UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ROSE MARY FERNANDES ALVES

UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA

LONDRINA
2006

ROSE MARY FERNANDES ALVES

UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.
Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco.

LONDRINA

2006

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A474a Alves, Rose Mary Fernandes.
Uma análise da produção escrita de alunos do ensino médio em questões abertas de matemática / Rose Mary Fernandes Alves. – Londrina, 2006.
158f. : il. + anexos no final da obra.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2006.
Bibliografia: f. 111 – 113.

1. Produção escrita em matemática – Teses. 2. Matemática – Avaliação da aprendizagem – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 4. Avaliação em matemática – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II.Universidade Estadual de Londrina. III. Título.

CDU 51:37.02

ROSE MARY FERNANDES ALVES

UMA ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.
Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Célia Maria Carolino Pires
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Prof.ª Dr.ª Márcia Cristina de Costa T.Cyrino
Universidade Estadual de Londrina

Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, ____ de _____________ de 2006.

Em especial a minha mãe, ao Waldemar,
meus filhos Carlos Henrique, Mateus,
Gabriel e Ana Carolina, pela compreensão,
paciência e apoio durante todo o trabalho.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por tudo.

À **minha família**, que soube entender minha opção pelo estudo, compreender e respeitar minha ausência em tantos momentos e, como ninguém, me apoiar nos momentos difíceis e comemorar a cada etapa vencida.

À professora **Regina Luzia Corio de Buriasco** pela amizade, apoio e respeito que sempre demonstrou em todas as ocasiões, pela convivência e crescimento que me proporcionou levando-me a ganhar autoconfiança.

À professora **Tiemi Matsuo,** Consultora de Estatística do nosso Programa de Pesquisa pela colaboração na seleção da amostra utilizada nesta pesquisa.

Às professoras **Célia Maria Carolino Pires** e **Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino,** pelas contribuições que prestaram a este trabalho.

À professora **Ângela Marta Pereira das Dores Savioli,** suplente da Banca Examinadora, pelo carinho e atenção com que leu o trabalho e pelas contribuições que prestou ao trabalho, tanto na qualificação quanto na defesa.

À minha sobrinha **Daiene Fernandes Piveta Gomes** que foi a primeira pessoa a me incentivar a fazer o curso.

Aos **professores** e **colegas** de Curso pelo tempo que tivemos juntos buscando vencer mais esta etapa e especialmente à minha amiga **Márcia Nagy** pelo incentivo e colaboração nas diversas situações.

A todos **os amigos** que fiz, durante todos esses anos na UEL.

A todos aqueles que acreditam ser possível transformar o nosso mundo a partir do conhecimento.

“Emílio possui poucos conhecimentos, mas aqueles que possui são verdadeiramente seus. Nada sabe pela metade. No pequeno número das coisas que conhece, e conhece bem, a mais importante é que há muita coisa que ele ignora e que pode vir a saber um dia [...]”

Jean Jacques Rousseau

ALVES, Rose Mary Fernandes. Uma Análise da Produção Escrita de Alunos do Ensino Médio em Questões Abertas de Matemática, 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2006

RESUMO

Na perspectiva de ver a avaliação como um dos fios condutores da busca do conhecimento, entendendo-a como um processo que descreve o que os alunos sabem e são capazes de realizar em matemática, é que esta investigação analisa a produção escrita de alunos do Ensino Médio em Questões Abertas de Matemática. O presente trabalho apresenta uma investigação de natureza qualitativa dos registros escritos de alunos da 3ª série do Ensino Médio. Para isto, foram utilizadas 44 provas retiradas de uma amostra estadual da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação de Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA/2002. Com base na interpretação do que foi registrado buscou-se compreender como eles utilizaram as informações contidas no enunciado das questões, identificando os acertos e os erros mais freqüentes e sua natureza, as estratégias/procedimentos usados, o modo como essa produção escrita se configura, se esta apresenta marcas de conteúdo matemático compatível com o seu nível de escolaridade, assim como, indícios da presença do pensamento algébrico. Esta investigação mostra, dentre outros, que uma grande dificuldade apresentada pelos alunos está relacionada à leitura e interpretação dos enunciados das questões; que eles buscam estratégias e procedimentos próprios para resolvê-las, e que, poucos utilizam conteúdo matemático compatível com seu nível de escolaridade.

Palavras chave: Educação Matemática; Avaliação em Matemática; Acertos e Erros, Registros Escritos, Escrita Algébrica.

ALVES, Rose Mary Fernandes. A written production annalysis from high school students in Open Questions Mathematics, 2006. Dissertation (Master's Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ABSTRACT

In the perspective of seeing the evaluation as one of the conductor wires of the knowledge search, understanding it as a process that describes what students know and what they are able to do in mathematics, this investigation analises the written registers of high school students in open questions mathematics. The present work shows a qualitative nature investigation of the 44 students written registers from a state sample of the Open Question Mathematics test of the school performance evaluation of Paraná State – AVA/2002. Based on interpretation of what has been registered, we tried to understand how they used the information showing in the question, identifying the most frequent rights and wrongs and their nature/procedure used, the way this written production shows as well as if it shows signs of Mathematics content compatible with their school level, like algebraic thinking presence signs. This investigation presents, among others, that a big difficulty showed by students is related to the information showing in the question reading and understanding; students search for strategies and own procedures to solve the questions, and a few of them use mathematics content compatible with their school level.

Key words: Mathematics education; mathematics assessment, rights and wrongs, written registers, written algebraic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{44}	63
Figura 2	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{9}	64
Figura 3	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{11}	64
Figura 4	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{2}	65
Figura 5	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{7}	66
Figura 6	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{13}	67
Figura 7	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{16}	68
Figura 8	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{32}	69
Figura 9	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{33}	69
Figura 10	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{14}	70
Figura 11	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{40}	71
Figura 12	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{2}	73
Figura 13	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{5}	74
Figura14	-	Resolução da Questão 1 do Aluno A_{6}	75
Figura15	-	Resolução da Questão 2 do Aluno A_{26}	77
Figura 16	-	Resolução da Questão 2 do Aluno A_{27}	78
Figura17	-	Resolução da Questão 2 do Aluno A_{2}	79
Figura 18	-	Resolução da Questão 2 do Aluno A_{8}	80
Figura 19	-	Resolução da Questão 2 do Aluno A_{18}	82

Figura 20 - Resolução da Questão 2 do Aluno A_9.. 84

Figura 21 - Resolução da Questão 2 do Aluno A_{10}.. 86

Figura 22 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_{22}.. 89

Figura 23 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_{27}.. 89

Figura 24 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_{19}.. 90

Figura 25 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_{33}.. 91

Figura 26 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_4.. 92

Figura 27 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_2.. 94

Figura 28 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_{37}.. 95

Figura 29 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_3.. 97

Figura 30 - Resolução da Questão 3 do Aluno A_5.. 98

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Freqüência de produção dos alunos na Questão 1 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 62

Tabela 2 - Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 1.. 72

Tabela 3 - Freqüência de produção dos alunos na Questão 2 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 77

Tabela 4 - Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 2.. 85

Tabela 5 - Freqüência de produção dos alunos na Questão 3 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 88

Tabela 6 - Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 3... 95

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Caracterização dos registros dos alunos na Questão 1 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 62

Quadro 2 - Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 1.. 67

Quadro 3 - Caracterização dos registros dos alunos na Questão 2 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 76

Quadro 4 - Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 2.. 82

Quadro 5 - Caracterização dos registros dos alunos na Questão 3 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico 87

Quadro 6 - Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 3.. 93

SUMÁRIO

1 SEÇÃO I – INTRODUÇÃO.......... 14

2 SEÇÃO II – DO ENSINO DA MATEMÁTICA.......... 18

3 SEÇÃO III – DA AVALIAÇÃO E DO ERRO.......... 26

4 SEÇÃO IV – DO ENSINO DE ÁLGEBRA.......... 44

5 SEÇÃO V – DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.......... 53
Sobre a pesquisa.......... 53
O instrumento e o objeto da investigação.......... 54
A constituição da amostra.......... 57

6 SEÇÃO VI – DA ANÁLISE DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DOS ALUNOS.......... 61
Questão 1.......... 61
Exemplos dos registros de alguns alunos.......... 63
Fase do pensamento pré-algébrico.......... 63
Fase de transição.......... 64
Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido.......... 65
Erro por distração.......... 67
Erro de compreensão.......... 69
Erro de interpretação da pergunta.......... 70
Erro de interpretação do problema.......... 71
Não apresentam erro.......... 73
Questão 2.......... 76
Exemplos de algumas produções dos alunos.......... 77
Fase do pensamento pré-algébrico.......... 77
Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido.......... 79
Erro por distração.......... 82
Erro de compreensão.......... 83
Erro de interpretação.......... 83
Não apresentam erros.......... 85
Questão 3.......... 87
Exemplo de algumas produções dos alunos na resolução da questão 3.......... 88
Fase do pensamento pré-algébrico.......... 88
Fase de transição.......... 90
Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido.......... 91
Erro de compreensão.......... 93
Erro de interpretação.......... 94
Não apresentam erros.......... 96
Análise vertical.......... 98

7 SEÇÃO VII – DAS CONSIDERAÇÕES FINAIS.......... 101

REFERÊNCIAS.. 111
APÊNDICE – Tabelas dos conteúdos utilizados em cada Questão da Prova e respectiva descrição das resoluções dos alunos... 115

ANEXO A – Prova de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002........... 148
ANEXO B – Sobre o Programa de Pesquisa.. 154

SEÇÃO I – INTRODUÇÃO

A trajetória

Sou professora da rede pública estadual e tenho dedicado uma grande parte de minha vida a essa profissão. Consegui realizar o meu sonho de infância, que sempre foi o de ser professora.

Desde meus primeiros anos de escola, sempre gostei muito de matemática.

O ensino era o 'tradicional': a professora, detentora do saber, com o 'quadro negro' e o giz, e, eu passava minhas tardes com lápis e 'papel de pão' na mão (pois o caderno era muito caro para gastar em casa e minha família tinha baixa renda), refazendo todos os exercícios que a professora havia resolvido na sala e buscando descobrir o que ela havia feito.

Sempre tive curiosidade em descobrir os porquês dos resultados obtidos em sala de aula, como também o porquê de um exercício ter sido resolvido desta ou daquela forma. Descobrir não era uma atitude presente no ensino tradicional, uma vez que os resultados eram dados sempre prontos, pela professora no quadro negro e ninguém ousava questionar. A professora era muito inteligente, sabia tudo e não havia perigo algum de que ela pudesse errar, pensamento meu e possivelmente dos demais alunos da sala.

Com dezoito anos, obtive meus dois primeiros diplomas, um da Escola Normal (Magistério) e outro de Contabilidade que, aliás, nunca utilizei. Cheia de entusiasmo, no final desse mesmo ano, 1973, participei do concurso público da Prefeitura Municipal de Cambé e consegui minha vaga como professora na rede de ensino do município. Não prossegui meus estudos, pois as circunstâncias não me permitiam, fato que me levou a um grande arrependimento mais tarde. Meu pai não admitia que eu e minhas irmãs estudássemos. Segundo a visão dele, mulher não devia estudar, mas cuidar da casa e de filhos. Estudar era apenas para os homens, portanto, ele não custearia estudo algum. Ele exigia que trabalhássemos para nos manter e, desse modo, teríamos que estudar no período noturno, e pagar por isso, pois a faculdade era privada. Além disso, morávamos numa chácara fora da cidade, não havia ônibus e, as 'peruas de aluguel' recusavam-se a ir até lá, alegando que se atrasariam muito devido à distância.

Começou assim a minha trajetória como professora, em 1974, sem saber o que me esperava. Estava muitíssimo animada e achava que sabia tudo o que precisava para ser professora de 1ª a 4ª série. Como não poderia deixar de ser, passei a reproduzir, em sala de aula, tudo o que havia aprendido com meus professores, afinal de contas, eles eram o meu 'modelo perfeito'. Resolvia tudo certinho para os alunos copiarem, ao 'explicar' problemas, fazia os alunos marcarem as operações que teriam que realizar, não precisavam nem pensar, era só efetuar cálculos, mero treino e repetição.

Passaram-se muitos anos e, para mim, parecia tudo estar muito bem, fazia 'igualzinho' minhas professoras de infância, repetia tudo direitinho. Hoje, sinto vergonha e remorso por isso.

Por volta do ano de 1985, já trabalhava como professora da rede pública estadual e não mais municipal, pedi remoção para uma escola perto de minha casa e, como novata, sobrou o de sempre, apenas uma primeira série. Entrei em pânico ao ver que a escola usava uns 'métodos' de ensino diferentes. Nela, os alunos trabalhavam em grupos e descobriam a leitura num processo de interação com as outras crianças e assim eu tomava conhecimento da diversidade de atividades e materiais oferecidos. Apesar das dificuldades e do medo do novo, logo me adaptei. O fato de eu ver as crianças descobrindo a leitura e de trabalhar em conjunto com a professora da outra primeira série empolgava-me, pois estávamos sempre estudando, discutindo e preparando as aulas juntas, o que me ajudou a ganhar confiança.

Passei, então, a buscar sempre estratégias, materiais e atividades diferentes, testando tudo em sala de aula, e o que era aprovado passava a fazer parte do nosso cotidiano. Digo nosso pelo trabalho com minha colega. Esse trabalho em dupla dava-nos mais segurança, de modo que, se desse certo, era mérito nosso e, caso contrário, as duas assumiam a falha e ninguém se sobrecarregava. Nos momentos de planejamento, enquanto a turma ficava com os professores de artes ou de educação física, reuníamo-nos para analisar as produções dos alunos junto com a supervisora, buscando assim, caminhos para 'recuperar' alguns que ficavam mais 'atrasados', de modo que não se distanciassem muito da turma. Agora sei que já praticávamos um começo de investigação da produção desses alunos.

Desse modo, entendo que, a cada vez que buscávamos novas metodologias, novos materiais e diferentes formas de atividade, colocando-os em prática para testar resultados que, caso fossem aprovados, seriam adotados por apresentarem resultados que considerássemos satisfatórios, mudava então nossa prática e, conseqüentemente, a nossa maneira de pensar a respeito do assunto.

Sempre gostei de estudar, o que me leva a concordar com a concepção que afirma que para haver aprendizagem é preciso uma predisposição para aprender, pois a motivação é algo intrínseco que não depende exclusivamente do meio.

Depois de ter concluído a graduação em Matemática fiz um curso de Especialização em Educação Matemática, e, alguns anos depois, em 2004, ingressei no Mestrado.

O estudo

O presente estudo faz parte de um Programa de Pesquisa (Anexo B) que foi pensado como uma forma de articular pesquisas a serem realizadas por alunos do programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática e alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. O eixo temático da Educação Matemática é a Avaliação em Matemática e o foco dos estudos é a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Por meio da investigação de registros escritos de alunos da 3ª série do Ensino Médio, busca-se compreender como as informações contidas no enunciado das questões foram utilizadas, identificando os acertos e os erros mais freqüentes, sua natureza, as estratégias/procedimentos usados, o modo como essa produção escrita se configura, como também se esta apresenta marcas de conteúdo matemático compatível com o seu nível de escolaridade e, assim como os indícios da presença do pensamento algébrico.

Este trabalho se apresenta dividido em sete seções, sendo esta introdução a primeira delas. Na segunda, é apresentado um breve relato sobre o Ensino da Matemática, na terceira, aborda-se a avaliação e o erro, na quarta, encontra-se uma reflexão sobre o Ensino da Álgebra. A quinta seção apresenta os procedimentos metodológicos da pesquisa; a sexta, a análise das produções escritas dos alunos; a sétima, as considerações finais e, por último, estão as referências, os apêndices e os anexos.

SEÇÃO II - DO ENSINO DA MATEMÁTICA

De acordo com os PCN (1998), a Matemática, ciência viva, fruto da criação e da invenção humana, caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e nasce da interação do indivíduo com o meio natural, cultural e social. Desenvolveu-se por meio da busca constante do homem para dar respostas às suas necessidades e preocupações, não de forma linear e logicamente organizada, mas em movimentos de idas e vindas, erros, acertos, ajustes.

A visão de Matemática presente em grande parte da sociedade e da própria escola é muito diferente, uma vez que é considerada como um corpo de conhecimento infalível, imutável, pronto, acabado e verdadeiro, e que, como tal, deve ser transmitido pelo professor e aprendido pelo aluno. A organização de seus conteúdos é marcada pela linearidade e pela segmentação e dominada pela idéia de pré-requisitos, isto é, como se estes se articulassem como por meio de elos inseparáveis, numa relação de dependência em que cada novo conteúdo depende do anterior. Além disso, são trabalhados isoladamente, em momentos únicos e, retomados, apenas quando o professor pretende utilizá-los como ferramenta para aprendizagem de novos conceitos.

A forma como a Matemática vem sendo trabalhada, dando-se ênfase à manipulação de símbolos e regras de cálculos, tem feito dos alunos meros receptores de regras e procedimentos, negando-lhes uma participação ativa na construção do seu conhecimento.

Desse modo, no Brasil, de acordo com os PCN (p 19, 1998), o ensino de Matemática ainda é marcado por altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão.

Sobre os resultados desse ensino, as avaliações realizadas pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica - SAEB, Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA, entre outros, mostram um quadro bastante desfavorável, apresentando um desempenho insatisfatório dos alunos, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio.

No ano de 1993, por exemplo, as provas de Matemática aplicadas pelo SAEB indicaram que, na primeira série do Ensino Fundamental, 67,7% dos alunos acertaram, pelo menos, metade das questões, na terceira série esse índice caiu para 17,9% e, na quinta série, para 3,1% , subindo para 5,1% na sétima série. No ano de 1995, as avaliações mostraram que os percentuais de acertos por série/grau continuaram baixos e que as maiores dificuldades apresentadas pelos alunos encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e resolução de problemas.

As avaliações mais recentes também apresentam o mesmo quadro, apontando um índice de rendimento bastante insatisfatório e que tem sido alardeado pela mídia de forma sensacionalista. Sem análises nem reflexões, atribui-se a responsabilidade dos resultados apenas à escola e aos professores, não se questionando a forma como a avaliação é elaborada, não deixando claro seu objetivo que é avaliar todo o sistema de ensino, visando políticas educacionais que vão muito além da escola e do trabalho nela desenvolvido.

> A estratégia de divulgação dos resultados de avaliações precisa ser considerada com cautela, a divulgação de resultados globais, procedimento mais freqüente, costuma causar um grande impacto, mas, simultaneamente, provoca interpretações que podem ser distorcidas, especialmente pelos órgãos da mídia, que nem sempre estão interessados no fato científico, mas na repercussão que terá junto ao público (VIANNA, 1997, p.95).

Enquanto a escola avalia a aprendizagem do aluno sobre aquilo que foi ensinado, as avaliações padronizadas propõem-se a avaliar o sistema de ensino a respeito do que se pensa ter sido ensinado, o que torna injusta a transferência e a generalização dos resultados para toda a escola, tornando incoerentes as acusações alardeadas pela mídia e pela própria sociedade.

Há que se discutir e buscar formas de compreender melhor os resultados dessas avaliações, como, por exemplo, num estudo sobre causas e possíveis medidas. Nesta perspectiva, esta investigação apresenta-se como uma possível contribuição, ao considerar as atividades de avaliação como atividades de investigação.

Discute-se que é preciso mudar o ensino da Matemática e inúmeras propostas têm surgido, porém, estas não têm alcançado um grande número de professores, quer por falta de informação, quer por falta de interesse ou mesmo de oportunidades, o que torna as mudanças ainda mais lentas.

Existem muitas discussões sobre reformas no ensino e muitos projetos têm sido implantados, tanto em nível nacional como internacional, apontando a necessidade de se adequar o trabalho escolar a uma realidade que se modifica rápida e constantemente, reconhecendo, também, a crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana.

Na direção de uma ‘matemática para todos’, os documentos do NCTM (1991) apontam a necessidade de mudanças:

- no conteúdo matemático que se espera que os alunos aprendam, oferecendo uma variedade de tópicos matemáticos e situações problemáticas, não se enfatizando apenas a aritmética;
- na aprendizagem da Matemática direcionada à investigação, à formulação, à representação, ao raciocínio e à aplicação de estratégias para a resolução de problemas, deixando-se para trás a memorização e a repetição;
- no papel do professor em sala de aula no sentido de questionar e ouvir mais, dizer menos aos alunos o que devem fazer, proporcionando trabalhos desafiantes e dispondo-se a apoiar a aprendizagem de todos;
- na visão de avaliação, utilizando-se uma fonte múltipla de instrumentos.

Na perspectiva dessas mudanças, a concepção do que é saber matemática também muda, indo muito além do domínio de um conjunto de conceitos, abrangendo o desenvolvimento de capacidades como: resolver problemas, explorar, formular, conjecturar, raciocinar e comunicar, o que, com certeza, produzirá uma atitude positiva face à Matemática, na qual se inclui também a autoconfiança.

A sociedade mudou e não é mais possível ignorar que as novas tecnologias tornaram os cálculos mais simples e que as calculadoras, que hoje estão acessíveis a todos devido ao baixo custo, não impedem, de forma alguma, o aprendizado. Seu uso, entretanto, não substitui a necessidade de se aprender tabuada e de se calcular mentalmente, desde que seja feito um trabalho que conscientize a criança, desde cedo, de que ela não deve depender da calculadora e nem utilizá-la em momentos nos quais seja mais adequado fazer cálculos de outra forma. Uma alternativa é que os professores utilizem esse instrumento para que os alunos aprendam a avaliar se os resultados obtidos em suas próprias resoluções são cabíveis, num processo de validação de resultados.

Nesse sentido, um dos papéis do professor seria então o de selecionar a natureza dos problemas a serem trabalhados nessas ocasiões, priorizando aqueles que exigem mais raciocínio, escolha de estratégias e que promovam bastante discussão.

Essa forma de trabalho, na qual os alunos interagem, discutem, trocam idéias, são questionados pelo professor e levados a comunicar-se matematicamente, estabelecendo relações entre suas próprias idéias e a de seus colegas, conduz a uma aprendizagem significativa[1], de acordo com os PCN, :

> As aprendizagens que os alunos realizam nas escolas serão significativas na medida em que eles consigam estabelecer relações entre os conteúdos escolares e os conhecimentos previamente construídos, que atendam as expectativas, intenções e propósitos de aprendizagem do aluno (BRASIL, 1998, p. 72).

Nessa perspectiva, novos objetivos educacionais foram estabelecidos para os alunos de acordo com os documentos do NCTM (1991) e estes podem ser encontrados também nos Parâmetros Curriculares Nacionais , são eles :

- aprender a dar valor à Matemática;
- adquirir confiança na sua capacidade de fazer Matemática;
- tornar-se apto a resolver problemas matemáticos;

[1] Considerando como significativa o que tem significado para o aluno.

- aprender a comunicar-se matematicamente;
- aprender e raciocinar matematicamente.

Para atingir estes objetivos, os professores devem promover um ensino de matemática que proporcione aos alunos experiências diversificadas, levando-os a reconhecer e valorizar o desenvolvimento e a contribuição da Matemática na vida da humanidade, além de oportunizar atividades de investigação, nas quais explorem e façam tentativas de erros e acertos, incluindo exercícios de leitura, escrita e discussão matemática, o que leva o aluno a aprender a conjecturar, argumentar e adquirir autoconfiança.

Nessa perspectiva, a Resolução de Problemas pode constituir-se como um eixo fundamental para o ensino da Matemática, pois apresenta um contexto, pelo qual os conceitos podem ser aprendidos e as competências desenvolvidas, o que não acontece quando se apresenta apenas um tópico. A permissão para que os alunos compartilhem entre si e com os professores as opções de raciocínio e abordagens, oportuniza diferentes formas de se representar problemas e estratégias, levando-os a valorizar tanto os resultados, quanto o processo. Com isso o aluno adquire confiança e prazer em fazer matemática, desenvolvendo também a perseverança e o espírito investigativo, o que conduz à autonomia, à medida em que ganha confiança em sua capacidade de raciocinar e justificar.

A proposta de Resolução de Problemas é apontada pelos educadores matemáticos como ponto de partida para a atividade matemática, baseando-se no princípio de que o conhecimento ganha significado quando o aluno se envolve com situações desafiadoras nas quais trabalha para desenvolver estratégias de resolução.

Dessa forma, a Resolução de Problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão ao seu alcance, oportunizando a ampliação de seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como da visão que têm dos problemas, da Matemática e do mundo em geral, desenvolvendo assim sua autoconfiança, como afirma Schoenfeld, (1985).

A Resolução de Problemas apresenta alguns princípios básicos, tais como:

- o problema é o ponto de partida da atividade matemática;
- o problema não é um exercício de aplicação no qual o aluno usa uma fórmula ou um processo operatório de forma mecânica;
- as aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema ou o que já foi aprendido é utilizado para resolver novos problemas;
- a construção de um conceito matemático se dá na articulação com outros conceitos por meio de retificações e generalizações;
- a resolução de problema deve ser desenvolvida como uma atividade de orientação para a aprendizagem e não como atividade de aplicação.

Vale ressaltar que um problema deve ser uma situação de desafio cuja solução não esteja evidente, mas possível de ser encontrada, requerendo do aluno uma série de ações que o levem à solução. Por outro lado, o que é problema para um aluno pode não ser para outro, dependendo do conhecimento que cada um possui sobre o assunto tratado.

Para de fato resolver um problema, o aluno deve escolher uma estratégia, elaborar um ou mais procedimentos, incluindo simulações, tentativas e formulação de hipóteses; depois, deve comparar seus resultados com os dos demais colegas e discuti-los;em seguida, vem a validação de seus procedimentos, ou seja, o aluno precisa saber, por seus próprios meios, se o resultado que obteve é razoável ou absurdo, se o que utilizou é correto ou não,como também,se a maneira que seu colega resolveu é válida ou não.

Nossos alunos estão habituados a fazer cálculos e apresentá-los sem a devida compreensão. Quando questionados se acertaram, dizem : '*eu fiz, mas não sei se está certo' o que evidencia a* falta de um trabalho de validação. Eles não estão habituados a provar seus resultados, a analisar, comparar e discutir com o colega. É urgente fazer um trabalho que desenvolva esta habilidade e a Resolução de Problemas é, também, um caminho adequado para isto.

Nessa perspectiva de ensino, não cabe mais a proposta de avaliação que tradicionalmente se faz, priorizando produtos finais em lugar de processos, uma vez que o aluno vai participar da construção do conhecimento, produzindo construções próprias que deverão ser revistas e reorganizadas sucessivamente. Por conseguinte, a aprendizagem deixa de ser produto e passa a ser vista como processo, devendo ser avaliada como tal.

SEÇÃO III – DA AVALIAÇÃO E DO ERRO

A idéia de avaliação como comparação, seleção, classificação está arraigada no sistema educacional em suas várias dimensões, de acordo com o seu espaço de atuação e o foco de interesse do processo avaliativo. Entre elas, a avaliação institucional, de currículo, de programas, de sistema e de sala de aula.

De acordo com Vianna (1997), a avaliação institucional busca subsidiar o aperfeiçoamento das decisões da instituição concernentes a: suas práticas, metodologias, conteúdos, aprendizagem, formação escolar e estratégias de ensino. A avaliação de currículo visa subsidiar os professores e especialistas na análise e eficácia de um currículo, fornecendo informações para mudanças curriculares e reforma do ensino. A avaliação de programas busca subsidiar coordenadores e dirigentes na elaboração de medidas para a correção de problemas e aperfeiçoamento de práticas em andamento. A avaliação de sistema subsidia o desenvolvimento de políticas educacionais de estado e a avaliação de sala de aula que visa subsidiar a prática docente e o processo de aprendizagem do aluno.

É preciso ter claro que cada uma dessas dimensões exige metodologias e procedimentos específicos e que os resultados obtidos devem ser analisados dentro do contexto no qual foi realizado, não cabendo generalização de resultados de uma para outra dimensão. Não faz sentido também a busca de culpados pelos resultados observados, em uma atitude de querer se eximir da responsabilidade, como bem coloca Vianna.

> A avaliação é um olhar para frente, um olhar em perspectiva, talvez a partir do que já foi, mas sem querer culpabilizar pessoas ou

> instituições, bastando a angústia do possível insucesso. A avaliação guia; a avaliação não pune (VIANNA, 1997, p. 80).

Em cada instância, a avaliação produz resultados que devem gerar atitudes a serem tomadas tendo em vista a superação dos problemas detectados e visando melhorias no setor avaliado, uma vez que isto é o que dá sentido à avaliação. No entanto, isto raramente tem sido feito e o que se observa é uma classificação de instituições, programas e currículos, escolas, alunos.

Ainda hoje, na comunidade escolar, avaliar é sinônimo de classificar e isto se deve a uma herança cultural oriunda de um sistema educativo que sempre definiu as 'regras desse jogo' como denomina Hadji (1994), e, conseqüentemente, sempre decidiu quem deveria ser excluído ou não, em um processo de avaliação do desempenho dos alunos cuja função primeira sempre foi a classificação para fins de seleção e certificação.

A avaliação que vem sendo realizada nas escolas, que deveria ser uma avaliação da aprendizagem[2], ainda se mostra, em geral, apenas como uma avaliação de rendimento[3], priorizando o 'produto final' do aluno, não levando em conta o processo e desconsiderando as dificuldades, uma vez que estas não são retomadas. Existe até uma justificativa presente no discurso de grande parte dos professores de que reconhecem a necessidade de retomar os conteúdos nos quais os alunos apresentaram mais erros, demonstrando, portanto, maior dificuldade, mas que não o fazem porque ao "voltar" aos conteúdos, perde-se tempo e o cumprimento de seu planejamento fica prejudicado.

---

[2] Avaliação da aprendizagem tomada aqui, de acordo com Buriasco (1999), como avaliação do processo, um dos meios que subsidia a retomada da própria aprendizagem. Esta avaliação visa aprimorar o processo ensino/aprendizagem, conduzindo à superação das dificuldades no mesmo.

[3] A avaliação do rendimento é tomada aqui, de acordo com Buriasco (1999), como avaliação do "produto" final que, de certa forma, evidencia um resultado sem muita chance de ser modificado. Esta avaliação consiste apenas em verificar a 'retenção' ou não dos conteúdos.

Dessa forma, prioriza-se a quantidade e não a qualidade do ensino e, com isso, o aluno tem sido eliminado do processo educativo devido ao seu número de erros. A prática que se realiza nega o discurso presente nas escolas de que a avaliação é diagnóstica, uma vez que ela ainda é desenvolvida como uma atividade estritamente classificatória.

> [...] a avaliação tem servido como um mecanismo para a eliminação do aluno da escola. Além disso, a avaliação mal conduzida pode ser, ela mesma, um dos fatores causadores do fracasso escolar (BURIASCO, 1999, p. 158).

A avaliação que deveria permitir o acompanhamento escolar do aluno e subsidiar o professor na tomada de decisões, de reajustes e de revisões, durante o processo de ensino/aprendizagem tem exercido, unicamente, a função de classificar, apenas medindo os alunos por meio de notas ou conceitos, como se a aprendizagem fosse um produto e 'pudesse ser pesado em uma balança'.

A cultura da nota está inserida na avaliação escolar proveniente da idéia do senso comum de que classificar é medir. A utilização tem gerado polêmica. Há os que defendem o uso da nota, justificando-a como forma de comunicação escola/aluno/família, uma comunicação necessária para que pais e alunos acompanhem seu desenvolvimento escolar, preparando-se para o resultado do final do ano. Comete-se aqui um equívoco, pois a nota pode, no máximo, informar o desempenho do aluno em determinada atividade e não sua aprendizagem. A "mais radical insuficiência de uma nota bruta é sem dúvida a de nada dizer de concreto ao aluno, para além de uma indicação de ordem em relação aos outros alunos" (HADJI, 1994, p. 172). Essa nota pode representar apenas uma resposta decorada segundo modelo pré-estabelecido.

Muitos professores utilizam a nota como instrumento de coerção para garantir disciplina em sala de aula, valorizando-a de tal maneira que o foco do ensino deixa de ser a aprendizagem e passa a ser a nota obtida para a aprovação; estudar para o aluno não representa nenhum prazer, mas uma obrigação.

> O prazer de aprender desaparece quando a aprendizagem é reduzida a provas e notas: os alunos passam a estudar "para se dar bem na prova" e para isso têm de memorizar as respostas consideradas certas pelo professor ou professora. Desaparecem o debate, a polêmica, as diferentes leituras do mesmo texto, o exercício da dúvida e do pensamento divergente, a pluralidade. A sala de aula se torna um pobre espaço de repetição, sem possibilidade de criação e circulação de novas idéias (GARCIA, 1998, p. 41).

