathcal{L}}_0$

é convexa mas não fechada. O Teorema de Extensão CR estabelece que funções CR em um subconjunto aberto da origem extende holomorficamente à um conjunto aberto Ω em $\mathbb{C}^4$ cuja seção transversal na origem contém conjuntos do tipo $B_\epsilon \cap \Gamma_1$ onde Γ_1 é qualquer cone menor que $\{y_1 > 0\}$. O cone tangente de Ω na origem contém o meio espaço $\{y_1 > 0\}$.

Exemplo 9.15. Seja $M = \{y_1 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2), y_2 = \text{Im}(w_1\overline{w}_2)\}$. A imagem da forma de Levi $\widetilde{\mathcal{L}}_0(w_1, w_2) = (\text{Re}(w_1\overline{w}_2), \text{Ima}(w_1\overline{w}_2))$ é todo $N_0(M) \simeq \mathbb{R}^2$. Isso pode ser visto configurando $w_2 = 1$ e deixando w_1 percorrer os números complexos. Portanto, os Teorema 9.2 e 9.9 aplicam nesse exemplo. Uma função CR em uma vizinhança da origem em M é a restrição de uma função holomorfa definida em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^4$. Ainda, uma função CR a priori C^1 próxima a origem deve ser analítica real próxima a origem.

Nos exemplos acima, a imagem da forma de Levi é convexa. Mas nem sempre esse é o caso para variedades de $\mathbb{C}^n$, onde $n > 4$ como ilustraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 9.16. Seja $(z_1, z_2, z_3, z_4, w_1, w_2)$ coordenadas para $\mathbb{C}^6$. Seja

$$M = \left\{\text{Im } z_1 = |w_1|^2, \text{Im } z_2 = |w_2|^2, \text{Im } z_3 = \text{Re}(w_1\overline{w}_2), \text{Im } z_4 = \text{Im}(w_1\overline{w}_2)\right\}.$$

Aqui, M tem codimensão 4 em $\mathbb{C}^6$. A imagem da forma de Levi na origem em $N_0(M) \simeq \mathbb{R}^4$ é o cone

$$\left\{y \in \mathbb{R}^4; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \text{ e } y_3^2 + y_4^2 = y_1y_2\right\}.$$

Esse conjunto não é convexo e não tem interior em $\mathbb{R}^4$. No entanto, o cone convexo é o conjunto

$$\left\{y \in \mathbb{R}^4; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \text{ e } y_3^2 + y_4^2 \leq y_1y_2\right\},$$

que não tem interior não-vazio em $\mathbb{R}^4$, e, portanto, o Teorema de Extensão CR aplica nesse exemplo.

10 CONCLUSÃO

Ao compreender as Variedades CR, este estudo contribui para o desenvolvimento contínuo da teoria de estruturas diferenciáveis com variáveis complexas, destacando a importância das abstrações matemáticas na compreensão das propriedades fundamentais dos espaços topológicos.

Conseguimos estabelecer uma conexão entre dois conceitos fundamentais da matemática: as variedades suaves e a análise complexa. Obtemos, com essa conexão, a teoria das variedades CR, o qual tem grande valia para prosseguir pesquisas na área, pois a partir dela há alguns ramos a serem seguidos.

Como comentado anteriormente, as variedades CR possuem grande importância na matemática, pois com ela conseguimos definir outros objetos de estudos importantes, a saber: o Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann e funções CR. Sendo assim, é interessante extender resultados de análise complexa para a teoria de variedades CR. Um exemplo, a extensão de funções CR por meio de funções holomorfas, empenhando-se em refinar e aprimorar essa teoria. Também surgem novos problemas como o que conseguimos do Exemplo 9.1, que é tentar estabelecer novas condições ou hipóteses para que uma variedade satisfaça o Teorema de Extensão de Hans Lewy, algumas dessas questões deixam margem para um artigo.

REFERÊNCIAS

[1] BOGGESS, A. *CR Manifolds and the Tangential Cauchy Riemann Complex*. 1991.

[2] HORMANDER, L. *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. 1973.

[3] HORMANDER, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol 1. 1983.

[4] HOUNIE, J. G. *Teoria Elementar das Distribuições*. 1979.

[5] ISNARD, C. *Introdução à Medida e Integração*. 2018.

[6] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. 1978.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, volume 2. 2005.

[8] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 1987.

[9] SILVA, J. P. *Variedades CR e Complexo Tangencial de Cauchy-Riemann*. 2022.