



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ARLEI UBIRATÃ DA ROCHA

RACIONAIS E IRRACIONAIS:
CONJUNTOS EM \mathbb{R} , ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES E
SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA OS ENSINOS
FUNDAMENTAL E MÉDIO

ARLEI UBIRATÃ DA ROCHA

RACIONAIS E IRRACIONAIS:
CONJUNTOS EM \mathbb{R} , ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES E
SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA OS ENSINOS
FUNDAMENTAL E MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof^a Dr^a Ana Lucia da Silva.

Londrina
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

R672r Rocha, Arlei Ubiratã da.

Racionais e irracionais : conjuntos em \mathbb{R} , algumas de suas propriedades e sugestões de atividades para os ensinos fundamental e médio / Arlei Ubiratã da Rocha. - Londrina, 2018.
59 f. : il.

Orientador: Ana Lúcia da Silva.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Inclui bibliografia.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Números racionais - Teses. 3. Números irracionais - Teses. I. Silva, Ana Lúcia da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ARLEI UBIRATÃ DA ROCHA

RACIONAIS E IRRACIONAIS:

CONJUNTOS EM \mathbb{R} , ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES E
SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E
MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Dr^a Ana Lúcia da Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Dr^a. Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -
UTFPR

Dr. Túlio de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 07 de fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho a Deus, meu Senhor;

à minha fiel e amada esposa Karina;
aos meus filhos Daniel e Manuela,
meus lindos e amados herdeiros;

aos meus pais, que me incentivaram
desde pequeno a estudar;

aos professores, verdadeiros mestres
que me aconselharam e me ensinaram
grande parte do que aprendi até hoje.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora não só pela constante orientação neste trabalho mas, sobretudo, pela sua paciência e por algumas ideias compartilhadas.

Aos professores que me deram aulas durante o mestrado (Profmat).

Aos colegas que me aturaram durante os últimos dois anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Todas as ciências exatas são dominadas pela
ideia da aproximação. (Bertrand Russell)

ROCHA, Arlei Ubiratã da. **Racionais e irracionais:** conjuntos em \mathbb{R} , algumas de suas propriedades e sugestões de atividades para os ensinos fundamental e médio. 2017. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Este trabalho de dissertação foi elaborado com a finalidade de oferecer uma leitura sucinta e atualizada sobre o ensino dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais no Ensino Fundamental, por uma perspectiva de planejamento e docência que se norteie em um embasamento teórico, a respeito dos números reais, e que seja desenvolvida com o objetivo de responder às possíveis dúvidas e dificuldades por parte de professores, com sua busca permanente em promover a aprendizagem de matemática na Educação Básica. É composto de referências teóricas, a partir dos trabalhos de pesquisadores nacionais e internacionais, bem como de material autoral, com a proposta de contribuir para a criação de um material relevante, para o enriquecimento do ensino de matemática no Brasil. Abrange considerações sobre frações, como uma forma fundamental de representação dos números racionais; estudo sobre propriedades importantes para este conjunto, como densidade em \mathbb{R} ; além de estender para os números irracionais, as dúvidas mais presentes em sala de aula (como a de reconhecer tais números); e formas de aproximação de um irracional por uma sequência de racionais.

Palavras-chave: Números Racionais. Números Irracionais. Fração. Densidade. Aproximação.

ROCHA, Arlei Ubiratã da. **Rational & Irrational: Numeric Sets in \mathbb{R} , some of its properties and recommendations of activities for high and middle school.** 2017. 58 p. Dissertation (Professional Mastering Of Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

This project of dissertation was made with the purpose of offering a simple and actualized lecture on teaching of set of rational numbers and of set of irrational numbers in the Primary School for a new perspective of educational planning and teaching that it stands in a theoretical basement, from real numbers, and that it have been developed with a purpose of answering to any possible teachers's questions – with their permanent quest for promoting mathematics' learning in the Basic Education. It's basicly composed by theoretical references from national and international researches' works as well as from the text written by me, with the direct purpose of creation of a relevant material for enrichment of teaching of mathematics in Brazil. This includes consideration about fractions, as a fundamental shape of representation for rational numbers, study about main properties for this set of numbers, as density in \mathbb{R} , over and above irrational numbers, the most common askings from school classes of recognizing those numbers, and models of approximation to an irrational from a sequence of rational numbers.