O incentivo para ir à escola deixa de ser a busca do conhecimento e passa a ser exclusivamente a nota para 'passar' e como um considerável número de alunos não a consegue, acaba abandonando a escola. Os que conseguem alegram-se por obter um boletim com aprovação e, por vezes, até com destaque, alegrando sua família, apesar de sua criatividade ter ficado completamente adormecida. O rótulo, habitualmente, usado, é – nota baixa é identificador de aluno indisciplinado, que não estuda, descompromissado, ao passo que a nota boa é característica do bom aluno, exemplar, inteligente.

Para alguns, abandonar a nota parece representar uma ameaça para os professores, pois esta é vista como perda de segurança, poder, autoridade, domínio de sala. Mas há também os que são contra a nota, considerando-a como "subjetiva, parcial e que não traduz o desempenho dos alunos" como coloca Depresbiteris e Taurino (1996, p. 51).

Algumas instituições já abandonaram as notas e passaram a utilizar um parecer descritivo para registrar o desenvolvimento dos alunos em determinado período, inclusive, trabalhando com ciclos, nos quais o período de tempo para avaliar a aprendizagem do aluno é maior com a intenção de permitir uma melhor intervenção do professor para a superação das dificuldades.

No entanto, algumas voltaram atrás, ao sistema de notas, alegando duas razões:

- a primeira de que era muito difícil para os professores dar conta do registro de tantos alunos, trabalhoso demais;
- a segunda, que os alunos não estudavam mais, estavam indisciplinados por acreditar que todos seriam aprovados, uma vez que não havia mais nota. Perderam o 'medo' da reprovação e a autoridade do professor estava em jogo.

E agora o que fazer, diante dessa situação, conservar ou abandonar a nota? Hadji (1994), argumenta que o

> [...] único problema é o de saber que informação veicula essa nota. Se essa informação nos permite fazer o ponto da situação, então é o lugar que importa e não o resultado numérico; se serve para materializar um nível de competência, por que privarmo-nos dela? Mas se a nota apenas dá testemunho da persistência do mito do valor verdadeiro, e é apenas o instrumento de perspectivas que nada têm a ver com a avaliação – manutenção da ordem ou imposição de força-, seria melhor deixarmos de a usar (HADJI, 1994, p. 108).

De acordo com Depresbiteris e Taurino, "o mito da nota surge de uma preocupação exagerada com o produto. Só nos livraremos disso, se colocarmos a atenção, não só no produto, mas, também, no processo" (1996, p.51).

Dessa forma, partindo-se do princípio de que a atenção deve estar no processo educativo, cujo objetivo é a aprendizagem, a avaliação deve ser a ela direcionada, logo, a sua função pode mudar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) atribuem novas funções para a avaliação, apresentando-a em duas dimensões, uma social e outra pedagógica.

> Na dimensão social atribui-se à avaliação a função de fornecer aos estudantes informações sobre o desenvolvimento das capacidades e competências que são exigidas socialmente, bem como auxiliar os professores a identificar quais objetivos foram atingidos, com vistas a reconhecer a capacidade matemática dos alunos para que possam inserir-se no mercado de trabalho e participar da vida sociocultural.
>
> Em sua dimensão social cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos ainda parcialmente consolidados.
>
> Assim, é fundamental que os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros das atitudes dos alunos, forneçam ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas idéias, em desenvolver raciocínios e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p.54).

Estas novas funções encaixam-se na perspectiva de ensino apresentada na seção anterior, que requer mudanças de concepções e práticas avaliativas. Porém, a mudança de concepções e práticas não acontece da noite para o dia e nem por simples decreto, mas é um processo análogo ao do conhecimento: novas práticas geram novas concepções que geram novas práticas, num processo mútuo e dinâmico. É importante ressaltar que isto exige tempo, dedicação, comprometimento, perseverança e colaboração.

Neste sentido, faz-se necessário uma concepção de avaliação que ressalta a necessidade de análise, investigação e reflexão no processo de construção do conhecimento do aluno, valorizando-o como um todo e não apenas como produto final.

Preocupados também com essa necessidade de mudança na forma de avaliar, os documentos do NCTM (1991) apresentam seis normas que constituem os critérios para apreciar a qualidade das avaliações em Matemática e que podem ser assim descritas:

- a atividade de avaliação deve refletir a matemática que todos os alunos devem saber e ser capazes de fazer. Para o desenvolvimento dessas atividades, o professor deve compreender matemática, conhecer os currículos e saber como os alunos aprendem. Deve priorizar atividades que exigem do aluno raciocínio na resolução do problema e não domínio de técnicas ou conceitos apenas. As questões abertas[4] podem ser utilizadas e surpreendem pela forma criativa com que muitas vezes os alunos resolvem.
- toda a avaliação deve melhorar a aprendizagem matemática constituindo-se parte da rotina de atividades de sala de aula e não uma lacuna nelas, pois é parte integrante do ensino que estimula e apóia uma aprendizagem progressiva . Durante as aulas, podem e devem surgir, naturalmente, oportunidades para avaliar os alunos e isto envolve ouví-los, observá-los, interpretar aquilo que dizem e fazem;
- deve promover a equidade, oportunizando que todos os alunos, inclusive os que têm necessidades especiais ou são superdotados, atinjam elevados níveis de desempenho e que cada aluno tenha oportunidade e o apoio necessário para atingir esses níveis. A equidade coloca novos desafios à avaliação que, tradicionalmente, tem

[4] Trata-se, aqui, por questões abertas aquelas em que se requer do aluno, mais do que apenas assinalar uma opção, que ele encontre uma resposta, registrando todo o caminho percorrido para chegar até ela.

ignorado as diferenças e seus resultados têm negado aos alunos a oportunidade de aprender matemática relevante;

- deve ser um processo transparente e as informações sobre este devem se tornar públicas a todos os interessados e nela envolvidos, tanto pais quanto alunos. Apesar de não saberem que questões têm que responder, os alunos devem ser informados sobre o que devem saber, como se espera que demonstrem esses conhecimentos e as conseqüências dessa avaliação. Todo o processo deve valorizar o envolvimento profissional e ser receptivo à análise e mudanças;
- deve promover inferências válidas sobre a aprendizagem em matemática, buscando conhecer os processos cognitivos dos alunos (os quais não podem ser diretamente observados), por meio de conclusões baseadas na convergência de evidências provenientes de diferentes fontes, como entrevistas, observações, tarefas, portifólios, situações de sala de aula etc);
- a avaliação deve ser um processo coerente no qual suas diversas fases se ajustem. Deve corresponder aos objetivos para os quais foi elaborada e estar alinhada com o currículo e com o ensino, até porque a aprendizagem dos alunos está relacionada às suas experiências de avaliação. Manter o equilíbrio entre atividades diversificadas e adequadas de avaliação pode ajudar a aprendizagem.

Entretanto, observando-se a avaliação escolar, de um modo geral, percebe-se que estas normas ainda não estão presentes na prática cotidiana das escolas, pois o professor não tem considerado o processo que o aluno utiliza para chegar à solução, tampouco, tem aproveitado seus erros para auxiliá-lo na compreensão de suas dificuldade. Os erros devem ser utilizados como ponto de partida para desafiar o aluno a mudar, a crescer no entendimento e a desenvolver sua capacidade de crítica, analítica e de generalização. O professor apenas tem valorizado o resultado final, o que, muitas vezes, é decepcionante, pois reflete um fracasso que não é só do aluno, mas também seu.

O professor, como co-responsável pela construção do conhecimento do aluno, precisa auto-avaliar-se, questionando-se sobre seu trabalho, identificando as possíveis falhas nos diversos aspectos: se as estratégias utilizadas foram adequadas para provocar o aluno; se a base fornecida foi suficiente; se o conteúdo foi significativo; se as atividades foram diversificas e proporcionaram, de fato, ao aluno, a construção do conhecimento; se alunos foram bem orientados; se a avaliação foi adequada, valorizando sua produção e se priorizou o quantitativo ou o qualitativo.

> Ensinar a difícil tarefa de ver o todo, examiná-lo em suas partes e voltar ao todo com uma nova visão obtida a partir da análise das partes, deveria ser um dos objetivos da Matemática como disciplina de um currículo escolar em qualquer nível (CURY,1996, p. 79).

De acordo com a autora, quando o professor preocupa-se, unicamente, em descontar pontos por cada erro cometido, sem tentar compreender o raciocínio e o caminho percorrido pelo aluno para chegar ao resultado obtido, enfatiza apenas as dificuldades, evidenciando a conotação essencialmente quantitativa da avaliação.

O professor, ao realizar uma avaliação contínua do trabalho do aluno, pode promover a sua aprendizagem e aumentar a sua confiança naquilo que ele já compreende e consegue comunicar, fazendo desta um processo de comunicação entre o professor e o aluno, estabelecido pelo diálogo, proporcionando, assim, um enriquecimento recíproco, num processo de interação, no qual ambos influenciam e são influenciados. Esta relação cria laços de respeito e solidariedade que propiciam um melhor ambiente de aprendizagem.

Nessa perspectiva, a avaliação deixa de ser uma prática de classificação, transformando-se num processo de investigação e despontando como o início de uma nova cultura de avaliação de que nos fala Esteban (2001).

> O processo de avaliação do resultado escolar dos alunos está profundamente marcado pela necessidade de criação de uma nova cultura de avaliação, que ultrapasse os limites da técnica e incorpore em sua dinâmica a dimensão ética (ESTEBAN, 2001, p. 8).

Como processo de investigação, a avaliação pode favorecer a inclusão e a permanência do aluno na escola, à medida em que este passa a ser respeitado em suas diferenças, tempo e ritmo de aprendizagem.

O professor, ao detectar as falhas do aluno, busca estratégias para que este possa superá-las, não se fixando nos obstáculos e dificuldades encontradas. Assim, avaliação e superação caminham juntas no processo ensino/aprendizagem , tornando-se a avaliação um processo dinâmico e ético.

Como bem coloca Esteban (2001), a avaliação como classificação busca a homogeneidade dos educandos, ignora as diferenças individuais, valoriza as respostas predeterminadas, ressaltando o saber e o poder do professor, enquanto que a prática da avaliação como investigação promove a heterogeneidade, respeitando tempos e ritmos individuais e trabalha as respostas dos alunos em uma constante construção e reorganização.

Na avaliação como prática investigativa, toda produção do aluno é considerada e a maneira de olhar para o erro é diferente. O erro deixa de ser visto como falha, como algo que o aluno não sabe e não aprendeu e passa a ser visto como uma fase, na qual ele ainda não sabe, mas precisa reorganizar e reconstruir o que não foi aprendido, num processo constante de desenvolvimento e apreensão do conhecimento (Esteban, 2001). Isto faz da avaliação um processo de permanente reconstrução e de constantes tomadas de decisões direcionadas à aprendizagem do aluno.

Tomar decisões é algo bastante sério e exige análise e julgamento da situação, então a idéia de avaliar está atrelada à idéia de julgar. Como afirma Hadji (1994), se avaliar é julgar, isso implica em definir critérios, parâmetros e bases de comparação para os julgamentos, como também levantar indicadores, sinais, indícios de que os critérios estabelecidos foram alcançados.

É importante lembrar que os mesmos critérios podem não servir para diferentes pessoas e que eles mudam de acordo com o contexto. A tarefa de definir critérios e indicadores exige do avaliador um profundo conhecimento da natureza daquilo que será avaliado, caso contrário, ele poderá cometer injustiças.

> A definição de critérios e indicadores para a avaliação de processos e produtos escolares requer um profundo conhecimento do professor acerca do saber, do saber-fazer e das atitudes relativas à sua disciplina específica, complementado por uma visão global das interrelações com as diversas áreas do conhecimento (DEPRESBITERIS et al, 1996, p. 59).

De posse de critérios e indicadores, o avaliador deve se munir de uma diversidade de instrumentos, dentre eles, provas objetivas e dissertativas, mapas conceituais, observações, portifólios, projetos, entrevistas, pesquisas, seminários etc, uma vez que integram os processos formais e informais, possibilitando uma visão mais global do aluno. Todo e “qualquer instrumento que seja válido, fidedigno e que permita compreender e gerir os erros é sempre bem vindo” (HADJI, 1994, p.165).

Porém, nenhum instrumento por si só é suficiente e, qualquer que seja o instrumento, este deve servir de roteiro para o aluno estar consciente dos aspectos em que será avaliado e para o avaliador observar os aspectos que deseja avaliar, retirando informações sobre a aprendizagem do aluno.

Tomando-se como princípio que a função primeira da avaliação escolar é contribuir para uma boa gestão da aprendizagem do aluno, qualquer avaliação é uma oportunidade para recolher e fornecer informação, cabendo ao professor, saber qual é o melhor gênero de informação e o que fazer com ela. Deve também estar bem definido o porquê da avaliação, quais suas finalidades e que providência deverão ser tomadas.

Assim sendo, a construção de um instrumento de avaliação requer tempo para refletir o que a situação exige, em que ponto se encontra, o que se tem que avaliar e em função de quê. "A direção correta é aquela que vai das intenções para os instrumentos" (HADJI, 1994, p 159).

A figura do professor é de fundamental importância, pois ele será o gestor de todo esse processo e, como tal, não deve ser apenas um observador, dizendo como as coisas são feitas, nem um 'prescritor' que diz como elas deveriam ser, mas, antes, deve estabelecer a ligação entre um e outro, desempenhando então uma nova função que é a de mediador entre o aluno e o conhecimento.

Para esta função, exige-se professores que apresentem uma atitude avaliativa, ou seja, professores 'inquietos', que se questionem sobre os porquês dos resultados de seus alunos e busquem formas de reverter situações negativas, que se preocupem em saber se os alunos estão aprendendo, se as estratégias estão adequadas e que saibam definir as prioridades de seu plano de ensino, bem como tomar decisões diante da situação.

> Mais que instrumentos precisos, a avaliação de sala de aula exige a formação de professores que apresentem uma atitude avaliativa. Compreende-se essa atitude avaliativa como uma predisposição para realizar uma constante reflexão sobre seu ensino, as aprendizagens dos alunos e as condições educacionais oferecidas pela escola.(SOUSA, 2000, p. 104).

O professor por sua vez, está habituado à prática tradicional de avaliação e deve ser preparado para isso, num processo de formação que deve ter início nos cursos de licenciatura e continuidade no decorrer de sua vida profissional por meio de encontros, estudos, investigações e discussões que gerem reflexões e as tão esperadas mudanças .

A partir do momento em que os professores estiverem sendo preparados e incorporarem esta concepção de avaliação como um processo de constante questionamento sobre a produção dos alunos, o qual deve ser complementado com medidas de apoio que lhes dêem suporte na superação das dificuldades, assumindo a avaliação como um processo parcial e inacabado a aprendizagem, desencadear-se-a, num movimento contínuo, um desenvolvimento em ritmos individuais e diferentes.

Como instrumento de guia, a avaliação requer do professor outra postura diante do erro, um olhar diferenciado, buscando compreendê-lo e analisá-lo como fonte de informação sobre o processo de construção do conhecimento do aluno.

> A avaliação formativa é uma avaliação que se esforça por fazer um diagnóstico preciso das dificuldades do aluno, a fim de lhe permitir encontrar-se num duplo sentido: compreender os seus erros e, em função disso, tornar-se capaz de os ultrapassar (HADJI, 1994, p.123).

De acordo com o autor, o erro precisa ser pensado diferentemente de como o tem sido até então, isto é, como indicador do sucesso (aprovação) ou fracasso (reprovação) do aluno. Esta é uma visão característica do ensino tradicional, em cuja concepção o conhecimento é adquirido e, portanto, o erro é inaceitável. Porém, a partir do momento em que se busca uma avaliação como prática investigativa, concebendo o conhecimento como construção e apropriação, o erro passa a ser visto como uma condição inerente a esse processo. Desse modo, o erro tem a função de ser um referencial para a investigação das falhas apresentadas pelo aluno, colocando-se novas questões necessárias para o alcance da solução.

Nesse contexto, os erros, as dúvidas e as insuficiências fazem parte do processo de aprendizagem e, por isso, devem ser observados pelo professor como um processo normal, que pode e deve ser superado. Para que esta superação ocorra, o professor deve gerenciar os erros.

"O gerenciamento do erro não é tarefa fácil" (lHadji,1994, p. 124), pois implica ir além do desempenho registrado. Importa não só buscar as causas que possam ter originado o erro, mas também analisar o que este revela dos conhecimentos do aluno. A partir disso, não há como não mudar a prática pedagógica. O professor deve fazer de sua sala de aula um laboratório de investigação, estando atento em todo o tempo para observar e tentar compreender como os alunos pensam e agem, porque escolhem determinadas estratégias e não outras, o que os leva a essa escolha e que uso fazem dela. É no acompanhamento do percurso do aluno que o professor pode encontrar muitas respostas para erros e os meios de superá-los, uma vez que poderá saber porque foram cometidos.

> Mas para nos podermos pronunciar de uma forma segura – o que é sempre arriscado -, não nos podemos contentar, em caso algum apenas com o resultado final, pelo que é necessário recolher observações no decurso da elaboração das respostas, ou conduzir um

> inquérito complementar após a realização da tarefa (HADJI, 1994, p.123).

O que presenciamos nas escolas hoje, em sua grande maioria, são avaliações com os erros demarcados em vermelho, indicando falha e nada se fazendo para saber sua causa, pois eles são apenas cobrados. Os alunos “pagam um alto preço” por eles, uma vez que se reduzem a notas e/ou repreensões. Isto demonstra que, para o professor, o erro ainda é apenas um indício de que o aluno não sabe porque não estudou; quando deveria ser visto como um indício de que o aluno possui um conhecimento parcial e, às vezes, incorreto, que precisa ser trabalhado num processo de reconstrução.

É a visão de hegemonia, de modelo padrão que dá ao erro esse valor negativo e que tem sido obstáculo para que os professores incorporem, em sua prática de avaliação, a análise do erro para compreensão dos processos utilizados pelos alunos e do que os levou a agir desta ou daquela forma, diferente do que foi proposto pelo professor. A leitura que o professor faz do erro, ou seja, o aluno errou porque não estudou, precisa mudar. O professor precisa buscar estratégias para que se possa trabalhar a reconstrução do conhecimento, num trabalho dinâmico entre professor e aluno.

A avaliação, como prática investigativa, aproxima o professor do aluno na medida que se estabelece o diálogo para compreensão do que é observado. A forma como o professor interage e escuta o aluno contribui para que este expresse suas idéias ou se cale. A correção utilizada pode, portanto, levar o aluno a construir um novo conhecimento ou paralisar sua busca de aprendizado. É fato que palavras ou atitudes impensadas podem prejudicar, significativamente, a dinâmica do processo de aprendizagem.

Buriasco (1999, p. 169) afirma que no processo de ensino e aprendizagem a verdade não é sempre pronta e definitiva; o que parece verdade, num certo momento histórico, pode não ser mais fácil de encontrar um tempo depois e que, portanto, a cada vez que um novo procedimento opõe-se a outro, até então tido como verdadeiro, poder-se-ia dizer que ocorre um erro. Da mesma forma, a aprendizagem do aluno também não está e nunca estará pronta, primeiro porque o conhecimento é inesgotável e, segundo, porque, na sua construção, fazem parte do percurso tentativas, erros, reconstruções até se chegar ao acerto, e tudo isso como um processo perfeitamente normal.

Esteban (2001, p. 22) também defende o erro como parte natural do processo. Para a autora, o erro não representa deficiência, impossibilidade ou ausência de conhecimento e sim um momento do processo de construção do conhecimento. O erro deve, então, ser visto como um valioso instrumento que oferece ao professor novas informações que revelam o que realmente o aluno “sabe”, indicando também aquilo que ele ainda “não sabe”, mas que pode vir “a saber”.

Além disso, os erros podem ser tomados como ‘trampolins’ para a aprendizagem a partir do momento em que forem detectados num processo investigativo e tomados como fonte de informação, pois permitem ao professor avaliar as necessidades do aluno e planejar estratégias para o desenvolvimento das funções cognitivas. A análise dos erros serve de guia para rever a prática pedagógica e a retomada da aprendizagem dos alunos, tendo em vista que o conhecimento destes é provisório e deverá ser trabalhado em conjunto com as idéias de outros colegas, sob a orientação do professor.

Para trabalhar com os erros, o professor precisa saber diferenciá-los, uma vez que os erros que os alunos apresentam não são todos iguais.

Buriasco (1999) alerta-nos sobre a importância de se trabalhar com a natureza dos erros, pois diferentes erros exigem diferentes condutas pedagógicas para sua superação. A autora afirma, ainda, que é papel do professor fazer com que o aluno tome consciência da existência do erro e se motive na busca da sua superação, estratégia que muito contribuiria para a diminuição do fracasso escolar.

Bodin (*apud* BURIASCO, 1999) apresenta alguns tipos de erros:

Erros de Saber	O aluno não sabe uma definição, uma regra, um algoritmo etc.
Erros de saber-fazer	O aluno não sabe utilizar corretamente uma técnica, um algoritmo etc.
Erros ligados à utilização adequada ou não dos saberes ou dos saber-fazer	O aluno não reconhece que a utilização da relação de Pitágoras seria adequada para resolução de um certo problema, por exemplo.
Erros de lógica ou de raciocínio	O aluno confunde hipótese e conclusão, encadeia mal os cálculos e tem dificuldade em lidar com os diferentes dados do problema proposto.

A partir do momento em que o professor identifica a natureza do erro do aluno, o trabalho de selecionar as estratégias para retomar o processo fica mais fácil e objetivo, permitindo-lhe ir direto ao ponto em que o aluno demonstrou haver falha, levando-o a superar aquela dificuldade apresentada.

Uma vez que a avaliação realiza-se para verificar a situação do aluno, não faz sentido compreender essa situação e cruzar os braços, lamentando o ocorrido como se não houvesse mais esperança e nem o que fazer; seria como diagnosticar uma enfermidade e, ao mostrar ao paciente os resultados dos exames, dizer-lhe que, de fato, está doente e que pode ir para casa. É exatamente isso que tem ocorrido na escola, quando o aluno, em uma avaliação, comete muitos erros, demonstrando que há falhas em sua aprendizagem, e recebe, por isso, uma nota condenatória.

Para que uma escola seja democrática, deixe de privilegiar alguns poucos e repense no direito de cada um, se caracterize por ser um espaço de inclusão e não de exclusão, não se pode admitir um processo de ensino/aprendizagem no qual sejam ignoradas a presença do erro e a busca de sua superação.

SEÇÃO IV – DO ENSINO DA ÁLGEBRA

Como as três questões investigadas nesta pesquisa envolvem álgebra, podendo ser resolvidas ou não por meio dela, apresenta-se, a seguir, uma breve reflexão sobre o assunto.

Na minha experiência como professora percebo que os alunos, de um modo geral, não gostam da álgebra que vêem nas escolas, Tanto em nível de Ensino Fundamental, como Médio, em sua grande maioria, é um treino mecânico de trocar números por letras, sem compreender o que fazem, nem mesmo porque fazem, e, muito menos para que 'aprendem' tal conteúdo. Quando questionados sobre o que é álgebra, é comum encontrar-se respostas do tipo '*é usar letras na matemática'.*

Embora ensino da álgebra ocupe um lugar considerável nos currículos das escolas e professores lhe dêem uma ênfase significativa, os resultados que são apresentados, por exemplo, no SAEB, em questões que envolvem álgebra, não ultrapassam o índice de 40% de acerto (Brasil, 1998, p.116) e isso, quando raramente o atingem.

Por meio do ensino da álgebra é possível desenvolver e exercitar a capacidade de abstração e generalização, bem como oferecer ao aluno uma ferramenta para a resolução de problemas, o que não vem sendo alcançado, possivelmente, devido à forma como tem sido trabalhado, enfatizando-se apenas uma repetição mecânica de exercícios que não têm significado algum para o aluno.

Algumas vezes, dada a facilidade com que alguns alunos memorizam os algoritmos de resolução dos exercícios, uma boa parte dos professores iludem-se ao pensar que eles estão aprendendo álgebra. Como o que os alunos fazem é uma simples memorização de técnicas, não sabem transferi-las para situações problemas, nem mesmo para as mais corriqueiras do seu cotidiano. Isto se evidencia nas avaliações que mostram o baixo desempenho dos alunos quando se deparam com situações simples do seu dia a dia e nas quais nem sequer identificam a álgebra como possível ferramenta para resolver tal situação.

Parece que os professores têm se equivocado quanto ao papel do ensino da álgebra no currículo, pois, como sugerem os PCN,

> [...] é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica (BRASIL, 1998, p.116).

Sendo assim, o desenvolvimento do pensamento algébrico pode começar nos primeiros anos do ensino básico, já nas séries iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. No trabalho com as operações os alunos podem identificar e generalizar suas propriedades, estabelecer fórmulas, investigar padrões, regularidades em seqüências numéricas, geométricas, ou outras quaisquer. Este trabalho leva os alunos a construírem uma linguagem algébrica para descrever essas regularidades.

Também o trabalho com gráficos é significativo para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos, como também para trabalhar a relação entre duas grandezas variáveis. De acordo com os PCN, no

> [...] trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na

> forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p.84).

Existe um consenso entre diferentes autores, Usiskin (1994), Souza; Diniz (1996), de que as finalidades do ensino da álgebra estão atreladas às suas diferentes concepções e que, por sua vez, correspondem à importância dada aos diversos usos das variáveis. Neste sentido, de acordo com Usiskin, pode-se destacar quatro diferentes concepções da álgebra (USISKIN, 1994).

- **A álgebra como aritmética generalizada:** dentro desta concepção as variáveis são usadas como generalizadoras de modelos. Basicamente requer-se que o aluno aprenda a traduzir e generalizar (técnicas importantes para a álgebra e a aritmética). As variáveis aparecem para generalizar padrões numéricos que foram construídos indutivamente na aritmética. Nesta concepção, espera-se que o aluno observe um padrão e o generalize, generalizando relações conhecidas entre números não tendo sequer a sensação de incógnita.

- **A álgebra como um estudo de procedimento para resolver certos tipos de problemas:** nesta concepção, as variáveis são incógnitas ou constantes e se requer que o aluno aprenda a simplificar e resolver. As letras são consideradas como incógnitas específicas a determinar, um valor numérico desconhecido que é descoberto por meio da resolução de uma equação ou de um sistema de equação. Dentro desta concepção, o aluno deve descrever, simbolicamente, por meio de uma equação, uma situação que envolva a incógnita de um problema para, depois disso, simplificar a equação e resolvê-la.

- **A álgebra como estudo das relações entre grandezas:** nesta concepção, as variáveis "variam" e o seu estudo pode começar com fórmulas. As variáveis são consideradas em seu sentido completo de variabilidade. Dentro desta concepção, uma variável é um argumento (representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (representa um número do qual dependem outros números). Surge então a noção de variável independente e variável dependente e, com elas, as funções. Espera-se do aluno que ele relacione quantidades e faça gráficos.

- **A álgebra como estudo das estruturas:** nesta concepção, a variável é pouco mais que um símbolo arbitrário, sendo tratada apenas como 'marcas sobre o papel' e podem ser resolvidas por meio de regras das operações da aritmética ou de alguma estrutura mais complexa. As letras, então, passam a ser entes que pertencem às estruturas algébricas (grupos, anéis, domínios de integridade ou corpos), podendo ser aplicadas as propriedades satisfeitas por cada um dos conjuntos nos quais se atue. As letras são usadas como símbolos abstratos. Nesta concepção, espera-se que o aluno manipule expressões, justificando o que fez, aprendendo assim as regras da álgebra.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam três concepções de educação algébrica, descritas a seguir.

- **Lingüístico-pragmática:** predominou durante o século XIX até a metade do século XX e entendia que o papel do ensino da Álgebra era fornecer um instrumental técnico superior ao da aritmética para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. O aluno deveria dominar as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe), ainda que de forma mecânica. Nesta concepção, o ensino partia do cálculo literal (operações de adição, subtração multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas), trabalhado por meio de uma grande quantidade de exercícios, com o objetivo de levar os alunos ao manejo preciso das expressões algébricas para só depois apresentar problemas de aplicação algébrica.

- **Fundamentalista-estrutural:** esta concepção predominou nas décadas de 1970 e 1980, trazendo uma nova maneira de interpretar a álgebra no ensino, enfatizando as propriedades estruturais para fundamentar e justificar, logicamente, cada passagem usada no transformismo algébrico. O trabalho iniciava com a introdução dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro,...) das relações e das funções... Hoje o papel do ensino da álgebra é fornecer os fundamentos lógico-matemáticos aos vários campos da matemática.

- **Fundamentalista-analógica:** esta concepção faz uma síntese entre as anteriores, buscando recuperar o valor instrumental da álgebra preservando a preocupação fundamentalista, fazendo uso de recursos analógicos geométricos (blocos de madeira ou figuras geométricas) ou físicos (como a balança de dois pratos para ensinar resolução de equações) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico.

Segundo os autores, o aspecto negativo destas três concepções é que elas priorizam a habilidade de manipular as expressões algébricas, enfatizando mais a sintaxe da linguagem algébrica do que o pensamento algébrico e seu processo de significação. Desta forma, reduzem a álgebra apenas a um instrumento técnico-formal para a resolução de problemas, esquecendo-se que ela é também uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo.

Sendo assim, é importante que a iniciação do pensamento algébrico aconteça gradativamente nos primeiros anos de escolarização, como já falado anteriormente, mesmo antes de uma linguagem algébrica simbólica. Esta iniciação acontece quando, ao se trabalhar com expressões numéricas ou com padrões geométricos, o aluno consegue: estabelecer relações/comparações entre eles, quando expressa estruturas aritméticas de um problema, quando reconhece a igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas equações, quando percebe ou expressa regularidades etc.

Neste processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno passa por três fases distintas (FIORENTINI, FERNANDES e CRISTOVÃO, 2005) e que se apresentam transcritas a seguir.

- **Fase pré-algébrica:** nesta fase, o aluno utiliza algum elemento considerado algébrico, podendo ser uma letra ou outro elemento qualquer, porém, ainda não é capaz de concebê-lo como um número generalizado qualquer ou mesmo como variável.

- **Fase de transição:** após a fase pré-algébrica, o aluno passa pela fase de transição, ou seja, passa do aritmético para o algébrico. Nesta fase, o aluno já consegue aceitar e conceber a existência de um número qualquer, estabelecendo alguns processos e generalizações, utilizando ou não a linguagem simbólica.

- **Pensamento algébrico mais desenvolvido:** o aluno demonstra ter atingido esta fase quando expressa a capacidade de pensar e de expressar genericamente. Nesta fase, o aluno, além de aceitar e conceber que existem grandezas numéricas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, é capaz tanto de expressá-las por escrito como também de operar com elas

Fiorentini & Miorim (1993) colocam que, tanto uma introdução precoce e sem suporte empírico a uma linguagem simbólica e abstrata, como o descaso ou a recusa ao modo simbólico e formal podem ser igualmente obstáculos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, cabendo, portanto, ao professor o bom planejamento de atividades que proporcionem ao aluno a oportunidade de trabalhar de forma a desenvolver adequadamente este pensamento e a construção da linguagem simbólica.

O que se observa hoje no ensino da álgebra é que ele é iniciado por volta da sexta série do Ensino Fundamental, com atividades que enfatizam o uso das letras como substitutas de números, dando-se início a uma linguagem que busca traduzir determinadas situações por meio de símbolos matemáticos. Em seguida, aplica-se o conceito de variável como incógnita para resolver equações e sistemas de equações que, normalmente, serão aplicados em problemas. Dessa forma, as letras, para o aluno, são apenas um valor numérico desconhecido, num momento, para ser determinado por meio de cálculos.

Quando chega a sétima série, o enfoque dado às letras muda, pois estas passam a ser consideradas 'marcas no papel', enfatizando-se o ensino de regras e a manipulação de símbolos algébricos, letras e sinais da aritmética, num trabalho totalmente abstrato e sem significado para o aluno. Nesta série, trabalha-se mecanicamente o conteúdo, numa seqüência rígida de regras, quase sempre desvinculado de qualquer aplicação ainda que na resolução de problemas matemáticos.

Na oitava série, o trabalho com as incógnitas é retomado, agora em equações literais e equações do segundo grau e, em seguida, a idéia de função é apresentada. No Ensino Médio, também se observa uma fixação exagerada nas manipulações mecânicas com símbolos, na qual o aluno continua sem reconhecer sua utilização, não conseguindo aplicar o que 'aprendeu', e, a impressão que tem é de que a álgebra é inútil e que o tempo foi gasto para nada.

