



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

MURILLO VILELA MAGAN

**IDENTIFICAÇÃO POR SUBESPAÇOS E CONTROLE COM  
ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES COM  
CHAVEAMENTO SUAVIZADO DA POSIÇÃO ANGULAR DO  
JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO**

MURILLO VILELA MAGAN

**IDENTIFICAÇÃO POR SUBESPAÇOS E CONTROLE COM  
ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES COM  
CHAVEAMENTO SUAVIZADO DA POSIÇÃO ANGULAR DO  
JOELHO DO PACIENTE PARAPLÉGICO**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Controle

Especialidade: Identificação de Sistemas e Controle com Estrutura Variável (CEV).

Orientador: Prof. Dr. Ruberlei Gaino

Londrina  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Magan, Murillo Vilela.

Identificação por Subespaços e Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes com Chaveamento Suavizado da Posição Angular do Joelho do Paciente Paraplégico / Murillo Vilela Magan. - Londrina, 2018.  
137 f. : il.

Orientador: Ruberlei Gaino.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Tecnologia e Urbanismo, , 2018.  
Inclui bibliografia.

1. Identificação por Subespaços - Tese. 2. Variáveis Instrumentais - Tese. 3. Controle com Estrutura Variável - Tese. 4. Planta do Paciente Paraplégico - Tese. I. Gaino, Ruberlei. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Tecnologia e Urbanismo. . III. Título.

MURILLO VILELA MAGAN

**IDENTIFICAÇÃO POR SUBESPAÇOS E CONTROLE COM  
ESTRUTURA VARIÁVEL E MODOS DESLIZANTES COM  
CHAVEAMENTO SUAVIZADO DA POSIÇÃO ANGULAR DO JOELHO  
DO PACIENTE PARAPLÉGICO**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas de Controle

Especialidade: Identificação de Sistemas e Controle com Estrutura Variável (CEV).

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Ruberlei Gaino  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Rodrigo Cardim  
Universidade Estadual Paulista – UNESP

---

Prof. Dr. Luiz Francisco Sanches Buzachero  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –  
UTFPR

Londrina, 21 de setembro de 2018.

## **DEDICA**

Aos meus familiares e amigos, que sempre me incentivaram nessa jornada. Dedico também a minha avó Selda, que nos deixou ao final da trajetória desse trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à Deus, por me dar o dom da vida e a oportunidade de desfrutar desse momento importante na minha carreira, me concedendo força, calma, paciência, serenidade e concentração, durante todo o percurso do mestrado.

Sou muito grato aos meus pais, Claudemir e Laila, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e compreendendo minhas ausências durante o período de realização deste trabalho, além de me fornecerem todo o suporte possível. Também agradeço ao meu irmão Lucas, pelas ajudas e favores que me fez durante esse trajeto, me representando em eventos familiares quando minha presença era impossibilitada, e também por me lembrar sempre da importância do trabalho em minha vida.

Sou grato à minha noiva, Rafaela, pela compreensão com a minha grande ausência durante esse período, e também por ter sempre me incentivado e encorajado a nunca desistir, sempre vendo minha aflições e ajudando a solucioná-las.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Ruberlei Gaino, e ao professor Dr. Marcio Roberto Covacic, que me auxiliaram e dedicaram seu tempo para me ajudar a solucionar os problemas encontrados no percurso deste trabalho, pois sem a ajuda deles, não seria possível chegar a esse ponto. Sou grato também pelo aprendizado acadêmico e de vida que tive com a presença deles, me proporcionando um crescimento pessoal muito grande.

Fica aqui declarada a minha gratidão ao Igor Oliveira e ao Mairon Marques, amigos de caminhada, pelo companheirismo, apoio, conselhos e motivação que fornecemos uns aos outros nesse período de convivência. Sem a parceria de vocês, não seria possível a conclusão desse trabalho.

Por fim, agradeço à instituição da UniCesumar, por sempre me incentivar na conclusão dessa etapa e compreender meu tempo escasso.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código do Financiamento 001.

MAGAN, Murillo Vilela. **Identificação por Subespaços e Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes com Chaveamento Suavizado da Posição Angular do Joelho do Paciente Paraplégico**. 2018. 137 páginas. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

Este trabalho aborda a técnica de identificação de sistemas multivariáveis por subespaços e o controle com estrutura variável e modos deslizantes, com chaveamento suavizado, aplicado à planta multivariável do paciente paraplégico. A principal contribuição desta pesquisa está na utilização de algoritmos de identificação por subespaços que não são polarizados pela presença de ruídos brancos e/ou coloridos, conhecido como método de variáveis instrumentais, utilizando técnicas não iterativas e de rápida obtenção do modelo. Foi utilizada uma planta não linear do paciente paraplégico como base para as simulações de identificação. As saídas da planta foram levadas empiricamente até o ponto de operação determinado ( $30^\circ$ ), através de um sinal de rampa e degrau, e então foram aplicados sinais binários pseudoaleatórios para a excitação persistente do sistema nesse ponto de operação. Assim, foi obtido um modelo linear, através dos algoritmos de identificação, que melhor representa o sistema em torno do ponto de operação. A partir da obtenção do modelo, foi abordado o Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes de Ordem Completa, no qual uma lei de controle por realimentação de estados com o chaveamento descontínuo é utilizado, fazendo com que a trajetória de estados se mantenha em uma superfície de chaveamento projetada, tornando o sistema insensível a ruídos. O projeto dessa superfície foi realizado por abordagem via Desigualdades Matriciais Lineares, no qual foram inseridas restrições de passividade, D-estabilidade, restrição do sinal de entrada da planta e a presença de incertezas paramétricas limitadas em norma, garantindo assim a estabilidade do sistema e um comportamento transitório desejado. Foi incluída também uma função contínua saturada suavizada à lei de chaveamento, minimizando o efeito de trepidação presente nas saídas, devido ao chaveamento de alta frequência da lei de controle. Os resultados de identificação e controle dessa pesquisa foram obtidos em simulações, através do uso do ambiente *Matlab/Simulink*, e os mesmos foram analisados por índices de qualidade que comprovam a boa performance das técnicas de identificação e controle.

**Palavras-chave:** Identificação por Subespaços. Variáveis Instrumentais. Controle com Estrutura Variável. Chaveamento Suavizado. Incertezas Paramétricas Limitadas em Norma. Planta do Paciente Paraplégico.

MAGAN, Murillo Vilela. **Subspace Identification and Sliding Mode Variable Structure Control with Smoothed Switching of Paraplegic Patient Knee Angular Position**. 2018. 137 páginas. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## ABSTRACT

This work proposes the technique of multivariable subspaces identification systems and sliding mode variable structure control, with smoothed switching, applied to the multivariable model of the paraplegic patient. The main contribution of this research is the use of subspace identification algorithms that are not polarized by the presence of white and/or colored noises, known as method of instrumental variables, using non-iterative techniques and fast modeling. A nonparallel plant of the paraplegic patient was used as the basis for the identification simulations. The plant outputs were empirically carried to the given operating point ( $30^\circ$ ) through a ramp and step signal, and then pseudo-random binary signals were applied for the persistent excitation of the system at that point of operation. Then, a linear model was obtained, through the algorithms of identification, which best represent the system around the point of operation. From the modeling, the Full Order Sliding Modes Variable Structure Control were approached, where a state feedback control law with batch switching is used, making the state trajectory to remain on a surface designed to make the system insensitive to noise. The design of this surface was performed through a Linear Matrix Inequality approach, where passivity, D-Stability, restriction of the plant's input signal and norm-bounded parameter uncertainties were inserted, thus guaranteeing the stability of the system and a desired transient behavior. A saturated continuous function has also been adapted to the switching law, thus minimizing the effect of the jitter present in the outputs due to the high frequency switching of the control law. The results of identification and control of this research were simulated through the use of the *Matlab/Simulink* environment, which were analyzed by quality indexes that confirm the good performance of the identification and control techniques.

**Key-words:** Subspace Identification. Instrumental Variables. Variable Structure Control. Smoothing Switching. Norm-Bounded Parameters Uncertainties. Patient Paraplegic Model.

# Lista de Figuras

<b>FIGURA 1:</b> ESTIMULAÇÃO ELÉTRICA FUNCIONAL APLICADA AO MÚSCULO QUADRÍCEPS...	13
<b>FIGURA 2:</b> COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE SUBESPAÇOS E MÉTODOS TRADICIONAIS. .....	24
<b>FIGURA 3:</b> REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS COM AÇÃO INTEGRAL.....	35
<b>FIGURA 4:</b> REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO CEV-MDOC.....	37
<b>FIGURA 5:</b> INTERSECÇÃO DE RESTRIÇÕES DE D-ESTABILIDADE: SETOR CÔNICO E TAXA DE DECAIMENTO. ....	40
<b>FIGURA 6:</b> A) SINAIS APLICADOS NA ENTRADA DA PLANTA NÃO LINEAR E B) SINAIS DE SAÍDAS DA PLANTA NÃO LINEAR DADA ÀS ENTRADAS. ....	48
<b>FIGURA 7:</b> DIAGRAMAS DE BLOCOS DO SISTEMA EM MALHA ABERTA, PARA A IDENTIFICAÇÃO SEM RUÍDOS.....	49
<b>FIGURA 8:</b> COMPARAÇÃO ENTRE AUTOVALORES DOS SISTEMAS RESULTADOS DAS IDENTIFICAÇÕES. ....	51
<b>FIGURA 9:</b> COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS PARA UM SISTEMA SEM RUÍDOS. ....	52
<b>FIGURA 10:</b> ANÁLISE MAIS DETALHADA DO COMPORTAMENTO GRÁFICO DOS MODELOS OBTIDOS, SEM RUÍDOS.....	53
<b>FIGURA 11:</b> A) SINAIS APLICADOS NA ENTRADA DA PLANTA NÃO LINEAR E B) SINAIS DE SAÍDAS DA PLANTA NÃO LINEAR DADA ÀS ENTRADAS; CASO COM RUÍDO COLORIDO DE MEDIÇÃO.....	55
<b>FIGURA 12:</b> DIAGRAMAS DE BLOCOS DO SISTEMA EM MALHA ABERTA, PARA A IDENTIFICAÇÃO COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO. ....	56
<b>FIGURA 13:</b> COMPARAÇÃO ENTRE AUTOVALORES DOS SISTEMAS RESULTADOS DAS IDENTIFICAÇÕES COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO. ....	58
<b>FIGURA 14:</b> COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO.....	59
<b>FIGURA 15:</b> ANÁLISE MAIS DETALHADA DO COMPORTAMENTO GRÁFICO DOS MODELOS OBTIDOS, COM RUÍDO NA ENTRADA. ....	60
<b>FIGURA 16:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO. ....	61
<b>FIGURA 17:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP-PI PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO.....	61

<b>FIGURA 18:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP-PO PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE MEDIÇÃO.....	62
<b>FIGURA 19:</b> A) SINAIS APLICADOS NA ENTRADA DA PLANTA NÃO LINEAR E B) SINAIS DE SAÍDAS DA PLANTA NÃO LINEAR DADA ÀS ENTRADAS; CASO COM RUÍDO COLORIDO NA ENTRADA E NA SAÍDA.....	65
<b>FIGURA 20:</b> DIAGRAMAS DE BLOCOS DO SISTEMA EM MALHA ABERTA, PARA A IDENTIFICAÇÃO COM RUÍDOS NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	66
<b>FIGURA 21:</b> COMPARAÇÃO ENTRE AUTOVALORES DOS SISTEMAS RESULTADOS DAS IDENTIFICAÇÕES COM RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	68
<b>FIGURA 22:</b> COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE PROCESSO E DE MEDIÇÃO.....	69
<b>FIGURA 23:</b> ANÁLISE MAIS DETALHADA DO COMPORTAMENTO GRÁFICO DOS MODELOS OBTIDOS, COM RUÍDOS NA ENTRADA E SAÍDA. ....	70
<b>FIGURA 24:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE PROCESSO E MEDIÇÃO. ...	71
<b>FIGURA 25:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP-PI PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE PROCESSO E MEDIÇÃO. .....	71
<b>FIGURA 26:</b> RESPOSTAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS COM ALGORITMO MOESP-PO PARA: A) SAÍDA 1 E B) SAÍDA 2, PARA UM SISTEMA COM RUÍDOS DE PROCESSO E MEDIÇÃO. .....	72
<b>FIGURA 27:</b> COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DOS SISTEMAS INCERTOS EM MALHA ABERTA, VARIANDO O VALOR DE $\Delta$ ENTRE -1, 0 E 1, DADA A APLICAÇÃO DO MESMO SINAL EM DEGRAU NAS ENTRADAS. ....	77
<b>FIGURA 28:</b> IMPLEMENTAÇÃO DA LEI DE CONTROLE DE (5.35), COM OS ESTADOS SENDO ESTIMADOS PARA A IDENTIFICAÇÃO.....	79
<b>FIGURA 29:</b> ELEMENTOS DO BLOCO DA PLANTA IDENTIFICADA, DA FIGURA 28.....	79
<b>FIGURA 30:</b> ELEMENTOS DO BLOCO DO OBSERVADOR DE ESTADOS, DA FIGURA 28. ....	80
<b>FIGURA 31:</b> ELEMENTOS DO BLOCO DO RUÍDO, DA FIGURA 28. ....	80
<b>FIGURA 32:</b> VALORES SINGULARES DO SISTEMA EM MALHA FECHADA. ....	82
<b>FIGURA 33:</b> A) SAÍDA Y1 DA PLANTA INCERTA COM O SISTEMA EM MALHA FECHADA, B) SAÍDA Y2 DA PLANTA INCERTA COM O SISTEMA EM MALHA FECHADA, C) LEI DE CONTROLE COM CHAVEAMENTO SUAVIZADO E D) O SINAL DE RUÍDO SENOIDAL APLICADO AO SISTEMA.....	84

<b>FIGURA 34:</b> A) SAÍDA $y_1$ DA PLANTA INCERTA COM O SISTEMA EM MALHA FECHADA, B) SAÍDA $y_2$ DA PLANTA INCERTA COM O SISTEMA EM MALHA FECHADA E C) LEI DE CONTROLE SEM CHAVEAMENTO SUAVIZADO.....	85
<b>FIGURA 35:</b> IMPLEMENTAÇÃO DA LEI DE CONTROLE DE (5.13), COM OS ESTADOS SENDO ESTIMADOS PARA A IDENTIFICAÇÃO.....	86
<b>FIGURA 36:</b> RESTRIÇÕES PARA: A) SEMIPLANO ESQUERDO DE $-\Gamma$ E B) DE INCLINAÇÃO $2\theta$ . .....	106
<b>FIGURA 37:</b> INTERSECÇÃO DE RESTRIÇÕES DE D-ESTABILIDADE: SETOR CÔNICO E TAXA DE DECAIMENTO. ....	108
<b>FIGURA 38:</b> REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UM OBSERVADOR DE ESTADOS. ....	111
<b>FIGURA 39:</b> REPRESENTAÇÃO DETALHADA DE UM OBSERVADOR DE ESTADOS. ....	112
<b>FIGURA 40:</b> REPRESENTAÇÃO LÓGICA DO ALGORITMO MOESP.....	114
<b>FIGURA 41:</b> REPRESENTAÇÃO LÓGICA DO ALGORITMO MOESP-PI. ....	115
<b>FIGURA 42:</b> REPRESENTAÇÃO LÓGICA DO ALGORITMO MOESP-PO. ....	116
<b>FIGURA 43:</b> ALGORITMO DO BLOCO SIG.....	117
<b>FIGURA 44:</b> ALGORITMO DO BLOCO <i>SIGN_SMOOTH_QUALI</i> .....	119

# Lista de Tabelas

<b>TABELA 1:</b> PARÂMETROS UTILIZADOS PARA SIMULAÇÃO, OBTIDA DE (BIAZETO, 2015).	45
<b>TABELA 2:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP, SEM RUÍDO. ....	50
<b>TABELA 3:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PI, SEM RUÍDO. ....	50
<b>TABELA 4:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PO, SEM RUÍDO. ....	51
<b>TABELA 5:</b> QUADRO COMPARATIVO DE DESEMPENHO DOS ALGORITMOS A PARTIR DAS SAÍDAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS, SEM RUÍDO. ....	53
<b>TABELA 6:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP, COM RUÍDO NA SAÍDA. ....	57
<b>TABELA 7:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PI, COM RUÍDO NA SAÍDA. ....	57
<b>TABELA 8:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PO, COM RUÍDO NA SAÍDA. ....	58
<b>TABELA 9:</b> QUADRO COMPARATIVO DE DESEMPENHO DOS ALGORITMOS A PARTIR DAS SAÍDAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS, COM RUÍDO NA ENTRADA. ....	63
<b>TABELA 10:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP, COM RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	67
<b>TABELA 11:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PI, COM RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	67
<b>TABELA 12:</b> ANÁLISE NUMÉRICA DOS VALORES SINGULARES ESTIMADOS PARA O MÉTODO MOESP-PO, COM RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	68
<b>TABELA 13:</b> QUADRO COMPARATIVO DE DESEMPENHO DOS ALGORITMOS A PARTIR DAS SAÍDAS IDENTIFICADAS E NOMINAIS, COM RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA. ....	73

# Lista de Abreviaturas

CEV-MD	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes
CEV-MDOC	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes de Ordem Completa
DSP	<i>Digital Signal Processor</i> (Processador Digital de Sinais)
ERP	Sistema Estritamente Real Positivo
FES	<i>Functional Electrical Stimulation</i> (Estimulação Elétrica Funcional)
GA	<i>Genetic Algorithm</i> (Algoritmo Genético)
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Desigualdades Matriciais Lineares)
LQG	Linear Quadrático Gaussiano
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i>
MAE	<i>Mean Absolute Error</i> (Erro Médio Absoluto)
MIMO	<i>Multiple-Input/Multiple-Output</i> (Múltiplas Entradas/Múltiplas Saídas)
MOESP	<i>Multivariable Output-Error State sPace</i>
MOESP-PI	<i>Multivariable Output-Error State sPace – Past Input</i>
MOESP-PO	<i>Multivariable Output-Error State sPace – Past Output</i>
MQE	Mínimos Quadrados Estendido
MQG	Mínimos Quadrados Generalizado
NARX	Nonlinear AutoRegressive model with eXogenous inputs (Modelo Não-linear Auto-Regressivo, com entradas eXógenas)
N4SID	<i>Numerical Algorithms for Subspace State Space System IDentification</i>
PID	Controlador Proporcional Integral e Derivativo
PRBS	<i>Pseudo-Random Binary Sequency</i> (Sinal Binário Pseudo-Aleatório)
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso)
RBF	<i>Radial Basis Function</i>
RISE	<i>Robust Integral of the Signal of the Error</i> (Integral Robusta do Sinal de Erro)
RMS	<i>Root Mean Square</i> (Raíz Média Quadrática)
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i> (Raíz do Erro Médio Quadrático)
RP	Sistema Real Positivo
SISO	<i>Single-Input/Single-Output</i> (Uma Entrada e Uma Saída)

SMC	<i>Sliding-Mode Controller</i> (Controlador por Modos Deslizantes)
SNC	Sistema Nervoso Central
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> (Decomposição em Valores Singulares)
T-S	<i>Fuzzy Takagi-Sugeno</i>
VI	Variáveis Instrumentais

# Lista de Símbolos

## Capítulo 3

$J$	Momento de inércia do complexo canela-pé [ $kg \cdot m^2$ ]
$B$	Coeficiente de atrito viscoso [ $N \cdot m \cdot s/rad$ ]
$m$	Massa do complexo canela-pé [ $kg$ ]
$g$	Aceleração gravitacional [ $m/s^2$ ]
$L$	Distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé [ $m$ ]
$\theta$	Ângulo comum do joelho [ $rad$ ]
$\theta_v$	Ângulo da canela em relação ao eixo vertical [ $rad$ ]
$\dot{\theta}_v$	Velocidade angular da canela [ $rad/s$ ]
$\ddot{\theta}_v$	Aceleração angular da canela [ $rad/s^2$ ]
$M_a$	Torque ativo do joelho, resultado da estimulação do quadríceps [ $N \cdot m$ ]
$M_s$	Torque devido ao componente da rigidez [ $N \cdot m$ ]
$\lambda$	Coeficiente do termo exponencial
$E$	Coeficiente do termo exponencial
$\omega$	Ângulo elástico de repouso do joelho [ $rad$ ]
$P$	Largura de pulsos da estimulação elétrica aplicada ao músculo pela modulação PWM [ $\mu s$ ]
$G$	Ganho do sistema identificado para cada paciente
$\tau$	Constante de tempo identificado para cada paciente [ $s$ ]
$\tilde{f}_n(x_1)$	Parâmetro não linear do sistema

## Capítulo 4

$u_k$	Medições (vetores) de entradas no instante de tempo $k$
$y_k$	Medições (vetores) de saídas no instante de tempo $k$
$x_k$	Medições (vetores) dos estados no instante de tempo $k$
$w_k$	Vetores conhecidos não mensuráveis de ruídos de processo
$v_k$	Vetores conhecidos não mensuráveis de ruídos de medição
$n$	Ordem do modelo do sistema

$A$	Matriz que representa a dinâmica do sistema
$B$	Matriz de entradas
$C$	Matriz de saídas
$D$	Matriz de transmissão direta
$Y_p$	Matrizes em blocos de Hankel de saídas passadas
$Y_f$	Matrizes em blocos de Hankel de saídas futuras
$U_p$	Matrizes em blocos de Hankel de entradas passadas
$U_f$	Matrizes em blocos de Hankel de entradas futuras
$\Gamma_i$	Matriz de observabilidade estendida
$H_i^d$	Matriz em bloco triangular inferior de Toeplitz determinística
$H_i^s$	Matriz em bloco triangular inferior de Toeplitz estocástica
$O_i$	Matriz obtida pela projeção oblíqua
$Z_j$	Variáveis de instrumentos
$E_p$	Matrizes de ruídos aditivos passados
$E_f$	Matrizes de ruídos aditivos futuros

## Capítulo 5

$\delta A$	Matriz de incertezas de $A$
$\delta B$	Matriz de incertezas de $B$
$\Delta$	Matriz diagonal contendo o parâmetro incerto normalizado na diagonal

# Sumário

1	Introdução.....	1
2	Identificação e Controle em Paraplegia.....	8
3	Desenvolvimento do Modelo Dinâmico do Movimento das Pernas.....	13
3.1	Caso SISO.....	13
3.2	Caso MIMO.....	17
4	Identificação por Subespaços.....	20
4.1	Introdução.....	20
4.2	Identificação Estocástica MOESP.....	24
4.3	Identificação Estocástica MOESP-PI.....	27
4.4	Identificação Estocástica MOESP-PO.....	29
4.5	Índices de Qualidade.....	30
5	Controlador.....	32
5.1	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes.....	33
5.2	Projeto da Superfície de Chaveamento.....	37
5.2.1	Sistema Real Positivo.....	38
5.2.2	Região D-Estável.....	39
5.2.3	Restrição do Sinal de Entrada.....	41
5.3	Sistemas com Incertezas Limitadas em Norma.....	41
5.4	Suavização de Chaveamento do CEV-MDOC.....	43
6	Resultados.....	45
6.1	Simulação 1: Identificação sem Ruídos.....	47
6.2	Simulação 2: Identificação com Ruído de Medição.....	54
6.3	Simulação 3: Identificação com Ruídos de Processo e de Medição.....	64
6.4	Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes com Chaveamento Suavizado e Incertezas Limitadas em Norma.....	75
7	Conclusões.....	87

7.1	Propostas para Trabalhos Futuros .....	88
	Publicações.....	89
	Referências Bibliográficas .....	90
	Apêndice A: Decomposições de Matrizes.....	99
	A.1 - Decomposição QR .....	99
	Apêndice B: Fundamentos de Sistemas Lineares e Matrizes.....	100
	B.1 - Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).....	100
	B.2 - Complemento de Schur.....	101
	B.3 - Normas e Características de Sistemas .....	102
	B.3.1 Norma de Sistemas $\mathcal{H}^\infty$ .....	103
	B.3.2 Valores Singulares de Sistemas.....	103
	B.3.3 Norma de Sistemas $\mathcal{H}^2$ .....	104
	Apêndice C: Projeto da Superfície de Chaveamento do Controlador .....	106
	C.1 – Região D-estável.....	106
	C.2 - Demonstrações .....	109
	Apêndice D: Projeto do Observador de Estados para Reconstrução dos Estados de Identificação.....	111
	Apêndice E: Algoritmos.....	114
	Algoritmo MOESP .....	114
	Algoritmo MOESP-PI .....	115
	Algoritmo MOESP-PO .....	116
	Algoritmo do Bloco <i>Sig</i> .....	117
	Algoritmo do Bloco <i>Sign_Smooth_Quali</i> .....	118

# 1 Introdução

A engenharia de reabilitação atua no apoio aos deficientes físicos, na forma de desenvolvimento de métodos, técnicas e instrumentos, que visam melhorar a qualidade de vida de pacientes portadores de deficiência. No Brasil, a população de pessoas com algum tipo de lesão medular que prejudica sua locomoção tem aumentado consideravelmente. O número de pessoas portadoras de deficiência física e motora passou de 9.355.844 em 2000 para 13.265.599 em 2010, de acordo com (ANDRÉS, 2014). Segundo o Censo Demográfico 2010, isso equivale a 7% dos brasileiros, considerando qualquer tipo de dificuldade de locomoção indicada pela pessoa (G1, 2012).

Com o avanço da medicina e das tecnologias, algumas técnicas vêm sendo utilizadas para restaurar ou manter a atividade muscular em pacientes paraplégicos que sofrem de lesões na medula espinhal e deficiências neurológicas, visando à reabilitação de pacientes. Dentre essas tecnologias, tem-se a estimulação elétrica funcional (FES – *Functional Electrical Stimulation*) que emprega corrente elétrica para ativar os músculos cujo controle pelo Sistema Nervoso Central (SNC) foi prejudicado ou perdido, mas que ainda possuem nervos periféricos intactos. Em (BIAZETO, 2015) e (GAINO, 2009), são relatados alguns casos de pacientes que recuperaram a sensibilidade e o movimento dos membros paralisados após sessões de FES.

A FES, quando aplicada no músculo quadríceps, provoca um deslocamento angular na perna de um paciente paraplégico. Conforme (BIAZETO, 2015), a aplicação de FES vem sendo realizada utilizando controladores em malha aberta, em que a saída não interfere no sinal do controlador, permitindo que sua implementação seja mais fácil, porém não torna o sistema confiável, sendo susceptíveis a variações da planta. Já no controle em malha fechada, o ângulo do movimento é alcançado com maior precisão e menos fadiga muscular, devido à comparação do sinal de posição mensurado por sensores e um sinal de referência desejado para a posição, o que traz mais confiança e controlabilidade.

Como aborda (GAINO, 2009), a justificativa para se trabalhar com teoria de controle em malha fechada concentra-se na perspectiva dos grupos de pesquisa

envolvidos de implementarem equipamentos para a geração de movimentos, ortostatismo e até mesmo a marcha de deficientes. Segundo (CRAGO; MORTIMER; PECHAM, 1980), quando se trabalha em malha fechada, pode-se controlar de maneira mais eficiente a estimulação elétrica, propiciando um melhor controle dos movimentos e, evitando também uma rápida fadiga dos músculos envolvidos no processo.

Um limitante para a aplicação do FES é o modelo matemático disponível de um sistema fisiológico, que é não linear. O modelo utilizado como base para esse trabalho foi obtido e adaptado de (GAINO, 2009), com metodologia de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), envolvendo uma modelagem não linear a partir de fenômenos fisiológicos em junção com a identificação dos parâmetros antropométricos do modelo e do ponto motor. Nesse modelo, faz-se o uso de medições de posição angular, velocidade angular e aceleração angular, que são utilizadas para descrever o comportamento dinâmico da planta.

Sabe-se que o conhecimento das relações físicas de uma planta pode exigir um esforço significativo e específico para cada sistema, o que muitas vezes é difícil e limitado. A obtenção de modelos a partir de métodos de identificação exige pouco ou praticamente nenhum conhecimento específico do processo. Segundo (DE PAULA, 2016), os métodos de identificação por subespaços são uma forma bastante atraente para a determinação de modelos lineares e não lineares no espaço de estados, o que permite tratar sistemas MIMO (*Multiple-Input/Multiple-Output* – Múltiplas Entradas/Múltiplas Saídas) sem dificuldades adicionais, como no caso da representação de modelos MIMO no domínio da frequência. Nesse último caso, as matrizes de transferência necessitam de uma função para representar cada par entrada-saída do sistema.

Como descreve (VERHAEGEN; VERDULT, 2007), uma das maiores vantagens da identificação por subespaços é que não há a necessidade de conhecer todos os estados do sistema para estimar o modelo. Nos métodos de identificação convencionais, o conhecimento de todos os estados se faz necessário. Assim, pelos métodos de identificação por subespaços é possível a obtenção de um modelo MIMO no espaço de estados, a partir somente de dados de entrada e saída (modelagem caixa-preta), utilizando técnicas de álgebra linear e algoritmos não

iterativos, estimando de forma rápida as matrizes de estado (RICCO, 2012), (CLAVIJO, 2008).

Além do mais, alguns dos métodos de subespaços são relativamente robustos a ruídos. Na presença de ruídos coloridos não mensuráveis no processo e/ou na medição, as metodologias convencionais tendem a ser polarizadas (VIBERG, 1995). Assim, tem-se o uso de algoritmos não polarizados que podem ser utilizados para determinar as matrizes do sistema anulando assintoticamente a atuação dos ruídos, mantendo o sinal intacto. Esse método é conhecido como variáveis instrumentais (VIs), abordado em (ACOSTA; BOTTURA, 2017), (RICCO, 2012), (VERHAEGEN; VERDULT, 2007) e (KATAYAMA, 2005).

Com a obtenção do modelo do sistema a partir de técnicas de identificação por subespaços, é possível o projeto de controladores automáticos que fazem com que as saídas do sistema se estabeleçam em seus sinais de referência, com comportamentos transitórios especificados, mesmo na presença de distúrbios e incertezas de parâmetros. Dentre as metodologias de projeto, tem-se o Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes (CEV-MD), que se baseia em uma lei de controle com chaveamento que garanta a estabilidade do sistema, abordada em (FAZZOLARI *et al.*, 2014), (LORDELO *et al.*, 2012), (SHTESSEL *et al.*, 2013), (COVACIC, 2006) e (LORDELO, 2000). Essa lei de controle faz com que a trajetória do sistema convirja rapidamente para uma determinada superfície do espaço de estados e se mantenha nesta superfície por todo o tempo subsequente, a partir de uma lógica própria de chaveamento (YOUNG, 1993). A ação de controle resultante é uma função descontínua dos estados do sistema. Enquanto a trajetória estiver sobre uma superfície de chaveamento, o sistema fica insensível à variação de certos distúrbios e parâmetros.

Segundo (LORDELO, 2000) e (COVACIC, 2006), o projeto de sistemas com ações de controle descontínuas normalmente se reduz à seleção de superfícies no plano de fase para que a função de controle tenha descontinuidades. Uma vez nessa superfície, o sistema não pode mover-se ao longo de nenhuma trajetória adjacente a esta. Portanto, em resposta a qualquer mudança, um movimento que começa sempre retorna a essa superfície e, conseqüentemente, a trajetória pode

mover-se somente ao longo da superfície descontínua. Esse movimento é chamado de modo deslizante (UTKIN, 1978).

O primeiro passo para o projeto de um CEV-MD é a escolha de um subespaço deslizante (superfície de chaveamento). Como aborda (COVACIC, 2001) e (COVACIC, 2006), um modo deslizante é conseguido através da seleção adequada de hiperplanos, de maneira que a resposta dinâmica de malha fechada desejada seja alcançada. O segundo passo envolve a seleção de uma lei de controle que assegure o alcance e a permanência do sistema em modo deslizante. Em (MAGAN *et al.*, 2017), (FAZZOLARI *et al.*, 2014), (LORDELO *et al.*, 2012) e (COVACIC, 2006), tem-se o projeto do CEV-MD com o uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI – *Linear Matrix Inequalities*), apresentando uma grande variedade de especificações e restrições de projeto. Quando as LMIs são factíveis, o problema pode ser solucionado por algoritmos de otimização bastante eficientes.

Em (COSTA, 2017), (COVACIC, 2006) e (BOYD *et al.*, 1994) são consideradas restrições matemáticas em termos de LMIs para o desempenho do sistema, como estabilidade, incertezas politópicas, regiões D-Estáveis, rejeição a distúrbios, restrição dos sinais de entrada e de saída, entre outras, em que são interseccionadas essas restrições para projetar um controlador factível para uma aplicação. O lema Real Positivo (RP), descrito em (BOYD *et al.*, 1994), permite a análise da passividade de uma planta e o projeto de um controlador que mantenha o sistema passivo, não gerando energia. Em (SANTOS, 2014) e (RENQUAN; WEI; LIN, 2008), aborda-se o desenvolvimento de um controlador robusto que considera a presença de incertezas paramétricas limitadas por norma, em que as incertezas são consideradas no projeto do controlador e a estabilidade do sistema é garantida dentro de uma faixa de variação das incertezas. Com esse conjunto de restrições, tem-se um projeto de controle que garanta o movimento desejado para a planta, mesmo na presença de distúrbios e incertezas.

Uma desvantagem do uso do CEV-MD é o efeito da trepidação (*chattering*) presente no chaveamento da ação de controle, que leva à sua degradação. Em (FAZZOLARI *et al.*, 2014) e (SHTESSEL *et al.*, 2013), a função sinal descontínua convencional utilizada pela lei de controle é substituída por uma função contínua sigmoide, com o objetivo de minimizar o efeito de *chattering*. Em (MENG; ZHENG;

ZHANG, 2016) é abordada uma função saturada contínua que tende a suavizar o chaveamento da lei de controle, substituindo a função sigmoide, sendo abordada na forma de realimentação de estados, tornando assim suavizado o chaveamento e também reduzindo a presença da trepidação.

A presente pesquisa tem como objetivo a identificação MIMO por subespaços e o controle de posições angulares de ambas as pernas do paciente paraplégico, utilizando apenas as medições de posição angular, considerando a presença de ruídos e distúrbios tanto na identificação quanto no controle automático da planta. Foram abordados os algoritmos de identificação utilizados e também a metodologia de projeto de controlador especificado. A planta não linear SISO (*Single-Input/Single-Output* – entrada única/saída única) do paciente paraplégico, desenvolvida em espaço de estados por (GAINO, 2009), foi utilizada como planta base para o desenvolvimento dessa pesquisa, sendo adaptada para o caso MIMO. Como trata-se de uma planta não linear, as saídas da planta foram levadas empiricamente para uma posição de interesse de controle e então foi realizada a identificação linear em torno desse ponto de operação, com o uso de sinais excitantes conhecidos da literatura e ruídos randômicos. A partir dessa identificação, foi realizado então o controle da planta identificada linear.

A contribuição deste trabalho está na abordagem de identificação de sistemas MIMO por subespaços com algoritmos não polarizados para a obtenção do modelo pela presença de ruídos brancos e/ou coloridos, a partir do uso de técnicas não iterativas, que estimam de forma rápida um modelo usando apenas dados experimentais de entradas e saídas. Além disso, tem-se uma lei de controle com chaveamento suavizado que garante a estabilidade do sistema e um comportamento transitório desejado, mesmo na presença de ruídos. Incertezas paramétricas limitadas em norma também foram consideradas para o projeto do controlador. Essas abordagens são inéditas nas linhas de pesquisa do Laboratório de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica da Universidade Estadual de Londrina, podendo ser futuramente implementadas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é tratado o estado da arte da pesquisa, em que é feita uma revisão de literatura sobre as técnicas de identificação e controle aplicados ao paciente paraplégico, visando o

controle de deslocamento angular das pernas. Assim, tem-se uma noção da contribuição que trabalhos com esse tema realizam para a sociedade.

No Capítulo 3, é apresentado o modelo em espaço de estados da dinâmica do movimento da perna e o seu equacionamento, a partir de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) e (GAINO, 2009), sendo usada como uma planta base para a demonstração das técnicas de identificação e controle do processo. Foi demonstrada a abordagem MIMO da planta do paciente paraplégico, que é usada como planta base deste trabalho.

No Capítulo 4, são abordadas técnicas de identificação MIMO por subespaços para a obtenção de modelos lineares, considerando a presença de ruídos brancos e/ou coloridos na estimação. Inicialmente é tratado um algoritmo que não é polarizado na presença de ruídos brancos, mas polarizado pela influência de ruídos coloridos. Posteriormente, são descritos algoritmos que levam em consideração a presença de ruídos coloridos na entrada e/ou saída da planta, sendo estimadores não polarizados.

No Capítulo 5, é trabalhado o Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes, em que é abordada uma lei de controle com chaveamento de modo que o sistema fique insensível a distúrbios e ruídos na planta enquanto a trajetória dos estados estiver sobre uma superfície de chaveamento. Para o projeto dessa superfície é utilizada uma abordagem por restrições LMIs, envolvendo a garantia de passividade do sistema pelo lema RP, alocação robusta de polos pelas regiões D-Estáveis, a restrição do sinal de entrada da planta e a presença de incertezas paramétricas limitadas por norma. Por fim, é descrita uma função saturada contínua que suaviza o chaveamento da lei de controle, evitando assim a presença do efeito de trepidação na saída da planta.

No Capítulo 6, são apresentados os resultados simulados de identificação MIMO por subespaços, sendo explicitados resultados obtidos pelos algoritmos que consideram a presença de ruídos brancos e ruídos coloridos na estimação. Foi realizada a validação do modelo obtido por índices de qualidade conhecidos da literatura, além da análise de autovalores e resíduo de respostas, decretando a melhor ordem que representa o sistema. Posteriormente, o CEV-MD foi projetado com as especificações desejadas para o controle da posição angular das duas

pernas do paciente paraplégico, a partir do modelo obtido pela identificação. Para a estimação dos estados, utilizados na lei de controle por realimentação de estados, é utilizado um observador de estados, projetado por alocação de polos. Por fim, é demonstrado o resultado do controle de posição angular pela técnica de controle estudada, mesmo na presença de distúrbios e incertezas paramétricas. Foi projetado e simulado um controlador CEV-MD com chaveamento suavizado, sendo comparado à um controlador CEV-MD com chaveamento de alta frequência, já difundido na literatura.