Keywords: Rational Numbers. Irrational Numbers. Fraction. Density. Approximation.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO 0	4
1 CAPÍTULO 1	6
1.1 Números Inteiros.....	6
1.2 Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos.....	8
2 CAPÍTULO 2	17
2.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS	17
2.2 Dúvidas e Questionamentos	28
3 CAPÍTULO 3	32
3.1 O bingo dos conjuntos numéricos.....	32
3.2 Cartelas do Bingo dos conjuntos	35
4 CAPÍTULO 4	38
4.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS.....	38
4.2 Formas de representação de números irracionais.....	46
4.3 Aproximação de números irracionais por números racionais.....	48
5 EXERCÍCIOS	50
CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS	57
APÊNDICE	58

INTRODUÇÃO

Esta dissertação consiste de uma proposta didática, voltada principalmente para o público docente. Aborda um conjunto de práticas de ensino para os números racionais e para os números irracionais, na Educação Básica. É composta de relato de experiência, em sala de aula, da releitura de conceitos já consagrados, pesquisa de tópicos relacionados ao tema central, parte prática (propostas de exercícios e de outras atividades), e conclusão. Trata-se de uma ideia que surge dos anseios, das dúvidas e das tentativas de elaboração de estratégias para solucionar problemas intrínsecos ao processo de ensino e aprendizagem presentes nas aulas de matemática dos Ensinos Fundamental e Médio.

No decorrer dos próximos capítulos, pretende-se expor uma sequência de passos, pautada em uma abordagem teórica, que abordam: o conjunto dos números inteiros, suas propriedades e aspectos relacionados às operações aritméticas neste conjunto; conjuntos finitos e conjuntos infinitos; cardinalidade e enumerabilidade; o conjunto dos números racionais; sobre representações decimais finitas e infinitas; as dízimas periódicas; operações aritméticas envolvendo os números racionais; propostas de atividades orientadas envolvendo números racionais; dúvidas e questões referentes ao ensino dos números racionais; uma estratégia específica sugerida para o ensino dos números racionais – o bingo dos conjuntos numéricos; o conjunto dos números irracionais; histórico e conceitos pertinentes ao conjunto dos números irracionais; principais formas de representação de números irracionais; expressões algébricas envolvendo números irracionais; método de aproximação para o cálculo de números irracionais do tipo \sqrt{n} (com n um natural que não é quadrado perfeito); seção de exercícios voltados, principalmente, para o Ensino Médio; Considerações finais; Teoremas e Demonstrações.

CAPÍTULO 0

Algumas definições sobre conceitos matemáticos muito utilizados nesta dissertação

I. Fechamento

Um conjunto é fechado em relação a uma operação se o resultado obtido ao se aplicar a operação em dois elementos do conjunto também é um elemento do próprio conjunto. Assim, um conjunto X é fechado em relação à operação $*$ se, para quaisquer elementos a e b no conjunto X , o resultado $a * b$ está em X . (Coleção Schaum. SPIEGEL, M., MOYER, R., 2015).

Um número inteiro é dito par se for escrito na forma $2n$, enquanto um outro número inteiro é dito ímpar se for escrito na forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$. Deste modo, para as operações de adição (+) e de multiplicação (\cdot), ocorre o fechamento no conjunto dos inteiros (\mathbb{Z}).

Assim,

$$2m + 2n = 2 \cdot (m + n) = 2 \cdot q;$$

$$2m + (2n + 1) = 2 \cdot (m + n) + 1 = 2 \cdot q + 1;$$

$$2m \cdot 2n = 2 \cdot (2mn) = 2 \cdot q;$$

$$(2m + 1) \cdot (2n + 1) = 2 \cdot (2mn + m + n) + 1 = 2 \cdot q + 1. \forall m, n, q \in \mathbb{Z}.$$

II. Relação Biunívoca

Para introduzir este conceito, segue um trecho de uma obra da História da Matemática, em que aparece a menção ao termo composto *relação biunívoca*:

“...como usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos, focalizando de início o surgimento no homem primitivo do conceito de número e do processo de contar.

