



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

TÂNIA CAMILA KOCHMANSKY GOULART

**RECURSOS SEMIÓTICOS EM ATIVIDADES DE
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Londrina
2020

TÂNIA CAMILA KOCHMANSKY GOULART

**RECURSOS SEMIÓTICOS EM ATIVIDADES DE
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

G694r Goulart, Tânia Camila Kochmansky.
Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática / Tânia Camila Kochmansky Goulart. - Londrina, 2020.
89 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Tese. 2. Modelagem matemática - Tese. 3. Recursos semióticos - Tese. 4. Tecnologia Digital - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

TÂNIA CAMILA KOCHMANSCKY GOULART

**RECURSOS SEMIÓTICOS EM ATIVIDADES DE
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof^a. Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^a. Dr^a. Camila Fogaça de Oliveira
Faculdade de Tecnologia SENAI Londrina

Prof. Dr. João Coelho Neto
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP
CCP

Londrina, 23 de junho de 2020.

Dedico este trabalho à minha querida filha Maya e ao meu marido André por superarem meus momentos de ausência e à minha mãe, pelo ombro amigo de sempre.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de lhe agradecer pelas inúmeras vezes que você me enxergou melhor do que eu sou. Pela sua capacidade de me olhar devagar, já que nessa vida muita gente já me olhou depressa demais.

Padre Fábio de Melo

Começo meu agradecimento compartilhando que esse estudo não seria possível sem a participação de muitas pessoas. Ouso a que dizer que por mais que a pesquisa seja tão dura e solitária, nunca estive sozinha durante a sua realização.

Me resta aqui a árdua e muito prazerosa tarefa de tentar agradecer a todos os envolvidos.

Agradeço à minha tão querida filha Maya pelos seus abraços quando eu me sentia triste e pelo seu olhar quando queria dizer que me entendia. E ainda, peço que um dia entenda e me perdoe pela minha ausência e pelas tantas vezes que chorou por querer ficar comigo.

Agradeço ao meu amigo e marido André pela compreensão de todos os dias, por torcer por mim e estar nesta caminhada ao meu lado. Agradeço também aos cuidados com a nossa filha nos meus momentos doloridos de ausência.

Agradeço aos queridos pais pelo apoio aos estudos desde o início do meu aprendizado e que também sofreram com minha ausência. Em especial à minha mãe, tão sábia e cheia de amor e cuidado com a minha família. Obrigada, por vocês cheguei até aqui!

Agradeço aos meus queridos irmãos Carolina e Tadeu, minha cunhada Dani e meu afilhado Neto, também tão especiais na minha vida. Em especial à minha maravilhosa irmã, por suas palavras sempre tão cheias de incentivo e do carinho com minha filha.

Agradeço aos meus tios Sandra, Rogério e em especial à minha amada tia Thelma sempre tão calma, me fazendo ver o lado bom da vida com suas palavras motivadoras. Obrigada por cuidarem tão bem da Maya.

Agradeço à minha grande amiga Cíntia por seu ombro amigo, pelo incentivo de estudar modelagem desde o início da minha seleção, por ouvir meus desabaços e e além de tudo, compartilhar seus conhecimentos comigo. Agradeço também às minhas outras grandes amigas que sempre torceram por mim!

Agradeço à professora Lourdes por toda a sua paciência e por todos os seus ensinamentos. Ter a oportunidade de voltar a estudar com esta estimada professora depois de quase 20 anos, foi muito importante para mim.

Teacher, receba todo o meu carinho e a minha admiração por você!

Agradeço aos queridos componentes desta banca Profa. Camila e Prof. João, que aceitaram com prontidão o meu convite. Agradeço por terem sido tão gentis comigo, principalmente ao apontarem as minhas dificuldades.

Agradeço fortemente aos colegas GRUPEMMAT pelos estudos, aprendizados, compartilhamentos, desenvolvimento de atividades, parcerias em congressos e pela companhia dos almoços e dos passeios no shopping. Agradeço em especial aos amigos deste

grupo que se fizeram tão próximos de mim Ademir, Letícia, Joice, Daiany e minha grande amiga Élide, por me fazer respirar fundo e pelo seu ombro amigo tão presente.

Agradeço às amigas do pecem Susan e Fabí e aos professores que estiveram presentes nessa caminhada: Regina Buriasco, Fabielle Dias, Ângela Marta e Sérgio Arruda. E também à secretária do programa, Cibele.

Agradeço aos meus queridos alunos por estarem ao meu lado em todos estes dias. Agradeço em especial aos alunos que participaram desta coleta. Obrigada pela dedicação em suas tarefas e pelo carinho com minha pesquisa. Obrigada ao aluno Newton pela sua ajuda nas filmagens.

Agradeço aos meus amigos e professores da Unifil por sempre entenderem meus horários, cederem suas aulas para minha pesquisa quando precisei e compartilharem comigo das minhas angústias. Agradeço em especial ao meu amigo, professor Ricardo que tão prontamente me ajudou. Obrigada por me ensinar e me apresentar diferentes programas da pesquisa e obrigada por compartilhar tantos conhecimentos e claro, pelos tão legais e longos papos na volta do trabalho. Obrigada à Instituição e ao professor e coordenador do curso professor Sérgio Tanaka que sempre apoiou a minha pesquisa dentro do curso.

Agradeço aos amigos da Scriba que sempre me apoiaram e me incentivaram nos estudos e colaboraram sempre para que meu trabalho fosse feito de maneira saudável.

Agradeço ao meu professor de Boxe Edilson pela sua motivação no esporte e aos amigos do boxe por me colocarem para cima em cada aula que eu chegava esgotada e sem forças para lutar! Literalmente!

Agradeço a todos os que diretamente ou indiretamente me ajudaram nesta caminhada de tanto aprendizado.

[...] parece haver uma tendência atual, em todas as linguagens, de caminharem para um modo de estruturação, para uma morfogênese semelhante à da música, que sempre foi, aliás, no seu movimento de puras relações, a mais matemática dentre todas as linguagens.

Winfried Nöth e Lúcia Santaella

GOULART, Tânia Camila Kochmansky. **Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática**. 89 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

A fim de discutir a modelagem matemática sob o ponto de vista semiótico, esta pesquisa tem como objetivo investigar como ações e artefatos são determinados e como atuam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, considerando tanto a dimensão cognitiva quanto a dimensão didática da modelagem matemática na sala de aula. Trata-se de uma pesquisa qualitativa interpretativa em que a um quadro teórico considerando a modelagem matemática e uma lente semiótica direcionada para os chamados recursos semióticos é associada uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Ciência da Computação. O relatório da pesquisa segue o formato *multipaper* em que dois artigos apresentam detalhamentos da pesquisa e os resultados obtidos. No primeiro artigo investigamos quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade. Os resultados apontam que os alunos fazem uso de recursos semióticos de naturezas diversas e se constituem pacotes semióticos relativamente às ações dos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. No segundo artigo, investigamos de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Nossas análises nos levaram a concluir que a tecnologia colabora para o desenvolvimento das atividades de modelagem, produzindo, acionando ou articulando recursos semióticos que atuaram como: fonte de informação, meio de representação, possibilidade de realizar cálculos, possibilidade para gerar simulações e articuladora de recursos semióticos produzidos e usados pelos alunos. Conjuntamente os resultados dos dois artigos nos levam a concluir que a combinação de diferentes recursos e de recursos associados a diferentes sistemas semióticos, entre eles a tecnologia digital, incrementa as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A ativação dos recursos semióticos bem como a sua colaboração para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática se dá tal modo que não é possível afirmar especificamente quando um recurso atua de forma isolada ou conjuntamente com outros para potencializar a comunicação e organizar o pensamento. Além disso, os recursos semióticos articulados se associam com a condição epistemológica e contextual dos alunos.

Palavras-chave: educação matemática; modelagem matemática; recursos semióticos; tecnologia digital; ciência da computação.

GOULART, Tânia Camila Kochmansky. **Semiotic resources in mathematical modeling activities**. 89 f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In order to discuss mathematical modeling from a semiotic point of view, this research aims to investigate how actions and artifacts are determined and how they act in the development of mathematical modeling activities, considering both the cognitive dimension and the didactic dimension of mathematical modeling in classroom. A theoretical framework considering mathematical modeling and a semiotic lens directed to so-called semiotic resources is associated with empirical research in which mathematical modeling activities are developed in a discipline of Differential and Integral Calculus in a Computer Science course in a qualitative interpretative research. The research report follows the multipaper format in which two articles present details of the research and the results obtained. In the first article, we investigate which semiotic features are activated in mathematical modeling activities and how they collaborate for the development of the activity. The results show that students make use of semiotic resources of different natures and constitute semiotic packages in relation to students' actions in the different phases of the development of a mathematical modeling activity. In the second article, we investigate how digital technology favors the activation and use of semiotic resources that contribute to the development of mathematical modeling activities. Our analyzes led us to conclude that technology collaborates for the development of modeling activities, producing, activating or articulating semiotic resources that acted as: source of information, means of representation, possibility to perform calculations, possibility to generate simulations and articulator of resources semiotics produced and used by students. Together, the results of the two articles lead us to conclude that the combination of different resources and resources associated with different semiotic systems, including digital technology, increases students' actions in the development of mathematical modeling activities. The activation of semiotic resources as well as their collaboration for the development of the mathematical modeling activity takes place in such a way that it is not possible to state specifically when a resource acts in isolation or in conjunction with others to enhance communication and organize thought. In addition, the articulated semiotic resources are associated with the epistemological and contextual condition of the students.

Keywords: mathematics education; mathematical modelling; semiotic resources; digital technology; computer science.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	–	Informações sobre a Moeda Bitcoin.....	37
Figura 2.2	–	Recursos Semióticos Usados pelo Grupo G2 na Investigação do Problema.....	38
Figura 2.3	–	A Construção do Modelo Matemático no Grupo G2	39
Figura 2.4	–	Validação do Modelo Matemático	41
Figura 2.5a	–	Investigação do Problema.....	42
Figura 2.5b	–	Uso do Software para Observar os Dados Coletados.....	42
Figura 2.6a	–	Tabela com os Dados.....	43
Figura 2.6b	–	Representação Gerada com o Uso do Software.....	43
Figura 2.7	–	Gráfico Construído Usando o Excel.....	44
Figura 2.8	–	Apresentação do Modelo Matemático Feita Pelo Aluno G4A2	44
Figura 2.9	–	Argumentações do Aluno G2A2 sobre o Valor Monetário da Moeda.....	46
Figura 2.10	–	Os Novos Recursos para Formar o Pacote Semiótico(3)	46
Figura 2.11	–	Esquema da Constituição do Pacote Semiótico do Grupo G2.....	48
Figura 2.12	–	Fases da Modelagem Matemática com Inserção dos Pacotes Semióticos (G2)	49
Figura 2.13	–	Esquema da Constituição do Pacote Semiótico do Grupo G4.....	50
Figura 2.14	–	Fases da Modelagem Matemática com Inserção dos Pacotes Semióticos (G4)	51
Figura 3.1	–	Ciclo de Modelagem Matemática Incluindo o Uso de Tecnologias Digitais.....	58
Figura 3.2	–	Tabela e Curva com o Ano de Lançamento e o Número de Transistores em Cada Empresa.....	63
Figura 3.3	–	Número de Transistores em Cada Ano e a Lei de Moore.....	64
Figura 3.4	–	Modelo Matemático de Cada Curva.....	65
Figura 3.5	–	Gráfico da Derivada dos Modelos Matemáticos.....	65
Figura 3.6	–	Excerto das Informações do Jogo (G4)	66
Figura 3.7	–	Investigação do Grupo (G4) Sobre a Bomba do Jogo.....	67
Figura 3.8	–	Excerto das Considerações e dos Cálculos do Problema	68
Figura 3.9	–	Comparação entre os Dados Obtidos no Site e o Contexto do Jogo.....	69
Figura 3.10	–	Tabela e Gráfico da Quantidade de Pólvora por Power Ups.....	70

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1 – Atividades Desenvolvidas no Decorrer da Disciplina.....	21
Quadro 3.1 – Categorias Relativas ao uso da Tecnologia na Ativação de Recursos Semióticos.....	78

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	14
DELINEAMENTOS DA PESQUISA	18
ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	19
Contexto da Pesquisa e Coleta de Dados	19
As Características da Pesquisa	22
As Análises Empreendidas	22
Estrutura da Dissertação	24
REFERÊNCIAS.....	24
CAPÍTULO 2 – ARTIGO 1	28
RESUMO	28
INTRODUÇÃO	28
MODELAGEM MATEMÁTICA	30
SEMIÓTICA.....	31
Recursos Semióticos	32
APRESENTAÇÃO DOS DADOS	35
A Atividade de Modelagem Matemática Desenvolvida: A Moeda Bitcoin	36
RECURSOS SEMIÓTICOS NA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA	45
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
REFERÊNCIAS.....	52
CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2	55
RESUMO	55
INTRODUÇÃO	55
QUADRO TEÓRICO.....	56
Modelagem Matemática na Sala de Aula e a Tecnologia Digital.....	56
Tecnologia Digital e Recursos Semióticos	58
Aspectos Metodológicos e Dados Empíricos da Pesquisa	60
Aspectos metodológicos	60
As atividades de modelagem matemática.....	61
Atividade 1: Validando a Lei de Moore.....	62

Atividade 2: A bomba do jogo Bomberman.....	66
O USO DA TECNOLOGIA DIGITAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM	
MATEMÁTICA	70
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	76
REFERÊNCIAS.....	77
CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
REFERÊNCIAS	85
ANEXO A - MODELO DO TERMO DE AUTORIZAÇÃO.....	88

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

As discussões sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática têm sido recorrentes nas últimas décadas (BASSANEZI, 2002; BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016; GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018).

Quando atividades de modelagem matemática são introduzidas nas aulas de matemática, os alunos passam a participar da definição e da resolução de um problema identificado em uma situação da realidade de modo que a modelagem se torna uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não necessariamente matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

Almeida (2010) propõe que uma atividade de modelagem matemática tem origem em uma situação inicial em que se identifica um problema, e tem como ponto de chegada uma situação final em que uma solução para o problema é apresentada.

Na busca por uma resposta ao problema identificado são caracterizadas diferentes fases ou etapas, fases associadas ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática (BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2016; BASSANEZI, 2002, MEYER, 2020; ALMEIDA, 2018).

Nessa pesquisa vamos nos referir à configuração de uma atividade de modelagem matemática como apresentada em Almeida, Silva e Vertuan (2016). Neste contexto, ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem associam-se quatro fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação dos resultados.

A inteiração, fase que conduz à formulação do problema, é caracterizada pela ação dos alunos de inteirar-se da situação, de buscar informações, de identificar um problema a ser resolvido bem como pela realização de simplificações e definição de hipóteses. Matematização é a fase de transição da linguagem em que a situação e o problema são apresentados em linguagem matemática. Simplificações e hipóteses podem ser retomadas de modo a dar-lhes a roupagem matemática pertinente em cada situação. A fase de resolução consiste na construção de um modelo matemático. Finalmente a fase de interpretação e validação dos resultados é aquela em que se dá a análise da resposta e a

interpretação em relação ao problema não matemático bem como a validação dessa resposta.

A esta abordagem vem sendo associadas as ferramentas digitais, ampliando as possibilidades de ação dos alunos e professores modeladores e gerando repercussões nos modos de ensinar e de aprender na sala de aula. Este uso da tecnologia digital em atividades de modelagem matemática tem sido temática recorrente, considerando possibilidades e contribuições que esse uso pode proporcionar para a modelagem matemática na sala de aula (GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018; BORSSOI; ALMEIDA, 2015; FREJD; ARLEBÄCK, 2017; BROWN, 2015; GEIGER, 2011; MALHEIROS, 2004; DALLA VECCHIA, 2012, entre outros). As representações dinâmicas viabilizadas pela tecnologia ampliam e aprimoram as representações matemáticas que se estendem para além das formas estáticas e impressas dos registros escritos no papel.

Borssoi e Almeida (2015) apontam que

a modelagem matemática de situações-problema associada à disponibilidade de recursos tecnológicos pode ser facilitadora da aprendizagem e é adequada para compor ambientes favoráveis ao despertar da intencionalidade para aprender. (BORSSOI; ALMEIDA, 2015, p. 44)

As contribuições da tecnologia para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática também se referem as possibilidades de investigação, simulação e sistematização de resultados. Segundo Geiger (2011) e Frejd e Arlebäck (2017), estas possibilidades representam avanços nos envolvimento dos alunos com a situação que querem estudar bem como proporcionam o uso de recursos como tabelas e gráficos, por exemplo, na matematização dessa situação.

Dalla Vecchia (2012) ao associar atividades de modelagem matemática com o uso de alguns software, argumenta que modelar uma situação se torna um processo dinâmico e pedagógico e que modelos matemáticos são construídos e avaliados por meio de ideias matemáticas.

A dinâmica associada às configurações de atividades de modelagem matemática vem sendo associada a esquemas, chamados em geral de ciclos de modelagem matemática. Greefrath, Hertleif e Siller (2018) vislumbram incluir o uso de tecnologias digitais neste ciclo de modelagem matemática. Particularmente, os autores se referem a diferentes funções da tecnologia no desenvolvimento de atividades de modelagem. Para

estes autores, estas funções consistem em: *investigação*: pode favorecer na análise e busca de informações sobre o problema real; *experimentação*: ação que pode transformar com a ajuda de softwares ou planilhas eletrônicas a situação real em um modelo geométrico, por exemplo; *visualização*: viabiliza, ora evidenciar aspectos que ainda não tinham sido notados, ora analisar e averiguar os resultados obtidos – essa função aparece em duas etapas do ciclo, pois, segundo o autor, tem diferentes finalidades; *simulação*: auxilia na exploração e na diversidade de modelos matemáticos – função muito similar à *experimentação*; *calculação*: realização de cálculos apoiada pelo uso da tecnologia; *controle*: viabiliza exercer algum controle sobre o modelo matemático construído, como, por exemplo, na determinação de parâmetros e sua influência sobre aspectos numéricos e geométricos do modelo.

No âmbito do GRUPEMMAT – Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática – que é liderado pela orientadora desse trabalho – a articulação da tecnologia digital com a modelagem matemática na sala de aula tem sido o tema de interesse em algumas pesquisas (SANTOS, 2008; BORSSOI, 2013; SOUZA, 2018).

Santos (2008) direcionou sua pesquisa para o uso do computador que favorece a compreensão e a estimulação criatividade no que diz respeito à busca por soluções para problemas sociais, desenvolvendo atividades de modelagem matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Borssoi (2013) investigou como a disposição de ferramentas da tecnologia digital favorece o ensino e a aprendizagem em atividades de modelagem matemática, segundo os princípios de uma UEPS – Unidade de Ensino Potencialmente Significativa – que viabiliza a aprendizagem significativa dos estudantes. Souza (2018) investigou sob uma perspectiva wittgensteiniana as ações dos alunos ao fazer uso de tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática.

Na presente pesquisa dirigimos à tecnologia digital em atividades de modelagem matemática uma lente semiótica visando investigar como contribui para o desenvolvimento de atividades dessa natureza.

A semiótica é a ciência geral de todos os tipos de linguagem, em outras palavras é a ciência que estuda os signos. Santaella (2016) define o signo como

[...] qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa uma outra coisa chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial (SANTAELLA, 2016, p.8).

No que se refere ao âmbito da Matemática, Santaella (2016, p. 3) pondera que “não há pensamento que possa se desenvolver apenas através de símbolos” e ainda considera que nem mesmo o raciocínio puramente matemático pode dispensar uma variedade de signos.

Pesquisas realizadas no GRUPEMMAT buscaram articular Semiótica e Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática (VERTUAN, 2007; SILVA, 2008; SILVA, 2013; ROSA, 2009; VERONEZ, 2013; RAMOS, 2016; RAMOS, 2020; MENDES, 2018).

Vertuan (2007) investigou como diferentes registros de representação semiótica podem ser associados aos objetos matemáticos que emergem em atividades de modelagem matemática. Silva (2008) dirigiu à modelagem matemática um olhar em que algumas tríades da semiótica caracterizada por Charles Peirce foram identificadas. Em sua tese de doutoramento Silva (2013) investigou como emergem os signos nas diferentes etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pautando-se também em pressupostos da semiótica peirceana. Rosa (2009) apresenta em sua dissertação uma articulação entre os Registros de Representação Semiótica e os objetos matemáticos que emergem em atividades de Modelagem Matemática no âmbito das aulas de Matemática no Ensino Médio. Veronez (2013) usa a semiótica peirceana para investigar funções dos signos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ramos (2016) investigou as relações entre Modelagem Matemática e os tipos de raciocínio caracterizados na semiótica peirceana. Ramos (2020) buscou por elementos da semiótica peirceana para elucidar relações entre conhecimento e experiências dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Mendes (2018) em sua pesquisa teve como objetivo investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes.

Com o intuito de avançar nestas prerrogativas, mas ainda na perspectiva que considera o potencial de uma diversidade de signos, parece relevante levar em conta diferentes modos de organização, criação e desenvolvimento de signos pelos alunos no decorrer de um período do tempo. Com esta finalidade dirigimos nossa atenção aos chamados *recursos semióticos*.