Por fim, no Capítulo 7, são ressaltados os pontos notáveis da importância do tema, as simulações realizadas, a indicação dos temas a serem abordados ainda nessa pesquisa e também em trabalhos futuros.

## 2 Identificação e Controle em Paraplegia

Este capítulo apresenta os principais trabalhos científicos recentes relacionados ao tema de pesquisa, nacionais e internacionais. São descritos trabalhos que envolvem identificação e controle em pacientes paraplégicos, envolvendo a aplicação de estimulação elétrica funcional.

Em (VELTINK *et al.*, 1992) foi realizada uma comparação entre o sistema em malha aberta com um controlador e um sistema em malha fechada com um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo), com o uso da FES. Os controladores apresentaram respostas semelhantes.

Um destacado trabalho foi desenvolvido por (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), em que foi desenvolvido um modelo capaz de relacionar parâmetros elétricos à articulação dinâmica de torque para aplicações com FES. Nele, a dinâmica do membro inferior foi representada por um modelo não linear de segunda ordem, em que foram levadas em conta as características gravitacionais e inerciais dos segmentos anatômicos, bem como as propriedades de amortecimento e rigidez da articulação do joelho. A partir de movimentos pendulares livres foram identificados, experimentalmente, os parâmetros elásticos do sistema. Também foram adquiridas as características de movimentos induzidos na perna através da eletroestimulação do músculo quadríceps. Esse trabalho é usado desde então como base para os trabalhos seguintes em controle de posição angular do joelho de pacientes paraplégicos.

Em (FERRARIN *et al.*, 2001), foi projetado um controlador PID do tipo mestre-escravo para controlar a posição angular da perna de pacientes, utilizando o método de Ziegler-Nichols. O controlador obteve bom desempenho, gerando movimentos lentos.

Já em (JEZERNIK; WASSINK; KELLER, 2004), foi realizada uma primeira abordagem de controle por modos deslizantes para a geração de movimento, em que o controlador foi projetado a partir do modelo matemático neuromuscular-esquelético de pacientes. Foram realizadas simulações e implementações em voluntários hígidos e com lesão medular espinhal. Para experimentos com voluntários hígidos, os resultados mostraram bons desempenhos de estabilidade,

robustez e precisão. Já com os voluntários paraplégicos, não foram obtidos bons resultados, sendo justificado pelo alto grau de atrofia muscular observado.

(MOHAMMED *et al.*, 2005) projetou um controlador por modos deslizantes (SMC) de alta ordem, com o objetivo de definir padrões de estimulação para melhoria de desempenho e diminuição da fadiga muscular. Simulações foram realizadas demonstrando resultados satisfatórios em relação à estabilidade e erro de rastreamento, porém nenhum resultado foi apresentado com relação à diminuição da fadiga.

Em (TEIXEIRA *et al.*, 2006), foi realizado, a partir de estudos teóricos e simulações, o primeiro estudo que descreve a aplicação de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) para o controle de posição angular do joelho do paraplégico, em que o sistema de controle foi projetado para alterar o ângulo do joelho em 60°.

Em (SILVA, 2007), foi desenvolvido um sistema eletrônico de FES e de monitoramento, para geração e avaliação de movimentos nos membros inferiores de pacientes hemiplégicos, com rotinas de acompanhamento do progresso do tratamento, visando melhorar e abreviar a reabilitação do hemiplégico. Um algoritmo de controle que utiliza modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, baseado em LMLs, foi utilizado para o controle de geração de movimentos.

Posteriormente, evoluindo a aplicação, implementação e projeto dos controladores, considerando a não linearidade da planta, (TEIXEIRA *et al.*, 2006) e (GAINO, 2009) projetaram um controlador *fuzzy* Takagi-Sugeno, a partir da técnica apresentada por (TANIGUCHI *et al.*, 2001), utilizando a estimulação do músculo quadríceps para a variação do ângulo da articulação do joelho de um paciente paraplégico.

Em (LYNCH; POPOVIC, 2008) foi implementada a aplicação de FES em pessoas paraplégicas em malha fechada, utilizando um controlador PID, controlador *feedforward-feedback* e um controle adaptativo que utiliza um modelo inverso do joelho. Para o projeto dos controladores, a planta foi linearizada utilizando o método de identificação não linear auto regressivo com entrada exógena (NARX – *Nonlinear Auto Regressive Exogenous*). Os resultados obtidos apresentaram erros RMS (*Root Mean Square*) em regime permanente entre 4,6° e 11,7°.

Já em (SHARMA *et al.*, 2009), tem-se uma nova técnica de controle não linear de *feedback* contínuo, denominado RISE (*Robust Integral of the Signal of the Error*). O novo controlador desenvolvido não requer um modelo muscular e pode ser comprovado através de análises baseadas em Lyapunov, que produz estabilidade assintótica para um modelo muscular não linear na presença de perturbações não lineares limitadas. Experimentos realizados em dois indivíduos hígidos demonstraram o bom desempenho do controlador, tanto para o rastreamento de trajetória quanto para a regulação de um ângulo fixo de uma perna humana.

Em (AJOUDANI; ERFANIAN, 2009), foi proposta uma metodologia de controle baseada na combinação sinérgica de redes neurais com o controle por modos deslizantes, aplicada ao controle de posição angular da perna com o uso de FES. Com isso, a robustez do sistema à incertezas e perturbações externas eram atingidas. Porém, a principal desvantagem dos modos deslizantes era relacionada ao efeito de *chattering*, causado pelo chaveamento de alta frequência. Então foram treinadas redes neurais para assumir a lei de controle quando a trajetória do estado do sistema entrar em alguma camada limite em torno da superfície de chaveamento. Assim, obtiveram-se bons resultados de controle de posição, mesmo na presença de incertezas e ruídos, com um sinal de controle de baixa frequência.

Já em (GAINO *et al.*, 2011), foi proposto um sistema de controle com realimentação derivativa com modelos *fuzzy* T-S em malha fechada, fornecendo uma nova alternativa para o controle do ângulo da articulação do joelho, utilizando sensores mais leves e confortáveis para os pacientes.

(LYNCH; GRAHAM; POPOVIC, 2011) apresentaram um bloco de não idealidades, que buscam representar os comportamentos musculares como fadiga, espasmos e tremores. Foi desenvolvido para ser aplicado em simulações, com o objetivo de fornecer estimativas realistas do comportamento muscular. Foram realizadas simulações com controladores PID e SMC. As simulações realistas resultantes fornecem uma avaliação mais precisa de como o controlador pode responder na presença desses comportamentos não ideais. Esse bloco de não idealidades fornece um método conveniente para testar exaustivamente os sistemas FES na simulação antes do teste com seres humanos, economizando tempo e dinheiro.

No trabalho de (KOZAN, 2012), tem-se o uso do processador digital de sinais (DSP – *Digital Signal Processor*) TMS320F28335 Delfino, da família C2000 da Texas Instruments e o software *LabView* para implementar um sistema em malha fechada de controle de posição angular de uma pessoa hígida, com o uso de controladores PID.

Em (SANCHES, 2013), foi desenvolvido um controlador *fuzzy* T-S para o controle do movimento da perna do paciente, com o uso de identificação de modelos locais. Foram considerados quatro modelos locais e maior complexidade no projeto das funções de pertinência, e foram realizados testes em pessoas hígidas e paraplégicas. Foram comparados os resultados utilizando um controlador PID com o *fuzzy* T-S, os quais mostraram que o controlador *fuzzy* não obteve bons resultados.

Em (SANCHES *et al.*, 2014) tem-se o primeiro artigo publicado no Brasil com a implementação dos estímulos elétricos e pacientes paraplégicos utilizando o modelo não linear aplicado ao controlador PID além da utilização do *software* Proteus. Foram obtidos bons resultados com pacientes paraplégicos.

Em (BIAZETO, 2015) tem-se a implementação de um controlador em malha fechada utilizando o modelo *fuzzy* T-S, controladores PI, PID e *fuzzy* adaptativo indireto por rastreamento. Nesse trabalho os resultados foram comparados entre os voluntários hígidos e paraplégicos, aplicando diferentes níveis de frequência.

Já em (SADAT-HOSSEINI; ERFANIAN, 2015), foi desenvolvida uma estratégia de controle robusta para a FES usando eletrodos intramusculares, com base no controle por modos deslizantes com alcance exponencial e rede neural *fuzzy*. Os testes foram executados em ratos, em que os rastreamentos de trajetória foram atingidos com êxito, com um chaveamento de baixa frequência na lei de controle.

Em (KOZAN, 2016), tem-se a implementação um sistema de FES para controlar a posição da perna de paraplégicos utilizando um controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) com o princípio de recuperação da malha objetivo (*Loop Transfer Recovery* - LTR), conhecido como LQG/LTR. Os testes em malha fechada atingiram as posições especificadas, indicando que o uso do controlador LQG/LTR é adequado em sistemas de FES.

Em (DOWNEY *et al.*, 2017), foi utilizado o método de controle chaveado para melhora no uso da estimulação assíncrona. Realizando testes em seis voluntários hígidos, apresentou maior duração no sucesso de rastreamento de trajetória, apesar das diferentes respostas entre os canais de estimulação.

Já em (LI *et al.*, 2017), foi abordado o método de controle SMC baseado em rede neural RBF (*Radial Basis Function*). Foi utilizado um GA (*Genetic Algorithm*) para otimizar os parâmetros da rede e a RBF não linear para aproximar as incertezas e perturbações do modelo. A validação e análises de desempenho do controlador desenvolvido foram realizadas com experimentos práticos em dois voluntários hígidos. Aplicaram-se os controladores GA-RBF-SMC e RBF-SMC, ou seja, com e sem a utilização do algoritmo genético, onde o primeiro apresentou melhor desempenho com relação à robustez e precisão, mesmo com a adição de distúrbios externos.

Já em (GAINO *et al.*, 2017), tem-se resultados de projeto e simulação do controle de posição angular das pernas de pacientes paraplégicos, a partir de FES, em que a planta é descrita por um sistema não linear usando modelos *fuzzy* T-S. Um controle em malha fechada é apresentado, baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov e em LMIs. Novas condições para o projeto de controle com rastreamento de saída foram apresentadas, utilizando uma transformação não linear para a descrição da planta de forma adequada.

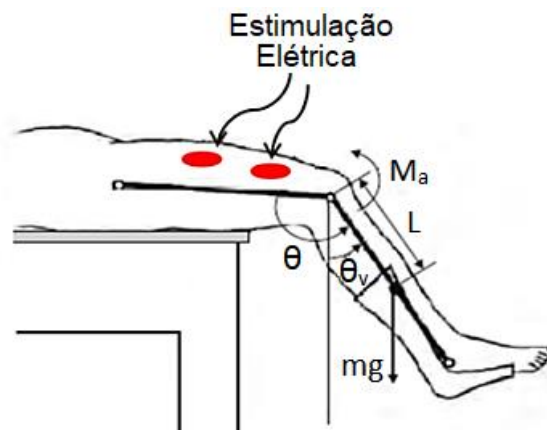
Destaca-se também a reportagem realizada pela Agência UEL, da Universidade Estadual de Londrina, disponível em (TAROBA NEWS, 2018), sobre os projetos de pesquisa com pacientes paraplégicos, do Departamento de Engenharia Elétrica, coordenado pelo professor Ruberlei Gaino. Também integram esse grupo o professor Márcio Roberto Covacic e o aluno de doutorado da Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”, no Câmpus de Ilha Solteira, Anderson Ross Biazeto.

# 3 Desenvolvimento do Modelo Dinâmico do Movimento das Pernas

Neste capítulo será abordado o desenvolvimento do modelo dinâmico do paciente paraplégico, em que será feita uma adaptação da planta tratada no caso SISO para o caso MIMO, visando o uso na identificação multivariável do sistema.

## 3.1 Caso SISO

O modelo matemático do membro inferior usado neste trabalho foi derivado de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), sendo este modelo considerado como planta base em (GAINO *et al.*, 2017), (MAGAN *et al.*, 2017), (BIAZETO, 2015), (SANTOS, 2014), (OLIVEIRA, 2013), (GAINO, 2009). Esse modelo relaciona a largura de pulso de tensão que controla a corrente elétrica aplicada no músculo quadríceps com o torque gerado em torno da articulação do joelho, como mostra a Figura 1.



**Figura 1:** Estimulação elétrica funcional aplicada ao músculo quadríceps.

**Fonte:** adaptação de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) e (GAINO, 2009).

Em (GAINO, 2009), foi elaborada a dinâmica do paciente paraplégico em espaço de estados, com a finalidade de utilizar técnicas de controle para posicionar o ângulo do joelho do paciente em um determinado valor desejado, considerando o caso SISO. Foi levado em conta um segmento rígido do membro inferior, sendo o complexo canela-pé e a coxa, desconsiderando os movimentos da junção do tornozelo, reduzindo o número de graus de liberdade e evitando a modificação das características passivas do joelho devido aos movimentos do tornozelo. O modelo

que expressa o movimento do complexo em questão é descrito pela equação diferencial:

$$J\ddot{\theta}_v = -mgL\text{sen}(\theta_v) + M_s - B\dot{\theta}_v + M_a, \quad (3.1)$$

na qual:

- $J$  é o momento de inércia do complexo canela-pé [ $kg \cdot m^2$ ];
- $B$  é o coeficiente de atrito viscoso [ $N \cdot m \cdot s / rad$ ];
- $m$  é a massa do complexo canela-pé [ $kg$ ];
- $g$  é a aceleração gravitacional [ $m/s^2$ ];
- $L$  é a distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé [ $m$ ];
- $\theta$  é o ângulo comum do joelho ( $\pi/2$ ) [ $rad$ ];
- $\theta_v$  é o ângulo da canela em relação ao eixo vertical [ $rad$ ];
- $\dot{\theta}_v$  é a velocidade angular da canela [ $rad/s$ ];
- $\ddot{\theta}_v$  é a aceleração angular da canela [ $rad/s^2$ ];
- $M_a$  é o torque ativo do joelho, resultado da estimulação do quadríceps [ $N \cdot m$ ];
- $M_s$  é o torque devido ao componente da rigidez [ $N \cdot m$ ].

Com relação ao parâmetro  $M_s$ , o mesmo pode ser calculado por:

$$M_s = -\lambda e^{-E \cdot \theta} (\theta - \omega), \quad (3.2)$$

em que  $\lambda$  e  $E$  são coeficientes do termo exponencial e  $\omega$  é o ângulo elástico de repouso do joelho. Segundo (GAINO, 2009), o sinal negativo em (3.2) é devido à escolha do torque do extensor como o positivo e o termo exponencial representa a não linearidade da elasticidade do joelho. Em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) foram encontradas posições de descanso entre  $5^\circ$  e  $15^\circ$  em todos os pacientes, implicando então que o comportamento elástico do torque passivo, aplicado à junção do joelho, torna-se zero (posição neutra), quando o ângulo vertical do pé mais baixo é maior do que  $0^\circ$ . Em (GAINO, 2009), foi substituído (3.2) em (3.1), e considerado  $\theta = \theta_v + \pi/2$ , resultando em,

$$J\ddot{\theta}_v = -mgL\text{sen}(\theta_v) - \lambda e^{-E \cdot (\theta_v + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_v + \frac{\pi}{2} - \omega \right) - B\dot{\theta}_v + M_a. \quad (3.3)$$

Podem ser obtidos também os valores de  $M_{a0}$  e  $P_0$ , calculados no ponto de operação de interesse ( $\theta_{v0}$ ). Para a obtenção de  $M_{a0}$ , utiliza-se (3.3), determinada no ponto de operação, sabendo que nesse ponto  $\dot{\theta}_v = \ddot{\theta}_v = 0$ . Isolando  $M_{a0}$  de (3.3), tem-se,

$$M_{a0} = mgL \text{sen}(\theta_{v0}) - \lambda e^{-E \cdot (\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right). \quad (3.4)$$

Também foi especificado que o torque ( $M_a$ ) ao qual o músculo estará sujeito e a largura de pulsos da estimulação elétrica ( $P$ ) aplicada ao músculo pela modulação PWM (*Pulse Width Modulation* – Modulação por Largura de Pulso), podem ser relacionados pela função de transferência de primeira ordem a seguir:

$$H(s) = \frac{M_a(s)}{P(s)} = \frac{G}{\tau \cdot s + 1}, \quad (3.5)$$

sendo  $G$  e  $\tau$ , o ganho e constante de tempo, respectivamente, cujos valores são identificados para cada paciente, como sugerido em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000). A equação (3.5) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$(\tau \cdot s + 1) \cdot M_a(s) = G \cdot P(s). \quad (3.6)$$

Convertendo (3.6) para o domínio do tempo,

$$\tau \cdot \dot{M}_a + M_a = G \cdot P, \quad (3.7)$$

sendo  $M_a = M_a(t)$  e  $P = P(t)$ . Sabendo que  $M_a = \Delta M_a + M_{a0}$  e  $\Delta \dot{M}_a = \dot{M}_a$ , a equação (3.7) torna-se:

$$\tau \cdot \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a + M_{a0} = G \cdot P, \quad (3.8)$$

$$\tau \cdot \Delta \dot{M}_a + \Delta M_a = G \cdot \left( P - \frac{M_{a0}}{G} \right). \quad (3.9)$$

De (3.9), conclui-se que, no ponto de operação ( $\Delta \dot{M}_a = \Delta M_a = 0$ ). Assim, a largura de pulso  $P_0$  é dada por:

$$P_0 = \frac{M_{a0}}{G}. \quad (3.10)$$

Como abordado em (GAINO, 2009), quando um ponto de equilíbrio de interesse do sistema não é a origem, da teoria de estabilidade segundo Lyapunov, é

necessário efetuar uma mudança de variáveis de modo que o ponto de equilíbrio seja a origem do novo sistema de coordenadas. Para isso, definem-se as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_v &= \theta_v - \theta_{v0}, \\
\theta_v &= \Delta\theta_v + \theta_{v0}, \\
\dot{\theta}_v &= \Delta\dot{\theta}_v, \\
\ddot{\theta}_v &= \Delta\ddot{\theta}_v, \\
\Delta M_a &= M_a - M_{a0}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim, reescrevendo a equação (3.3), tem-se,

$$J\Delta\ddot{\theta}_v = \left[ \frac{-mgL\text{sen}(\Delta\theta_v + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(\Delta\theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (\Delta\theta_v + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{\Delta\theta_v} \right] \Delta\theta_v - B\Delta\dot{\theta}_v + \Delta M_a. \tag{3.12}$$

São definidas as variáveis de estados:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_v &= x_1, \\
\Delta\dot{\theta}_v &= \dot{x}_1 = x_2, \\
\Delta M_a &= x_3.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo as variáveis de (3.13) em (3.12),

$$J\dot{x}_2 = \left[ \frac{-mgL\text{sen}(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} (x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega) + M_{a0}}{x_1} \right] x_1 - Bx_2 + x_3. \tag{3.14}$$

Manipulando a equação (3.9), tem-se,

$$\tau \cdot \Delta\dot{M}_a = -\Delta M_a + G \cdot (P_n), \tag{3.15}$$

sendo:

$$P_n = P - \frac{M_{a0}}{G}. \tag{3.16}$$

Substituindo (3.13) em (3.15),

$$\tau \cdot \dot{x}_3 = -x_3 + G \cdot (P_n). \tag{3.17}$$

Escrevendo (3.13), (3.14) e (3.17) no espaço de estados, tem-se,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{f}_n(x_1) & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{G}{\tau} \end{bmatrix} P_n, \quad (3.18)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

cuja saída  $y$  é a variação da posição angular  $x_1 = \Delta\theta_v$ . A função  $\tilde{f}_n(x_1)$  é um parâmetro não linear do sistema, definido como:

$$\tilde{f}_n(x_1) = \frac{1}{Jx_1} \left[ -mgL \sin(x_1 + \theta_{v0}) - \lambda e^{-E(x_1 + \frac{\pi}{2})} \left( x_1 + \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right) + M_{a0} \right], \quad (3.20)$$

sendo:

$$M_{a0} = mgL \sin(\theta_{v0}) + \lambda e^{-E(\theta_{v0} + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_{v0} + \frac{\pi}{2} - \omega \right). \quad (3.21)$$

### 3.2 Caso MIMO

O modelo SISO da dinâmica da perna do paciente paraplégico abordado na Seção 3.1 descreve o comportamento da posição angular do complexo canela-pé do paciente a partir da eletroestimulação aplicada ao músculo quadríceps. Esse conceito vêm sendo utilizado como base para pesquisas realizadas pelo laboratório de Controle Avançado, Robótica e Engenharia Biomédica, da Universidade Estadual de Londrina, e também pelo departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) de Ilha Solteira.

Nesses trabalhos, utilizando o modelo de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), abordam apenas o comportamento de uma perna, sem a influência da dinâmica causada pela outra perna. Como o objetivo deste trabalho é a abordagem MIMO, visando a obtenção de um modelo matemático da dinâmica das duas pernas do paciente paraplégico em uma futura implementação prática, a partir da identificação por subespaços, foi então realizada a expansão da planta SISO para o caso MIMO, utilizada como planta base deste trabalho.

Considerando um modelo MIMO da planta do paciente paraplégico, com o objetivo de representar matematicamente a dinâmica das duas pernas do paciente paraplégico, tem-se a aplicação de duas larguras de pulsos independentes ( $P_{n1}$  e

$P_{n2}$ ) para gerar um torque em torno das articulações das pernas ( $M_{a1}$  e  $M_{a2}$ ) e obter os deslocamentos angulares ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ) desejados para o paciente, como abordado em (MAGAN *et al.*, 2017). Dessa forma, uma representação expandida para um sistema MIMO de (3.18) e (3.19) é considerada, sendo adaptada de (GAINO, 2009), em que as variáveis de estados são definidas como:

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_{v_1} &= x_1, \\
\Delta\dot{\theta}_{v_1} &= x_2, \\
\Delta M_{a_1} &= x_3, \\
\Delta\theta_{v_2} &= x_4, \\
\Delta\dot{\theta}_{v_2} &= x_5, \\
\Delta M_{a_2} &= x_6,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

nas quais os índices 1 e 2 referem-se a cada perna analisada (perna 1 e perna 2, respectivamente). Dessa forma, tem-se a planta MIMO expandida, com a representação envolvendo os parâmetros das duas pernas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{f}_{n1} & -B_1/J_1 & 1/J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_{n2} & -B_2/J_2 & 1/J_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ G_1/\tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & G_2/\tau_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

As funções  $\tilde{f}_{n1}$  e  $\tilde{f}_{n2}$  também representam os parâmetros não lineares do sistema para as duas pernas, semelhante à representação em (3.20) e (3.21), resultando em:

$$\tilde{f}_{n1}(x_1) = \frac{1}{J_1 x_1} \left[ -m_1 g L_1 \sin(x_1 + \theta_{v0_1}) - \lambda_1 e^{-E_1(x_1 + \frac{\pi}{2})} \left( x_1 + \theta_{v0_1} + \frac{\pi}{2} - \omega_1 \right) + M_{a0_1} \right], \tag{3.25}$$

$$M_{a0_1} = m_1 g L_1 \text{sen}(\theta_{v0_1}) + \lambda_1 e^{-E_1(\theta_{v0_1} + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_{v0_1} + \frac{\pi}{2} - \omega_1 \right), \quad (3.26)$$

$$\tilde{f}_{n2}(x_4) = \frac{1}{J_2 x_4} \left[ -m_2 g L_2 \text{sen}(x_4 + \theta_{v0_2}) - \lambda_2 e^{-E_2(x_4 + \frac{\pi}{2})} \left( x_4 + \theta_{v0_2} + \frac{\pi}{2} - \omega_2 \right) + M_{a0_2} \right], \quad (3.27)$$

$$M_{a0_2} = m_2 g L_2 \text{sen}(\theta_{v0_2}) + \lambda_2 e^{-E_2(\theta_{v0_2} + \frac{\pi}{2})} \left( \theta_{v0_2} + \frac{\pi}{2} - \omega_2 \right). \quad (3.28)$$

## 4 Identificação por Subespaços

Neste capítulo, é apresentado o método de identificação por subespaços, envolvendo sistemas determinísticos e estocásticos, que são utilizados para a obtenção de um modelo no espaço de estados que melhor represente um sistema dinâmico. São descritos os algoritmos de identificação por subespaços MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO, e também são mostrados os índices de qualidade, já difundidos na literatura, que foram utilizados para uma análise quantitativa dos resultados obtidos pelos algoritmos.

A utilização desses métodos de identificação de sistemas aplicados à planta do paciente paraplégico se motivou por ser uma nova abordagem ao modelo matemático de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), já difundido na literatura, que depende de testes antropométricos e de estímulos elétricos, para a obtenção do ponto motor e dos parâmetros antropométricos de uma perna do paciente. Com a identificação por subespaços, é possível a obtenção de um modelo matemático descrito no espaço de estados, que descreva a dinâmica MIMO da planta, usando apenas a eletroestimulação funcional para se obter o comportamento dinâmico do modelo.

Essa abordagem de identificação por subespaços considera a presença de ruídos brancos e coloridos, descritos no Apêndice B, seja nas entradas das plantas ou na medição das saídas do sistema, para a obtenção de um modelo não polarizado, mesmo na presença desses ruídos no processo de estimação. Não há nenhum relato, na literatura especializada, de seu uso na determinação de modelos matemáticos em sistemas de reabilitação de pacientes paraplégicos, o que determina a importância de uso das técnicas.

### 4.1 Introdução

Como aborda (LJUNG, 1996), o termo “identificação de sistemas” foi inventado por Lotfi Zadeh em 1962, sendo definido como:

*“Identificação é a determinação, baseado nas entradas e nas saídas, de um sistema dentro de uma classe específica de sistemas, o qual é equivalente ao sistema sob o teste”.*

Isso significa obter modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseados nos dados de entrada e saída observados. Assim, a identificação de sistemas representa a interface entre o mundo dos modelos matemáticos e o mundo real. Porém, deve-se enfatizar que é uma técnica de aproximação de sistemas reais por meio de modelos, pois não existe um sistema “ideal” nas aplicações práticas. Qualquer aplicação de teoria de controle ao mundo real tem que, de uma forma ou outra, tratar com problemas de identificação de sistemas.

Segundo (KATAYAMA, 2005), modelos dinâmicos para predição e controle incluem funções de transferência, modelos no espaço de estados, modelos em séries temporais, etc., que são parametrizados em termos de um número finito de parâmetros. Assim, esses modelos dinâmicos são conhecidos como modelos paramétricos, e requerem a escolha de uma possível estrutura de modelo, de um critério de ajuste de parâmetros e da estimação dos parâmetros que melhor ajustem o modelo aos dados experimentais. Também existem os modelos não paramétricos, que são representados por curvas de respostas ao impulso, respostas em frequência, análise de correlação, função densidade espectral, etc., em que não existe um número finito de parâmetros. A identificação por subespaços abordada neste trabalho limita-se a modelos paramétricos.

Existem diversas aproximações para gerar um modelo de um sistema. Uma delas é a partir de princípios básicos, como leis da física, química, biologia, etc., que expliquem detalhadamente os mecanismos essenciais do fenômeno observado. Segundo (SERRA, 2005), essa aproximação analítica é conhecida como modelagem “caixa branca”, em que se tem o conhecimento necessário *a priori* do sistema, baseado em leis básicas que representam o comportamento dinâmico do sistema. Para os engenheiros, no entanto, este tipo de tratamento não é realmente útil, pois não é de interesse o modelo exato como tal, mas sim suas aplicações potenciais na engenharia.

Nesta perspectiva, um modelo matemático é só um passo no projeto global de um sistema. A qualidade de um modelo é ditada pelo objetivo final para o qual ele serve, em que a incerteza de um modelo é permitida sempre que a robustez total do sistema seja assegurada. Assim, utilizando a identificação de sistemas, pode-se obter uma aproximação experimental. Para isso, experimentos são executados no

sistema, e as medidas e observações são coletadas, e então o modelo é obtido a partir da modelagem “caixa preta”. Neste tipo de modelo nenhum conhecimento prévio (*a priori*) do sistema dinâmico é conhecido. Ou seja, não sabemos os elementos que compõem o sistema ou processo, só os sinais de entrada e saída. O problema consiste em escolher uma estrutura adequada para o modelo, e com isso obter a maior informação possível do sistema.

Após a escolha da estrutura, o passo a seguir é a estimação dos parâmetros do modelo a partir dos dados medidos, e assim, obter o modelo paramétrico. Então, deve ser realizada a validação do modelo obtido, no qual o modelo é testado com dados experimentais que não foram usados no experimento de identificação do sistema, para analisar se a representação obtida é apropriada. Neste trabalho foi utilizada a modelagem “caixa preta” para a identificação do sistema, pelos métodos de identificação por subespaços.

Os métodos de identificação por subespaços abordados em (RICCO, 2012), (BORJAS; GARCIA, 2012), (CLAVIJO, 2008), (VERHAEGEN; VERDULT, 2007) e (KATAYAMA, 2005), tratam de sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo. Basicamente, o método visa, através dos dados mensurados de entrada e saída, encontrar os estados e as matrizes do modelo representado no espaço de estados. Este modelo é representado pelas equações de estado e de saída:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (4.1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k, \quad (4.2)$$

onde:

- Os vetores  $u_k$  e  $y_k$  são medições de entradas e saídas, respectivamente, no instante de tempo  $k$ , enquanto  $x_k$  é o vetor de estados, também medido no instante de tempo  $k$ ;
- As matrizes A, B, C e D, respectivamente, são a matriz que representa a dinâmica do sistema, a matriz de entradas, a matriz de saídas e a matriz de transmissões direta entre a entrada e a saída;
- As variáveis  $w_k$  e  $v_k$  são vetores conhecidos não mensuráveis, sendo ruídos de processo e de medição, respectivamente;

- O par de matrizes  $[A, C]$  é assumido ser observável, implicando que todos os modos dinâmicos do sistema podem ser observados a partir da saída  $y_k$ , ou seja, podem ser identificados;
- O par de matrizes  $[A, B]$  é assumido ser controlável, implicando que os modos dinâmicos do sistema podem ser excitados pela entrada determinística  $u_k$  e/ou pela entrada estocástica  $w_k$ .

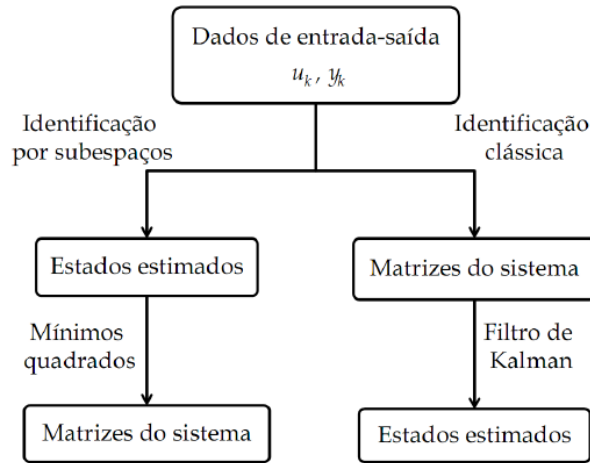
Segundo (RICCO, 2012) e (LJUNG, 1987), o diferencial dos métodos de identificação por subespaços em relação aos métodos clássicos é a facilidade de obter as sequências de estados de um sistema dinâmico diretamente a partir das medições dos dados de entrada e saída. Esse diferencial é obtido por meio de ferramentas algébricas e não por métodos iterativos como nos métodos por mínimos quadrados estendido (MQE), mínimos quadrados generalizados (MQG), filtro de Kalman, entre outros. Além disso, conforme (BORJAS; GARCIA, 2012) e (RICCO, 2012), a boa robustez numérica dos algoritmos de identificação por subespaços é devida a métodos numéricos de álgebra linear largamente conhecidos, como: decomposição QR, decomposição LQ, decomposição em valores singulares (SVD) e suas generalizações, entre outros.

Em suma, de posse dos dados de entrada e saída, os métodos de subespaços estimam os estados e, posteriormente, são obtidas as matrizes do sistema. De acordo com (DE COCK; DE MOOR, 2003), os dois principais passos dos algoritmos de identificação por subespaço são:

- Determinar a ordem  $n$  do modelo e as estimativas das sequências de estados  $\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j}$ , nas quais o símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  denota o valor estimado. Primeiramente, os estados são encontrados pela projeção no espaço de linhas das matrizes de dados em blocos de Hankel (utilizando a decomposição QR e LQ) e, depois, pela decomposição em valores singulares;
- Resolver o problema de mínimos quadrados para obter as matrizes em espaço de estados:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \min_{A,B,C,D} \left\| \begin{pmatrix} \hat{x}_{i+1} & \hat{x}_{i+2} & \dots & \hat{x}_{i+j} \\ y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+j-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_i & \hat{x}_{i+1} & \dots & \hat{x}_{i+j-1} \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \end{pmatrix} \right\|_F^2, \quad (4.3)$$

em que  $\|\cdot\|_F$  denota a norma de Frobenius da matriz. Nos métodos clássicos, a abordagem é oposta. Primeiro, estimam-se as matrizes do sistema e depois os seus estados, conforme ilustrado na Figura 2.



**Figura 2:** Comparação entre métodos de subespaços e métodos tradicionais.

Fonte: (RICCO, 2012).

Dentre os algoritmos de identificação por subespaços, disponíveis em (BORJAS; GARCIA, 2012), (RICCO, 2012), (CLAVIJO, 2008), (VERHAEGEN; VERDULT, 2007) e (KATAYAMA, 2005), para esse trabalho, o algoritmo MOESP (*Multivariable Output-Error State Space*) e suas generalizações (MOESP-PI e MOESP-PO) foram escolhidos por utilizar apenas as informações dos dados de entradas e saídas para a obtenção do modelo, sem a necessidade da informação dos estados, diferentemente do algoritmo N4SID (*Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*). Tais matrizes são obtidas diretamente de uma matriz de observabilidade estendida, que é apresentada na próxima seção.

## 4.2 Identificação Estocástica MOESP

O problema de identificação requer que, por meio de dados de entrada e saída, encontrem-se as matrizes que compõem as equações (4.1) e (4.2). Essas equações podem ser rearranjadas e, após algumas substituições deduzidas em (RICCO, 2012), colocadas como a seguir:

$$Y_p = \Gamma_i \cdot X_p + H_i^d \cdot U_p + H_i^s \cdot E_p, \quad (4.4)$$

$$Y_f = \Gamma_i \cdot X_f + H_i^d \cdot U_f + H_i^s \cdot E_f, \quad (4.5)$$

em que:

- $Y_p, Y_f, U_p$  and  $U_f$  são matrizes em blocos de Hankel de saídas e entradas, passadas e futuras, respectivamente;
- $X_p$  e  $X_f$  representam as sequências de estados passados e futuros, respectivamente;
- $\Gamma_i, H_i^d$  e  $H_i^s$  são as matrizes de observabilidade estendida, em blocos triangulares inferior de Toeplitz determinística e do ruído, respectivamente;
- $E_p$  e  $E_f$  são os ruídos aditivos passados e futuros, respectivamente.

Assumindo a suficiência dos subespaços formados por  $Y_p, Y_f, U_p$  e  $U_f$  no modelo de equações matriciais de dados entrada-saída apresentados em (4.4) e (4.5), é tratado o problema de estimação dos subespaços da matriz de observabilidade estendida  $\Gamma_i$  por meio de dados de entrada e saída. Um dos principais passos para essa estimação é a determinação da ordem  $n$  do sistema, ressaltando que para obter  $\Gamma_i$  somente o termo  $\Gamma_i \cdot X_f$  é necessário, sendo então estimado pela projeção oblíqua de dados entrada-saída ( $O_i$ ), denotado como:

$$O_i = \Gamma_i \cdot X_f. \quad (4.6)$$

Dessa forma,  $\Gamma_i$  pode ser estimada pela decomposição  $LQ$  a partir dos dados de entrada-saída ( $U_f$  e  $Y_f$ ), como mostrado abaixo. Em (RICCO, 2012) é descrita a obtenção da decomposição  $LQ$  através da decomposição  $QR$ . Assim,

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Y_f \end{bmatrix} = R \cdot Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

em que  $R^T = L$  é uma matriz triangular superior e  $Q$  é uma matriz ortogonal com  $Q^T Q = I$ . Assim, (4.7) pode ser expressa em termos de  $L$  e  $Q$  por,

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A projeção para o método MOESP pode ser calculada a partir da decomposição em valores singulares da matriz  $L_{22}$ , conforme (VERHAEGEN; DEWILDE, 1992),

$$[L_{22}] = U.S.V^T = [U_s \quad U_r] \begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^T \\ V_r^T \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

em que  $S_s$  e  $S_r$  são submatrizes de  $S$  contendo os valores singulares não-nulos em  $S$ , divididos em partes referentes ao sinal e ao ruído. Já  $U_s$ ,  $U_r$ ,  $V_s^T$  e  $V_r^T$  são as partes correspondentes de  $U$  e  $V^T$ , também com partes referentes ao sinal e ao ruído.