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É

razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. (...)” (EVES, H., Introdução à história da matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004, pp.25-26).

Para entender uma correspondência biunívoca vamos definir função bijetora.

Dizemos que uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora quando para quaisquer x_1 e x_2 de A , $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Ou seja, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dizemos, também, que uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora quando para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Por fim, concluímos que uma função f é bijetora quando f for injetora e também sobrejetora.

III. Densidade

Um subconjunto A de \mathbb{R} é denso em \mathbb{R} se para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ existe $x \in A$ tal que $a < x < b$.

O enunciado acima se refere a uma proposição demonstrável que, em síntese, garante a existência de pelo menos um número racional entre dois números reais distintos quaisquer. Equivalentemente, existe pelo menos um número irracional entre dois números reais distintos quaisquer.

Nos capítulos destinados a tratar com mais ênfase desses conjuntos, serão utilizados conceitos como densidade e fechamento, de uma forma mais informal, por estarem inseridos em um contexto de educação para o Ensino Básico.

CAPÍTULO 1

1.1. O Conjunto dos Inteiros (\mathbb{Z})

Segundo NIVEN (1984), o conjunto dos números naturais $\{1,2,3,4, \dots\}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação, isto é, a adição e a multiplicação envolvendo quaisquer dois ou mais números naturais sempre resulta em um outro número natural; mas não são fechados em relação à subtração e à divisão. A propriedade do fechamento em relação à subtração só se consegue com a inclusão do elemento neutro 0 e dos números negativos, aos números naturais:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Este é o conjunto dos números inteiros. Nele, são válidas as seguintes propriedades: comutativa (para a adição e para a multiplicação); existência de um elemento neutro (para a adição e para a multiplicação); associativa (para a adição e para a multiplicação); e distributiva (para a multiplicação em relação à adição).

Para a, b e c inteiros, são válidas tais propriedades de tal modo que:

$$a + b = b + a \quad (\text{Comutativa da adição})$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{Comutativa da multiplicação})$$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad (\text{Existência do elemento nulo da multiplicação})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{Associatividade em relação à adição})$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (\text{Associatividade em relação à multiplicação})$$

$$a + 0 = 0 + a = a \quad (\text{Existência do elemento neutro para a adição})$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (\text{Existência do elemento neutro para a multiplicação})$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{Distributividade da multiplicação em relação à adição})$$

Como ocorre com o conjunto dos números naturais, o conjunto dos números inteiros é fechado em relação à adição e à multiplicação; mas o conjunto dos números inteiros também é fechado em relação à operação subtração – porque a subtração entre dois inteiros quaisquer é sempre um outro número inteiro. Vem a pergunta: será que o conjunto dos números inteiros é fechado em relação à operação divisão? Neste caso, não ocorre a propriedade do fechamento, pois se

quisermos operar a divisão de 3 por -2 , não será obtido um resultado pertencente ao conjunto dos inteiros.

Para analisar a divisão entre números inteiros, deve-se pensar e discutir os casos existentes e a busca de unicidade para o resultado. Não se pode dividir por 0, visto que se 0 fosse um valor possível para um divisor d , haveria um quociente q inteiro tal que, para um inteiro b qualquer, $b = 0 \cdot q = 0$. Assim, nem sempre existe – ou se existe, não é único – um número inteiro que é o quociente único para uma divisão entre dois números inteiros quaisquer. Isto é, se o divisor fosse igual a 0, qualquer quociente produziria um dividendo igual a 0. Por esses motivos, é possível verificar que a divisão não é uma operação fechada – cujo resultado também pertence ao conjunto – dentro do conjunto dos números inteiros.

Outra questão a ser levantada e estudada em relação aos elementos do conjunto dos números inteiros é a paridade de um determinado número inteiro. Diz-se que um número inteiro é *par* se esse número pode ser escrito na forma $2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, o conjunto $P = \{\dots, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros pares.

Diz-se que um número inteiro é *ímpar* quando é possível escrevê-lo na forma $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Assim o conjunto $I = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$ é o conjunto dos números inteiros ímpares.