A noção de *recursos semióticos* remete à identificação de diferentes recursos escolhidos pelos sujeitos, voluntaria ou involuntariamente, na construção e uso de signos de naturezas diversas. Mavers (2004) entende que os recursos semióticos envolvem ações e artefatos¹ que os sujeitos usam para fins comunicativos. Segundo o autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos de modo que gestos, olhares, registros escritos, *software*, expressões matemáticas e imagens gráficas, entre outros, constituem recursos semióticos.

Arzarello (2006) defende que ações que ativam recursos semióticos também se apoiam em relações e regras de transformação destes recursos. Neste contexto o autor caracteriza os pacotes semióticos.

Um pacote semiótico, segundo Arzarello, (2006), é uma estrutura dinâmica formado por um conjunto de recursos semióticos e as diferentes relações semióticas que o compõe. Essas relações, além de estarem vinculada às intencionalidades e às escolhas dos sujeitos, apoiam a ativação de diferentes maneiras de codificar e manipular as informações. No contexto da sala de aula, o uso destes recursos favorece as ações dos alunos nas atividades matemática. Na presente pesquisa, nossa atenção se dirige às atividades de modelagem matemática na sala de aula.

DELINEAMENTOS DA PESQUISA

Na presente pesquisa usamos uma lente semiótica para investigar ações e artefatos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, considerando tanto a dimensão cognitiva quanto a dimensão didática da modelagem matemática na sala de aula. Esta lente considera elementos da semiótica, particularmente, os chamados recursos semióticos e a associação entre eles caracterizada pelos pacotes semióticos.

A estrutura do nosso relatório de pesquisa apresenta-se no formato *multipaper*², de modo que nossas deliberações a respeito desta investigação são apresentadas em dois artigos científicos, cada um direcionando-se para alguns elementos da abordagem semiótica realizada.

¹ Segundo o dicionário de filosofia Abbagnano (2007), artefato refere-se a um objeto produzido por qualquer atividade humana. Para ser considerado artefato, o objeto deve manifestar a intenção, preexistente à sua construção, de utilizá-lo com finalidade determinada.

² Formato alternativo de organização de teses, dissertações. Consiste em estruturar o relatório em artigos que apesar suas características individuais estão relacionados e permitem a discussão sobre o objetivo geral.

O primeiro artigo “Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática” tem como objetivo investigar Quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade.

Esta investigação visa elucidar a variedade de recursos semióticos que emergem em atividades de modelagem matemática e como eles se articulam para fomentar as ações dos alunos. Com esta finalidade usamos um quadro teórico que caracteriza os pacotes semióticos. Estes são constituídos pela diversidade de recursos semióticos produzidos por meio de diferentes ações e com caráter intencional, mas também pela articulação entre eles de modo que diferentes recursos se complementam. Entender como estes pacotes são estruturados e como eles colaboram nas diferentes fases do desenvolvimento de atividades de modelagem é, portanto, a expectativa em relação ao que se investiga no artigo 1.

No segundo artigo “A tecnologia digital em atividades de modelagem matemática: um olhar para os recursos semióticos” visamos investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Nessa investigação nos propomos a evidenciar nas ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática as funções da tecnologia digital no que se refere à produção e articulação dos recursos semióticos ativados nesse desenvolvimento.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

CONTEXTO DA PESQUISA E COLETA DE DADOS

Para, à luz da semiótica, dirigir a atenção para ações e artefatos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática investigando os recursos semióticos, a articulação entre estes recursos e o papel da tecnologia digital nesta ativação e articulação, nos subsidiamos no quadro teórico conforme introduzido na seção anterior bem como em uma pesquisa empírica.

A pesquisa empírica foi realizada com 34 alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral alocada no segundo ano de um curso de Ciência da Computação

em uma universidade particular do norte do Paraná. A disciplina se deu em regime de caráter semestral, com uma carga horária de 80 horas distribuídas em 3 horas semanais. A professora da disciplina é a autora da dissertação de modo que atuou na realização da pesquisa com o papel duplo de professora e pesquisadora.

Nesse contexto, as atividades de modelagem foram introduzidas conforme os momentos de familiarização descritos por Almeida, Silva e Vertuan (2016). Para os autores a introdução de atividades de modelagem na sala de aula devem acontecer de maneira gradativa para que os alunos possam se familiarizar com modelagem, aumentando o seu repertório de estratégias de resolução, definem a familiarização em três momentos.

Em um primeiro momento, o tema da atividade é proposto pelo professor, que sugere um problema que deve ser investigado pelos alunos. Os dados e as informações necessários para a solução desse problema são fornecidos aos alunos que realizam uma série de procedimentos para encontrar uma resposta para o problema a ser investigado.

No segundo momento, o professor que escolhe o tema para os alunos que fazem a complementação dos dados através da na busca de informações e investigações para solucionar o problema. Nesse momento, os alunos encontram-se mais atuantes, adquirindo mais autonomia e confiança na condução da atividade, que devem ser avaliadas pelo professor. Os alunos, ao vivenciarem os dois primeiros momentos de familiarização encontram-se aptos para delimitar e buscar uma solução para o que pretendem estudar por meio da matemática, ou seja, para vivenciar o terceiro momento.

No terceiro momento de familiarização, os alunos, organizados em grupo, escolhem o tema e identificam um problema a ser investigado. Todos os caminhos e todas as ações necessárias para o desenvolvimento da atividade devem ser propostos pelo grupo, sob a orientação do professor. Nesse momento, os alunos devem comunicar através de relatórios e seminários a resposta encontrada para o problema que investigaram, além de apresentar uma discussão sobre a pesquisa.

Para essa pesquisa selecionamos o desenvolvimento de três atividades de modelagem matemática, conforme indica o Quadro 1.1. A escolha dessas atividades leva em consideração a participação dos alunos no desenvolvimento das atividades bem como a qualidade dos dados produzidos nos grupos e a obtenção desses dados pelos meios de coleta utilizados na pesquisa.

Quadro 1.1 – Atividades desenvolvidas no decorrer da disciplina

Atividade	Momentos de Familiarização	Grupos analisados
A moeda Bitcoin	2º momento	G2 e G4
Validando a Lei de Moore	3º momento	G1
A bomba do Jogo Bomberman	3º momento	G4

Fonte: As autoras.

Para o desenvolvimento das atividades os alunos formaram seis grupos (5 grupos de 6 alunos e 1 grupo de 4 alunos) – nomeados por G1, G2, G3, G4, G5 e G6. Em relação aos artigos que se referem às atividades desenvolvidas por estes grupos, somente alguns deles estiveram presentes nesta pesquisa, devido à especificidade e a qualidade dos dados de cada artigo após a exploração do material. Nesse sentido, os grupos se configuraram da seguinte maneira: no primeiro artigo, foi analisada a atividade Moeda Bitcoin desenvolvida por dois grupos: o grupo 2, com 6 alunos que foram nomeados por G2A1 até G2A6 e o Grupo 4, formado por 4 alunos, nomeados por G4A1 até G4A4. No segundo artigo, analisamos as atividades Validando a Lei de Moore e A bomba do Jogo Bomberman foram desenvolvidas por dois grupos: G1 com 6 alunos nomeados de G1A1 até G1A6 e o G4, sendo G4A1 até G4A4.

Os dados foram coletados por meio de áudios, filmagens e gravações em tela com a utilização do *software* OBS³, que permite em um mesmo vídeo, registrar as falas e as capturas de telas dos alunos. O relatório final - os alunos entregavam um relatório ao final do desenvolvimento para cada atividade – além dos diferentes registros escritos e digitais foram postados pelos alunos na plataforma *Google Classroom*⁴, adotado pela professora como ferramenta de ensino e pesquisas. Além do relatório final os alunos eram solicitados a apresentar para a turma o desenvolvimento da atividade proposta. Esse momento também fora capturado por nós onde dispusemos de duas câmeras de vídeo visando capturar diferentes ações na explicação da atividade e na utilização do quadro e outros recursos.

³ OBS (*Open Broadcaster Software*) *software* que permite a gravação de tela com áudio e disponibilizam ferramentas tanto de gravação como edição do vídeo. Em: <https://obsproject.com/download>.

⁴ Aplicativo da *Google Apps*[®] que se configura como um recurso voltado para as práticas de Educação.

⁵ A instituição possui parceria com a *Google for Education*[®] onde os alunos possuem livre acesso às ferramentas disponíveis na plataforma.

Todos os alunos envolvidos na pesquisa encontravam-se cientes da investigação assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido⁶.

AS CARACTERÍSTICAS DA PESQUISA

Trata-se de uma pesquisa qualitativa interpretativa em que as análises visam elucidar o potencial da ativação e articulação de recursos semióticos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Para Garnica (2012), pesquisas qualitativas reconhecem

- (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-la podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. Aceitar esses pressupostos é reconhecer, em última instância, que mesmo esses pressupostos podem ser radicalmente reconfigurados à luz do desenvolvimento das pesquisas (GARNICA, 2011, p.99).

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa possui as seguintes características: a fonte de dados é o próprio ambiente em que os dados são produzidos; é descritiva; o interesse reside mais no processo do que nos resultados ou produtos; o significado é produzido pela análise dos dados e assim, também reflete interpretações de quem a realiza.

AS ANÁLISES EMPREENDIDAS

Levando em consideração que a pesquisa é qualitativa e interpretativa, as análises seguem encaminhamentos pertinentes a pesquisas dessa natureza.

Com relação a estes encaminhamentos, Garnica (2011) pondera que

Existe, sim, um cenário que o pesquisador procura compreender, cenário este com limitações bastante rigorosas, impostas, principalmente, pela

⁶ O termo se deu com a assinatura e autorização dos alunos em utilizar parcial ou integralmente seus registros escritos, impressos, arquivos eletrônicos e gravações em áudio e nossas captações de vídeo na realização das atividades desenvolvidas (Anexo A).

impossibilidade de serem focadas, numa pesquisa, todas as instâncias que nela própria se vislumbram e que, nitidamente, estão ligadas a entornos que, por sua vez, têm outras ramificações que exigem compreensão (GARNICA, 2011, p.100).

Cientes dessas ponderações apontadas por Garnica (2011), as análises dos dois artigos seguem encaminhamentos sutilmente distintos.

No artigo 1 a opção metodológica caracteriza uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. As análises, sincrônica e diacrônica dos dados coletados, consideram por um lado, os recursos semióticos ativados ou produzidos pelos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Por outro lado, associamos a isso a manipulação e a escolha de cada recurso de acordo com a intencionalidade de cada grupo de modo que possamos inferir sobre os pacotes semióticos caracterizados nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

No artigo 2, para investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, consideramos o desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática.

Essa pesquisa se constitui de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por 34 alunos de um curso de Ciência da Computação separados em 6 grupos, que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ministrada por uma das autoras dessa pesquisa. Após uma análise dos dados, delimitamos a escolha de três desses grupos, considerando as especificidades das atividades que desenvolveram e a qualidade dos dados coletados. O grupo 1 (G1), com 6 alunos (G1A1 a G1A6), grupo 2 (G2), com 6 alunos (G2A1 a G2A6) e o grupo 4 (G4), com 4 alunos (G4A1 a G4A4). A escolha desta nomeação se deu de maneira aleatória garantindo assim, o sigilo na identidade dos alunos. Os alunos estavam cientes da pesquisa, sendo esta realizada usando termo de consentimento livre e esclarecido⁷.

Os dados foram coletados por meio por meio de gravações em áudio, vídeos e tela do computador com a utilização do *software* OBS⁸ que permitiu registrar simultaneamente as falas e as capturas de telas dos alunos, além das observações de diário de campo realizadas pela professora pesquisadora no decorrer das aulas. Todos os

⁷ Conforme anexo A desse trabalho.

⁸ *Open Broadcaster Software*: permite a gravação de tela e áudio simultaneamente.

materiais e relatórios foram postados pelos grupos na plataforma *Google Classroom*⁹, adotado pela professora como ferramenta de ensino e pesquisa.

Por fim, procedemos a análise interpretativa dos dados à luz do quadro teórico relativas às maneiras de uso dos recursos semióticos nas atividades desenvolvidas pelos alunos. Nesse sentido, a relação entre os dados obtidos na pesquisa empírica e o quadro teórico adotado é o que deu sentido à interpretação do pesquisador.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A estrutura do relatório da pesquisa compreende quatro capítulos e um anexo. O capítulo 1, se refere a esta Introdução e apresenta elementos do quadro teórico, o problema da pesquisa, a metodologia da pesquisa e a estrutura do relatório.

No capítulo 2, apresentamos o artigo “Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática”. O capítulo 3 contém o artigo “A tecnologia digital em atividades de modelagem matemática: um olhar para os recursos semióticos”. O capítulo 4 contém as Considerações Finais da pesquisa em que apresentamos os resultados e nossas reflexões pautados em nosso problema de pesquisa e no objetivo de cada um dos artigos. Além disso, esse capítulo dispõe das articulações que procuramos evidenciar e refletir em relação ao uso de recursos semióticos em atividades de modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696 – 726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 387 – 414, dez. 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

⁹ Aplicativo da *Google Apps*[®] que se configura como um recurso voltado para as práticas de Educação. A instituição possui parceria com a *Google for Education*[®] onde os alunos possuem livre acesso às ferramentas disponíveis na plataforma.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência & Educação** Bauru, v. 11, n. 3, p. 483 – 497, dez. 2005.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Relime** – Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, Cidade do México, Número Especial, v. 9, p. 267 – 299, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova esatratégia**. 4. ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R.. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **REIEC** – Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, v. 10, n. 2, p. 36 – 45, Dezembro, 2015.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BROWN, J. P. Visualisation tactics for solving real world tasks. In G. A. Stillman, W. Blum; M. S. Biembengut (Eds.) **Mathematical modelling in education research and practice (ICTMA 16): Cultural, social and cognitive influences**: Springer, 2015, p. 431 – 442.

DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

FREJD, P; ARLEBÄCK, J. B.. Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak **In: Mathematical Modelling and Applications (ICTMA 17): Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**: STILLMAN, A. G; BLUM, W.; KAISER, S., 2017. p. 517 – 527.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GEIGER, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. G. Kaiser et al. (eds.), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**, p. 305 – 314, 2011.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1 – 12, 2018.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado—Rio Claro: Unesp, 2004.

MAVERS, D. E. **Multimodal design: the semiotic resources of children's graphic representation**. 2004. 243 f. Tese (PhD em Educação) – Universidade de Londres, Londres, 2004.

MENDES, T. F. **A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática: uma análise semiótica**. 2018. 118f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MEYER, J. F. Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade....**Com a Palavra, O Professor**, 5(11), 140 – 149, 2020.

RAMOS, D. C. **Modelagem matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos**. 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RAMOS, D. C. **O raciocínio abduutivo em atividades de Modelagem Matemática**. 2016. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 1ª ed. da 8ª reimpressão – São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem**. Londrina, 2008. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências e Educação Matemática Universidade Estadual de Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SOUZA, Henrique C. T. **Um olhar sobre o fazer Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. Tese de Doutorado – Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2018.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2007. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

CAPÍTULO 2 – ARTIGO 1

RECURSOS SEMIÓTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

RESUMO

Neste artigo dirigimos nossa atenção à questão: quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade? Nossas argumentações são fundamentadas, por um lado, em um quadro teórico que considera características da modelagem matemática, bem como elementos relativos ao uso de recursos semióticos em atividades de ensino e aprendizagem. Por outro lado, consideramos uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Ciência da Computação. A partir de uma pesquisa de natureza qualitativa e cunho interpretativo, nossas análises nos permitem inferir que os alunos fazem uso de recursos semióticos de naturezas diversas de modo que se constituem pacotes semióticos relativamente às ações dos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. O que se pode concluir é que diferentes recursos semióticos atuam de maneira colaborativa para fomentar estas ações.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Recursos Semióticos, Pacote Semiótico, Multimodalidade.

INTRODUÇÃO

Estudos relativos à Semiótica na Educação Matemática têm sido recorrentes nas últimas décadas levando em consideração diferentes elementos relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática e em diferentes contextos educacionais (ARZARELLO, 2006; MILDENHALL, 2013; PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016; ALMEIDA; SILVA, 2018; RADFORD; SCHUBRING; SEEGER, 2008; ALMEIDA; SILVA, 2017; STEINBRING, 2006).

O que se pode observar a partir desses estudos é que a lente semiótica oferece elementos para abordar o ensino e a aprendizagem considerando tanto aspectos cognitivos quanto aspectos didáticos associados às atividades da sala de aula. No presente artigo direcionamos essa lente para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Segundo Almeida e Brito (2005), a modelagem matemática pode ser definida como uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não necessariamente matemática.

Um aspecto relevante para o contexto do presente artigo refere-se às ações, aos meios e aos artefatos usados pelos alunos e professores no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula. Ou seja, que recursos de expressão e de comunicação são usados pelos modeladores ao desenvolver a atividade? Nosso olhar para esta questão é mediado pela semiótica. Particularmente por uma lente semiótica que considera os chamados *recursos semióticos*.

Arzarello (2006) argumenta que no contexto da sala de aula conjugam-se recursos linguísticos e extralinguísticos valendo-se de da oralidade, da escrita e de outros meios mediados, em muitas oportunidades, pela tecnologia digital, como é o caso de imagens e gráficos, por exemplo. Segundo Mavers (2004), estes recursos são considerados recursos semióticos.

Todavia, o que tem sido investigado nas últimas décadas em relação aos recursos semióticos é que para além de considerá-los isoladamente nas atividades da sala de aula, é preciso considerar a articulação dos diferentes recursos e sua complementaridade para a comunicação da sala de aula e para a aprendizagem dos alunos (ARZARELLO, 2006; MAVERS, 2004; PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016; MILDENHALL, 2013).

Neste sentido, segundo Arzarello (2006), é necessário considerar a variedade de processos e recursos semióticos que ocorrem na sala de aula e como eles se articulam para fomentar as ações dos alunos e promover a aprendizagem. Com esta finalidade o autor caracteriza os *pacotes semióticos*. Segundo o autor, um pacote semiótico é composto por um conjunto de signos produzidos por meio de diferentes ações e com caráter intencional, estabelecendo relações entre os signos e seus significados subjacentes.

No presente artigo trazemos para o âmbito de atividades de modelagem matemática a investigação do uso de pacotes semióticos considerando a possibilidade de que a articulação de diferentes recursos semióticos pode incrementar as ações no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Assim, a questão que nos propomos a investigar é: quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade?

Assim, por um lado estruturamos um quadro teórico que considera características da modelagem matemática bem como elementos relativos ao uso de recursos semióticos em atividades de ensino e de aprendizagem. Por outro lado, consideramos uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Ciência da Computação.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática refere-se, em termos gerais, à construção de uma solução para um problema por meio de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002; BLUM, 2015; FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016; GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018).

Quando essa dinâmica caracterizada como modelagem matemática é incorporada às aulas em diferentes níveis de escolaridade, os alunos passam a ser corresponsáveis pela investigação de uma situação-problema em que definem e resolvem um problema usando matemática, de modo que essa passa a ser uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não necessariamente matemática (ALMEIDA e BRITO, 2005).

Almeida (2010) propõe que uma atividade de modelagem matemática tem origem em uma *situação inicial* em que se identifica um problema, e tem como ponto de chegada uma *situação final* em que uma solução para o problema é apresentada.

No caminho entre estas situações, identificam-se procedimentos que vêm sendo caracterizados com denominações tais como etapas, fases ou simplesmente estágios do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática (BLUM, 2015; FERRI, 2018; ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2016; BASSANEZI, 2002, MEYER, 2020; ALMEIDA, 2018). É consenso que não há encaminhamentos matemáticos previamente definidos em relação a estes procedimentos.

Particularmente, neste artigo, vamos nos apoiar na configuração de uma atividade de modelagem matemática como apresentada em Almeida, Silva e Vertuan (2016). Neste contexto, ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem associam-se quatro fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação dos resultados.

A inteiração, fase que conduz à formulação do problema, é caracterizada pela ação dos alunos de inteirar-se da situação, de buscar informações, de identificar um problema a ser resolvido bem como pela realização de simplificações e definição de hipóteses. Matematização é a fase de transição da linguagem em que a situação e o problema são apresentados em linguagem matemática. Simplificações e hipóteses podem ser retomadas de modo a dar-lhes a roupagem matemática pertinente em cada situação. A fase de resolução consiste na construção de um modelo matemático. Finalmente a fase de interpretação e validação dos resultados é aquela em que se dá a análise da resposta e a interpretação em relação ao problema não matemático bem como a validação dessa resposta.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016), não há uma prescrição linear para estas fases de modo que alunos e professores podem movimentar-se de uma fase para outra e retomar fases anteriores sempre que isto se mostrar adequado ou pertinente para a construção de uma solução para um problema não matemático por meio da matemática.

Um aspecto relevante para o contexto do presente artigo refere-se às ações, aos meios e aos artefatos usados pelos alunos e professores no desenvolvimento da atividade de modelagem considerando estas fases. Ou seja, que recursos de expressão e de comunicação são usados pelos modeladores ao desenvolver a atividade? Nosso olhar para esta questão é mediado pela semiótica. Mais especificamente, por uma lente semiótica que considera os chamados recursos semióticos.