A ordem  $n$  do sistema é igual ao número de valores singulares não-nulos em  $S_s$ . Segundo (RICCO, 2012) e (VAN DER VEEN; DEPRETTERE; SWINDLEHURST, 1993), todos os valores singulares de  $O_i$  podem ser diferentes de zero, ou seja, a diagonal da matriz  $S$  pode não ter somente os valores singulares originais ( $S_s$ ). Contudo, o posto do sistema a ser identificado pode ser escolhido pelo número de valores singulares mais significativos. Isto pode ser uma tarefa crítica, para a qual poucas orientações teóricas estão disponíveis. Segundo (VERHAEGEN; VERDULT, 2007), na prática, costuma-se comparar a magnitude dos primeiros valores singulares com os demais. Ao detectar uma maior variação na magnitude de um valor singular para o valor seguinte, estima-se a ordem  $n$  do sistema de acordo com o valor singular de maior valor nessa comparação. Por fim, as matrizes requeridas para (4.6) podem ser obtidas como em (RICCO, 2012):

$$\Gamma_i = U_s.S_s^{1/2} = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{i-1} \end{bmatrix}, \quad X_f = S_s^{1/2}.V_s^T. \quad (4.10)$$

Dessa forma, a matriz  $C$  do sistema identificado pode ser obtida diretamente a partir do primeiro bloco linha de  $\Gamma_i$ . Já a matriz  $A$  é determinada a partir das seguintes estruturas deslocadas de  $\Gamma_i$ :

$$\underline{\Gamma}_i = [C \quad C.A \quad \dots \quad C.A^{i-2}]^T, \quad \overline{\Gamma}_i = [C.A \quad \dots \quad C.A^{i-1}]^T, \quad (4.11)$$

em que  $\underline{\Gamma}_i$  é  $\Gamma_i$  sem o último bloco linha e  $\overline{\Gamma}_i$  é  $\Gamma_i$  sem o primeiro bloco linha. Com isso, é possível determinar  $A$  resolvendo o seguinte problema de mínimos quadrados linear:

$$\underline{\Gamma}_i.A = \overline{\Gamma}_i. \quad (4.12)$$

As matrizes  $B$  e  $D$  pode ser obtidas pelo método dos mínimos quadrados, disponível em (RICCO, 2012), (KATAYAMA, 2005) e (VERHAEGEN; DEWILDE, 1992). Multiplicando (4.5) pela esquerda por  $\Gamma_i^\perp$  e pela direita por  $U_f^+$ , obtém-se:

$$\Gamma_i^\perp \cdot Y_f \cdot U_f^+ = \Gamma_i^\perp \cdot \Gamma_i \cdot X_f \cdot U_f^+ + \Gamma_i^\perp \cdot H_i^d \cdot U_f \cdot U_f^+ + \Gamma_i^\perp \cdot H_i^s \cdot E_f \cdot U_f^+, \quad (4.13)$$

em que  $\Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$  é uma matriz de posto completo que satisfaz  $\Gamma_i^\perp \cdot \Gamma_i = 0$  e  $E_f$  não possui correlação com  $U_f^+$ , em que  $U_f^+$  é a matriz em blocos de Hankel das entradas futuras  $U_f$  adicionando-se um bloco linha. Dessa forma, a equação (4.13) pode ser simplificada para:

$$\Gamma_i^\perp \cdot Y_f \cdot U_f^+ = \Gamma_i^\perp \cdot H_i^d. \quad (4.14)$$

Considerando o termo à esquerda de (4.4) como  $\mathcal{M}$  e  $\Gamma_i^\perp$  como  $\mathcal{L}$ , tem-se,

$$(\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \dots \quad \mathcal{M}_i) = (\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \dots \quad \mathcal{L}_i) \cdot \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Reescrevendo (4.15), tem-se,

$$(\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \dots \quad \mathcal{M}_i) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \dots & \mathcal{L}_{i-1} & \mathcal{L}_i \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 & \dots & \mathcal{L}_i & 0 \\ \mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_i & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \underline{\Gamma_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Assim, a equação (4.16) pode ser solucionada por meio do método de mínimos quadrados para obter as matrizes  $B$  e  $D$ . O fluxograma que descreve a lógica do algoritmo MOESP está descrito no Apêndice E.

### 4.3 Identificação Estocástica MOESP-PI

No método descrito na seção anterior, o algoritmo trabalha com estimadores não polarizados quando o ruído de processo  $w_k$  e de medição  $v_k$  de (4.1) e (4.2) forem brancos. De acordo com (VERHAEGEN; VERDULT, 2007) e (RICCO, 2012), quando o ruído de processo e de medição forem coloridos, esses estimadores serão

polarizados. O método chamado de variáveis instrumentais (VIs) é um algoritmo não polarizado que pode ser usado para determinar as matrizes do sistema. Em trabalhos como (ACOSTA; BOTTURA, 2017), (RICCO, 2012) e (VERHAEGEN; VERDULT, 2007), tem-se a ideia de correlacionar ambos os lados de (4.5) com uma variável que elimine o termo  $U_f$  e faça com que o termo de ruído  $E_f$  seja anulado assintoticamente, mas mantenha o termo de sinal intacto.

Para eliminar a influência da entrada com a projeção apropriada, multiplica-se (4.5) por  $\prod_{U_f}^\perp$ , e obtém-se,

$$Y_f \cdot \prod_{U_f}^\perp = \Gamma_i \cdot X_f \cdot \prod_{U_f}^\perp + H_i^S \cdot E_f \cdot \prod_{U_f}^\perp. \quad (4.17)$$

Visando recuperar o espaço coluna de  $\Gamma_i$ , para a utilização de algoritmos MOESP, elimina-se o termo  $H_i^S \cdot E_f \cdot \prod_{U_f}^\perp$  fazendo com que a influência do ruído sobre o cálculo do espaço coluna de  $\Gamma_i$  desapareça. Para isso, deve-se encontrar uma matriz  $Z_j$  que garanta as seguintes propriedades de VIs:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{j} \right) \cdot H_i^S \cdot E_f \cdot \prod_{U_f}^\perp \cdot Z_j^T = 0, \quad (4.18)$$

$$\text{posto} \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{j} \right) \cdot \Gamma_i \cdot X_f \cdot \prod_{U_f}^\perp \cdot Z_j^T \right) = n. \quad (4.19)$$

Essas propriedades mostram que o termo de ruído pode ser eliminado de (4.17), multiplicando a mesma pela direita por  $Z_j$  e tomando o limite de  $j \rightarrow \infty$ . Essas propriedades também garantem que a multiplicação por  $Z_j$  não modifica o posto do termo resultante que envolve  $\Gamma_i$  em (4.17). Portanto, assim como em (4.16) e (4.7), pode-se obter estimativas do espaço coluna de  $\Gamma_i$  pela decomposição em valores singulares de  $Y_f \cdot \prod_{U_f}^\perp \cdot Z_j^T = O_i$ , a partir de um estimador não polarizado.

Realizando então a projeção oblíqua dos dados de entrada e saída, utilizando a decomposição LQ a partir da decomposição QR, tem-se a forma mais eficiente de implementar o método de variáveis instrumentais, dada por:

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Z_j \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{22} & R_{23} \\ 0 & 0 & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

sendo então descrita em termos de L e Q, por:

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Z_j \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Como deduzido e provado em (RICCO, 2012) e (VERHAEGEN; VERDULT, 2007), dada a decomposição LQ de (4.21), tem-se:

$$Y_f \cdot \prod_{U_f}^\perp \cdot Z_j^T = L_{32} \cdot L_{22}^T. \quad (4.22)$$

Dessa forma, a matriz  $L_{32} \cdot L_{22}^T$  pode ser usada para obter estimativas de maneira não polarizada do sistema, sendo necessário determinar então a forma de escolha de  $Z_j$ .

Considerando então que o sistema descrito por (4.1) e (4.2) com ruído de processo  $w_k$  igual a zero e ruído de medição  $v_k$  como uma sequência de ruído colorido, aplica-se o algoritmo de identificação MOESP-PI, em que o termo PI remete a *past input* (entradas passadas). Nesse algoritmo, faz-se uso de  $Z_j = U_p$ , em que  $U_p$  mostra ser o termo apropriado para remover tanto  $U_f$  quanto  $E_f$  (VERHAEGEN; VERDULT, 2007). Assim, a equação (4.21) é adequada para:

$$\begin{bmatrix} U_f \\ U_p \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

fazendo-se uso de  $L_{32}$  na decomposição em valores singulares. A complementação do algoritmo para a obtenção das matrizes A, B, C e D, é semelhante ao método MOESP a partir de (4.9), adequando-se para,

$$[L_{32}] = U \cdot S \cdot V^T = [U_s \quad U_r] \begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^T \\ V_r^T \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

O fluxograma que descreve a lógica do algoritmo MOESP-PI está descrito no Apêndice E.

#### 4.4 Identificação Estocástica MOESP-PO

Considerando agora o ruído de processo  $w_k$  e o ruído de medição  $v_k$  adicionados ao sistema (4.1) e (4.2) como sequências de ruído colorido, se forem utilizadas apenas as entradas passadas  $U_p$  para compor a matriz de variáveis

instrumentais, o estimador MOESP-PI poderá ser polarizado (VERHAEGEN; VERDULT, 2007), (RICCO, 2012), (KATAYAMA, 2005). Assim, para satisfazer (4.18), deve-se expandir a variável instrumental, adicionando as saídas passadas  $Y_p$ .

$$Z_j = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

A utilização dessa matriz de variáveis instrumentais caracteriza o algoritmo como em MOESP-PO, em que PO remete a *past outputs* (saídas passadas). Para esse método, assim como em (4.23), a equação (4.21) é alterada para:

$$\begin{bmatrix} U_f \\ U_p \\ Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

fazendo-se uso de  $[L_{42} \ L_{43}]$  na decomposição em valores singulares. A complementação do algoritmo para a obtenção das matrizes A, B, C e D, é semelhante ao método MOESP a partir de (4.9), adequando-se para,

$$[L_{42} \ L_{43}] = U \cdot S \cdot V^T = [U_s \ U_r] \begin{bmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^T \\ V_r^T \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

O fluxograma que descreve a lógica do algoritmo MOESP-PO está descrito no Apêndice E.

## 4.5 Índices de Qualidade

A partir da obtenção do modelo matemático do sistema feitos pelos algoritmos abordados nas Seções 4.2, 4.3 e 4.4, o mesmo deve ser avaliado a partir de um novo conjunto de dados e analisado se consegue atingir o objetivo desejado. Segundo (CLAVIJO, 2008), a validação do modelo serve para determinar se o modelo identificado deve, ou não, ser aceito como descrição apropriada que expresse as dinâmicas do sistema. Têm-se diversos testes de validação de modelos, como a análise estatística de resíduos, simples inspeção por meio de simulação, e também por índices de qualidade.

Para analisar de forma quantitativa sobre o melhor modelo estimado ou o melhor algoritmo de identificação para certo objetivo, é feito o uso de índices que mensuram a qualidade dos ajustes desse modelo aos dados experimentais do

sistema. Como abordado em (CHAI; DRAXLER, 2014), um dos indicadores mais utilizados em identificação de sistemas é o índice RMSE (*Root Mean Square Error* – raíz quadrada do erro médio), descrito por:

$$RMSE = \left( \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{N}} \right) \cdot 100\% \quad (4.28)$$

em que  $y_i$  é o  $i$ -ésimo ponto da saída medida,  $\hat{y}_i$  é o  $i$ -ésimo ponto da saída estimada pelo modelo obtido e  $N$  é a quantidade de dados utilizados para a validação. Para fins de análise, quanto menor o valor de RMSE, maior será a eficiência do modelo na recuperação das características dinâmicas do sistema.

Outro importante índice também abordado em (CHAI; DRAXLER, 2014) é o MAE (Mean Absolute Error – erro médio absoluto), descrito abaixo, cuja análise se assemelha ao RMSE. Quanto menor o valor de MAE, melhor é o modelo obtido.

$$MAE = \left( \frac{\sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|}{N} \right) \cdot 100\%. \quad (4.29)$$

Por fim, tem-se o índice FIT, que relaciona a norma do erro entre os dados experimentais e estimados com a média dos dados experimentais. Quanto mais próximo de 100% esse índice estiver, melhor será o modelo obtido. O FIT pode ser descrito por:

$$FIT(\%) = \left( 1 - \frac{\|y_i - \hat{y}_i\|_2}{\|y_i - \text{mean}(y_i)\|_2} \right) \cdot 100\% \quad (4.30)$$

## 5 Controlador

Como descrito no Capítulo 2, os trabalhos de 2005 à 2017 dos grupos de pesquisas da Universidade Estadual de Londrina e Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho” de Ilha Solteira, voltadas ao controle de posição angular do joelho do paciente paraplégico, vem utilizando o algoritmo PID, para modelos descritos por função de transferência, e controladores que utilizam modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, baseado em LMIs, para plantas descritas no espaço de estados. Em (GAINO *et al.*, 2017), foi enfatizada a teoria *fuzzy* para o controle em malha fechada, em que o projeto do controlador baseou-se na teoria de estabilidade de Lyapunov e em LMIs, e foram apresentadas novas condições para o projeto de controle com rastreamento de saída, utilizando uma transformação não linear para a descrição da planta de forma adequada.

Em (AJOUDANI; ERFANIAN, 2009), foi proposta uma metodologia de controle baseada na combinação sinérgica de redes neurais com o controle por modos deslizantes, aplicada ao controle de posição angular da perna com o uso de FES, em que foram treinadas redes neurais para assumir a lei de controle, tornando o sinal de controle com chaveamento de baixa frequência., mesmo na presença de incertezas e ruídos. Já em (SADAT-HOSSEINI; ERFANIAN, 2015), foi desenvolvida uma estratégia de controle robusta, com base no controle por modos deslizantes com alcance exponencial e rede neural *fuzzy*, também com um chaveamento de baixa frequência na lei de controle.

Neste trabalho, foi utilizada a abordagem de controle por estrutura variável e modos deslizantes, que se baseia em uma lei de controle com chaveamento suavizado por uma função contínua, que garanta a estabilidade do sistema, tornando assim o sistema insensível a ruídos e perturbações, tornando viável a sua futura implementação prática. Essa metodologia foi abordada em (MENG; ZHENG; ZHANG, 2016), para o caso de um servossistema acionado em corrente alternada, com sucesso de implementação. Assim, é possível garantir a estabilidade do sistema, mesmo na presença de incertezas e distúrbios, com uma baixa frequência de chaveamento.

Para o projeto da superfície de chaveamento do controlador, foi utilizada uma abordagem LMI para as restrições de alocação de polos, incertezas paramétricas limitadas em norma, garantia de passividade e restrição do sinal de entrada, para atender os requisitos de desempenho do sistema.

No capítulo anterior, foi abordada a identificação por subespaços, a fim de se obter um modelo no espaço de estados que represente um sistema físico. Após a obtenção desse modelo, visando o controle automático das saídas da planta, é realizado o projeto de um controlador que garanta a estabilidade do sistema, com um comportamento transitório e em regime permanente desejado. Nesse trabalho é abordada a lei de controle por realimentação de estados, bastante difundida nas literaturas, adicionado ao controle por estrutura variável e modos deslizantes.

Além disso, o modelo obtido pela identificação por subespaços com os algoritmos MOESP não possuem um significado físico, sendo necessário para a implementação prática do controle da planta, o uso de uma técnica que estime os estados a partir da medição das saídas e do modelo identificado, a partir de um observador de estados, cujo projeto está disponível no Apêndice D.

## **5.1 Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes**

Segundo (LORDELO, 2000), (COVACIC, 2006) e (FAZZOLARI *et al.*, 2014), o CEV (Controle por Estrutura Variável) é o controle de sistemas dinâmicos com realimentação de estados descontínua, cuja teoria se baseia na mudança da estrutura do controlador, em resposta às mudanças dos estados do sistema, para que se obtenha a resposta desejada.

Como aborda (FAZZOLARI *et al.*, 2014), isto é realizado através de uma lei de controle com chaveamento em alta frequência, que conduz a trajetória do sistema a uma determinada superfície do espaço de estado e força a trajetória a manter-se nesta superfície por todo o tempo subsequente. Dessa forma, o sistema fica insensível à variação de certos parâmetros e distúrbios presentes no sistema, enquanto a trajetória de estado estiver sobre esta superfície, denominada de superfície de chaveamento. Conforme (LORDELO *et al.*, 2012), este tipo de controle é caracterizado pela existência de modos deslizantes (MD), que ocorrem quando o

estado do sistema cruza repetidamente a superfície de chaveamento, devido ao fato de que qualquer movimento na vizinhança da superfície está direcionado a ela.

Neste trabalho foi utilizado o Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes de Ordem Completa (CEV-MDOC), descrito em (ACKERMANN; UTKIN, 1998), (LORDELO *et al.*, 2012) e (FAZZOLARI *et al.*, 2014), que permite o projeto da superfície de chaveamento com base em algum procedimento relacionado à ordem do sistema, diferentemente do projeto em ordem reduzida. A principal vantagem do CEV-MDOC em relação ao CEV-MD é que ele apresenta as características de robustez a partir do estado inicial. Para fins didáticos, leva-se em conta um sistema MIMO, controlável, contínuo e invariante no tempo, descrito pelas equações:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot [u + f(x, t)], \quad (5.1)$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u, \quad (5.2)$$

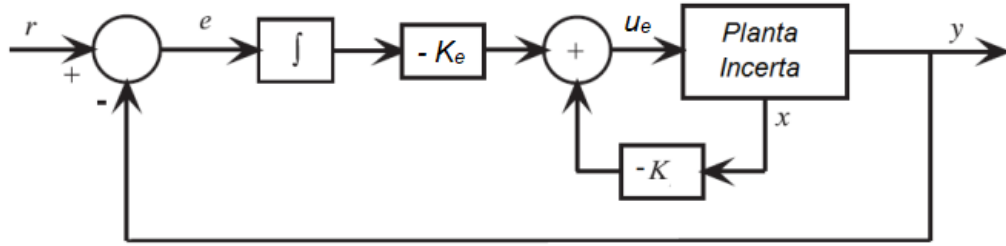
nas quais  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . O vetor  $f(x, t)$  é uma perturbação não-linear com um limitante superior  $f_0(x, t)$  conhecido, de modo que  $\|f(x, t)\| < f_0(x, t)$ . Para fazer com que as variáveis de estado tenham o comportamento transitório desejado, é usada a lei de controle por realimentação de estados  $u$ , dada por:

$$u = -K \cdot x, \quad (5.3)$$

em que  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz de ganho de realimentação de estados. Visando um projeto de controle que elimine o erro em regime permanente, como abordado em (CELENTANO, 2013) e (NISE, 2011), tem-se a lei de controle por realimentação de estados com ação integral, em que é possível projetar um controlador para o sistema em malha fechada, para atingir uma resposta transitória desejada e também eliminar o erro em regime permanente, através da lei de controle  $u_e$  abaixo:

$$u_e(t) = -K \cdot x(t) - K_e \cdot \int e(t) \cdot dt, \quad (5.4)$$

na qual  $K_e \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz de ganho da ação integral e  $e(t)$  a diferença entre os sinais desejados  $r(t)$  e sinais reais das saídas  $y(t)$ . A lei de controle (5.4) pode ser ilustrada pela Figura 3, sendo usada para sistemas SISO como também para sistemas MIMO.



**Figura 3:** Realimentação de estados com ação integral.

**Fonte:** adaptação de (CELENTANO, 2013).

Realizando a realimentação de estados do sistema, substituindo  $u_e$  em  $u$ , a ordem do sistema é aumentada, definindo-se:

$$\begin{aligned}
 z &= \begin{bmatrix} x \\ \int e \end{bmatrix} \\
 A_{aum} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \\
 B_{aum} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C_{aum} &= [C \quad 0] \\
 D_{aum} &= D
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Utilizando então nesse trabalho  $A_{aum}$  como a matriz de estado  $A$  de ordem aumentada e  $B_{aum}$  como a matriz de entrada  $B$  de ordem aumentada, tem-se o sistema de ordem aumentada descrito por:

$$\dot{z} = A_{aum} \cdot z + B_{aum} \cdot u, \tag{5.6}$$

$$y = C_{aum} \cdot z + D_{aum} \cdot u. \tag{5.7}$$

Assim, é realizado o projeto do controlador de ordem aumentada  $K_{aum} = [K \quad -K_e]$ , utilizado na lei de controle (5.4). Para essa lei de controle, existem várias metodologias de projeto de  $K$  e  $K_e$ , em que todos possuem características próprias de pré-requisitos de projeto, sendo os mais utilizados para sistemas MIMO os projetos por: alocação de polos pela fórmula de Ackermann, descrita em (WU; WANG, 2007) e (WANG; JUANG, 1995); alocação de polos pela fórmula de Lyapunov, mostrada em (CHEN, 1999); o Regulador Linear Quadrático (LQR - *Linear Quadractic Regulator*), abordado em (OGATA, 2010) e (CHEN, 1999); e a abordagem pelas Desigualdades Matriciais Lineares. Neste trabalho é utilizada a metodologia de projeto por restrições em LMIs, descritas na Seção 5.2.

No projeto de controle por estrutura variável, para tornar o sistema insensível à variação de certos parâmetros e distúrbios, é adicionada à lei de controle (5.4) uma realimentação não linear com chaveamento de alta velocidade, mostrada em (5.8). Como tratado em (FAZZOLARI *et al.*, 2014), (LORDELO *et al.*, 2012) e (COVACIC, 2006), tem-se então uma função descontínua de chaveamento, dada por  $u_v(t)$ , em que:

$$u_v(t) = -M(x, t) \cdot \text{senal}(s(t)), \quad (5.8)$$

na qual, em um modo deslizante,

$$s(t) = F \cdot x(t), \quad (5.9)$$

sendo  $F \in \mathbb{R}^{p \times (n+m)}$  uma matriz usada para especificar a projeção de movimento no espaço  $s$ . A função *senal* em (5.8) é dada como:

$$\text{senal}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0 \\ 0, & s = 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Essa função foi largamente utilizada em (AJOUDANI; ERFANIAN, 2009) e (SADAT-HOSSEINI; ERFANIAN, 2015), em conjunto com outros elementos, na tentativa de suavização do chaveamento. Devido à alta frequência de chaveamento dada pela função descontínua (5.8), por causa da função *senal*, a mesma pode ser aproximada para uma função contínua dada pela função sigmoide, apresentada em (SHTESSEL *et al.*, 2013) e enunciada como:

$$\text{sig}(s(t)) \approx \frac{s(t)}{|s(t)| + \epsilon}, \quad (5.11)$$

na qual  $\epsilon > 0$  é um escalar positivo e suficientemente pequeno, fazendo com que seja minimizado o efeito da trepidação (*chattering*) presente no chaveamento, que leva à degradação do sinal de controle, a partir da introdução da camada limite em torno da superfície de chaveamento. A função de chaveamento (5.11) será suavizada na Seção 5.4. Dessa forma, o objetivo da lei de controle (5.8), com a implementação de (5.9) e (5.11), é fazer com que os estados do sistema, de uma condição inicial arbitrária, sejam movidos para a intersecção das superfícies de chaveamento, em que uma vez nessa região, a ação de controle é necessária apenas para manter os estados sobre a intersecção dessas superfícies. A condição

de existência de modos deslizantes é:

$$M(x, t) > |u_e| + f_0(x, t). \quad (5.12)$$

Dessa forma, os estados cruzam repetidamente a superfície de chaveamento enquanto (5.12) é satisfeita, sendo influenciada para limitação da perturbação não linear  $f_0(x, t)$  e pela norma da lei de controle  $u_e$ . Com isso, a lei de controle  $u$  completa é dada por:

$$u(t) = u_e(t) + u_v(t) = -K \cdot x(t) - K_e \cdot \int e \cdot dt - M(x, t) \cdot \text{sig}(Fx). \quad (5.13)$$

A representação gráfica da lei de controle expressa em (5.13) é observada na Figura 4.

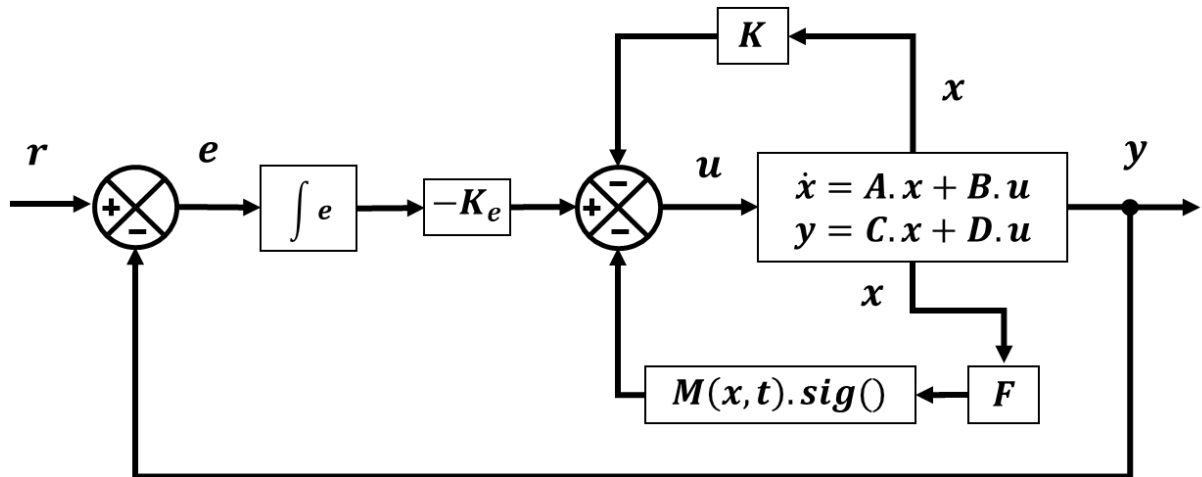


Figura 4: Representação gráfica do CEV-MDOC.

Fonte: O próprio autor.

Assim, resta agora o projeto da superfície de chaveamento da lei de controle, realizado na próxima seção.

## 5.2 Projeto da Superfície de Chaveamento

Para sistemas representados por (5.1) e (5.2), descritos de forma aumentada em (5.6) e (5.7), a superfície de chaveamento do controlador CEV-MDOC é projetada utilizando conceitos de sistemas RP e D-estabilidade, disponíveis em (COSTA, 2017), (FAZZOLARI *et al.*, 2014), (COVACIC, 2006) e (BOYD *et al.*, 1994). Nas próximas subseções são abordadas as componentes do projeto da superfície de chaveamento, para a obtenção das matrizes  $F$ ,  $K$  e  $K_e$ , das leis de controle.

### 5.2.1 Sistema Real Positivo

Os sistemas reais positivos (RP), também conhecidos como sistemas passivos, juntamente com os sistemas estritamente reais positivos (ERP) têm uma grande relevância no controle de sistemas com incertezas, devido aos importantes resultados disponíveis sobre a estabilidade destes sistemas, como a hiperestabilidade assintótica de Popov, descrita em (ANDERSON, 1968). Em (BOYD *et al.*, 1994), o lema RP descreve que a LMI mostrada abaixo só é factível se o sistema linear em malha aberta dado em (5.1) e (5.2) for passivo, não possuindo uma fonte interna de energia.

$$P > 0, \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.14)$$

sendo  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma variável LMI. Com o intuito de projetar as matrizes  $F, K$  e  $K_e$ , para tornar o sistema RP e otimizar o resultado do controlador com a realimentação de estados e a estrutura variável, neste trabalho é realizada uma manipulação de (5.14) para o projeto de um controlador em malha fechada que garanta a passividade do sistema. A equação (5.14) é enunciada para analisar um sistema RP da entrada  $u$  em relação à saída  $y$ . Como se tem aqui uma realimentação de estados substitui-se  $C$  por  $F$ , pois a superfície deslizante utilizará os estados da planta, em vez da saída. Assim, considera-se presença de  $F$  na LMI abaixo, na qual é obtida para o projeto da superfície de chaveamento.

$$P > 0, \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - F^T \\ B^T P - F & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.15)$$

Posteriormente, multiplicando (5.15) à esquerda e à direita por  $[P^{-1} \ 0; \ 0 \ I]$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - F^T \\ B^T P - F & -D^T - D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.16)$$

Com isso, o sistema de malha aberta é RP se e somente se existir uma matriz  $P = P^T > 0$  que atende à condição:

$$\begin{bmatrix} AP^{-1} + P^{-1}A^T & B - P^{-1}F^T \\ B^T - FP^{-1} & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.17)$$

Como é abordada a realimentação de estados com a lei de controle  $u = -K.x$ , em malha fechada, substitui-se  $A$  por  $A - B.K$ . E levando em conta também  $X = P^{-1}$ , tem-se que o sistema de malha fechada é RP se e somente se existir uma matriz  $X = X^T > 0$  que atende à condição:

$$\begin{bmatrix} (A - BK)X + X(A - BK)^T & B - XF^T \\ B^T - FX & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.18)$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} AX - BKX + XA^T - XK^T B^T & B - XF^T \\ B^T - FX & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.19)$$

Definindo  $KX = L$  e  $FX = G$ , tem-se:

$$X > 0, \begin{bmatrix} AX + XA^T - BL - L^T B^T & B - G^T \\ B^T - G & -D - D^T \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.20)$$

As matrizes  $K$  e  $F$  são dadas por:  $K = LX^{-1}$  e  $F = GX^{-1}$ . Como a lei de controle (5.13) leva-se em conta a representação do sistema com as matrizes aumentadas (5.6) e (5.7), substitui-se em (5.20) a matriz  $A$  por  $A_{aum}$  e a matriz  $B$  por  $B_{aum}$ , para obter  $K_{aum}$  em vez de  $K$ . Assim, o sistema (5.6) e (5.7), com a lei de controle (5.13) é RP se existirem matrizes  $X = X^T$ ,  $L$  e  $G$  tais que:

$$X > 0, \begin{bmatrix} A_{aum}X + XA_{aum}^T - B_{aum}L - L^T B_{aum}^T & B_{aum} - G^T \\ B_{aum}^T - G & -D_{aum} - D_{aum}^T \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.21)$$

Se as LMIs forem factíveis, as matrizes  $K_{aum}$  e  $F$ , que tornam o sistema RP são obtidas fazendo:

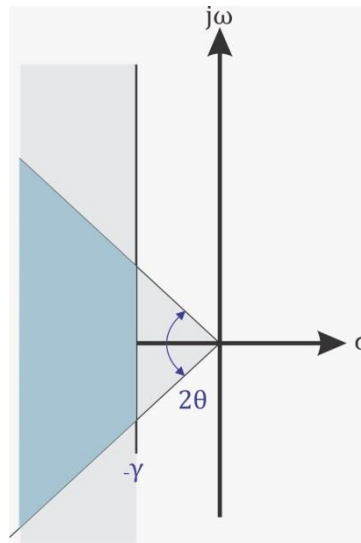
$$K_{aum} = L.X^{-1}, \quad (5.22)$$

$$F = G.X^{-1}. \quad (5.23)$$

### 5.2.2 Região D-Estável

Para a formulação do problema de alocação robusta de autovalores da matriz  $A$  do sistema em termos de LMIs, generaliza-se o Teorema de Lyapunov mostrado no Apêndice B.1, e descrito em (COSTA, 2017), (FAZZOLARI *et al.*, 2014) e (BOYD *et al.*, 1994), para a análise e projeto da estabilidade do sistema, a fim de verificar se todos os polos do sistema estão localizados em determinadas regiões do plano

complexo. Restringindo a região de alocação de polos, como na parte hachurada da Figura 5, é possível obter um comportamento transitório mais rápido para o sistema, posicionando os polos no semiplano esquerdo, com parte real menor que  $-\gamma$ . Além disso, pode-se inserir uma restrição da região de estabilidade para um setor cônico com vértice na origem e ângulo interno  $2\theta$ , em que se garante que a alocação de polos fique restringida à região de setor cônico  $2\theta$ , atribuindo para as respostas do sistema restrições na ultrapassagem percentual ( $UP\%$ ), em função de  $\theta$ .



**Figura 5:** Intersecção de restrições de D-Estabilidade: setor cônico e taxa de decaimento.

**Fonte:** O próprio autor.

Inserindo a lei de controle  $u_e$  enunciada em (5.4), para tornar o sistema estável, de modo que os polos em malha fechada possuam parte real menor que  $-\gamma$  e esteja na região de estabilidade de um setor cônico com vértice na origem e ângulo interno  $2\theta$ , realimenta-se o sistema descrito por (5.6) e (5.7). Fazendo  $X = P^{-1}$  e  $L = K_{aum} \cdot P^{-1}$ , tem-se:

$$\begin{cases} A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T < -2 \cdot \gamma \cdot X, \\ X > 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cdot (A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L + L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \\ \text{cos}\theta \cdot (-A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T + B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \\ \dots \text{cos}\theta \cdot (A_{aum} \cdot X - X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L + L^T \cdot B_{aum}^T) \\ \dots \text{sen}\theta \cdot (A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L + L^T \cdot B_{aum}^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (5.25)$$

Assim, garante-se que o comportamento transitório do sistema seja projetado em função da ultrapassagem percentual, em que quanto maior for  $\theta$ , maior é a

ultrapassagem, e também em função do tempo de assentamento ( $T_s$ ), em que quanto mais distante da origem, mais rápida é a resposta. Realizando a realimentação de estados com a lei de controle (5.4), essa região é garantida pelas LMIs (5.24) e (5.25), de onde se obtêm valores para  $X$  e  $L$ . As matrizes  $K_{aum}$  e  $F$  são obtidas de (5.22) e (5.23).

### 5.2.3 Restrição do Sinal de Entrada

Em algumas implementações práticas, é necessário garantir que o sinal de saída de um controlador, a ser enviado para a entrada da planta, seja limitado, considerando assim as limitações físicas da planta na atuação do controlador, visando uma aplicação viável e sem danos. Segundo (BOYD *et al.*, 1994), o problema de restrição do vetor de entrada  $u$ , da planta representada por (5.1) e (5.2), consiste em especificar LMIs, de modo a assegurar que:

$$\max_{t \geq 0} \|u\|_2 < \rho, \quad (5.26)$$

sendo  $\rho$  o valor máximo da norma do sinal de entrada  $u$ . Segundo (COSTA, 2017), (COVACIC, 2006) e (BOYD *et al.*, 1994), a condição de  $\|u\| = \|-K \cdot x\| \leq \rho$  é assegurada pelas seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0, \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} X & L^T \\ L & \rho^2 \cdot I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.28)$$

em que  $x(0)$  são as condições iniciais dos estados do sistema e  $L = K_{aum} \cdot P^{-1}$ . Assim, para o projeto da superfície de chaveamento, as LMIs descritas por (5.27) e (5.28) podem ser incrementadas às LMIs que garantem um sistema passivo, (5.21), ou com as que atendem aos requisitos de D-estabilidade, (5.24) e (5.25).

## 5.3 Sistemas com Incertezas Limitadas em Norma

Em (REQUAN; WEI; LIN, 2008), (SANTOS, 2014) e (SANTOS *et al.*, 2015), tem-se o desenvolvimento de um lema que trata o problema de controle robusto com incertezas paramétricas limitadas em norma, em que no primeiro trabalho é abordado o controle para sistemas descritores e no segundo trabalho os sistemas representados no espaço de estados. Como este trabalho aborda a identificação e

controle de sistemas no espaço de estados, foi utilizada a abordagem usada em (SANTOS, 2014) e (SANTOS *et al.*, 2015), reestruturada para a limitação das incertezas do sistema.

Considerando o sistema representado por (5.1), com incertezas paramétricas, tem-se:

$$\dot{x} = (A + \delta A).x + (B + \delta B).u, \quad (5.29)$$

onde as matrizes com as incertezas  $\delta A$  e  $\delta B$ , são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta A &= M. \Delta. R_a, \\ \delta B &= M. \Delta. R_b, \\ \Delta. \Delta^T &\leq I. \end{aligned} \quad (5.30)$$

As matrizes  $R_a \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R_b \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são determinadas algebricamente, de modo que atendam às expressões de (5.29) para  $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  dadas em (5.30).  $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz diagonal das incertezas, contendo o parâmetro incerto normalizado em sua diagonal principal, sendo que seu módulo é menor ou igual a 1. Assim tem-se a garantia de estabilidade do sistema dentro da faixa de incertezas. Como abordado em (RENGUAN; WEI; LIN, 2008), (SANTOS, 2014) e (SANTOS *et al.*, 2015), o Lema 5.3.1 estabelece uma condição suficiente para a estabilidade do sistema em malha aberta, representado por (5.29), com as matrizes incertas dadas em (5.30) e a entrada nula  $u = 0$ .

### **Lema 5.3.1 (Estabilidade com Incertezas em Malha Aberta)**

A planta (5.29), com entrada nula, é estável para quaisquer matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas em (5.30) se existir uma matriz  $X = X^T$  e uma constante real  $\tau$  que atendam às seguintes condições:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A.X + X.A^T + \tau.M.M^T & X.R_a^T \\ R_a.X & -\tau.I \end{bmatrix} < 0, \\ X > 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

A prova para o Lema 5.3.1 está disponível no Apêndice C. Inserindo a lei de controle com realimentação de estados  $u = -K.x$ , na planta descrita em (5.29) com as matrizes incertas de (5.30), tem-se:

$$\dot{x} = [(A - B.K) + M. \Delta. (R_a - R_b.K)].x. \quad (5.32)$$

O Lema 5.3.2 a seguir corresponde ao Lema 5.3.1 aplicado ao sistema em malha fechada, estabelecendo uma condição suficiente para a estabilidade do sistema realimentado (5.32), com as matrizes incertas de (5.30).

### Lema 5.3.2 (Estabilidade com Incertezas em Malha Fechada)

O sistema (5.32) é estável para quaisquer matrizes  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas em (5.30) se existirem matrizes  $X = X^T$  e  $L$  e uma constante real  $\tau$  que atendam às seguintes condições:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A.X + X.A^T - B.L - L^T.B^T + \tau.M.M^T & X.R_a^T - L^T.R_b^T \\ R_a.X - R_b.L & -\tau.I \end{bmatrix} < 0, \\ X > 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

A partir da solução, a matriz  $K$  é dada por  $K = L.X^{-1}$ .

## 5.4 Suavização de Chaveamento do CEV-MDOC

Como citado anteriormente e também abordado em (FAZZOLARI *et al.*, 2014), (SHTESSSEL *et al.*, 2013) e (WU; WANG, 2007), a função descontínua *senal* utilizada no controle por estrutura variável e modos deslizantes (5.8), mesmo que aproximada para uma função contínua sigmoide (5.11), ocasiona a presença de uma trepidação (*chattering*) na saída física do sistema, a partir de uma alta frequência de chaveamento da entrada da planta. Esse *chattering* é indesejável em alguns tipos de plantas, como no caso considerado neste trabalho, no qual esse tipo de sinal de alta frequência pode causar danos à perna do paciente. Visando minimizar essa trepidação, em (MENG; ZHENG; ZHANG, 2016) é abordada uma função contínua de saturação suave que substitui a função sigmoide em (5.11). A função não linear de saturação suavizada  $ssat(s)$  é descrita abaixo:

$$ssat(s) = \begin{cases} sinal(s), & |s| \geq \varepsilon \\ -\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \cdot (s - \varepsilon)^2 + 1, & 0 < s < \varepsilon \\ \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \cdot (s + \varepsilon)^2 - 1, & -\varepsilon < s < 0, \end{cases} \quad (5.34)$$

em que  $\varepsilon$  é um número positivo. Assim, a lei de controle (5.13) se torna:

$$u(t) = -K.x(t) - K_e \int e dt - M(x, t).ssat(Fx). \quad (5.35)$$

Assim, tem-se o projeto do controlador por estrutura variável e modos

deslizantes suavizado, a partir da realimentação de estados e da ação integral, que atendem a pré-requisitos desejados de resposta transitória e em regime permanente, mesmo na presença de distúrbios e incertezas.