> Como se pode observar o trabalho com álgebra é apresentado de forma fragmentada, enfatizando-se ora um aspecto, ora outro, sem se preocupar com a ligação entre eles e sua contextualização, ignorando-se totalmente a formação da idéia básica da álgebra que é o conceito de variável em suas múltiplas formas: parâmetro, incógnita e variável propriamente dita (SOUZA; DINIZ, 1996, p.3).

Sendo assim, como sugerem os PCN, o ensino da álgebra deve ser feito por meio de atividades algébricas que possibilitem ao aluno construir seu conhecimento a partir de problemas que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes ao tema, propiciando sua compreensão quanto às diferentes interpretações das letras. Quanto mais diversificados forem os contextos dos problemas mais os alunos terão oportunidade de construir a “sintaxe”[5] das representações algébricas e expressar as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e construir ‘regras’ para resolução de equações (BRASIL, 1998). Vale ressaltar a necessidade do estudo da álgebra ser introduzido a partir da aritmética, ou seja, desde as séries iniciais, utilizando-se as propriedades fundamentais das operações desta para que os alunos percebam os padrões, façam as generalizações e desenvolvam uma linguagem própria, que tenha significado para eles, mesmo que, num primeiro momento, sem uma linguagem simbólica.

[5] Componente que contém os princípios e regras que produzem as sentenças gramaticais numa determinada língua, por meio da combinação de elementos.

SEÇÃO V - DOS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Sobre a pesquisa

Muitos pesquisadores, tentando responder as questões propostas pelos atuais desafios de estudos no campo da educação, têm utilizado a pesquisa de natureza qualitativa. Segundo Bogdan e Bicklen (1994, p.47-51), a investigação qualitativa possui características tais como:

- tem como fonte direta de dados o ambiente natural, constituindo-se, o investigador, como instrumento principal;
- é descritiva;
- dá mais ênfase ao processo do que aos resultados ou produtos,
- tende a analisar os dados de forma indutiva;
- dá importância vital ao significado.

Desta forma, a presente investigação é de natureza qualitativa, uma vez que contempla as características citadas anteriormente, mas também trabalha com alguns dados quantitativos ao elaborar as tabelas contendo os índices percentuais nas categorias encontradas. Utiliza a Análise de Conteúdo, na perspectiva proposta por Bardin (1977), como processo para analisar e compreender a produção escrita de alunos da 3ª Série do Ensino Médio. Esta análise parte de dados qualitativos, fazendo um agrupamento quantitativo para, novamente, fazer uma análise qualitativa.

A Análise de Conteúdo é um instrumento interpretativo que, por meio do exame de textos ou discursos que tenham vínculo com a realidade, busca compreendê-la. Nesse processo, emprega-se um conjunto de técnicas que têm, como objetivo, a descrição e a interpretação das informações colhidas (QUEIROZ, 2004).

O mecanismo utilizado para a busca de informação é a leitura e esta deve ser realizada de modo sistemático, objetivo e da forma mais completa possível.

A Análise de Conteúdo, como colocam Freitas & Janissek é uma

> [...] técnica refinada, delicada, e que requer muita dedicação, paciência e tempo para satisfazer a curiosidade do pesquisador. Além disso, são necessárias intuição, imaginação e observação do que é importante, além da criatividade para escolha das categorias (Freitas & Janissek, 2000, p.49).

O instrumento e o objeto da investigação

Para realizar esta investigação, utilizou-se a Prova de Questões Abertas de Matemática[6] da 3ª série do Ensino Médio da Avaliação de Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

De acordo com PARANÁ (2001), AVA é o Programa de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná que teve início no ano de 1995 com o objetivo de complementar as informações fornecidas pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Foram realizadas avaliações anuais até 1998, quando a Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED) decidiu

---

[6] Daqui em diante todas as vezes que me referir a ela utilizarei apenas a palavra Prova

intercalar suas avaliações com as do SAEB, passando então a ocorrer nos anos pares.

No ano de 2002 foi realizada uma prova com questões abertas (discursivas) de matemática, o que permitiu analisar e compreender melhor como os alunos registram, resolvem as questões e escolhem as estratégias, o que, num teste de múltipla escolha, não se pode analisar.

A aferição foi realizada na população dos alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio da rede pública estadual. Após resolver uma das provas (Português, Ciências ou Matemática), 2/3 do total de alunos de cada sala das séries avaliadas fizeram a Prova de Redação e 1/3 a Prova de Questões Abertas de Matemática, esta composta de três ou quatro problemas não-rotineiros. Tanto para a realização da Prova de Redação quanto da Prova de Questões Abertas de Matemática, os alunos dispuseram de cinqüenta minutos.

Para a Prova de Questões Abertas de Matemática, foram escolhidas questões que pudessem gerar, por parte do aluno, uma produção avaliável em um teste escrito, com tempo limitado.

> A opção por integrar a AVA/2002 uma prova de matemática contendo questões abertas, deve-se ao entendimento de que uma educação matemática comprometida com a melhoria da “competência matemática” dos alunos e correspondente desempenho, passa por uma melhor compreensão dos caminhos que trilham, por meio das notações que registram, ao tentarem resolver as situações problemas que lhes são apresentadas (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003, p.2).

O objeto desta pesquisa é a produção escrita dos alunos nas três questões abertas da Prova da 3ª série do Ensino Médio. Para essa Prova, foram escolhidas questões de diferentes níveis de complexidade e que envolvessem desde:

> [...] o reconhecimento e a utilização de um procedimento passo-a-passo na resolução de problema significativo, na reprodução de fatos ou processos matemáticos elementares rotineiros na sala de aula até o estabelecimento de conexões utilizando diferentes procedimentos, aplicando conhecimento matemático relevante na resolução de problemas significativos não rotineiros. (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003, p.3).

No dia da sua realização, a Secretaria da Educação do Paraná determinou que a quinta prova, entregue em cada sala de aula, deveria ser recolhida e enviada para Curitiba, as outras ficariam na escola. Do total dessas, o Programa de Pesquisa recebeu uma amostra estatisticamente significativa contendo 1047 provas de alunos das três séries avaliadas. Parte desta amostra foi utilizada para fazer dois encontros, um em Curitiba e um em Londrina, de professores de Matemática da rede pública estadual com a intenção de familiarizá-los na utilização de um Manual para Correção da Prova de Questões Abertas de Matemática, AVA/2002. Este Manual foi elaborado para orientar a correção da referida Prova em todo o Estado do Paraná.

Todas provas da amostra foram codificadas. Por exemplo, na prova 3L04012, o algarismo 3 significa que é do terceiro ano do Ensino Médio, a letra L identifica que foi corrigida no encontro realizado em Londrina, o número 04 indica que pertence a 4ª meso região (Oeste) e o número 012 significa que foi a 12ª prova corrigida no encontro.

As questões receberam as seguintes indicações de crédito[7], de acordo com o Manual de Correção:

- Código **2** para crédito completo, quando o aluno resolveu e respondeu corretamente a questão;

[7] Baseado na forma de correção proposta para o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA, promovido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE), pela equipe norueguesa coordenada por Svein Lie.

- Código **1** para crédito parcial, quando o aluno resolveu parcialmente a questão, ou seja, quando resolveu corretamente parte da questão, mesmo que a outra esteja incorreta ou incompleta;
- Código **0** para nenhum crédito, quando o aluno resolveu incorretamente a questão proposta, ou seja, os procedimentos/respostas apresentadas foram inaceitáveis;
- Código **9** para as questões que não apresentaram resolução ou resposta alguma, ou ainda para aquelas nas quais o aluno registrou “Não deu tempo”, “Não sei” ou frase equivalente.

A constituição da amostra

De posse dessas provas, foi necessário, então, retirar uma amostra menor para esta pesquisa, uma vez que 403 provas era uma quantidade demasiadamente grande, tornando impossível o cumprimento do tempo para a realização da investigação.

Com a colaboração da consultora de Estatística do Programa de Pesquisa, foi colhida a amostra utilizada neste trabalho, a partir dos critérios descritos a seguir.

Inicialmente, foi feita uma planilha contendo todas as informações sobre as provas, ou seja, o número da prova, o número de cada questão, a idade (ano e meses) do aluno, o gênero, o turno, a cidade de realização da prova, e, também as impressões do aluno sobre a prova.

O primeiro passo para a seleção da amostra foi a exclusão de algumas provas. Optou-se, então, por trabalhar com as provas dos alunos que estivessem com a relação idade/série adequada, ou seja, na faixa etária de 16 a 17 anos. Foram então excluídas uma prova na qual não constava a idade do aluno e mais 151 que se encontravam fora da faixa etária escolhida, restando, assim, um total de 251 provas.

Em seguida, decidiu-se por excluir as provas que não apresentassem registro algum em pelo menos uma questão, visto que, a intenção na pesquisa é analisar a produção escrita. Desse modo, foram priorizadas as provas que tinham todas as questões respondidas. Foram então excluídas mais 30, restando 221.

Realizou-se uma amostragem sistemática com constante K = 5, sorteado o número 4 entre 1 e 5 por uma função aleatória e, a partir dele, foram então selecionadas as provas de número 4, 9, 14 e assim por diante, que compuseram a amostra com a qual trabalhei, num total de 44 provas.

Como o processo escolhido para a análise da produção escrita dos alunos foi a Análise de Conteúdo, buscou-se seguir os três procedimentos básicos para sua realização, ou seja, a organização do material, a descrição analítica e as inferências.

i) Organização do material

Um material bem organizado e de fácil manuseio favorece o trabalho. Sendo assim, em um primeiro momento, tirei uma cópia de cada prova para que pudesse fazer, nelas, minhas anotações durante a leitura, sempre que achasse necessário.

Num segundo momento, organizei as provas, nomeando-as arbitrariamente por A_1, A_2, A_3...A_{44}. Feito isto, mergulhei na leitura da produção dos alunos, pois, como coloca Oliveira, o processo de análise de conteúdo começa

> [...] com uma leitura flutuante por meio da qual o pesquisador, num trabalho gradual de apropriação do texto, estabelece várias idas e vindas entre o documento analisado e as suas próprias anotações, até que comecem a emergir os contornos de suas primeiras unidades de registros (OLIVEIRA et al, 2004, p. 6).

ii) Descrição analítica

Na descrição analítica busca-se explorar o texto enumerando características fundamentais e pertinentes. Parti, então, para o estudo das produções propriamente ditas. Com as provas em mãos, fiz uma nova correção, mais sistemática e horizontal, isto é, examinei novamente a primeira questão de todas as provas, depois a segunda e depois a terceira, fazendo anotações sobre a forma como os alunos resolviam e sobre os fatos que me chamavam atenção, pois o meu intuito era saber algo mais, ir além do que estava escrito, ou seja, ler as entrelinhas e descobrir o porquê da forma escolhida para a resolução e para os registros apresentados.

Concluída essa parte, fiz uma correção vertical, ou seja, analisei as três questões de cada prova, comparando as produções do mesmo aluno e buscando informações que pudessem confirmar as anotações feitas nas três questões.

Emergiu então, um levantamento das diferentes formas de resolução, dos erros e acertos cometidos e das respostas apresentadas pelos alunos. Construí algumas tabelas, contendo dados referentes às estratégias/procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das três questões.

Guiada, então, por estes levantamentos e anotações, e considerando que o objetivo final da análise de conteúdo é fornecer indicadores úteis aos objetivos da pesquisa, defini, como unidades de análise:

- Características das manifestações do pensamento algébrico:
- erros:
- estratégias/procedimentos,

iii) Inferências

De acordo com Oliveira et al, o

> [...] objetivo final da análise de conteúdo é fornecer indicadores úteis aos objetivos da pesquisa. O pesquisador poderá assim interpretar os resultados obtidos relacionando-os ao próprio contexto de produção do documento e aos objetivos do indivíduo ou organização/instituição que o elaborou (OLIVEIRA et al, 2004, p.7).

Com base nos resultados encontrados é que foram feitas algumas inferências relacionadas às produções dos alunos.

SEÇÃO VI – DA ANÁLISE DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DOS ALUNOS

Esta seção apresenta: uma análise da produção dos alunos em cada uma das três questões que compuseram a Prova; um levantamento de indícios da presença do pensamento algébrico apresentado nas produções; um levantamento dos erros cometidos pelos alunos e das estratégias mais utilizadas para a resolução de cada questão, buscando ainda possíveis marcas escolares nessas produções. Uma descrição mais detalhada das resoluções dos alunos encontra-se no apêndice, bem como os índices de acertos de cada questão.

Segue-se a apresentação da primeira questão e de sua respectiva análise. Esta questão também fazia parte da Prova da 8ª série.

Questão 1

Um encanador **A** cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador **B** cobra um valor fixo de R$ 24,00 mais R$ 36,00 por hora de trabalho. Sendo **t** o tempo, medido em horas, para quais valores de **t** o encanador **A** fica mais barato que o **B**?

Para fazer a caracterização das produções escritas dos alunos em relação às características de manifestações do pensamento algébrico considerou-se as fases apresentadas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

Fase	Alunos	Justificativa
Pensamento Pré-algébrico	A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30, A32, A33, A34, A35, A36, A37, A38, A43, A44	Os alunos utilizaram um elemento algébrico, a letra h para indicar o tempo, porém não a identificaram como variável.
Transição	A1, A9, A12, A13, A15, A17, A18, A19, A20, A42	Os alunos identificaram o valor fixo como a constante e o número de horas como variável, mas não utilizaram linguagem simbólica.
	A3, A8, A11, A14, A16, A21, A31, A39, A40, A41	Os alunos calcularam o valor da primeira hora e a partir daí generalizaram os demais cálculos, como a hora anterior mais o valor cobrado por hora de trabalho, também não utilizaram linguagem simbólica.
Pensamento algébrico mais desenvolvido	A2, A4, A5, A6, A7, A10,	Os alunos demonstraram capacidade de pensar e de se expressar algebricamente, utilizaram linguagem simbólica e souberam operar com as variáveis.

Quadro 1 – Caracterização dos registros dos alunos, na Questão 1, em relação às características de manifestações do pensamento algébrico.

Para uma melhor visualização, apresenta-se, a seguir, a tabela com a freqüência das fases descritas no quadro acima

Tabela 1 – Freqüência de produção dos alunos na Questão 1 em relação às características de manifestações do pensamento algébrico

Fase	Nº de registros	Porcentagem
Pens. Pré-algébrico	20	45,5%
Transição	17	38,6%
Pensamento Algébrico mais desenvolvido	7	15,9%
Total	44	100%

Considera-se relevante os índices de 45,5%, na fase do pensamento pré-algébrico, e de 38,6%, na fase de pensamento de transição do pensamento aritmético para o algébrico, pelo fato de se estar analisando registros de alunos do Ensino Médio, quando os professores ‘supõem’ que, nesse nível de ensino, o aluno já tenha um pensamento algébrico bem desenvolvido. Tais índices parecem evidenciar que o esperado pelos professores está bem longe da realidade da sala de aula, que o ensino praticado nas escolas não tem alcançado os alunos, e, que se faz necessário um repensar a esse respeito.

Exemplos dos registros de alguns alunos

Fase do pensamento pré-algébrico

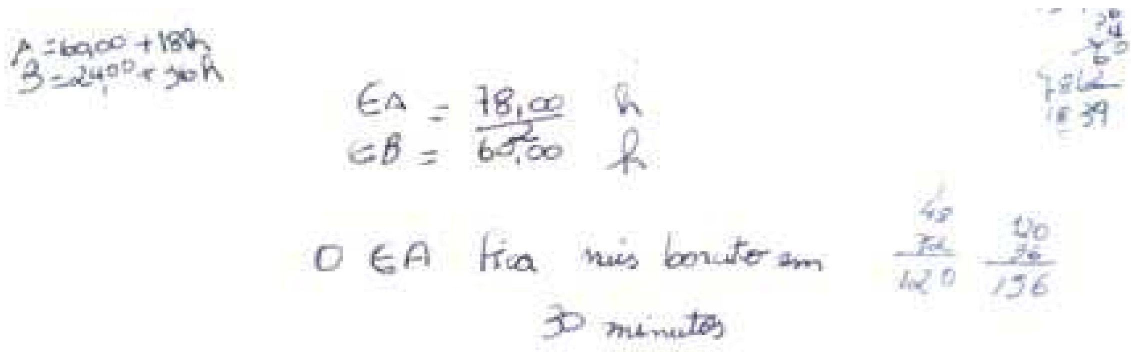


Figura 1 – Resolução da Questão 1 do aluno A44

O aluno escreveu uma função para o custo do serviço de cada encanador, porém sua resolução mostra que não identificou a letra h como variável, uma vez que fez o cálculo de apenas uma hora para ambos os encanadores, apresentando também outros cálculos aritméticos que não resolveram o problema, ignorando a função escrita no início.

Fase de transição

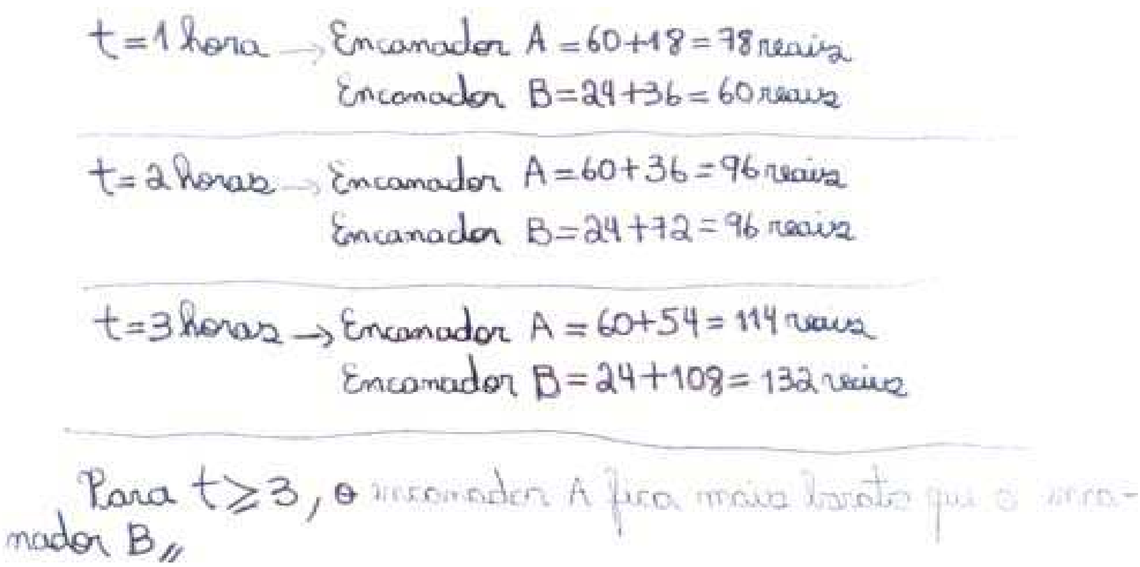


Figura 2 – Resolução da Questão 1 do aluno A9

Este aluno identificou e utilizou o valor fixo como constante e o valor das horas trabalhadas como variável para calcular o custo do serviço de ambos os encanadores.

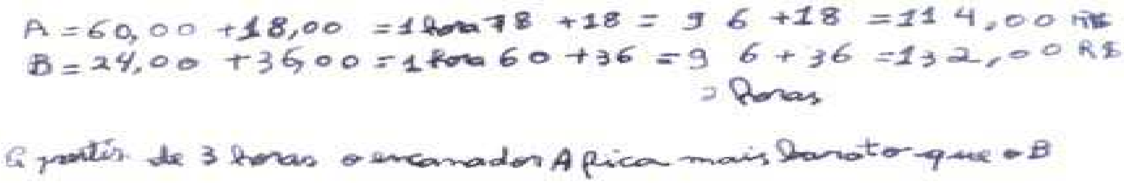


Figura 3 - Resolução da Questão 1 do aluno A11

O aluno fez o cálculo da primeira hora de acordo com as informações contidas no enunciado do problema para cada encanador, as demais horas, calculou com a soma do valor da hora anterior, mais o valor cobrado por hora de trabalho de cada um.

Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido

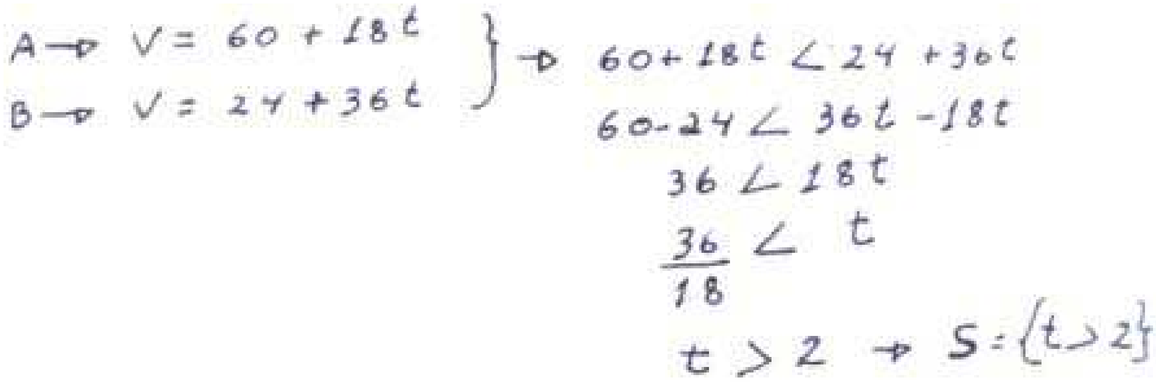


Figura 4 – Resolução da Questão 1 do aluno A2

O aluno demonstra, em seus registros, capacidade de pensar e de se expressar genericamente, resolvendo o problema, corretamente, por meio de inequação.

A figura a seguir mostra a produção escrita da resolução da Questão 1 do aluno A7. Este aluno também demonstra capacidade de pensar e de se expressar genericamente, resolveu o problema utilizando função. Ambos os alunos, A2 e A7, demonstram, pela sua produção, que compreendem os sinais de ordem e também apresentam marcas de conteúdos escolares compatíveis com seu nível de escolaridade, uma vez que, as inequações são trabalhadas no Ensino Fundamental e alguns professores apresentam uma pequena introdução ao conceito de função já na 8ª série. Porém, de fato, a grande maioria dos professores trabalha o conteúdo ‘Funções’ na 1ª série do Ensino Médio.

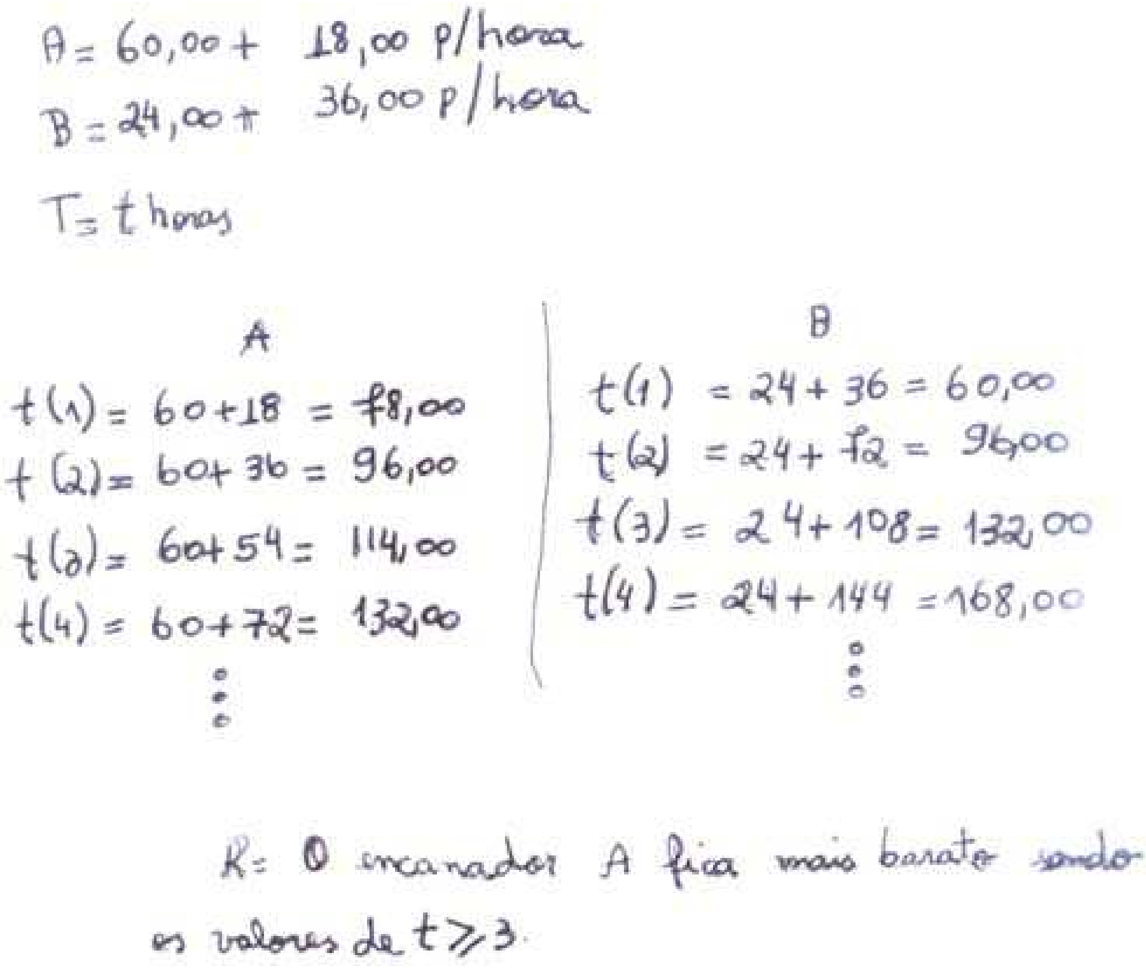


Figura 5 – Resolução da Questão 1 do aluno A7

O quadro a seguir apresenta as possíveis[8] causas dos erros detectados nos registros dos alunos.

[8] Coloca-se possíveis por acreditar que apenas um registro não fale por si, seria necessário um diálogo com o aluno para se saber o que ele pensou no momento em que estava realizando a atividade e, junto com ele, chegar aos porquês dos erros cometidos. Poder-se-ia então detectar se de fato houve falha de aprendizagem, distração, engano ou falta de compreensão do que deveria ser feito. Isto ressalta a importância do diálogo no processo ensino/aprendizagem, bem como alerta para o perigo do julgamento do erro apenas por meio da observação de um registro, principalmente se houver atribuição de nota.

Erros	Alunos	Justificativa
Distração	A13, A15, A16, A17, A21	Retiraram corretamente os dados do problema, cometem erros ou troca de algum dado no cálculo, porém efetuam corretamente.
Compreensão[9]	A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30, A31, A32, A33, A34, A35, A36, A37	Demonstraram não ter compreendido a idéia das informações contidas no problema, não distinguindo valor fixo e valor cobrado por hora.
Interpretação[10]	A14, A18, A19, A20, A42	Cometeram algum equívoco na interpretação da pergunta.
	A22, A38, A39, A40, A41, A43, A44	Cometeram equívoco na interpretação do problema.

Quadro 2 – Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 1

Observação: não se detectou, nesta questão, erro algum quanto ao cálculo algébrico.

Erro por distração

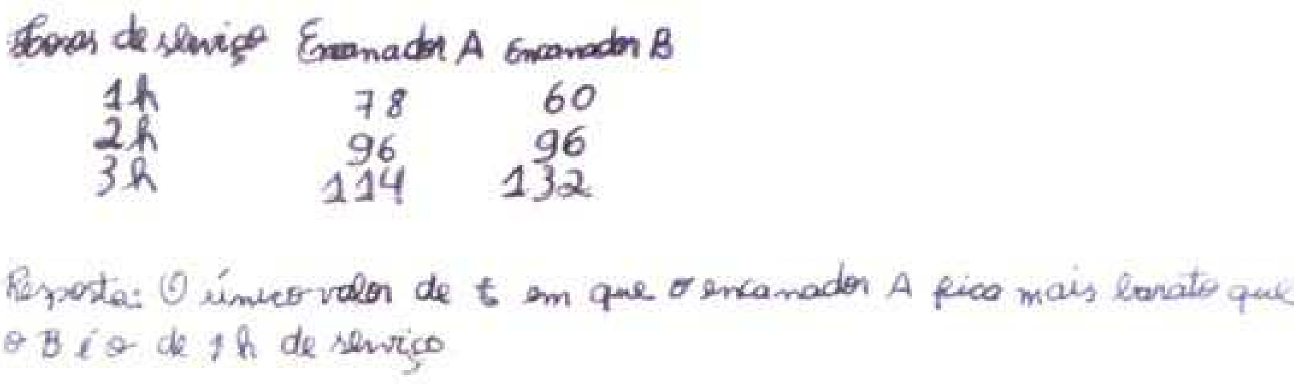


Figura 6 – Resolução da Questão 1 do aluno A13

[9] Toma-se, neste trabalho, por compreensão, a capacidade de entender a totalidade dos caracteres encerrados numa idéia geral, num conjunto, e,no caso desta investigação, do aluno perceber a totalidade das informações relevantes do problema.

[10] Por interpretação,considera-se neste trabalho, a capacidade de explicar, esclarecer, fazer uso das informações, dar encaminhamento a elas, representá-las, adotar e utilizar alguma estratégia/procedimento.

O aluno apresentou, de forma organizada e correta, o custo das três primeiras horas de cada encanador, embora não tenha registrado os cálculos que, possivelmente, efetuou, porém, ao responder, parece ter utilizado apenas a informação da primeira linha e, com isso, equivocou-se, ao colocar que **A** fica mais barato na 1ª hora, quando seus próprios cálculos mostram que fica mais caro. O fato de ter colocado o 'único' valor de t, revela uma defasagem na compreensão da relação de ordem, ou uma falha na interpretação da pergunta.

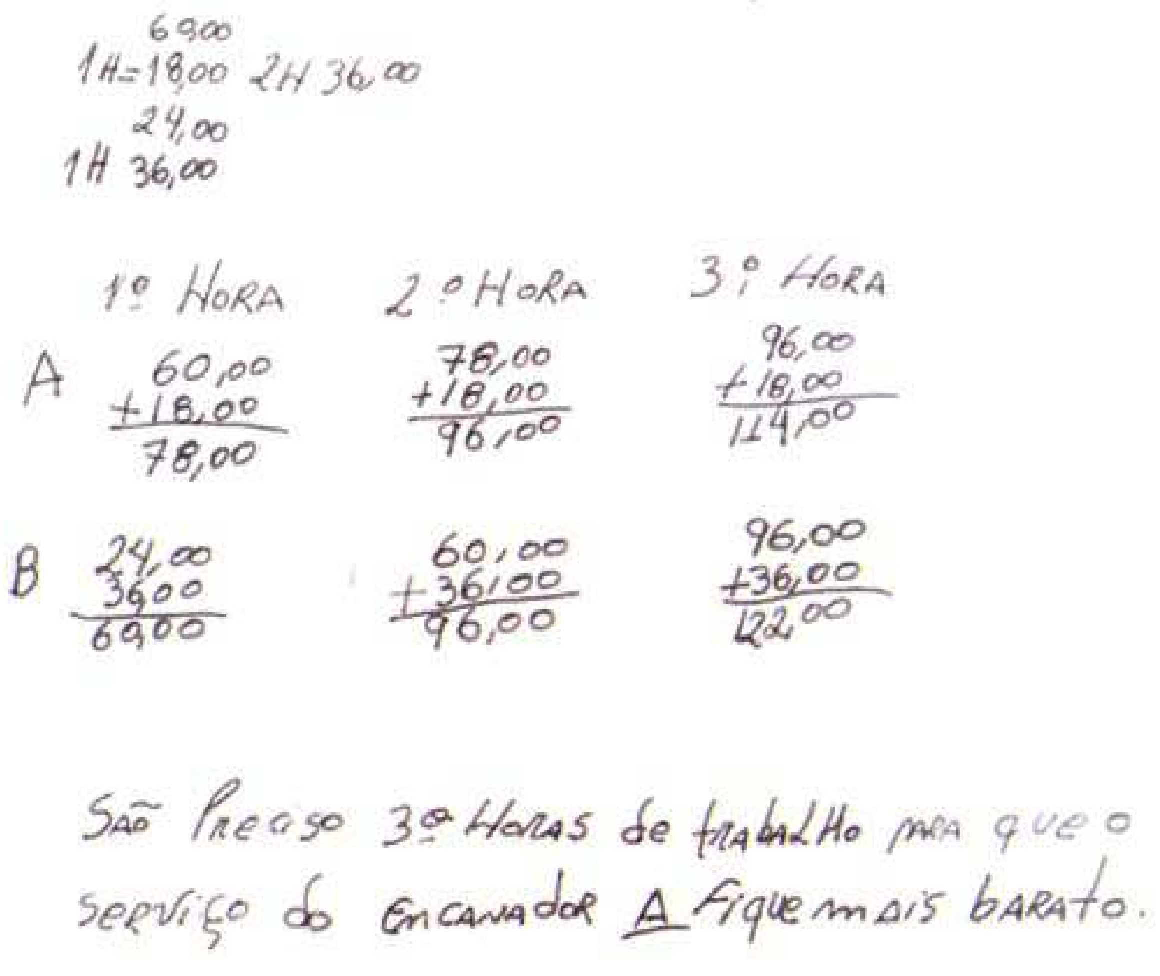


Figura 7 – Resolução da Questão 1 do aluno A16

Este aluno apresentou o cálculo das três primeiras horas para ambos os encanadores, cometendo um pequeno equívoco na terceira hora do encanador **B**. Como este foi o único erro de cálculo encontrado em toda a prova, é possível inferir que tenha sido por distração e, provavelmente, se o aluno tivesse feito uma validação dos resultados, ou mesmo conferido a soma, teria percebido o equívoco.