Desta forma, qualquer número inteiro é par ou é ímpar, como se pode conferir por alguns exemplos a seguir:

$$\begin{array}{lll} -16 = 2 \times (-8) & 10 = 2 \times 5 & 24 = 2 \times 12 \\ -15 = 2 \times (-8) + 1 & 13 = 2 \times 6 + 1 & 37 = 2 \times 18 + 1 \end{array}$$

Nota-se, portanto, que o conjunto dos números inteiros é a união disjunta do conjunto dos números pares com o conjunto dos números ímpares, isto é $\mathbb{Z} = P \cup I$.

1.2. Conjuntos Finitos e Conjuntos Infinitos

Pode-se utilizar uma notação I_n , $n \in \mathbb{N}$, para o conjunto dos números naturais de 1 até n (LIMA Elon L. et al., 2006). Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\}$, $I_3 = \{1,2,3\}$, e, de forma geral, para qualquer número natural k pertence a I_k se, e somente se, $1 \leq k \leq n$.

Um conjunto X é um conjunto finito, quando se pode afirmar que X tem n elementos de tal modo que existe uma correspondência biunívoca $f: I_n \rightarrow X$. Denomina-se n o *número cardinal* do conjunto X , isto é, o número de elementos do conjunto X . A correspondência $f: I_n \rightarrow X$ é chamada de *contagem* dos elementos do conjunto X , de tal modo que para todo n o conjunto I_n é finito e seu *número cardinal* é n . Qualquer conjunto finito tem algum dos n números naturais como seu *número cardinal ou cardinalidade*, que denotaremos por $n(X)$. Por exemplo, seja a função

$f: I_5 = \{1,2,3,4,5\} \rightarrow X = \{a, e, i, o, u\}$, tal que $f(1) = a$, $f(2) = e$, $f(3) = i$, $f(4) = o$, $f(5) = u$, neste caso faz-se uma contagem do conjunto das vogais e denota-se $n(X) = 5$.

Por definição, zero é o número cardinal do conjunto vazio, simbolizado por \emptyset , isto é, $n(\emptyset) = 0$.

Diz-se que um conjunto X é infinito se esse conjunto não é finito, isto é, se esse conjunto não é vazio e se não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca.

$f: I_n \rightarrow X$, para qualquer n natural.

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais é um conjunto infinito visto que dada qualquer função $f: I_n \rightarrow \mathbb{N}$, não importa qual n tenha se fixado, se $k = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ é possível ver que, para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$; logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, é impossível que se cumpra a condição da sobrejetividade para uma correspondência biunívoca.

a) O número de elementos de um conjunto finito é sempre o mesmo, independentemente da contagem que seja considerada. Daí que se $f: I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow X$ são correspondências biunívocas, então $m = n$.

b) Todo subconjunto Y de um conjunto finito X é finito e $n(Y) \leq n(X)$. Apenas quando $Y = X$ tem-se $n(Y) = n(X)$.

c) Se X e Y são conjuntos finitos, então $X \cup Y$ é finito e tem-se $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$.

d) Se X e Y são conjuntos finitos e $n(X) > n(Y)$, nenhuma função $f: X \rightarrow Y$ é injetiva e nenhuma função $g: Y \rightarrow X$ é sobrejetiva.

Exemplo: $X = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $Y = \{7, 8, 9\}$. Verifica-se que $n(X) = 5$, $n(Y) = 3$, $n(X \cup Y) = 5$ e $n(X \cap Y) = 3$. Pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{6, 7, 8, 9, 10\}$, em que $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Há uma outra correspondência biunívoca, por exemplo, $g: \{-5, -4, -3, -2, -1\} \rightarrow \{6, 7, 8, 9, 10\}$, em que $I_5 = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$. Logo, $m = n = 5$.

SOBRE CONJUNTOS INFINITOS, CARDINALIDADE E ENUMERABILIDADE

De acordo com WHINSTON (2009), se alguém quisesse listar todos os números inteiros, supondo que essa pessoa vivesse eternamente, ela poderia fazer isso? Sim: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... e assim por diante. Mas como o conjunto \mathbb{N} dos números naturais é infinito, esse trabalho não teria fim. Porém, essa pessoa poderia, até algum momento, alcançar qualquer número natural que lhe fosse solicitado. O 10 seria o décimo número, o 1000000 seria o milionésimo número, etc.