Como já foi destacado no início do capítulo, a lei de chaveamento de (5.11) e (5.13) produz problemas de implementação devido a frequência de chaveamento da lei de controle ser alta. Com função não linear de saturação suavizada (5.34), tem-se a suavização da lei de chaveamento, provocando menos oscilações na largura de pulso, a partir de uma função simplificada. Os algoritmos das leis de controle (5.11) e (5.35) foram disponibilizadas no Apêndice E.

Vale lembrar que, para uma implementação prática, os estados devem estar disponíveis para a sua realimentação. Pelos métodos de identificação MOESP e seus genéricos, abordados no Capítulo 4, os estados dos modelos obtidos não possuem nenhum significado físico, sendo necessário então a estimação dos estados para o uso da lei de controle, cujo projeto está no Apêndice D.

## 6 Resultados

Nesse capítulo, são mostrados os resultados simulados obtidos: da identificação por subespaços pelo método MOESP; do projeto de controlador com estrutura variável e modos deslizantes, com suavização de chaveamento e incertezas paramétricas limitadas em norma; e também do observador de estados, que tem a função de estimar os estados para uma futura implementação do sistema de controle. Os códigos foram desenvolvidos no *software Matlab* 2011 e *Simulink*, licenciados para o laboratório, e também *solver LMILab*, do *Matlab*, para a resolução das LMIs.

Para fins de demonstração de aplicação das técnicas de identificação e controle deste trabalho, foi utilizada a planta não linear descrita em (3.23-3.28), inserida em ambiente *Matlab/Simulink*. A planta não linear é então excitada a um ponto de operação determinado para o sistema, e então é realizada a identificação linear por subespaços. Os parâmetros considerados para a planta nominal descrita no Capítulo 3 são mostrados na Tabela 1 e foram obtidos experimentalmente em (BIAZETO, 2015), com autorização do Comitê de Ética, registrada com o número CAAE36111214.9.0000.5231 na plataforma Brasil, usando a metodologia de (GAINO, 2009).

**Tabela 1:** Parâmetros utilizados para simulação, obtida de (BIAZETO, 2015).

<b>Símbolos</b>	<b>Valores (respectivamente)</b>	<b>Unidades</b>
$B_1$ e $B_2$	0,2756 e 1,0316	N.m.s/rad
$J_1$ e $J_2$	0,2881 e 0,2881	kg.m <sup>2</sup>
$\tau_1$ e $\tau_2$	0,11796 e 0,3305	s
$G_1$ e $G_2$	22856 e 17776	N.m/s
$L_1$ e $L_2$	0,245 e 0,245	m
$m_1$ e $m_2$	3,391 e 3,391	kg
$E_1$ e $E_2$	-0,0394 e -0,0687	1/rad
$\omega_1$ e $\omega_2$	2,3185 e 2,4124	rad
$\lambda_1$ e $\lambda_2$	1,3193 e 1,3215	N.m/rad
$g_1$ e $g_2$	9,81 e 9,81	m/s <sup>2</sup>

Substituindo os parâmetros da tabela acima em (3.23) e (3.24), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{f}_{n1} & -0,957 & 3,471 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8,477 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}_{n2} & -3,581 & 3,471 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3,026 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 193760 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 53785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

com as funções  $\tilde{f}_{n1}$  e  $\tilde{f}_{n2}$  sendo implementadas com os valores da Tabela 1. Em (GAINO, 2009), tem-se a linearização de (6.1) e (6.2) em torno de um ponto de operação determinado, também utilizada em (MAGAN *et al.*, 2017). Apenas para fins didáticos de análise e comparação, se o modelo não linear descrito em (6.1) e (6.2) for linearizado em torno de  $30^\circ$  (0,523 rad), seus termos não lineares  $\tilde{f}_{n1}$  e  $\tilde{f}_{n2}$  assumem os valores -29,43 e -29,68, respectivamente. Substituindo  $\tilde{f}_{n1}$  e  $\tilde{f}_{n2}$  em (6.1), tem-se a planta linearizada em torno de  $30^\circ$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -29,43 & -0,957 & 3,471 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8,477 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -29,68 & -3,581 & 3,471 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3,026 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 193760 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 53785 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

cuja matriz característica possui os seguintes autovalores:  $-0,4783 \pm 5,4037.i$ ;  $-1,7903 \pm 5,1454.i$ ;  $-3,0257$  e  $-8,4774$ . Como os modelos no espaço de estados obtidos pelos algoritmos são discretos, para critério de comparação e análise de autovalores do sistema com resposta em torno de  $30^\circ$ , a planta (6.3) foi discretizada utilizando o comando *c2d* do Matlab, com um período de amostragem de 0,0001 segundo, que é o período de amostragem da simulação do sistema. Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,k} \\ \dot{x}_{2,k} \\ \dot{x}_{3,k} \\ \dot{x}_{4,k} \\ \dot{x}_{5,k} \\ \dot{x}_{6,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9999 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0029 & -0,9999 & 0,0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9991 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9999 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0029 & 0,9996 & 0,0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9997 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,00336 & 0 \\ 19,3678 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,00093 \\ 0 & 5,3777 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n1} \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

com as matrizes C e D discretas iguais às do tempo contínuo. Os autovalores discretos do sistema são:  $0,99995202 \pm 0,00054034i$ ;  $0,99995202 \pm 0,00051444i$ ;  $0,9991526$  e  $0,9996974$ . Esses autovalores foram utilizados na comparação com os modelos obtidos pelos algoritmos, sendo usados então como referência do sistema.

Nas seções a seguir, foram realizadas as simulações sem e com ruídos, nas entradas e saídas da planta, para a identificação do modelo que melhor represente a dinâmica do sistema, mesmo na presença de ruídos, através dos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO. A planta não linear do paciente paraplégico (6.1) e (6.2), foi simulada em ambiente *Matlab/Simulink* para a obtenção dos dados de entrada e saída para a identificação.

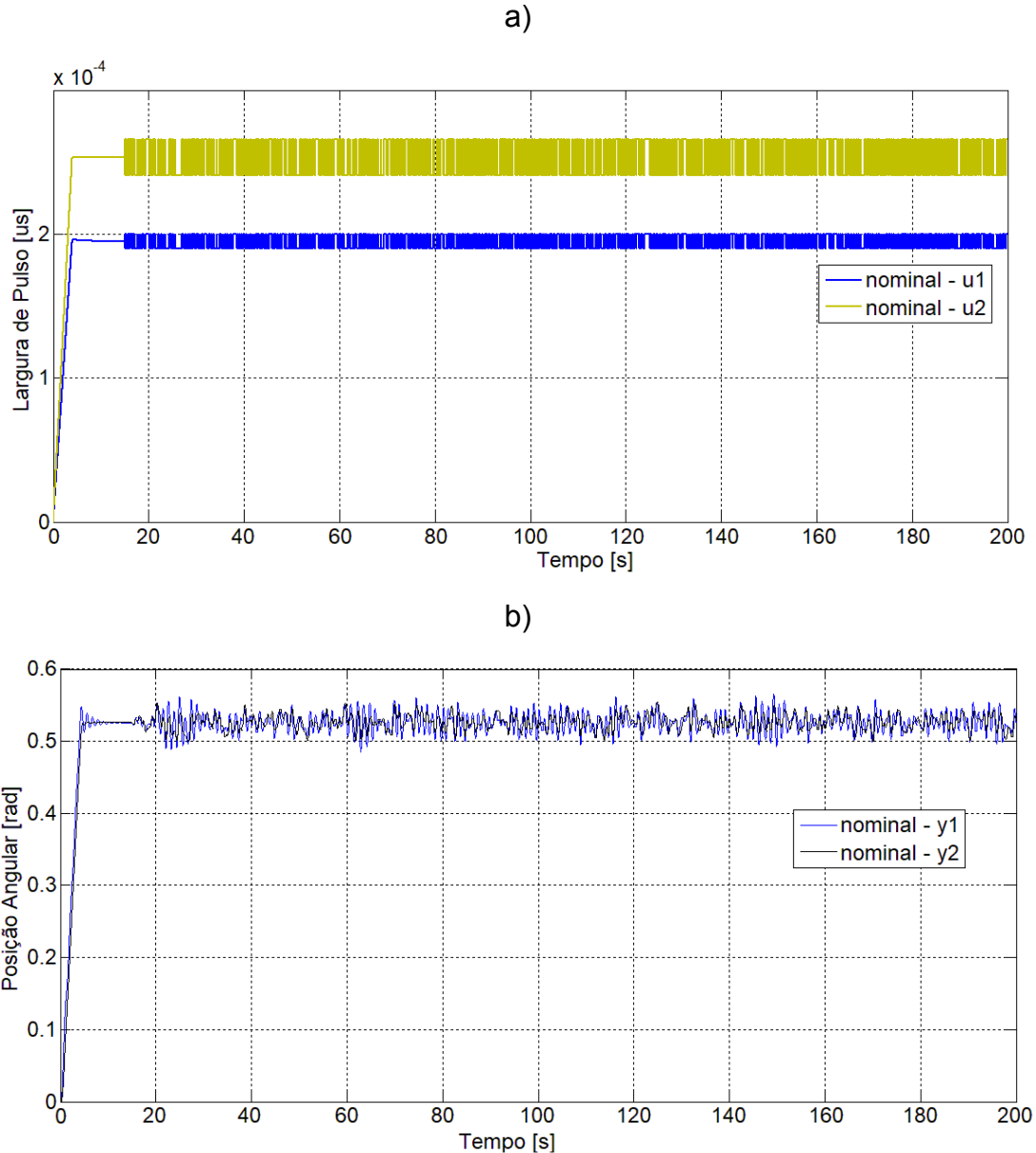
O intervalo de amostragem utilizado neste trabalho foi de 0,0001 segundo, sendo simulado um tempo de 200 segundos. Dessa forma, 2000000 dados foram coletados. Desses dados, os 150000 primeiros dados foram descartados pelo comportamento transitório causado pela entrada em rampa e degrau, sendo usada apenas a resposta do sinal PRBS (*Pseudo-Random Binary Sequency*) aplicados a partir disso para a identificação. Então, 1350000 dados foram utilizados na identificação e 500000 dados foram usados para a validação dos modelos, para cada entrada e saída.

## 6.1 Simulação 1: Identificação sem Ruídos

Nesta seção, tem-se por objetivo realizar a obtenção de um modelo matemático no espaço de estados, com característica linear, que descreva a dinâmica da planta do paciente paraplégico em torno do ponto de operação de  $30^\circ$ , utilizando os algoritmos de identificação descritos no Capítulo 4. O sistema não foi submetido a nenhum ruído externo, seja de processo ou medição, destacando o desempenho dos algoritmos quando se considera o caso determinístico.

A Figura 6a mostra os sinais de entrada do tipo rampa-degrau aplicados na planta. A entrada  $u_1$  sai de um valor muito próximo à zero até  $195 \mu\text{s}$ . Após 15 s de simulação, é somado ao degrau um sinal PRBS, de média nula, com a variação de  $\pm 2\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de 0,1 s. Já na entrada  $u_2$  é aplicado um sinal que sai de um valor muito próximo a zero até  $253 \mu\text{s}$ , em que após 15 s de simulação, é somada ao degrau um sinal PRBS, de média nula, com a variação de

$\pm 5\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de  $0,1 \text{ s}$ . Esses valores foram obtidos empiricamente, analisando primeiramente a amplitude do sinal rampa-degrau que estabilize as respostas do sistema próximo à  $30^\circ$  ( $0,523 \text{ rad}$ ), sendo esse o ponto de operação do sistema, conforme mostrado na Figura 6b.



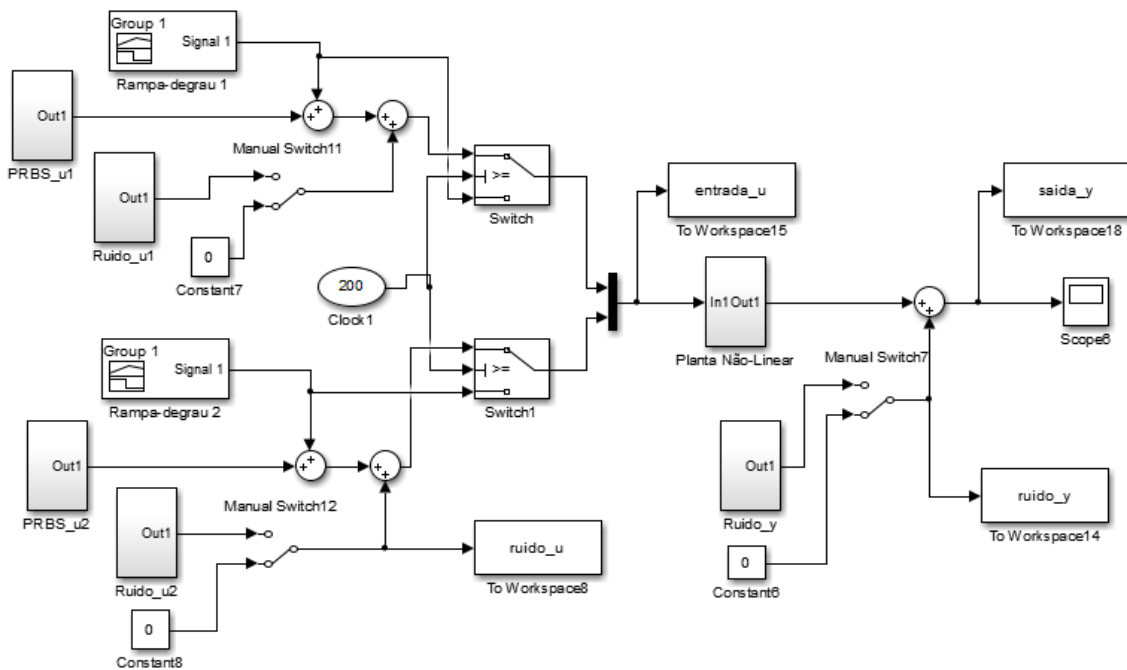
**Figura 6:** a) Sinais aplicados na entrada da planta não linear e b) sinais de saídas da planta não linear dada às entradas.

**Fonte:** O próprio autor.

Com isso, a partir do tempo de  $15 \text{ s}$  de simulação da Figura 6a, aplicando o PRBS, têm-se as entradas sendo persistentemente excitadas, resultando assim em um comportamento dinâmico em que a planta é excitada em várias frequências. Isso faz com que a dinâmica do sistema seja melhor determinada pelos algoritmos de

identificação. As amplitudes dos sinais PRBS foram determinadas empiricamente para fazerem com que as oscilações das variáveis de saída permanecessem dentro de uma faixa de 0,05 rad em torno do ponto de operação, para tornar a identificação mais próxima do comportamento linear. As excitações PRBS de entrada que fazem com que as saídas oscilem com grandes amplitudes em torno de 0,523 rad (ponto de operação) resultam em identificações de modelos muito distintos da planta nominal e chegam até a serem instáveis.

A partir dos dados de entradas e saídas, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO, descritos anteriormente foram executados, via software *Matlab*, usando os algoritmos disponíveis no Apêndice E. Dessa forma, excluíram-se os 15000 primeiros dados de simulação, devido à transição do sistema até o ponto de operação (0,523 rad), e então foram adquiridos os 1350000 próximos dados, usados para a identificação. A Figura 7 esboça o diagrama de blocos usados na simulação.



**Figura 7:** Diagramas de blocos do sistema em malha aberta, para a identificação sem ruídos.

**Fonte:** O próprio autor.

Com os dados de identificação obtidos, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO foram executados. Inicialmente os dados de entrada e saída são formatados em matrizes de blocos de Hankel, e então é realizada a decomposição LQ das componentes dessas matrizes. Posteriormente é determinada a ordem que

melhor representa o sistema, a partir da análise dos valores singulares do sistema, resultado da decomposição em valores singulares dos elementos da decomposição LQ, em que cada algoritmo utiliza seu elemento. Para uma análise detalhada e crítica, os valores singulares gerados pelos três algoritmos foram dispostos nas Tabelas 2, 3 e 4.

**Tabela 2:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP, sem ruído.

<b>Ordem</b>	<b>Valores Singulares</b>
1 <sup>a</sup>	83,6399522166307
2 <sup>a</sup>	34,3441060699633
3 <sup>a</sup>	0,09582978791197
4 <sup>a</sup>	0,02519711086225
5 <sup>a</sup>	0,00003082301272
6 <sup>a</sup>	0,00000643904969
7 <sup>a</sup>	0,000000000000066
8 <sup>a</sup>	0,000000000000045
9 <sup>a</sup>	0,000000000000026
10 <sup>a</sup>	0,000000000000015

**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 3:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PI, sem ruído.

<b>Ordem</b>	<b>Valores Singulares</b>
1 <sup>a</sup>	83,6399525465109
2 <sup>a</sup>	11,3747718358334
3 <sup>a</sup>	0,04916440749673
4 <sup>a</sup>	0,00302373405614
5 <sup>a</sup>	0,00000202277258
6 <sup>a</sup>	0,00000003343871
7 <sup>a</sup>	0,000000000000046
8 <sup>a</sup>	0,000000000000042
9 <sup>a</sup>	0,000000000000028
10 <sup>a</sup>	0,000000000000023

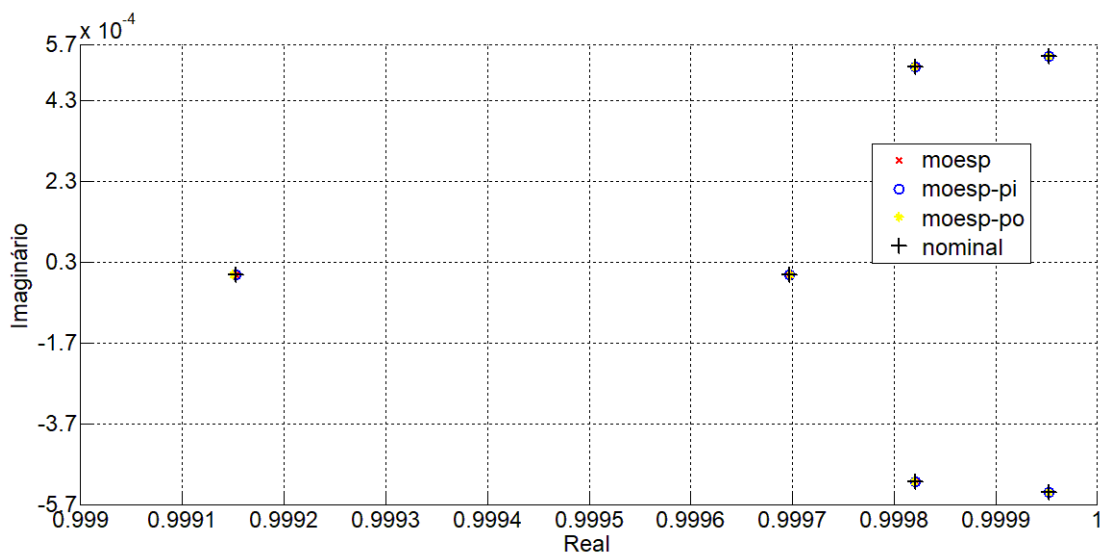
**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 4:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PO, sem ruído.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	83,6098895253780
2 <sup>a</sup>	34,3476855136312
3 <sup>a</sup>	0,09580386071094
4 <sup>a</sup>	0,02519347020654
5 <sup>a</sup>	0,00003053512103
6 <sup>a</sup>	0,00000640037059
7 <sup>a</sup>	0,000000000000063
8 <sup>a</sup>	0,000000000000044
9 <sup>a</sup>	0,000000000000024
10 <sup>a</sup>	0,000000000000012

Fonte: O próprio autor.

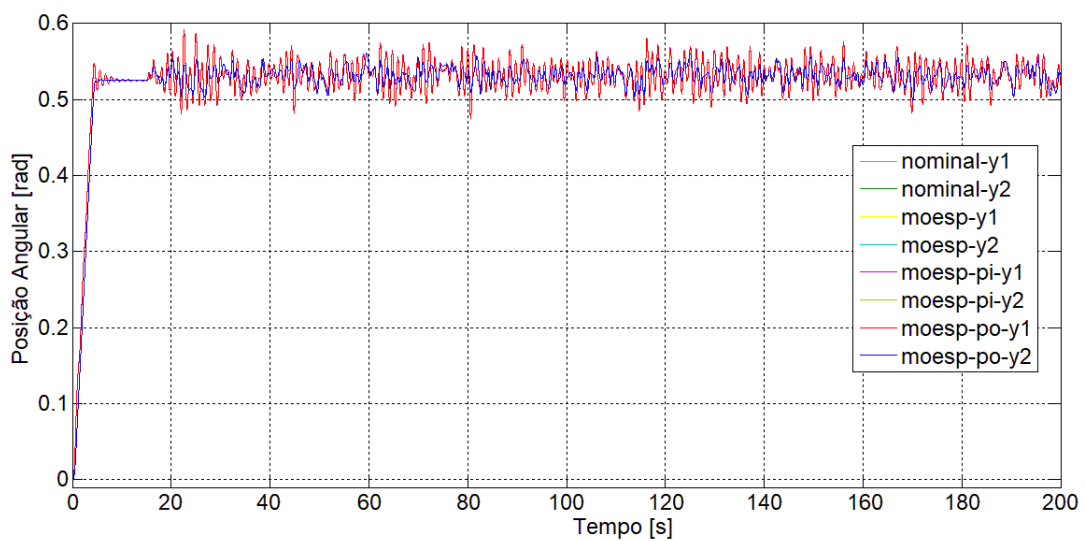
Pode-se observar então que o valor singular mais significativo perante o posterior foi, para os três algoritmos de identificação, a alteração de valor do sexto para o sétimo valor singular do sistema. Isso significa que o sistema tem mais características de sexta ordem do que de sétima ordem, em que o melhor modelo obtido é o de sexta ordem. Após a determinação da ordem que melhor representa o sistema, os algoritmos obtiveram as matrizes de estado do sistema, tratadas no tempo discreto. Assim, foram analisados os autovalores dos sistemas identificados, ilustrado pela Figura 8.



**Figura 8:** Comparação entre autovalores dos sistemas resultantes das identificações.

Fonte: O próprio autor.

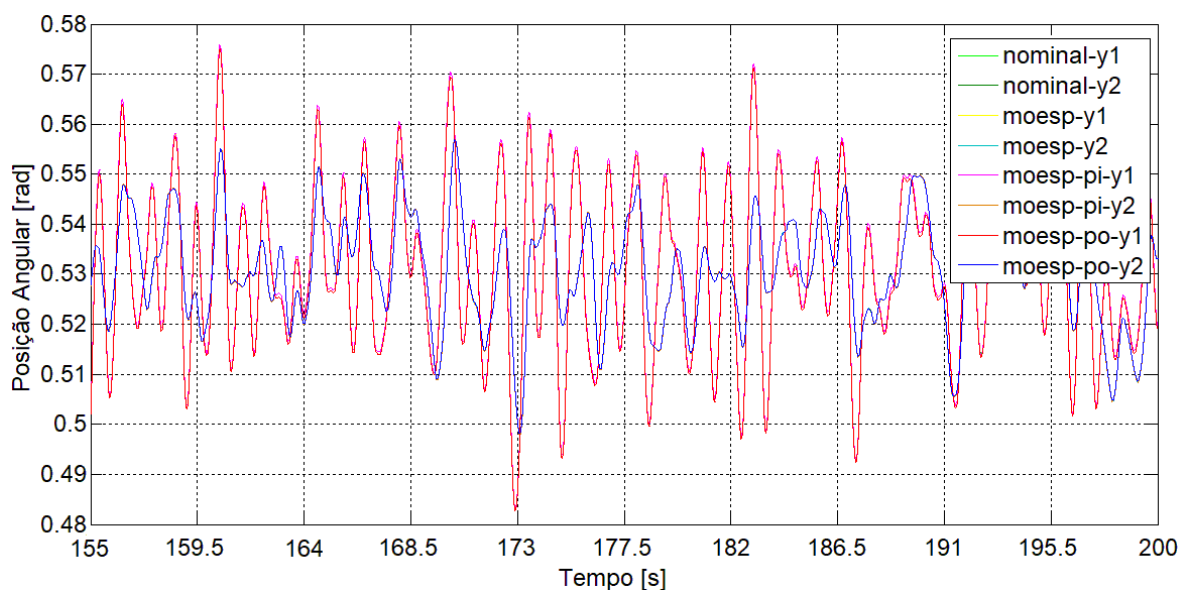
Os autovalores dos sistemas obtidos das identificações foram comparados com os autovalores do sistema nominal linearizado discreto (6.4), para fins de análise comparativa. Pela Figura 8, observou-se que os modelos obtidos pelos três algoritmos resultaram em autovalores praticamente iguais aos da planta nominal linearizada, demonstrando ótimos resultados de identificação pelos três métodos, sem considerar ruídos nas entradas ou saídas. Os três modelos obtidos foram simulados em conjunto com a planta nominal, nos quais os mesmos sinais de entrada foram aplicados nas quatro plantas. A Figura 9 ilustra o comportamento dinâmico dos modelos.



**Figura 9:** Comparação das respostas identificadas e nominais para um sistema sem ruídos.

**Fonte:** O próprio autor.

Como os dados de gerados para a identificação fizeram com que as saídas variassem com pequenas amplitudes em torno do ponto de operação do sistema, o comportamento do sistema foi aproximado de uma planta linear. Assim os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO alcançaram com êxito as características do sistema nominal, como é observado na Figura 9. Para uma análise qualitativa mais minuciosa, tem-se a Figura 10 que detalha a Figura 9.



**Figura 10:** Análise mais detalhada do comportamento gráfico dos modelos obtidos, sem ruídos.

**Fonte:** O próprio autor.

Mas para uma análise quantitativa das respostas dos modelos obtidos, foram utilizados três índices de desempenho abordado na Seção 4: RMSE, MAE e FIT. A Tabela 5 mostra a comparação de cada saída dos modelos obtidos pelos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO.

**Tabela 5:** Quadro comparativo de desempenho dos algoritmos a partir das saídas identificadas e nominais, sem ruído.

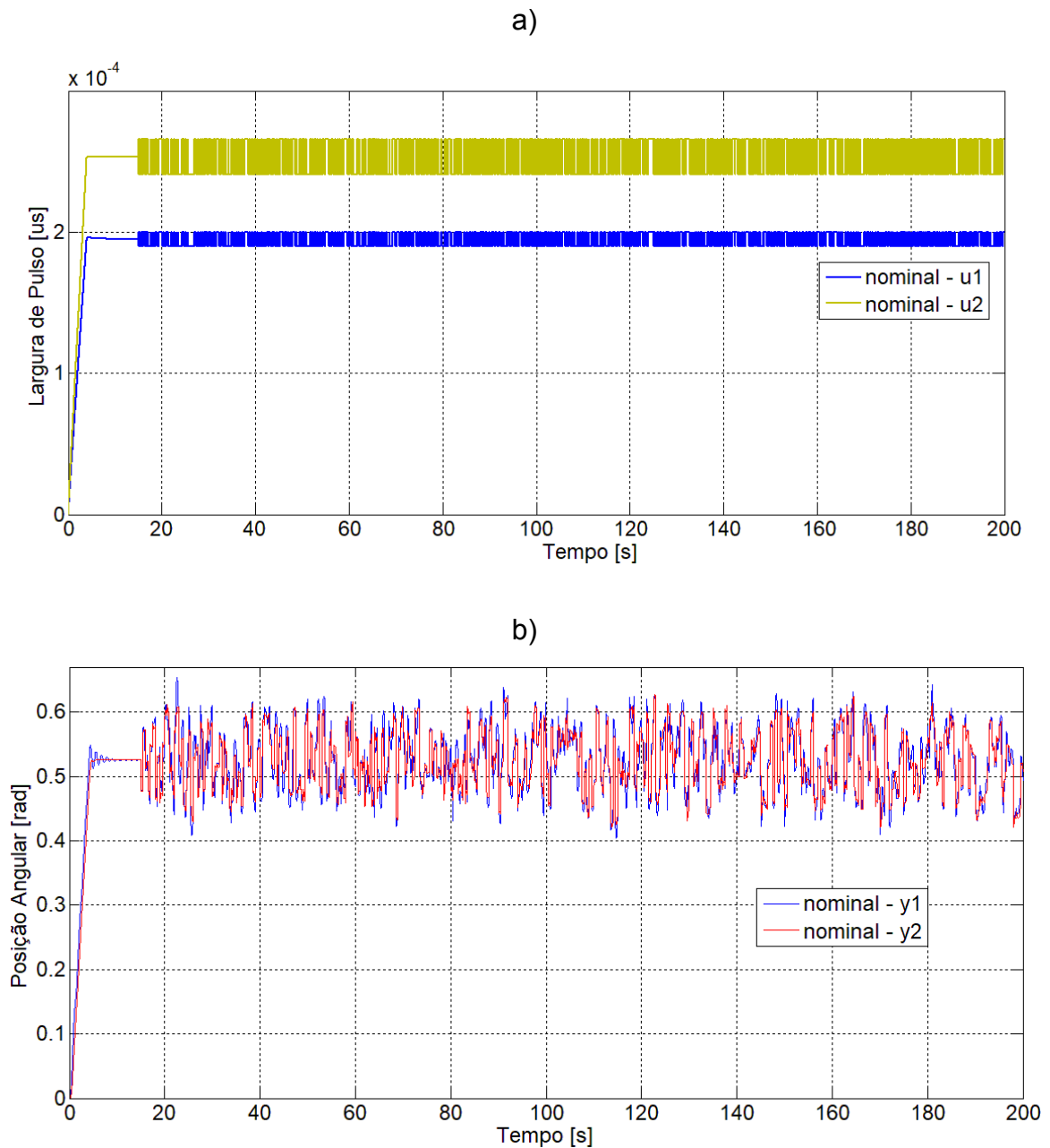
		RMSE(%)	MAE(%)	FIT(%)
MOESP	$y_1$	$1,0167 \cdot 10^{-6}$	$1,0106 \cdot 10^{-6}$	99,9979
	$y_2$	$1,7463 \cdot 10^{-6}$	$1,7378 \cdot 10^{-6}$	99,9965
MOESP-PI	$y_1$	$5,7196 \cdot 10^{-6}$	$4,4681 \cdot 10^{-6}$	99,9883
	$y_2$	$1,5264 \cdot 10^{-5}$	$1,3812 \cdot 10^{-5}$	99,9699
MOESP-PO	$y_1$	$6,7219 \cdot 10^{-4}$	$6,5528 \cdot 10^{-4}$	98,6275
	$y_2$	$1,0876 \cdot 10^{-4}$	$8,5858 \cdot 10^{-5}$	99,7860

**Fonte:** O próprio autor.

Pela tabela acima, é possível observar que os três índices de desempenho apresentaram excelentes resultados dos algoritmos. Porém, pelos critérios usados, o sistema identificado pelo algoritmo MOESP foi o que obteve uma melhor representatividade do sistema não linear em torno de  $30^\circ$ , dado que quanto menor o RMSE e o MAE, mais próximo à resposta identificada está da nominal, em função do



$\pm 2\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de  $0,1 \text{ s}$ . Já na entrada  $u_2$  é aplicado um sinal que sai de um valor muito próximo à zero até  $253 \mu\text{s}$ , em que após  $15 \text{ s}$  de simulação, é somada ao degrau um sinal PRBS, de média nula, com a variação de  $\pm 5\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de  $0,1 \text{ s}$ . Esse valores foram obtidos empiricamente, analisando primeiramente a amplitude do sinal rampa-degrau que estabilize as respostas do sistema próximo à  $30^\circ$  ( $0,523 \text{ rad}$ ), sendo esse o ponto de operação do sistema, conforme mostrado na Figura 11b.

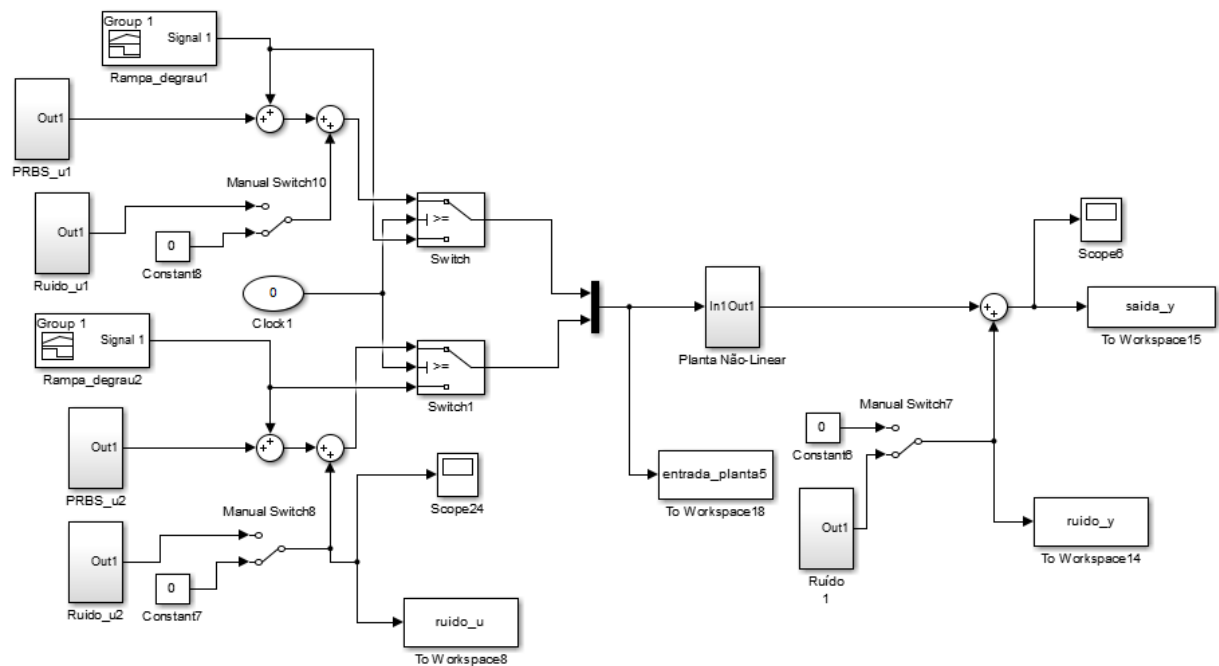


**Figura 11:** a) Sinais aplicados na entrada da planta não linear e b) sinais de saídas da planta não linear dada às entradas; caso com ruído colorido de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Com isso, a partir do tempo de 15 segundos de simulação da Figura 11a, aplicando o PRBS, têm-se as entradas sendo persistentemente excitadas. A amplitude dos sinais PRBS foram determinadas empiricamente para fazerem com que as oscilações das variáveis de saída permanecessem dentro de uma faixa de 0,8 rad em torno do ponto de operação, para tornar a identificação mais próxima do comportamento linear.

A partir dos dados de entradas e saídas, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO, foram executados, via software *Matlab*, onde excluíram-se os 15000 primeiros dados de simulação, devido à transição do sistema até o ponto de operação (0,523 rad), e então foram adquiridos os 1350000 próximos dados, usados para a identificação. A Figura 12 esboça o diagrama de blocos usados na simulação.



**Figura 12:** Diagramas de blocos do sistema em malha aberta, para a identificação com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Assim como na seção anterior, com os dados de identificação obtidos, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO foram executados e os valores singulares gerados pelos três algoritmos foram dispostos nas Tabelas 6, 7 e 8.