Erro de compreensão

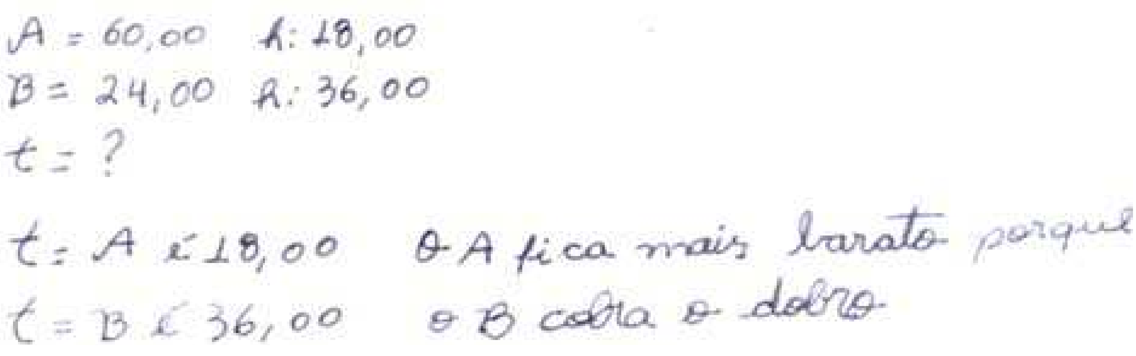

A = 60,00   A: 18,00
B = 24,00   A: 36,00
t = ?
t = A é 18,00   O A fica mais barato porque
t = B é 36,00   o B cobra o dobro

Figura 8 – Resolução da Questão 1 do aluno A32

O registro revela que o aluno não compreendeu a informação de que o custo do serviço dava-se pela adição do valor fixo mais o valor cobrado por hora .

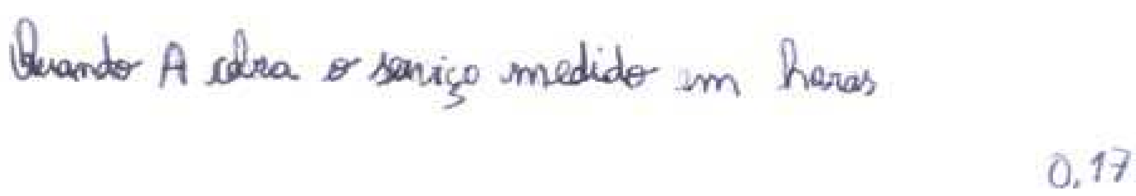

Quando A cobra o serviço medido em horas
0,17

Figura 9 – Resolução da Questão 1 do aluno A33

O registro do aluno parece revelar que não houve compreensão alguma das informações contidas no problema.

Erro de interpretação da pergunta

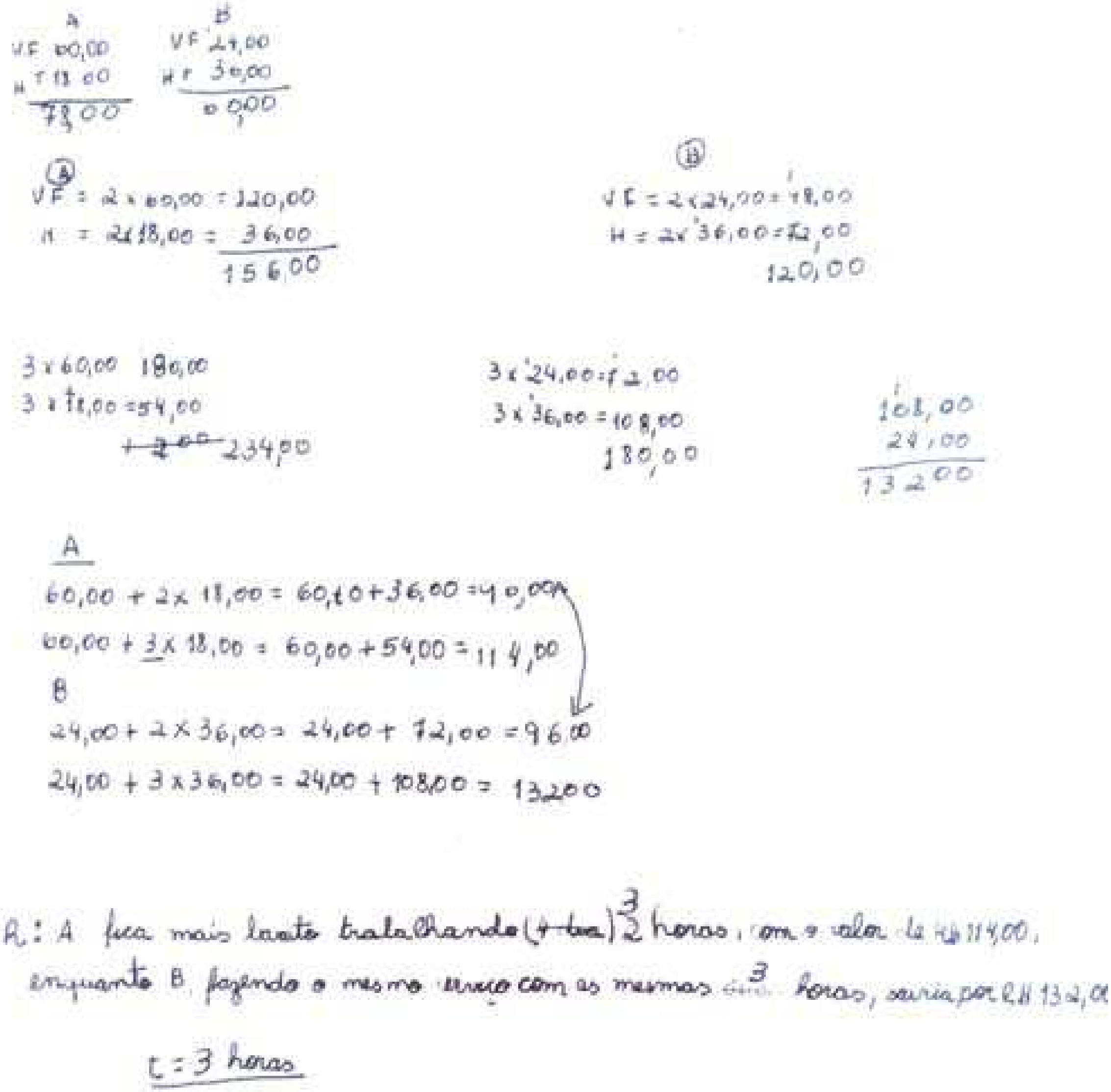


Figura 10 – Resolução da Questão 1 do aluno A14

O aluno resolveu corretamente, porém não soube dar a resposta adequada, uma vez que respondeu com um único valor, ‘3’, quando a pergunta é para quais valores. Este mesmo tipo de resposta foi apresentada por outros alunos, o que pode indicar que eles trabalharam considerando as horas apenas como valores inteiros, ou ainda, que esses alunos têm dificuldade na escrita, no domínio da linguagem, por conseguinte, não souberam expressar-se matematicamente.

Erro de interpretação do problema

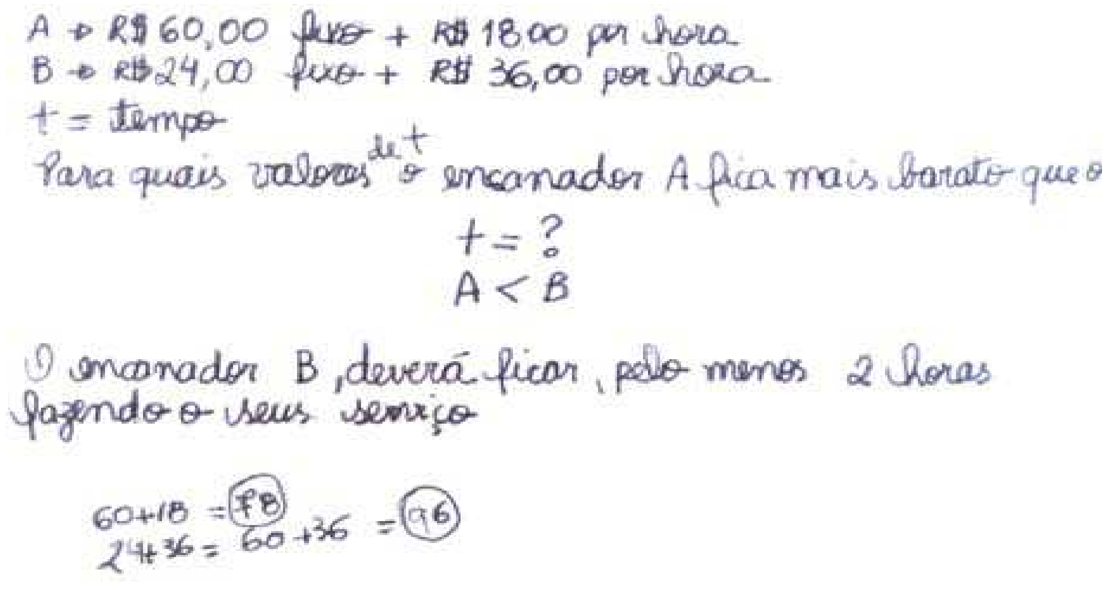


Figura 11 – Resolução da Questão 1 do aluno A40

O registro do aluno mostra que ele compreendeu o problema e identificou as informações relevantes, porém não deu um encaminhamento apropriado para elas, ou seja, não as representou corretamente, pois, numa operação equivocada, calculou e comparou apenas uma hora do encanador **A** contra duas do encanador **B**,

Buscando também, como um dos objetivos da pesquisa, investigar as estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução desta questão, montou-se uma tabela que se encontra no apêndice, com mais algumas informações.

De acordo com a tabela a seguir, é possível verificar que a grande maioria dos alunos (vinte e cinco) optou por resolver a questão por meio de cálculos aritméticos, ou seja, das quatro operações fundamentais, onze utilizaram-se de função e, um, de inequação.

Tabela 2 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 1

Crédito	Número de provas	Cálculo Aritmético	Função	Função e Cálculo Numérico	Inequação	Apresenta apenas resposta
Completo(2)	12	-	10	-	01	01
Parcial (1)	11	09	-	01	-	01
Nenhum (0)	21	16	01	-	-	04
Total	44	25	11	01	01	06

É possível que os alunos que apresentaram apenas a resposta tenham realizado cálculos em outro local. Os que apresentaram resolução por meio de cálculos numéricos parece que perceberam a idéia de função pela forma como efetuaram os cálculos, embora não tenham utilizado a linguagem simbólica ou convencional para representá-la. Em sua maioria, as resoluções apresentam-se organizadas.

Como um dos objetivos desta pesquisa é verificar as marcas de conteúdos compatíveis com o nível de escolaridade, foi possível constatar que seis alunos (A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_{10}), apresentaram essas marcas, como se pode ver, por exemplo, nas resoluções de A_2 e A_7 exibidas anteriormente.

Não apresentam erros

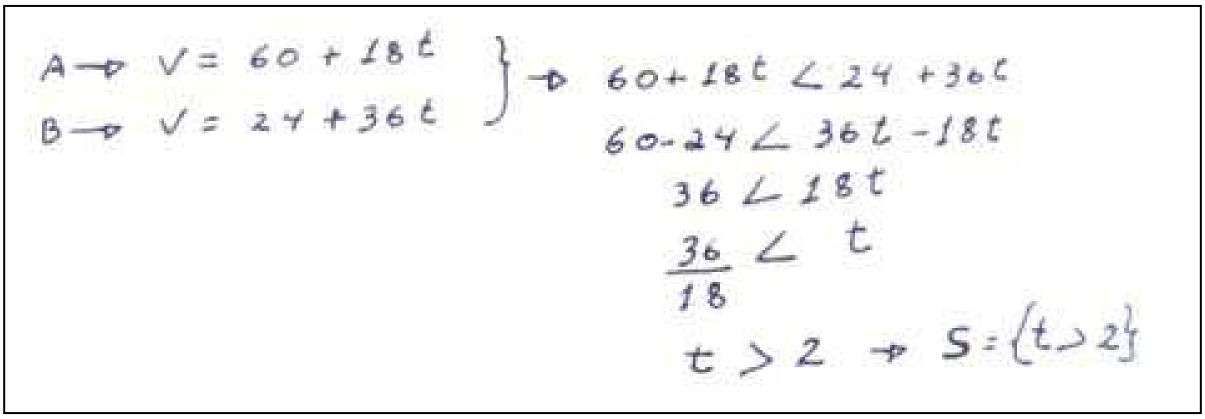


Figura 12 – Resolução da Questão 1 do aluno A_2

O aluno resolveu e respondeu corretamente a questão. Primeiramente escreveu a função dada pelo valor do serviço de cada encanador, embora sem o rigor matemático (V(t) = 60 + 18t) e, em seguida, escreveu uma inequação e resolveu corretamente. Este aluno apresenta marcas de conteúdo compatível com seu nível de escolaridade.

A figura a seguir mostra a produção do aluno A5 na qual ele se utilizou do elemento algébrico **t** como sendo o valor cobrado pelo número de horas trabalhadas e não como o número de horas. Resolveu e respondeu corretamente.

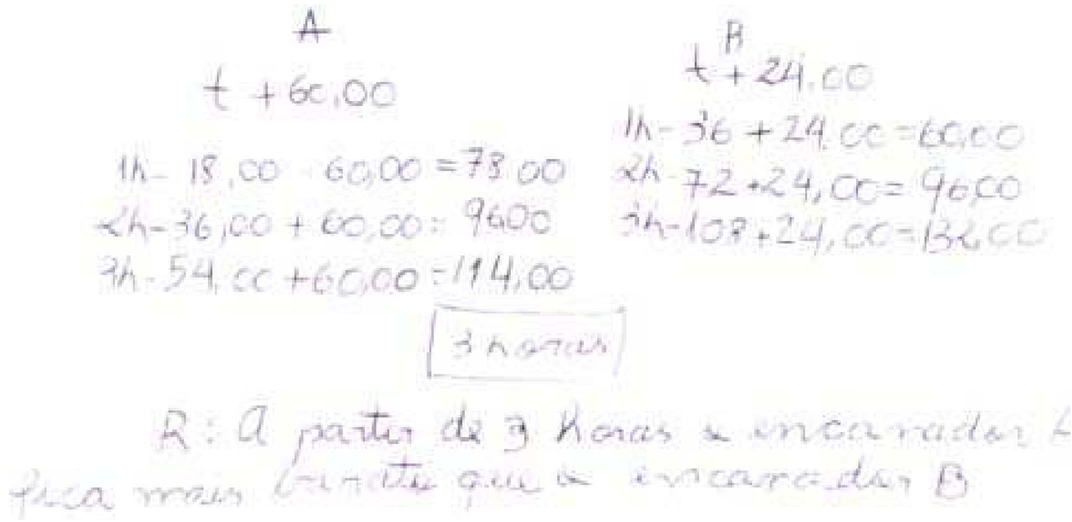


Figura 13 – Resolução da Questão 1 do aluno A5

O aluno A6 apresentou um registro interessante, organizado, correto, e foi o único que mostrou ter trabalhado com o tempo dado em horas e um de seus submúltiplos, isto porque calculou o valor de 2 horas e um minuto, quando os demais demonstram ter pensado no tempo apenas como horas inteiras, desconsiderando seus submúltiplos. O aluno apresentou sua produção em forma de tabela e demonstrou compreensão da relação de ordem, embora não tenha utilizado nenhum sinal matemático e sim a expressão ‘a partir de’. Este é um fato relevante e requer uma reflexão sobre o motivo que o levou a isto: se a falta de trabalhar em sala a linguagem matemática; se esta tem sido trabalhada sem o devido significado para os alunos; ou mesmo se os professores não lhe têm dado importância, uma vez que muitos alunos não utilizaram.

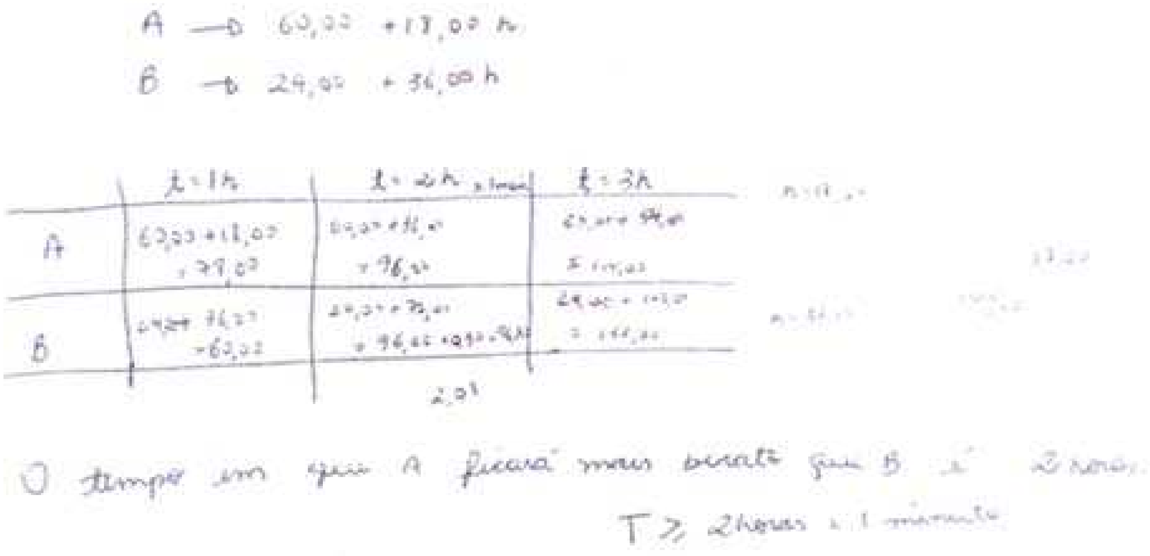


Figura 14 – Resolução da Questão 1 do aluno A6

Questão 2

Esta questão apresenta diferentes formas corretas de soluções e pode servir ao professor como um instrumento potencial para promover debates, troca de idéias,e confrontos de soluções entre os alunos.

Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora à 8 km do cinema e Pedro à 15 km. Sabendo-se que o preço P (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distância percorrida x (em quilômetros), de acordo com a função P(x) = 2x + 5, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos?

A questão apresenta a lei de formação da função e identifica **x** como variável correspondente à distância em quilômetros. É possível que esse fato tenha contribuído para que a maioria das produções apresentasse característica da manifestação do pensamento algébrico mais desenvolvido.

Fase	Alunos	Justificativa
Pensamento Pré-algébrico	A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{35}, A_{36}, A_{39}	Estes alunos copiaram a função, mas não identificaram **x** como variável, nem substituíram valores na função.
Pensamento Algébrico mais desenvolvido	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{28}, A_{29}, A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{37}, A_{38}, A_{40}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}	Os alunos copiaram a lei da função e substituíram corretamente os valores, porém cometeram algum erro, não de cálculo, mas de compreensão ou interpretação.

Quadro 3 – Caracterização dos registros dos alunos na Questão 2 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico.

Tabela 3 – Freqüência de produção dos alunos na Questão 2 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico

Fase	Nº de registros	Porcentagem
Pensamento Pré-algébrico	6	13,7%
Pensamento Algébrico mais desenvolvido	36	86,3%
Total	44	100%

Apenas seis (06) alunos: A25, A26, A27, A35, A36 e A39 apresentaram registros que caracterizam a fase Pré-algébrica, isto pelo fato de copiarem a função e não terem identificado **x** como a variável nem mesmo conseguindo substituir valores para encontrar algum valor numérico.

Exemplos de algumas produções dos alunos

Fase do pensamento pré-algébrico

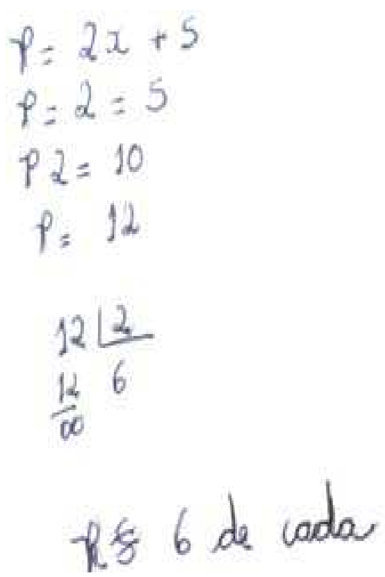


Figura 15 – Resolução da Questão 2 do aluno A26

Os alunos A26 e A27 copiaram a lei de formação da função, mas confundiram-na com uma equação e com isso apresentaram uma resolução incorreta.

C = 8Km P = X
P = 15Km
$P(X) = 2X + 5$

$P = 8 + 15 = 2X + 5$
$P = 23 = 7X$
$X = 23 - 7$
$X = 16$

$23 - 7 = 16$

Distância = $\underbrace{8\text{ Km} + 15\text{ km}}$ (CARLA, PEDRO)
Preço = X Km
FUNÇÃO = $P(X) = 2X + 5$
$P = 8 + 15 = 2X + 5$
$P = 23 = 2X + 5$
$2X = 23 + 5$
$2X = 28$
$X = \frac{28}{2}$
$X = 14,00$
R\$ 14,00 reais

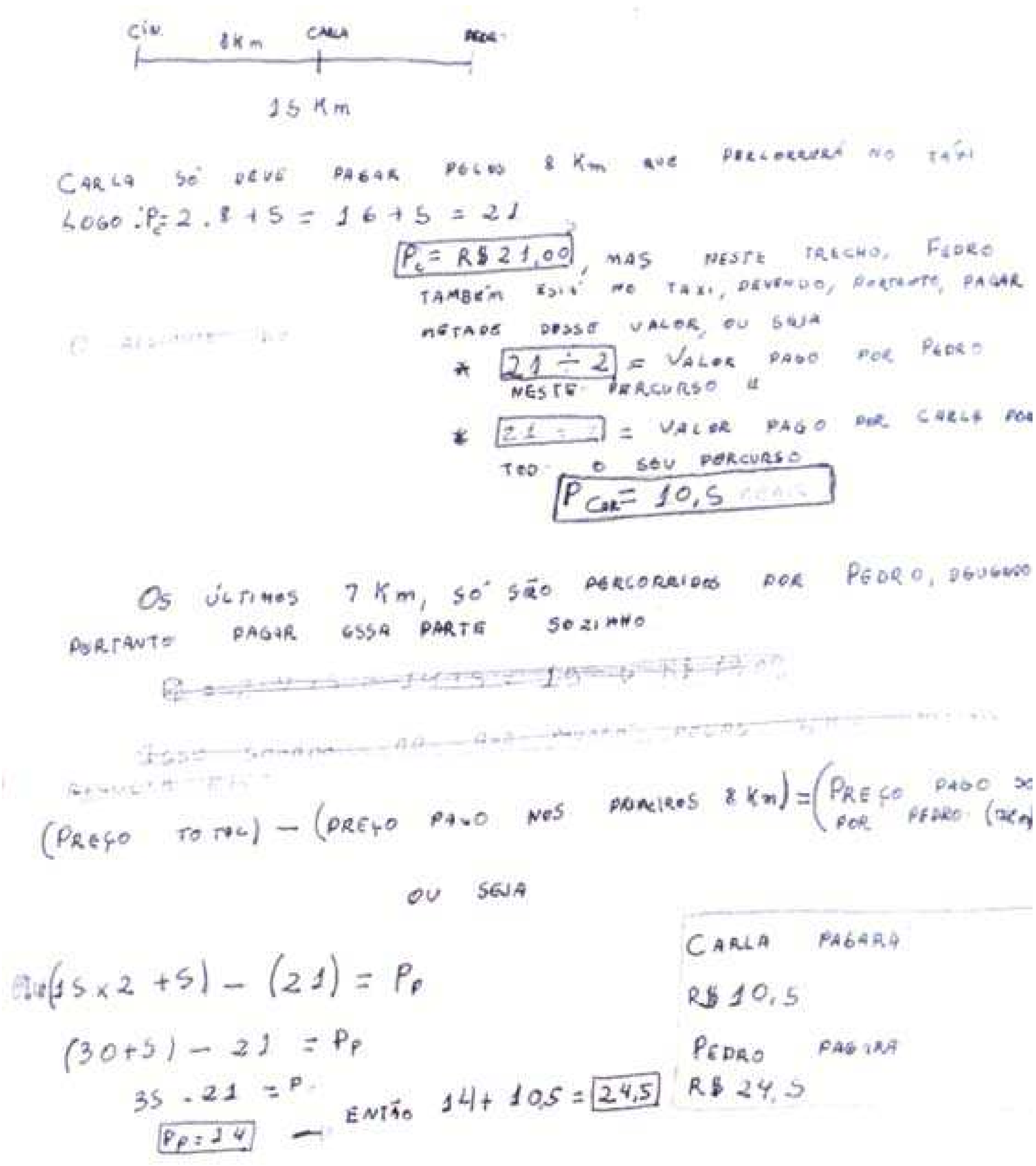
$28 \div 2 = 14$

Preço = R\$ 14,00 deverá pagar.

Figura 16 – Resolução da Questão 2 do aluno A27

Este aluno copiou a lei de formação da função e também resolveu como se fosse uma equação. O aluno trabalhou com os elementos algébricos **P** e **x**, porém demonstra não ter compreendido seus significados.

Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido


CIN. 8 km CARLA PEDR.

15 Km

CARLA SÓ DEVE PAGAR PELOS 8 Km QUE PERCORRERÁ NO TÁXI
LOGO: $P_c = 2 . 8 + 5 = 16 + 5 = 21$

$\boxed{P_c = R\$ 21,00}$, MAS NESTE TRECHO, PEDRO TAMBÉM ESTÁ NO TÁXI, DEVENDO, PORTANTO, PAGAR METADE DESSE VALOR, OU SEJA

* $\boxed{21 \div 2}$ = VALOR PAGO POR PEDRO NESTE PERCURSO E
* $\boxed{21 \div 2}$ = VALOR PAGO POR CARLA POR TODO O SEU PERCURSO

$\boxed{P_{CAR} = 10,5 \text{ REAIS}}$

OS ÚLTIMOS 7 Km, SÓ SÃO PERCORRIDOS POR PEDRO, DEVENDO PORTANTO PAGAR ESSA PARTE SOZINHO

(PREÇO TOTAL) − (PREÇO PAGO NOS PRIMEIROS 8 Km) = (PREÇO PAGO POR PEDRO (TOTAL)

OU SEJA

$(15 \times 2 + 5) - (21) = P_P$

$(30 + 5) - 21 = P_P$

$35 - 21 = P$

$\boxed{P_P = 14}$ — ENTÃO $14 + 10,5 = \boxed{24,5}$

CARLA PAGARÁ R\$ 10,5

PEDRO PAGARÁ R\$ 24,5

Figura 17 – Resolução da Questão 2 do aluno A2

O aluno apresentou um registro organizado que revela sua capacidade de pensar e se expressar genericamente.

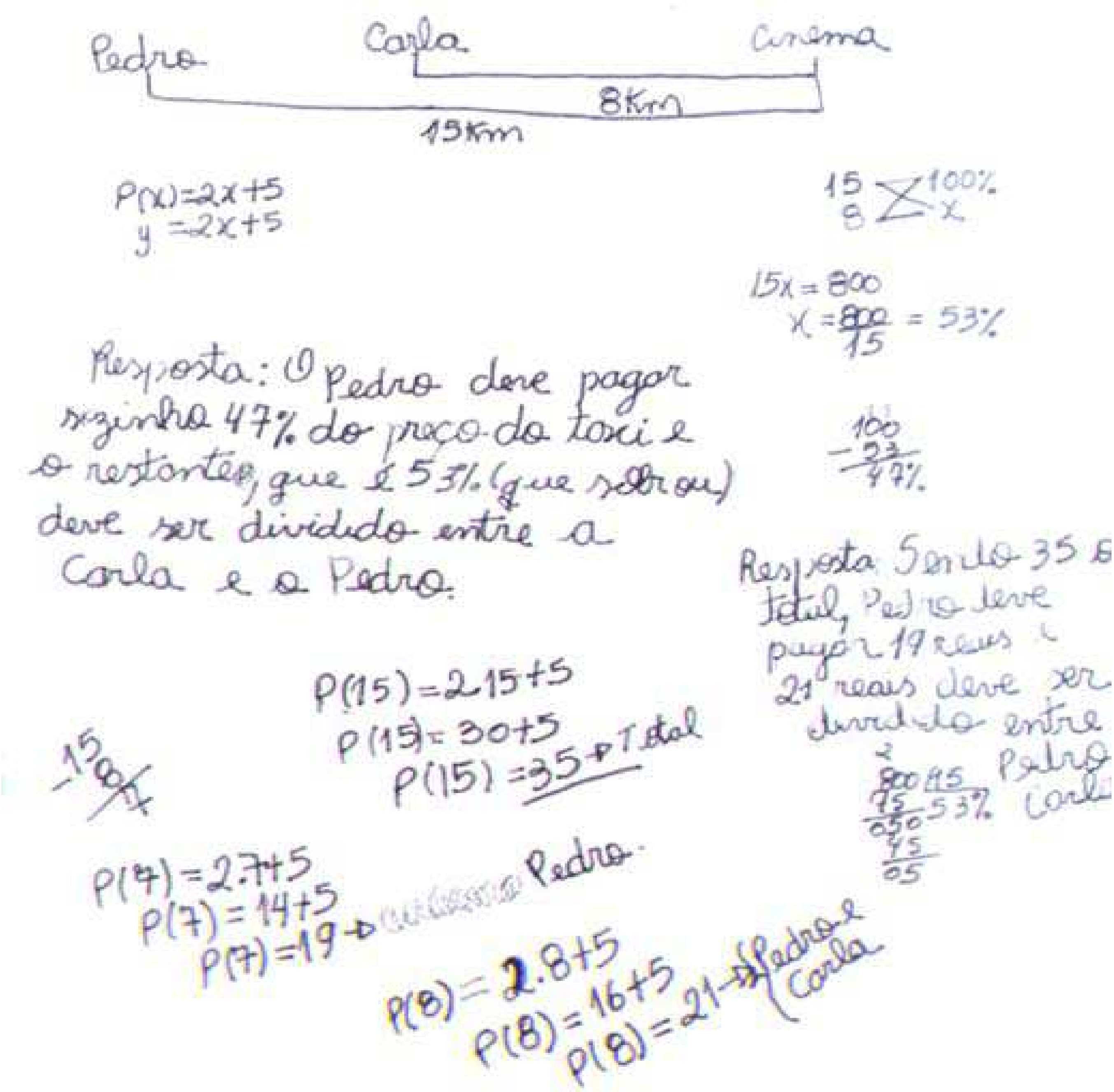


Figura 18 – Resolução da Questão 2 do aluno A8

A resolução deste aluno chamou a atenção, pois apresentou duas respostas e duas resoluções.

Primeiramente, resolveu e respondeu corretamente utilizando porcentagem, montou uma regra de três e encontrou o percentual do valor correspondente ao trajeto percorrido por Carla e por meio de uma subtração, obteve o percentual do trajeto percorrido somente por Pedro dizendo que deveria ser dividido entre os dois, embora não tenha calculado o valor a pagar de cada um. Em seguida, resolveu novamente, agora utilizando função. Substituiu os valores corretamente e calculou o valor total da corrida e também o valor correspondente a 7 e a 8 km. Indicou, por meio da escrita, que o valor correspondente aos 8 km deve ser dividido entre os dois amigos, cometeu, entretanto, um equívoco na resposta, pois parece não ter percebido que o total ultrapassa o valor cobrado pela corrida.