SEMIÓTICA

A semiótica é a ciência geral de todos os tipos de linguagem, em outras palavras é a ciência que estuda os signos. Santaella (2016) define o signo como

[...] qualquer coisa de qualquer espécie (uma palavra, um livro, uma biblioteca, um grito, uma pintura, um museu, uma pessoa, uma mancha de tinta, um vídeo etc.) que representa uma outra coisa chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou potencial SANTAELLA (2016, p.8)

No que se refere ao âmbito da Matemática, Santaella (2016, p. 3) pondera que “não há pensamento que possa se desenvolver apenas através de símbolos” e ainda

considera que nem mesmo o raciocínio puramente matemático pode dispensar uma variedade de signos.

Conforme afirma Steinbring (2006), os signos usados no contexto da Matemática podem ser vistos como instrumentos para codificar, comunicar, e viabilizar a expressão e a representação dos objetos matemáticos. Os signos, contudo, não têm significado por si só, mas esse deve ser produzido pelo aluno por meio de mediações e para contextos de referência específicos.

Segundo Ernest (2006), abordar o ensino e a aprendizagem numa perspectiva semiótica é uma iniciativa promissora mediante a qual se busca compreender signos e suas regras de produção. Nesse sentido, a lente semiótica é particularmente adequada para considerar aspectos multimodais da aprendizagem em matemática e nos permite considerar tanto a dimensão cognitiva quanto a dimensão didática da aprendizagem na sala de aula. A produção e manipulação de signos de naturezas diversas viabilizam aos alunos novas interpretações do que conhecem sem abrir mão do que já estava previamente em sua estrutura cognitiva.

Várias pesquisas têm se endereçado às atividades semióticas dos alunos no âmbito de aulas de Matemática (PANERO; ARZARELLO; SABENA, 2016; ALMEIDA; SILVA, 2017). Resultados indicam que a aprendizagem, quando associada à produção e ação de diferentes signos, pode se constituir relativamente a uma variedade de representações e significados do objeto matemático.

Nessa perspectiva que considera o potencial de uma diversidade de signos, parece relevante levar em conta diferentes modos de organização, criação e desenvolvimento de signos pelos alunos no decorrer de um período do tempo. Com esta finalidade dirigimos nossa atenção aos chamados *recursos semióticos*.

RECURSOS SEMIÓTICOS

Para realizar uma análise semiótica abrangente considerando a diversidade sógnica a que se refere Santaella (2016), é preciso ampliar a estrutura do que constitui os sistemas semióticos, visando possibilitar a interpretação do fenômeno didático na sala de aula (ALMEIDA; SILVA, 2018; ARZARELLO, 2006).

Neste sentido, é preciso considerar também signos menos convencionais, mas que fazem parte de todo o processo de comunicação que acontece na sala de aula. Estes

sistemas semióticos mais amplos, entretanto, levam em consideração também aspectos holísticos e idiossincráticos no decorrer da construção e ação com signos na sala de aula. Neste contexto, emerge a ideia de *recursos semióticos* (ARZARELLO, 2006; MAVERS, 2004; O'HALLORAN et al. ,2018 .

A noção de *recursos semióticos* remete à identificação de diferentes recursos escolhidos pelos sujeitos, voluntaria ou involuntariamente, na construção e uso de signos de naturezas diversas. Mavers (2004) entende que os recursos semióticos envolvem ações e artefatos¹⁰ que os sujeitos usam para fins comunicativos. Segundo o autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos de modo que gestos, olhares, registros escritos, *software*, expressões matemáticas e imagens gráficas, entre outros, constituem recursos semióticos.

Segundo Ernest (2006), os recursos semióticos diversos são ativados no interior de um sistema semiótico o qual é caracterizado a partir de três aspectos:

Primeiro, há um conjunto de signos, cada um dos quais possivelmente, possa ser pronunciado, falado, escrito, desenhado ou codificado eletronicamente [...]. Segundo, existe um conjunto de regras de produção de signos, para produzir ou proferir signos atômicos (únicos) e moleculares (compostos) [...]. Terceiro, há um conjunto de relações entre os signos e seus significados incorporados em uma estrutura de significado subjacente (ERNEST, 2006, p.69).

Segundo Lim (2019), considerar os diferentes recursos semióticos representa um marco na investigação da atividade semiótica, pois passa-se a considerar não os signos isoladamente, mas a sua articulação para a capacidade de manifestar o que se pensa e o que sabe sobre determinado objeto ou assunto.

A atuação de diferentes recursos semióticos deve se dar de forma integrada de modo que os sujeitos, ao produzirem signos que comunicam, organizam e estruturam o pensamento, beneficiem-se da integração para fomentar a qualidade da comunicação (ARZARELLO, 2006; LIM, 2019; MAVERS, 2004; MILDENHALL, 2013).

Segundo O'Halloran *et al.* (2018), a utilização de vários recursos semióticos viabiliza uma abordagem holística para o que se deseja comunicar por meio dessa utilização. Nesse contexto, Moro *et al.* (2015) consideram que o ensino e a aprendizagem sempre se utilizam de diferentes recursos semióticos, incluindo oralidade (como por exemplo, fala, olhar, gestos), escrita e uso de imagens bem como recursos áudio visuais

¹⁰ Segundo o dicionário de filosofia Abbagnano (2007) trata-se de um objeto produzido por qualquer atividade humana. Para ser considerado artefato, o objeto deve manifestar a intenção, preexistente à sua construção, de utilizá-lo com finalidade determinada.

mediados, em muitas situações, por ferramentas digitais. Neste sentido, os recursos semióticos são também contextuais, sinalizando a pertinência de um espaço pessoal dos indivíduos num meio social.

Panero, Arzarello e Sabena (2016) neste contexto, argumentam que quando dois ou mais recursos semióticos convergem para uma mesma função no interior de uma atividade, o uso conjunto destes recursos favorece a ação comunicativa.

Segundo Arzarello (2006), é necessário pensar numa lente semiótica capaz de considerar a variedade de recursos semióticos que se identificam na sala de aula. Com esta finalidade o autor caracteriza uma estrutura que, em sua opinião, alarga a noção de uso de recursos semióticos e passa a considerar a articulação desses recursos e sua finalidade: os pacotes semióticos. Segundo o autor, um pacote semiótico é composto por um conjunto de signos produzidos por meio de diferentes ações e com caráter intencional, estabelecendo relações entre os signos e seus significados subjacentes. Neste contexto,

fala, gestos e representações escritas (de esboços e diagramas a símbolos matemáticos) são exemplos de três tipos diferentes de recursos semióticos que, em conjunto e também incorporando as relações entre eles, constituem o que chamamos de pacote semiótico. Este pacote se modifica de forma dinâmica no decorrer do tempo (ARZARELLO, 2006, p. 284).

Do ponto de vista da aprendizagem, segundo Arzarello (2006), a caracterização de um pacote semiótico em atividades na sala de aula pode oferecer condições ao professor de elucidar o funcionamento cognitivo subjacente à diversidade de processos matemáticos relativos à atividade. Por outro lado, o professor precisa ter consciência das ações dos alunos, acompanhando a ativação dos recursos semióticos de seus alunos para determinar a configuração de condições que irão fomentar as experiências de aprendizagem dos alunos e adaptar suas intervenções em cada atividade didática específica.

Particularmente, Arzarello (2006) argumenta que o potencial da ativação de pacotes semióticos para a aprendizagem da Matemática, pode ser inferido por meio de dois tipos de análise: *sincrônica* e *diacrônica*. A análise *sincrônica* se dirige às relações entre os diferentes recursos semióticos ativados e coordenados simultaneamente pelo aluno em um determinado momento. A análise *diacrônica* investiga a evolução dos recursos ativados em momentos sucessivos, buscando evidências da dinâmica da articulação no decorrer do tempo.

Estas análises trazem evidências de que as ações dos sujeitos, além de estarem vinculadas às intencionalidades, fomentam a ativação de diferentes maneiras de codificar e manipular informações. Neste sentido, um pacote semiótico não pode ser considerado a justaposição de recursos semióticos e de suas relações, mas “constitui um todo cujas componentes distinguimos apenas para fins de análise” (ARZARELLO, 2006, p. 281). Assim, uma mudança entre os componentes do pacote gera um novo pacote semiótico que surge de outro já existente. Neste sentido ponderamos que “uma atividade matemática pode ser caracterizada pela riqueza do pacote semiótico que ela ativa” (ARZARELLO, 2006, p. 279).

Levando em consideração a relevância do uso de diferentes recursos semióticos nas atividades matemáticas, no presente artigo dirigimos nossa atenção à ativação de recursos semióticos em atividades de modelagem matemática.

APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Para investigar quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade realizamos uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem são desenvolvidas por alunos de um curso de Ciência da Computação na disciplina de Cálculo Diferencial Integral (CDI) no segundo ano do curso. Levando em consideração a extensão desse texto, dirigimos nossa atenção a uma das atividades cujo desenvolvimento foi realizado no decorrer de seis aulas de sessenta minutos cada uma. A professora da disciplina é uma das autoras deste artigo e propôs a atividade para uma turma de 34 alunos, separados em 6 grupos (5 grupos de 6 alunos e 1 grupo de 4 alunos). Nossa discussão no presente artigo leva em consideração dois desses grupos, definidos a partir de nosso interesse em identificar e analisar a variedade de recursos semióticos ativados pelo grupo no desenvolvimento da atividade.

Os dados que subsidiam as nossas argumentações são provenientes das falas associadas a gestos e meios de expressão, das interações entre os participantes de cada grupo bem como das gravações de vídeos das aulas e das apresentações que cada grupo fez na aula. Estas gravações foram transcritas pela professora e associadas às suas anotações em diário de campo realizadas no decorrer das aulas em que a atividade foi

desenvolvida. Outra ferramenta de coleta de dados foi o uso do *software* OBS®¹¹ que permitiu que a imagem da tela do computador fosse capturada de maneira simultânea com o som das falas dos alunos ao desenvolverem a atividade. Além disso, também foram capturadas as telas dos relatórios escritos dos alunos postados no aplicativo Google Classroom®¹².

Os grupos a que nos referimos são identificados por G2 e G4. G2 é formado por 6 alunos de modo que os alunos são identificados por G2A1 até G2A6. Já para os alunos de G4 usamos G4A1 até G4A4 para nos referirmos a cada um dos 4 alunos desse grupo. Na transcrição dos diálogos com participação da professora usamos a letra P para identificar suas falas. Vale ressaltar que os alunos já haviam tido experiências anteriores com atividades de modelagem matemática de modo que este não era seu primeiro contato com atividades dessa natureza.

Nossa opção metodológica caracteriza uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Nossas análises, sincrônica e diacrônica dos dados coletados, consideram por um lado, os recursos semióticos ativados ou produzidos pelos alunos nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Por outro lado, associamos a isso a manipulação e a escolha de cada recurso de acordo com a intencionalidade de cada grupo de modo que possamos inferir sobre os pacotes semióticos caracterizados nas diferentes fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A atividade de modelagem matemática desenvolvida: a moeda Bitcoin

Para o desenvolvimento da atividade a que nos referimos nesse artigo a professora sugeriu aos alunos a temática da moeda Bitcoin (BTC). Os alunos da disciplina, prontamente se interessaram pelo tema, o que se pode supor relacionado à sua familiaridade ou afinidade com a área do curso, Ciência da Computação. Para introduzir o tema a professora organizou um conjunto de informações que foram apresentadas aos alunos conforme indica a Figura 2.1 e que constituem uma primeira fonte de informação dos alunos para o desenvolvimento da atividade.

¹¹ Sigla para *Open Broadcaster Software*: permite a gravação de tela do computador com o áudio.

¹² Recurso da *Google*® voltado para as práticas de educacionais – a faculdade possui licença para o uso.

Figura 2.1 – Informações sobre a moeda Bitcoin



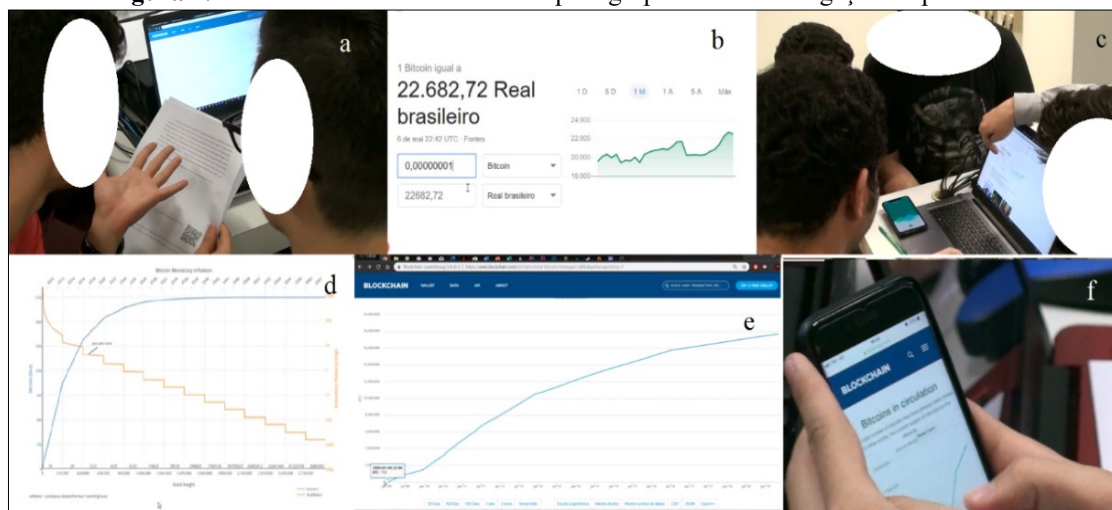
Fonte: As autoras.

As informações da Figura 2.1 foram discutidas e em seguida os alunos formaram grupos para estruturar o que seria investigado por cada grupo relativamente a essa temática. Assim, cada grupo deveria definir um problema e propor uma solução. Apresentamos os encaminhamentos de dois desses grupos.

Um dos grupos, referido aqui como grupo G2, ao iniciar desenvolvimento da atividade, imediatamente percebeu que as informações apresentadas pela professora não eram suficientes. Assim, os alunos usaram o aplicativo de celular para escanear o *QR*

CODE¹³ incluído nas informações fornecidas pela professora. Ao usar este recurso, os alunos tinham acesso, em tempo real, à quantidade de moedas mineradas e podiam explorar o seu comportamento (Figura 2.2e e 2.2f). Além disso, os alunos utilizaram também texto escrito, falas, gestos, computador e *sites* (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Recursos semióticos usados pelo grupo G2 na investigação do problema



Fonte: As autoras (Captura da tela e vídeo do G2)

O aluno G2A2, explorando informações relativas ao tema na *internet* (Figura 2.2c) encontrou uma *calculadora de BTCs* cujo uso é on-line e que, além de fazer a conversão da moeda para a moeda oficial do Brasil (real), apresenta representações gráficas da situação (Figura 2.2b e Figura 2.2d). Motivados pelas informações de A2, os alunos do grupo iniciaram suas discussões relativas ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

G2A1: *Mas se você olhar pra esse gráfico, vê que isso a gente não pode prever, é muito instável*(referindo-se aos gráficos das Figuras 2.2b e 2.2d)

G2A3: *É que vai dividindo, dividindo, até que não dá mais pra dividir, deve ter alguma coisa no código deles que não deixa dividir mais a moeda.*

G2A5: *Mas este gráfico que a gente tá estudando (Figura 2.2e) é da data e da quantidade de BTC que já foi minerado. Não fala de valor em dinheiro aqui. Ele tá indo em exponencial aqui. É que nem o da bateria do celular (fazendo referência a uma atividade já desenvolvida na disciplina), não é que vai estabilizar, vai carregando, vai carregando até ficar estável (diz o aluno ao apontar para a tela do computador).*

G2A3: *Mas só que neste caso nunca vai ficar estável, é quase uma assíntota (fazendo uma associação com um conteúdo que já havia estudado na disciplina).*

G2A4: *Acho então que a gente pode achar esta curva aqui (referindo-se à curva apresentada no site) e depois fazer um limite dela... vai dar pra ver como ela tá. Vamos ver com a professora.*

G2A3: *Professora, a gente pensou de ver se quando a moeda vai acabar...*

¹³ Código de barras bidimensional que pode, ao ser escaneado por uma câmera de celular, dá acesso a um novo *link*.

P: Mas por que pensaram em fazer isso?

G2A1: Assim... se ela vai crescendo e chega uma hora que estabiliza, a gente imagina que é aí ela vai acabar e é isso que a gente vai testar, já que ela é limitada como fala no site (referindo-se às informações encontradas em sites pelos alunos)

P: Mas quais os dados vocês têm? Já olharam para eles?

G2A3: A gente pensou nisso porque parece que a moeda está acabando, mas nunca vai acabar, apesar da curva ficar quase reta.

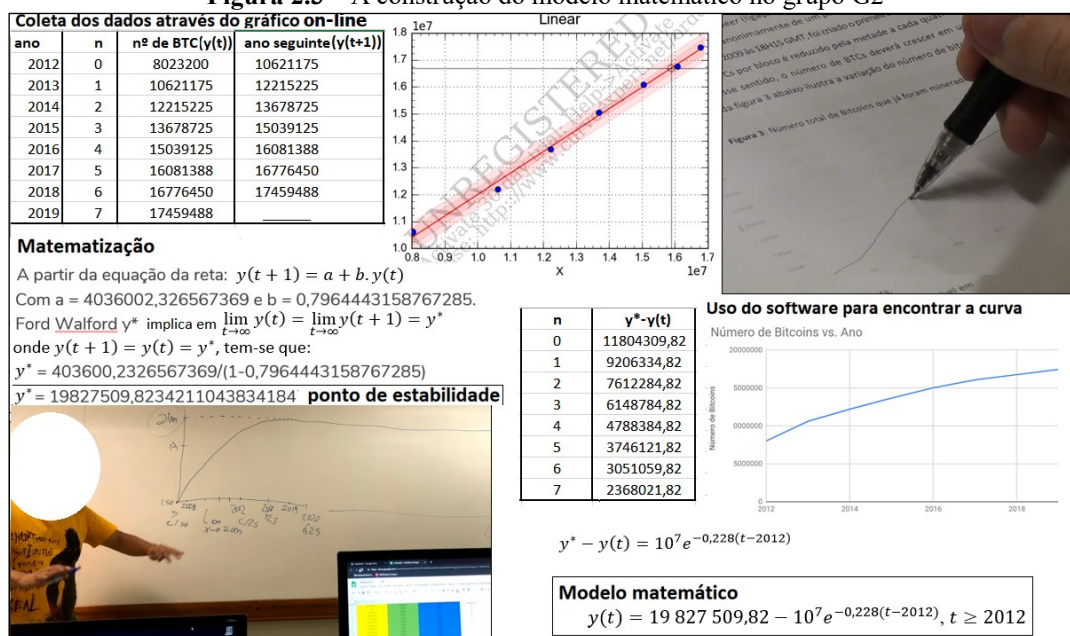
P: Mas como sabem se isso vai ou não mudar?

G2A4: É que a gente sabe que qualquer moeda virtual é limitada e conforme vai minerando, elas vão ficando escassas.

A partir dessa discussão e das informações encontradas relativas ao Bitcoin o grupo decidiu que o problema que iriam resolver nessa atividade é: *Investigar o comportamento da moeda Bitcoin no decorrer do tempo, considerando que há uma quantidade limitada dessa moeda disponível para comercialização.* Com essa finalidade iriam construir um modelo matemático que lhes permita determinar a quantidade de Bitcoin em cada ano e também fazer estimativas para anos futuros.

Fazendo uso das informações relativas à quantidade da moeda on-line e em tempo real, os alunos montaram uma tabela com o ano e o número de BTC em cada ano (ver Figura 2.3). A partir dos dados da tabela, os alunos escolheram fazer uma simplificação: registrar sempre a mesma data em cada ano. Essa escolha foi fundamentada para “estabelecer um padrão na coleta” – fala do aluno G2A2.

Figura 2.3 – A construção do modelo matemático no grupo G2



Fonte: As autoras (Recortes do relatório final e capturas de tela e vídeo do grupo G2)

Visando resolver o problema proposto a partir das informações que possuíam, os alunos definiram a hipótese: a quantidade de moeda a ser minerada é limitada. Usando essa hipótese, o grupo pretendia construir um modelo matemático que representasse a quantidade de moedas minerada a cada ano a partir de 2012 pois, segundo os alunos, a partir desse ano, a mineração apresentava uma certa regularidade.

Como incorporar essa informação, ou melhor, como fazer dessa hipótese um guia para resolver o problema, era uma situação nova para todos os alunos do grupo. Somente pela mediação da professora, remetendo a conteúdos já abordados na disciplina de CDI, é que avançariam na matematização da situação. Entretanto, a menção ao uso de limites aparecia nas discussões dos alunos, conforme sugere o diálogo a seguir.

G2A4: *É isso que a gente tem que achar, a gente pensou mesmo que tinha a ver com limite, por que ela faz assim* (fazendo gestos com a mão, ‘imitando’ a curva).

G2A3: *Sim, que é aquele tipo limite que a gente quer achar... de 21 milhões* (referindo-se a uma busca feita na internet do número de BTC a serem minerados).

G2A4: *Não. É a curva que a gente quer achar!*

A professora então aproveitou a oportunidade para introduzir o que se conhece na literatura como método de Ford-Walford¹⁴ para determinar o *valor limite* da moeda cuja existência já havia sido reconhecida pelos alunos. Inicialmente, entretanto, a professora esclareceu que este não é o que os alunos haviam chamado de *valor limite*, mas sim *valor de estabilidade*.