**Tabela 6:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP, com ruído na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	198,91229666
2 <sup>a</sup>	64,08087263
3 <sup>a</sup>	0,2429303978
4 <sup>a</sup>	0,028632919
5 <sup>a</sup>	0,0001359108
6 <sup>a</sup>	0,0000933636
7 <sup>a</sup>	0,0000696457
8 <sup>a</sup>	0,0000581343
9 <sup>a</sup>	0,0000503793
10 <sup>a</sup>	0,0000457811

**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 7:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PI, com ruído na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	236,25260162
2 <sup>a</sup>	97,02951215
3 <sup>a</sup>	0,270683312
4 <sup>a</sup>	0,071177079
5 <sup>a</sup>	0,00008667
6 <sup>a</sup>	0,00001813
7 <sup>a</sup>	0,000000115
8 <sup>a</sup>	0,000000111
9 <sup>a</sup>	0,000000083
10 <sup>a</sup>	0,000000078

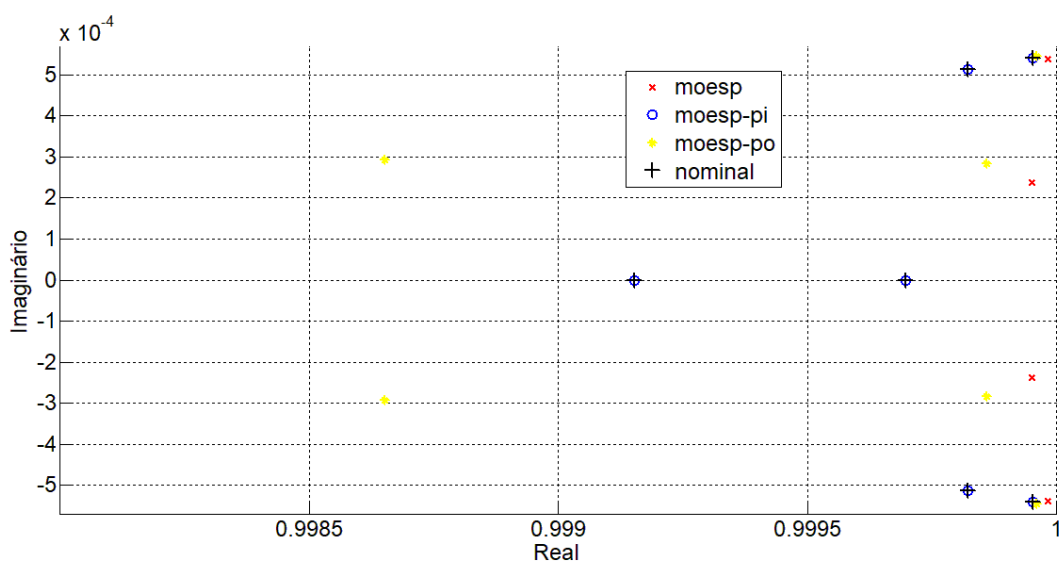
**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 8:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PO, com ruído na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	236,2951312
2 <sup>a</sup>	97,02448942
3 <sup>a</sup>	0,270719737
4 <sup>a</sup>	0,071182174
5 <sup>a</sup>	0,000088301
6 <sup>a</sup>	0,000018221
7 <sup>a</sup>	0,000014690
8 <sup>a</sup>	0,000014673
9 <sup>a</sup>	0,000014672
10 <sup>a</sup>	0,000014664

**Fonte:** O próprio autor.

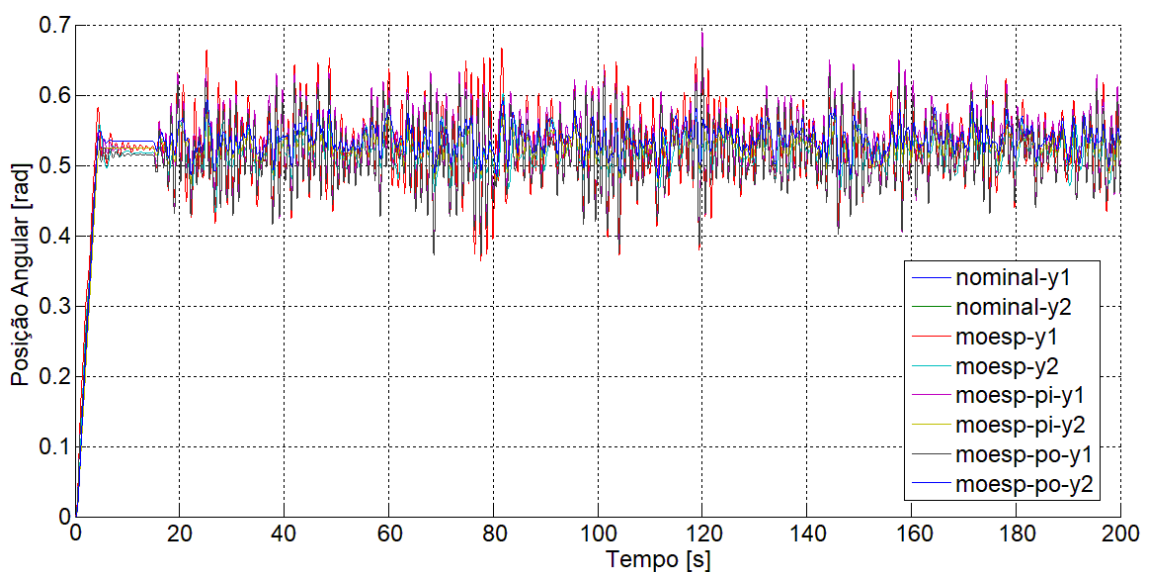
Pode-se observar então que o valor singular mais significativo perante o posterior foi: quarto para quinto valor singular, para o MOESP; sexto para o sétimo valor singular para o MOESP-PI; e também do sexto para o sétimo no MOESP-PO. Após a determinação da ordem que melhor representa o sistema para cada algoritmo, foram obtidas as matrizes de estado do sistema, tratadas no tempo discreto. Assim, foram analisados os autovalores dos sistemas identificados, ilustrado pela Figura 13.



**Figura 13:** Comparação entre autovalores dos sistemas resultados das identificações com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

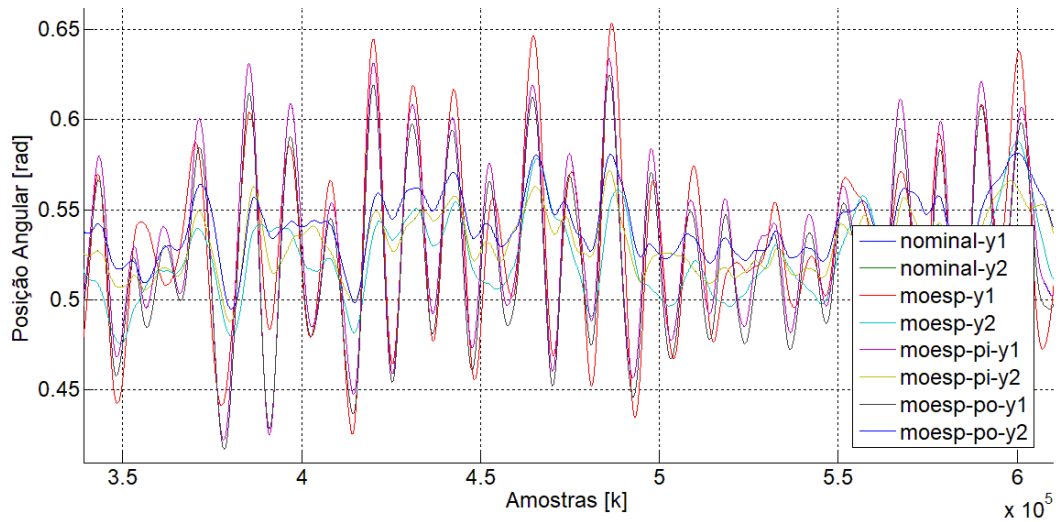
Os autovalores dos sistemas obtidos das identificações foram comparados com os autovalores do sistema nominal linearizado discreto (6.4), para fins de análise comparativa. Pela Figura 13, observou-se que apenas o modelo obtido pelo algoritmo MOESP-PI resultou em autovalores idênticos aos da planta nominal. O algoritmo MOESP aproximou o modelo para quarta ordem e o algoritmo MOESP-PO possui autovalores diferentes da planta nominal, mesmo sendo de sexta ordem. Os três modelos obtidos foram simulados em conjunto com a planta nominal, nos quais os mesmos sinais de saída foram aplicados nas quatro plantas. A Figura 14 ilustra o comportamento dinâmico dos modelos.



**Figura 14:** Comparação das respostas identificadas e nominais para um sistema com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Mesmo com a saída da planta variando aproximadamente 1 rad em torno do ponto de operação, o comportamento do sistema foi aproximado de uma planta linear. Porém, devido à metodologia do algoritmo MOESP-PI, ele obteve maior êxito de identificação. Já os algoritmos MOESP e MOESP-PO possuíram certa característica da planta nominal, mas com menos êxito, como é observado na Figura 14. Para uma análise qualitativa mais minuciosa, tem-se a Figura 15 que detalha a Figura 14.

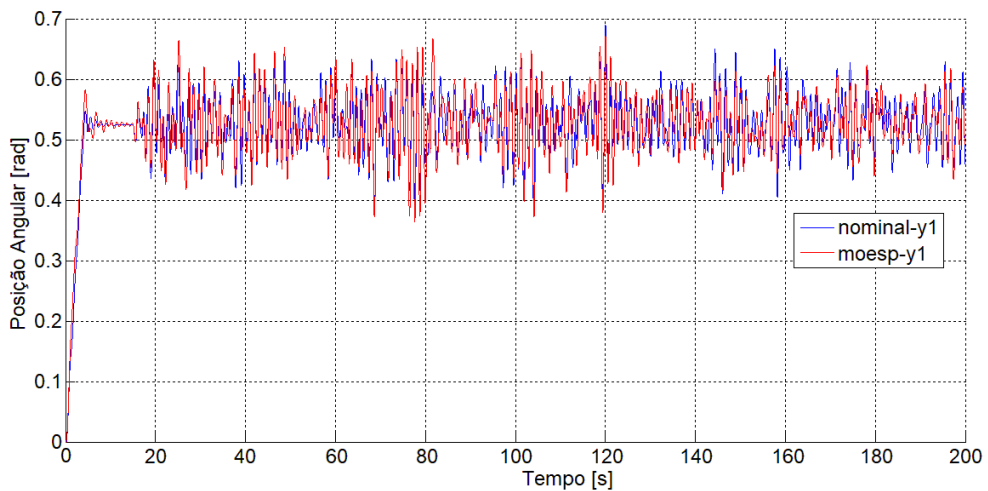


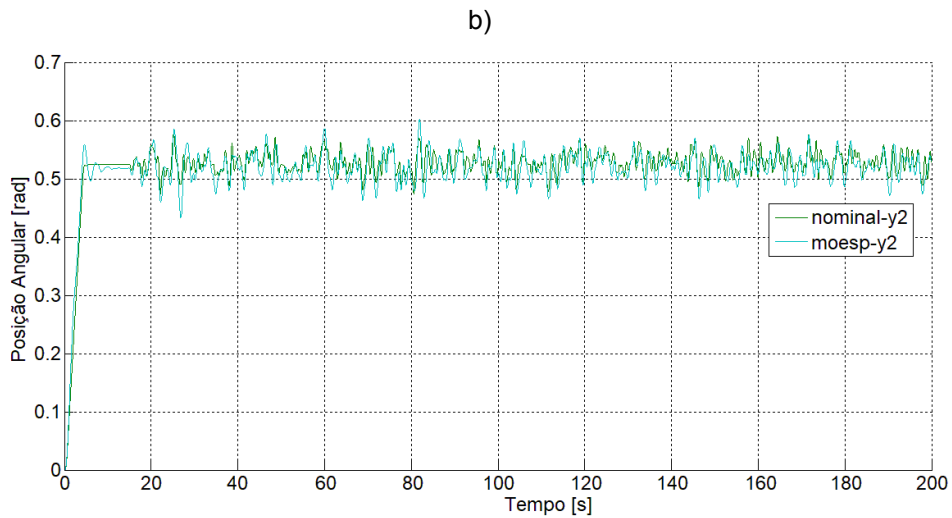
**Figura 15:** Análise mais detalhada do comportamento gráfico dos modelos obtidos, com ruído na entrada.

**Fonte:** O próprio autor.

Nas Figuras 16, 17 e 18, tem-se os resultados dos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO sendo comparados com a planta nominal, de forma gráfica, em que esboçam os resultados da Figura 14 de forma mais detalhada.

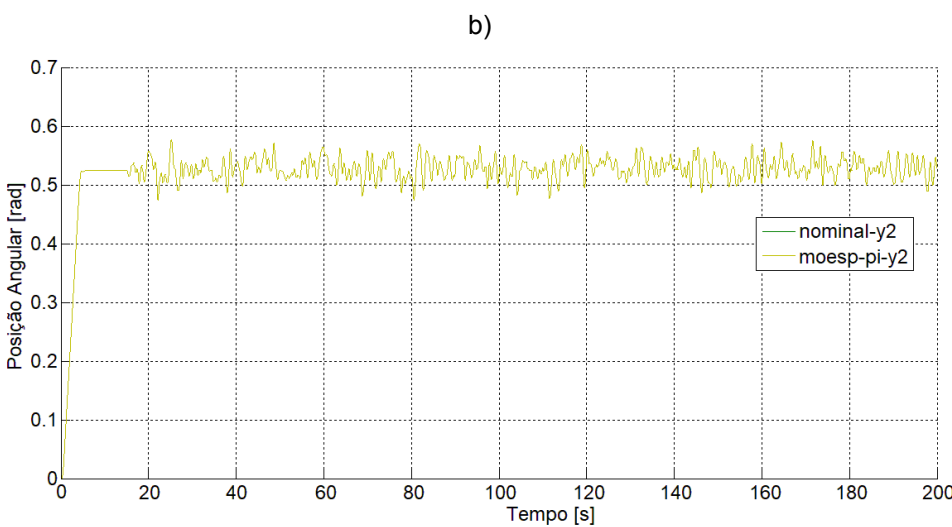
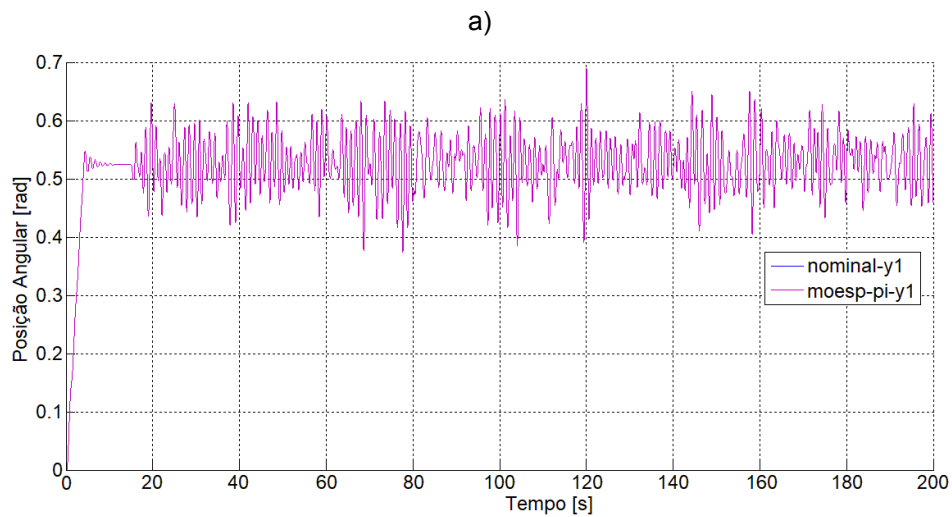
a)





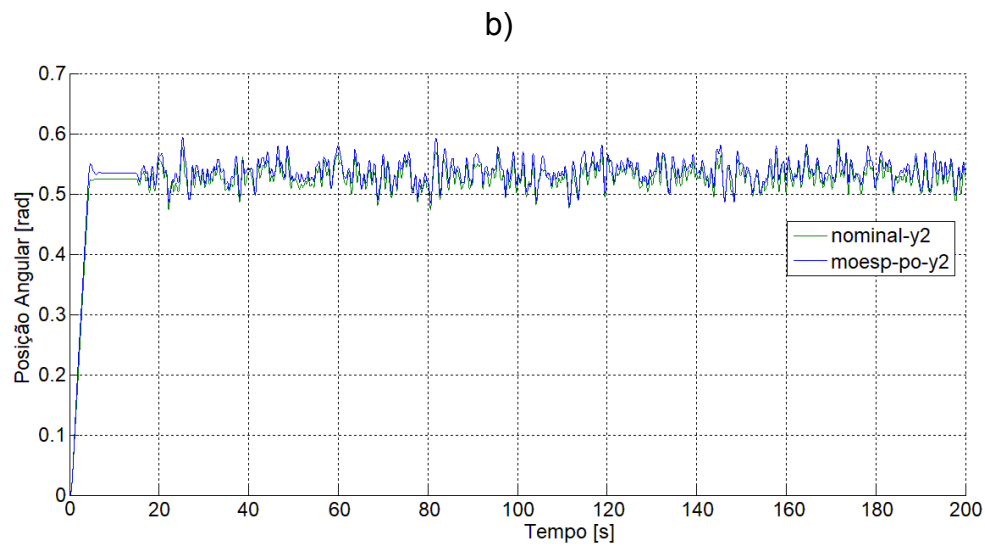
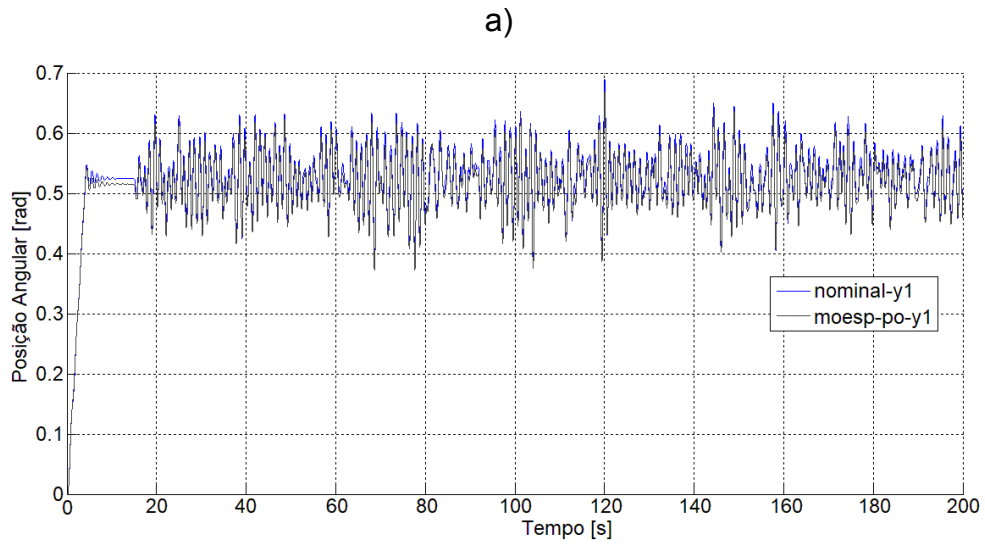
**Figura 16:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 17:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP-PI para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 18:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP-PO para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Para uma análise quantitativa das respostas dos modelos obtidos, foram utilizados três índices de desempenho abordado na Seção 4: RMSE, MAE e FIT. A Tabela 9 mostra a comparação de cada saída dos modelos obtidos pelos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO.

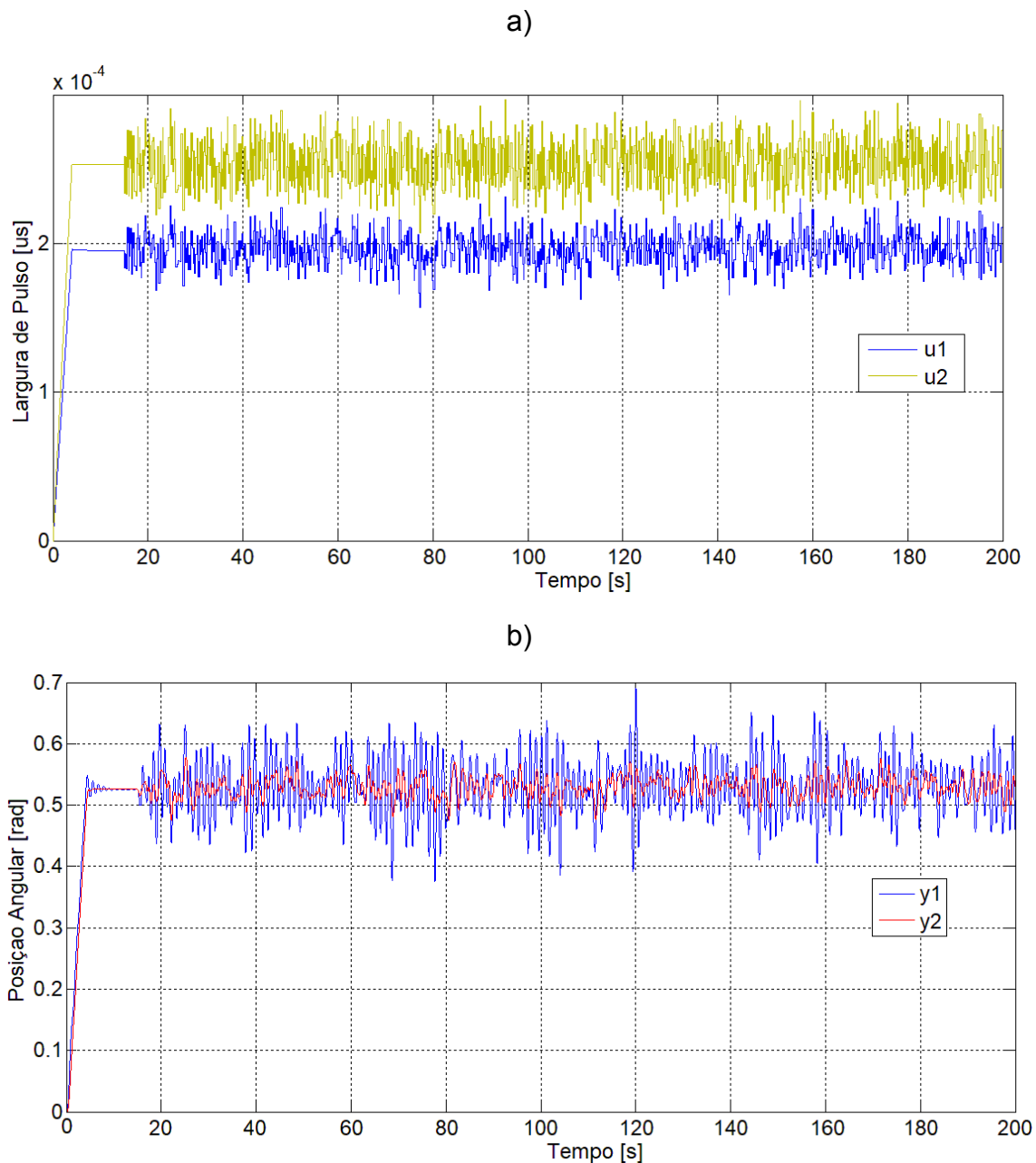


$$D_i = \begin{bmatrix} 0.015832 & -0.011595 \\ 0.015832 & -0.01159 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

### 6.3 Simulação 3: Identificação com Ruídos de Processo e de Medição

Por fim, foi realizada a obtenção de um modelo matemático que descreva a dinâmica da planta do paciente paraplégico em torno do ponto de operação de  $30^\circ$ , em um sistema submetido a um sinal de ruído colorido aleatório de processo e de medição. O ruído de processo possui média de  $10 \mu\text{s}$  e período de amostragem de  $0,3$  segundos, e o ruído de medição possui média  $0,0001$  rad e período de amostragem de  $0,0001$  segundo. Com isso, foi possível analisar o desempenho dos algoritmos quando se considera o caso da presença de variáveis estocásticas, tanto na entrada quanto na saída.

A Figura 19a mostra os sinais de entrada do tipo rampa-degrau aplicados na planta. A entrada  $u_1$  sai de um valor muito próximo à zero até  $195 \mu\text{s}$ . Após  $15$  s de simulação, é somado ao degrau um sinal PRBS, de média nula, com a variação de  $\pm 2\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de  $0,1$  s. Já na entrada  $u_2$  é aplicado um sinal que sai de um valor muito próximo a zero até  $253 \mu\text{s}$ , em que após  $15$  s de simulação, é somada ao degrau um sinal PRBS, de média nula, com a variação de  $\pm 5\%$  de  $250 \mu\text{s}$ , com período de amostragem de  $0,1$  s. Esses valores foram obtidos empiricamente, analisando primeiramente a amplitude do sinal rampa-degrau que estabilize as respostas do sistema próximo à  $30^\circ$  ( $0,523$  rad), sendo esse o ponto de operação do sistema, conforme mostrado na Figura 19b.

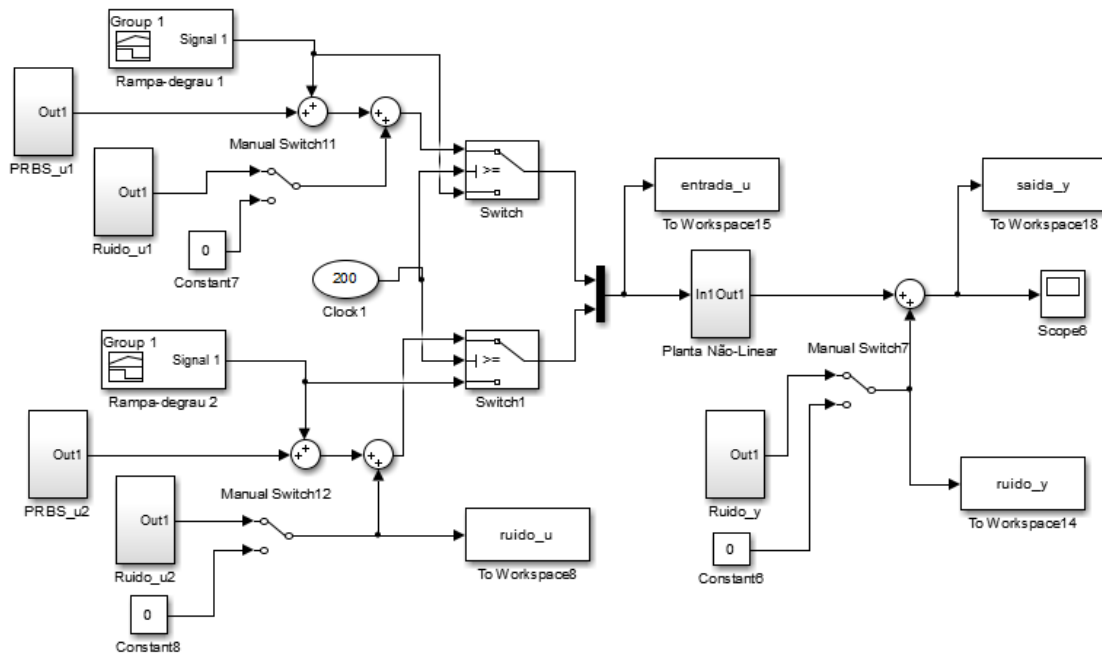


**Figura 19:** a) Sinais aplicados na entrada da planta não linear e b) sinais de saídas da planta não linear dada às entradas; caso com ruído colorido na entrada e na saída.

**Fonte:** O próprio autor.

Com isso, a partir do tempo de 15 segundos de simulação da Figura 19a, aplicando o PRBS, têm-se as entradas sendo persistentemente excitadas. A amplitude dos sinais PRBS foram determinadas empiricamente para fazerem com que as oscilações das variáveis de saída permanecessem dentro de uma faixa de 1 rad em torno do ponto de operação, para tornar a identificação mais próxima do comportamento linear.

A partir dos dados de entradas e saídas, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO, foram executados, via software *Matlab*, onde excluíram-se os 15000 primeiros dados de simulação, devido à transição do sistema até o ponto de operação (0,523 rad), e então foram adquiridos os 1350000 próximos dados, usados para a identificação. A Figura 20 esboça o diagrama de blocos usados na simulação.



**Figura 20:** Diagramas de blocos do sistema em malha aberta, para a identificação com ruídos na entrada e na saída.

**Fonte:** O próprio autor.

Assim como nas seções anteriores, com os dados de identificação obtidos, os algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO foram executados e os valores singulares gerados pelos três algoritmos foram dispostos nas Tabelas 10, 11 e 12.

**Tabela 10:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP, com ruído na entrada e na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	224,9683561745686
2 <sup>a</sup>	80,3212586912167
3 <sup>a</sup>	0,2419503370541
4 <sup>a</sup>	0,0394042787359
5 <sup>a</sup>	0,0009883588404
6 <sup>a</sup>	0,0007002060626
7 <sup>a</sup>	0,0005192753383
8 <sup>a</sup>	0,0004360040853
9 <sup>a</sup>	0,0003772200043
10 <sup>a</sup>	0,0003433577631

**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 11:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PI, com ruído na entrada e na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	596,5858749056089
2 <sup>a</sup>	192,2394440917511
3 <sup>a</sup>	0,7283101921588
4 <sup>a</sup>	0,0858549120258
5 <sup>a</sup>	0,0001091264582
6 <sup>a</sup>	0,0000257997898
7 <sup>a</sup>	0,0000082636894
8 <sup>a</sup>	0,0000065395271
9 <sup>a</sup>	0,0000051068357
10 <sup>a</sup>	0,0000045158431

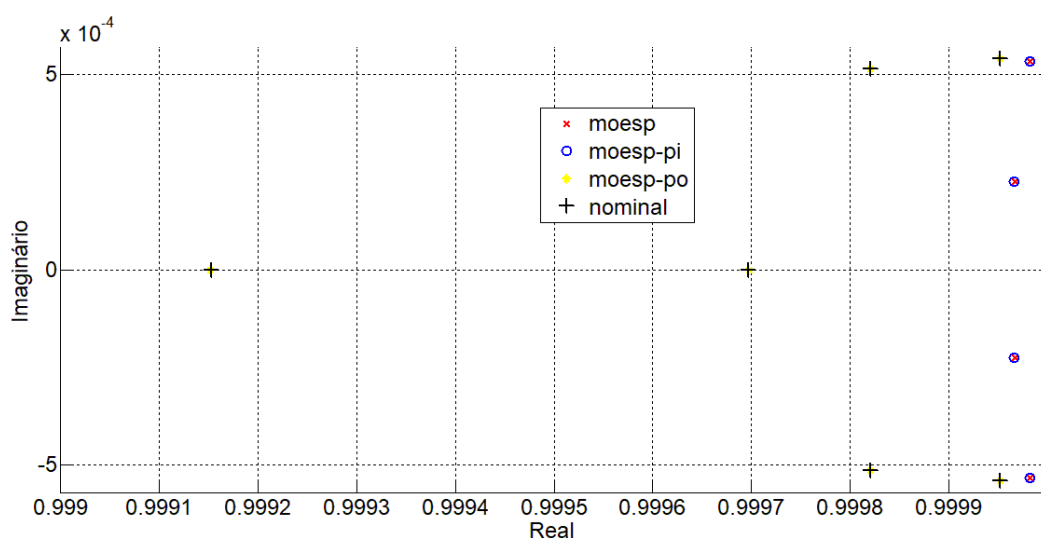
**Fonte:** O próprio autor.

**Tabela 12:** Análise numérica dos valores singulares estimados para o método MOESP-PO, com ruído na entrada e na saída.

Ordem	Valores Singulares
1 <sup>a</sup>	596,5890643794061
2 <sup>a</sup>	82,8647392639340
3 <sup>a</sup>	0,1549108362252
4 <sup>a</sup>	0,0298583487367
5 <sup>a</sup>	0,0000011848494
6 <sup>a</sup>	0,0000003488929
7 <sup>a</sup>	0,000000000005282
8 <sup>a</sup>	0,000000000003668
9 <sup>a</sup>	0,000000000003407
10 <sup>a</sup>	0,000000000003008

**Fonte:** O próprio autor.

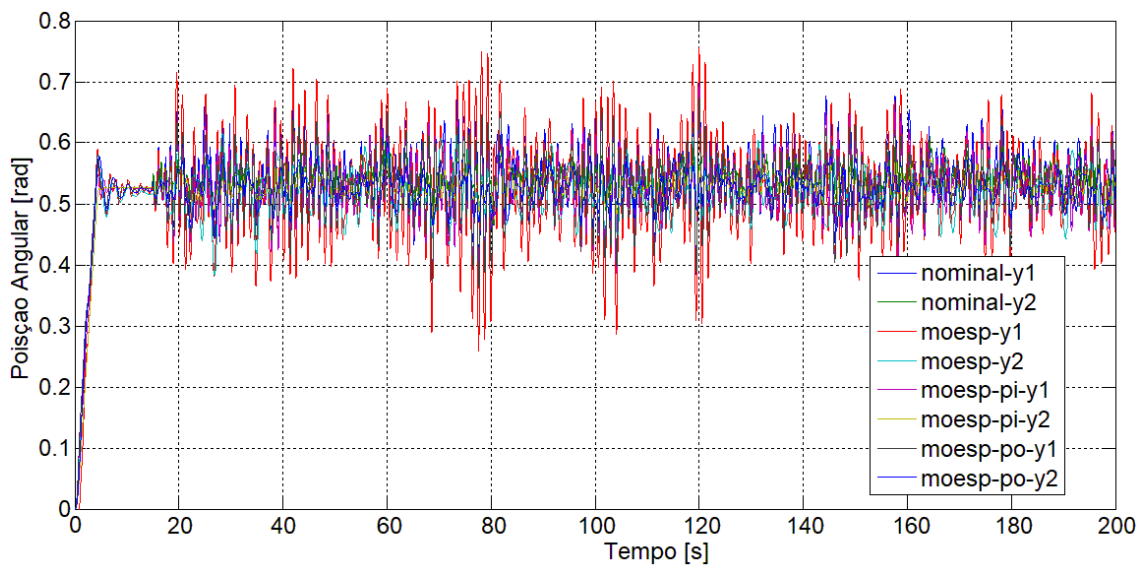
Pode-se observar então que o valor singular mais significativo perante o posterior foi: quarto para quinto valor singular, para o MOESP; também do quarto para o quinto no MOESP-PI; e sexto para o sétimo valor singular no MOESP-PO. Após a determinação da ordem que melhor representa o sistema para cada algoritmo, foram obtidas as matrizes de estado do sistema, tratadas no tempo discreto. Assim, foram analisados os autovalores dos sistemas identificados, ilustrado pela Figura 21.



**Figura 21:** Comparação entre autovalores dos sistemas resultados das identificações com ruído na entrada e na saída.

**Fonte:** O próprio autor.

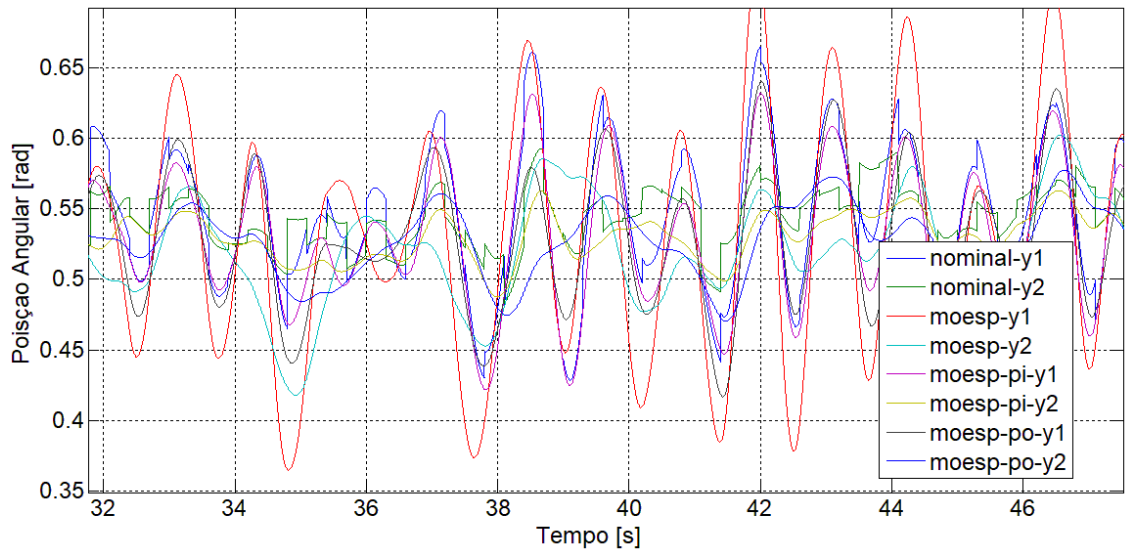
Os autovalores dos sistemas obtidos das identificações também foram comparados com os autovalores do sistema nominal linearizado discreto (6.4), como nas seções anteriores. Pela Figura 21, observou-se que apenas o modelo obtido pelo algoritmo MOESP-PO resultou em autovalores próximos aos da planta nominal. Os algoritmos MOESP e MOESP-PI aproximaram-se do modelo para quarta. Os três modelos obtidos foram simulados em conjunto com a planta nominal, nos quais os mesmos sinais de entrada foram aplicados nas quatro plantas. A Figura 22 ilustra o comportamento dinâmico dos modelos.



**Figura 22:** Comparação das respostas identificadas e nominais para um sistema com ruídos de processo e de medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Mesmo com a saída da planta variando 1,2 rad em torno do ponto de operação, o comportamento do sistema foi aproximado de uma planta linear. Porém, neste caso, a metodologia do algoritmo MOESP-PO teve melhor resultado na obtenção do modelo. Já os algoritmos MOESP e MOESP-PI possuíram certa característica da planta nominal, mas com menos êxito, como é observado na Figura 22. Para uma análise qualitativa mais minuciosa, tem-se a Figura 23 que detalha a Figura 22.

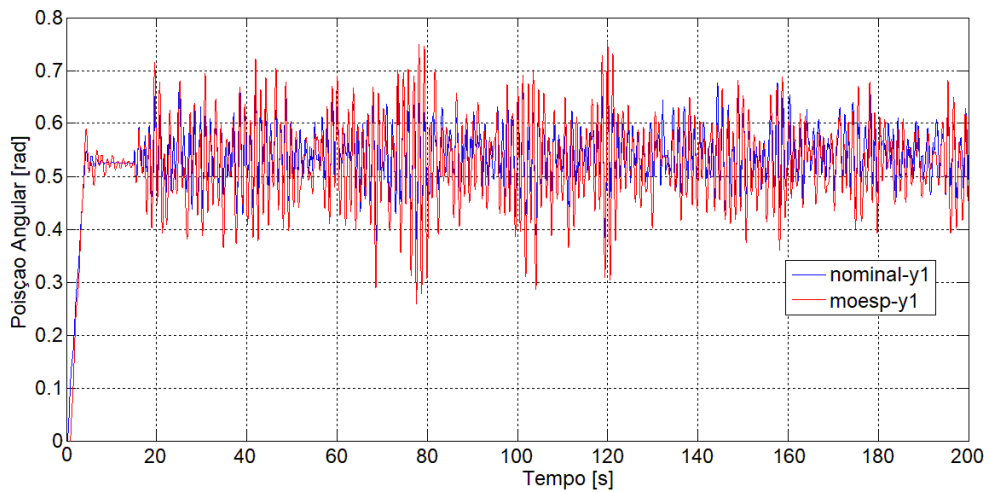


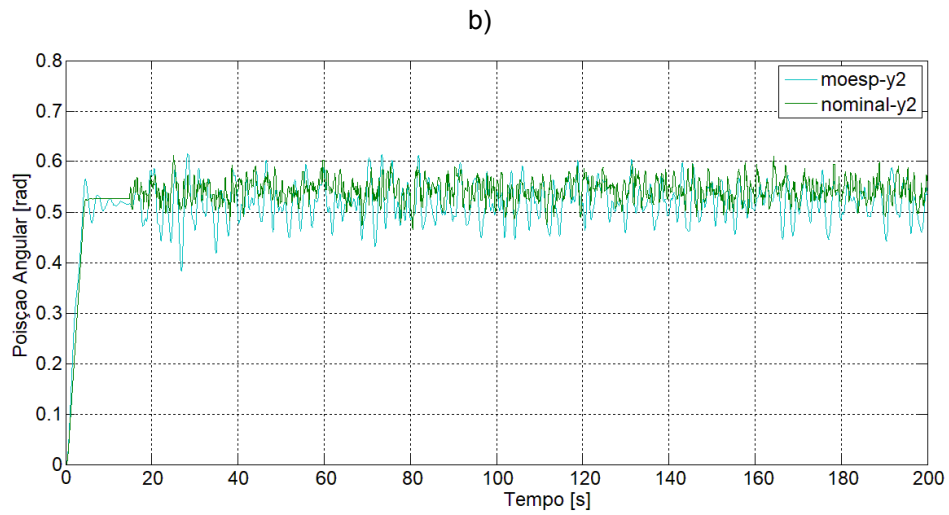
**Figura 23:** Análise mais detalhada do comportamento gráfico dos modelos obtidos, com ruídos na entrada e saída.