A partir disso, é possível levantar algumas indagações:

- O aluno não validou os resultados na segunda resolução?

  -É provável que não, pois teria percebido que o valor ultrapassou R$ 35,00.

- Sabendo a porcentagem correspondente a trajetória percorrida por cada um e o valor total a ser pago pela corrida, pois já havia calculado, por que não encontrou o valor correspondente a cada um?
- Teria o aluno usado função para calcular o total de Carla e Pedro por achar necessário, ou por ser mais sofisticado? Que motivo o levou a agir dessa forma?

Estas dúvidas certamente só poderiam ser tiradas se houvesse oportunidade para dialogar com o aluno. Mais uma vez, ressalta-se a importância e a necessidade do diálogo no processo ensino/aprendizagem.

Analisando os erros apresentados na Questão 2, foi montado o seguinte quadro:

Erros	Alunos	Justificativa
Distração	A18	O aluno, ao substituir P(15), escreveu apenas o algarismo 5, possivelmente esqueceu o algarismo 1.
Compreensão	A21, A23, A25, A26, A27, A35, A36, A37, A39,	Estes alunos não compreenderam as informações do problema e ainda confundem função com equação..
Interpretação	A1, A3, A6, A7, A8, A9, A11, A12, A19, A22, A24, A28, A29, A30, A32, A33, A34, A38, A42, A43	Estes alunos compreenderam as informações, mas não deram um encaminhamento correto a elas.

Quadro 4 – Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 2

Exemplos de algumas produções dos alunos

Erro por distração

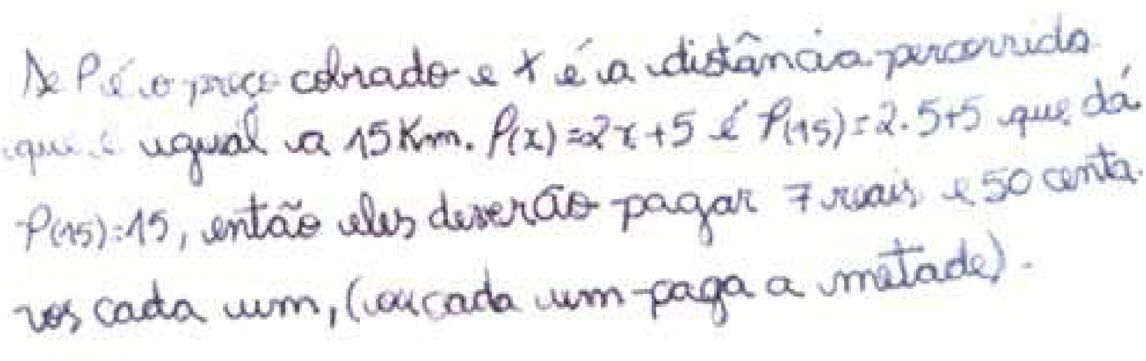


Figura 19 – Resolução da Questão 2 do aluno A18

O registro do aluno parece deixar evidente que, ao calcular P(15), equivocou-se ao substituir o número 15, colocando apenas o algarismo 5, não percebendo que se esqueceu do algarismo 1.

Erro de compreensão

As produções dos alunos A26 e A27, já apresentadas, caracterizam-se pela falta de compreensão, pois mostram que confundiram os dados, assim como função com equação, trabalhando com algum elemento algébrico, sem atribuir-lhe significado. Um deles, A26, copiou a lei de formação da função e depois, simplesmente, ignorou o elemento algébrico **x,** realizou então, alguns cálculos como se estivesse trabalhando com uma equação, na qual **P** é a incógnita, e calculou, incorretamente, um valor para **P**. O outro, A27 identificou a função, porém em vez de substituir valores para x, que é a variável, resolveu como se fosse uma equação, encontrando um valor numérico para **x.**

Erro de interpretação

A grande maioria dos alunos que cometeu erros de interpretação parece não ter observado que tanto Carla quanto Pedro deveriam levar vantagem, numa questão que parece óbvia, quem andasse menos deveria pagar menos. É possível que se tivesse feito a validação dos resultados obtidos, uma grande parte dos alunos teria percebido o erro cometido e poderia tê-lo corrigido, uma vez que muitos ultrapassaram o valor dos R$ 35,00, preço total da corrida.

O aluno A9, por exemplo,demonstra ter compreendido o problema, pois retirou os dados e apresentou cálculos corretamente, equivocando-se, entretanto, em sua resposta, pois não percebeu que o valor encontrado a ser pago pelos dois, ultrapassava o cobrado pelo taxista pela corrida.

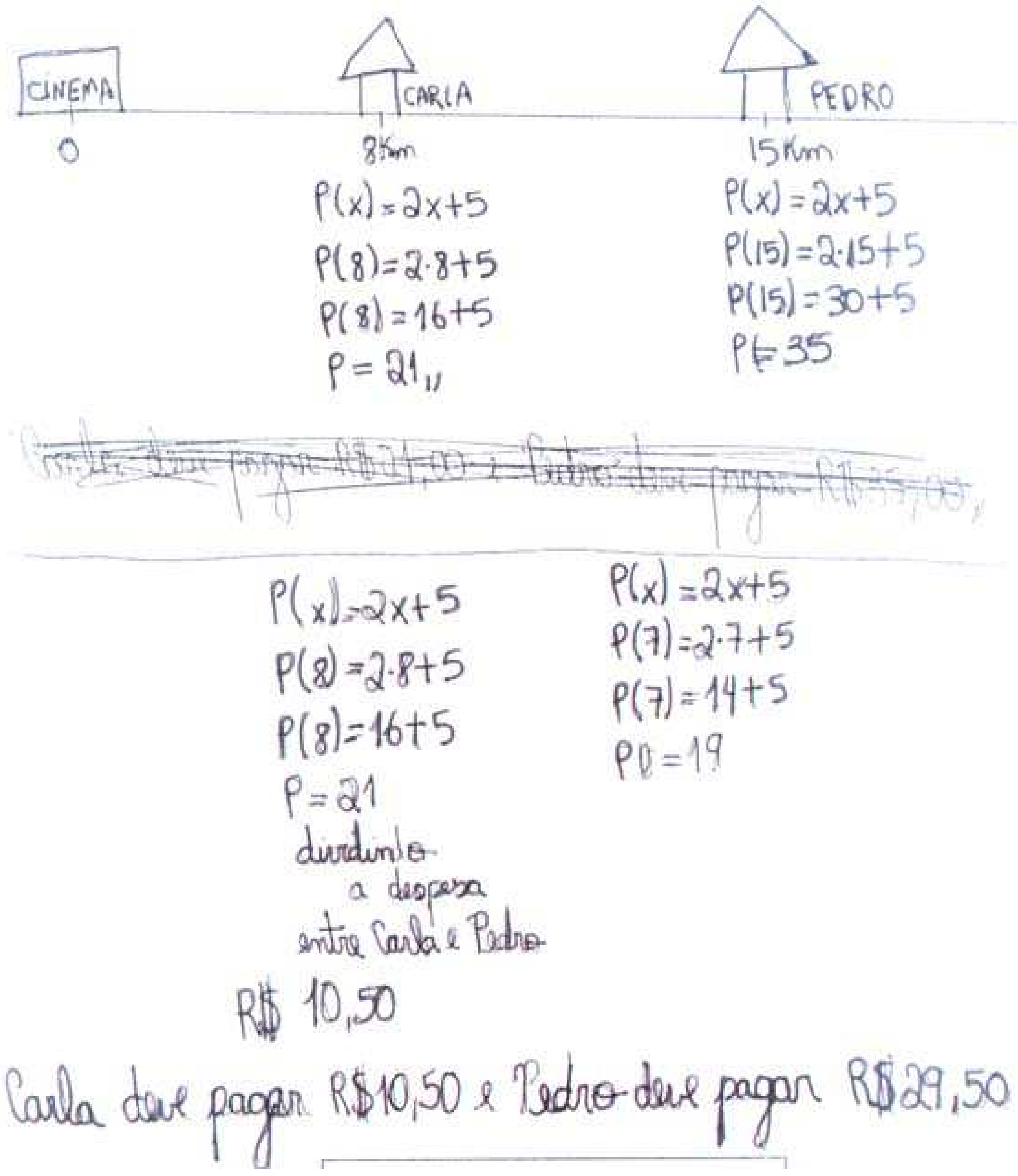


Figura 20 – Resolução da questão 2 do aluno *A9*

Tabela 4 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 2

Crédito	Número de provas	Função	Cálculo Aritmético	Uso de função como equação	Porcentagem e/ou regra de três
Completo(2)	10	10	-	-	-
Parcial(1)	23	20	01	-	02
Nenhum(0)	11	05	01	05	-
Total	44	35	02	05	02

Como a própria questão já sugeria, a maioria dos alunos, trinta e cinco (35) utilizou a função, cuja lei de formação aparecia no enunciado, embora outros cinco (5) tenham-na confundido com uma equação. Dois (2) alunos utilizaram-se de regra de três e porcentagem, e, apenas dois (2) apresentam cálculos aritméticos, deixando transparecer que tinham compreendido a função.

Todos os alunos que apresentam características da manifestação do pensamento algébrico mais desenvolvido apresentam marcas de conteúdos compatíveis com seu nível de escolaridade, pois utilizaram função para a resolução, conteúdo este que consta do programa de matemática e dos livros didáticos do Ensino Médio.

Não apresentam erros

Os alunos A2 (resolução apresentada anteriormente) e A10 resolveram o problema corretamente, embora de forma e com respostas diferentes. Atividades deste tipo, que permitem diferentes resoluções e respostas, instigam os alunos e proporcionam seu crescimento devido às discussões que podem surgir na validação e correção da questão, embora estas não sejam freqüentes em sala de aula.

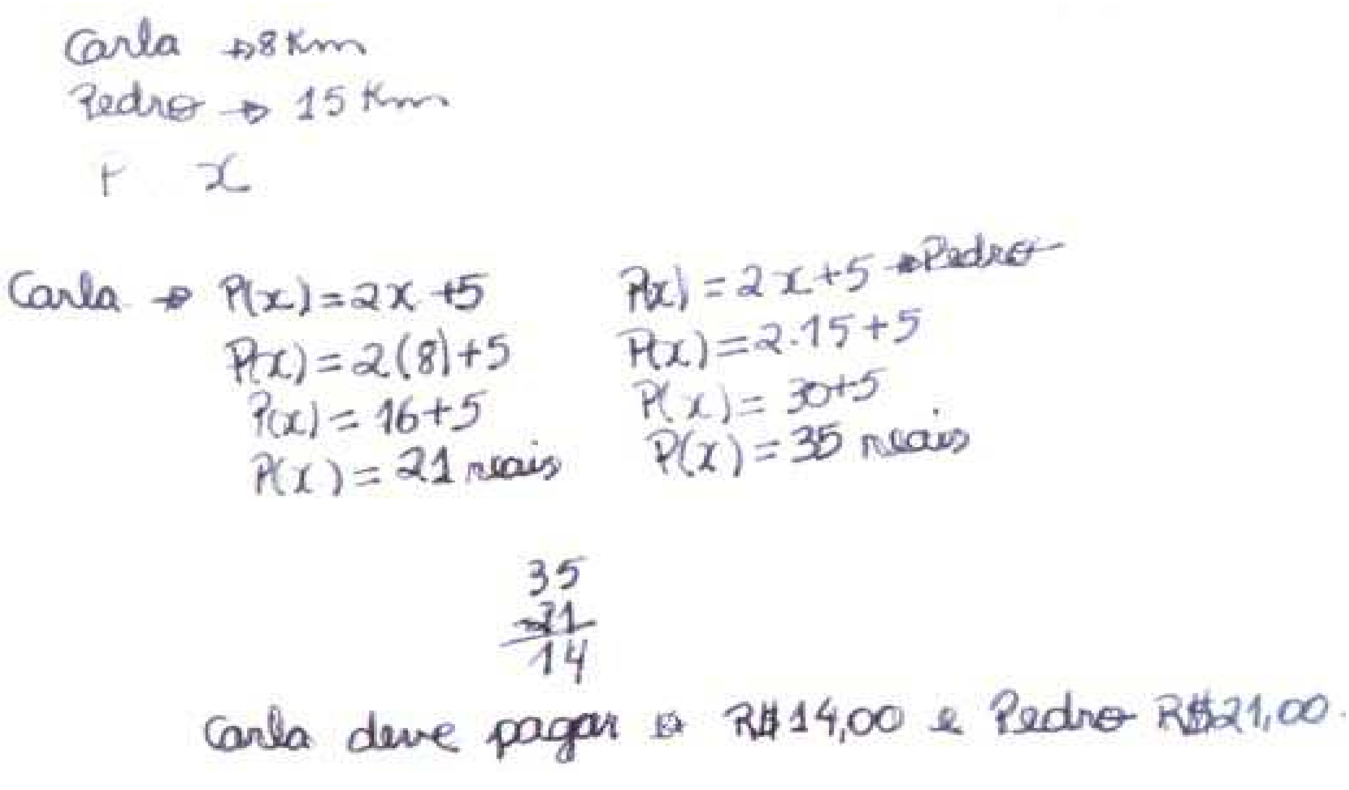


Figura 21– Resolução da Questão 2 do aluno *A*10

Questão 3

Esta questão era comum à 4ª série, à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio.

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Iniciou-se a análise desta questão com o quadro da caracterização das manifestações do pensamento algébrico.

Fase	Alunos	Justificativa
Pré-algébrico	A1, A17, A22, A25, A26, A27, A34, A36, A38, A40, A44	Os alunos utilizaram algum símbolo algébrico porém não o identificaram, usando-o mecanicamente, sem significado.
Transição	A2, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A16, A18, A19, A20, A21, A23, A24, A28, A29, A30, A31, A32, A33, A35, A37, A39, A41, A42, A43,	Os alunos perceberam que havia uma constante a partir do segundo dia (7 telegramas) e, ainda que por tentativa, estabeleceram um processo, chutando o primeiro número e, daí por diante, somando 7 e, em seguida, fazendo a verificação.
Pensamento algébrico mais desenvolvido	A2, A3, A4, A5, A6, A8, A15	Os alunos demonstraram, pela forma como resolveram e registraram, capacidade de pensar e se expressar algebricamente, utilizaram linguagem simbólica e operaram corretamente.

Quadro 5 – Caracterização dos registros dos alunos na Questão 3 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico.

Tabela 5 – Freqüência de produção dos alunos na Questão 3 em relação às características das manifestações do pensamento algébrico

Fase	Nº de registros	Porcentagem
Pensamento Pré-algébrico	11	25%
Transição	26	59,1%
Pensamento Algébrico mais desenvolvido	07	15,9%
Total	44	100%

Pelos registros apresentados, o índice da fase de transição mostra-se bastante expressivo e, por se tratar de alunos do Ensino Médio, pode demonstrar: que mais da metade não tem entendido a álgebra ensinada na escola; que praticam o ensinado apenas mecanicamente, não sabendo efetivamente utilizá-la; ou que os conhecimentos escolares pouco os têm auxiliado e, desse modo, quando se deparam com problemas para resolver, recorrem a tentativas e buscam improvisar 'jeitinhos'. Os registros revelam que os alunos, primeiramente, recorrem aos cálculos aritméticos e apresentam procedimentos próprios, muitas vezes, saindo-se muito bem, pois são criativos ao lidar com as informações, aspecto este que, de um modo geral, não tem sido estimulado ou mesmo valorizado na escola.

Exemplos de algumas produções dos alunos na resolução da Questão 3

Fase do pensamento pré algébrico

O aluno A22 utilizou letras (elementos algébricos), porém não atribuiu a elas sentido algum, quer seja como constante, variável ou incógnita e parece utilizá-las como abreviaturas apenas. Realiza alguns cálculos aritméticos que não resolvem o problema.

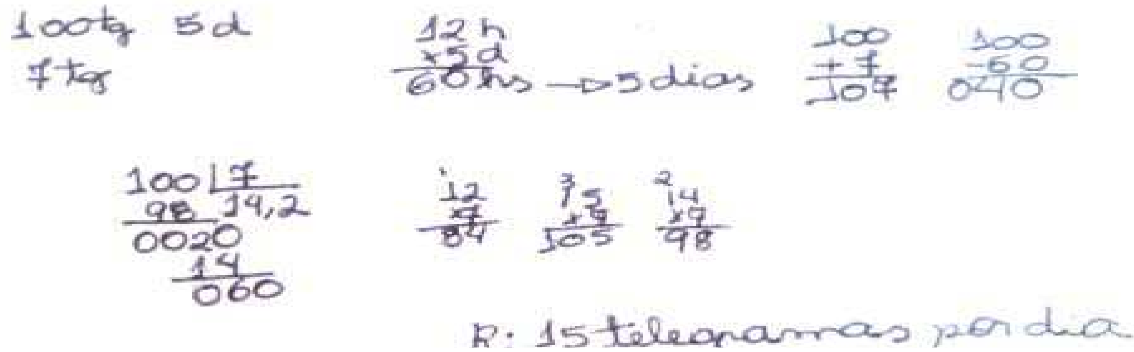


Figura 22 – Resolução da Questão 3 do aluno A22

. A figura, a seguir, mostra a resolução da Questão 3 do aluno A27, na qual ele apresenta cálculos aritméticos e, ao responder, utiliza também uma letra, evidenciando-a, apenas, como abreviatura de telegrama.

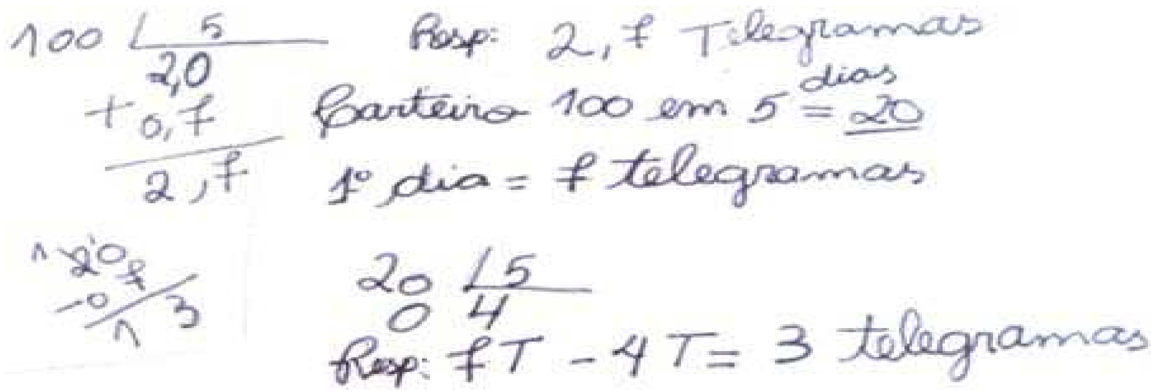


Figura 23 – Resolução da Questão 3 do aluno A27

Fase de transição

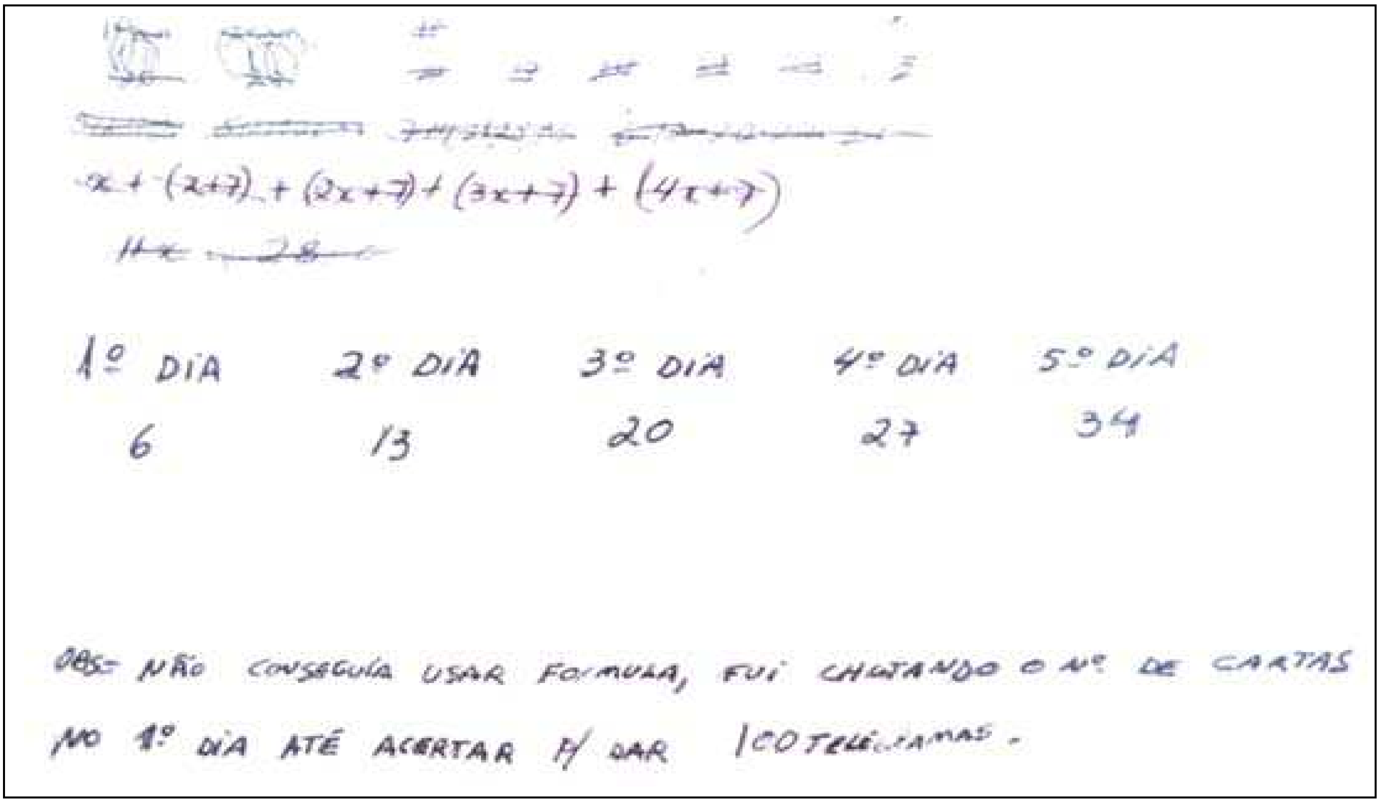


Figura 24 – Resolução da Questão 3 do aluno A19

O aluno A19 tentou resolver algebricamente e, não conseguindo, possivelmente, estabeleceu algum processo que não registrou, mas respondeu corretamente.

Na figura 25 da resolução da Questão 3, do aluno A33, observa-se que ele fez uma primeira tentativa, começando com 3 telegramas, no primeiro dia, e aumentando 7, sucessivamente, até o quinto dia. Possivelmente, somou mentalmente e percebeu que era pouco, pois não registrou a soma total. Repetiu o mesmo processo, acrescentando mais um no primeiro dia e, por meio da soma total verificou que ainda era pouco, prosseguiu, então, até que obteve a soma total, dos 100 telegramas, encontrando a resposta correta.

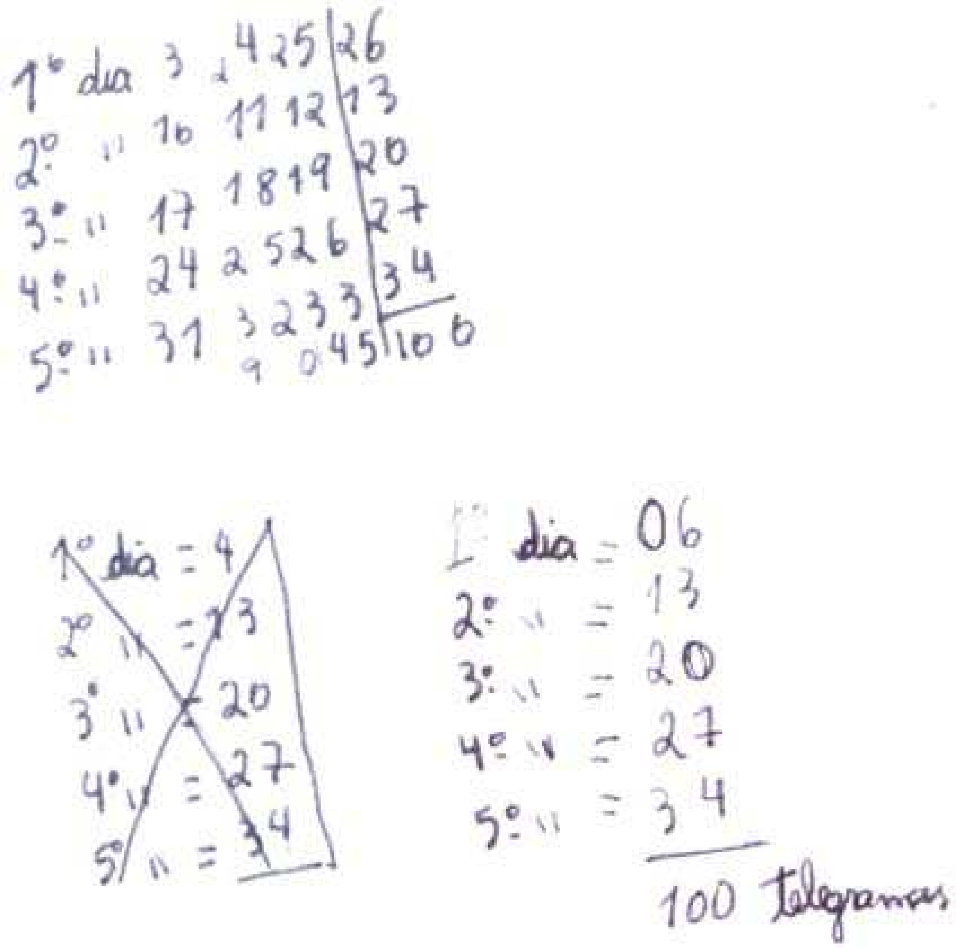


Figura 25 – Resolução da Questão 3 do aluno A33

Fase do pensamento algébrico mais desenvolvido

O aluno A4 demonstra, em seu registro, capacidade de pensar e de se expressar algebricamente, mostrando habilidade em operar com a linguagem simbólica. Este aluno também apresenta marca de conteúdos escolares compatíveis com seu nível de escolaridade.

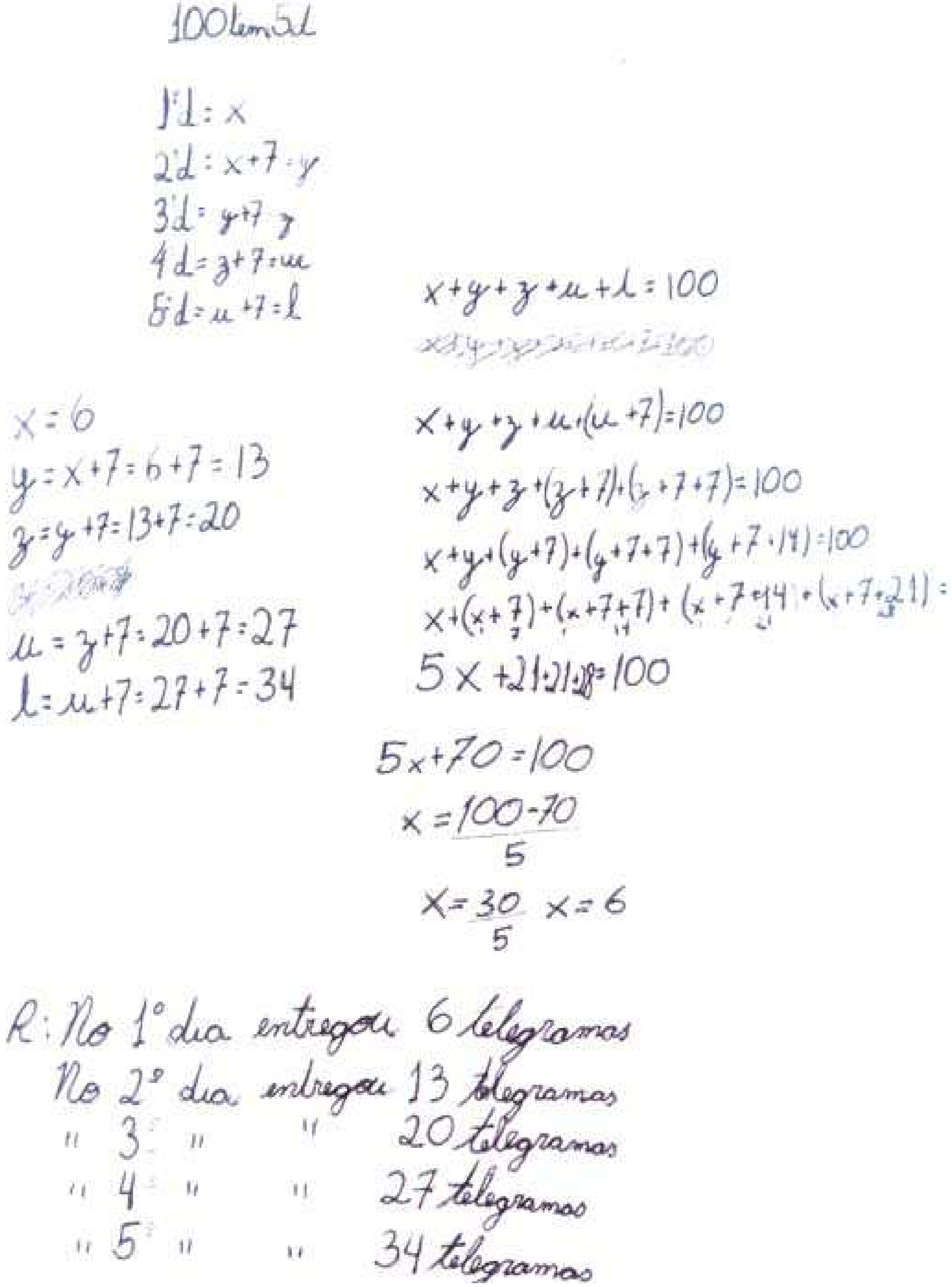


Figura 26 – Resolução da Questão 3 do aluno A4

Estudando-se os registros da terceira questão, observou-se equívocos relacionados à compreensão e interpretação, não havendo erro algum por distração. O quadro elaborado a seguir mostra a distribuição dos erros encontrados.

Erros	Alunos	Justificativa
Compreensão	A_1, , A_2, A_{17}, A_{22}, A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{29}, A_{32}, A_{34}, A_{36}, A_{38}, A_{40}, A_{44}	Os alunos parecem não entender que 100 foi o total de telegramas entregues e/ou que o número de telegramas entregues foi diferente em cada dia.
Interpretação	A_{14}, A_{37}, A_{39}, A_{41}	Os alunos compreenderam o problema, porém cometeram equívoco na interpretação, dividiram 100 por 5 e subtraíram 7 do resultado, atribuindo 13 ao primeiro dia somando 7 consecutivamente aos demais dias, possivelmente, teriam percebido o equívoco se fizessem a validação.

Quadro 6 – Erros detectados nos registros das produções dos alunos na Questão 3

Verificando algumas produções dos alunos

Erro de compreensão

Na figura 27, pode-se ver que o aluno A_2 apresenta um registro organizado, do tipo escolar, 'do jeito que professor gosta': identificou uma progressão aritmética, escreveu seus termos, embora confundindo a soma da progressão com o último termo. Demonstra equívoco na compreensão das informações do problema, ou seja, entendeu 100 como o total do 5º dia e não como o total de telegramas entregue nos cinco dias.