Assim, a matematização da situação e a construção do modelo foram assessoradas pela professora nesse momento do desenvolvimento da atividade usando conceitos já abordados na disciplina, tais como limite e assíntota. O que já sabiam sobre assíntota horizontal de uma função, nessa atividade foi usado para determinar o valor de estabilidade da moeda Bitcoin, considerando que a quantidade de moeda a ser comercializada é limitada e tem um valor de estabilidade.

Apresentando o método de Ford-Walford, a professora orientou e assessorou os alunos na construção do modelo matemático usando o *software CurveExpert*¹⁵ nos ajustes realizados (Figura 2.3). Para usar o modelo com o tempo variando a partir do ano de 2012, ou seja, $t \geq 2012$, o modelo matemático obtido foi escrito como: $y(t) = 19\,827\,509,82 - 10^7 e^{-0,228(t-2012)}$ em que $t \geq 2012$ é o tempo em anos e $y(t)$ é a

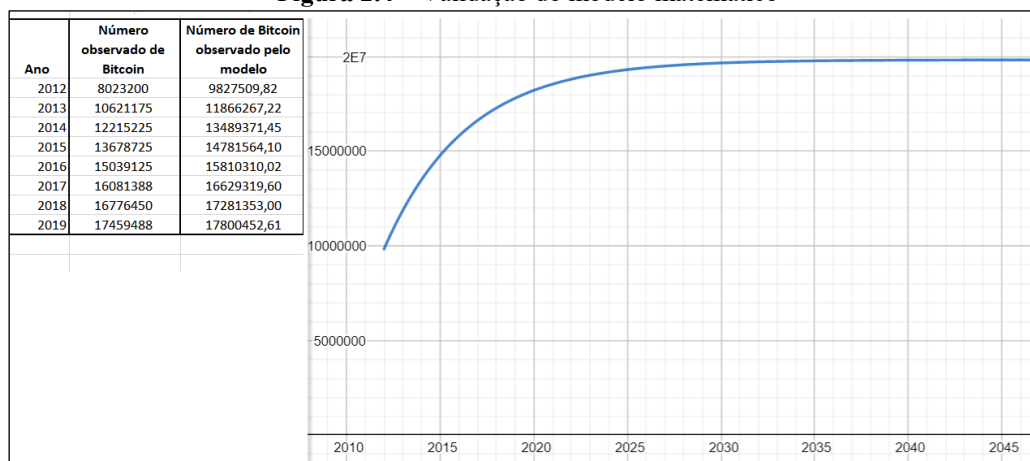
¹⁴ Ver Bassanezi (2002)

¹⁵ *Software livre* utilizado para fazer ajuste de curvas e análise de dados.

quantidade de moeda Bitcoin minerada no ano t .

O modelo matemático construído foi validado pelos alunos e sua interpretação associada às possibilidades de usá-lo para estimativas futuras com relação à comercialização da moeda Bitcoin. Para isso os alunos usaram também a representação gráfica do modelo (Figura 2.4) construída usando o *software* GeoGebra¹⁶.

Figura 2.4 – Validação do modelo matemático



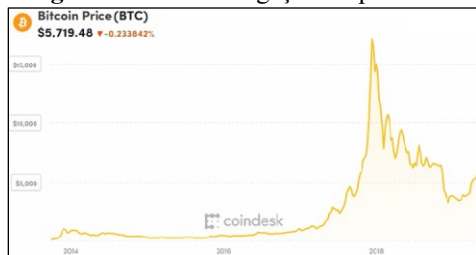
Fonte: As autoras (Recorte do relatório final e capturas de tela e vídeo do grupo G2)

A representação gráfica do modelo foi importante para os alunos entenderem a valor de estabilidade obtido vindo a lhes confirmar o que informações sobre o tema trazem na literatura, conforme aponta o relatório do grupo: “o modelo matemático encontrado trouxe resultados satisfatórios, pois se aproximou de 21 milhões, no nosso caso, 19 827 509 83 ou aproximadamente, 20 milhões” (relatório da atividade entregue por G2).

Os alunos do outro grupo (G4), a partir da discussão das informações apresentadas pela professora, também recorreram à internet para decidir o que estudariam nessa atividade relativamente à moeda Bitcoin. Mediante essa ação, os alunos encontraram um gráfico que indica os valores da moeda no decorrer do tempo (Figura 2.5a).

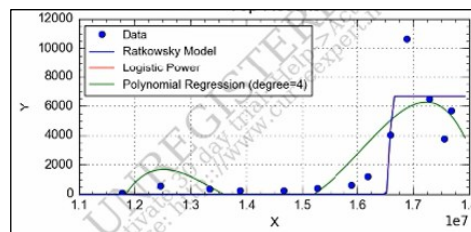
¹⁶ Software de Geometria Dinâmica – livre acesso. Disponível em: www.geogebra.org.br.

Figura 2.5a – Investigação do problema



Fonte: Captura da tela do G4

Figura 2.5b – Uso do *software* para observar os dados coletados



Fonte: Captura da tela do G4

Um dos alunos do grupo, G4A2, sugeriu que identificassem alguns pontos da curva da imagem da (Figura 2.5a) com o objetivo de encontrar uma relação entre a quantidade de moeda e o tempo. Ao escolher alguns pontos do gráfico, decidiram colocar os pontos no *software CurveExpert* (Figura 2.5b) na expectativa de identificar uma maneira de determinar um modelo matemático. O diálogo a seguir ilustra parte da discussão dos alunos.

G4A2: *Eu não estou vendo como a gente vai achar uma relação aqui, porque sobe um pouco e depois já desce e sobe de novo. O problema desta curva é que ela é muito 'repentina' em um curto intervalo de tempo, tipo... em um dia muda muito. É muito volátil! Não tem relação com a quantidade da moeda isso.*

G4A1: *Não vai dá pra gente tirar nenhuma conclusão você acha?*

G4A2: *Eu acho que é melhor a gente estudar a quantidade de moeda conforme o tempo vai passando.*

Assim, os alunos do G4 concluíram que “[...] não pode se obter uma conclusão concreta sobre a relação entre estas duas variáveis (*moeda e tempo*) devido a fatores externos que causaram uma grande variação da moeda em um curto período de tempo” – relatório escrito do G4.

Os alunos decidiram observar outras informações sobre a moeda que se encontravam no material entregue pela professora. O objetivo do grupo era observar a quantidade de moedas por bloco – as minerações são feitas por blocos. A característica essencial de um bloco é fazer referência ao bloco anterior, sempre de uma maneira criptograficamente segura.

A informação que lhes parecia fundamental, entretanto, era a regularidade informada no material entregue pela professora: a partir de 2009, a quantidade de moedas por bloco estava reduzindo pela metade a cada 4 anos. Assim, os alunos decidiram investigar *em que ano a moeda Bitcoin irá acabar*, fato esse que foi fomentado da hipótese de que a produção de moeda Bitcoin é limitada. O diálogo a seguir revela a definição desse problema.

G4A1: *Na verdade a gente tá vendo aqui que se a gente souber quanto que cada bloco produz de BTC por ano a gente vai achar quanto tem....*

G4A2: *Aqui ó: diz que cada bloco produz 12,5 BTC e, a cada 4 anos, cai pela metade... é como se fosse meia vida sabe?*

G4A1: *Não...mais ou menos...*

G4A2: *É que na verdade ele nunca vai parar de crescer, vai ser metade da metade da metade. Vai chegar numa fração de BTC que é tão pequena que vai demorar muito para chegar perto de 21 milhões, entendeu? Vai ser tipo um limite, sabe? (conteúdo que haviam estudado anteriormente na disciplina). Deve ser por isso que quanto mais ele é dividido mais caro ele fica.*

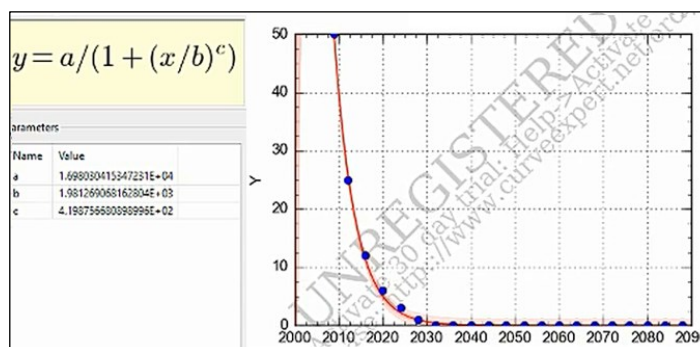
A partir dessa discussão os alunos optaram pela construção de uma tabela (Figura 2.6a) usando para isso o *software Excel*, iniciando com 50 BTC e reduzindo pela metade a cada 4 anos. Essa ação foi feita com o recurso *arrastar* a fórmula de uma célula para as outras células adjacentes. De posse dos dados da tabela, os alunos utilizaram novamente o *software CurveExpert* (Figura 2.6b) para auxiliá-los na observação dados.

Figura 2.6a – Tabela com os dados

Anos Passados	Tempo	Bitcoin por bloco
0	2009	50
4	2012	25
8	2016	12,5
12	2020	6,25
16	2024	3,125
20	2028	1,5625
24	2032	0,78125
28	2036	0,390625
32	2040	0,1953125
76	2084	0,00009536743164
80	2088	0,00004768371582
140	2148	0,00000000145519
144	2152	0,00000000072759
148	2156	0,00000000036379
152	2160	0,00000000018189
156	2164	0

Fonte: Relatório dos alunos

Figura 2.6b – Representação gerada *software*



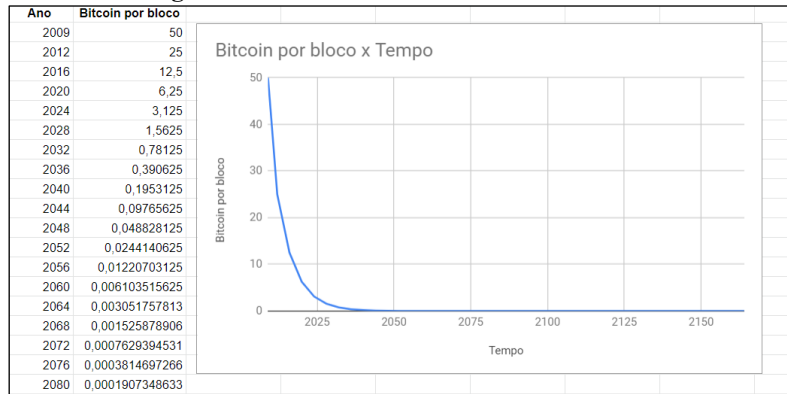
Fonte: Relatório dos alunos

O aluno G4A2, ao observar a curva apresentada no gráfico (Figura 2.6b) se manifestou dizendo que era diferente do que esperava. Para esse aluno, apesar dos pontos estarem todos na curva, a representação algébrica da curva, obtida usando o *software* (ver Figura 2.6b), não era considerada ideal para essa situação, conforme ilustra o diálogo:

G4A2: *Ah, mas não é isso... tinha que ser uma coisa diferente, essa é teoricamente a melhor de todas (referindo-se a curva que o software exibiu como ideal), mas tinha que ser uma PG na verdade. Quer ver?...tinha que ser alguma coisa deste tipo aqui. (o aluno muda para outro software para que possa exibir o que pretendia explicar ao grupo). Neste aqui a gente não pode editar.*

Neste caso, o uso do *software* não se mostrou adequado, mas motivou os alunos a construir o gráfico no *Excel* – pois para o aluno G4A2, com o *Excel* eles poderiam editar, ou seja, poderiam digitar a expressão matemática do modelo e construir sua representação gráfica (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Gráfico construído usando o Excel

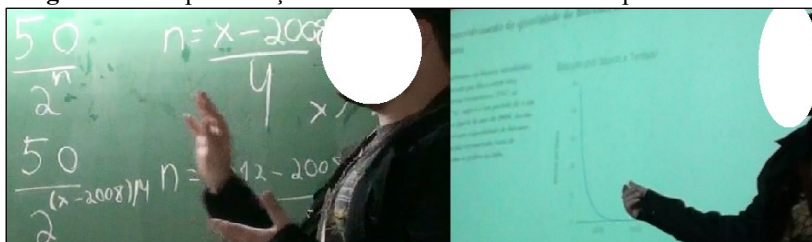


Fonte: Relatório dos alunos

De fato, neste caso, o *software* seria usado apenas para construir a representação gráfica do modelo uma vez que o grupo havia realizado sua construção algébrica sem recurso computacional. G4A2 procura expor o raciocínio do grupo nesta construção:

G4A2: *Depois de algumas frustrações, a gente resolver investigar a quantidade de moedas mineradas por bloco, porque eu estava pensando quanto tempo demoraria para que a quantidade de moedas mineradas fosse quase nula. Como a gente tem uma PG do tipo $\frac{50}{2^n}$ e n é um período de 4 em 4 anos, porque a quantidade inicial é 50, e nesse tempo ela cai pela metade, nós pensamos que para não ficar toda vez colocando de 4 em 4 anos, a gente faria $n = \frac{x-2009}{4}$. Só que assim, ia ficar estranho porque o próximo ano, que é 2012, não ia dar 4 anos. Então a gente olhou sempre para a quantidade no finalzinho do ano anterior e colocamos 2008 ao invés de 2009. Daí a gente vai ter $n = \frac{2009-2008}{4} = 1$ e assim vai dar certo.*

Figura 2.8 – Apresentação do modelo matemático feita pelo aluno G4A2



Fonte: As autoras (Captura de tela e vídeo do G4)

Assim, a expressão geral do modelo para um ano qualquer superior a 2008, os alunos obtiveram o modelo matemático $Q(x) = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{x-2008}{4}\right)}$, em que x é o tempo (dados em ano e $x \geq 2008$) e $Q(x)$ o quantidade de Bitcoin por bloco no ano x .

Feitas essas considerações da resolução do problema, o grupo concluiu, em seu relatório final que: “conforme o nosso modelo matemático, a quantidade de BTC vai

acabar no ano de 2164” – relatório escrito do G4.

RECURSOS SEMIÓTICOS NA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para buscar indícios dos recursos semióticos ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade, fazemos uma análise da ativação e usos destes recursos bem como de sua evolução no decorrer do desenvolvimento da atividade. Neste sentido, consideramos as ações dos alunos de forma holística, conjugando as análises sincrônica e diacrônica, conforme sugere Arzarello (2006).

O que se pode inferir a partir da apresentação do desenvolvimento da atividade pelos alunos é que em ambos os grupos foram ativados recursos semióticos diversificados tais como falas, gestos, *software*, calculadoras, lousa, registros escritos, gráficos.

Em cada fase do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, entretanto, a atividade semiótica foi se constituindo qualitativamente diferente, de modo que diferentes intenções, algumas vezes preexistentes à ativação do recurso semiótico, ativaram recursos específicos que colaboraram para as ações nesta fase bem como para a continuidade vislumbrada em outra fase.

Neste sentido, o texto fornecido pela professora, os gestos, as falas e discussões entre os elementos de cada grupo na fase de inteiração, constituem um pacote semiótico (pacote 1) em que os recursos de forma articulada atuavam visando avançar na organização e entendimento da situação e da formulação de um problema a ser resolvido. Os alunos do grupo G2, neste momento, tinham a intenção buscar mais informações para entender como uma moeda diferente daquela nacionalmente conhecida por todos poderia ser comercializada. O diálogo a seguir dá um indício de como o grupo se valia do recurso da fala, dos gestos, das representações gráficas fornecidas pela professora bem como daquelas que por meio de acesso à internet o grupo havia obtido.

G2A2: *A gente pode pensar que a moeda é como o nosso dinheiro, os dois tão aqui... (Figura 2.9a) aí... não tá tão popular, fica mais barato e quando tiver maior procura, o preço vai lá em cima (Figura 2.9b), a gente pode fazer isso até estabilizar, nesta curva aqui (fazendo gestos imitando o comportamento da curva exibida na tela do computador – Fig. 2.9c)*

G2A3: *Tá, mas como que a gente vai saber o preço da moeda todo dia? Desde quando? É muita coisa!*

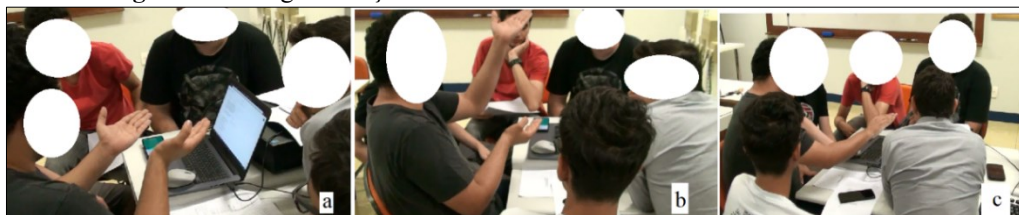
G2A1: *Então...porque isso nunca vai ficar estável. Coloca lá no site que calcula o valor do BTC... tá vendo? A moeda divide bem mais que o dinheiro... um BTC pode ser 0,00000001.*

Nesse episódio os gestos associados ao discurso de G2A2 (Figura 2.9)

aparentemente tornaram o problema compreensível para os alunos do grupo. O aluno, ao *imitar* o traçado da curva com a mão atuou de maneira a organizar o pensamento dos alunos, o que provocou uma mudança na estrutura do pacote (1), estabelecendo um novo pacote (2).

Conjuntamente os recursos semióticos ativados determinaram a criação de uma imagem mental para a investigação da situação mediada pelo uso de gráficos e testagem de valores usando a calculadora de BTC a que tiveram acesso no *site da internet*. A manipulação e a relação entre estes diferentes recursos tornou o pacote mais rico por favorecer a visualização dos dados na tela do computador. O que se pode inferir também nas imagens da Figura 2.9 é uma aparente sintonia entre os elementos do grupo de modo que o aluno G2A2 é capaz de antecipar a declaração do grupo ao *surfear* com a mão junto à tela do computador (Figura 2.9c). Neste sentido, o aluno está nesse momento, compartilhando o pacote semiótico com os demais alunos do grupo.

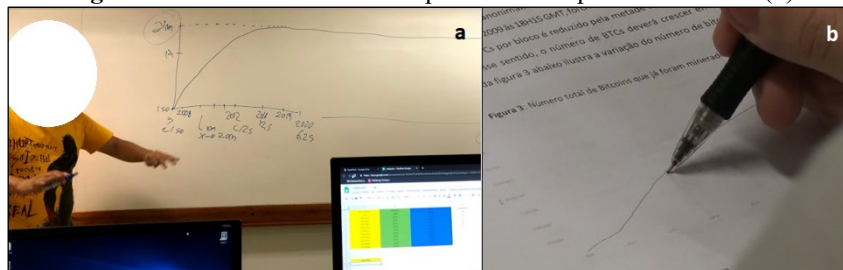
Figura 2.9 – Argumentações do aluno A2 sobre o valor monetário da moeda



Fonte: As autoras (Capturas das imagens de vídeo do G2)

Ao estabelecer um entendimento comum em relação ao que pretendiam investigar, os alunos do G2, envolvidos com os recursos semióticos ativados anteriormente, começaram a fazer inscrições e escritas matemáticas que, associados com os recursos anteriores contribuíram para o incremento do pacote semiótico, constituindo um pacote formado por gestos, gráficos, *software*, esboços e apontamentos – pacote semiótico (3) (Figura 2.10).

Figura 2.10 – Os novos recursos para formar o pacote semiótico (3)



Fonte: As autoras (Capturas das imagens de vídeo do G2)

Do ponto de vista do desenvolvimento da atividade, estes recursos de traçar no ar as curvas e depois representa-las no papel foram fundamentais para que a hipótese de que se trata de um fenômeno que é limitado e que lhe deve ser associado um valor de estabilidade fosse definida e compreendida pelos alunos.

A partir dessa hipótese, a matematização da situação requereu a intervenção da professora. Esta intervenção, mediada por gestos, falas, escritas e uso de *software* para viabilizar aos alunos o uso do método de Ford-Walford, constitui uma relação entre recursos de forma a complementá-los. Neste sentido, o pacote semiótico (pacote 4) se amplia tanto em termos da variabilidade de recursos quanto na estruturação de relações entre eles.

Durante a resolução do problema, além da escrita e do registro das relações matemáticas, os alunos usaram planilhas eletrônicas e o *software CurveExpert*. Porém, as ações do grupo ao validarem o modelo matemático, modificou o pacote semiótico. Os alunos escolheram o *software GeoGebra* para inserir a curva, ou seja, o modelo matemático que haviam encontrado. Essa ação tinha como intuito verificar a existência de uma assíntota ao arrastarem a curva exibida na tela (pacote semiótico 5).

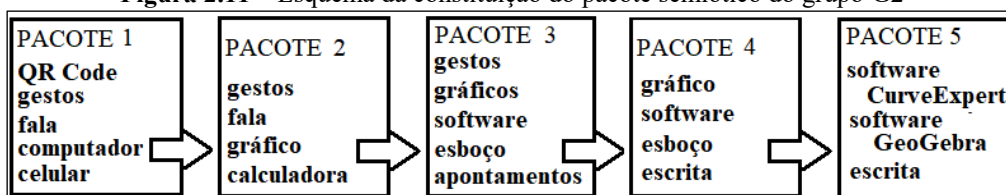
Considerando uma análise *diacrônica*, ponderamos que os pacotes (1), (2), (3), (4) e (5) constituídos no decorrer do desenvolvimento da atividade orientaram grande parte do que os alunos foram capazes de realizar sem a intervenção da professora (pacotes (1), (2), (3)) bem como o que realizaram a partir do que essa intervenção acrescentou ao que já conheciam relativamente aos conceitos de limite e de assíntota de uma função (pacotes (4) e (5)). Observamos que recursos semióticos como fala, gestos, imagens ativados pela professora produziram um significado intuitivo nos alunos relativamente ao que pretendiam estudar. Quando esses recursos foram associados às expressões matemáticas e às imagens exibidas na tela do computador, provocaram a tomada de decisão, fazendo com que os signos operassem de forma independente e também de forma complementar.