**Fonte:** O próprio autor.

Nas Figuras 24, 25 e 26, tem-se os resultados dos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO sendo comparados com a planta nominal, de forma gráfica, em que esboçam os resultados da Figura 22 de forma mais detalhada.

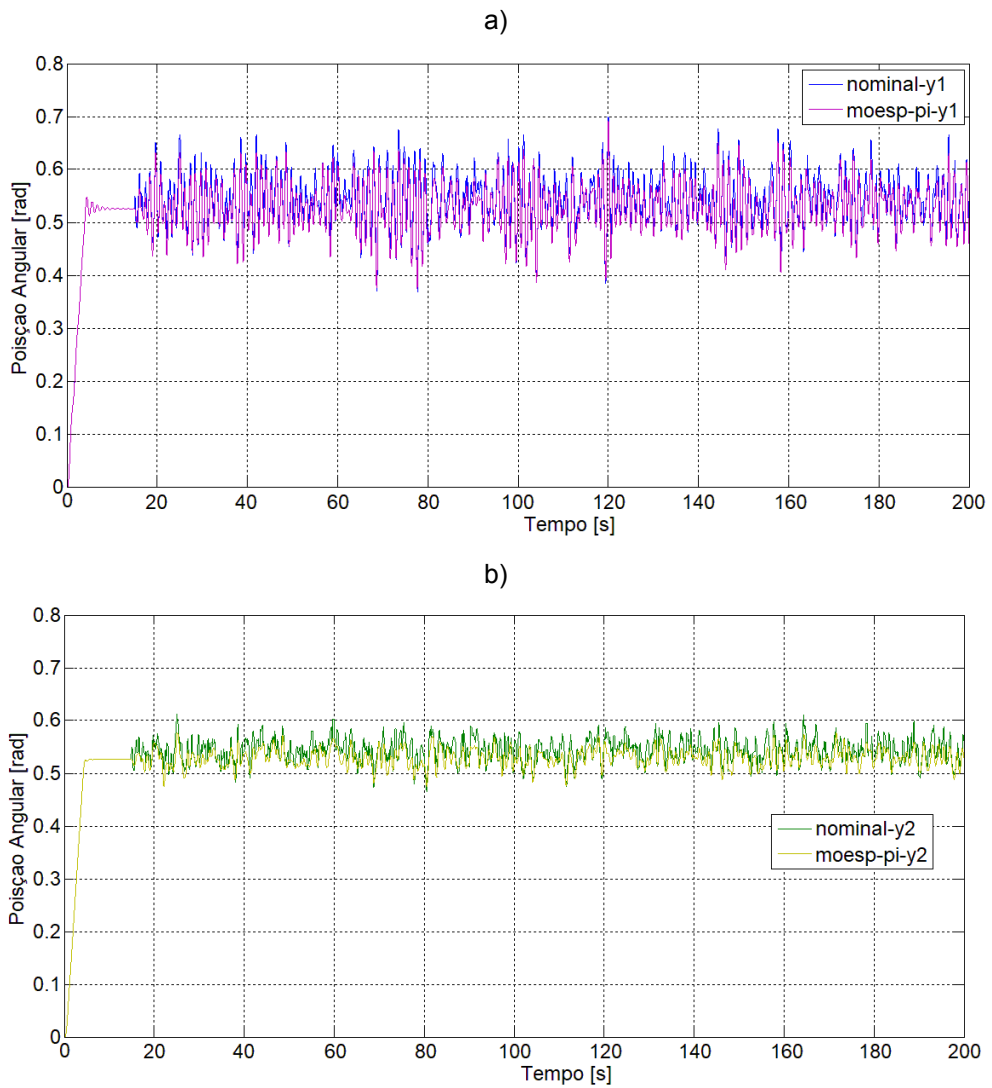
a)





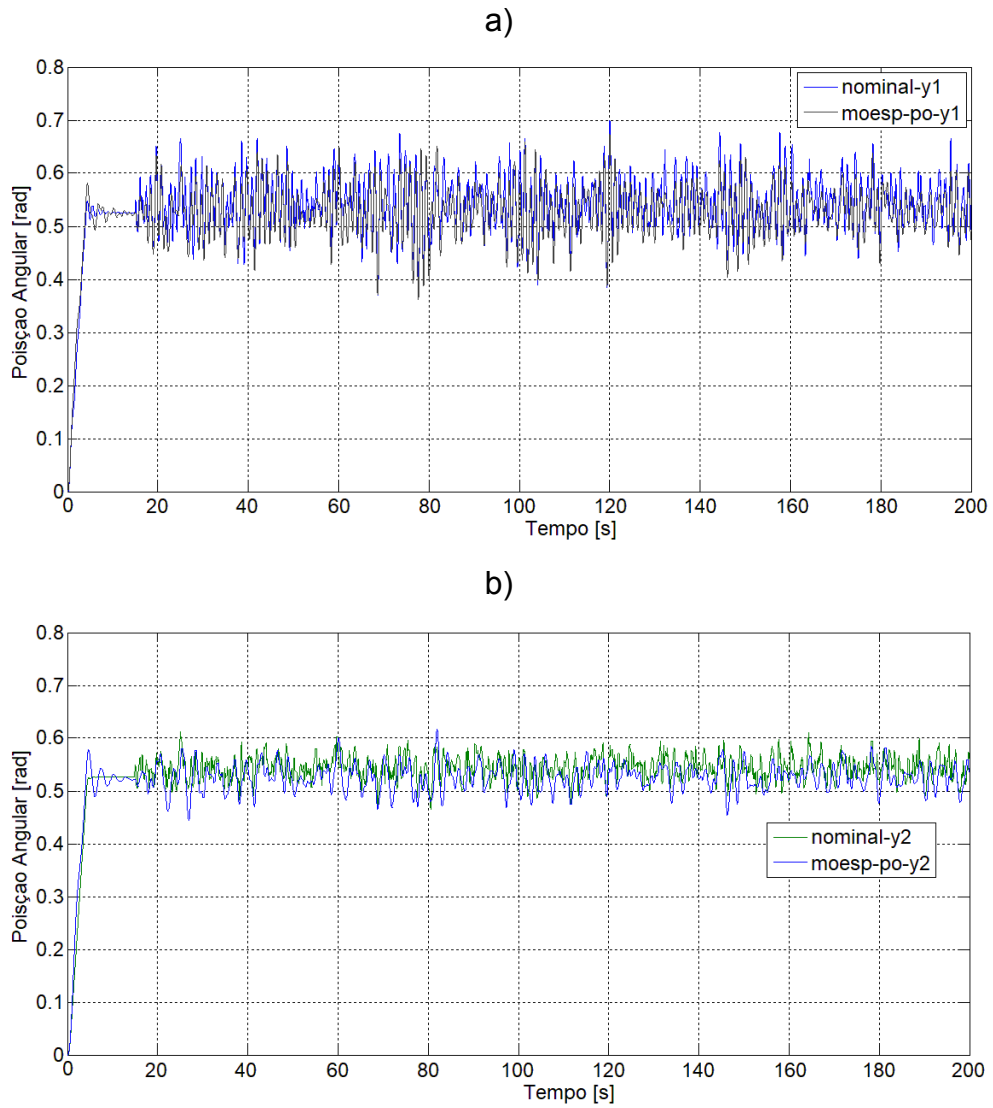
**Figura 24:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de processo e medição.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 25:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP-PI para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de processo e medição.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 26:** Respostas identificadas e nominais com algoritmo MOESP-PO para: a) saída 1 e b) saída 2, para um sistema com ruídos de processo e medição.

**Fonte:** O próprio autor.

Para uma análise quantitativa das respostas dos modelos obtidos, foram utilizados três índices de desempenho abordado na Seção 4: RMSE, MAE e FIT. A Tabela 13 mostra a comparação de cada saída dos modelos obtidos pelos algoritmos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO.

**Tabela 13:** Quadro comparativo de desempenho dos algoritmos a partir das saídas identificadas e nominais, com ruído na entrada e na saída.

		RMSE(%)	MAE(%)	FIT(%)
MOESP	$y_1$	0,53855	0,53658	10,2541
	$y_2$	0,019508	0,53567	9,8955
MOESP-PI	$y_1$	0,03135	0,025048	44,7841
	$y_2$	0,02967	0,024205	42,5332
MOESP-PO	$y_1$	0,01950	0,015209	86,5439
	$y_2$	0,01951	0,015210	86,4566

Fonte: O próprio autor.

Pela tabela acima, é possível observar que o algoritmo MOESP-PO obteve o melhor desempenho de modelo, comparando com a planta nominal. Devido a presença de ruído colorido nas entradas e nas saídas, o algoritmo MOESP não atendeu aos requisitos de validação, assim como o MOESP-PI. Assim, o modelo discreto obtido pelo algoritmo MOESP-PO foi descrito por:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1,000030 & -0,000564 & -0,005197 & \dots \\ -0,000030 & 1,000781 & 0,005682 & \dots \\ 0,000002 & -0,000071 & 1,00015 & \dots \\ -0,000004 & 0,0000246 & 0,000325 & \dots \\ 0,000018 & -0,000026 & -0,0008234 & \dots \\ -0,000006 & 0,000009 & 0,000175 & \dots \\ \dots & -0,000933 & -0,000006 & -0,0000004 \\ \dots & -0,006120 & 0,0000027 & -0,0000088 \\ \dots & 0,002025 & 0,0021134 & -0,0003001 \\ \dots & 1,00143 & 0,001264 & 0,00261263 \\ \dots & -0,00224 & 0,997510 & -0,00157536 \\ \dots & -0,00037 & 0,0001206 & 0,998492 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} -0,000009 & -0,00000239 \\ 0,000023 & -0,00000688 \\ 0,000629 & 0,0000676 \\ -0,000546 & 0,000400 \\ 0,050360 & 0,0096823 \\ -0,065924 & 0,025626 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$C_i = \begin{bmatrix} -0,64630 & 0,22229 & -0,02088 & 0,00351 & 0,00005 & -0,000020 \\ -0,60293 & -0,24159 & -0,00787 & -0,00912 & 0,00004 & 0,000028 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} 0,07776 & -0,04426 \\ 0,07776 & -0,04426 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Com os modelos identificados para os casos com e sem ruídos, utilizou-se do modelo obtido pelo algoritmo MOESP-PO, de (6.13-6.16), para ser convertida para o tempo contínuo com o uso do comando *d2c* do *Matlab*, com o período de amostragem de 0,0001 segundo, visando à implementação do controle. O resultado da conversão é dado por:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0,304101 & -5,64354 & -51,952329 & \dots \\ -0,300845 & 7,81278 & 56,810756 & \dots \\ 0,024637 & -0,71743 & 1,513894 & \dots \\ -0,043898 & 0,246319 & 3,251151 & \dots \\ 0,188143 & -0,265708 & -8,237081 & \dots \\ -0,066955 & 0,099514 & 1,754610 & \dots \\ \dots & -9,295174 & 0,000535 & 0,0000175 \\ \dots & -61,196664 & 0,005691 & -0,0004104 \\ \dots & 20,264854 & 21,146522 & -3,013289 \\ \dots & 14,314842 & 12,647610 & 26,137858 \\ \dots & -22,40847 & -24,901018 & -15,75707 \\ \dots & -3,773684 & 1,2097404 & -15,08456 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} -0,079109 & -0,020496 \\ 0,199218 & -0,058857 \\ 5,667174 & 0,608161 \\ -4,915307 & 3,6015440 \\ 503,70493 & 97,150477 \\ -659,7726 & 256,45127 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} -0,646301 & 0,22229 & -0,02088 & 0,003516 & 0,0000529 & -0,000020 \\ -0,602930 & -0,241595 & -0,00787 & -0,009125 & 0,0000381 & 0,000028 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$D_e = \begin{bmatrix} 0,0777638 & -0,044260 \\ 0,0777638 & -0,044260 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Dessa forma, pode-se utilizar o modelo descrito em (6.17) à (6.20) para o projeto do controlador, abordados nas seções 5.2 e 5.3, respectivamente.

## 6.4 Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes com Chaveamento Suavizado e Incertezas Limitadas em Norma

A partir do sistema linear identificado pelo método MOESP-PO em torno de um ponto de operação de  $30^\circ$ , foram consideradas incertezas paramétricas presentes nas matrizes  $A_e$  e  $B_e$ , sendo denominadas  $\delta A_e$  e  $\delta B_e$ , de mesmo formato que em (5.29) e (5.30). Os elementos de  $\delta A_e$  e  $\delta B_e$  foram obtidos de forma empírica, devido aos elementos das matrizes identificadas  $A_e$  e  $B_e$  não possuírem significado físico. Porém, foram consideradas variações paramétricas que ainda caracterizem um sistema estável em malha aberta.

$$\delta A_e = \begin{bmatrix} 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \\ 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \\ 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \\ 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \\ 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \\ 0,005 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\delta B_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Como mostrado em (5.30), as matrizes de incertezas podem ser escritas como  $\delta A_e = M \cdot \Delta \cdot R_a$  e  $\delta B_e = M \cdot \Delta \cdot R_b$ , sendo  $M$ ,  $R_a$  e  $R_b$  obtidas algebricamente para resultar em (6.21) e (6.22). Dessa forma, foi determinado que

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$R_a = [0,005 \quad 0,01 \quad 0,01 \quad 0,01 \quad 0,5 \quad 0,25], \quad (6.24)$$

$$R_b = [2 \quad 1]. \quad (6.25)$$

O parâmetro  $\Delta$  foi variado em três valores (-1, 0 e 1), para a determinação do pior caso de variação de  $\delta A_e$  e  $\delta B_e$ , que é a região especificada no projeto do

controlador. Dessa forma, para análise inicial, as matrizes  $A_e + \delta A_e$  e  $B_e + \delta B_e$  obtidas para as três variações de  $\Delta$ , em que foram analisados os autovalores em malha aberta do sistema.

- Se  $\Delta = 0$ , então  $\delta A_e = \delta B_e = 0$ . Assim, os autovalores resultantes de  $A_e$  são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -8,4836 \\ -3,0161 \\ -1,7935 \pm 5,1497.i \\ -0,4766 \pm 5,4031.i \end{array} \right. \quad (6.26)$$

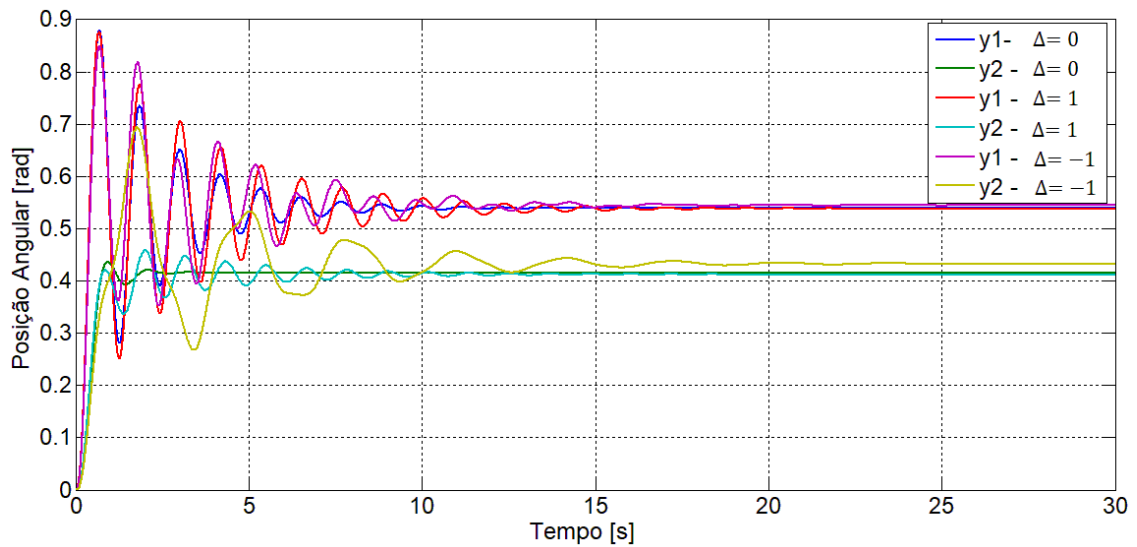
- Se  $\Delta = 1$ , então  $\delta A_e = M.1.R_a$ , que será igual à  $+\delta A_e$ , descrito em (6.21). De mesma forma,  $\delta B_e = M.1.R_b$ , que será igual à  $+\delta B_e$ , descrito em (6.22). Assim, os autovalores resultantes de  $A_e + \delta A_e$  são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -8,454 \\ -2,2345 \\ -1,9784 \pm 7,988.i \\ -0,3048 \pm 5,3717.i \end{array} \right. \quad (6.27)$$

- Se  $\Delta = -1$ , então  $\delta A_e = M.(-1).R_a$ , que será igual à  $-\delta A_e$ . De mesma forma,  $\delta B_e = M.(-1).R_b$ , que será igual à  $-\delta B_e$ . Assim, os autovalores resultantes de  $A_e + \delta A_e$  são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -8,6646 \\ -6,9948 \\ -0,3391 \pm 5,5221.i \\ -0,2437 \pm 3,862.i \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Dessa forma, analisando os autovalores dos sistemas em malha aberta, considerando os piores casos de incertezas paramétricas ( $\Delta$  variando entre -1, 0 e 1), é possível destacar os diferentes comportamentos transitórios dos sistemas, porém sendo todos estáveis em malha aberta. Para a visualização dos comportamentos transitórios de forma gráfica, foram aplicados degraus de amplitude 200  $\mu$ s nas duas entradas ( $u_1$  e  $u_2$ ), considerando as três plantas incertas ilustradas pela Figura 27, em que  $y_1$  refere-se à saída 1 (perna 1) e  $y_2$  refere-se à saída 2 (perna 2).



**Figura 27:** Comparação das respostas dos sistemas incertos em malha aberta, variando o valor de  $\Delta$  entre -1, 0 e 1, dada a aplicação do mesmo sinal em degrau nas entradas.

**Fonte:** O próprio autor.

Observa-se na Figura 27 que a variação de  $\Delta$  ocasiona em comportamentos transitórios distintos para cada sistema, tornando-se mais oscilatório quando  $\Delta = 1$  ou  $\Delta = -1$ , aumentando seu tempo de estabilização de acordo com a variação paramétrica.

Com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, mesmo na presença de incertezas e distúrbios externos, tem-se o projeto de um controlador por estrutura variável e modos deslizantes, com chaveamento suavizado, em que foram consideradas incertezas paramétricas limitadas em norma. Para a planta identificada mostrada em (6.17-6.20), considerando as incertezas de (6.21) e (6.22), deseja-se manter a posição angular das duas pernas do paciente paraplégico ( $y_1$  e  $y_2$ ) em um valor desejado ( $r_1$  e  $r_2$ ), respectivamente. Para que o sistema atenda às especificações de taxa de decaimento  $\gamma$  maior que 1 (tempo de assentamento menor que 4 s), um ângulo de setor cônico  $\theta$  de até  $46,36^\circ$  (*overshooting* menor que 5%) e garanta a passividade do sistema, além de eliminar o erro em regime permanente do sistema e que garanta a restrição na entrada (5.26)  $\rho < 500 \mu s$ , foi implementada a lei de controle (5.35), considerando  $M(x, t) = 250 \mu s$  e  $\varepsilon = 10$ .

Assim, com as especificações de desempenho citadas acima, devem-se obter os ganhos  $K, K_e$  e  $F$ , projetando a superfície de chaveamento através da intersecção

das LMIS abordadas nas Seções 5.2 e 5.3. Com o uso do *solver* LMILab, do *Matlab*, foi obtida uma solução factível das LMIs (5.21), (5.24), (5.25), (5.27) e (5.28), satisfazendo os requisitos do sistema:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0453 & 0,0998 & 0,6876 & -0,0789 & 0,1974 & -0,1001 \\ -0,1164 & -0,0038 & 0,6477 & 1,1247 & 0,4368 & 0,3312 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

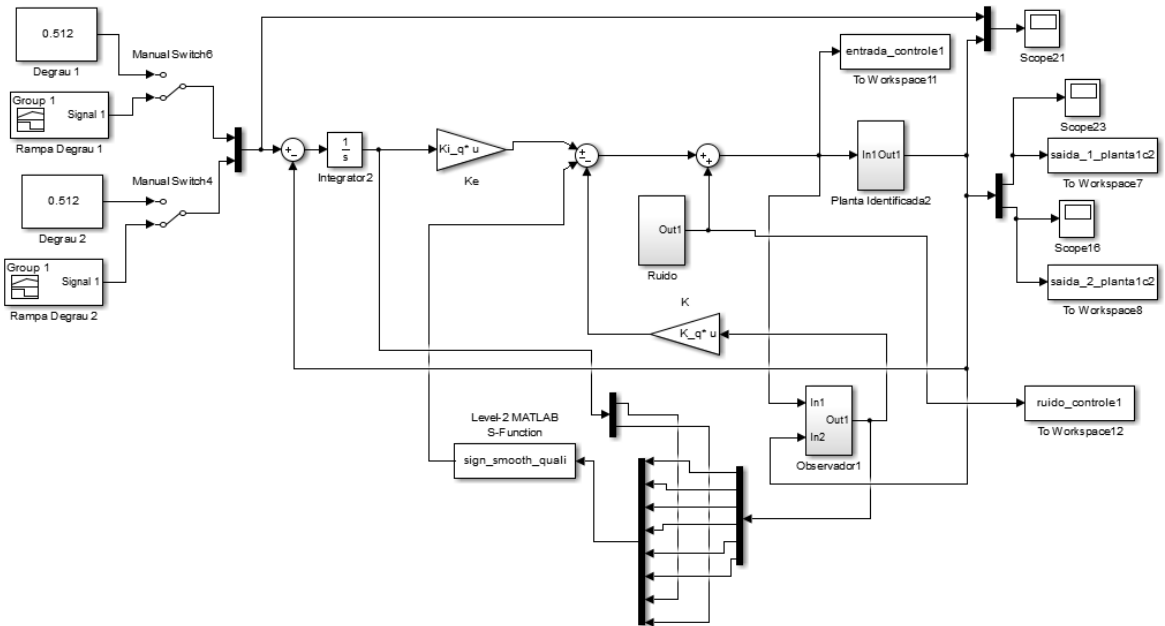
$$K_e = \begin{bmatrix} 0,1088 & -0,0292 \\ -0,0044 & 0,2353 \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

$$F = \begin{bmatrix} -0,0329 & 0,0659 & 0,4863 & 0,0075 & 0,1873 & -0,071 & -0,0728 & 0,0137 \\ -0,1016 & 0,0256 & 0,7184 & 0,9699 & 0,522 & 0,3389 & -0,029 & -0,1693 \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Para a estimação dos estados a serem enviados ao controlador em uma implementação prática, foi projetado um observador de estados MIMO, através do comando *place* do *Matlab*, em que os polos do observador foram escolhidos para que a resposta do mesmo seja mais rápida que a resposta do controlador. Assim, foram escolhidas as posições dos dois polos dominantes do observador como sendo dez vezes mais rápidos que os dois polos dominantes utilizados no projeto do controlador, sendo que os outros polos restantes sejam localizados 100 ou mais vezes longe dos polos dominantes sobre o eixo real. Dessa forma, os polos escolhidos para o projeto do observador foram  $(-10 \pm 10,48.i; -100; -101; -102$  e  $-103)$ , resultando em:

$$K_o = 10^2 \begin{bmatrix} 1,9978 & 1,2698 \\ -4,8346 & 4,8335 \\ 3,9657 & -1,3417 \\ -2,5161 & 3,8725 \\ -2,6902 & 3,164 \\ 3,3861 & 0,092 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

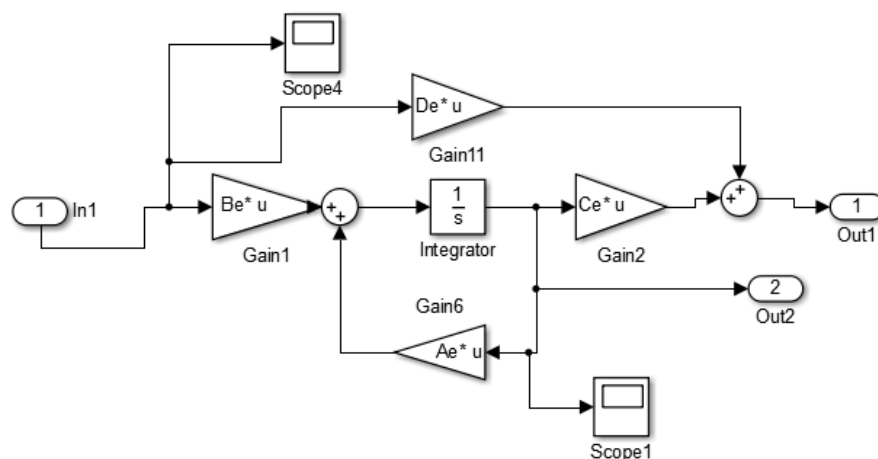
Dessa forma, utilizando a lei de controle (5.35), com  $K, K_e$  e  $F$  em (6.29), (6.30) e (6.31), respectivamente, e o observador descrito na Seção 5.4, com  $K_o$  em (6.32), tem-se a representação gráfica do sistema de controle na Figura 28 descrita em ambiente *Matlab/Simulink*.



**Figura 28:** Implementação da lei de controle de (5.35), com os estados sendo estimados para a identificação.

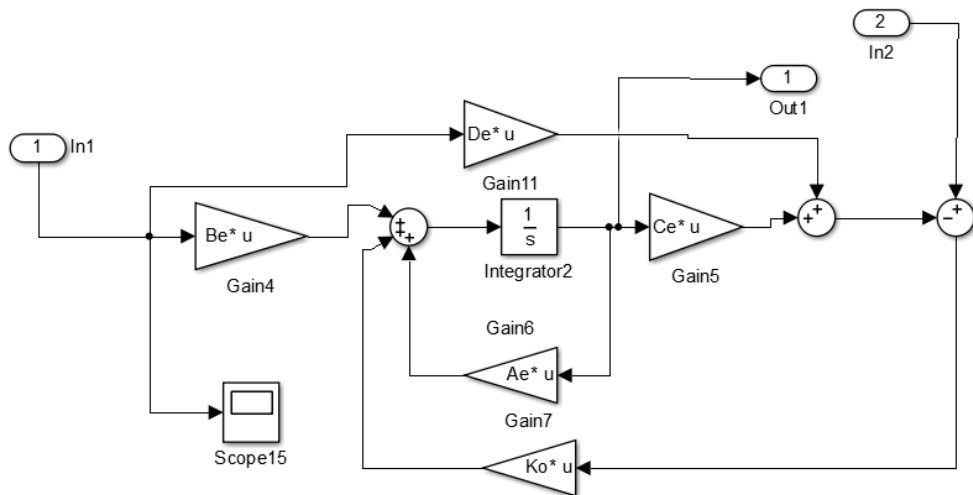
**Fonte:** O próprio autor.

Na Figura 28, tem-se os blocos ocultos: da planta identificada (*Planta Identificada2*); observador de estados (*Observador1*); e do ruído a ser inserido para a verificação da robustez do sistema (*Ruído*). Esses blocos citados são mostrados nas Figuras 29, 30 e 31. Além disso, tem-se a estrutura *S-Function*, do Simulink, usada para realizar o chaveamento suavizado (*sign\_smooth\_quali*) cujo algoritmo está disponível no Apêndice E.



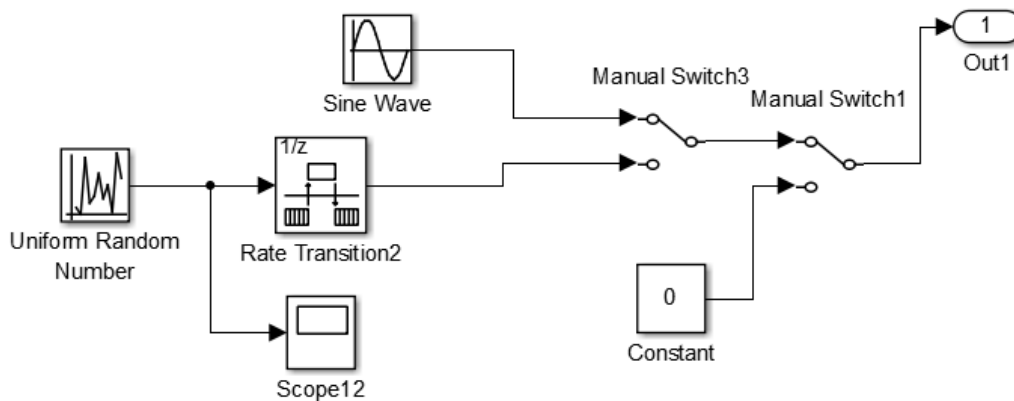
**Figura 29:** Elementos do bloco da Planta Identificada, da Figura 28.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 30:** Elementos do bloco do Observador de Estados, da Figura 28.

**Fonte:** O próprio autor.



**Figura 31:** Elementos do bloco do Ruído, da Figura 28.

**Fonte:** O próprio autor.

A partir do sistema realimentado, com os valores de  $K$ ,  $K_e$  e  $F$  obtidos, é possível analisar o resultado da inserção da estrutura de controle no sistema incerto, determinando os autovalores do sistema em malha fechada, dada a variação de  $\Delta$  (-1, 0 e 1), considerando o sistema aumentado para a eliminação do erro em regime permanente, como descrito na Seção 5.1. Sendo

-  $\Delta = 0$ , então  $\delta A_e = \delta B_e = 0$ . Assim, os autovalores resultantes em malha fechada do sistema são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -83,7732 \pm 36,685. i \\ -68,6473 \pm 34,154. i \\ -4,977 \\ -4,428 \\ -1,7673 \\ -1,671 \end{array} \right. \quad (6.33)$$

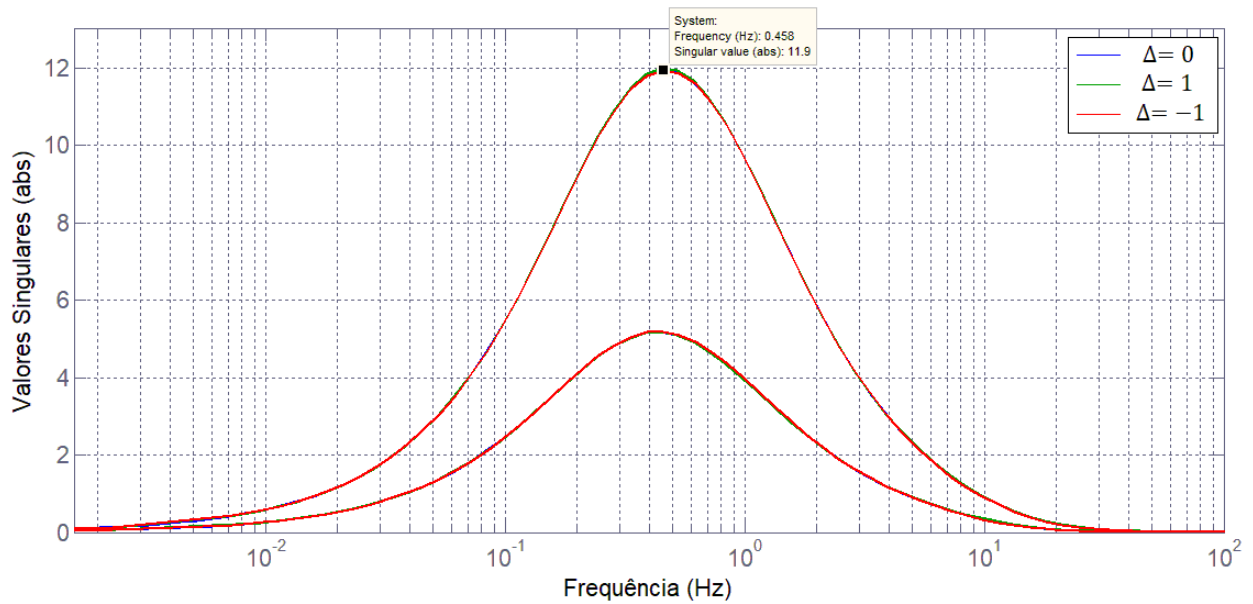
-  $\Delta = 1$ , então  $\delta A_e = M.1.R_a$ , que será igual à  $+\delta A_e$ , descrito em (6.21). De mesma forma,  $\delta B_e = M.1.R_b$ , que será igual à  $+\delta B_e$ , descrito em (6.22). Assim, os autovalores resultantes em malha fechada do sistema são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -84,394 \pm 35,156. i \\ -69,629 \pm 37,81. i \\ -4,937 \\ -4,409 \\ -1,773 \\ -1,6738 \end{array} \right. \quad (6.34)$$

-  $\Delta = -1$ , então  $\delta A_e = M.(-1).R_a$ , que será igual à  $-\delta A_e$ . De mesma forma,  $\delta B_e = M.(-1).R_b$ , que será igual à  $-\delta B_e$ . Assim, os autovalores resultantes em malha fechada do sistema são:

$$\left\{ \begin{array}{l} -83,76 \pm 38,067. i \\ -67,05 \pm 30,3583. i \\ -5,0266 \\ -4,446 \\ -1,7612 \\ -1,6675 \end{array} \right. \quad (6.35)$$

A partir de (6.33), (6.34) e (6.35), observa-se que as especificações de desempenho de estabilidade e resposta transitória foram atingidas, mesmo com a presença das incertezas paramétricas. Com o intuito de inserir um distúrbio  $f(x, t)$  no sistema para a verificação da robustez do sistema de controle, foram analisados os valores singulares do sistema com o controlador inserido, a partir da planta identificada e na presença das incertezas paramétricas, através do comando *sigma* do *Matlab*. Tem-se como objetivo determinar o pior caso de ruído que afeta o sistema em malha fechada (*valor absoluto* = 11,9; *frequência* = 0,458 Hz), mostrado na Figura 32.



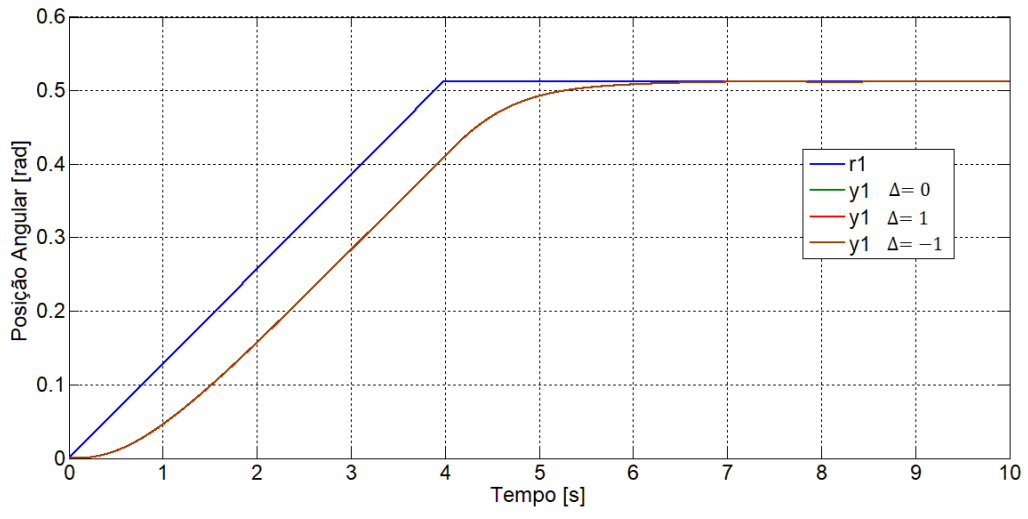
**Figura 32:** Valores singulares do sistema em malha fechada.

**Fonte:** O próprio autor.

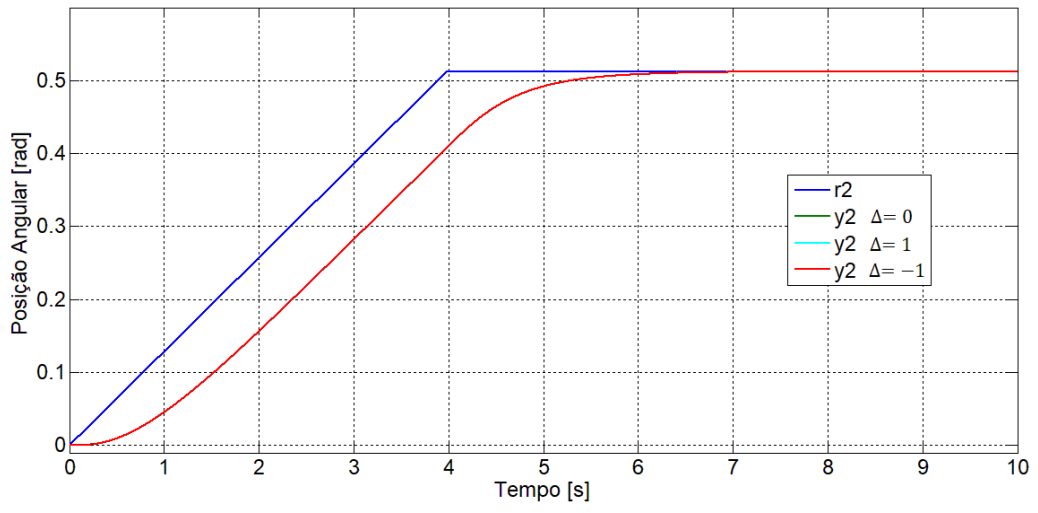
Determinando que os *setpoints*  $r_1$  e  $r_2$  sejam rampas e posteriormente estabilizem em  $0,523$  rad ( $30^\circ$ ), caracterizando um comportamento degrau-rampa das saídas  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente, como a metodologia abordada em (FERRARIN; PEDOTTI, 2000), tem-se a simulação abaixo em que objetiva-se garantir a D-estabilidade e a restrição do sinal de entrada do sistema, mesmo na presença de ruído senoidal com  $0,458$  Hz e  $25$   $\mu$ s de amplitude e de incertezas paramétricas. Foi implementada a lei de controle com chaveamento suavizado (5.35) em ambiente Simulink, conforme o diagrama de blocos mostrado na Figura 28, utilizando as matrizes  $K$ ,  $K_e$  e  $F$ , obtidas em (6.29-6.31), de acordo com os requisitos de projeto. Como já citado, a função não linear de saturação suavizada *ssat* (5.34), que é utilizada na lei de controle com chaveamento suavizado (5.35), foi desenvolvida no bloco *S-Function* da Figura 28, cujo algoritmo está disponível no Apêndice E.