Diz-se, portanto, que o conjunto dos números naturais é contável ou, equivalentemente, enumerável. Georg Cantor batizou este “tamanho” de infinitude com o símbolo: \aleph_0 , que se pronuncia Aleph-zero.

Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a \mathbb{N} . (ÁVILA, 2006).

Assim, um conjunto infinito X é contável (enumerável) quando é possível estabelecer uma bijeção de \mathbb{N} com X , isto é, quando existe uma função bijetora

$$f: \mathbb{N} \rightarrow X.$$

Neste caso, diz-se que a cardinalidade de X será a mesma que a de \mathbb{N} , ou seja, $\aleph_0 = n(X) = n(\mathbb{N})$.

Uma pergunta que é feita aos professores, em diferentes níveis de ensino da matemática, é: será que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares positivos têm o mesmo “tamanho”?

É possível listar todos os números inteiros positivos e também todos os números pares, colocando-os em ordem e em correspondência, como se pode observar no esquema a seguir:

Números Naturais	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
Números inteiros pares positivos	2	4	6	8	10	12	14	16 ...

A cada número da lista de cima corresponde um único número, na lista de baixo, que é o dobro daquele número; e que, a cada número da lista de baixo corresponde um único número, na lista de cima, que é a metade desse número. Cada número de uma das duas listas tem exatamente um único correspondente na outra lista. Isso quer dizer que, provavelmente, na sequência dos números inteiros positivos, se possa colocar sempre um número par em correspondência com um outro número da lista de todos os inteiros positivos, o que sugere haver as mesmas quantidades de elementos nos dois conjuntos analisados. Formalmente escreve-se:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow X = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$f(n) = 2n$$

f é uma bijeção; logo, o conjunto dos números pares é contável e $n(\mathbb{N})=n(X)$, onde X é o conjunto dos números pares positivos.

Outro exemplo é o conjunto dos inteiros. Não é necessário escrevê-los em ordem porque não há o menor inteiro, nem o maior inteiro.

Mas é possível escrevê-los assim: $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, \dots\}$. É possível colocá-los em correspondência com os números naturais ao ligar o primeiro número na lista dos números naturais ao primeiro número na lista dos inteiros, o segundo número na lista dos números naturais ao segundo número na lista dos inteiros, o terceiro, e assim por diante.

Percebe-se, desse modo, que há uma correspondência entre cada um dos números das duas listas – lista dos números naturais e lista dos números inteiros (reordenada) – o que sugere haverem quantidades iguais de elementos nesses dois conjuntos, a despeito da presença do número 0 em apenas um deles. Portanto, os

conjuntos infinitos \mathbb{N} e \mathbb{Z} têm a mesma cardinalidade, representada por \aleph_0 . Uma bijeção entre \mathbb{N} e \mathbb{Z} é dada por:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

- 1) Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow X = \{2,4,6,8, \dots\}$, com $f(n) = 2n$
Prove que f é uma bijeção.

Para provar que f é bijetora, é necessário e suficiente provar que f é:

- a) Injetora;
- b) Sobrejetora.

Assim,

- a) Dados quaisquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, devemos ter: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$.

De fato, $2 \cdot n_1 = 2 \cdot n_2 \Rightarrow 2 \cdot (n_1 - n_2) = 0 \Rightarrow n_1 - n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = n_2$. Logo f é injetora.

- b) Nesse caso, devemos ter $C_{D(f)} = \text{Im}_f$.

Temos que $\text{Im}_f = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots\}, \forall n \in \mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\} = X$.

Logo, f é uma função bijetora.

EXERCÍCIOS

2) Prove que o conjunto dos números ímpares é enumerável.

Sugestão: Defina $f: \mathbb{N} \rightarrow X = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ com $f(n) = 2n + 1$ e prove que f é uma bijeção.

3) Prove que a função f é uma bijeção, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

É possível provar que vários outros conjuntos infinitos são contáveis, por exemplo, o conjunto dos números primos.