A análise sincrônica, que considera a relação entre os recursos semióticos ativados simultaneamente nos diferentes pacotes, nos leva a inferir que a articulação entre os recursos semióticos específicos para a definição da hipótese, a matematização, a resolução e a validação viabilizou a comunicação entre os alunos do grupo e também que a relação entre imagens, tabelas, gráficos fosse cuidadosamente usada para resolver o

problema. De fato, o gráfico, por exemplo, foi construído usando informações das tabelas construídas com os dados coletados e, a partir disso, esboços e relações matemáticas foram evidenciadas. A mediação semiótica desses recursos resultou em anotações compartilhadas na lousa e papel (Figura 2.3). A manipulação desses recursos provocou alguns *insights* nos alunos do grupo: inserir a mesmo modelo matemático em outro *software* na intenção de evidenciar características do fenômeno que ainda não haviam sido percebidas. A substituição de um recurso por outro mostra a intenção na modificação dos elementos do pacote como, por exemplo, a troca de um *software* por outro para validar o modelo matemático construído. Essa ação também evidencia que o pacote semiótico quando compartilhado com o grupo pode ativar a memória de eventos anteriores (no caso, o estudo de limites e de assíntotas), usando simultaneamente manipulação do *software* e registro algébrico do modelo (pacote semiótico (5)).

Podemos inferir que o desenvolvimento da atividade foi fortemente amparado pelo uso da tecnologia. Esta ação pode estar relacionada ao que Lim (2019) classifica como *convergência semântica*, considerando que a consciência do que deveriam fazer na situação em estudo na atividade evoluiu para as cognições e interpretações familiares aos sujeitos (alunos de um curso de Ciência da Computação), provocando complementaridades nos pacotes semióticos. Esta evolução e complementaridade dos recursos semióticos constituindo pacotes semióticos ativados por G2 está ilustrada na Figura 2.11.

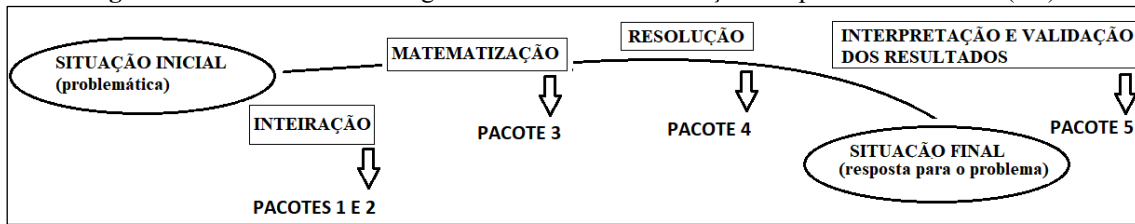
Figura 2.11 – Esquema da constituição do pacote semiótico do grupo G2



Fonte: As autoras

Para o grupo G2 a ativação de recursos semióticos e sua colaboração para o desenvolvimento da atividade de modelagem se realizou de forma concomitante, mas também complementar no decorrer das fases do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Em cada substituição de recursos ou inclusão de outro recurso semiótico foram se constituindo os pacotes semióticos conforme sugere a Figura 2.12.

Figura 2.12 – Fases da Modelagem Matemática com inserção dos pacotes semióticos (G2)



Fonte: As autoras

O desenvolvimento da atividade pelo grupo G4 iniciou com um encaminhamento diferente do grupo G2. No G4 um aluno, G4A2, tomou para si a responsabilidade de proporcionar a inteiração dos alunos do seu grupo com a temática Bitcoin. Para isso ativou os recursos *internet* e *site*, que aliados aos recursos gestos e falas, se tornariam o pacote semiótico (pacote 1) e tinham a intenção de inteirar os alunos da situação, vindo a apresentar para seus colegas a imagem conforme sugere a Figura 2.5a. Em seguida informações que pareciam aparentes nesta imagem já foram associadas a outro recurso semiótico: um software para plotar pontos identificados na imagem (Figura 2.5b).

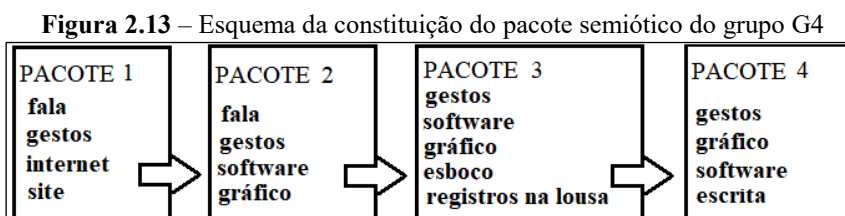
A articulação destes dois recursos, mediada por outros recursos (gestos, falas), foi suficiente para os alunos perceberem que estes seriam insuficientes para solucionar o problema proposto. Assim, comparações entre as imagens das figuras 5a e 5b, ativaram outro recurso semiótico, outro *software* capaz de testar valores e editar os parâmetros para o modelo que pretendiam construir. Assim, constitui-se o pacote semiótico (2).

A dinâmica dos recursos dos pacotes semióticos (1) e (2) está associada à intencionalidade do aluno G4A2 que se apoiava em gestos, falas e registros escritos na lousa para comunicar ao grupo suas intenções para a abordagem do problema. O aluno parecia *controlar* a variedade de recursos ativados e organizar o pensamento matemático dos demais alunos do grupo, ampliando os elementos do pacote. Suas intenções eram claramente encontrar meios para expressar seu conhecimento e apontar que uma progressão geométrica poderia descrever a quantidade de moeda restante para mineração em cada período de 4 anos (Figura 2.8). Convencer seus colegas desse comportamento e encontrar uma maneira de expressar os dados discretos da progressão em uma função contínua $Q(x) = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{x-2008}{4}\right)}$ em que a variável x indica um tempo qualquer a partir do ano de 2009, ativou nesses alunos outros recursos semióticos para além do que até então lhes era suficiente. A matematização foi viabilizada pela identificação do comportamento

dos dados descrito por uma progressão geométrica. Entretanto, a fase de resolução em que o modelo contínuo seria construído requereu o que Ernest (2006) especificou como o terceiro aspecto relativo a um sistema semiótico, em que os recursos semióticos proporcionam a relação entre signos e seus significados. Assim, as duas imagens da Figura 2.9 indicam como os diferentes recursos ativados proporcionaram o desenvolvimento da atividade, ativando meios para matematizar a situação e construir um modelo matemático, constituindo o que chamamos de pacote semiótico 3.

A observação dos valores da tabela – construída pelo grupo – viabilizou a comunicação do aluno G4A2 ao esclarecer a construção do modelo matemático. Nesse sentido, os valores da tabela associados ao modelo construído validaram o modelo bem como o uso de um pensamento baseado no conhecimento de progressão geométrica para a construção do modelo.

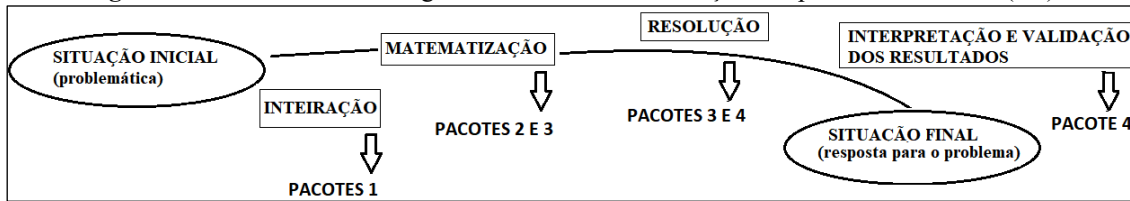
Uma análise *sincrônica* dos dados nos permite inferir que o gráfico associado com a fala e os gestos – pacote semiótico (4) – potencializou o uso de diferentes recursos semióticos, evidenciando aspectos multimodais do processo de aprendizagem. Os quatro pacotes semióticos evidenciados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática pelo grupo G4 estão apresentados na Figura 2.13.



Fonte: As autoras

A identificação dos pacotes semióticos no decorrer das diferentes fases do desenvolvimento da atividade por esse grupo nos leva a identificar uma espécie de *intersecção* entre os pacotes, o que não aconteceu com o grupo analisado anteriormente. Por exemplo, a intersecção dos pacotes (2) e (3) aconteceu justamente quando houve a necessidade de matematizar, porém os alunos trabalhavam ora com o pacote (2), ora com o pacote (3). Nesse mesmo sentido, os pacotes (3) e (4) também eram usados com duas finalidades de modo que os identificamos em duas fases diferentes do desenvolvimento da atividade. O esquema a seguir indica os pacotes semióticos associados às diferentes fases da modelagem matemática (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Fases da Modelagem Matemática com inserção dos pacotes semióticos (G4)



Fonte: As autoras

Podemos considerar que em cada pacote semiótico os recursos ativados não atuaram de forma isolada, mas colaboraram para o desenvolvimento da atividade em cada fase de modo complementar e concomitante. Neste sentido, falas, gestos, e esboços em geral eram associados a outros recursos como gráficos, informações da internet, por exemplo, de modo que associados é que estes recursos colaboram para que os alunos, em um processo dinâmico, realizassem as ações relativas a cada fase da modelagem matemática. A não linearidade das ações nessas fases também foi mediada e orientada pelos recursos que complementaram uns aos outros no decorrer do desenvolvimento da atividade.

Em particular, observamos que o uso da tecnologia foi fortemente acionado pelos alunos que fizeram uso desse recurso para diferentes propósitos. Neste sentido, entendemos que o ambiente em que o aluno está inserido amplia e viabiliza a variedade de recursos semióticos acionados, em sintonia com as argumentações de Mavers (2004) de que a atividade semiótica é também contextual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação dos recursos semióticos ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade realizada nesta pesquisa nos permite inferir que a combinação de diferentes recursos e de recursos associados a diferentes sistemas semióticos incrementa as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A ativação dos recursos semióticos bem como a sua colaboração para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática é ao mesmo tempo sincrônica e diacrônica de modo que não é possível afirmar especificamente quando um recurso atua de forma isolada ou conjuntamente com outros para potencializar a comunicação e organizar o pensamento.

A conexão entre os diferentes recursos semióticos que constituíam os elementos do pacote foi apoiada também pelo resgate de ideias matemáticas e experiências anteriores dos alunos com os conteúdos que emergiram nessa atividade de modelagem matemática. Além disso, diferentes recursos semióticos não se constituem de maneira isolada, mas são complementados na medida em que a cooperação entre os alunos do grupo e a interação com informações relativas à temática investigada na atividade foi acontecendo nos grupos. A assessoria da professora foi fundamental para que recursos semióticos fossem acionados e usados de forma colaborativa para resolver o problema.

Uma implicação dos resultados dessa pesquisa é que olhar para o pacote semiótico nos fornece elementos para evidenciar a intencionalidade dos alunos na ativação de diferentes recursos semióticos e seu uso conjunto e articulado para colaborar em cada fase do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Assim, em sintonia com a assertiva de Arzarello (2006, p. 279), de que “uma atividade matemática pode ser caracterizada pela riqueza do pacote semiótico que ela ativa” consideramos que atividades de modelagem matemática têm potencial para requerer e acionar uma variedade de recursos semióticos. Não obstante esta ativação, as ações dos alunos nas diferentes fases da modelagem ampliam a perspectiva de um uso isolado de cada recurso, tornando possível a constituição de pacotes semióticos em que os diferentes recursos se articulam e se complementam.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência & Educação** Bauru, v. 11, n. 3, p. 483 – 497, dez. 2005.

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. *Boletim de Educação Matemática*. **BOLEMA**, v. 32, p. 696 – 726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 202 – 219, 2017.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como

foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 387 – 414, dez. 2010.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Relime** – Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, Cidade do México, Número Especial, v. 9, p. 267 – 299, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.

ERNEST, P. A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 67 – 101, 2006.

FERRI, R. B. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1 – 12, 2018.

LIM, F. V. Investigating intersemiosis: a systemic functional multimodal discourse analysis of the relationship between language and gesture in classroom discourse. **Visual Communication**, National Institute of Education, Nanyang Technological University, Singapore, v. 0, p. 2 – 25, 2019.

MAVERS, D. E. **Multimodal design: the semiotic resources of children’s graphic representation**. 2004. 243 f. Tese – Universidade de Londres, Londres, 2004.

MEYER, J. F. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade.... **Com a Palavra, O Professor**, 5(11), 140 – 149, 2020.

MILDENHALL, P. M. Using semiotic resources when building images of the part-whole model of fractions. **Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia**. MERGA: Melbourne, 2013, p. 506 – 512.

MORO, L.; MORTIMER, E. F.; QUADROS, A. L.; COUTINHO, F. A. Influência de um terceiro modo semiótico na gesticulação de uma professora de Química. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação e Ciências**. v. 15, n. 1, p. 9 – 32, 2015.

O'HALLORAN, K.; BEEZER, R. A.; FARMER, D. W. A new generation of mathematics textbooks research and development. **ZDM**, v. 50, n. 5, p. 863 – 879, set. 2018.

PANERO, M.; ARZARELLO, F.; SABENA, C. The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers’ Practices with the Idea of “Generic”. **Bolema**. Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 265 – 286, abr. 2016.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F.. **Semiotics in Mathematics Education**: Epistemology, history, classroom and culture. The Netherlands: Sense Publishers, 2008.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 1ª ed. da 8ª reimpressão – São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. In: **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 61, n. 1 – 2, p. 133 – 162, 2006.

THOMAS, M. O. J.; YOON, C.; DREYFUS, T. Multimodal Use of Semiotic Resources in the Construction of Antiderivative. In: HUNTER, R.; BICKNELL, B.; BURGESS, T. (Eds.). **Crossing divides: 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Palmerston North, NZ: MERGA, 2009. p. 539 – 546.

CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2

A TECNOLOGIA DIGITAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA OS RECURSOS SEMIÓTICOS

RESUMO

No presente artigo investigamos de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Com esta finalidade levamos em consideração um quadro teórico que considera as possibilidades de produção, articulação e uso de recursos semióticos bem como a associação da tecnologia ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Consideramos também uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Ciência da Computação. As análises seguem encaminhamentos Análise de Conteúdo e dirigem-se a dados coletados por meio de gravações de áudios e vídeos das aulas em que as atividades foram desenvolvidas bem como dos relatórios das atividades entregues pelos alunos. Nossas análises nos levam a inferir que a tecnologia colabora para o desenvolvimento de atividades de modelagem, produzindo, acionando ou articulando recursos semióticos de naturezas diversas, atuando como: como fonte de informação, como meio de representação, como possibilidade de realizar cálculos, como possibilidade para gerar simulações e como articuladora de recursos semióticos produzidos e usados pelos alunos.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Recursos Semióticos, Tecnologia Digital.

INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática na Educação Matemática caracteriza-se, em termos gerais, pela possibilidade de proporcionar a abordagem de situações da realidade por meio da matemática. A esta abordagem vem sendo associadas as ferramentas digitais, ampliando as possibilidades de ação dos alunos e professores modeladores e gerando repercussões nos modos de ensinar e de aprender na sala de aula.

DeJarnette (2019) argumenta que o uso de tecnologias vem permitindo que ideias e procedimentos matemáticos sejam manipulados por meio de entradas de teclado. Neste sentido, a autonomia relativa ao uso de imagens, gráficos, tabelas, softwares ou códigos bem como os diferentes modos de relação entre eles tem sido enfatizada no ensino de

matemática como uma maneira de os alunos construírem conexões entre conceitos e procedimentos.

Arzarello (2006) argumenta que no contexto da sala de aula conjugam-se recursos linguísticos e extralinguísticos valendo-se da oralidade, da escrita e até mesmo de ferramentas da tecnologia digital, como é o caso de imagens e gráficos, por exemplo. Segundo Mavers (2004), estes recursos são os chamados recursos semióticos.

No âmbito da modelagem matemática, particularmente, o acesso e a manipulação de diferentes tipos de linguagem e de recursos podem favorecer o entendimento de uma situação da realidade por meio da matemática. (BLUM, 2015; SRIRAMAN; KAISER, G.; BLOMHØJ; GEIGER, 2011; ALMEIDA, 2018). Por outro lado, o uso da tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática também tem sido tema de interesse em muitas pesquisas da área como é o caso, por exemplo de Malheiros (2004), Dalla Vecchia, (2018); Borssoi e Almeida, (2015) ; Greefrath; Hertleif; Siller (2018); Greefrath (2011).

No presente artigo estamos interessados em investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Com esta finalidade, a partir de um quadro teórico que considera elementos relativos aos recursos semióticos bem como ao uso da tecnologia digital em atividades de modelagem matemática, analisamos atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Ciência da Computação.

QUADRO TEÓRICO

MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA E A TECNOLOGIA DIGITAL

Segundo Almeida e Brito (2005) a modelagem matemática na sala de aula visa relacionar a Matemática escolar com questões extra matemáticas. De modo geral, ela se configura como uma atividade que implica em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a construção de um modelo matemático, a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação do modelo, identificando a sua aceitabilidade ou não (BLUM, 2015; SRIRAMAN; KAISER; BLOMHØJ, 2006; ALMEIDA; FERRUZZI, 2009).

A estas ações pode se associar o uso de tecnologias digitais. Este uso da tecnologia digital em atividades de modelagem matemática tem sido temática recorrente, considerando possibilidades e contribuições que esse uso pode proporcionar para a modelagem matemática na sala de aula (GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018; BORSSOI; ALMEIDA, 2015; FREJD; ARLEBÄCK, 2017; BROWN, 2015; GEIGER, 2011; MALHEIROS, 2004, DALLA VECCHIA, 2012, entre outros). As representações dinâmicas viabilizadas pela tecnologia ampliam e aprimoram as representações matemáticas que se estendem para além das formas estáticas e impressas dos registros escritos no papel.

Borssoi e Almeida (2015) apontam que

a modelagem matemática de situações-problema associada à disponibilidade de recursos tecnológicos pode ser facilitadora da aprendizagem e é adequada para compor ambientes favoráveis para despertar a intencionalidade para aprender. (BORSSOI e ALMEIDA, 2015, p. 44)

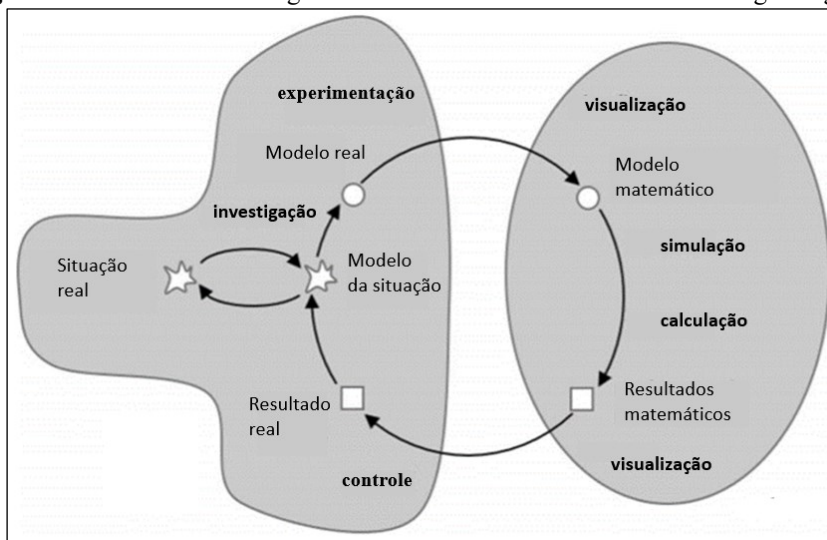
As contribuições da tecnologia no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática também se referem às possibilidades de investigação, simulação e sistematização de resultados. Segundo Geiger (2011) e Frejd e Arlebäck (2017), estas possibilidades representam avanços nos envolvimento dos alunos com a situação que querem estudar, bem como proporcionam o uso de recursos como tabelas e gráficos, por exemplo, na matematização dessa situação.

Dalla Vecchia (2012) ao associar atividades de modelagem matemática com o uso de alguns software, argumenta que modelar uma situação se torna um processo dinâmico e pedagógico em que modelos matemáticos são construídos e avaliados por meio de ideias matemáticas.

A dinâmica associada às configurações de atividades de modelagem matemática vem sendo associada a esquemas, chamados em geral de ciclos de modelagem matemática. Greefrath, Hertleif e Siller (2018) vislumbram incluir o uso de tecnologias digitais neste ciclo de modelagem matemática. Particularmente, os autores se referem a diferentes funções da tecnologia no desenvolvimento de atividades de modelagem e caracterizam especificamente seis funções. *Investigação*: pode favorecer a análise e busca de informações sobre o problema real; *experimentação*: ação que pode transformar, com a ajuda de softwares ou planilhas eletrônicas, a situação real em um modelo geométrico, por exemplo; *visualização*: viabiliza, ora evidenciar aspectos que ainda não tinham sido

notados, ora analisar e averiguar os resultados obtidos – essa função aparece em duas etapas do ciclo, pois, segundo o autor, tem diferentes finalidades; *simulação*: auxilia na exploração e na diversidade de modelos matemáticos – função muito similar à *experimentação*; *calculação*: realização de cálculos apoiada pelo uso da tecnologia; *controle*: viabiliza exercer algum controle sobre o modelo matemático construído, como, por exemplo, na determinação de parâmetros e sua influência sobre aspectos numéricos e geométricos do modelo. A Figura 3.1 ilustra a identificação das funções da tecnologia no ciclo de modelagem matemática.