Na Figura 33, tem-se o resultado da simulação do sistema de controle com o distúrbio inserido na entrada da planta e também a presença das incertezas paramétricas, com o chaveamento suavizado.

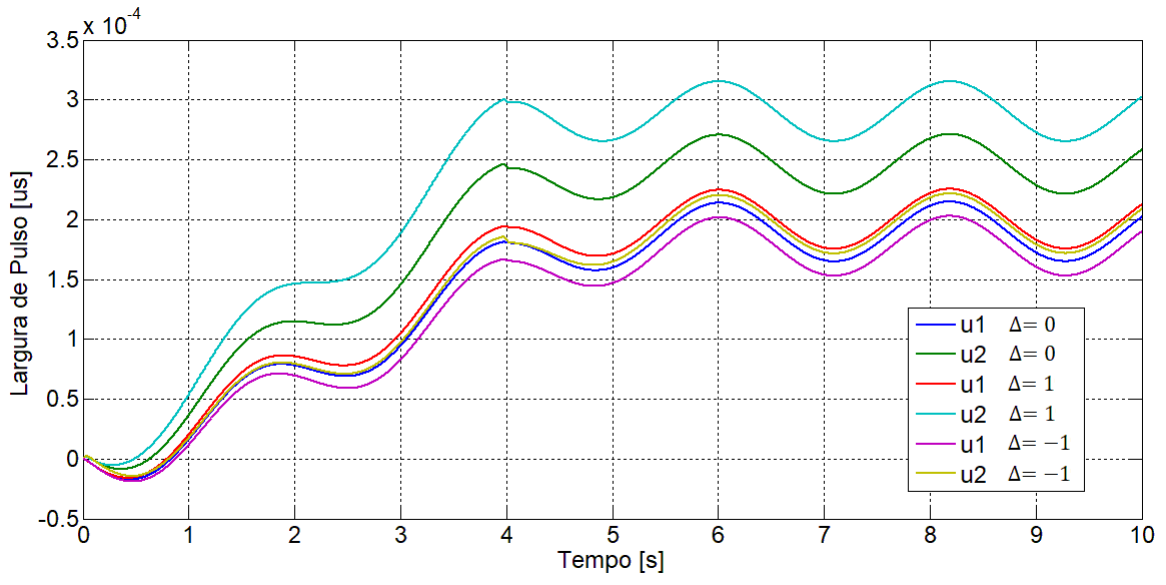
a)

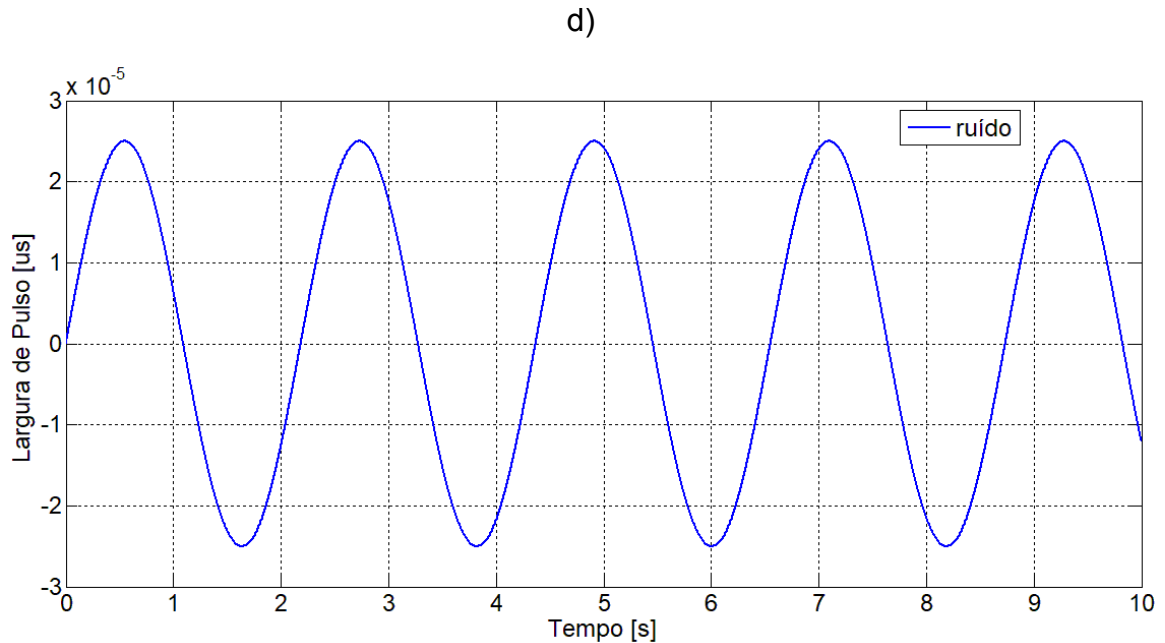


b)



c)





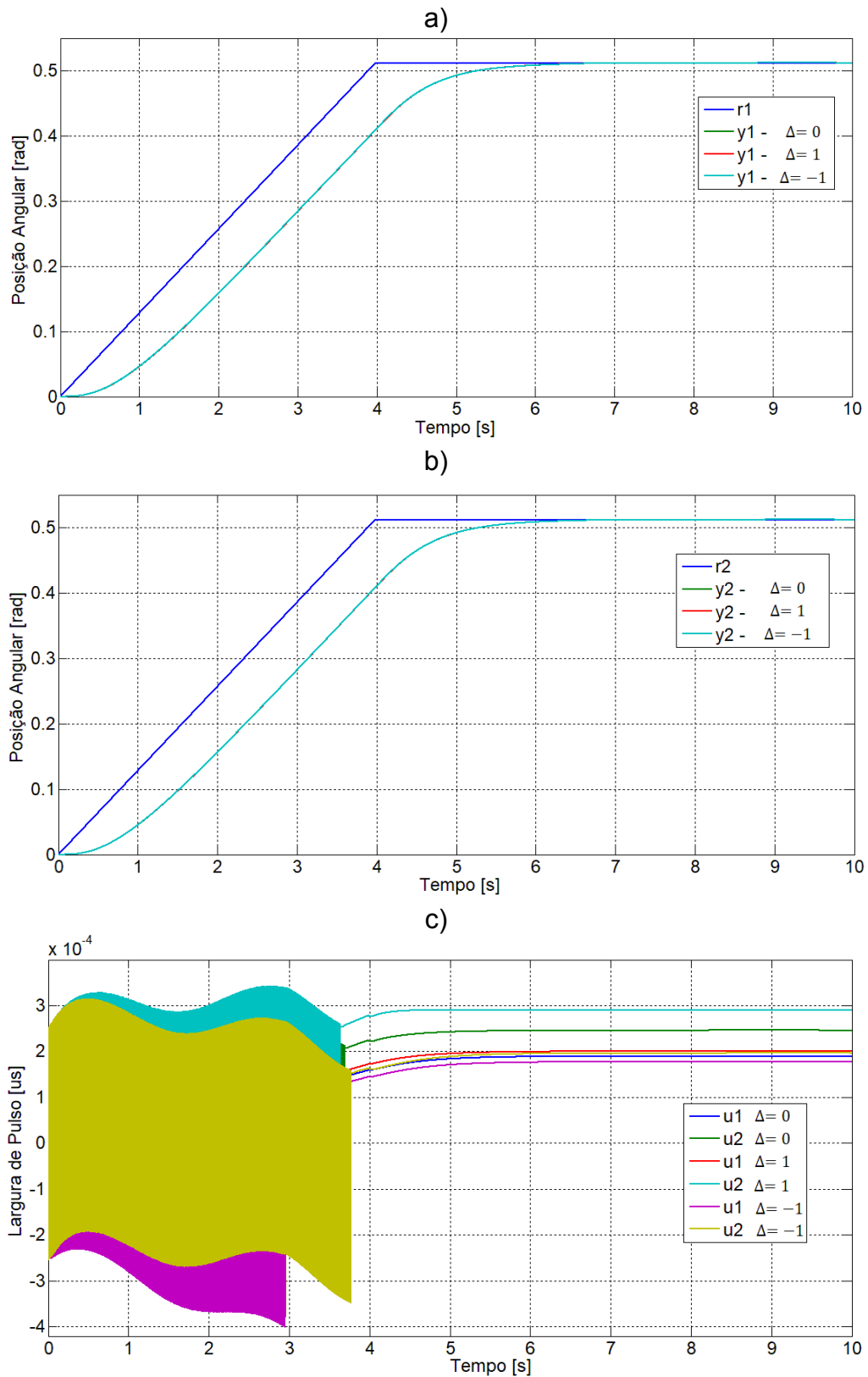
**Figura 33:** a) Saída  $y_1$  da planta incerta com o sistema em malha fechada, b) saída  $y_2$  da planta incerta com o sistema em malha fechada, c) lei de controle com chaveamento suavizado e d) o sinal de ruído senoidal aplicado ao sistema.

**Fonte:** O próprio autor.

Pela Figura 33, pode-se verificar que o comportamento transitório e em regime permanente desejados foram alcançados. Mesmo na presença de ruídos de grande amplitude para a planta incerta e com o pior caso de frequência, a lei de controle por estrutura variável garantiu a D-estabilidade e a restrição do sinal de entrada, tornando-se insensível ao distúrbio senoidal de 0,458 Hz. O sistema de controle também garantiu a estabilidade do sistema mesmo na presença de incertezas paramétricas, a partir da limitação da norma do sistema considerada no projeto ( $-1 \leq \Delta \leq 1$ ). Essas características de respostas foram obtidas com um chaveamento suavizado dos sinais de controle ( $u_1$  e  $u_2$ ), resultado da lei de controle (5.35), para o controlador projetado.

Em alguns trabalhos destacados da literatura, como em (AJOUDANI; ERFANIAN, 2009), tem-se a utilização de uma lei de controle implementada com a função sigmoide, como em (5.13), possuindo assim um chaveamento de alta frequência do controlador, impossibilitando assim uma implementação prática e provocando também um efeito de trepidação (*chattering*) nas variáveis de saída das plantas. Na Figura 34, tem-se a implementação do sistema de controle com o mesmo distúrbio inserido na entrada da planta e também a presença das incertezas

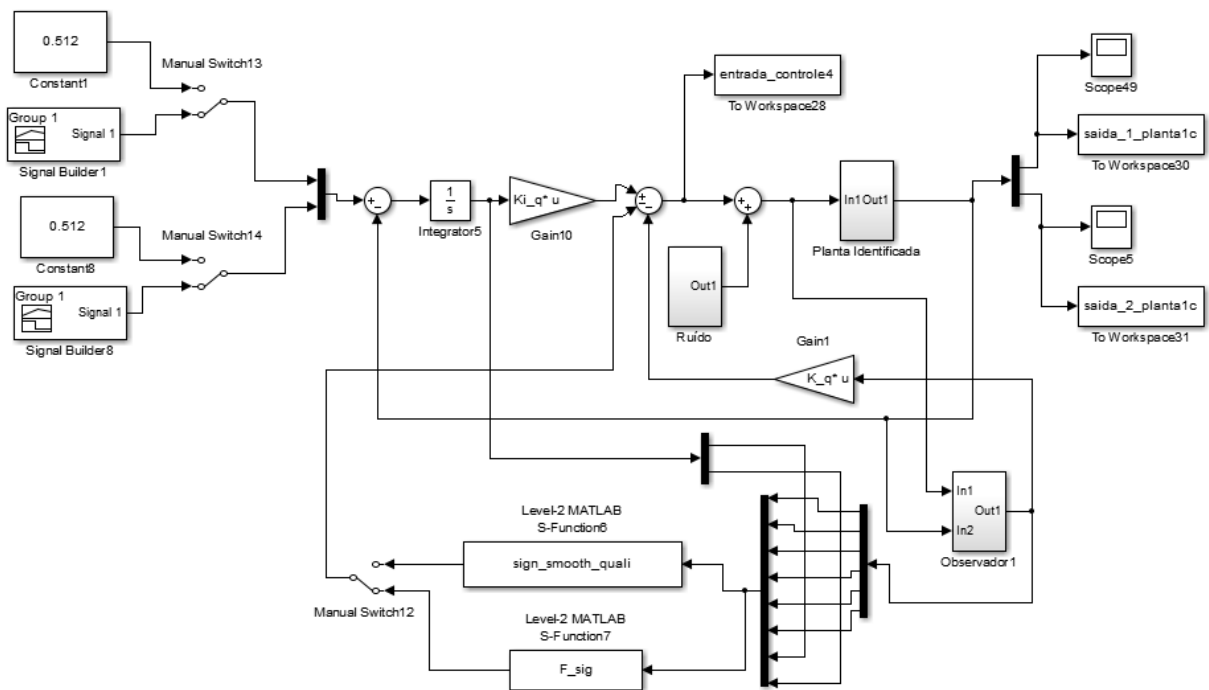
paramétricas da simulação da Figura 33, mas sem o chaveamento suavizado, porém com a função sigmoide descrita em (5.11).



**Figura 34:** a) Saída  $y_1$  da planta incerta com o sistema em malha fechada, b) saída  $y_2$  da planta incerta com o sistema em malha fechada e c) lei de controle sem chaveamento suavizado.

Fonte: O próprio autor.

Para a simulação da Figura 34, é observado um chaveamento de alta frequência nas entradas das plantas, em que foi utilizada a lei de controle (5.13), com o uso da função sigmoide ao invés da função saturada suavizada (5.35), e também as mesmas matrizes de controle  $F, K$  e  $K_e$  da simulação da Figura 33. É percebido também que as respostas de simulação das plantas, mostradas nas Figuras 34a e 34b, não sofreram a influência dos ruídos inseridos na entrada, sendo garantida também a estabilidade do sistema. Porém o chaveamento de alta frequência nas entradas da planta, mostrado na Figura 34c, impossibilita sua futura implementação prática, sendo assim viável a função suavizada. Destaca-se também que as saídas da planta na simulação, mesmo com o chaveamento de alta frequência, não apresentaram *chattering*, em que esse efeito é característico em implementações práticas. A Figura 35 retrata o diagrama de blocos usado para essa simulação.



**Figura 35:** Implementação da lei de controle de (5.13), com os estados sendo estimados para a identificação.

**Fonte:** O próprio autor.

Pela Figura 35, a função sigmoide  $sig$  (5.11), que é utilizada na lei de controle (5.13), foi desenvolvida na estrutura *S-Function* da Figura 35, no bloco  $F\_sig$ , cujo algoritmo está disponível no Apêndice E.

## 7 Conclusões

Nessa pesquisa foram apresentadas técnicas de identificação de sistemas MIMO por subespaços, tratando do caso estocástico, que considera a presença de ruídos brancos e coloridos no processo ou na medição. Abordou-se o algoritmo MOESP, que leva em consideração a presença de ruídos brancos (média nula) na entrada e na saída da planta, que não polarizam a estimação dos modelos. Posteriormente, foi abordado o algoritmo MOESP-PI, que trabalha em sua lógica a presença de ruídos coloridos no processo e utiliza as entradas passadas para obter um modelo não polarizado. Por fim, o algoritmo MOESP-PO, considera a presença de ruídos coloridos no processo e na medição, utilizando as entradas e saídas passadas para obter um modelo não polarizado pelo ruído colorido.

Foi simulado o algoritmo MOESP para a planta não linear do paciente paraplégico, no qual as saídas foram levadas empiricamente ao ponto de operação de  $30^\circ$  e os dados foram coletados para a identificação linear em torno desse ponto, representando um modelo MIMO, referente a ambas as pernas do paciente. Os modelos matemáticos foram obtidos com sucesso, de acordo com a característica de cada algoritmo, sendo realizadas análises qualitativas e quantitativas do modelo obtido por índices de desempenho difundidos na literatura. Para o modelo sem a presença de ruído, os três algoritmos obtiveram bons resultados, em que o MOESP possuiu melhor desempenho. Para o modelo com ruído colorido na entrada, o algoritmo MOESP-PI obteve o melhor desempenho. Já para o modelo com ruído colorido tanto na entrada quanto na saída da planta, o algoritmo MOESP-PO obteve um resultado um pouco melhor do que o dos outros.

Após a obtenção do modelo, foi projetado um controlador por estrutura variável e modos deslizantes com chaveamento suavizado, em que foram utilizadas restrições LMIs para a garantia da passividade, D-estabilidade e restrição do sinal de entrada. Também foi considerado o sistema com incertezas paramétricas limitadas em norma, garantindo a estabilidade do sistema mesmo na presença dessas incertezas. Mesmo na presença de distúrbio que afeta fortemente o sistema, não houve trepidação da saída e nem o chaveamento de alta frequência do sinal de controle, sendo esses efeitos indesejados nas saídas do sistema, atuando assim de

forma esperada. Além disso, houve a eliminação do erro em regime permanente e a resposta transitória desejada para o sistema.

Em (AJOUDANI; ERFANIAN, 2009) e (SADAT-HOSSEINI; ERFANIAN, 2015), foram utilizadas essas leis de chaveamento com a adição de componentes de redes neurais e *fuzzy* para reduzir a frequência de chaveamento, o que torna complexa a utilização desse sistema. Com função não linear de saturação suavizada (5.34), tem-se a suavização da lei de chaveamento, provocando menos oscilações na largura de pulso, a partir de uma função simplificada.

Para uma implementação prática, é necessário o projeto de um observador de estados, pois os estados do modelo obtido pelo algoritmo MOESP não possuem significado físico, sem necessário estima-los pelas saídas da planta. Neste trabalho também foi projetado um observador de estados que estimou os estados para o controlador, que usa a lei de realimentação de estados.

## **7.1 Propostas para Trabalhos Futuros**

- Realizar a identificação de modelos de Hammerstein e Wiener para sistemas não lineares, em conjunto com os algoritmos MOESP-PI e MOESP-PO, para a identificação de um novo modelo não linear da planta do paciente paraplégico;
- Realizar a implementação prática das técnicas aqui abordadas;
- Desenvolver métodos recursivos de identificação por subespaços para estimar a parcela linear dos modelos de Hammerstein e Wiener;
- Utilizar técnicas de controle adaptativo, levando em conta a fadiga do paciente.

# Publicações

Trabalhos publicados em congressos nacionais e internacionais:

- **MAGAN, M. V.**; MARQUES, M. F.; NUNES, W. R. B. M.; COVACIC, M. R.; GAINO, R. Síntese de Controlador por Estrutura Variável e Modos Deslizantes para o Controle de Posição Angular do Joelho do Paciente Paraplégico. In: **DINCON 2017 – Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**. S. J. Rio Preto – SP, 2017, 7 p.;
- MARQUES, M. F.; **MAGAN, M. V.**; GAINO, R.; COVACIC, M. R. Control of Uncertain System Represented by Polytope Using Enhanced Lyapunov Function. In: **IEEE CHILECON**. Pucón – Chile, 2017, 6 p.;
- **MAGAN, M. V.**; MARQUES, M. F.; COVACIC, M. R.; GENTILIN, F. A.; GAINO, R. MIMO Control by Decoupling Theory using Robust PID Controllers applied in Level and Temperature Model. In: **5<sup>th</sup> International Conference on Control, Mechatronics and Automation – ICCMA**. Edmonton – Canadá, 2017, p.100-104;

Capítulos de Livros Publicados:

- **MAGAN, M. V.**; COVACIC, M. R.; GENTILIN, F. A.; GAINO, R. Controle Multivariável de Processo Industrial Aplicado à Reator Químico. In: **Inovação e Tecnologia - SENAI**. 1 ed. Londrina – PR, 2016, v.2, p.346-365;

## Referências Bibliográficas

ACKERMANN, J.; UTKIN, V. Sliding Mode Control Design Based on Ackermann's Formula. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1998. Vol. 43, No. 2, p. 234-237.

ACOSTA, J. A. P.; BOTTURA, C. P. **Identificação por Subespaços de Sistemas MIMO com Erros em Variáveis**. DINCON - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. S. J. do Rio Preto - SP: [s.n.]. 2017. 7 p.

AJLOUDANI, A.; ERFANIAN, A. A Neuro-Sliding-Mode Control with Adaptive Modeling of Uncertainty for Control of Movement in Paralyzed Limbs using Functional Electrical Stimulation. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, 2009. p.1771-1780.

ANDERSON, B. A Simplified Viewpoint of Hyperstability. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1968. p. 292-294.

ANDRÉS, A. Pessoas com Deficiência nos Censos Populacionais e Educação Inclusiva. **Site da Câmara dos Deputados**, Novembro 2014. Disponível em: <[http://www2.camara.leg.br/a-camara/documentos-e-pesquisa/estudos-e-notas-tecnicas/areas-da-conle/tema11/2014\\_14137.pdf](http://www2.camara.leg.br/a-camara/documentos-e-pesquisa/estudos-e-notas-tecnicas/areas-da-conle/tema11/2014_14137.pdf)>. Acesso em: Julho 2018.

ANTWERP, J. G. V.; BRAATZ, R. D. A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities. **Journal of Process Control**, Oxford, 2000. p. 363-385.

BIAZETO, A. R. Controladores de Movimento da Articulação do Joelho de Paraplégico com PI, PID e Fuzzy Takagi-Sugeno. **Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Londrina**, Londrina, 2015. 188 p.

BORJAS, S. D. M.; GARCIA, C. Identificação Determinística por Subespaços. **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, 2012. p. 207-218.

BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

CELENTANO, L. Robust Tracking Method for Uncertain MIMO Systems of Realistic Trajectory. **Journal of the Franklin Institute**, 2013. Vol. 350, p.437-451.

CHAI, T.; DRAXLER, R. R. Root Mean Square Error (RMSE) or Mean Absolute Error (MAE)? **Geoscientific Model Development Discussions**, 2014. Vol. 7, p. 1247-1250.

CHEN, C. T. **Linear System Theory and Design**. 3<sup>a</sup>. ed. New York: Oxford University Press, 1999.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust Pole Placement in LMI Region. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1999. Vol. 44, No. 12, p. 2257-2270.

CLAVIJO, D. G. Métodos de Subespaços para Identificação de Sistemas: Propostas de Alterações, Implementações e Avaliações. **Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas**, Campinas - SP, 2008. 118 p.

COSTA, M. Controladores Robustos D-LQI e D-Alocação de Pólos Otimizados via LMI aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutação Três Estados. **Dissertação de Mestrado**, UFCE - Fortaleza, 2014.

COSTA, M. V. S. Controle MPC Robusto Aplicado ao Conversor Boost CCTE Otimizado por Inequações Matriciais Lineares. **Tese de Doutorado**, UFCE - Fortaleza, 2017. 179 p.

COVACIC, M. R. Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI. **Dissertação de Mestrado - UNESP**, Ilha Solteira - SP, 2001, 116 p.

COVACIC, M. R. Síntese de Sistemas ERP baseada em LMIs e Controle com Estrutura Variável. **Tese de Doutorado**, UNESP - Ilha Solteira, 2006. 222 p.

CRAGO, P. E.; MORTIMER, T.; PECHAM, P. H. Closed-Loop control of force during electrical stimulation of muscle. **IEEE Transactions On Rehabilitation Engineering**, San Diego, 1980. Vol. BME-27, No. 6, p. 306-312.

DE COCK, K.; DE MOOR, B. Subspace Identification Methods. In: **UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems**. Oxford: Eolss Publishers Co. Ltd., 2003. p. 933-979.

DE PAULA, M. V. Identificação de Modelos de Hammerstein e Wiener para Sistemas Não Lineares Multivariáveis Utilizando Métodos de Subespaços. **Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais**, Belo Horizonte - MG, 2016. 87 p.

DOWNEY, R. J.; CHENG, T. H.; BELLMAN, M. J.; DIXON, W. E. Switched Tracking Control of the Lower Limb During Asynchronous Neuromuscular Electrical Stimulation: Theory and Experiments. **IEEE Transactions on Cybernetics**, 2017. p. 1251-1262.

FAZZOLARI, H.; OLIVEIRA, P. de; LORDELO, A.; DA SILVA, E.; GARCIA, J.; TEIXEIRA, M.; ASSUNÇÃO, E. **Projeto de Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes de Ordem Completa por D-estabilidade**. CBA - Congresso Brasileiro de Automática. Belo Horizonte - MG: [s.n.]. 2014. p. 2222-2229.

FERRARIN, M.; PALAZZO, F.; RIENER, R.; QUINTERN, J. Model- Based Control of FES- induced Single Joint Movements. **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, 2001. Vol. 9, No. 3, p. 245-257.

FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. The relationship between electrical stimulus and joint torque: a dynamic model. **IEEE Transactions On Rehabilitation Engineering**, 2000. Vol. 8, No. 3, p. 342-352.

G1. 23,9% dos brasileiros declaram ter alguma deficiência. **g1.globo.com**, 2012. Disponível em: <<http://g1.globo.com/brasil/noticia/2012/04/239-dos-brasileiros-declaram-ter-alguma-deficiencia-diz-ibge.html>>. Acesso em: 09 ago. 2018.

GAINO, R. Controle de movimentos de pacientes paraplégicos utilizando modelos Fuzzy T-S. **Tese de Doutorado - UNESP**, Ilha Solteira, 2009. 178 p.

GAINO, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; COVACIC, M. R. Realimentação Derivativa e Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno para Controle da Articulação do Joelho de Pacientes

Paraplégicos com o Uso de Acelerômetros. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, 2011, p. 67-78.

GAINO, R.; COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; DE CARVALHO, A. A.; SANCHES, M. A. A. Electrical Stimulation Tracking Control for Paraplegic Patients using T-S Fuzzy Models. **Fuzzy Sets and Systems**, 2017. Vol. 314, p. 1-23.

HU, H.; JIANG, B.; YANG, H.; SHUMSKY, A. Non-Fragile Reliable D-Stabilization for Delta Operator Switched Linear Systems. **Journal of the Franklin Institute**, 2016. Vol. 353, No 3, p. 1931-1956.

JEZERNIK, S.; WASSINK, R. G.; KELLER, T. Sliding Mode Closed-Loop Control of FES: Controlling the Shank Movement. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, v. 51, 2004. p. 263-272.

KATAYAMA, T. **Subspace Methods for System Identification: A Realization Approach**. London: Springer, 2005.

KOZAN, R. F. Controle de Posição da Perna de Pessoas Hígidas Utilizando um Controlador PID. **Dissertação de Mestrado - UNESP**, Ilha Solteira, 2012. 106 p.

KOZAN, R. F. Sistema de Estimulação Elétrica Funcional para Posição da Perna utilizando Controlador LQG/LTR. **Tese de Doutorado - UNESP: Ilha Solteira - SP**, 2016. 144 p.

LI, M. et al. Adaptive Sliding Mode Control of Functional Elctrical Stimulation for Tracking Knee Joint Movement. **2017 10th International Symposium on Computational Intelligence and Design (ISCID)**, Hangzhou - China, 2017. p. 346-349.

LJUNG, L. **System Identification: Theory For The User**. London: Prentice-Hall, 1987.

LJUNG, L. **Development os System Identification**. Sweden: Department of Electrical Engineering - Linköping University, 1996.

LORDELO, A. D. S. Controle Automático com Estrutura Variável Utilizando Sistemas ERP e LMI. **Dissertação de Mestrado - UNESP**, Ilha Solteira - SP, 2000, 116 p.

LORDELO, A. D. S.; FAZZOLARI, H. A.; OLIVEIRA, P. C. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. **Controle com Estrutura Variável e Modos Deslizantes de Ordem Completa com Projeto por LMI**. CBA - Conferência Brasileira de Automática. Campina Grande - PB: [s.n.]. 2012. p. 5081-5087.

LYNCH, C. L.; GRAHAM, G. M.; POPOVIC, M. R. A Generic Model of Real-World Non-Ideal Behaviour of FES-Induced Muscle Contractions: Simulation Tool. **Journal of Neural Engineering**, 2011. p.1-10.

LYNCH, C. L.; POPOVIC, M. R. Functional Electrical Stimulation. **IEEE Transactions on Control Systems**, 2008. Vol. 28, No. 2, p. 40-50.

MAGAN, M. V.; MARQUES, M. F.; NUNES, W. R. B. M.; COVACIC, M. R.; GAINO, R. Síntese de Controlador por Estrutura Variável e Modos Deslizantes para o Controle de Posição Angular do Joelho do Paciente Paraplégico. **DINCON - Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações**, S. J. do Rio Preto - SP, 2017. 7 p.

MENG, A. H.; ZHENG, B. X.; ZHANG, C. J. Research on Chattering Problem of Sliding Mode Variable Structure Control in AC Servo System. **IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference**, Nanjing, 2016. p. 2468-2472.

MOHAMMED, S.; FRAISSE, P.; GUIRAUD, D.; POIGNET, P.; EL MAKSSOUD, H. Robust Control Law Strategy Based on High Order Sliding Mode: Towards a Muscle Control. **2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, Edmonton - Canadá, 2005. p. 2644-2649.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2010.

OLIVEIRA, R.; PERES, P. Análise e Controle de Sistemas Lineares por meio de Desigualdades Matriciais Lineares. **Congresso Brasileiro de Automática**, Bonito - MS, 2010.

OLIVEIRA, T. C. D. Identificação Fuzzy Takagi-Sugeno e projeto de controle adaptativo da articulação do joelho. **Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Londrina**, Londrina, 2013, 75 p.

PALHARES, R. M.; GONÇALVES, E. N. **Desigualdades Matriciais Lineares em Controle**. São Paulo: Blucher, Vol.1, 2007.

RENQUAN, L.; WEI, D.; LIN, X. Robust H<sub>2</sub> Control for Descriptor System Based on New Bounded Real Lemma. **Chinese Control Conference**, Kunming, Yunnan, China, 2008. p. 636-641.

RICCO, R. A. Identificação de Sistemas Utilizando Métodos de Subespaços. **Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Minas Gerais**, Belo Horizonte, 2012. 106 p.

SADAT-HOSSEINI, S. H.; ERFANIAN, A. Sliding Mode Control of Intramuscular Functional Electrical Stimulation using Fuzzy Neural Network with Terminal Sliding Mode Learning. **IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering**, Montpellier, France, 2015. p.775-778.

SANCHES, M. A. A. Sistema eletrônico para geração e avaliação de movimentos em paraplégicos. **Tese de Doutorado - UNESP - Ilha Solteira**, 2013, 186 p.

SANCHES, M. A. A.; GAINO, R.; KOZAN, R. F.; TEIXEIRA, M. C. M. ; CARVALHO, A. A. de; COVACIC, R.; GENTILHO JUNIOR, E. Digital Controller Design Considering Hardware Constraints: Application in a Paraplegic Patient. **Revista Brasileira de Engenharia Biomédica**, 30, 2014. Vol. 30, No. 3, p. 232-241.

SANTOS, N. M. Projeto de Controladores Robustos em Modelos Não-Lineares Utilizados em Engenharia Biomédica: Pacientes Paraplégicos e Tetraplégicos. **Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Londrina**, Londrina, 2014, 233 p.

SANTOS, N. M.; GAINO, R.; COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.. Robust Control of the Knee Joint Angle of Paraplegic Patients considering Norm-Bounded Uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, 2015. 8 p.

SERRA, G. L. O. Propostas de Metodologias para Identificação e Controle Inteligentes. **Tese de Doutorado - UNICAMP**, Campinas, 2005. 127 p.

SHARMA, N.; STEGATH, K.; GREGORY, C. M.; DIXON, W. E. **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, 2009. p. 576-584.

SHTESSEL, Y. et al. **Sliding Mode Control and Observation**. [S.l.]: Springer Science, v. 1, 2013.

SILVA, T. I. Implementação de um Sistema para Geração e Avaliação de Movimentos em Pacientes Hemiplégicos. **Tese de Doutorado - UNESP: Ilha Solteira**, 2007. 171 p.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. 2 ed. Trondheim - Noruega: John Wiley and Sons, 2001.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHATAKE, H.; WANG, H. Model Construction, Rule Reduction and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, 2001. Vol. 9, No. 4, p. 525-537.

TAROBA NEWS. Projeto Londrinense usa Aparelhos para Recuperar Movimentos de Paraplégicos. **Taroba News - Ciência e Educação**, 2018. Disponível em: <<https://www.tarobanews.com.br/noticias/ciencia-e-saude/projeto-londrinense-usa-aparelhos-para-recuperar-movimentos-de-paraplegicos-XzdmQ.html>>. Acesso em: 06 Agosto 2018.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; GAINO, R.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; FARIAS, U. C. Design of a Fuzzy Takagi-Sugeno Controller to Vary the Joint Knee Angle of Paraplegic Patients. **International Conference on Neural Information Processing - ICONIP**, Berlin, 2006. p.118-26.

TEIXEIRA, M. C. M.; DEAECTO, G. S.; ASSUNÇÃO, E.; CARVALHO, A. A.; GAINO, R.; FARIA, U. C. **Projeto de um Controlador Fuzzy Takagi-Sugeno para Variar o Ângulo da Articulação do Joelho de um Paciente Paraplégico.** Congresso Brasileiro de Automática. Salvador - BA: [s.n.]. 2006. p. 2287-2292.

TOSCANO, R. **Structured Controllers for Uncertain Systems: A Stochastic Optimization Approach.** Londres: Springer, 2013.

UTKIN, V. I. **Sliding Modes and Their Applications in Variable Structure.** Moscow: Mir Publishers, 1978.

VAN DER VEEN, J.; DEPRETTERE, E.; SWINDLEHURST, A. Subspace-Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition. **Proceedings of the IEEE**, 1993. Vol. 81, No. 9, p. 1277-1308.

VELTINK, P. H. et al. Nonlinear Joint Angle Control for Artificially Stimulated Muscle. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, 1992. Vol. 39, No. 4, p. 368-380.

VERHAEGEN, M.; DEWILDE, P. Subspace Model Identification - Part 1: The Output-Error State Space Model Identification Class of Algorithms. **International Journal of Control**, 1992. Vol. 56, No. 5, p. 1187-1210.

VERHAEGEN, M.; VERDULT, V. **Filtering and System Identification: A Least Squares Approach.** Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

VIBERG, M. Subspace-Based Methods for the Identification of Linear Time-Invariant Systems. **Automatica**, 1995. Vol. 31, No. 12, p.1835-1851.

WANG, J. D.; JUANG, Y. T. A New Approach for Computing the State Feedback Gains of Multivariable Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1995. Vol. 40, No. 10, p.1823-1826.

WU, T. Z.; WANG, J. D. Decoupled Integral Variable Structure Control for MIMO Systems. **Journal of The Franklin Institute**, 2007. Vol. 344, No. 7, p.1006-1020.

YOUNG, K. K. D. **Variable Structure Control for Robotics and Aerospace Applications**: Studies in Automation and Control. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1993.

ZHOU, K. **Robust and Optimal Control**. Nova Jersey: Prentice Hall, 1996.

## Apêndice A: Decomposições de Matrizes

### A.1 - Decomposição QR

Qualquer matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  pode ser decomposta em

$$A = Q \cdot R, \quad (\text{A.1})$$

em que  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz ortogonal com  $Q^T \cdot Q = I_n$ , e  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz triangular superior. O termo à direita de (A.1) é chamado de decomposição QR de A. Quando a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  possui posto  $r$ , tal que  $r > m$  e  $r < n$ , a decomposição QR pode ser particionada como a seguir:

$$A = [Q_1 \quad Q_2] \cdot \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

em que  $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ ,  $R_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ .

## Apêndice B: Fundamentos de Sistemas Lineares e Matrizes

### B.1 - Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Segundo (BOYD *et al.*, 1994), muitos problemas que surgem na teoria dos sistemas de controle podem ser reduzidos a problemas de otimização convexa ou quase-convexa envolvendo LMIs. Esse fato, aliado ao surgimento de ferramentas computacionais numéricas para resolução de LMIs, foram um incentivo ao uso das mesmas no estudo de estabilidade de sistemas.

O desenvolvimento de LMIs tem sua origem a partir da publicação do Teorema de Lyapunov, em 1890, que é mostrado a seguir. Lyapunov estabeleceu as condições para que um sistema autônomo,  $\dot{x} = A \cdot x$ , descrito no espaço de estados, seja estável, isto é, todas as suas trajetórias converjam a zero. Essa foi a primeira LMI, podendo ser resolvida analiticamente para estudar a estabilidade de pequenos sistemas dinâmicos de segunda ou terceira ordem.

#### Definição B.1.1 (Critério de Estabilidade de Lyapunov)

Segundo (PALHARES; GONÇALVES, 2007), o critério de estabilidade de Lyapunov é obtido pela definição da função quadrática escalar positiva de Lyapunov, dada por:

$$V(x(t)) = x^T(t) \cdot P \cdot x(t) > 0, \quad (\text{B.1})$$

sendo  $P = P^T > 0$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e avaliando a derivada ao longo das trajetórias  $x(t)$  para o caso contínuo, isto é:  $\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \cdot (A^T \cdot P + P \cdot A) \cdot x(t)$ . Tendo em vista que  $V(x(t))$  é positiva definida, a estabilidade assintótica, com o estado de equilíbrio em  $x(t) = 0$ , só ocorrerá se  $\dot{V}(x)$  for definida negativa, ou seja:  $\dot{V}(x) < 0$ . Isto implica em  $A^T \cdot P + P \cdot A < 0$ , com  $P > 0$ . Essas condições levam ao Lema B.1.1, descrito abaixo, também obtido em (SANTOS, 2014).

#### Lema B.1.2 (Critério de Estabilidade de Lyapunov)

*Como tratado em (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999) e (BOYD et al., 1994), uma planta descrita por  $\dot{x} = A \cdot x$  é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz definida positiva  $P$  tal que satisfaça às desigualdades representadas por:*

$$\begin{cases} A^T \cdot P + P \cdot A < 0, \\ P > 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Dessa forma, com o uso de ferramentas computacionais, é possível a análise da estabilidade de sistemas.

## B.2 - Complemento de Schur

É uma ferramenta matemática utilizada para transformar uma desigualdade matricial não linear em uma LMI. Sua definição genérica pode ser obtida em (SANTOS, 2014), (PALHARES; GONÇALVES, 2007) e (OLIVEIRA; PERES, 2010).