Nota-se até aqui que o conjunto dos números pares positivos, conjunto dos números ímpares positivos, conjunto dos números primos são contáveis e todos estes são subconjuntos de \mathbb{N} .

Não parece surpreendente que a respeito do estudo dos conjuntos infinitos haja equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto?

A ENUMERABILIDADE DO CONJUNTO DOS RACIONAIS

Se é surpreendente que o conjunto \mathbb{N} seja equivalente a muitos de seus subconjuntos próprios, mais surpreendente é saber que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais seja equivalente a \mathbb{N} , isto é, seja enumerável.

Para mostrar isso é suficiente trabalhar com o conjunto \mathbb{Q}_+ dos racionais positivos. Inicia-se o processo reunindo as frações irredutíveis em grupos, cada grupo contendo aquelas cuja soma do numerador com o denominador seja constante. Por exemplo,

Se a soma é igual a 1, tem-se: $\frac{0}{1}$;

Se a soma é igual a 2, tem-se: $\frac{1}{1}$;

Se a soma é igual a 3, tem-se: $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$;

Se a soma é igual a 4, tem-se: $\frac{1}{3}, \frac{3}{1}$;

Se a soma é igual a 5, tem-se: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$;

Se a soma é igual a 6, tem-se: $\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$;

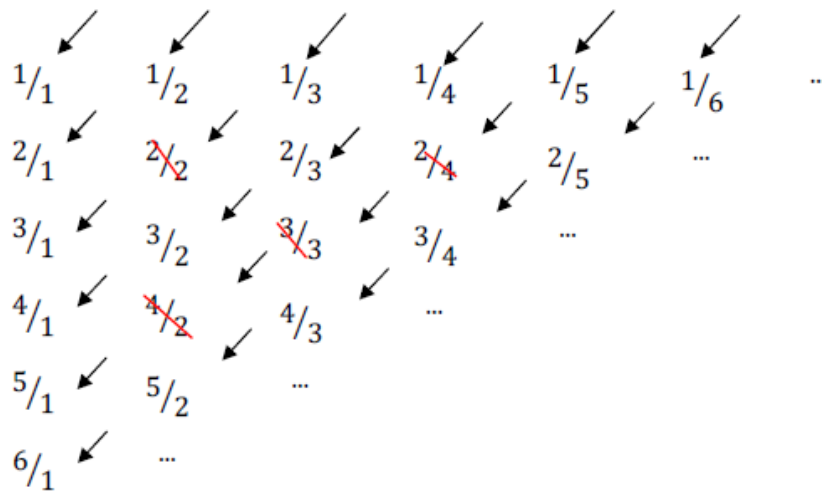
Se a soma é igual a 7, tem-se: $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$;

e, assim por diante.

Observe-se que cada grupo tem um número finito de elementos. Então, é suficiente escrever todos os grupos, um após o outro, em ordem crescente das somas correspondentes, e enumerar as frações na ordem em que aparecem. De modo que assim, mostra-se que todos os números racionais positivos aparecerão nessa lista.

Outra forma de verificar a enumerabilidade de \mathbb{Q} é dada por uma ideia de Cantor de arranjar, em uma tabela, todos os números racionais – cuja forma geral é $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$ - utilizando um processo em que se mantia o numerador em cada linha e se mantia o mesmo denominador em cada coluna. Assim, para percorrer a tabela, não era possível pular de linha em linha, nem pular de coluna em coluna; o que era possível era atravessar de uma linha para outra, e de uma coluna

para outra, atravessando ao longo das diagonais. Dessa maneira, todos os números racionais seriam listados e contados.



Ficava, assim, por meio desta estratégia utilizada por Cantor, demonstrada a Enumerabilidade do Conjunto dos números racionais.

Ao se observar o esquema ilustrado acima, percebe-se a presença de todos os números racionais positivos. Analogamente o conjunto \mathbb{Q}_+ é enumerável. A demonstração para isso fica como exercício.

Existem, contudo, alguns conjuntos de números que não podem ser listados e colocados em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Um exemplo é o conjunto dos números reais (\mathbb{R}). Um outro exemplo é o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$.