Figura 3.1 – Ciclo de Modelagem Matemática incluindo o uso de tecnologias digitais



Fonte: Greefrath, Hertleif e Siller (2018, p. 234)

As funções da tecnologia apontadas por Greefrath, Hertleif e Siller (2018) em atividades de modelagem sugerem que a tecnologia pode ser uma possibilidade para evidenciar o uso de recursos diversos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. No presente artigo, dirigimos nosso olhar à tecnologia em atividades de modelagem à luz da compreensão de recursos semióticos.

TECNOLOGIA DIGITAL E RECURSOS SEMIÓTICOS

A semiótica é a ciência dos signos e para Santaella (2012) o ponto central de uma abordagem semiótica remete às possibilidades dos diferentes modos e processos sógnicos e sua função comunicativa.

Para Steinbring (2006), no âmbito das aulas de matemática,

[...] os signos não têm significado próprio, mas esse deve ser produzido pelo aluno por meio de mediações e para contextos de referência específicos. Essa mediação não é subjetiva e arbitrária e a relação com os objetos de referência é também determinada por condições epistemológicas (STEINBRING, 2006, p. 157).

A identificação de relações entre objetos e contextos em matemática está fortemente relacionada ao uso de recursos que proporcionam o pensamento visual e analítico (HACIOMEROGLU; ASPINWALL; PRESMEG, 2010; YOON; THOMAS; DREYFUS; 2009). O aprender matemática, neste contexto, envolve uma rede de representações e o entendimento é mediado por conexões entre os procedimentos e conceitos matemáticos.

Neste sentido, é preciso considerar também signos menos convencionais, mas que fazem parte do processo de comunicação que acontece na sala de aula. No contexto da produção e manipulação destes signos emerge a ideia de *recursos semióticos* (ARZARELLO, 2006; MAVERS, 2004; O'HALLORAN; BEEZER; FARMER, 2018).

A noção de *recursos semióticos* remete à identificação de diferentes recursos escolhidos pelos sujeitos, voluntaria ou involuntariamente, na construção e uso de signos de naturezas diversas. Mavers (2004) entende que os recursos semióticos envolvem ações e artefatos¹⁷ que os sujeitos usam para fins comunicativos. Segundo o autor, os sujeitos combinam o uso de recursos linguísticos e extralinguísticos de modo que gestos, olhares, registros escritos, *software*, expressões matemáticas e imagens gráficas, entre outros, constituem recursos semióticos.

Assim, a tecnologia digital pode ser considerada como uma possibilidade de ativar e de produzir recursos semióticos diversos. Neste sentido, para Nöth (2001), não há dúvidas de que máquinas processam signos e assim, o computador é certamente uma máquina que opera com signos. A experiência do usuário com a máquina e a sua capacidade de utilizá-la para executar operações lógicas, ler e articular signos está alocada na relação do usuário, que no caso da sala de aula é o aluno, com a interface da máquina ou do software. A possibilidade de investigar os dados em uma tabela, por exemplo, pode estar associada à ação de experimentar com diferentes expressões algébricas, gráficas ou

¹⁷ Segundo o dicionário de filosofia Abbagnano (2007) trata-se de um objeto produzido por qualquer atividade humana. Para ser considerado artefato, o objeto deve manifestar a intenção, preexistente à sua construção, de utilizá-lo com finalidade determinada.

geométricas para além daquelas que registros convencionais podem produzir.

Neste sentido, as interações com a tecnologia digital fazem dela um mediador semiótico na busca da compreensão do objeto matemático e na organização da construção do conhecimento. Yoon, Thomas e Dreyfus (2009) apontam que as múltiplas representações são entidades passivas e é o engajamento ativo do aluno que as transforma em recursos semióticos. Nesse mesmo sentido Brown (2015) pondera que o uso de imagens geradas por tecnologia constitui uma tática de visualização relevante e atribui ao uso da tecnologia na sala de aula um papel transformador.

O acesso à tecnologia digital proporciona ao aluno novas experiências, permitindo a criação e a elaboração de signos associadas à capacidade de perceber padrões e regularidades, bem como interagir com diferentes técnicas e conceitos matemáticos (O'HALLORAN; BEEZER; FARMER, 2018; YOON; THOMAS; DREYFUS; 2009; YEH; NASON, 2004). Neste sentido, se caracteriza o potencial semiótico da tecnologia.

No âmbito da modelagem matemática, Frejd e Arlebäck (2017, p. 526) acrescentam que os recentes avanços da tecnologia e o aumento do acesso dos alunos às ferramentas digitais “mudaram as possibilidades de participar de simulações realistas (aplicativos)” e com isso, incluíram novas dimensões ao ensino e aprendizagem usando modelagem matemática.

No presente artigo, particularmente, interessa-nos investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

ASPECTOS METODOLÓGICOS E DADOS EMPÍRICOS DA PESQUISA

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, associamos ao quadro teórico uma pesquisa empírica, baseada no desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática.

Para subsidiar nossas argumentações seguimos os caminhos da análise de conteúdo (BARDIN, 2011) como uma metodologia da análise de dados de uma pesquisa qualitativa. Para Bardin (2011) a análise de conteúdo considera três fases cronológicas: *pré-análise; exploração do material; tratamento dos resultados e interpretação.*

A *pré-análise*, fase de organização dos dados da pesquisa, definiu o *corpus* da nossa pesquisa. O *corpus* dessa pesquisa se constitui de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por 34 alunos de um curso de Ciência da Computação separados em 6 grupos, que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), ministrada por uma das autoras do presente artigo.

Durante a *exploração do material* o *corpus* foi delimitado a dois desses grupos, considerando as especificidades das atividades que desenvolveram e a qualidade dos dados coletados. O grupo 1 (G1), com 6 alunos (G1A1 a G1A6) e o grupo 4 (G4), com 4 alunos (G4A1 a G4A4). A escolha desta nomeação se deu de maneira aleatória garantindo assim, o sigilo na identidade dos alunos. Os alunos estavam cientes da pesquisa, sendo esta realizada usando termo de consentimento livre e esclarecido¹⁸.

Os dados foram coletados por meio de gravações em áudio, vídeos e tela do computador com a utilização do *software* OBS¹⁹ que permitiu registrar simultaneamente as falas e as capturas de telas dos alunos, além das observações de diário de campo realizadas pela professora pesquisadora no decorrer das aulas. Todos os materiais e relatórios foram postados pelos grupos na plataforma *Google Classroom*²⁰, adotado pela professora como ferramenta de ensino e pesquisa.

Por fim, na fase de *tratamento dos resultados e interpretação*, procedemos à análise interpretativa dos dados à luz do quadro teórico a partir da qual construímos categorias relativas ao uso da tecnologia digital nas atividades desenvolvidas pelos alunos.

AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Fazem parte da pesquisa empírica a que nos referimos no presente artigo duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por dois grupos de alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Para estas atividades os temas de interesse foram escolhidos pelos próprios alunos. Um dos grupos, referido aqui como G1, escolheu a temática Lei de Moore, referindo-se ao título de sua atividade como Validando a Lei de

¹⁸ Conforme anexo A desse trabalho.

¹⁹ *Open Broadcaster Software*: permite a gravação de tela e áudio simultaneamente.

²⁰ Aplicativo da *Google Apps*[®] que se configura como um recurso voltado para as práticas de Educação. A instituição possui parceria com a *Google for Education*[®] onde os alunos possuem livre acesso às ferramentas disponíveis na plataforma.

Moore. O outro grupo, G4, se interessou pelo tema A Bomba do Jogo *Bombberman*, referindo-se a uma série de jogos eletrônicos de estratégias. As atividades foram desenvolvidas no decorrer de seis aulas e a professora atuou nestas aulas como colaboradora, assessorando e orientando os alunos sempre que solicitada, bem como para validar as produções dos alunos.

ATIVIDADE 1: VALIDANDO A LEI DE MOORE

No final da década de 50 a indústria de eletrônicos sofreu uma grande revolução: a substituição de válvulas a vácuo, em geral grandes, por transistores, que começaram a ficar cada vez menores.

Publicada pela primeira vez na *Electronics Magazine* 1965 pelo físico Gordon Moore, a chamada Lei de Moore ditou o ritmo na evolução da indústria de chips para computadores. A Lei dita que o número de transistores de um processador dobra a cada ano e meio, mantendo o custo e o espaço ocupado. Ou seja, significa que a capacidade de um processador tem um aumento de 100% a cada 18 meses. Essa afirmação ficou conhecida como *Lei de Moore* e sua testagem foi iniciada em 1971 considerando 2300 transistores.

O tema desta atividade foi proposto pelos alunos do grupo G1 que justificaram a sua escolha pelo fato de não haver um consenso no ramo tecnológico em relação à validade da Lei de Moore – a literatura questiona a validade da lei atualmente. Além disso, a motivação dos alunos também atende aos interesses daqueles que se dirigem a estudar o desenvolvimento de microprocessadores.

No grupo (G1) inicialmente os alunos estavam motivados pelo questionamento: *A Lei de Moore ainda é válida?* – de modo que esse era o problema do grupo. Então decidiram coletar dados relativos ao número de transistores existentes até hoje e observar os dados em comparação com a previsão estabelecida pela lei de Moore.

Durante a busca por informações da situação, feita em sites e artigos encontrados na internet, o grupo optou por analisar apenas os chips de *desktop* (computadores de mesa) das empresas AMD e Intel, justificando serem as principais do setor e que lideram o mercado de CPUs (Unidade central de processamento).

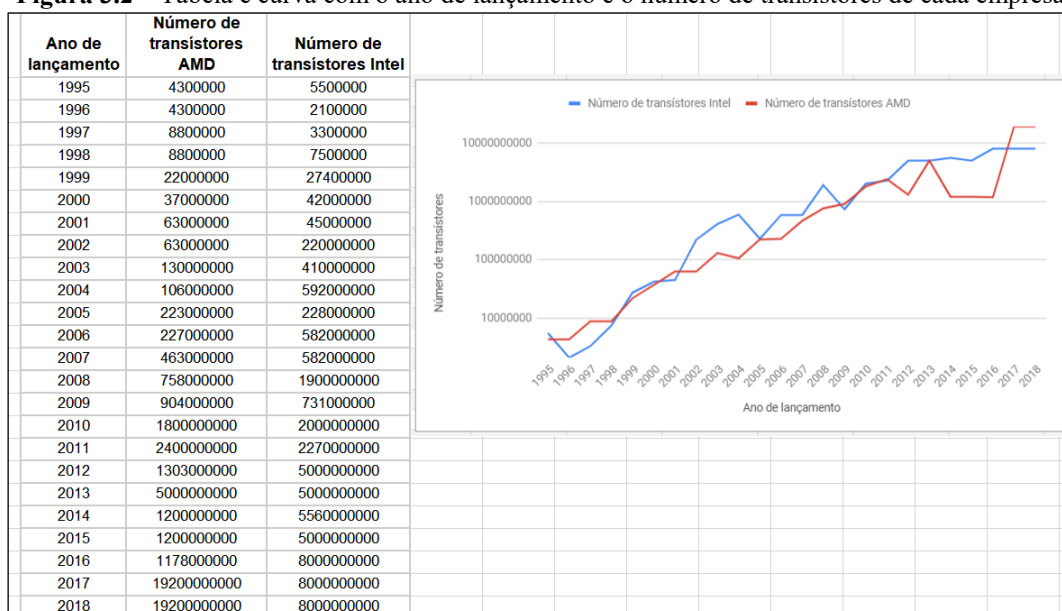
Para isso usaram os contadores de transistores *Tech power up* e *Cpu-collection* que estão disponíveis em sites na internet e apresentam em sua plataforma informações

sobre os processadores, permitindo obter o ano e o lançamento de cada transistor. O uso de dois contadores para a coleta dos dados foi justificado pelo grupo: “o *Tech power up* só apresenta os dados a partir do ano 2000” – relatório escrito do grupo G1.

O uso e a manipulação destes contadores permitiu ao grupo fazer algumas escolhas, como por exemplo, definir o período que iriam usar – a partir do ano de 1995, pois somente após esse ano havia uma frequência anual de lançamentos, provocando uma primeira simplificação da situação-problema.

Com os dados coletados e organizados em uma tabela com o ano de lançamento e o número de transistores de cada fabricante (AMD e Intel), os alunos do grupo encontraram duas curvas usando um *software* de planilhas (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Tabela e curva com o ano de lançamento e o número de transistores de cada empresa



Fonte: Relatório e arquivos digitais do grupo (G1)

A partir da observação dos valores da tabela e do gráfico apresentado, um dos alunos do grupo fez a seguinte observação: *as duas empresas crescem na mesma taxa!* – fala do aluno G1A2. Nessa fala aluno relatava aos demais que as empresas desenvolvem seus transistores simultaneamente e ainda acrescenta: *dá pra gente ver que elas evoluem juntas.*

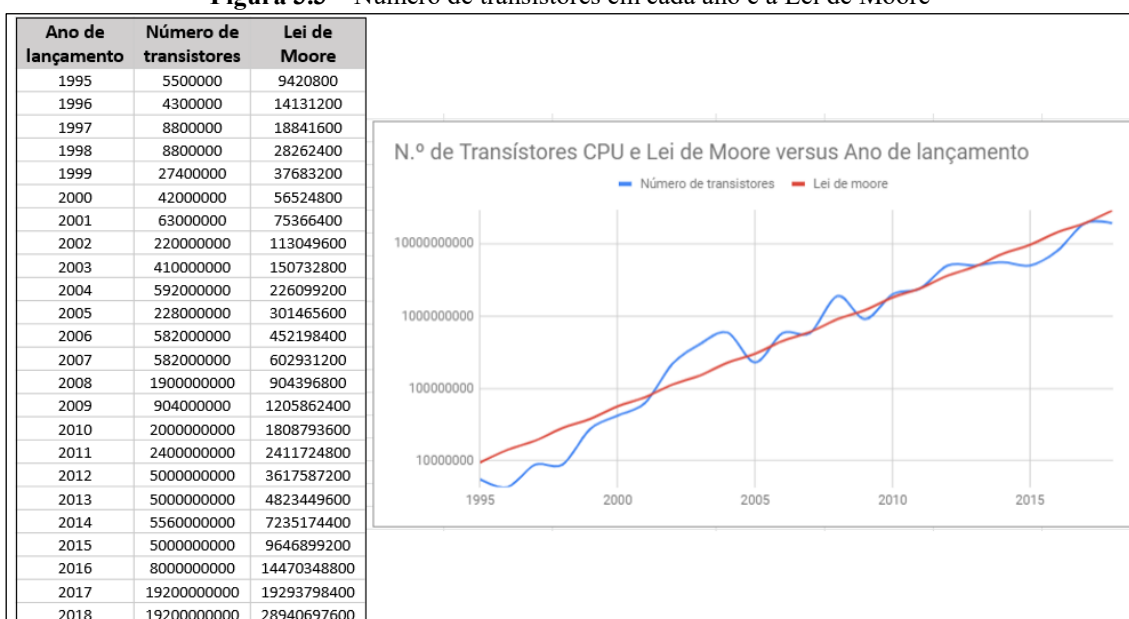
Diante dessa ação, o aluno G1A2 propôs para o grupo que escolhessem uma empresa por ano – a que tivesse o maior número de transistores. E ainda acrescenta durante a apresentação da atividade o comentário apresentado a seguir.

G1A2: *Esta foi a fase mais complicada do trabalho, escolhemos apenas um lançamento por ano,*

não importando a empresa. Isso facilitou a visualização da curva gerada e, na verdade, é isso que faz a lei, considera apenas maior quantidade de transistores daquele ano.

Dando sequência ao desenvolvimento da atividade, os alunos construíram uma nova tabela com o ano e o número de transistores naquele ano. Além disso, os alunos inseriram uma coluna na tabela que apresentasse o comportamento da Lei de Moore naquele ano. Para isso, usaram a informação: o número de transistores dobra a cada ano e meio, iniciando em 1971 com 2300 transistores. E, com o auxílio de um *software* de planilhas, os alunos *plotaram* um novo gráfico com os dados dessa tabela (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Número de transistores em cada ano e a Lei de Moore



Fonte: Captura de tela feita pelas autoras (Relatório do grupo – G1)

A partir da observação do gráfico o aluno G1A2 deu a seguinte sugestão: “*E se a gente comparar a taxa de crescimento das curvas usando a derivada da função?*” – este era um conteúdo que os alunos haviam estudado na disciplina²¹.

Motivados por essa fala, os alunos estavam em busca de uma representação algébrica destas curvas. Os alunos optaram por colocar os dados da tabela (Figura 3) no *software CurveExpert*²², encontrando por meio da ferramenta *Data Tool* uma expressão algébrica para cada curva: número de transistores (y_1) em relação ao ano x ; número de

²¹ Definição usada pela professora: análise do comportamento de funções exponenciais que crescem muito rápido: estudo da notação *ozinho* e *ozão*, para análise no comportamento de *softwares*. Ver Thomas, Weir e Hass (2012)

²² *Software* utilizado no ajuste de curvas e análise de dados. Disponível em: www.curveexpert.net.

transistores previstos – Lei de Moore (y_2) em relação ao ano x – ver Figura 3.4.

Figura 3.4 – Modelo matemático de cada curva

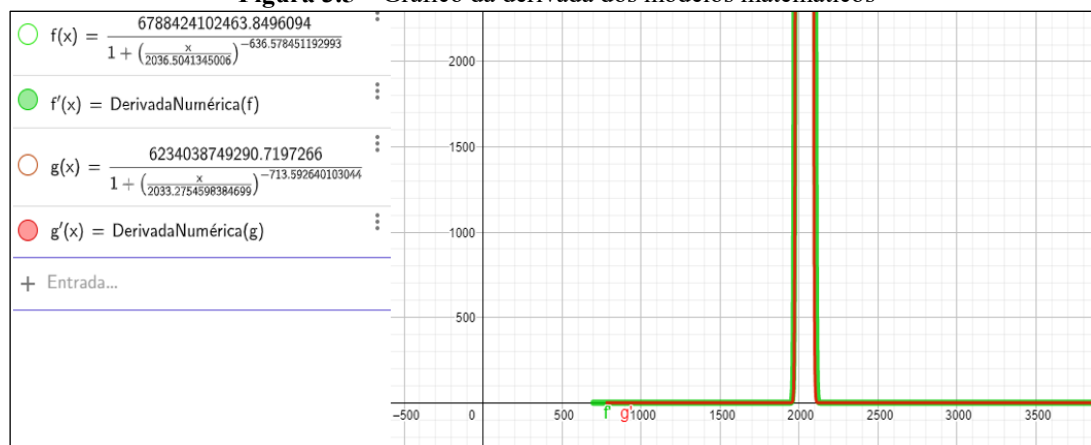
Número de transistores (CPU)	$y_1 = \frac{6\,234\,038\,749\,290}{1 + \left(\frac{x}{2\,033}\right)^{-713}}$
Lei de Moore (CPU)	$y_2 = \frac{6\,788\,424\,102\,463}{1 + \left(\frac{x}{2\,037}\right)^{-636}}$

Fonte: Relatório do grupo (G1)

De posse dos modelos matemáticos de cada curva, os alunos buscaram outros dois softwares: *Symbolab* e *Wolfram Alpha* – classificados na literatura como CAS²³. Os alunos do grupo (G1) estavam em busca da taxa de variação das curvas para segundo eles: *ver se eles crescem na mesma taxa*, usando os softwares para calcular a derivada dos modelos matemáticos. Porém, a escolha destes softwares, segundo o relato do grupo, não foi suficiente para investigar o que pretendiam anteriormente, pois, “*as curvas tinham seus modelos variando muito próximos*” – fala do aluno G1A2.

A escolha agora era por um software de DGS²⁴ – Geogebra – pois segundo o aluno G1A1 eles poderiam *ver o gráfico da derivada dos dois modelos e comparar a sua taxa de variação* – fala do aluno G1A1 (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Gráfico da derivada dos modelos matemáticos



Fonte: Relatório e arquivo digital do grupo (G1)

Ao observarem uma proximidade entre a taxa de variação das curvas com o uso do GeoGebra, os alunos confirmaram o que pretendiam investigar: “o gráfico confirma

²³ Sigla para *Computer Algebra System*: software que apoia o cálculo matemático na matemática simbólica.
²⁴ Sigla para *Dynamic Geometry System* ou Software de Geometria Dinâmica.

que as curvas crescem de modo similar e reafirma a proximidade dos valores” – relatório escrito do grupo (G1).

As representações produzidas pela manipulação do *software*, apoiou o grupo na observação de diferentes relações e representações do mesmo objeto matemático. Além disso, as ações advindas desta manipulação evidenciaram algumas habilidades conceituais: estudo dos dados, representação gráfica, dedução do modelo matemático, interpretação dos resultados e a validação do modelo matemático.