### Definição B.2.1 (Complemento de Schur para matrizes)

Considerando a matriz quadrada simétrica particionada representada abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

- se  $A = A^T$  e  $\det(A) \neq 0$ , então o complemento de Schur de  $A$  em relação a  $M$  é a matriz  $C - B^T \cdot A^{-1} \cdot B$ ;
- se  $C = C^T$  e  $\det(C) \neq 0$ , então o complemento de Schur de  $C$  em relação a  $M$  é a matriz  $A - B \cdot C^{-1} \cdot B^T$

Já para o caso de desigualdades, o complemento de Schur também pode ser usado para converter um conjunto de desigualdades não lineares convexas em sua LMI equivalente, como abordado em (BOYD *et al.*, 1994), (ANTWERP; BRAATZ, 2000), (COVACIC, 2006) e (PALHARES; GONÇALVES, 2007).

### Lema B.2.2 (Complemento de Schur para LMIs)

Considere as desigualdades não lineares convexas representadas por:

$$\begin{cases} R(x) > 0, \\ Q(x) - S(x) \cdot R(x)^{-1} \cdot S(x)^T > 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

onde  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  e  $S(x)$  são afins de  $x$ . Seu complemento de Schur, como descrito na definição 2.3.1, é:

$$M(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{B.5})$$

### B.3 - Normas e Características de Sistemas

Como abordado em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001) e (SANTOS, 2014), uma norma é uma ferramenta matemática que permite, através de um único número, obter uma medida global do tamanho de um vetor, matriz, sinal ou sistema.

#### Definição B.3.1 (Norma de $e$ )

Uma norma de um vetor, uma matriz, um sinal ou um sistema, denotados genericamente por  $e$ , é um número real, simbolizado por  $\|e\|$ , que satisfaz as seguintes propriedades:

- não negatividade:  $\|e\| \geq 0$ ;
- positividade:  $\|e\| = 0 \leftrightarrow e = 0$ ;
- homogeneidade:  $\|\alpha \cdot e\| = |\alpha| \cdot \|e\|$ ;
- desigualdade triangular:  $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$ .

Os objetivos dos sistemas de controle podem ser estabelecidos para garantir a estabilidade interna e atingir certas especificações de desempenho de um sistema. É preciso também garantir que possíveis perturbações ocorrendo em um sistema de controle não afetem de forma prejudicial às variáveis de interesse sob controle. Segundo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), uma das maneiras mais utilizadas para atender os requisitos de desempenho é pelo conhecimento da energia de determinados sinais de interesse, em que através da medida do nível de energia desses sinais, é possível conhecer-se o grau de influência da perturbação externa sobre a saída de interesse.

A capacidade de um sistema de controle de limitar os efeitos indesejáveis dessas perturbações é conhecida como rejeição de perturbações, atuando a partir de distúrbios causados nos sistemas, sejam eles: externos (temperatura ambiente, velocidade do vento, etc.); internos (sensores descalibrados gerando medidas incorretas, ruídos de medição, etc.); e variações de parâmetros e/ou elementos do sistema (coeficiente de atrito viscoso, massa, etc.). Assim, essa capacidade do

sistema de controle de rejeitar perturbações por ser quantificada de várias formas, entre elas, a partir de normas infinita ( $\mathcal{H}_\infty$ ) e euclidiana ( $\mathcal{H}_2$ ).

Nesse contexto, as normas de sistemas são definidas de acordo com a resposta em frequência dos mesmos. Assim, a resposta em regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências é caracterizada pela resposta em frequência de um sistema estável, linear e invariante. Como exemplo, tem-se que a norma infinita  $\mathcal{H}_\infty$  de uma função de transferência escalar estável é simplesmente o valor de pico da função da frequência  $|f(j\omega)|$ , descrito em (PALHARES; GONÇALVES, 2007) e (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2001), representada por:

$$\|f(s)\|_\infty \triangleq \max_\omega |f(j\omega)|. \quad (\text{B.6})$$

### B.3.1 Norma de Sistemas $\mathcal{H}_\infty$

Considere um sistema linear e invariante no tempo, com entrada  $w$  e saída  $z$ , onde a matriz de transferência que relaciona a saída pela entrada é dada por  $T_{zw}$ . Em (ZHOU, 1996), a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como o valor supremo dos valores singulares da matriz de transferência  $T_{zw}$ , mostrada a seguir, de forma semelhante ao que foi exemplificado em (B.6).

$$\|T_{zw}\|_\infty \triangleq \sup_\omega |T_{zw}(j\omega)|. \quad (\text{B.7})$$

Como aborda (TOSCANO, 2013), para o caso de um sistema SISO, a matriz de transferência  $T_{zw}$  é dada como uma função de transferência. Desta forma, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é equivalente ao maior ganho obtido no diagrama de Bode de magnitude.

### B.3.2 Valores Singulares de Sistemas

De acordo com (TOSCANO, 2013), a análise de ganhos no domínio da frequência de sistemas SISO pode ser expandida para sistemas MIMO, considerando os valores singulares da matriz de transferência do sistema. Dada uma matriz de transferência  $G(j\omega)$ , de um sistema com  $p$  entradas e  $m$  saídas, seus valores singulares  $\sigma_i$  são definidos como a raiz quadrada dos autovalores  $\lambda_i$  de  $G(j\omega).G(-j\omega)^T$ , assim como mostrado a seguir:

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i.(G(j\omega).G(-j\omega)^T)}, \quad (\text{B.8})$$

onde  $i$  representa o menor valor entre  $p$  e  $m$ .

### B.3.3 Norma de Sistemas $\mathcal{H}_2$

Como descrito em (SANTOS, 2014), (TOSCANO, 2013) e (PALHARES; GONÇALVES, 2007), a norma  $\mathcal{H}_2$  para uma matriz de transferência  $T_{zw}$  é definida por:

$$\|T_{zw}\|_2 \triangleq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(T_{zw}(j\omega)^* \cdot T_{zw}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.9})$$

sendo  $T_{zw}(j\omega)^*$  o conjugado transposto de  $T_{zw}(j\omega)$  e  $\text{Tr}$  a função traço, que na álgebra linear é descrita como a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada, obtida pelo comando *trace* do *Matlab*. Uma interpretação para a norma  $\mathcal{H}_2$  no domínio da frequência é que a mesma é proporcional ao ganho médio da matriz de transferência  $T_{zw}$ .

Em (SANTOS, 2014), tem-se as seguintes explicações para a escolha dos símbolos utilizados para representar as normas infinita e euclidiana, respectivamente:

- o símbolo  $\infty$  é proveniente do fato de que a magnitude máxima sobre a frequência pode ser escrita como:

$$\max_{\omega} |f(j\omega)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(j\omega)|^p d\omega \right)^{1/p}. \quad (\text{B.10})$$

Ao elevar  $|f|$  à uma potência infinita, seu valor de pico é selecionado;

- o símbolo  $\mathcal{H}$  vem de “*Hardy space*”, que é o espaço de todas as funções analíticas  $f$  no disco unitário  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ , para  $1 \leq p < \infty$ , e  $\mathcal{H}_{\infty}$  é o conjunto de funções de transferência limitada pela norma infinita, isto é, o conjunto de funções de transferência estáveis e estritamente próprias (aquela na qual o grau do numerador é menor do que o grau do denominador);
- da mesma maneira, o símbolo  $\mathcal{H}_2$  é utilizado para o “*Hardy space*” das funções de transferência limitadas em norma-2, o qual é o conjunto de funções de transferência estáveis e estritamente próprias.

Dessa forma, minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde a minimizar o pico do maior valor singular (pior direção e frequência), ao passo que minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  corresponde a minimizar a soma do quadrado de todos os valores singulares sobre toda frequência (direção e frequências médias). Resumindo, minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  diminui a amplitude do maior valor singular, enquanto a norma  $\mathcal{H}_2$  diminui a amplitude de todos os valores singulares sob todas as frequências.

## Apêndice C: Projeto da Superfície de Chaveamento do Controlador

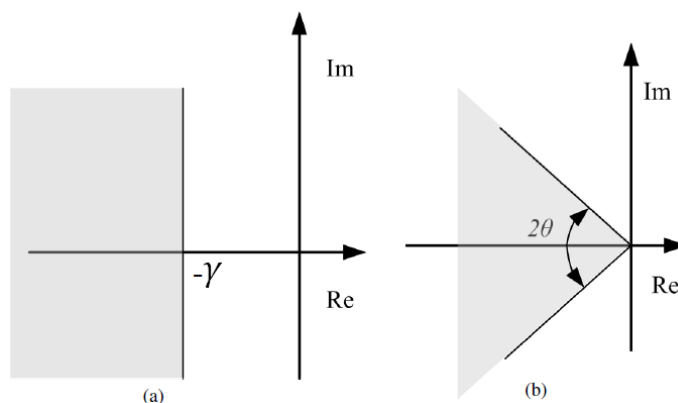
### C.1 – Região D-estável

Para a alocação robusta de autovalores da matriz  $A$  de um sistema descrito no espaço de estados, em termos de LMIs, generaliza-se o Teorema de Lyapunov mostrado no Apêndice B.1, e descrito em (COSTA, 2017), (FAZZOLARI *et al.*, 2014) e (BOYD *et al.*, 1994), para a análise e projeto da estabilidade do sistema, a fim de verificar se todos os polos do sistema estão localizados em determinadas regiões do plano complexo. Dentre as regiões de alocação de polos disponíveis nas literaturas em questão, tem-se (C.1), que procura uma matriz  $P$  para a estabilidade e a restrição de taxa de decaimento  $\gamma$ , fazendo  $A = A + \gamma.I$ , usada para obter um comportamento transitório mais rápido do sistema, posicionado no semiplano esquerdo, com parte real menor que  $-\gamma$ , sendo:

$$\begin{cases} A.P + P.A^T < -2.\gamma.P, \\ P > 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Destaca-se que o valor de  $\gamma$  pode ser especificado como sendo a parte real da posição de polos desejada para o sistema, no qual, para sistemas aproximados de segunda ordem  $(-\gamma \pm \omega_d.i)$ , possui uma relação com o tempo de assentamento ( $T_s$ ) do sistema, sendo:  $\gamma < 4/T_s$ .

Essa região analisada por (C.1) é mostrada pela Figura 36a.



**Figura 36:** Restrições para: a) semiplano esquerdo de  $-\gamma$  e b) de inclinação  $2\theta$ .

**Fonte:** adaptações de (COSTA, 2014).

Inserindo a lei de controle  $u_e$  enunciada em (5.4), para tornar o sistema estável, de modo que os polos em malha fechada possuam parte real menor que  $-\gamma$ ,

realimenta-se o sistema descrito por (5.6) e (5.7). Fazendo  $X = P^{-1}$  e  $L = K_{aum} \cdot P^{-1}$ , tem-se:

$$\begin{cases} A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T < -2 \cdot \gamma \cdot X, \\ X > 0. \end{cases} \quad (C.2)$$

Com isso, obtêm-se valores para  $X$  e  $L$ , e também a matriz  $K_{aum}$ , dada por  $K_{aum} = L \cdot X^{-1}$ .

Para análise da região do semiplano esquerdo do plano complexo que possui uma restrição da região de estabilidade para um setor cônico com vértice na origem e ângulo interno  $2\theta$ , abordado em (HU *et al.*, 2016) e mostrado na Figura 36b, tem-se:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cdot (A^T \cdot P + P \cdot A) & \text{cos}\theta \cdot (A^T \cdot P - P \cdot A) \\ \text{cos}\theta \cdot (-A^T \cdot P + P \cdot A) & \text{sen}\theta \cdot (A^T \cdot P + P \cdot A) \end{bmatrix} < 0, \\ P > 0. \end{cases} \quad (C.3)$$

Com (C.3) inserido no projeto do controlador garante-se que a alocação de polos fique restrita à região de setor cônico  $2\theta$ , atribuindo para as respostas do sistema restrições na ultrapassagem percentual, em função de  $\theta$ . A partir da ultrapassagem percentual desejada para o sistema ( $UP\%$ ), obtêm-se o fator de amortecimento ( $\xi$ ) da resposta do sistema.

$$\xi = -\frac{\ln(UP\%/100)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(UP\%/100))^2}} \quad (C.4)$$

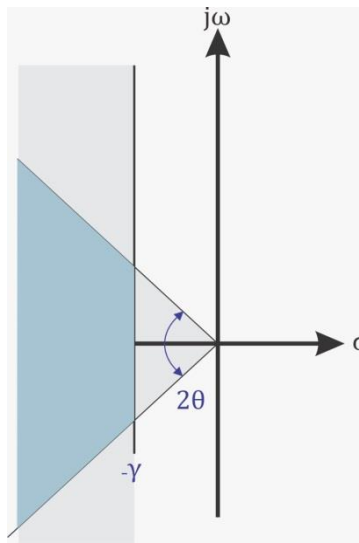
Com a obtenção de  $\xi$ , é possível esboçar uma reta radial no semiplano esquerdo do plano S, partindo da origem, em que para qualquer posição de polos sobre essa reta radial, a resposta do sistema terá o mesmo fator de amortecimento  $\xi$ , como abordado em (NISE, 2011). O ângulo de abertura  $\theta$  da origem até a reta radial de  $\xi$ , ilustrado na Figura 36b, é obtida como sendo  $\theta = \arccos(\xi)$ . Dessa forma, o ângulo de abertura  $\theta$  é obtido em função da ultrapassagem percentual  $UP\%$ .

Assim, realimentando o sistema pela lei de controle (5.4), descrevendo o sistema aumentado como em (5.6) e (5.7) e fazendo  $X = P^{-1}$  e  $L = K_{aum} \cdot P^{-1}$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \text{sen}\theta. (A_{aum}^T \cdot X + X A_{aum} - B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \\ \text{cos}\theta. (-A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T + B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \\ \dots \text{cos}\theta. (A_{aum} \cdot X - X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L + L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \\ \dots \text{sen}\theta. (A_{aum} \cdot X + X \cdot A_{aum}^T - B_{aum} \cdot L - L^T \cdot B_{aum}^T) \dots \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{C.5})$$

$$X > 0. \quad (\text{C.6})$$

Com isso, é possível a alocação robusta dos polos na região formada pela intersecção entre as duas regiões de D-estabilidade, sendo a parte hachurada da Figura 37. Assim, garante-se que o comportamento transitório do sistema seja projetado em função da ultrapassagem percentual, em que quanto maior for  $\theta$ , maior é a ultrapassagem, e também em função do tempo de assentamento, em que quanto mais distante da origem, mais rápida é a resposta. Realizando a realimentação de estados com a lei de controle (5.4), essa região é garantida pelas LMIs (C.2), (C.5) e (C.6), de onde se obtêm valores para  $X$  e  $L$ , e também a matriz  $K_{aum}$ .



**Figura 37:** Intersecção de restrições de D-Estabilidade: setor cônico e taxa de decaimento.

**Fonte:** O próprio autor.

## C.2 - Demonstrações

### Prova 5.3.1 - Estabilidade com Incertezas em Malha Aberta

De acordo com o critério de estabilidade de Lyapunov, descrito no Apêndice B.1, a planta (5.29), com  $u = 0$  e  $\delta A$  definida em (5.30), é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $X = X^T$  tal que:

$$\begin{cases} (A + M \cdot \Delta \cdot R_a) \cdot X + X \cdot (A + M \cdot \Delta \cdot R_a)^T < 0, \\ X > 0, \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

rearranjando,

$$\begin{cases} A \cdot X + X \cdot A^T + M \cdot \Delta \cdot R_a \cdot X + X \cdot R_a \cdot \Delta^T \cdot M^T < 0, \\ X > 0. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Para qualquer  $\Delta$  tal que  $\Delta \cdot \Delta^T \leq I$ , de acordo com o Lema 3 de (RENQUAN; WEI; LIN, 2008), sendo descrito em (SANTOS, 2014), a LMI (C.8) é satisfeita se existir uma escalar  $\tau > 0$  tal que:

$$A \cdot X + X \cdot A^T + \tau \cdot M \cdot M^T + \tau^{-1} \cdot X \cdot R_a^T \cdot R_a \cdot X < 0, \quad (\text{C.9})$$

isto é,

$$-(A \cdot X + X \cdot A^T + \tau \cdot M \cdot M^T) - (-X \cdot R_a^T) \cdot (\tau \cdot I)^{-1} \cdot (-R_a \cdot X) > 0. \quad (\text{C.10})$$

Como  $\varepsilon > 0$ , de acordo com o complemento de Schur, descrito no Apêndice B.2, a LMI (C.10) é equivalente à:

$$\begin{bmatrix} -(A \cdot X + X \cdot A^T + \tau \cdot M \cdot M^T) & -X \cdot R_a^T \\ -R_a \cdot X & \tau \cdot I \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{C.11})$$

que corresponde à (5.31).

### Prova 5.3.2 - Estabilidade com Incertezas em Malha Fechada

De acordo com o critério de estabilidade de Lyapunov, descrito em (B.1), a planta realimentada (5.32), com  $\delta A$  e  $\delta B$  definidas em (5.30), é assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz  $X = X^T$  e uma matriz  $L$ , tal que satisfaça:

$$\begin{cases} [(A - B \cdot K) + M \cdot \Delta \cdot (R_a - R_b \cdot K)] \cdot X + X \cdot ((A - B \cdot K) + M \cdot \Delta \cdot (R_a - R_b \cdot K))^T < 0, \\ X > 0, \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

rearranjando,

$$\begin{cases} A.X - B.K.X + M.\Delta.R_a.X - M.\Delta.R_b.K.X + X.A^T - X.K^T.B^T + X.R_a^T.\Delta^T.M^T - X.K^T.R_b^T.\Delta^T.M^T < 0, \\ X > 0. \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Substituindo  $K.X$  por  $L$  e  $X.K^T$  por  $L^T$  em (C.13), tem-se:

$$\begin{cases} A.X - B.L + M.\Delta.R_a.X - M.\Delta.R_b.L + X.A^T - L^T.B^T + X.R_a^T.\Delta^T.M^T - L^T.R_b^T.\Delta^T.M^T < 0, \\ X > 0. \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Para qualquer  $\Delta$  tal que  $\Delta.\Delta^T \leq I$ , de acordo com o Lema 3 de (REQUAN; WEI; LIN, 2008), sendo descrito em (SANTOS, 2014), a LMI (C.14) é satisfeita se existir uma escalar  $\tau > 0$  tal que:

$$A.X + X.A^T - B.L - L^T.B^T + \tau.M.M^T + \tau^{-1}(X.R_a^T - L^T - R_b^T).(R_a.X - R_b.L) < 0, \quad (\text{C.15})$$

isto é,

$$-(A.X + X.A^T - B.L - L^T.B^T + \tau.M.M^T) - [(X.R_a^T - L^T - R_b^T).\tau^{-1}.[-(R_a.X - R_b.L)]] > 0. \quad (\text{C.16})$$

Segundo (BOYD *et al.*, 1994), como  $\tau > 0$  e considerando o complemento de Schur, mostrado no Apêndice B.2, a LMI (C.16) é equivalente à:

$$\begin{bmatrix} -(A.X + X.A^T - B.L - L^T.B^T + \tau.M.M^T) & -(X.R_a^T - L^T - R_b^T) \\ -(R_a.X - R_b.L) & \tau.I \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{C.17})$$

que corresponde à (5.33).

## Apêndice D: Projeto do Observador de Estados para Reconstrução dos Estados de Identificação

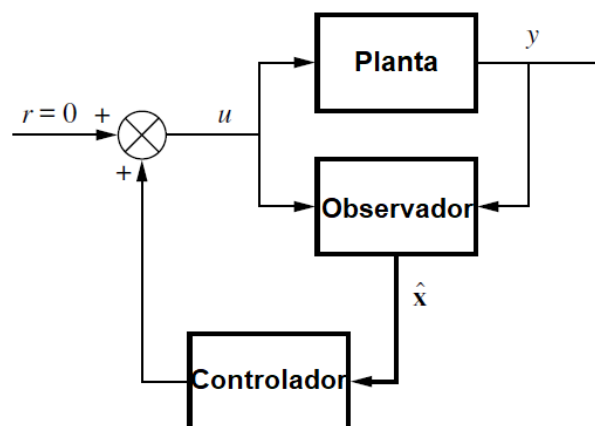
A partir das medições das saídas da planta, é possível realizar a estimação dos estados não disponíveis fisicamente, desde que o sistema seja observável. Os estados estimados são alimentados para o controlador ao invés dos estados reais, possibilitando a redução do número de sensores utilizados para o controle do sistema.

Como abordado em (OGATA, 2010) e (NISE, 2011), o observador de estados é um subsistema reconstrutor do vetor de estados da planta, cujo modelo matemático é basicamente o mesmo que o da planta, exceto por um termo adicional que incorpora o erro de estimação para compensar as incertezas nas matrizes  $A$  e  $B$  e a ausência do erro inicial. O erro de estimação é a diferença entre a saída medida e a saída estimada. Considerando a planta linear identificada, descritas pelas matrizes  $A, B, C$  e  $D$ , o observador de estados usado possui a seguinte formulação:

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_o \cdot (y - \hat{y}), \quad (\text{D.1})$$

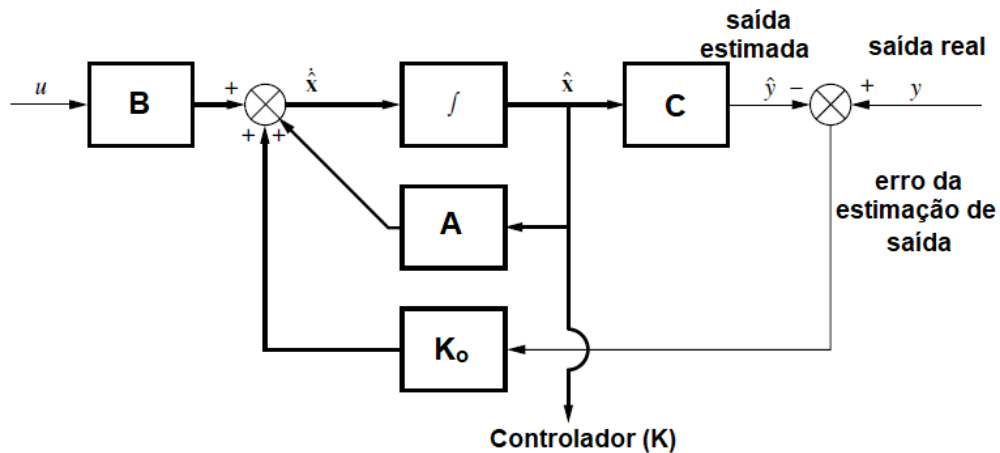
$$\hat{y} = C \cdot \hat{x}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são os estados e saídas estimadas e  $K_o$  é um vetor constante a ser projetado de modo que a resposta transitória do observador seja mais rápida que a resposta da malha controlada, a fim de resultar em uma estimação atualizada rapidamente do vetor de estado, como ilustrado nas Figuras 38 e 39.



**Figura 38:** Representação genérica de um observador de estados.

Fonte: adaptação de (NISE, 2011).



**Figura 39:** Representação detalhada de um observador de estados.

Fonte: adaptação de (NISE, 2011).

Analisando o modelo matemático do observador, descrito em (OGATA, 2010), substitui-se (D.2) em (D.1), obtendo,

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_o \cdot (y - C \cdot \hat{x}) = (A - K_o \cdot C) \cdot \hat{x} + B \cdot u + K_o \cdot y. \quad (D.3)$$

Para a obtenção da equação do erro de estimação, subtrai-se (D.3) a partir de  $\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ ,

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A \cdot x - A \cdot \hat{x} + K_o \cdot (C \cdot x - C \cdot \hat{x}) = (A - K_o \cdot C) \cdot (x - \hat{x}). \quad (D.4)$$

Sendo  $e = x - \hat{x}$ , em que o vetor de erro ( $e$ ) é a diferença entre  $x$  e  $\hat{x}$ , então (D.4) torna-se,

$$\dot{e} = (A - K_o \cdot C) \cdot e. \quad (D.5)$$

Dessa forma, nota-se que o comportamento dinâmico do vetor de erro é determinado pelos autovalores da matriz  $A - K_o \cdot C$ . Assim, se a planta for completamente observável, pode-se escolher a matriz  $K_o$  tal que  $A - K_o \cdot C$  tenha seus autovalores escolhidos arbitrariamente, a partir de técnicas de projetos de observadores.

Dentre as metodologias de projeto de observadores descritos nas literaturas, o método por alocação de polos pela fórmula de Ackermann é bastante difundido devido à facilidade de projeto em ambiente *Matlab*. Pela técnica, determina-se a posição de polos desejada para a resposta do observador para o projeto, para resultar na estabilidade e uma rápida resposta transitória, utilizando os comandos

*acker* e *place* para o projeto de  $K_o$ . Como abordado em (NISE, 2011) e (OGATA, 2010), a fórmula de Ackermann é descrita como:

$$K_o = ([0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot [C^T \ A^T \cdot C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} \cdot C^T]^{-1} \cdot \phi(A^T))^T, \quad (D.6)$$

em que  $\phi(s)$  é o polinômio característico desejado do observador de estado, no qual,

$$\phi(s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n), \quad (D.7)$$

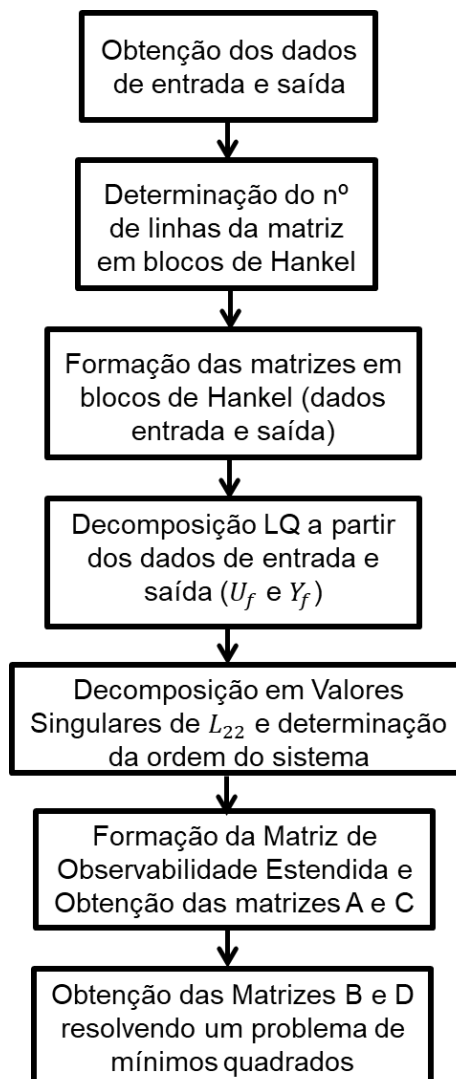
onde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  são os autovalores desejados.

## Apêndice E: Algoritmos

Neste trabalho foram desenvolvidas algumas rotinas computacionais em ambiente *Matlab* para a identificação de sistemas lineares multivariáveis. A seguir são apresentadas, em formato gráfico, as sequências executadas no software para a implementação dos métodos de identificação por subespaços MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO.

### Algoritmo MOESP

Esse algoritmo estima as matrizes de modelos na representação de espaço de estados sem tratar ruído de processo/medição.

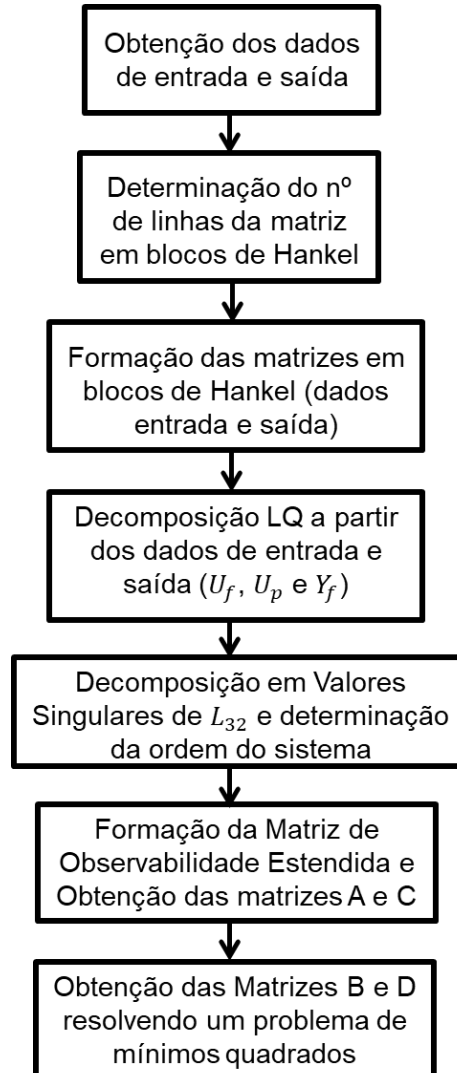


**Figura 40:** Representação lógica do algoritmo MOESP.

**Fonte:** O próprio autor.

## Algoritmo MOESP-PI

Esse algoritmo estima as matrizes de modelos na representação de espaço de estados sem tratar ruído de medição, apenas de processo.

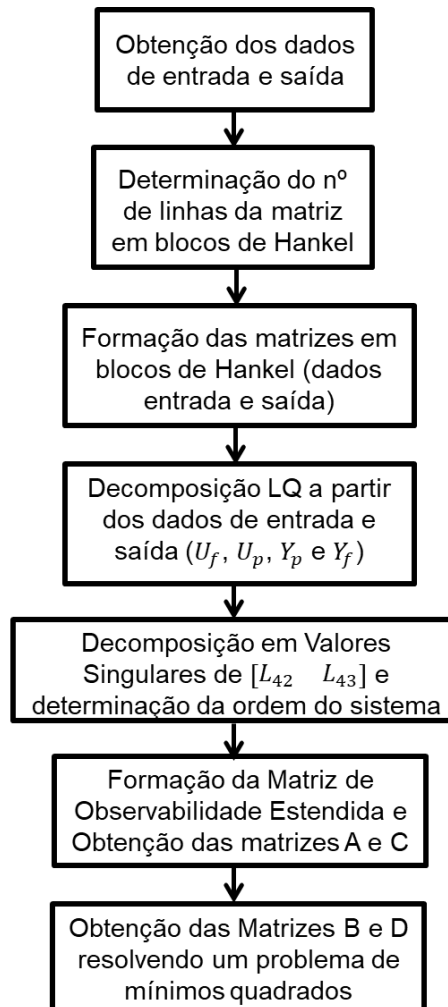


**Figura 41:** Representação lógica do algoritmo MOESP-PI.

**Fonte:** O próprio autor.

## Algoritmo MOESP-PO

Esse algoritmo estima as matrizes de modelos na representação de espaço de estados tratando ruído de medição e medição.



**Figura 42:** Representação lógica do algoritmo MOESP-PO.

**Fonte:** O próprio autor.

## Algoritmo do Bloco *Sig*

Esse algoritmo mostra a implementação da estrutura *S-Function* do Simulink, no bloco *sig* usado na Figura 35.

```
function sig(block)
    setup(block);
end
function setup(block)
    %% DEFINIÇÃO DO NÚMERO DE ENTRADAS E SAÍDAS DO BLOCO

    block.NumInputPorts = 1;
    block.NumOutputPorts = 1;

    block.SetPreCompInpPortInfoToDynamic;
    block.SetPreCompOutPortInfoToDynamic;

    block.InputPort(1).Dimensions=8;
    block.OutputPort(1).Dimensions=2;
    %% DEFINIÇÃO DO SAMPLE TIME DO BLOCO - 0.0001 SEGUNDOS
    block.SampleTimes = [0.0001 0];
    block.SetAccelRunOnTLC(true);
    %block.RegBlockMethod('SetInputPortSamplingMode', @SetInputPortSamplingMode);
    %block.RegBlockMethod('SetInputPortDimensions', @SetInpPortDims);
    block.RegBlockMethod('Outputs', @Output);
end
%% BLOCO ONDE A FUNÇÃO É DECLARADA

function Output(block)

X=block.InputPort(1).Data; %% FAZ LEITURA DA ENTRADA 1
norm_saida=2.5*10^-4;
F=[-0.0329 0.0659 0.486 0.0075 0.1873 -0.071 -0.0728 0.0137;...
    -0.1016 0.0256 0.7184 0.9699 0.522 0.3389 -0.029 -0.1693];
sig=F*X;
M_delta=(sig)./(abs(sig)+0.0001);
Mfx=norm_saida;
block.OutputPort(1).Data = Mfx*M_delta;
end
```

Figura 43: Algoritmo do bloco *sig*.

Fonte: O próprio autor.

## Algoritmo do Bloco *Sign\_Smooth\_Quali*

Esse algoritmo mostra a implementação da estrutura *S-Function* do Simulink, no bloco *sign\_smooth\_quali*, usado na Figura 28.

a)

```
% sign_smooth_quali
function sign_smooth_quali(block)
    setup(block);
end
function setup(block)

    %% DEFINIÇÃO DO NÚMERO DE ENTRADAS E SAÍDAS DO BLOCO

    block.NumInputPorts = 1;
    block.NumOutputPorts = 1;

    block.SetPreCompInpPortInfoToDynamic;
    block.SetPreCompOutPortInfoToDynamic;

    block.InputPort(1).Dimensions=8;
    block.OutputPort(1).Dimensions=2;
    %% DEFINIÇÃO DO SAMPLE TIME DO BLOCO - 0.0001 SEGUNDOS
    block.SampleTimes = [0.0001 0];
    block.SetAccelRunOnTLC(true);
    %block.RegBlockMethod('SetInputPortSamplingMode', @SetInputPortSamplingMode);
    %block.RegBlockMethod('SetInputPortDimensions', @SetInpPortDims);
    block.RegBlockMethod('Outputs', @Output);
end

%% BLOCO ONDE A FUNÇÃO É DECLARADA
function Output(block)

    X=block.InputPort(1).Data; %% FAZ LEITURA DA ENTRADA 1

    F=[-0.0329 0.0659 0.4863 0.0075 0.1873 -0.071 -0.0728 0.0137;...
        -0.1016 0.0256 0.7184 0.9699 0.522 0.3389 -0.029 -0.1693];

    [X1]=X(1);
    [X2]=X(2);
    [X3]=X(3);
    [X4]=X(4);
    [X5]=X(5);
    [X6]=X(6);
    [X7]=X(7);
    [X8]=X(8);

    Epsilon=10;

    % Definição das Variáveis Signal_X
    Signal_X1=0;
    Signal_X2=0;
    Signal_X3=0;
    Signal_X4=0;
    Signal_X5=0;
    Signal_X6=0;
    Signal_X7=0;
    Signal_X8=0;

    %% Implementação da Logica para cada uma das saidas %%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if X1>=Epsilon || X1<=-Epsilon
        Signal_X1=X1./abs(X1);
    end
    if X1>0 && X1<Epsilon
        Signal_X1=1-(1/Epsilon^2)*(X1-Epsilon)^2;
    end
    if X1>-Epsilon && X1<0
        Signal_X1=-1+(1/Epsilon^2)*(X1+Epsilon)^2;
    end
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if X2>=Epsilon || X2<=-Epsilon
        Signal_X2=X2./abs(X2);
    end
    if X2>0 && X2<Epsilon
        Signal_X2=1-(1/Epsilon^2)*(X2-Epsilon)^2;
    end
    if X2>-Epsilon && X2<0
        Signal_X2=-1+(1/Epsilon^2)*(X2+Epsilon)^2;
    end
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    if X3>=Epsilon || X3<=-Epsilon
        Signal_X3=X3./abs(X3);
    end
    if X3>0 && X3<Epsilon
        Signal_X3=1-(1/Epsilon^2)*(X3-Epsilon)^2;
    end
end
```

b)

```
if X3>-Epsilon && X3<0
    Signal_X3=-1+(1/Epsilon^2)*(X3+Epsilon)^2;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S4 %%%%%%%%%
if X4>=Epsilon || X4<=-Epsilon
    Signal_X4=X4./abs(X4);
end
if X4>0 && X4<Epsilon
    Signal_X4=1-(1/Epsilon^2)*(X4-Epsilon)^2;
end
if X4>-Epsilon && X4<0
    Signal_X4=-1+(1/Epsilon^2)*(X4+Epsilon)^2;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S5 %%%%%%%%%
if X5>=Epsilon || X5<=-Epsilon
    Signal_X5=X5./abs(X5);
end
if X5>0 && X5<Epsilon
    Signal_X5=1-(1/Epsilon^2)*(X5-Epsilon)^2;
end
if X5>-Epsilon && X5<0
    Signal_X5=-1+(1/Epsilon^2)*(X5+Epsilon)^2;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S6 %%%%%%%%%
if X6>=Epsilon || X6<=-Epsilon
    Signal_X6=X6./abs(X6);
end
if X6>0 && X6<Epsilon
    Signal_X6=1-(1/Epsilon^2)*(X6-Epsilon)^2;
end
if X6>-Epsilon && X6<0
    Signal_X6=-1+(1/Epsilon^2)*(X6+Epsilon)^2;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S7 %%%%%%%%%
if X7>=Epsilon || X7<=-Epsilon
    Signal_X7=X7./abs(X7);
end
if X7>0 && X7<Epsilon
    Signal_X7=1-(1/Epsilon^2)*(X7-Epsilon)^2;
end
if X7>-Epsilon && X7<0
    Signal_X7=-1+(1/Epsilon^2)*(X7+Epsilon)^2;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% S8 %%%%%%%%%
if X8>=Epsilon || X8<=-Epsilon
    Signal_X8=X8./abs(X8);
end
if X8>0 && X8<Epsilon
    Signal_X8=1-(1/Epsilon^2)*(X8-Epsilon)^2;
end
if X8>-Epsilon && X8<0
    Signal_X8=-1+(1/Epsilon^2)*(X8+Epsilon)^2;
end
Signal_X=[Signal_X1;Signal_X2;Signal_X3;Signal_X4;Signal_X5;Signal_X6;Signal_X7;Signal_X8];
Mo=250e-6;
Saida_EV=Mo*F*Signal_X;
block.OutputPort(1).Data = Saida_EV;
end
```

Figura 44: Algoritmo do bloco *sign\_smooth\_quali*.

Fonte: O próprio autor.