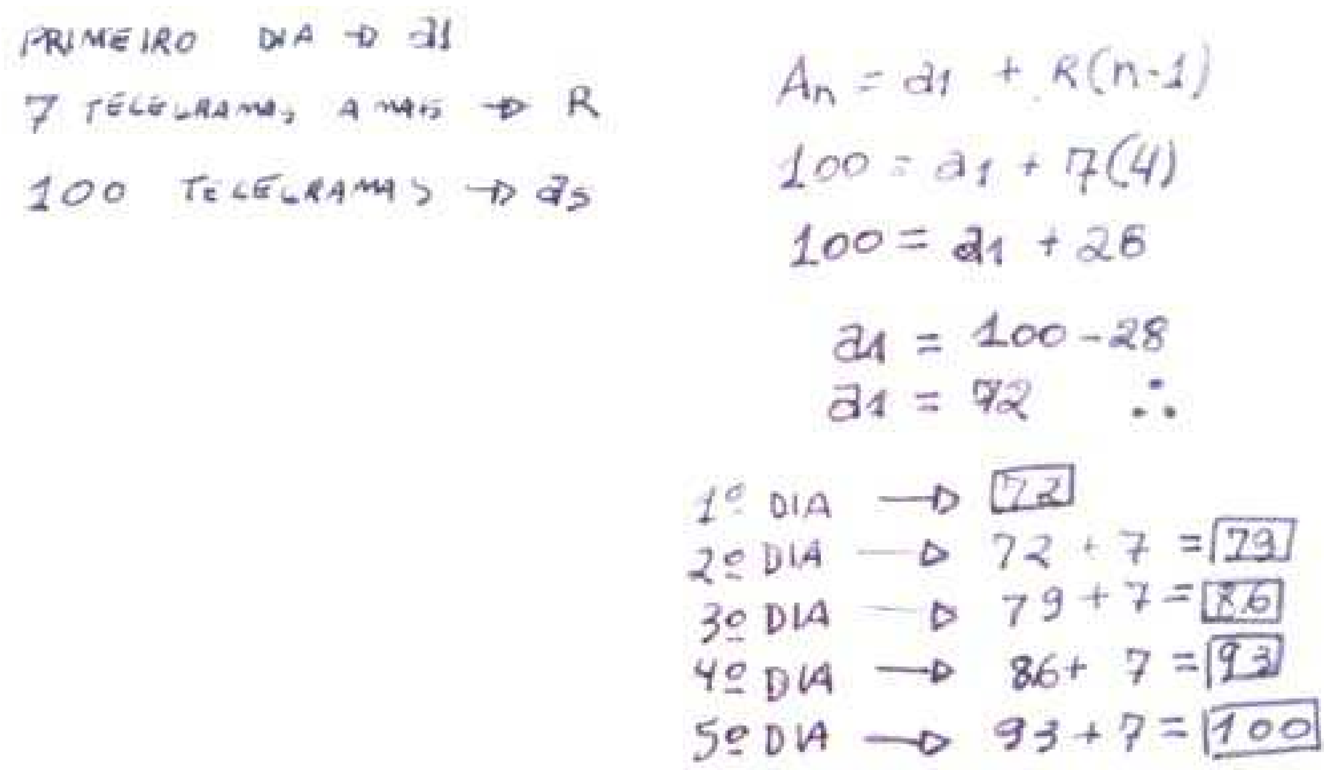


Figura 27 – Resolução da Questão 3 do aluno A2

Erro de interpretação

Pelo registro da figura 28, a seguir, o aluno A37 demonstra ter compreendido o problema, pois identificou e retirou corretamente os dados relevantes, porém não interpretou corretamente, ou seja, não encaminhou de forma adequada as informações. Provavelmente teria detectado o erro se tivesse feito a verificação dos resultados, pois perceberia que o total alcançado ultrapassa os 100 telegramas distribuídos.

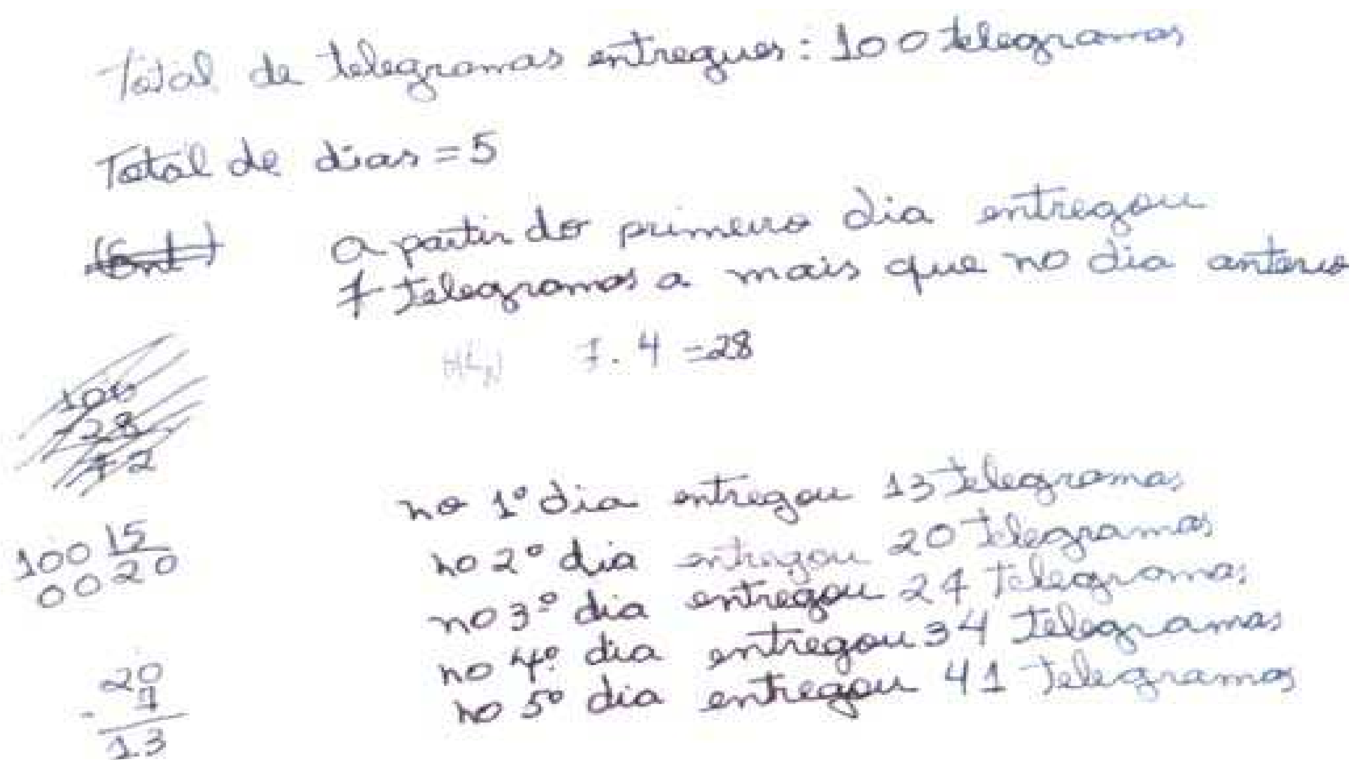


Figura 28 – Resolução da Questão 3 do aluno A37

Tabela 6 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 3

Crédito	Nº de provas	Tentativa	Cálculo e tentativa	Equação	PA	Proporção	Cálculo Aritmético	Nenhum Cálculo
Completo(2)	24	19	01	04	-	-	-	-
Parcial (1)	02	01	-	-	01	-	-	-
Nenhum (0)	18	02	02	01	01	01	10	01
Total	44	22	03	05	02	01	10	01

Nesta questão, a maioria dos alunos também buscou a tentativa como forma de resolução, dez (10) apresentaram cálculos aritméticos e alguns deles utilizaram equação e Progressão Aritmética. Mais uma vez, os alunos demonstram que, primeiramente, recorrem aos cálculos aritméticos apresentando procedimentos próprios para resolução dos problemas.

Quanto às marcas de conteúdos compatíveis com o nível de escolaridade, foi possível observar que apenas seis alunos as apresentaram, sendo que cinco deles resolveram por meio de equação e apenas um utilizou Progressão Aritmética, que é conteúdo específico desse nível de escolaridade.

Não apresentaram erros

A resolução da Questão 3 do aluno A3 mostra-se bastante criativa. Primeiramente, escreveu os cinco primeiros termos de uma Progressão Aritmética e efetuou uma soma, em seguida, resolveu a equação e encontrou o valor do primeiro termo. A partir deste, encontrou os demais termos da Progressão Aritmética, resolvendo o problema. Este aluno demonstrou habilidade em sua estratégia ao realizar a soma da Progressão Aritmética sem a utilização de sua fórmula, o que revela que compreendeu o conteúdo de forma significativa e não mecânica.

Aos alunos precisam ser oportunizadas situações nas quais possam trabalhar de tal forma, em sala de aula, que desenvolvam a criatividade e a capacidade de conjecturar e elaborar sua próprias estratégias para resolução de problemas, o que só acontece quando compreendem, de fato, o conteúdo, quando o mesmo tem significado para ele.

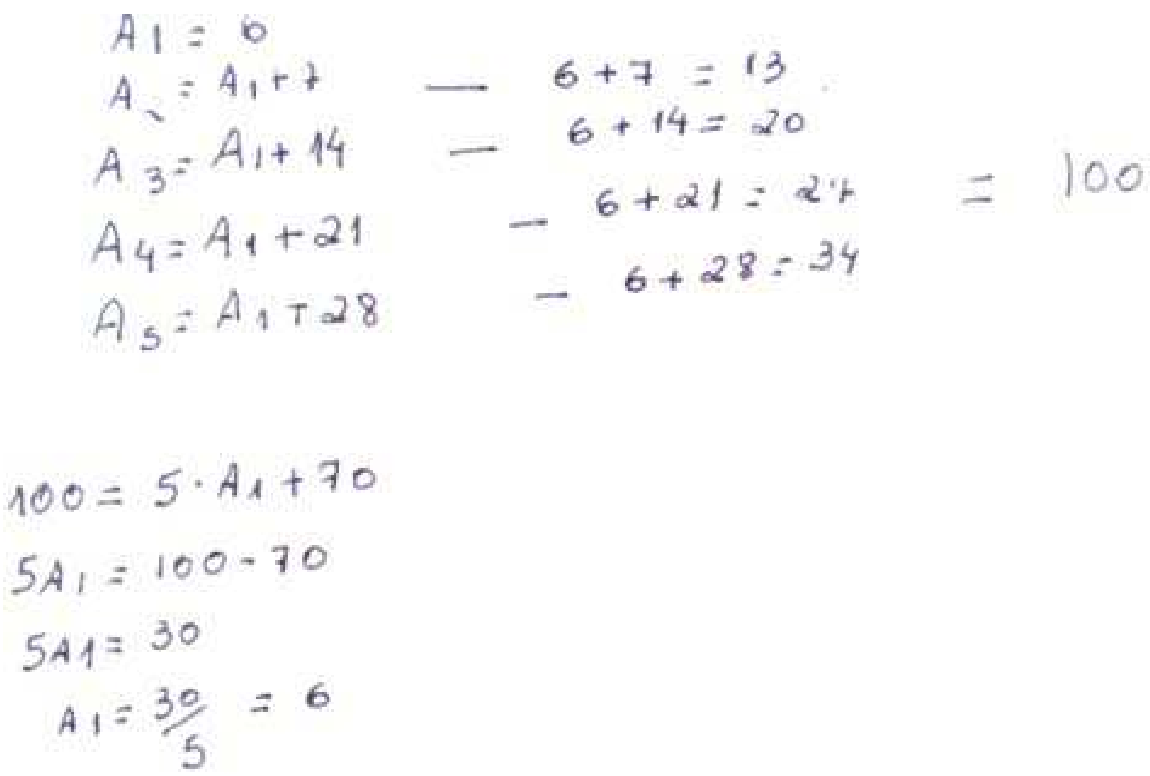


Figura 29 – Resolução da Questão 3 do aluno A3

A resolução da Questão 3 do aluno A5, apresentada a seguir, mostra que dividiu 100 por 5, encontrando a média de telegramas, colocando o valor encontrado no terceiro dia, que é o termo médio dos cinco dias. Depois, acrescentou 7 telegramas nos dois últimos dias e diminuiu 7 nos dois primeiros. Esta ‘criatividade’ precisa ser incentivada na escola, pois, muitas vezes, é tolhida. Possivelmente, se fosse uma prova para avaliar o conteúdo de Progressão Aritmética o professor não aceitaria a resolução.

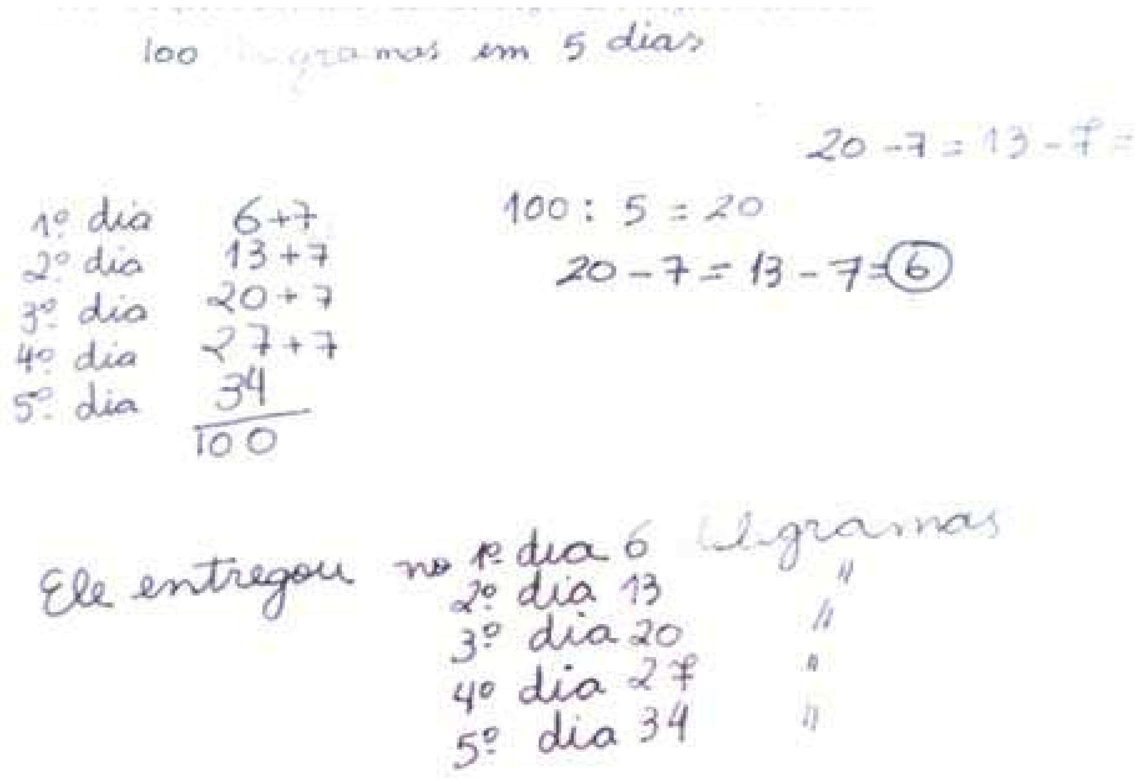


Figura 30 – Resolução da Questão 3 do aluno A5

Análise Vertical

Fazendo uma leitura vertical das produções, ou seja, observando as três produções escritas de cada aluno, foi possível fazer algumas inferências:

- alguns alunos, como A2, A4, A5, A6, apresentaram características do pensamento algébrico bem desenvolvido nas três produções.
- os alunos A3, A7, A8, A10, A14, A15 apresentaram características do pensamento algébrico bem desenvolvido em duas questões e características da fase de transição na terceira. Como eles resolveram essa questão por

tentativa, é possível inferir que tenham, de fato, um pensamento algébrico bem desenvolvido.

- os alunos A19 e A21 apresentaram características da fase de transição nas produções da primeira e da terceira questão, enquanto que, na segunda, as características são de pensamento bem desenvolvido. Levando-se em conta que a segunda questão trouxe a lei de formação da função em seu enunciado, pode-se inferir que esses alunos estejam mesmo na fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico.
- uma parcela razoável de produções dos alunos apresentou características das três fases, uma em cada questão, isto nos alerta e, evidencia, mais uma vez, a responsabilidade do professor na hora de avaliar e emitir julgamentos. Um processo de avaliação com base em poucas evidências e, por vezes, em apenas uma, pode ser injusto, como é o caso quando se aplica apenas um instrumento, ou mesmo, quando vários são utilizados para se fazer, depois, uma média ao invés de se retomar os conteúdos e se recuperar as defasagens detectadas.
- na Questão 2, o aluno A18 cometeu um equívoco e este foi classificado como um possível erro de distração. Ao analisar a prova como um todo, observou-se que esse foi o único erro de cálculo cometido pelo aluno na prova toda, o que permite inferir que, de fato, este não percebeu, quando da resolução da questão, a falta do algarismo da dezena, pois deveria escrever o número 15, mas colocou apenas o algarismo 5 da unidade.
- estas inferências foram feitas sobre a leitura das produções escritas dos alunos e forneceram informações significativas que sinalizam uma parte da realidade do processo ensino/aprendizagem, bem como alertam para

algumas práticas que devem ser desenvolvidas em sala. Por exemplo, trabalhar, de forma diferenciada, a leitura e compreensão em sala de aula, uma vez que grande parte dos alunos cometeu erros de compreensão. É difícil entender e aceitar isso, pois a escola básica, em seus primeiros quatro anos, diz trabalhar especificamente a leitura e a compreensão, porém, nossos alunos continuam mostrando, nos resultados das avaliações, que não sabem compreender e, muito menos, interpretar. As avaliações precisam ser praticadas não mais como instrumento de atribuição de notas ou conceitos, mas como instrumento de investigação, pelo qual seja possível obter informações sobre a aprendizagem do aluno para auxiliá-lo na superação de suas dificuldades, de modo que possa crescer e progredir intelectualmente.

SECÃO VII – DAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação contribuiu, e muito, para o meu crescimento profissional, pois me possibilitou tomar a avaliação como um processo investigativo, o que me levou a uma mudança de concepção sobre a presença do erro nas produções dos alunos. Fez-me despertar para vários aspectos do trabalho que, tanto eu quanto os demais professores, realizamos em sala de aula e para o qual não temos dado a necessária atenção. Alertou-me e levou-me a refletir sobre a prática que se realiza em sala de aula, impregnada de treino mecânico, uma ‘matemática obsoleta’, como chama D’Ambrosio (1996), e que parece pouco estar contribuindo para a aprendizagem de nossos alunos. Por conseguinte, espero poder contribuir com os professores que atuam em sala de aula e que se encontram ‘inquietos’ quanto a sua prática, sentindo necessidade de mudanças também nas práticas avaliativas, e, que priorizam a aprendizagem de seu aluno no processo educativo.

A experiência da realização desta pesquisa me levou a compreender que o que eu fazia, ao buscar estratégias, procedimentos e materiais diferenciados era um esforço para modificar a minha prática e não exatamente uma pesquisa, pois, como afirma D’Ambrosio (1996), pesquisa é o elo entre a teoria e a prática.

> Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados. Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática (D’AMBROSIO, 1996, p.79).

Por conseguinte, concordo com D'Ambrosio quando afirma que o papel do professor não pode mais ser o de simples transmissor do conhecimento, como fiz por tanto tempo, mas sim,

> [...] o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa (D'AMBROSIO,1996, p. 80).

Lüdke (1986) afirma que é preciso aproximar a pesquisa da vida diária do professor, seja qual for o âmbito em que atue, tornando-a um instrumento de enriquecimento de seu trabalho, para que ele passe a ser um investigador de sua própria prática.

Hoje, não se concebe mais a idéia de um professor que não seja um investigador de sua própria prática, pois, ao analisar as produções dos alunos, questionar sobre as suas estratégias, instrumentos, forma de ensinar e avaliar, proporciona, aos seus alunos, condições para superar suas dificuldades e, assim, construir seus conhecimentos.

Também Alarcão diz:

> Realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aula meras hipóteses de trabalho a confirmar ou infirmar no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didáticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas (ALARCÃO, 2001, p. 24).

Por um lado, o professor, ao realizar uma investigação sobre sua prática, encontra alternativas para a solução dos problemas e estas podem ser compartilhadas e melhoradas com a colaboração dos parceiros de trabalho, promovendo, assim, mudanças na prática letiva, ou seja, sua e de toda a escola e, por que não dizer, da educação (na prática da educação). Tomar então a pesquisa como o elo entre a teoria e a prática constitui-se um grande desafio para todo o professor investigador.

Por outro lado, realizar pesquisa que produza como resultado, primeiramente, soluções de problemas emergentes da própria sala de aula e, posteriormente, de toda a comunidade escolar, alicerça o tão almejado ensino de qualidade, como postulam os PCN (1998, p.45) "um ensino capaz de formar cidadãos que interfiram criticamente na realidade para transformá-la e não apenas para que se integrem no mercado de trabalho".

Tenho claro, agora, que toda investigação, faz-se fundamentada numa teoria que inclui princípios metodológicos, que contemplam uma prática, mas que, por outro lado, todas as teorias têm, como ponto de partida, resultados oriundos de práticas. Portanto, não há como desvincular uma da outra, pois elas interagem num movimento dinâmico, em que novas teorias levam a novas práticas que, conseqüentemente, geram novas teorias e, assim, sucessivamente na produção do conhecimento.

Deste modo, toda investigação traz consigo uma carga de valores, preferências, interesses e princípios que orientam o professor e que será, de certa forma, influenciada pela leitura de mundo que este faz, bem como pelos fundamentos que utiliza para compreensão e explicação do mesmo e pelos pressupostos que orientam o seu pensamento.

Esta pesquisa desvelou, para mim, a possibilidade e a necessidade de se considerar a avaliação da produção escrita e, mais, de tomá-la como um processo investigativo que fornece fortes indícios sobre o estágio de aprendizagem do aluno. O diálogo, elemento chave, ganha importância nesse processo. A análise das produções aqui realizada constituiu-se em uma 'conversa' do investigador com a escrita do aluno e forneceu valiosas informações, o que mostra que o diálogo em sala de aula pode se tornar um instrumento potente para fornecer, ao professor, pistas sobre o desenvolvimento do processo ensino/aprendizagem. A partir do momento que o aluno tiver mais e mais oportunidades de se colocar, expondo suas idéias, pensamentos, dúvidas, conclusões, o professor ganhará tempo, podendo, de fato, auxiliá-lo em sua aprendizagem, obtendo melhores resultados, o que propiciará um ambiente de confiança e de aprendizagem efetiva. Muitas dúvidas podem ser esclarecidas quando existe a oportunidade de se dialogar com o aluno, pois uma observação feita no momento da resolução pode levá-lo a perceber um erro e corrigi-lo. A prática da investigação da produção escrita, intermediada pelo diálogo entre professor e aluno, pode acelerar a aprendizagem do aluno uma vez que permite interação entre eles nos momentos de dúvidas e incertezas.

A análise do erro cometido, tanto em atividades de sala, quanto em instrumentos de avaliação, pode propiciar ao aluno uma crescente conscientização e motivação para sua superação. Como pôde se constatar nesta pesquisa, a maior parte dos erros cometidos está relacionada à compreensão e interpretação dos enunciados dos problemas e não aos cálculos ou conteúdos matemáticos propriamente ditos, o que torna injusto um resultado atribuído a um determinado número de erros sem que uma análise deles seja feita e considerada.

Por isso, o professor deve preocupar-se e habituar-se a fazer uma análise, não apenas horizontal das produções de seus alunos, caso queira compará-las, mas também uma análise vertical, pois esta lhe permite ter uma visão mais completa e real do estágio de aprendizagem em que os alunos se encontram. Esta análise pode revelar, como observado nesta investigação, que um erro em uma determinada atividade pode não ter ocorrido em outra, e, portanto, é injusto dizer que o aluno não sabe, bem como tirar nota por esse erro. A análise horizontal permite, ao professor, um perfil de sua turma, enquanto a vertical, um perfil de seu aluno e de seu real estágio de aprendizagem, sendo ambas importantes.

Com relação aos erros cometidos, para que o professor seja parceiro de seu aluno no processo de aprendizagem, é necessário que, primeiro busque entendê-los, interessando-se pelo que os motivou e, principalmente, que encare a sua existência como parte do processo, estando consciente de que tanto o aluno, quanto o professor estão sempre em situação de aprendizagem. Não se pode ignorar que, por trás de um erro do aluno, pode estar um erro do próprio professor, uma vez que este também está aprendendo e, naturalmente, está também sujeito a erros. É importante que o professor avalie também a sua própria aprendizagem e reflita sobre seus próprios erros, encarando-os como um caminho a ser explorado.

A partir desta pesquisa ficou evidente a necessidade de um trabalho desenvolvido pelo professor em sala de aula que proporcione mais oportunidades de leitura, interpretação e discussão, nas quais o aluno possa se expor e trocar idéias, tanto com os colegas quanto com o professor; contemplando atividades desafiadoras, que necessitem mais do que um modelo decorado de resolução, exigindo do aluno desenvolver, testar e discutir idéias e procedimentos próprios ou não. Isto não é uma novidade, pois há tempos que já vem sendo apontado como necessário, porém não se constitui, ainda, como prática efetiva.

Ao analisar os registros dos alunos, também ficou evidenciado que um número considerável deles não soube gerenciar as informações contidas nos problemas. Retiraram as informações, porém tiveram dificuldade, ou não conseguiram dar um encaminhamento correto a elas. No entanto, aqueles que trabalharam corretamente com as informações fizeram-no de forma organizada.

A proposta de resolução de problemas pode favorecer as interações aluno/aluno, aluno/professor, aluno/conteúdo, professor/conteúdo. O que se percebe é que muitos dos conteúdos são trabalhados em sala de aula, sem que a devida compreensão aconteça o que dificulta a aprendizagem.

Nas produções investigadas foi marcante o fato da grande maioria dos alunos não apresentar a validação dos resultados obtidos. Caso tivesse sido feita, provavelmente, teria possibilitado que muitos deles detectassem o erro cometido e retomassem a questão, corrigindo-a. Este é um hábito que deve ser desenvolvido em sala de aula, pelos professores, pois parece que os alunos não estão acostumados a isso. Alguns fizeram a prova real de algumas operações. Um trabalho de esclarecimento da diferença entre 'prova real' e validação deve ser feito em sala de aula. Verificou-se que alguns deles, após realizarem as operações aritméticas fundamentais, tiraram a 'prova real' delas, porém não analisaram se os resultados obtidos com as operações eram cabíveis, principalmente, na segunda e terceira questão, Na segunda questão, encontraram valores, para os dois amigos, que ultrapassava o valor total da corrida, mas não analisaram se as respostas eram coerentes, ou seja, não validaram as respostas. É importante que os alunos se habituem a analisar se os resultados obtidos são coerentes, se eles servem como resposta ao problema ou não, e se o problema admite uma única resposta ou não. Na resolução de um problema, a 'prova real' garante que o resultado de uma operação aritmética esteja correto, mas não garante que este resultado correto da operação seja a resposta correta para o problema.

Um número considerável de alunos deixou de receber crédito completo pelo fato de não ter apresentado resposta para a questão, embora a tivessem resolvido corretamente. Ficou evidente, nas produções, que os alunos parecem confundir o resultado das operações com a resposta do problema, pois os que não a apresentaram parecem ter considerado o valor obtido como resposta. Vários alunos fizeram cálculos corretos e, principalmente, nas resoluções nas quais utilizaram equação, função, destacaram, de alguma forma, o valor encontrado para a incógnita ou para a função, mas não colocaram uma resposta à pergunta do problema, o que , usualmente, se faz por meio de uma frase ou algo do tipo.

Isto, provavelmente, se deve ao trabalho que se realiza em sala de aula, principalmente, a partir da 5ª série, no qual o professor trabalha os conteúdos, geralmente, por meio de resolução de exercícios 'soltos' desvinculados de problemas e, em lugar de escrever uma resposta, apenas destaca o valor obtido no final das resoluções. É habitual fazer o mesmo quando a resolução de algum problema envolve, por exemplo, equação do 1º ou do 2º grau, ou, ainda, uma função. Isto pode estar levando os alunos a pensarem que o resultado equivale à resposta ou, o que parece mais prejudicial, que ela é pouco importante na resolução do problema.

Na resolução da Questão 1, verificou-se que a maioria dos alunos apresenta dificuldade de escrita, não sabendo se expressar matematicamente. O aluno *A*19 é um exemplo claro disto pois respondeu **t=3**, **t=4** em lugar de responder **t ≥ 3**, uma vez que a pergunta pedia para quais valores de **t** o encanador **A** fica mais barato que o **B**.

Ainda nesta questão, verificou-se que, das 44 resoluções, apenas uma considera o tempo e seus submúltiplos. O fato de apenas um aluno ter considerado as horas e um de seus submúltiplos e os demais todos terem considerado apenas as horas inteiras parece relevante, por se tratar de alunos do Ensino Médio.

Ficou evidente, nas produções, que os alunos recorrem, primeiramente, aos cálculos aritméticos, como estratégia para a resolução de problemas, pouco utilizando os conteúdos que teoricamente os professores trabalham em sala de aula na maior parte do tempo.

Observou-se, também, que a grande maioria buscou resolver os problemas por meio de tentativas e procedimentos próprios, pouco se observou de marcas de conteúdos compatíveis com o nível de escolaridade desses alunos. Isto parece apontar que os conteúdos devem ser um meio para se trabalhar com matemática e não um fim.

Um trabalho com questões abertas, pouco desenvolvido em sala de aula, permite ao aluno expor suas idéias e desenvolver a sua criatividade, e, ao professor, fazer um acompanhamento da real situação de aprendizagem, uma vez que o aluno registra os caminhos que percorre e também a forma como pensou no momento da resolução.

A Questão 2 que admite diferentes respostas corretas, é uma sugestão de atividade que muito contribui para a discussão, troca de idéias e que, portanto, deveria ser aproveitada na sala de aula. Por meio dela também se pode discutir alguma noção de justiça. Este é um bom exemplo de que as atividades de avaliação devem ser também atividades de aprendizagem, em sala de aula.

Como as questões analisadas se situam no campo da álgebra, o fato de poucos alunos terem dela se utilizado nas resoluções parece evidenciar que o trabalho com este conteúdo na escola, precisa ser repensado, pois parece não estar sendo significativo. As definições de incógnita e variável parecem não estar claras para os alunos, uma vez que, dos que utilizaram a álgebra observou-se que vários trabalharam com uma função como se fosse uma equação, o que aponta para a necessidade de um repensar o assunto.

Os índices apresentados na caracterização das manifestações do pensamento algébrico para a primeira questão, ou seja: 45,5% na fase do pensamento pré-algébrico e 38,6% na fase de transição do pensamento aritmético para o algébrico, são bastante significativos, pois se trata da produção de alunos do Ensino Médio. Os professores ‘supõem’ que os alunos desse nível de escolaridade já possuem um pensamento algébrico bem desenvolvido, uma vez que trabalham com álgebra desde a sexta série do Ensino Fundamental. Os índices encontrados parecem evidenciar que o esperado pelos professores está muito longe da realidade da sala de aula e que o ensino que está sendo realizado na escola não tem alcançado os alunos, o que não pode mais ser ignorado.

O exercício da prática desta pesquisa foi muito gratificante, porém com algumas limitações, e a maior delas foi a impossibilidade de dialogar com os alunos que resolveram a prova. Esse diálogo é uma rica oportunidade que o professor tem a seu dispor em todas as aulas, uma vez que está em contato direto com o aluno, mas parece que não tem sido efetivado ou aproveitado como instrumento de aprendizagem. A partir do momento que o professor estabelecer o diálogo dentro da sala de aula poderá acompanhar dúvidas e dificuldades de seu aluno e, de fato, interagir no seu processo de aprendizagem.

Espero, com este trabalho, provocar algumas reflexões, por parte dos professores, tais como:

- ✓ como cada professor encara sua própria prática em sala de aula?
- ✓ a avaliação é tomada como um processo ou apenas como um instrumento?

- ✓ o erro é considerado como parte do processo de aprendizagem ou como algo que não deveria ocorrer?
- ✓ as produções escritas dos alunos estão sendo analisadas e delas estão sendo retiradas contribuições para o enriquecimento do processo ensino/aprendizagem?

Este estudo configura-se como uma contribuição para se pensar em uma maneira diferente de olhar para a avaliação que ocorre na aula de matemática. Acreditando que para haver mudanças na ação do professor, antes será necessário que cada um faça algum movimento na direção de inquirir a si próprio sobre o que de fato faz ao ensinar/aprender/avaliar em sala de aula. Essa reflexão pode ajudar no processo de constituição do professor que ensina matemática e que se coloca, efetivamente, como parceiro do seu aluno.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, Isabel. Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B.P. CAMPOS (Org.). **Formação profissional de professores no ensino superior** (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora. 2001.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luis Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**. Trad. Maria J. Alvez, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - ensino de 5ª a 8ª série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Avaliação em Matemática:** um estudo das respostas de alunos e professores. Marília. Tese de Doutorado. Orient. Prof. Dr. Cosme Damião Bastos Massi – Universidade Estadual Paulista – UNESP. 1999.

___________ Algumas considerações sobre avaliação educacional. In:**Estudos em Avaliação Educacional**. Fundação Carlos Chagas, nº 22, jul/dez, São Paulo, 2000.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro**. Manual para correção das provas com questões abertas de matemática AVA – 2002**. Curitiba, SEED/CAADI, 2003.