Por fim, o grupo concluiu em seu trabalho que não é possível afirmar que há uma estagnação ou a quebra da Lei e relatam: “a Lei de Moore ainda é válida no intervalo de tempo analisado” – relatório escrito do grupo (G1). Para além desta investigação, os alunos justificam que as empresas AMD e Intel suprem isoladamente a Lei, sendo possível encontrar indícios de concorrência entre elas e que, atualmente, a Intel lidera o número de transistores em *chips* topo de linha – informação considerada notável pelos alunos do grupo.

ATIVIDADE 2: A BOMBA DO JOGO BOMBERMAN

Este tema foi escolhido pelo grupo G4 que tinha como objetivo investigar: *qual é a potência da bomba do jogo Bomberman e qual o seu efeito de explosão, caso ela existisse na realidade?* Entendemos que a justificativa pela escolha do tema está relacionada à participação de um dos alunos do grupo em um projeto que envolve a construção de jogos educativos na instituição. A Figura 3.6 apresenta o cenário do jogo exibido pelo grupo em seu relatório.

Figura 3.6 – Excerto das informações do jogo (G4)

O *Bomberman* é o nome de um jogo virtual publicado pela Hudson Soft Company – empresa japonesa de entretenimento eletrônico. O cenário é uma fábrica de bombas, onde o personagem – um robô que recebe o nome do jogo – carrega uma bomba. Esta bomba explode depois de um tempo, criando uma cruz de fogo, que se torna mais potente conforme o jogador coleta *Power ups* (SOFT, 1983)

Fonte: Relatório escrito do grupo (G4).

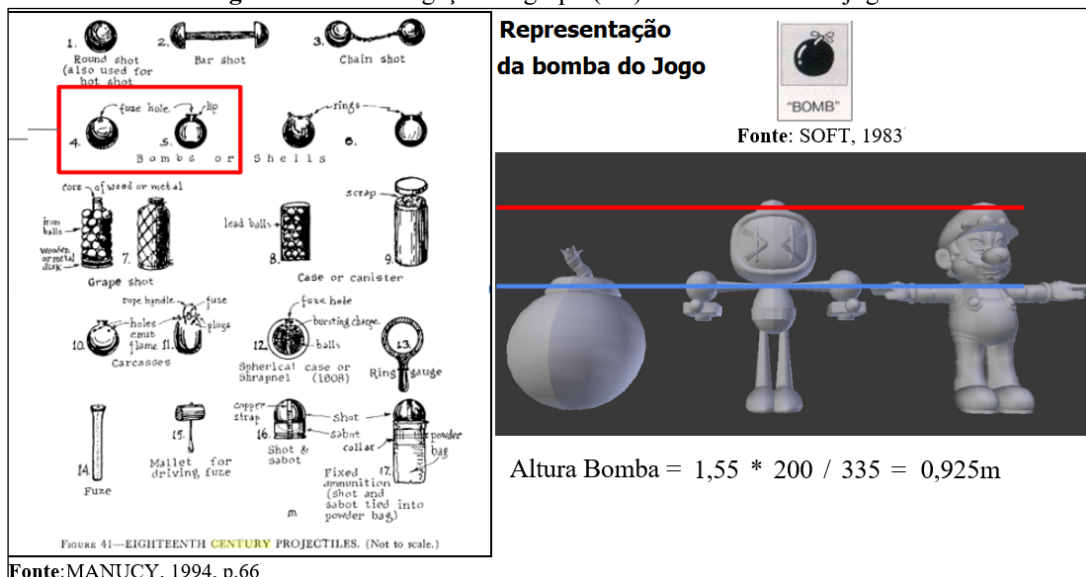
Durante a investigação dos dados em relação à situação-problema, um dos alunos do grupo (G4A1) se manifestou em relação a bomba que, segundo ele, esse era o foco da investigação:

G4A1: *a gente não sabe o que tem dentro, não sabe como funciona [...] mas primeiro a gente tem que descobrir o tamanho da bomba, porque o tamanho da bomba importa o quão forte ela é.*

De acordo com esta fala, os alunos dos grupos fizeram uma investigação em relação ao tipo de bomba usado pelo personagem do jogo, que conduziu na elaboração de uma definição para da bomba: *uma bola preta com um pavio branco saindo de sua extremidade superior...que é exatamente a bomba do jogo!* – fala do aluno G4A1 ao evidenciar algumas semelhanças entre a bomba do jogo e um artigo de modelos de munição.

Feita a escolha da bomba, os alunos dão início ao cálculo com a finalidade de encontrar o seu tamanho real. O aluno G4A1, enuncia: *Mas acontece que a gente não conseguiu descobrir o tamanho da bomba! Mas...o Bomberman e o Mário já apareceram juntos e podemos fazer esta proporção.* Envolvidos com a fala desse aluno, o grupo decide utilizar outro personagem – *Mário Bros®* com 1,55 m – para que pudessem encontrar a altura da bomba, ou seja, seu diâmetro. O grupo utilizou o *software Blender25* na intenção de encontrar uma proporção em relação ao personagem *Mário* – criado pela mesma empresa – usando como unidade de medida, o número de *pixels*. Com isso, o grupo encontrou que a bomba teria 200 *pixels*, o que representa 0,925 m de diâmetro. (Figura 3.7).

Figura 3.7 – Investigação do grupo (G4) sobre a bomba do jogo



Fonte: Captura de tela feita pelas autoras (Relatório do grupo – G1)

25 A ferramenta *Blender* é usada para modelar, animar e editar vídeo. <<https://www.blender.org>>.

Outras informações em relação ao problema também foram relatadas pelo grupo: “a quantidade de pólvora que tem na bomba é totalmente relevante para sabermos da sua capacidade de explosão” – relatório escrito do G1.

Com o objetivo de encontrar o diâmetro, o volume e o peso da bomba, os alunos utilizaram planilhas eletrônicas para auxiliar na matematização do problema (Figura 3.8).

Seguindo no desenvolvimento do problema, os alunos do grupo utilizaram uma ferramenta fornecida no *site* da ONU²⁶ que calcula o potencial de destruição de uma bomba contendo diversos tipos de explosivos – o grupo optou pela pólvora de TNT. De acordo com as pesquisas feitas pelos alunos, 1 kg de pólvora libera 3,878 MJ de energia durante a sua queima e 1 kg de TNT tem potencial energético de 4,186 MJ. E, com o auxílio do site, encontraram que a bomba possui 151,76 kg de TNT.

Figura 3.8 – Excerto das considerações e dos cálculos do problema

Sendo que a altura da bomba é igual ao seu diâmetro sabemos que, através da medição de pixels que o diâmetro da câmara interna da bomba é proporcional 24/32 do diâmetro total da bomba. Desconsiderando o pavio temos uma esfera oca de Ferro Fundido e um volume máximo de Pólvora contido na bomba. Ferro Fundido tem uma densidade 7,2g/cm ³ . Enquanto isso, o manual de instruções publicado por Lee Precision Inc (2017) consta que 16 Onças líquidas de pólvora equivalem a 1 Libra americana. Considerando uma Onça líquida igual a 30 cm ³ e 1 Libra igual a 0,45 Kg, obtemos as seguintes tabelas:					
Cálculo do diâmetro para volume interno da bomba					
Diâmetro Bomba (cm)	Diâmetro Interno (cm)	Volume total (cm ³)	Volume interno (cm ³)	Volume Casco (cm ³)	
33	24,75	18807,03	7934,215781	10872,81422	
92,5	69,375	414193,8021	174738,0103	239455,7918	
Cálculo do volume e o peso da bomba					
Volume interno (cm ³)	Volume Casco (cm ³)	Peso Casco (Kg)	Volume Interno (Onça)	Peso Pólvora (kg)	Peso Bomba (kg)
7934,215781	10872,81422	78,28426238	264,4738594	7,438327295	85,72258967
174738,0103	239455,7918	1724,081701	5824,600342	163,8168846	1887,898586

Fonte: Relatório do grupo (G4).

Além disso, o grupo observou que o raio da morte instantânea em uma possível explosão da bomba (chamada por eles de bomba realística) era de 12,31 m (Figura 3.9). Ainda com o auxílio do site, os alunos compararam o raio de alcance real da bomba e raio de alcance do jogo, retomando o contexto inicial problema. Para isso, os alunos consideraram cada bloco na parede do jogo com 1 m de comprimento (ver esquema da

²⁶ Sigla para Organização das Nações Unidas; esta ferramenta está disponível em <https://www.un.org/disarmament/un-safeguard/explosion-consequence-analysis/>.

Figura 3.9) e, considerando que cada bloco da parede poderia representar a quantidade de um *Power up*, o raio de explosão da bomba (12,31 m) coincide com o raio de explosão máxima do jogo (12 m).

Figura 3.9 – Comparação entre os dados obtidos no site e o contexto do jogo

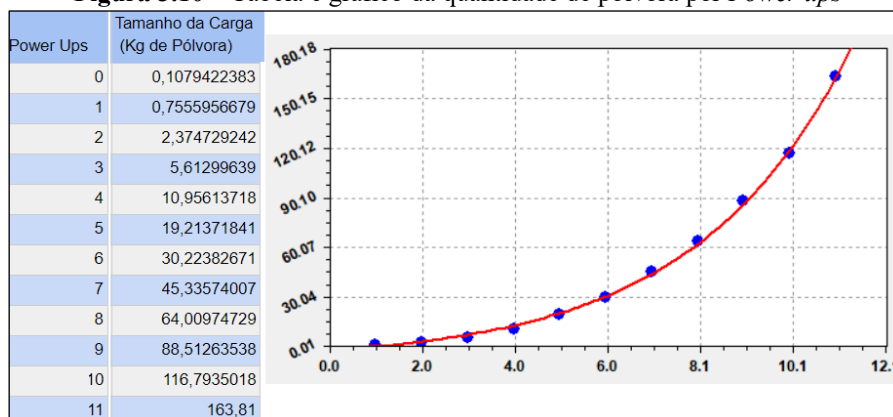


Fonte: Relatório e arquivo digital do grupo (G4)

O aluno G4A1 sugeriu ao grupo que colocassem esses dados (encontrados no site e no contexto do jogo em uma tabela) e, em seguida, usassem o CurveExpert para, *ver se existe alguma relação entre a quantidade de pólvora na bomba com o número de Power ups do Bomberman*. Tal ação levou os alunos a ‘escolherem’ uma curva, considerada por eles como a ideal descrita em termos de $f(x) = -6,85241(1,349977 - e^{0,293278x})$ que relaciona a quantidade de pólvora na bomba (y) em relação ao número de *Power ups* (x) (Figura 3.10).

Com isso, os alunos do grupo (G4) encontraram que a quantidade máxima de pólvora, ou seja, quando coletadas a quantidade máxima de *Power ups* no jogo, é de 163, 81 Kg de pólvora (ou o equivalente a 151, 76 Kg de TNT) e, caso existisse na realidade, teria um raio de fatalidade pessoal de 12,31 m de distância.

Figura 3.10 – Tabela e gráfico da quantidade de pólvora por *Power ups*



Fonte: Captura de tela feita pelas autoras (Relatório do grupo –G4)

Para validar a expressão que determinou o modelo matemático definido pelo grupo (G4), os alunos usaram novamente o site da ONU com o intuito de verificar o raio de alcance da bomba em relação ao que foi definido anteriormente: o raio de explosão da bomba, coincide com a capacidade de explosão de um *Power up*. Essa ação provocou a seguinte fala: *foi muito legal, pois os cálculos que encontramos da bomba encaixou-se com uma exatidão surpreendente em relação ao alcance da bomba no mapa do jogo – G4A1.*

Os signos produzidos através da manipulação do software, favoreceram o grupo em diferentes ações e evidenciaram algumas habilidades conceituais: os alunos puderam relacionar o problema estudado com o cotidiano, dedução do modelo e da solução matemática do problema.

O USO DA TECNOLOGIA DIGITAL EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando nosso objetivo de *investigar de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática*, dirigimos nossa atenção ao uso da tecnologia digital pelos alunos no desenvolvimento das atividades.

Nesse sentido, considerando o ciclo de modelagem incluindo os usos da tecnologia digital (GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018) procuramos percorrer os caminhos adotados por cada um dos grupos com o intuito de evidenciar a ação

correspondente ao uso da tecnologia digital durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Na atividade *A Lei de Moore*, desenvolvida pelos alunos do grupo (G1), verificamos que durante a investigação da situação-problema feita em sites na internet e as interações entre os alunos, produziram signos em relação à estrutura do problema: o uso de contadores on-line para investigar os dados. A apropriação deste recurso de forma consistente fez com que o grupo percebesse algumas regularidades, levando a uma simplificação da situação: a escolha das empresas AMD e Intel. O engajamento dos alunos do grupo nesse momento estava associado às falas e às buscas dos dados relativos à situação.

Porém, a situação a ser investigada mudou depois que os alunos observaram os dados no gráfico. A ação de experimentar a relação gráfica entre os dados das empresas por meio de um software de planilhas, gerou uma nova interpretação da situação, conforme indica o excerto de um diálogo dos alunos a seguir.

G1A1: *Para a AMD, a curva apresenta uma queda entre 2013 e 2016, porém a partir deste ano, há um crescimento acelerado e a empresa toma a liderança.* (acompanhando com o dedo o comportamento da curva)

G1A2: *E também, entre os anos de 2001 e 2005 e de 2013 a 2015 a gente vê que tem distanciamento entre os números de transistores nos lançamentos das empresas.*

G1A1: *Com isso dá pra gente concluir uma coisa legal: a Intel tem mais números de transistores que a AMD, ela tá na liderança neste caso.*

A partir desse diálogo e ao observarem o comportamento das duas curvas no mesmo gráfico, apoiados pelo uso de gestos indicando a aproximação e o distanciamento entre as curvas, produziu-se uma reorganização no entendimento da situação, levando os alunos a optar por uma empresa por ano. Podemos inferir que a visualização dos dados associada ao uso de diferentes recursos alinha-se com os diferentes modos representativos da informação. Além disso, a manipulação destes recursos provocou uma representação mental da situação nos alunos.

Com os dados coletados e organizados, os alunos usaram novamente o software de planilhas para inserir o comportamento da Lei de Moore e comparar com a escolha de uma só empresa por ano. Nesse momento o uso do software favoreceu na calculação da Lei de Moore. O fato de arrastar a célula no software para criação de uma nova coluna na tabela provocou uma reflexão e a articulação de diferentes modos de representação dos

dados. Plotaram ambas as curvas no mesmo gráfico, agora no intuito de comparar e visualizar o comportamento da Lei de Moore com os dados do gráfico.

Nesse sentido, a manipulação do software promoveu a construção de novas representações matemáticas, retratando no grupo ideias matemáticas vivenciadas em situações anteriores: o conceito de derivada. Com isso, podemos inferir que o uso dos diferentes recursos semióticos para esse grupo favoreceu a compreensão do problema, fez com que os signos se tornassem verdadeiros signos matemáticos.

Ao estabelecerem uma relação entre as curvas motivados por uma representação algébrica, os alunos usaram o software *CurveExpert*. A ação dos alunos ao experimentarem diferentes curvas que se ajustavam aos pontos do gráfico corroborou na matematização da situação. A busca por uma expressão algébrica para determinar uma regularidade nos pontos da curva ocasionou a escolha de um novo recurso para determinar a taxa de variação das curvas usando o software de CAS (*Symolab* e *Wolfram Alpha*).

Nesse caso, tanto a escolha do software quanto à escolha da curva pelos alunos foi suportada pelo uso da tecnologia. Nesse sentido, as ações e a capacidade de matematizar e trabalhar matematicamente garantiu a redução dos processos esquemáticos fornecidos pelo uso da ferramenta.

No entanto, tal ação provocou a substituição de um software (CAS) por outro (DGS, no caso o GeoGebra). Para Greefrath, Hertleif e Siller (2018) o uso de DGS durante o processo de modelagem coloca em ênfase diferentes representações gráficas. Esse fato alinha-se com as perspectivas apontadas pelos autores, pois nesse caso, os alunos do grupo G1 voltaram a observar a situação por meio da visualização gráfica da derivada dos modelos matemáticos encontrados.

Além disso, ao fazerem o uso de GeoGebra, foram favorecidos pela produção de novos signos em relação ao problema, conforme sugere a fala do aluno a seguir:

G1A2: *Quando usamos os dois softwares (referindo-se ao Symolab e ao Wolfram Alpha, ambos software de CAS) para achar a derivada, dava sempre uma indeterminação e por mais que a gente derivasse de novo, as derivações retornavam a zero... a gente imagina que essas taxas possuem valores muito próximos. Daí a gente fez no GeoGebra.*

Essa fala do aluno G1A2 durante a apresentação do problema para a turma sugere que os alunos só conseguiram determinar a taxa de variação com o uso do GeoGebra. Nesse sentido, a representação gráfica da derivada auxiliou no processo cognitivo dos

alunos do grupo. As interações dos alunos por meio de falas e gestos colaborou na identificação de representações relevantes para o mesmo objeto matemático.

Haciomeroglu, Aspinwall, Presmeg (2010) defendem que o ensino de cálculo usando representações gráficas visuais, além das algébricas e numéricas, é fundamental para a aprendizagem dos alunos. No caso do grupo G1, a visualização ajudou na compreensão dos dados do problema, na relação entre os dois modelos matemáticos e na representação gráfica da derivada para validar o modelo. Com isso, os recursos semióticos utilizados pelos alunos no desenvolvimento da atividade, além de favorecer a comunicação, favoreceram os diferentes modos de representação.

Em nossas análises, constatamos que as representações vinculadas ao uso da tecnologia digital (gráficas, numéricas e simbólicas) para esse grupo (G1), associadas a outros recursos como gestos e falas se articularam de modo que pudessem encontrar e aceitar a solução para o problema. Com o uso da tecnologia as manipulações simbólicas, associaram-se ao uso de gráficos e valores de tabelas.

Neste caso, entendemos que a tecnologia foi usada pelos alunos do (G1) em conformidade com o que sugere Geiger (2011, p. 311), como um “agente provocativo para estimular a exploração de conceitos matemáticos”. A mudança na estrutura semiótica da atividade foi influenciada pelos objetivos dos alunos ao usarem a tecnologia, ocasionando, principalmente no caso desse grupo, a visualização do objeto matemático.

Ao iniciarmos a análise da atividade *A bomba do jogo Bomberman*, desenvolvida pelo grupo G4 destacamos que essa situação é um forte exemplo da grande influência da tecnologia digital na sala de aula: a simulação. Para Greefreth, Hertleif e Siller (2018) e Frejd e Arlebäck (2017), uma simulação torna-se especialmente importante, graças às capacidades informáticas disponíveis atualmente, justificando a importância da tecnologia digital na modelagem matemática.

Na análise desse grupo (G4) entendemos que a simulação (o desenvolvimento da atividade) ocorreu em dois momentos específicos: ora para investigar e matematizar os dados da bomba ora para investigar a sua capacidade de explosão.

Durante a investigação das características da bomba, o uso de sites e artigos na internet foi fundamental. Amparados pelo uso destes recursos para investigar e idealizar o aspecto da bomba, os alunos do grupo (G4) tomaram a decisão de usar um personagem

virtual – que tem a sua medida real declarada – para que pudessem calcular usando proporção o tamanho real da bomba.

Ainda no o intuito de trazer os dados do jogo para a realidade, um dos alunos do grupo sugeriu a escolha do software *Blender* para que pudessem fazer uma comparação com a bomba e o personagem optando pela unidade de medida *pixel*. O uso da tecnologia possibilitou nesse momento a elaboração de novas conjecturas e os benefícios de usar a tecnologia digital foram evidentes. Além disso, a utilização desta unidade de medida, possibilitou uma aproximação autêntica vivenciada por alunos de Computação pois o design e o contexto do jogo confrontados com a realidade evidenciaram outros aspectos no desenvolvimento da atividade, promovendo diferentes modos de fazer matemática.

Ainda na investigação da situação-problema, os alunos pesquisavam quais explosivos poderiam ser suportados por bombas deste tipo, justificando que a quantidade de explosivo na bomba tem uma relação direta com a capacidade de explosão, evidenciando ações de experimentar e simular. Os recursos semióticos alinhados com as buscas feitas em sites da internet destinava-se a incentivar o uso de vários modos de comunicação. A interação do grupo com o explosivo que deveriam escolher e qual seria a quantidade ideal, geraram um diálogo rico entre os alunos do grupo, que se beneficiaram de diferentes recursos: smartphones, falas, gestos e jogos simuladores.

Ao trabalharem matematicamente com os dados da bomba os alunos do grupo G4 fizeram o uso de CAS, no sentido de Greefrath (2011): abrindo um campo de experimentação que exige diferentes aptidões na interpretação dos resultados. Os resultados encontrados por meio da organização em uma tabela e com o software de planilhas, favoreceu as concepções adotadas pelo grupo. Nesse sentido, intencionalidade do uso do software auxiliou tanto na organização quanto na elaboração de novos signos, e levou os alunos a investigar a capacidade de explosão de uma bomba.