CURY, Helena Noronha**.** Concepções sobre a matemática e práticas avaliativas: as possíveis relações. In: **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 14, p. 65-82, jul./dez. 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 8 ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.

DEPRESBITERIS, Lea; TAURINO, Maria do Socorro. O difícil percurso de um educador no mundo dos critérios de avaliação. In: **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 14, p. 65-82, jul./dez. 1996.

ESTEBAN, Maria Teresa. A avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, M. T. (Org.). **Avaliação**: uma prática em busca de novos sentidos. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A Editora, 2001.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTÓVÃO, Eliane Matesco. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In:Seminário Luso-Brasileiro. **Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores**. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 25-26/jul/2005.

disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminário_lb.htm capturado em 28/08/06 às 15:30 horas.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. In**: Pro-Posições,** Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp, Vol.4, nº 1 [10]. Campinas: Cortez Editora, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Algumas concepções de educação algébrica: fundamentos para repensar o ensino da matemática elementar. **Anais do III Encontro Paulista de Educação Matemática**. P.29-35. Bauru: SBEM-SP, 1993.

FREITAS, Henrique Mello Rodrigues de; JANISSEK, Raquel. **Análise Léxica e Análise de Conteúdo**: técnicas complementares, seqüenciais e recorrentes para exploração de dados qualitativos. Porto Alegre: Sphinx: Editora Sagra Luzzatto, 2000.

GARCIA, Regina Leite. **A avaliação e suas implicações no fracasso/sucesso das classes populares na escola**. Texto apresentado na 21ª Reunião Anual da ANPED – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - 1998.

HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Portugal: Porto Editora, 1994.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

National Council of Teachers of Mathematics. **Normas para a Avaliação em Matemática Escolar**. Tradução Lisboa: Associação Portuguesa de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

OLIVEIRA, Eliana de; ENS, Romilda Teodora; ANDRADE, Daniela Freire; MUSIS, Carlo Ralph DE. **Análise de Conteúdo e Pesquisa na Área da Educação**. (Programa de pós-graduação em Educação, Psicologia da Educação). PUC – São Paulo, 2004

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Resultados da Avaliação Escolar.** Curitiba:SEED, 2001.

QUEIROZ, Ana Albuquerque. **Análise de Conteúdo**: para orientação dos estudantes do quarto ano. Disponível em www.anaqueiros.com acessado em 26/03/04 às 8:00 horas.

SCHOENFELD, Alan. **Mathematical problem solving**. New York, NY : Academic Press, 1985.

SOUSA, Clarilza Prado de. **Dimensões da Avaliação Educacional**. Artigo apresentado na reunião da CPLP Conferência dos Países de Língua Portuguesa, Rio de Janeiro, 2000.

SOUZA, Eliane Reame de; DINIZ, Maria Ignez de Sousa Vieira. **Álgebra: das variáveis às equações e funções.** São Paulo: CIAEM – IME/USP, 1996.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As idéias da álgebra**/ organizadores Arthur F. Coxford, Alberto P. Shulte; traduzido por Hygino H. Domingues – São Paulo: Atual, 1994.

VIANNA, Heraldo Marelim. **Avaliação Educacional**: vivência e reflexão. Trabalho derivado da tese de doutorado: Avaliação Educacional e o avaliador. Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo, 1997.

APÊNDICE

APÊNDICE – Tabelas dos conteúdos utilizados em cada questão da Prova e respectiva descrição das resoluções dos alunos

QUESTÃO 1

1- Um encanador **A** cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador **B** cobra um valor fixo de R$ 24,00 mais R$ 36,00 por hora de trabalho. Sendo **t** o tempo, medido em horas, para quais valores de **t** o encanador **A** fica mais barato que o **B** ?

Tabela 2 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 1

Crédito	Número de provas	Cálculo Aritmético	Função	Função e Cálculo Aritmético	Inequação	Apresenta apenas resposta
Completo(2)	12	-	10	-	01	01
Parcial (1)	11	09	-	01	-	01
Nenhum (0)	21	16	01	-	-	04
Total	44	25	11	01	01	06

Na Questão **1,** doze (12) alunos obtiveram crédito completo, respondendo corretamente a questão. Dez (10) deles utilizaram função como estratégia para resolução da questão e apenas um utilizou-se de inequação. Um dos alunos respondeu a questão corretamente sem apresentar registro de cálculo, possivelmente tenha feito em outro local.

Dos onze (11) alunos que obtiveram crédito parcial, nove (09) realizaram apenas cálculos aritméticos, ou seja, utilizaram-se somente das quatro operações, não estabelecendo nenhuma relação com o uso de função ou equação proposto pela questão. Um deles escreveu uma função, mas não a utilizou, e outro apresentou a resposta sem registrar cálculo algum.

A grande maioria, vinte e um (21) alunos, obteve nenhum crédito. Dezesseis (16) deles realizaram operações que em nada resolviam a questão, um escreveu a função do preço de cada encanador, mas não soube trabalhar com elas e quatro (04) apresentaram respostas incorretas, sem registro de resolução.

Concluindo, do total dos quarenta e quatro (44) alunos, vinte e cinco (25) utilizaram, como estratégia/procedimento de resolução, apenas cálculos aritméticos, as quatro operações; onze deles (11) utilizaram função; um usou função e cálculo aritmético; apenas um aluno utilizou inequação e seis (06) responderam sem apresentar registro de resolução.

Dos doze (12) alunos que obtiveram crédito completo, o aluno A_1 não apresentou registro algum de cálculo e deu, como resposta, '*para todos os valores acima de duas horas, sendo que, a cada hora de trabalho acrescentado, a diferença do preço de **B** em relação a **A** aumenta'.* De acordo com a resposta dada é possível que esse aluno tenha feito, mentalmente ou em outro local, o cálculo das três (3) primeiras horas, embora não o tenha apresentado. Chama a atenção o fato do aluno ter feito grifos na pergunta do problema: "Sendo **t** o tempo, medido em horas, para quais valores de **t** o encanador **A** fica mais barato que o encanador **B?**". Isso evidencia que o aluno compreendeu e interpretou corretamente o problema.

Dos alunos que apresentaram resolução, o aluno A_2 foi o único a resolver o problema utilizando inequação. Inicialmente, ele escreveu corretamente as duas funções:

$$A \to V = 60 + 18t$$
$$B \to V = 24 + 36t$$

Em seguida, escreveu e resolveu corretamente a inequação

$$60 + 18t < 24 + 36t$$

obtendo como resultado t > 2. Pela forma de resolução, esse aluno demonstra ter compreendido o problema, pois retirou corretamente todas as informações e apresentou uma resolução compatível com os conhecimentos do Ensino Médio.

Dez (10) alunos resolveram o problema utilizando função, porém, com formas de escrita um pouco diferentes. O aluno *A*3, por exemplo, escreveu as funções:

$$A = 60{,}00 + 18{,}00 / hora$$
$$B = 24{,}00 + 36{,}00 / hora$$

Em seguida, efetuou o cálculo da segunda hora e, para a terceira hora, apenas acrescentou o valor cobrado por hora no valor da hora anterior.

$$18 \times 2h = 36 + 60 = 96 + 18 = 114$$

E também:

$$36 \times 2h = 72 + 24 = 96 + 36 = 132$$

Realizou todos os cálculos na forma vertical e respondeu que '*a partir de três horas o encanador **A** fica mais barato'*. *A*3 demonstrou compreensão e interpretação do problema, registrando os cálculos de forma não convencional, ou seja, não substituindo os valores de h na função, evidenciando que, muitas vezes, os alunos não ficam presos ao formalismo matemático.

O aluno *A*4 escreveu as funções

$$A = 60 + 18t$$
$$B = 24 + 36t$$

Em seguida, efetuou o cálculo da segunda e da terceira, hora para ambos os encanadores, da seguinte forma:

$$EncA = 60 + 18 \times 2$$
$$60 + 36 = 96$$
$$EncA = 60 + 18 \times 3$$
$$60 + 54 = 114$$
$$EncB = 24 + 36 \times 2$$
$$24 + 72 = 96$$
$$EncB = 24 + 36 \times 3$$
$$24 + 108 = 132$$

A resposta dada, neste caso, foi a de que '*o encanador A se mostra mais barato a partir de três horas de serviço'*. Este aluno apresentou uma forma mais organizada de registro, dentro dos padrões convencionais, o que não significa, de forma alguma, que saiba mais que o aluno *A*3.

O aluno *A*5 apresentou sua escrita da seguinte forma:

$$A$$
$$t + 60{,}00$$
$$1h - 18{,}00 + 60{,}00 = 78{,}00$$
$$2h - 36{,}00 + 60{,}00 = 96{,}00$$
$$3h - 54{,}00 + 60 = 114{,}00$$

$$B$$
$$t + 24{,}00$$
$$1h - 36{,}33 + 24{,}00 = 96{,}00$$
$$2h - 72{,}00 + 24{,}00 = 96{,}00$$
$$3h - 108{,}00 + 24{,}00 = 132{,}00$$

Em seguida, respondeu que '*a partir das três horas o encanador A fica mais barato que o encanador B'.* No registro desse aluno, percebe-se que ele utilizou **t,** não como número de horas, mas como valor das horas trabalhadas, o que evidencia compreensão e interpretação correta do problema.

O aluno *A*6 apresenta a mesma interpretação que o aluno *A*5, mas realizou o registro da escrita em forma de tabela. Primeiro escreveu as duas funções:

$A \to 60{,}00 + 18{,}00h$

$B \to 24{,}00 + 36{,}00h$

Em seguida, apresentou os cálculos em forma de tabela, respondendo que *'o tempo em que A ficará mais barato que B é 2 horas e 1 minuto , T ≥ 2 horas e um min'.*

Este aluno apresenta um registro interessante, escreveu duas horas e um minuto, utilizando uma notação decimal e não a notação própria de horas e minutos, ou seja, escreveu 2,01 e não 2:01, é possível que tenha pensado corretamente e nem tenha percebido a notação, uma vez que fez o cálculo do minuto de forma correta.

	t= 1h	t = 2h e 1 minuto	t = 3h
A	60,00 + 36,00 = 78,00	60,00 + 36,00 = 96,00	60,00 + 54,00 = 114,00
B	24,00 + 36,00 = 60,00	24,00 + 72,00 = 96,00 + 0,30=96,30	24,00 + 108,00 = 132,00

O cálculo do preço desse um minuto foi feito da seguinte forma: 180 : 60 = 0,30. Percebe-se um erro por distração, pois se esqueceu de colocar um zero nos dezoito reais, quando há um registro correto da mesma operação, em um canto da folha, escrito em números muito pequenos. Isto evidencia que, apesar da escrita não estar completamente correta, o aluno demonstra, pelo registro, compreender os cálculos realizados.

Os alunos *A*7 e *A*8 resolveram o problema de forma muito semelhante, embora tenham apresentado algumas diferenças na escrita. Retiraram os dados corretamente, ou seja, o valor cobrado por uma hora de trabalho de ambos os encanadores, a variável t como sendo o tempo em horas e fizeram o cálculo das quatro primeiras horas.

A forma de registro de *A*7 apresenta-se mais formalizada.

$$
\begin{array}{l}
A \\
t(1) \to 60 + 18 = 78{,}00 \\
t(2) \to 60 + 36 = 96{,}00 \\
t(3) \to 60 + 54 = 114{,}00 \\
t(4) \to 60 + 72 = 132{,}00 \\
\circ \\
\circ \\
\circ
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
B \\
t(1) \to 24 + 36 = 60{,}00 \\
t(2) \to 24 + 72 = 96{,}00 \\
t(3) \to 24 + 108 = 132{,}00 \\
t(4) \to 24 + 144 = 168{,}00 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array}
$$

R*: O encanador A fica mais barato sendo os valores* $t \geq 3$.

*A*8 também fez os cálculos das quatro primeiras horas, colocando, entre chaves, o cálculo de cada hora para ambos os encanadores. Fez, ainda, uma observação para cada um deles, como por exemplo:

$\left\{\begin{array}{l} 2h \to 78 + 18 = 96 \to A \\ 2h \to 60 + 36 = 96 \to B \end{array}\right\}$ Em 2 h os dois cobraram o mesmo preço.

$\left\{\begin{array}{l} 3h \to 96 + 18 = 114 \to A \\ 3h \to 96 + 36 = 132 \to B \end{array}\right\}$ Em 3 h o cobrador A é mais barato que o B

$\left\{\begin{array}{l} 4h \to 114 + 18 = 132 \to A \\ 4h \to 132 + 36 = 168 \to B \end{array}\right\}$ O cobrador A continua sendo mais barato

R: Para os valores de t, maiores e = 3 h.

Uma pequena diferença na forma de calcular dos dois alunos é que A_7 manteve o valor fixo cobrado e alterou o valor das horas trabalhadas, enquanto que A_8 manteve o valor de uma hora de trabalho de ambos e adicionou o valor da hora completa anterior. Embora os registros mostram algumas diferenças, ambos compreenderam e interpretaram corretamente.

Os alunos A_9, A_{10}, A_{11} e A_{12} resolveram o problema da mesma forma, efetuando o cálculo das três primeiras horas para ambos os encanadores. Estes alunos também apresentaram diferença na escrita das respostas, como podemos ver:

$$
\begin{aligned}
&t = 1hora\\
&A \to 60 + 18 = 78reais\\
&B \to 24 + 36 = 60reais\\
&t = 2horas\\
&A \to 60 + 36 = 96reais\\
&B \to 24 + 72 = 96reais\\
&t = 3horas\\
&A \to 60 + 54 = 114reais\\
&B \to 24 + 108 = 132reais
\end{aligned}
$$

A_9 respondeu *: 'Para t $\geq$ 3 o encanador A fica mais barato que o encanador B.* '

A_{10} e A_{11} responderam que '*a partir de 3 horas o encanador A fica mais barato que o encanador B.'*

A_{12} respondeu: '*2 horas os preços são iguais, acima de duas horas o encanador A é mais barato.'*

Dez (10) alunos obtiveram crédito parcial, pois apesar de apresentarem cálculos corretos, houve erros na resposta, em sua maioria, causados por equívoco na interpretação da pergunta do problema. O que mais chama a atenção é que nenhum deles recorreu ao uso de função, pois todos apresentaram apenas cálculos aritméticos.

A produção dos alunos revela compreensão do problema, identificação dos dados relevantes e cálculos corretos, entretanto, evidencia falha na interpretação da pergunta ou distração. O aluno *A*13, por exemplo, apresentou o custo total correto das três primeiras horas de serviço de ambos os encanadores, mas não registrou cálculo algum, como podemos observar na transcrição abaixo:

Horas de serviço	Encanador A	Encanador B
1h	78	60
2h	96	96
3h	114	132

A resposta foi incorreta: *O ´único valor de **t** em que o encanador **A** fica mais barato que o **B** é o de 1h de serviço*, deixando transparecer que ele se equivocou na hora de responder, podendo até ter se distraído, pois seus cálculos estão corretos, e, de acordo com eles, 1 hora de serviço do encanador **A** fica mais cara que a do **B**. É possível que tenha feito alguma confusão e recebeu crédito parcial.

O aluno *A*42 calculou corretamente o custo das três primeiras horas e respondeu que '***A** fica mais barato depois de 3 horas'.* Isso evidencia que o aluno interpretou equivocadamente a pergunta, não domina a relação de ordem, ou tem dificuldade de escrita, domínio de linguagem.

Os alunos *A*14, *A*15, *A*16 e *A*17 resolveram de forma semelhante. Calcularam corretamente o custo das três primeiras horas para ambos os encanadores, porém responderam que '*são necessárias três (3) horas de trabalho para que o encanador A fique mais barato que o encanador B e que, portanto t = 3'*, o que demonstra um equívoco na interpretação da pergunta, pois parece que não perceberam que a colocação era para quais valores de **t** e não para qual valor de **t,** que não dominam a relação de ordem ou ainda, que têm necessidade da resposta única, absoluta.

O aluno *A*18 calculou apenas o custo da terceira hora de trabalho e escreveu:

Se o A trabalha 3 horas no dia 60 do serviço + 18 + 18 + 18 = 114

Se o B trabalha 3 horas no dia 24 do serviço + 36 + 36 + 36 = 132

$A \rightarrow 114$ *reais*

$B \rightarrow 132$ *reais então A fica mais barato que B.*

Pode-se perceber que o aluno acredita ter respondido corretamente, ou seja, que com três horas de serviço A fica mais barato que B. Ocorre também, neste caso, um equívoco na interpretação da pergunta e não no enunciado do problema.

Os alunos A_{19} e A_{20} também calcularam corretamente o custo apenas da terceira hora.

$$A = 60 + 3 \times 18$$
$$A = 60 + 54$$
$$A = 114{,}00 R\$$$

$$B = 24 + 3 \times 36$$
$$B = 24 + 108$$
$$B = 132{,}00 R\$$$

A_{19} respondeu: '*Os dois encanadores fazendo um serviço de três horas, o encanador **A** fica mais barato que o **B:** porque a hora do seu serviço custa duas vezes menos que a do encanador **B'***. O aluno A_{20} apenas escreveu T = 3h e T = 4h.

É possível que este último pense que sua resposta seja suficiente, não percebendo, que restringiu, para os valores de **t,** apenas 3 e 4, e que tenha entendido como t ≥ 3, uma vez que não calculou a quarta hora, colocando t = 4. É possível, ainda, que o aluno não tenha se expressado bem, o que caracterizaria uma dificuldade de escrita, de domínio de linguagem, e não de interpretação.

O aluno A_{21} fez o cálculo das cinco (5) primeiras horas, porém cometeu um erro, possivelmente por distração. A partir da segunda hora, para o encanador B, adicionou, ao valor da hora anterior, R$ 24,00 para cada hora de serviço, quando deveria adicionar R$ 36,00, pois R$24,00 é o valor fixo e não da hora trabalhada.

enc A	enc B
60 + 18 = 78 reais na 1ª hora	24 + 36 = 60 reais na 1ª hora
17 + 18 = 96 na 2ª hora	60 + 24 = 84 na 2ª hora
96 + 18 = 114 na 3ª hora	84 + 24 = 108 na 3ª hora
114 + 18 = 132 na 4ª hora	108 + 24 = 132 na 4ª hora
132 + 18 = 150 na 5ª hora	132 + 24 = 156 na 5ª hora

Apesar desse equívoco, os cálculos realizados estão corretos. O aluno respondeu: '*Sendo assim, de 5 horas em diante, quem contratar o encanador B ao invés do encanador A, estará levando prejuízo, pois o encanador A fica mais barato'.* A produção escrita do aluno mostra que ele compreendeu o problema, retirou os dados, fez o cálculo da primeira hora e interpretou corretamente.

Vinte e dois alunos (22) receberam nenhum crédito: por efetuarem cálculos, incorretos ou não, que não resolvem o problema; por respostas incorretas; ou por responderem incorretamente, sem apresentar cálculo algum. Essa constatação evidencia a não compreensão do problema ou uma interpretação equivocada, ou, ainda, um 'chute'.

Os alunos A_{22}, A_{24}, A_{25} e A_{26} calcularam o custo da primeira hora de ambos os encanadores por meio de uma adição 60,00 + 18,00 = 78,00 e 24,00 + 36,00 = 60,00 e responderam incorretamente.

A_{22} escreveu: R: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} \to 18{,}00 \\ \mathrm{B} \to 36{,}00 \end{array}\right\}$ *18,00 mais barato*

A_{24} respondeu que '*o encanador B fica mais barato que o A 18,00 reais'* enquanto que A_{25} escreveu alguns dados:

$$A = 60{,}00$$
$$f = 18{,}00$$
$$B = 24{,}00$$
$$f = 36{,}00$$

E respondeu : '*O valor de f = 18,00 que fica mais barato'.*

A_{26} respondeu: '*Sim, porque ele cobra 18 reais por hora'.*

A_{23} fez apenas a subtração:

$t = 36 - 18 = 18$ e respondeu : '*O encanador **A** fica mais barato um valor de 18,00 reais cobrado por cada hora de trabalho que o encanador **B**. Portanto uma hora trabalhada pelo encanador A será a metade em conta do que o encanador B'.* A resposta desses alunos parece mostrar que não compreenderam o problema.

Os alunos A_{27} e A_{29} também calcularam a primeira hora, no entanto, não responderam o problema, e A_{28}, além do cálculo da primeira hora, calculou o valor de 3 horas de serviço de cada encanador, porém, apenas do valor cobrado por hora, não acrescentando o valor fixo, ou seja, $36 \times 3 = 108$ e $18 \times 3 = 54$. Este aluno não respondeu.

O aluno *A*30 retira os dados, efetua uma subtração 36 – 18 =18 e responde '*que se ambos trabalharem por uma hora o encanador A vai custar mais caro. Ele apenas ficará mais barato se o encanador B trabalhar por mais tempo'.*

O aluno *A*31 efetuou o cálculo das três primeiras horas para ambos os encanadores, porém cometeu um erro, provavelmente por distração, ao calcular a terceira hora do encanador **B,** pois somou apenas as horas de serviço, esquecendo-se do valor fixo:

$$60+18=78(2horas)=114$$
$$24+36=60$$
$$36+36+36=108$$

Em sua resposta, esse aluno escreve que: '*O encanador **B** terá que trabalhar 3 horas a mais que o encanador **A'.*** A produção escrita mostra que se o aluno não tivesse se equivocado no cálculo da terceira hora do encanador **B,** possivelmente teria acertado o problema, e que interpretou equivocadamente a pergunta.

Os alunos *A*32, *A*33, *A*34 e *A*35 não apresentaram cálculo algum, apenas retiraram os dados do problema e responderam incorretamente.

*A*32: *' t = A é 18,00 e t = B é 36,00, o **A** fica mais barato porque o **B** é o dobro'.*

*A*33*: 'Quando **A** cobra o serviço medido em horas'.*

*A*34*: 'porque o encanador cobra R$ 18,00 por hora, ou seja, o dia é garantido e a hora pode ser duradoura ou não. No caso se ele trabalhar 2 horas e terminar o serviço ganhará R$ 36,00, menos do que trabalho fixo mas porém obtém maior lucro'.*

*A*35*: Fica = R$ 18,00*

Infere-se, desse modo, que eles não compreenderam o problema, não souberam interpretar ou deram qualquer resposta.

*A*36 e *A*37 efetuaram uma subtração incorreta: $36-18=28$ e responderam que '*por hora A é 28,00 reais mais barato que B'.* A produção escrita desses dois alunos denota que, além de falta de compreensão do problema, eles apresentam falha na subtração com reserva ou se distraíram.

O aluno *A*38 retirou os dados do problema e calculou o custo de duas e quatro horas de trabalho para ambos os encanadores, utilizando apenas o valor da hora de serviço, ignorando o valor fixo de cada um.

$$t = 2horas$$
$$EncA : 18 \times 2 = 36{,}00$$
$$EncB : 36 \times 2 = 72{,}00$$

$$t = 4horas$$
$$EncA : 18 \times 4 = 72{,}00$$
$$EncB : 36 \times 4 = 144{,}00$$

Ao responder, afirmou '*que tanto faz o tempo de serviço, o encanador **A** cobrará sempre mais barato que o **B**'.* O aluno demonstra não ter compreendido o problema, talvez por falta de atenção na leitura. Ele não identificou corretamente os dados, já que ignorou o valor fixo dos encanadores, caso contrário teria acertado o problema, uma vez que efetuou todos os cálculos corretos.

*A*39 retirou corretamente os dados do problema e calculou o custo de dez horas de serviço para ambos os encanadores. Considera 180 horas como um mês de trabalho e, em seguida, 360 horas como dois meses de trabalho:

$$A = 60{,}00 + 18{,}00\, p / hora$$
$$B = 24{,}00 + 36{,}00\, p / hora$$
$$10 horas$$
$$180{,}00 + 60{,}00 = 240{,}00$$
$$360{,}00 + 24{,}00 = 384{,}00$$

Efetua o cálculo $6 \times 30 = 180$, possivelmente, considerando seis horas diárias e o mês de trinta dias e escreve:

180 horas = 1 mês de trabalho

$$180 \times 36{,}00 + 24{,}00 = 1158{,}00$$
$$180 \times 18{,}00 + 60{,}00 = 1680{,}00$$

360 horas = 2 meses de trabalho

$$1680{,}00 \times 2 = 3360{,}00$$
$$1158{,}00 \times 2 = 2316{,}00$$

Este aluno responde que '*O encanador **A** só fica mais barato que o **B** se o número de horas trabalhadas alcançar menos de um mês'.* Neste caso, cometeu erros no cálculo das operações. É possível que não tenha conseguido interpretar o problema, ou que não tenha feito a escolha correta em relação à estratégia para a resolução. Se tivesse decidido calcular uma, duas, três horas, provavelmente teria acertado.

*A*40 e *A*41 calcularam corretamente o custo das duas primeiras horas para **A** e **B** e responderam incorretamente que '***A** fica mais barato que **B** se os valores de t forem menores que duas horas'.* Estes alunos demonstram falha na interpretação do problema.

*A*43 calcula corretamente o custo da primeira hora:

$$A = 60{,}00 + 18{,}00 = 78{,}00$$
$$B = 24{,}00 + 36{,}00 = 60{,}00$$

E responde que '*ficará mais barato se o encanador **A** fizer apenas um serviço'.* Pela resolução, é possível que não tenha interpretado corretamente e nem compreendido o problema.

*A*44 calcula a primeira hora para ambos os encanadores, efetua mais alguns cálculos irrelevantes e responde que '*O encanador **A** fica mais barato em trinta (30) minutos,; o* que parece também demonstrar falha na compreensão e interpretação do problema.

QUESTÃO 2

2- Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora a 8km do cinema e Pedro a 15km. Sabendo-se que o preço **P** (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distância percorrida **x** (em quilômetros), de acordo com a função P(x) = 2x + 5, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos?

Tabela 4 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 2

Crédito	Número de provas	Função	Cálculo Aritmético	Uso de função como equação	Porcentagem e/ou regra de três
Completo(2)	10	10	-	-	-
Parcial(1)	23	20	01	-	02
Nenhum(0)	11	05	01	05	-
Total	44	35	02	05	02

De todas as questões que compuseram a Prova, foi na Questão 2 que ocorreu o menor índice de créditos completos. Apenas dez (10) alunos receberam crédito completo e todos eles utilizaram função como estratégia/procedimento para resolução.

Vinte e três (23) alunos receberam crédito parcial, dos quais, vinte (20) resolveram por meio de função, um realizou apenas cálculos aritméticos (quatro operações) e dois resolveram utilizando porcentagem e regra de três.

Onze alunos obtiveram nenhum crédito. Entre eles, cinco utilizaram função como estratégia/procedimento, um usou cálculo aritmético e cinco escreveram uma função, mas confundiram-se e resolveram como se fosse equação.

Portanto, do total dos quarenta e quatro alunos, trinta e cinco (35) utilizaram função como estratégia/procedimento, dois alunos realizaram cálculo aritmético, outros dois utilizaram porcentagem e regra de três e ainda cinco (05) alunos utilizaram função, confundindo sua resolução com equação.

Os dez (10) alunos que obtiveram crédito completo apresentaram diferentes formas de resolução. Os alunos A_4 e A_{13} calcularam P(8) e P(15) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}P(8) &= 2 \times 8 + 5\\ P(8) &= 16 + 5\\ P(8) &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(15) &= 2 \times 15 + 5\\ P(15) &= 30 + 5\\ P(15) &= 35\end{aligned}$$

Em seguida, A_4 ainda subtraiu 35 – 21 = 14; dividiu 35 : 2 = 17,50 e respondeu que *'cada um deve pagar R$ 17,50' ;* enquanto que A_{13}, após o cálculo de P(8) e P(15), respondeu: *'sendo que o valor cobrado pelo táxi até a casa de Carla é de 21, e o valor cobrado até a casa de Pedro, ou seja, o valor total é de 35, seria vantajoso dividirem o valor igualmente entre si (17,50 para cada) ou mesmo Pedro pagar uma quantidade um pouco maior do que a de Carla, pois mora mais longe'.* É provável que A_{13} tenha feito também a divisão, só que mentalmente, mas demonstra que leu, compreendeu, interpretou e usou dados corretos,tanto quanto A_4, porém, sua resposta denota uma análise mais ponderada.

Já os alunos A_5, A_{31}, A_{41} e A_{44} calcularam apenas P(15):

$$P(15) = 2x + 5$$
$$P(15) = 2 \times 15 + 5$$
$$P(15) = 30 + 5$$
$$P(15) = 35$$

Em seguida, dividiram o total por dois e responderam que *'cada um deve pagar R$ 17,50'.*

O aluno *A*40 calculou P(15) = 35 e escreveu que *é o preço total*; em seguida, calculou P(7) = 19 e disse ser *a diferença em km* e P(8) = 21, referindo-se ao trajeto da *casa de Carla.* Dividiu 21: 2 = 11**;** diminuiu 15 – 8 = 7 e escreveu: *Pedro – 7km a mais que Carla* e, em seguida, somou 21 + 2,50 = 23,50 (o que provavelmente seja o valor da metade da bandeirada) e respondeu: *'Carla pagará 11 reais e Pedro pagará 24 reais'.* O aluno arredondou os dois valores, inclusive o de Carla, já na divisão quando colocou que 21 : 2 = 11 e não 10,50.

A2 apresenta um raciocínio muito semelhante, mas com um registro bem mais detalhado

Carla só deve pagar pelos 8 km que percorreu no táxi, logo: $P_c = 2 \times 8 + 5 = 16 + 5 = 21$

P_c *= R$ 21,00 → Mas neste trecho Pedro também está no táxi, devendo, portanto, pagar metade desse valor, ou seja, 21 : 2 = valor pago por Pedro neste percurso e 21 : 2 = valor pago por Carla por todo o seu percurso :* P_{Carla} *= 10,5 reais. Os últimos 7km só são percorridos por Pedro, devendo, portanto, pagar essa parte sozinho.*

(preço total) – (preço pago nos primeiros 8km) = (preço pago só por Pedro (7km)),

$$(15 \times 2 + 5) - (21) = Pp$$
$$(30 + 5) - 21 = Pp$$
$$35 - 21 = Pp$$

P_P *= 14 → Então 14 + 10,5 = 24,5* e responde: *'Carla pagará R$ 10,5 e Pedro pagará R$ 24,5'.* Este aluno demonstra um registro escrito completo e detalhado, o que evidencia compreensão e raciocínio corretos.

O aluno *A*10 demonstra o mesmo procedimento, embora num registro muito mais sintetizado. Calcula P(8) e P(15) e responde: *'cada um pagando a metade da corrida até a casa de Carla e Pedro pagando o resto, Carla paga R$ 10,50 e Pedro paga R$ 24,50, dando os R$ 35,00 de tudo'.* Embora o registro esteja bem sintetizado, há evidência de compreensão e interpretação tão corretas como de *A*2.

Nesta questão, a maior parte dos alunos (vinte e três) recebeu crédito parcial, pois cometeu algum erro na interpretação do problema ou nos cálculos.

Entre os alunos que receberam crédito parcial, *A*8 resolveu o problema de uma forma interessante, pois usou regra de três, porcentagem e função:

$$P(x) = 2x + 5$$
$$Y = 2x + 5$$

Em seguida, montou uma regra de três:

$$15 \rightarrow 100\%$$
$$8 \rightarrow x$$
$$x = 53\%$$

Diminuiu 100 – 53 = 47. e em seguida respondeu que *'Pedro deve pagar sozinho 47% do preço do táxi e o restante que é 53% (que sobrou) deve ser dividido entre a Carla e o Pedro.* Depois calculou P(15), referindo-se ao total; P(7) a Pedro e P(8) a Pedro e Carla juntos e respondeu novamente: *'Sendo 35 o total, Pedro deve pagar 19 reais e 21 reais deve ser dividido entre Pedro e Carla'.* Este aluno cometeu apenas um pequeno equívoco, pois pagou cinco reais da bandeirada duas vezes. É possível que tenha cometido um erro de interpretação dos dados, por isso recebeu crédito parcial.

*A*3, *A*6, *A*15, *A*16, *A*17, *A*22, *A*28, *A*30, *A*32, *A*33, *A*34, *A*38 e *A*43 resolveram o problema da mesma forma e deram a mesma resposta, ou seja calcularam P(8) e P(15)

$$P(8) = 2 \times 8 + 5$$
$$P(8) = 21$$

$$P(15) = 2 \times 15 + 5$$
$$P(15) = 34$$

Em seguida, responderam *'Carla deve pagar R$ 21,00 e Pedro deve pagar R$ 35,00'.* Pela produção escrita dos alunos é possível inferir que não compreenderam bem o problema, isto é, não interpretaram corretamente a pergunta, pois não consideraram que deveria ser vantajoso para ambos. Da forma como responderam, cada um, Carla e Pedro, pagou o valor de sua corrida como se estivesse sozinho e quem levou vantagem foi o taxista.