Com a utilização da tecnologia os alunos puderam fazer novas simplificações – por exemplo, com o tamanho do muro no jogo – para que pudessem controlar e visualizar os resultados dentro deste contexto. Nesse sentido, os alunos foram favorecidos pela visualização ao evidenciar que o raio de dimensão da bomba na realidade coincidia com a distância máxima alcançada pela bomba no jogo. Ao traçarem o raio de alcance máximo na tela em que observavam o jogo, os alunos comparavam o raio de distância obtido com o raio de fatalidade informado no site da ONU (Organização das Nações Unidas). Os

recursos da tecnologia digital ofereceram a oportunidade de os alunos vivenciarem simultaneamente as duas situações (real e virtual). Tais ações são indícios de uma relação entre a situação investigada e a Matemática. Nesse sentido, as múltiplas representações oferecidas pelo uso da tecnologia digital aumentaram a capacidade dos alunos de resolver problemas matemáticos contextualizados.

Os alunos puderam validar o modelo matemático obtido de duas maneiras: testando os dados no site da ONU e com o alcance da bomba no contexto do jogo, o que evidenciou a geração de novos signos, conforme sugere o excerto a seguir.

G4A1: *Apesar de estar fora da realidade, para nós (referindo-se ao grupo) o jogo não é tão irreal assim...foi uma surpresa na verdade!*

G4A2: *Vimos que quanto mais pólvora você coloca, você não vai ter uma bomba necessariamente maior... não é proporcional...é exponencial.*

Em seu relatório final, o grupo (G4) justificou que futuros estudos poderiam investigar a quantidade de *Power ups* no jogo que, por exemplo, atravessassem as paredes levando em consideração a resistência do casco da bomba, que foi desconsiderada no modelo matemático apresentado.

Para os alunos deste grupo, o uso da tecnologia tornou o problema acessível, pois, somente através da tecnologia usada nesse caso como simulador, o problema pode ser estudado. Além disso, o desenvolvimento da atividade apresentada pelo grupo (G4), contribuiu para uma discussão sobre como promover habilidades de modelagem nos alunos.

Nesse sentido, entendemos que lidar com simulações favorece o desenvolvimento de estratégias por meio de experimentações e, para estudantes de Computação, foi apropriado. E ainda, no caso desse grupo, facilitou a idealização da realidade levando à compreensão e ao entendimento da situação.

Em termos gerais a manipulação dos recursos semióticos utilizados por ambos os grupos indica o potencial semiótico da tecnologia. As percepções de diferentes padrões, sejam na Lei de Moore ou em relação à bomba do jogo, permitiram diferentes ‘modos de pensar’. Nesse sentido, os diferentes modos de representação em sincronia com os diferentes recursos semióticos fornecidos pela tela do computador, tiveram um papel importante no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

A simulação, a experimentação, o controle e a visualização são funções da tecnologia já identificadas por Greefrath (2011), foram importantes nas duas atividades

de modelagem analisadas de modo que os resultados em cada atividade foram influenciados por estas funções da tecnologia.

Levando em consideração os usos da tecnologia nas duas atividades, caracterizamos quatro categorias relativas ao modo como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos. No quadro 3.1 caracterizamos essas categorias.

Quadro 3.1 – Categorias relativas ao uso da tecnologia na ativação de recursos semióticos

	Unidade de registro	Descrição da unidade e finalidade do uso
A tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos de diferentes maneiras	A tecnologia como fonte de informação	A investigação e a busca pelas informações da situação-problema apoiadas pelo uso da tecnologia digital. Neste caso os recursos semióticos como imagens, gráficos e tabelas foram ativados como fontes de informação.
	A tecnologia como meio de visualização	A tecnologia usada para visualizar foi relevante nas duas atividades e os alunos se beneficiaram deste recurso. A visualização foi usada para diferentes propósitos, além de permitir que várias representações distintas fossem construídas e confrontadas.
	A tecnologia como possibilidade de realizar cálculos	A tecnologia usada com essa finalidade foi apoiada por software, principalmente por CAS. O uso de software deste tipo pode reduziu processos esquemáticos, além de executar cálculos numéricos, estabelecer relações e resolver equações afim de trabalhar com a representação algébrica da situação.
	A tecnologia como possibilidade para gerar simulações	Essa característica esteve presente no desenvolvimento do grupo G4 que, por meio do uso da tecnologia pode simular a realidade do jogo além de se simular a explosão de uma bomba. Ou seja, situação real de uma bomba e situação da bomba do jogo foram comparadas por meio da simulação possibilitada por recursos da tecnologia.
	A tecnologia como articuladora de recursos semióticos	A tecnologia digital ativou a geração de imagens, gráficos, softwares bem como as diferentes associações entre estes recursos. Neste sentido, uma abordagem holística das duas situações investigadas foi favorecida pela articulação entre recursos semióticos de naturezas distintas.

Fonte: As autoras

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação de como a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática foi, neste artigo, associada ao uso de recursos da tecnologia digital bem como a articulação entre recursos de naturezas diversas viabilizada pelo uso da tecnologia.

A diversidade de recursos semióticos mobilizados ou articulados pela tecnologia digital foi associada ao uso de ambientes computacionais diversos e que proporcionou a operacionalização de imagens, a tradução de diferentes linguagens e as diferentes representações para o mesmo objeto matemático. Neste sentido, o manejo de signos, que atuaram aqui como recursos semióticos possibilitou a reflexão dos alunos, estudantes do curso de Ciências Computação, que com o uso do computador tiveram a possibilidade de interação entre conteúdos e objetos específicos deste curso com conteúdos e objetos da matemática com se deparam em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido recursos semióticos articulados pela tecnologia (gráficos, imagens, tabelas, linguagem escrita, falas e gestos) se associam com a condição epistemológica e contextual dos alunos.

A combinação de mais de um software ou a substituição de um software por outro, proporcionou a organização de recursos semióticos, combinados e integrados de modo que o desenvolvimento da atividade de modelagem pode ser compreendido de maneira holística conforme sugere Greefrath (2011) e Greefrath, Hertleif e Siller (2018). Ou seja, todas as etapas da atividade e todos os usos da tecnologia se associam e se dirigem à abordagem de uma situação não matemática por meio da matemática, em conformidade com o que indicam Frejd e Arlebäck (2017).

Neste sentido, a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos de diferentes maneiras conforme indicam as categorias: tecnologia como fonte de informação; tecnologia como meio de visualização; tecnologia como possibilidade de realizar cálculos; tecnologia como possibilidade para gerar simulações; tecnologia como articuladora de recursos semióticos. Ou seja, a tecnologia colabora para que diferentes recursos semióticos sejam ativados e articulados para incrementar as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1 – 2, p. 19 – 30, apr. 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria** - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 117-134, jul. 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir ?. **Ciência & Educação** Bauru , v. 11, n. 3, p. 483 – 497, dez. 2005.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Relime** – Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa, Cidade do México, Número Especial, v. 9, p. 267 – 299, 2006.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 1. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Eds). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **REIEC**, v. 10, n. 2, p. 36 – 45, 2015.

BROWN, J. P. Visualisation tactics for solving real world tasks. In G. A. Stillman, W. Blum; M. S. Biembengut (Eds.) **Mathematical modelling in education research and practice (ICTMA 16): Cultural, social and cognitive influences**: Springer, 2015, p. 431 – 442.

DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

DEJARNETTE, A. F. Students' Challenges with Symbols and Diagrams when Using a Programming Environment in Mathematics. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 36 – 58, 2019.

FREJD, P; ARLEBÄCK, J. B.. Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak **In: Mathematical Modelling and Applications (ICTMA 17): Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**: STILLMAN, A. G; BLUM, W.; KAISER, S., 2017. p. 517 – 527.

GEIGER, V. Factors Affecting Teachers' Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (Eds). **Overview. In: Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. New York: Springer, 2011, p. 305 – 314. New York: Springer.

GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – **Overview. In: Trends in Teaching and Learning of Mathematical**

- Modelling (ICTMA 14)**. Hamburgo: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Ed.), 2011, p. 301 – 304.
- GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1 – 12, 2018.
- HACIOMEROGLU, E. S., ASPINWALL, L.; PRESMEG, N. C. Contrasting Cases of Calculus Students’ Understanding of Derivative Graphs. **Mathematical Thinking and Learning**, 12(2), v. 12 n. 2p. 152–176, 2010.
- MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado — Rio Claro: Unesp, 2004.
- MAVERS, D. E. **Multimodal design: the semiotic resources of children’s graphic representation**. 2004. 243 f. Tese (PhD em Educação) – Universidade de Londres, Londres, 2004.
- NÖTH, W. Máquinas Semióticas. **Galáxia**. n. 1, 2001.
- O’HALLORAN, K.; BEEZER, R.; FARMER, D. W. A new generation of mathematics textbooks research and development. **ZDM**, v. 50, n. 5, p. 863 – 879, set. 2018.
- SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 1. ed., 34^a reimp.– São Paulo: Brasiliense, 2012.
- SRIRAMAN, B.; KAISER, G.; BLOMHØJ. M. A Brief Survey of the State of Mathematical Modeling Around The World. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 212 – 213, 2006.
- STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. In: **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 61, n. 1 – 2, p. 133 – 162, 2006.
- THOMAS, G. B; WEIR, M. D; HASS, J.. **Cálculo, volume 1**. Tradução Kleber Pedroso e Regina Simile de Macedo- 12 ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- YEH, A., NASON, R. Toward a semiotic framework of using technology in mathematics education: The case of learning 3D geometry. In **Proceedings of the International Conference on Computers in Education**, Melbourne, Australia, 2004.
- YOON, C., THOMAS, M. O. J., DREYFUS, T. Gestures and virtual space. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), **Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Thessaloniki, Greece: PME, v. 5, 2009, 409–416.

CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa usamos uma lente semiótica para investigar *como ações e artefatos são determinados e como atuam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, considerando tanto a dimensão cognitiva quanto a dimensão didática da modelagem matemática na sala de aula.*

A estrutura do relatório de pesquisa segue o formato *multipaper* de modo que nossas deliberações a respeito desta investigação são apresentadas em dois artigos científicos. No artigo 1, investigamos quais recursos semióticos são ativados em atividades de modelagem matemática e como eles colaboram para o desenvolvimento da atividade. No artigo 2, analisamos de que forma a tecnologia digital favorece a ativação e o uso de recursos semióticos que colaboram para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A investigação feita no artigo 1 nos permite inferir que a combinação de diferentes recursos bem como a sua associação a diferentes sistemas semióticos incrementa as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Com isso, podemos perceber que a ativação dos recursos semióticos bem como a sua colaboração para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática é ao mesmo tempo sincrônica e diacrônica. Isso significa não ser possível afirmar especificamente quando um recurso atua isoladamente ou em conjunto com outros de forma a organizar e potencializar o pensamento.

Ao olharmos para as conexões estabelecidas entre esses diferentes recursos semióticos que constituíam os elementos de cada pacote semiótico, compreendemos, portanto, o resgate de ideias matemáticas e de experiências anteriores dos alunos através dos conteúdos que emergiram nas atividades de modelagem matemática analisadas no artigo. Com isso, as ações dos alunos quando estavam apoiados por gestos associados à fala e representações gráficas eram motivadas ou combinadas para expressar e controlar a variedade de signos ativos durante o desenvolvimento.

Desta maneira, concluímos que as perspectivas relativas ao uso de recursos semióticos ativados com diferentes funções e as suas interações mútuas foram fundamentais para apoiar o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática destes alunos. A estrutura semiótica constituída de signos, modos de produção e as

múltiplas relações de transformação entre eles, atuaram de maneira colaborativa para fomentar as ações dos alunos.

No artigo 2, concluímos que a diversidade de recursos semióticos articulados ao uso da tecnologia digital, esteve associada ao uso de diferentes ambientes computacionais, o que possibilitou a tradução de diferentes linguagens. A operacionalização das imagens e das diferentes representações para o mesmo objeto matemático permitiu a reflexão dos alunos através do manuseio de signos que atuaram como recursos semióticos.

As representações dinâmicas viabilizadas pela tecnologia ampliaram e aprimoraram as representações matemáticas que se estendem para além das formas estáticas e impressas de investigação. Além disso, o uso de gestos, modos de expressão e fala, associados a manipulação do software, por exemplo, favoreceu a ativação e o uso de recursos semióticos de diferentes maneiras e que foi fundamental para o desenvolvimento destas atividades. Nesse mesmo sentido, as relações entre as curvas e a sua representação algébrica aproximou os alunos do objeto matemático a ser estudado, motivados principalmente pelo recurso da visualização.

Por outro lado, o design e o layout de cada recurso, enquadrou o poder comunicativo do software para os alunos – ao substituírem, por exemplo, um software por outro seja pelo mesmo ou variado objetivo. Sendo assim, podemos perceber que a tecnologia digital quando usada na interação entre os signos do mesmo e de diferentes modos, trabalhando juntos, com mais ou menos sucesso, fez com que os signos se tornasse verdadeiros signos matemáticos para esses alunos.

Evidenciamos com isso, que a tecnologia digital favoreceu a ativação e o uso de recursos semióticos de diferentes maneiras conforme as seguintes categorias: tecnologia como fonte de informação; tecnologia como meio de visualização; tecnologia como possibilidade de realizar cálculos; tecnologia como possibilidade para gerar simulações; tecnologia como articuladora de recursos semióticos. Portanto, concluímos que a tecnologia colaborou para que diferentes recursos semióticos fossem ativados e articulados, incrementando as ações dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A partir das constatações colocadas aqui através dos resultados destes dois artigos, apontamos que cada sistema semiótico forneceu uma gama diferente de recurso e a

interação destes vários recursos, incluindo principalmente as falas e os gestos, disponibilizaram oportunidades ricas para os alunos em relação aos objetos e aos conceitos matemáticos.

Uma implicação no resultado dessa pesquisa é que, olhar para os recursos semióticos nos fornece elementos para evidenciar, principalmente, a intencionalidade dos alunos na mediação de diferentes recursos semióticos. Além disso, favorece os processos de internalização, organização e as relações entre os recursos semióticos ativados no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Nesse sentido, estes alunos, estudantes de Computação, tiveram a possibilidade da interação entre conteúdos e objetivos específicos deste curso, com conteúdo e objetos da matemática ao cursarem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Os recursos semióticos articulados pela tecnologia (gráficos, imagens, tabelas, linguagem escrita, falas e gestos) se associam com a condição epistemológica e contextual dos alunos.

Em nossas análises, qualificamos a tecnologia colaborou para combinação de mais de um software ou a substituição de um software por outro, proporcionando a organização de recursos semióticos, combinados e integrados de modo que o desenvolvimento da atividade de modelagem pode ser compreendido de maneira holística. Ou seja, a abordagem holística apontada pela lente semiótica dessa pesquisa, suportou uso da tecnologia que evoluiu com o uso de outros recursos semióticos, provocando diferentes cognições através das interpretações familiares aos alunos.

Destacamos ainda que a maioria dos gestos utilizados pelos alunos eram acompanhados das falas e imagens na tela do computador. Embora os gestos e as imagens parecessem ser usados em casos particulares, observamos que em todo o desenvolvimento dessa pesquisa essa dualidade foi usada para pontuar a representação dinâmica do problema.

Assim, percebemos que os diferentes recursos semióticos não se constituem de maneira isolada, mas são complementados na medida em que a cooperação entre os alunos do grupo e a interação com informações relativas à temática investigada na atividade foi acontecendo nos grupos.

No que diz respeito à modelagem matemática, as iniciativas e as ações dos alunos durante os desenvolvimentos, propiciaram diferentes modos de representação que se constituíram tanto através da representação matemática, quanto nos artefatos matemáticos

associados a ela. Com isso, o aluno ao comunicar e mencionar suas escolhas, encontra-se apoiado em argumentos racionalmente fundamentados.

Podemos assim, resumir que a constituição dos signos em sintonia com os diferentes modos de organização, pautados nas escolhas dos alunos, evidenciaram as diferentes formas de se comunicar. Com isso, cada representação de um conceito (na forma de um gesto, imagem, palavras, etc.) tem seu potencial específico a cognição do aluno, certos aspectos serão atenuados enquanto outros serão enfatizados, dependendo da representação usada.

As contribuições da tecnologia digital também sinalizaram que o seu uso facilita a compreensão de conceitos matemáticos por meio das representações semióticas que potencializam o aprendizado em contextos referentes a modelagem matemática. Os fatos subjacentes às investigações pautavam-se em aspectos reais e virtuais, apontando a importância da tecnologia digital na modelagem matemática e promovendo diferentes modos de fazer matemática, além disso, tornou o processo dinâmico o que favoreceu na construção do modelo matemático.

Com isso, a presente pesquisa mostrou a importância da perspectiva semiótica como uma possibilidade de análise em atividades de modelagem matemática. A busca por diferentes recursos semióticos através da intencionalidade dos alunos, principalmente quando apoiado pelo uso de diferentes recursos semióticos, se constituiu de forma a incrementar, organizar e monitorar a estrutura semiótica da atividade.

Contudo, o uso e a manipulação da tecnologia digital propiciaram um efeito colaborativo tornando essa uma ferramenta que auxilia na criação e verificação dos conceitos, permitindo uma compreensão do contexto investigado e com isso, apoiando a atividade semiótica. Nesse sentido, o uso de diferentes perspectivas e a escolha do ambiente virtual mais adequado para cada ação, pautada no desenvolvimento da atividade, ponderou a produção, o processo sógnico e a função comunicativa da tecnologia.

Em uma reflexão dos resultados apontados na pesquisa, trazemos algumas de nossas limitações: ao fato de todo recurso semiótico ter um certo potencial em relação a uma perspectiva específica, cabe ao sujeito (no nosso caso, ao aluno) analisar se a sua ativação pode ou não ser suficiente; a estrutura da pesquisa em formato *multipaper*, determina uma certa quantidade de páginas, apesar da prontidão para a disseminação da

pesquisa. Além disso, uma vez que essa pesquisa se baseou nas ações, incluindo os gestos e os modos de expressões dos alunos simultaneamente com as gravações de tela do computador, a restrição esteve presente também na riqueza de detalhes do desenvolvimento das atividades, o que revogou a realização de certas inferências.

Dentre as possibilidades de pesquisas futuras, ressaltamos a inserção de novos debates acerca dos recursos semióticos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e o arcabouço tecnológico imerso atualmente na sala de aula, principalmente para estudar problemas relativos às simulações, vinculando a modelagem matemática com o uso de tecnologia digital.

Com isso, entendemos que os resultados dessa pesquisa, podem contribuir para a Modelagem Matemática na Educação Matemática, enquanto área de pesquisa. As potencialidades encontradas no uso de diferentes recursos semióticos também evidenciaram a capacidade da modelagem matemática para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos. A reflexão pautada no uso dos elementos semióticos e o seu arsenal de conceitos, permitiu avançarmos em nossas investigações e tornar fértil os procedimentos e as ações dos alunos no processo de ensino e aprendizagem ao percorrerem os caminhos da modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696 – 726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 387 – 414, dez. 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S.. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência & Educação** Bauru, v. 11, n. 3, p. 483 – 497, dez. 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Relime**. Cidade do México, Número Especial, v. 9, p. 267 – 299, 2006, 33p.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova esatratégia**. 4. ed., 1ª reimpressão – São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 1. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BLUM, W., NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 45-58, jan-jun. 2009.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015. p. 73 – 96.

BORROMEO FERRI, R.. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, 2018, p. 13 – 39.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **REIEC – Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 10, n. 2, p. 36 – 45, Dezembro, 2015.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BROWN, J. P. Visualisation tactics for solving real world tasks. Stillman, W. Blum; M. S. Biembengut (Eds.) **Mathematical modelling in education research and practice (ICTMA 16)**: Cultural, social and cognitive influences: Springer, 2015, p. 431 – 442.

DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Inst. de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

DANIELSSON, K. Modes and meaning in the classroom – the role of different semiotic resources to convey meaning in science classrooms. *Linguistics & Education*, n.35, p. 88 – 99, 2016.

FREJD, P; ARLEBÄCK, J. B.. Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak **In: Mathematical Modelling and Applications (ICTMA 17): Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**: STILLMAN, A. G; BLUM, W.; KAISER, S., 2017. p. 517 – 527.

GEIGER, V. Factors Affecting Teachers’ Adoption of Innovative Practices with Technology and Mathematical Modelling. G. Kaiser et al. (Eds.), **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**, p. 305 – 314, 2011.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1 – 12, 2018.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado—Rio Claro: Unesp, 2004.

MAVERS, D. E. **Multimodal design: the semiotic resources of children’s graphic representation**. 2004. 243 f. Tese (PhD em Educação) – Universidade de Londres, Londres, 2004.

MENDES, T. F. **A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática: uma análise semiótica**. 2018. 118f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MEYER, J. F. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade....**Com a Palavra, O Professor**, 5(11), 140 – 149, 2020.

RAMOS, D. C. **Modelagem matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos.** 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RAMOS, D. C. **O raciocínio abduativo em atividades de Modelagem Matemática.** 2016. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada.** 1ª ed. da 8ª reimpressão – São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado.** 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.** 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SOUZA, H. C. T. **Um olhar sobre o fazer Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein.** Tese de Doutorado – Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2018.

STEINBRING, H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interacion. In: **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 61, n. 1 – 2, p. 133 – 162, 2006.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.** 2007. 141 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ANEXO A- MODELO DO TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Londrina, 18 de fevereiro de 2019.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa de mestrado: Recursos Semiótico em Atividades de Modelagem Matemática, sob responsabilidade de Tânia Camila Kochmansky Goulart, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no período de 18/02/2019 à 01/07/2019, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, podendo divulgá-lo em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abduco dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informados (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	CPF	Assinatura