É possível que se esses alunos tivessem feito verificação da resposta teriam observado o erro. Entretanto, pela análise das produções, observa-se que eles não têm o hábito de fazer essa verificação, o que os ajudaria muito a detectar falhas nas resoluções, quando elas ocorrem. Esse é um hábito que precisa ser desenvolvido nos alunos.

O aluno A_{29} resolveu da mesma forma, apenas não apresentou resposta.

Os alunos A_7, A_{11}, A_{19} e A_{23} utilizaram o mesmo procedimento. Calcularam P(8) atribuindo a Carla e P(7), a Pedro.

$$P(8) = 2 \times 8 + 5$$
$$P(8) = 21{,}00$$

$$P(7) = 2 \times 7 + 5$$
$$P(7) = 19{,}00$$

Estes alunos responderam que *'Carla deve pagar 21,00 e Pedro deve pagar 19,00'.* A resposta demonstra equívoco na interpretação da pergunta. Parece, pelo registro, que os alunos não perceberam que Pedro andou mais que Carla e que, portanto, teria que pagar mais que ela, além do que a corrida está saindo por R$ 40,00. É possível que, se tivessem feito a verificação da resposta, pudessem perceber isso.

A_{42} calculou P(15) = 35 e P(8) = 21 e, em seguida, dividiu os dois resultados por dois, ou seja, 35 :2 = 17,50 e 21 : 2 = 10,50 e respondeu que *'Carla pagará R$ 10,50 e Pedro pagará R$ 17,50'.* Este aluno equivocou-se na interpretação do problema, esquecendo-se, ou não percebendo, que o total dos dois não cobre o total da corrida. Também é possível que, se tivesse feito a verificação da resposta, teria percebido o equívoco.

A_9 e A_{14} resolveram de forma idêntica, utilizando o mesmo procedimento, calcularam P(8) = 21 ; P(15) = 35 e P(7) = 19 e, em seguida, dividiram 21 : 2 = 10,50, acrescentando aos 10,50 + 19,00 para Pedro. A_9 e A_{14} responderam que *'Carla deve pagar R$ 10,50 e Pedro deve pagar R$ 29,50'.* Também, neste caso, houve um erro de interpretação, pois o total da corrida ficou em R$ 40,00 e é possível que não tenham percebido.

A_{12} utilizou regra de três como estratégia e registrou da seguinte forma:

$$35 \rightarrow 15km$$
$$x \rightarrow 8km$$

$x = 18{,}666$ e concluiu que esse é o valor para Carla. Em seguida, montou uma adição 18,666 + 16,444 = 35,00, atribuindo o valor de 16,444 a Pedro, respondendo com registro em forma de dados:

Carla $\rightarrow$ 18,666

Pedro $\rightarrow$ 16,444

O registro do aluno evidencia que cometeu um erro de compreensão ou houve distração, pois parece não ter percebido que Pedro mora mais longe e, portanto, deveria pagar mais.

Onze alunos obtiveram nenhum crédito na resolução do segundo problema por terem cometido erros de compreensão, interpretação, como também de cálculo.

Cinco alunos, A_{25}, A_{26}, A_{27}, A_{36} e A_{39} escolheram função como estratégia para resolução, porém cometeram erro nos cálculos, resolvendo a função como equação. Estes alunos confundiram-se também com os dados e não conseguiram sequer retirá-los corretamente.

A_{25} registrou:

$$P(8) = 2 \times 15 + 8$$
$$P(8) = 30 + 5$$
$$P(8) = 35$$
$$P = \frac{35}{8}$$
$$P = 43{,}75$$

Este aluno não respondeu o problema. É possível que tenha considerado o resultado obtido como resposta. Sua produção escrita apresenta falhas na compreensão do conceito de função bem como na sua resolução, não a diferenciando de equação, como também apresenta erro de cálculo na divisão. Como não fez o registro da divisão, não é possível saber como obteve tal resultado.

A_{26} registrou :

$$P = 2x + 5$$
$$P = 2 = 5$$
$$P2 = 10$$

P = 12 e prossegue com a divisão 12 : 2 = 6, respondendo apenas *" R$ 6 de cada'.* Esta produção deixa evidente que o aluno não compreendeu o problema e nem soube retirar os dados, não tendo, sequer, noção do conceito de função, do seu uso e resolução.

*A*27 retira os dados por duas vezes e realiza os seguintes registros:

$$C = 8km$$
$$P = x$$
$$P = 15km$$
$$P(x) = 2x + 5$$
$$P = 8 + 15 = 2x + 5$$
$$P = 23 = 7x$$
$$x = 23 - 7$$
$$x = 16$$

$$distância = 8km + 15km$$
$$\mathrm{Pr}\,eço = xkm$$
$$Função = P(x) = 2x + 5$$
$$P = 8 + 15 = 2x + 5$$
$$P = 23 = 2x + 5$$
$$2x = 23 + 5$$
$$2x = 28$$
$$x = \frac{28}{2}$$
$$x = 14$$

O aluno responde: *\`R$ 14,00 reais\`.*

O aluno *A*36 também escreveu uma função e resolveu como equação, demonstrando erro na compreensão e interpretação e falha no conceito de função, confundindo-a com equação. Além disso, resolveu incorretamente:

$$P(23x) = 2x + 5$$
$$P = 2x + 5 - 23x$$
$$P = -21 + 5$$
$$P = -11$$

A resposta do aluno foi que *'Deverá pagar R$ 11 reais.*

O aluno *A*39 cometeu os mesmos erros que *A*36. Fez um registro um pouco diferente; primeiro, registra a distância de cada um:

Carla 8km e Pedro l5km

Em seguida, registra a função do preço e a resolve de forma incorreta.

$$P(x) = 2x + 5$$
$$P(x) = 2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$
$$x = 2{,}5$$

$$P(x) = 2 \times 2{,}5 + 5$$
$$P(x) = 5 + 5$$
$$P(x) = 10$$

Escreve *10,00 reais total; 4,50 Carla e 5,50 Pedro*. Só então registra:

RESPOSTA: 'Foi resolucionado por dedução, pois se o total for 10,00 reais, Pedro pagará mais que a metade porque mora mais longe do cinema do que Carla'.

O aluno *A*37 registrou a distância dos dois até o cinema, somou-as e calculou P(23) dividindo entre os dois, da seguinte maneira:

Carla mora a 8km do cinema.
Pedro mora a 15km do cinema.

$$P = ?$$
$$x = 8 + 15 = 23km$$
$$P(x) = 2x + 5$$
$$P(x) = 2 \times 23 + 5$$
$$P(x) = 46 + 5$$
$$P(x) = 51$$

Total a pagar R$51,00 $\rightarrow$ $51{,}00 \div 2 = 25{,}50$ $\rightarrow$*Cada um deverá pagar R$25,50.*

Pela forma como resolveu, este aluno demonstra ter se equivocado na compreensão do problema, não percebendo que a distância a ser percorrida era de 15 km. Aparentemente, o aluno prendeu-se à palavra 'juntos' como palavra chave do problema e juntou as duas distâncias. Este tipo de erro é comum entre alunos que foram habituados a destacar 'palavras chaves' em problemas e relacionarem a elas determinadas operações sem, de fato, compreenderem o enunciado como um todo.

Os alunos *A*1 e *A*24 apresentaram registros de idéias semelhantes, mas resolução e respostas diferentes, porém ambas incorretas.

*A*24 utilizou-se apenas de cálculo aritmético, encontrando o valor da corrida de 8km e I5km e depois somando, mentalmente, os dois valores e em seguida dividindo-os também, mentalmente, pois não apresenta registro dessas duas operações.

$2 \times 8 + 5$	$2 \times 15 + 5$
$16 + 5$	$30 + 5$
21	35

chegou ao total 56, estipulando 28 reais para cada um.

É possível que este aluno também tenha destacado a palavra 'juntos' como 'palavra chave do problema.

*A*1 utiliza função como estratégia para resolução

$Carla$	$Pedro$
$P(x) = 2x + 5$	$P(15) = 2 \times 15 + 5$
$P(8) = 2 \times 8 + 5$	$P(15) = 35$
$P(8) = 16 + 5$	$35 + 21 = 56$
$P(8) = 21$	$56 \div 2 = 28$

R= R$28,00 para cada um, sendo o acordo de pagarem o táxi juntos.

*Se **x** é a quantidade de quilômetros percorridos, basta substituí-lo na equação pelo número que corresponde à distância dada no enunciado do exercício. Como um mora mais longe que o outro, é preciso somar os dois resultados para que ambos paguem o mesmo valor.*

O registro do aluno evidencia equívoco na interpretação da pergunta, pois parece que não deu a devida atenção ao fato de que tanto Pedro quanto Carla deveriam ter vantagem; entretanto, nesta forma de resolução, apenas Pedro a obteve. Carla, que pelos seus próprios cálculos deveria pagar R$21,00, acaba pagando mais.

O aluno *A*21 demonstra, por meio de seus registros, falha na compreensão do problema. Ele também soma as duas distâncias e acrescenta mais 8km atribuídos ao percurso de volta do táxi, fato não mencionado no problema, calcula P(31) e depois divide o total entre os dois amigos.

Efetua $8 + 15 = 23$, *mas como pede-se o que é mais vantajoso,* $23 + 8 = 31$

$$P(x) = 2 \times (31) + 5$$
$$P(x) = 62 + 5$$
$$P(x) = 67 reais$$

Divide os 67 reais pelos dois: $67 \div 2 = 33{,}50$

Responde então que *'cada um deverá pagar R$33,50'.*

O aluno *A*35 esboça um registro de estratégia como função, embora não a resolva corretamente, cometendo erro na substituição, como também no cálculo das operações.

$$P(x) = 2 \times 1 + 5$$
$$P(x) = 2 + 5$$
$$P(x) = 7$$
$$7 \times 8 = 49 + 41 = 90$$

Em seguida faz o seguinte registro:

Carla = paga = R$5,00

Pedro = paga = R$9,50

O aluno *A*18 apresenta, como registro, apenas a resposta: *Se P é preço cobrado e x é a distância percorrida que é igual a 15km.* $P(x) = 2x + 5$ *é* $P(15) = 2 \times 5 + 5$ *que dá P(15) = 15, então eles deverão pagar 7 reais e 50 centavos cada um, (ou cada um pagar a metade).*

O aluno comete um erro, possivelmente por distração. Ao calcular P(15) multiplica $2 \times 5 + 5$, quando deveria ter feito $2 \times 15 + 5$, e se o tivesse feito, teria acertado o problema. Parece-nos também que o aluno não fez nenhum tipo de verificação, caso contrário, teria percebido o erro.

QUESTÃO 3

3- Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Tabela 6 – Conteúdos utilizados para resolução e desempenho dos alunos na Questão 3

Crédito	Nº de provas	Tentativa	Cálculo e tentativa	Equação	PA	Proporção	Cálculo Aritmético	Nenhum Cálculo
Completo(2)	24	19	01	04	-	-	-	-
Parcial (1)	02	01	-	-	01	-	-	-
Nenhum (0)	18	02	02	01	01	01	10	01
Total	44	22	03	05	02	01	10	01

A questão de número 3 foi a que apresentou o maior índice de acertos com crédito completo, ou seja, vinte e quatro (24) alunos responderam-na corretamente. A grande maioria, dezenove (19) alunos, respondeu a questão utilizando-se de tentativas, quando se esperava que utilizassem Progressão Aritmética ou Equação. Esta expectativa de que utilizassem PA ou Equação é justificada pelo fato de serem alunos do Ensino Médio, uma vez que equação do 1º.grau é considerado conteúdo básico, trabalhado desde o Ensino Fundamental.

O que se constatou foi que apenas quatro (4) alunos identificaram uma equação e um aluno utilizou cálculo aritmético seguido de algumas tentativas. Dos dois alunos que obtiveram crédito parcial, um utilizou PA e outro realizou algumas tentativas. Entre os que receberam nenhum crédito, dezoito (18) utilizaram as mais diferentes estratégias: dois deles fizeram tentativas que não responderam à questão, outros dois realizaram alguns cálculos seguidos de tentativas sem sucesso, um deles utilizou Equação, um outro PA, outro Proporção, e um, respondeu sem apresentar resolução.

Dez (10) alunos realizaram cálculos que não resolveram o problema, não identificando estratégia alguma que o resolvesse, cometendo erros e não respondendo a questão proposta.

Em relação à escolha da estratégia/procedimento para resolução da questão, verificou-se que: vinte e dois (22) alunos utilizaram apenas tentativas aleatórias; três (03) realizaram alguns cálculos seguidos de tentativas; cinco (05) identificaram e utilizaram equação do 1º grau; dois (02) resolveram por PA, um usou proporção; dez (10) utilizaram apenas cálculos aritméticos e apenas um respondeu à questão sem registrar cálculo algum.

Dentre os alunos que obtiveram crédito completo, verificam-se diferentes formas de resolução. O aluno *A*21 registrou sua resolução na própria resposta, vejamos:

'*Sabendo que ele deve entregar 100 correspondências e a cada dia ele entregou 7 a mais do que no anterior, ele deve ter entregue 6 no primeiro dia, 13 no segundo, 20 no terceiro, 27 no quarto e 34 no quinto, finalizando assim, 100 correspondências, pois, se 6+7=13+7=20+7=27+7=34, e somando todos, 6+13+20+27+34=100'.* Este aluno resolveu, possivelmente, por tentativa.

O aluno *A*18 realizou uma tentativa, curiosa, depois riscou:

1º dia→ 72 telegramas

2º dia→ 07 telegramas

3º dia→ 07 telegramas

4º dia→ 07 telegramas

5º dia→ 07 telegramas

Total →100 telegrama

É possível que tenha feito a verificação e percebido o erro cometido, pois que eram sete telegramas a mais, a cada dia, e não sete em cada dia, a partir do segundo dia. Após cancelar esta tentativa, ele apresenta a resposta correta, da seguinte forma:

No 1º dia →06

No 2º dia →13

No 3º dia→ 20

No 4º dia→ 27

No 5º dia→ 34

Total →100

O aluno *A*5 dividiu 100 por 5 obtendo 20 e, em seguida, diminuiu 7 por, duas vezes, obtendo 6 e realizando sua primeira tentativa:

$$100 \div 5 = 20$$
$$20 - 7 = 13 - 7 = 6$$

1º dia = 06
2º dia = 13
3º dia = 20
4º dia = 27
5º dia = 34
Total = 100

Escreveu, como resposta: '*Ele entregou no 1º dia 6 telegramas, no 2º dia 13, no 3º dia 20, no 4º dia 27 e no 5º dia 34 telegramas'.*

*A*13 escreveu: 100 telegramas em 5 dias, média de 20 em cada dia e, em seguida, fez uma primeira tentativa, começando por cinco no primeiro dia:

$5+12+19+26+33=95$. Em seguida, possivelmente, ao perceber que faltavam cinco, fez nova tentativa, aumentando um em cada dia, ou seja:
$6+13+20+27+34=100$, escrevendo como resposta : *'O carteiro entregou no primeiro dia 6 telegramas; 13 no segundo dia;20 no terceiro, 27 no quarto e 34 no quinto'.*

Os alunos A_{24} e A_{31} apresentaram a resposta correta sem cálculo ou verificação: *'entregou por dia: primeiro 6 telegramas; segundo 13 telegramas, terceiro 20 telegramas; quarto 27 telegramas e quinto 34 telegramas'.* É possível que esses alunos tenham realizado tentativas ou cálculos que não foram registrados.

Vários alunos: A_7, A_9, A_{11}, A_{12}, A_{16} e A_{20} também registraram a resposta, porém, com verificação, ou seja, efetuaram a soma dos telegramas, totalizando 100.

O aluno A_{35} fez uma primeira tentativa com verificação. O interessante é que esse aluno encontrou o total de 100 telegramas, mas cometeu um equívoco no segundo dia, multiplicando 2 por sete, quando deveria ter somado 2 mais sete. É provável que tenha percebido o erro, pois, após fazer a soma e verificar que não era o resultado, anula o que havia feito e responde corretamente com verificação.
Vejamos o registro do aluno:

DIA = 1º → 2

DIA = 2º→ 14

DIA = 3º→ 21

DIA = 4º→ 28

DIA = 5º→ 35

TOTAL = 100 → $2+7=9+7=16+7=23+7=30$

O aluno A_{19} faz várias tentativas, a primeira começando por 10, depois 5, 7 e 6, mas anula todas. Tenta então escrever os termos de uma PA, mas confunde a razão e escreve: $x+(x+7)+(2x+7)+(3x+7)+(4x+7)$ soma $7x+28$ e, em seguida, risca tudo, escrevendo abaixo: 1º dia = 6; 2º dia = 13; 3º dia = 20, 4º dia = 27 e 5º dia = 34, além da seguinte observação: *'não consegui usar fórmula, fui chutando o número de cartas no 1º dia até acertar para dar 100 telegramas'.*

A_{28} fez duas tentativas, a primeira começando com 7 telegramas no primeiro dia e obtendo a soma de 105 telegramas; a segunda, começando por 6 telegramas e fazendo a verificação. Este aluno respondeu, portanto, corretamente.

Os alunos A_{10}, A_{23}, A_{30}, A_{33} e A_{42} realizaram sucessivas tentativas. Iniciaram com um telegrama no primeiro dia, depois com dois e assim sucessivamente até começar com 6 telegramas no primeiro dia, fazendo a verificação e respondendo corretamente.

Os alunos A_6 e A_{15} montaram e resolveram corretamente a equação:

$$x + x + 7 + x + 14 + x + 21 + x + 28 = 100$$
$$5x = 30$$
$$x = 6$$

Em seguida, calcularam os cinco dias, fazendo a verificação e respondendo corretamente.

O aluno A_4 também utilizou equação, mas registrou de forma diferente:

$1^{o}\,dia = x$

$2^{o}\,dia = x + 7 = y$

$3^{o}\,dia = y + y = z$

$4^{o}\,dia = z + 7 = u$

$5^{o}\,dia = u + 7 = l$

$$x + y + z + u + l = 100$$
$$x + y + z + u + (u + 7) = 100$$
$$x + y + z + (z + 7) + (z + 7 + 7) = 100$$
$$x + y + (y + 7) + (y + 7 + 7) + (y + 7 + 14) = 100$$
$$x + (x + 7) + (x + 7 + 7) + (x + 7 + 14) + (x + 7 + 21) = 100$$
$$5x + 21 + 21 + 28 = 100$$
$$5x + 70 = 100$$
$$x = \frac{100 - 70}{5}$$
$$x = \frac{30}{5}$$
$$x = 6$$

Em seguida, fez as devidas substituições e respondeu corretamente.

$$
\begin{aligned}
&x = 6\\
&y = x + 7 = 6 + 7 = 13\\
&z = y + 7 = 13 + 7 = 20\\
&u = z + 7 = 20 + 7 = 27\\
&t = u + 7 = 27 + 7 = 34
\end{aligned}
$$

O registro da produção do aluno revela que ele tem domínio do conteúdo Equação do 1º. Grau e habilidade em trabalhar com ele.

Apenas dois alunos obtiveram crédito parcial. Os dois apresentaram registros diferentes e ambos deixaram de colocar a resposta da questão, ou é possível que considerem o resultado como resposta e, conseqüentemente, para eles, o problema foi respondido.

*A*3 escreveu os termos de uma PA e em seguida registrou a soma destes numa equação :

$$
\begin{aligned}
&A1 = 6\\
&A2 = A1 + 7 \rightarrow 6 + 7 = 13\\
&A3 = A1 + 14 \rightarrow 6 + 14 = 20\\
&A4 = A1 + 21 \rightarrow 6 + 21 = 28\\
&A5 = A1 + 28 \rightarrow 6 + 28 = 34
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&100 = 5 \times A1 + 70\\
&5A1 = 100 - 70\\
&5A1 = 30\\
&A1 = \frac{30}{5}\\
&A1 = 6
\end{aligned}
$$

A43 inicia dividindo cem por cinco e obtém vinte. A partir daí realiza várias tentativas com verificação até chegar à seqüência correta, escreveu no final de seu registro $6 + 13 + 20 + 28 + 34 = 100$. É possível que o aluno considere isso como a resposta.

Dezoito alunos obtiveram nenhum crédito por efetuarem cálculos corretos ou não, mas que não responderam à questão proposta. Não se pode afirmar, no entanto, que eles não sabem matemática, pois os cálculos realizados estão corretos e os erros cometidos apontam falta de compreensão (14 alunos) e de interpretação (4 alunos).

*A*44 dividiu cem por cinco, obtendo vinte e responde: *'entregou 20 telegramas por dia'.* É possível que o aluno não tenha feito uma boa leitura e identificação dos dados relevantes da questão, pois ignorou o fato do carteiro ter entregado sete telegramas a mais que no dia anterior, respondendo que entregou a mesma quantia todos os dias.

*A*25 e *A*38 também dividiram cem por cinco, obtendo vinte. Em seguida, adicionaram sete, ou seja : $100 \div 5 = 20 + 7 = 27$ e responderam: *'Ele entregou 27 telegramas em cada dia'*. Estes alunos não fizeram verificação; é possível que se o tivessem feito, teriam percebido o erro cometido.

*A*36 registra 100 = 5, possivelmente, para se referir a cem telegramas em cinco dias. Em seguida escreve 20 em cada dia, mas risca e monta uma adição $27 + 27 + 27 + 27 + 27 = 135$ e responde: *'ele entregou 27 telegramas em cada dia'.* A produção deste aluno também demonstra falha na leitura, na identificação dos dados e na compreensão, pois ignora o total de cem telegramas dado pela questão, bem como o fato de ter entregado quantidade diferente em cada dia.

*A*32 apresenta registro apenas da resposta:

1º → 20

2º → 27

3º → 13

4º → 20

5º → 20

total → 100 telegramas. Falha também na compreensão do problema.

*A*14 faz uma primeira tentativa, iniciando o primeiro dia com 100 telegramas e acrescentando sete a cada dia, possivelmente percebeu o erro, pois cancelou o que havia feito. Em seguida, dividiu $100 \div 5 = 20$ e prosseguiu acrescentando sete a cada dia e respondeu que: *'entregou 27 cartas no primeiro dia, 34 no segundo, 41 no terceiro, 48 no quarto e 55 no quinto dia'.* Este aluno não apresenta verificação; é provável que se o tivesse feito, teria percebido o erro, uma vez que percebeu o primeiro.

*A*41 apresenta a mesma resolução de *A*14, apenas com a diferença de ter iniciado pela divisão.

*A*37 também inicia pela divisão e, em seguida, diminui sete: $100 \div 5 = 20 - 7 = 13$ e escreve sua resposta: *'No primeiro dia entregou 13 telegramas, no segundo 20, no terceiro 27, no quarto 28 e no quinto 41 telegramas'.* Também não apresenta verificação, o que, possivelmente, possibilitaria a percepção do erro.

*A*29 inicia pela divisão seguida de uma soma: $100 \div 5 = 20 + 7 = 27$ e responde que no primeiro dia entregou 27 e nos demais, 18. O interessante é que faz a verificação e encontra 99 e mesmo assim, não refaz a questão.

*A*1 demonstra, em seus registros, ter identificado uma PA e compreendido o problema, porém não soube resolvê-la. Iniciou os registros resolvendo uma equação, seguida da resposta e justificação:

$$x + 28 = 100$$
$$x = 100 - 28$$
$$x = 72$$

'Considerando que a partir do primeiro dia ele entregou sete a mais, nos últimos quatro dias ele entregou um total de 28 nos últimos quatro dias. PA(72, 79, 86, 93, 100) O que resulta numa progressão aritmética'.

Esta produção demonstra que o aluno identificou a PA, porém não soube como escrever a soma dos termos, embora tenha compreendido que o número de correspondências era diferente a cada dia. A falha ocorreu então ao escrever a equação da soma dos termos. Outro fato que poderia ter ajudado a detectar o erro seria a verificação, porém isso não ocorreu. O aluno não atentou que o total de cem correspondências era para os cinco dias e não para o quinto dia.

O aluno *A*2 também identificou uma PA e cometeu o mesmo erro de compreensão, ou seja, equivocou-se ao considerar 100 como o total do quinto dia e não como o total de telegramas a serem entregues nos cinco dias. Iniciou seus registros com os dados:

Primeiro dia$\rightarrow$ a1

7 telegramas a mais$\rightarrow$ R

100 telegramas$\rightarrow$ a5

$$
\begin{aligned}
&An = a1 + R(n-1)\\
&100 = a1 + 7(4)\\
&100 = a1 + 28\\
&a1 = 100 - 28\\
&a1 = 72
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&1^{o}\, dia \rightarrow 72\\
&2^{o}\, dia \rightarrow 79\\
&3^{o}\, dia \rightarrow 86\\
&4^{o}\, dia \rightarrow 93\\
&5^{o}\, dia \rightarrow 100
\end{aligned}
$$

Os alunos *A*17, *A*26, *A*27 e *A*40 realizaram vários cálculos[11] que não resolvem o problema e demonstram falhas na compreensão e no cálculo das operações.

*A*17, por exemplo, apresenta a produção escrita da seguinte forma:

Primeiramente, faz alguns registros nos quais aparecem os totais 107 e 100, que são anulados depois. Em seguida, efetua alguns cálculos:
$100 \times 5 = 500$ e 100 – 5 + 7 = 100 . 12 = 120 , que também foram anulados.
Apresenta, então, como resolução 7 + 5 = 12 e 12 . 100 = 120 e responde que *'ele entregou 120 telegramas em cada dia'.*

[11] Não descreveremos todos esses cálculos por considerarmos irrelevantes.

ANEXOS

ANEXO A – PROVA DE QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA - AVA/2002

GOVERNO DO PARANÁ

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DO RENDIMENTO ESCOLAR - 2002

Nome..

Idade : ....anos e ....meses Sexo: ☐ feminino ☐ masculino

3ª. Série do Turno: ☐ matutino ☐ vespertino ☐ intermediário ☐ noturno

Escola ....

Município: ....

☐ Escola Municipal ☐ Escola Estadual

INSTRUÇÕES PARA O ALUNO

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver cada questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Você pode utilizar o verso da folha se necessário.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

1. Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$ 36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?

2. Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora à 8Km do cinema e Pedro à 15Km. Sabendo-se que o preço P (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distância percorrida x (em quilômetros), de acordo com a função $P(x) = 2x + 5$, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos?

3. Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

O que você achou dessa prova?
(A) Muito fácil.
(B) Fácil.
(C) Mediana.
(D) Difícil.
(E) Muito difícil.

O que você achou do tamanho da prova ?
(A) Muito longa.
(B) Longa.
(C) Adequada.
(D) Curta.
(E) Muito curta.

Para você, o tempo foi
(A) mais que o necessário para fazer a prova,
(B) suficiente para fazer a prova.
(C) faltou tempo para fazer a prova.

A questão que você achou mais fácil foi a
(1ª)
(2ª)
(3ª)

A questão que você achou mais difícil foi a
(1ª)
(2ª)
(3ª)

ANEXO B – SOBRE O PROGRAMA DE PESQUISA

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS E PROFESSORES NAS PROVAS DE QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA[12]

Regina Luzia Corio de Buriasco
coordenadora do projeto

O projeto é constituído de investigações a serem realizadas por alunos dos programas de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, de Educação, e, alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, articuladas em torno do eixo temático da Avaliação em Matemática tendo como foco dos estudos a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Pretende-se desenvolver um estudo qualitativo envolvendo a produção escrita de alunos e professores que ensinam matemática na resolução da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas idéias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno.

Ao analisar uma produção escrita, mantém-se um diálogo com as respostas dadas, indaga-se sua configuração, procura-se encontrar quais as relações que as constituem. O erro, então, não é considerado como algo negativo e sim como um indício importante sobre os conhecimentos, processos de relação das informações,

[12] Projeto financiado pela Fundação Araucária, sob protocolo no. 5998 do PROGRAMA DE APOIO À PESQUISA BÁSICA E APLICADA – Chamada de Projetos 06/2003. Modalidade B.

valores, presentes na relação do sujeito com o objeto do conhecimento, quase sempre invisíveis e ignorados na prática educativa escolar.

Pretende-se estudar tanto erros como acertos, pois “tal como o sucesso não é garantia absoluta da existência da competência pretendida, o erro não é a prova absoluta da sua ausência” (HADJI, 1994, p.123), por conseguinte neste estudo todas as respostas e as estratégias utilizadas por quem as obtém serão fontes de investigação.

No caso deste estudo, não se pretende apresentar ‘receitas’ sobre avaliação ou correção de provas escritas, mas sim conhecer mais e melhor como alunos e professores lidam com questões abertas de matemática. Dessa forma, buscará subsidiar a realização de uma das tarefas do professor que é a de fazer com que o erro, aos poucos se torne *observável* ao aluno para que este tome consciência daquele. Essa é uma das contribuições possíveis do presente projeto na tentativa de diminuir o fracasso escolar.

Objetivos Gerais

- Analisar a produção escrita de alunos e professores em questões abertas de matemática.
- Aprofundar o conhecimento dos processos de aprender e ensinar matemática, mediante um estudo da produção escrita de alunos e professores.

Material e Participantes

Para o desenvolvimento deste estudo serão utilizadas:

a) uma amostra retirada do universo das provas de Matemática realizadas pelos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas que participaram da AVA-2002, atendendo ao sistema de referência estatístico definido para este estudo, de modo a que seja representativa do universo dos participantes da AVA- 2002. Por conseguinte, será levado em conta o total de alunos, séries, dependência administrativa (pública), a amostra aleatória previamente selecionada e turno em que os alunos estavam matriculados. O sistema de referência será estruturado tendo como base as 10 meso-regiões em função da localização geográfica dos municípios. Deste modo, serão selecionadas, por sorteio aleatório, dentro da cota de participação de cada meso-região, sendo 399 provas de 4ª série e 422 provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 327 provas da 3ª série do Ensino Médio;

b) uma prova composta por todas as questões da prova estadual de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio a qual será resolvida por professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, da rede pública do estado do Paraná, e, por alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

O presente estudo terá, então, como participantes alunos de escolas públicas paranaenses que realizaram a AVA/2002; alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL; alunos que cursaram, em 2002, a 4ª. série do Ensino Fundamental numa escola municipal de Cambé; professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas na região de Londrina.

Indicadores previstos para a análise

Reafirmando que um dos propósitos principais é o de estimar a proficiência matemática examinando, atentamente, toda produção escrita na busca de indícios dos modos e estratégias utilizados na resolução de cada questão, e, devido à natureza da prova, os registros escritos dos alunos e professores serão separados inicialmente em três blocos - “resolve adequadamente a questão” (crédito completo), “resolve parcialmente a questão”(crédito parcial) e “não resolve a questão” (nenhum crédito).

Há duas razões para isto: levar em consideração o grau de compreensão demonstrado pelo aluno/professor na interpretação do enunciado da questão e em sua resolução, sempre, tendo como objetivo identificar o que ele já sabe e o que está a caminho de saber, para que, posteriormente, possa se esclarecer aos professores a existência de respostas que podem receber “crédito completo” mesmo não sendo aquelas ‘perfeitas’ de acordo com o modelo por eles conhecido.

Relevância Estimada do Projeto

Com relação a esta investigação espera-se que:

- a tradução das descobertas geradas possa contribuir nos programas de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, bem como para a área de estudos sobre avaliação em matemática;
- seus resultados e as informações inventariadas possam se converter em subsídios para instrumentalizar a prática pedagógica do professor que ensina matemática;
- possa servir de mote para outros estudos, para a elaboração de material que subsidie a prática pedagógica do professor na busca de superar os obstáculos didáticos por eles encontrados.

Têm-se, ainda, como meta e indício de sua relevância que o presente estudo incorpore e gere produções acadêmicas, especificamente: dissertações de mestrado; trabalhos de iniciação científica; publicações de artigos e apresentações em eventos das áreas de Educação Matemática e de Educação em geral, por exemplo, em eventos como o ENEM, SIPEM, ANPED; ENDIPE e outros similares, nacionais e internacionais.

Até o momento, estão concluídas as seguintes dissertações:

PEREGO, Sibéle Cristina. *Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos*. [produção de alunos da Licenciatura em Matemática] 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. *Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

SEGURA, Raquel de Oliveira. *Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. *Avaliação em Matemática: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em Questões Discursivas*. 2006. Programa de Mestrado em Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.