A NÃO ENUMERABILIDADE DO CONJUNTO DOS REAIS

Vimos anteriormente que o conjunto \mathbb{Q} é enumerável. Isto poderia até sugerir que todos os conjuntos infinitos fossem enumeráveis, como se acreditava de fato fosse verdade. Em 1874 Cantor surpreendeu o mundo matemático com uma de suas principais descobertas importantes sobre conjuntos: a de que o conjunto dos números reais não é enumerável, ou seja, tem cardinalidade diferente da do conjunto \mathbb{N} dos números naturais.

Para provar isso, vamos trabalhar com os números do intervalo $(0,1)$, já que este intervalo tem a mesma cardinalidade da reta toda.* Observe que alguns desses números têm mais de uma representação decimal, como 0,4 e 0,3999

Para que isto não aconteça, vamos utilizar, para cada número, sua representação decimal infinita. Assim,

$$0,437 = 0,436999 \dots ; 0,052 = 0,051999 \dots ; \text{etc.}$$

É com esse procedimento cada número terá uma única representação decimal infinita.

Suponhamos que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo $(0,1)$ com os números naturais. Isto é o mesmo que supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência infinita x_1, x_2, x_3, \dots

Ao serem escritos em suas representações decimais, esses números seriam,

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots$$

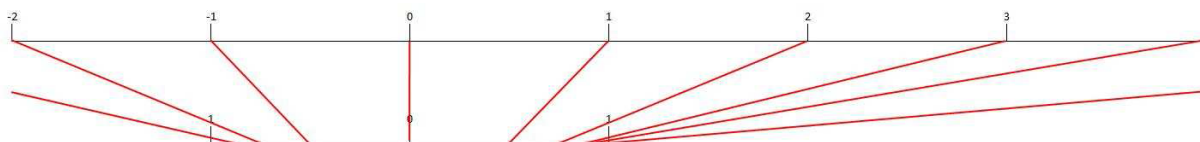
$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots$$

.....

$$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots$$

onde os a_{ij} são algarismos de 0 a 9. O último passo, que nos levará a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo $(0,1)$ que não esteja nessa lista. Isso é feito pelo conhecido processo da diagonal de Cantor, usado em muitas outras situações. Construímos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante, de maneira que esse número não coincidirá com nenhum

dos números da lista acima. Para termos uma regra específica, vamos construir o número $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ desejado, tomando $a_i = 6$ se $a_{ii} = 5$ e $a_i = 5$ se $a_{ii} \neq 5$. Como esse número não está presente na lista anterior, chegamos a um absurdo, o que nos leva a concluir que o conjunto dos números reais *não é enumerável*.



O procedimento ilustrado logo acima é o seguinte: iniciando com a reta numérica, ligam-se as extremidades do intervalo $[0,1]$ com as extremidades do intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ na reta que representa o intervalo $[-1,1]$ (de baixo). Em seguida, ligam-se as extremidades do intervalo $[1,2]$ com as extremidades do intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Depois, ligam-se os números pelas extremidades do intervalo $[2,3]$ (da reta numérica, em cima) aos números do intervalo $\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$. Continuando, liga-se cada unidade de comprimento que resta na reta numérica (em cima) aos números de cada intervalo com metade do comprimento do intervalo que resta na reta (parte de baixo) que representa o intervalo $[-1,1]$. Por último, realizam-se os mesmos passos ligando os intervalos de uma reta aos da outra, à esquerda do 0 (parte negativa).

De algumas outras formas, utilizando-se recursos como: a projeção geométrica entre uma reta numérica e um semicírculo, conectando-se pontos de uma reta infinita a pontos de uma região curva e limitada, consegue-se provar que é possível ligar-se os infinitos pontos que representam os números reais aos infinitos pontos que representam os números reais contidos em um intervalo limitado, por exemplo, entre -1 e 1 .

A partir do momento que os números reais não podem ser contados, eles não podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números inteiros. Primeiramente, Georg Cantor batizou a cardinalidade dos números reais de c , por causa da palavra contínuo. Então, depois, como ele já havia batizado a cardinalidade do conjunto dos números inteiros pelo símbolo \aleph_0 (Aleph-zero), ele então batizou a cardinalidade do conjunto dos números reais de \aleph_1 (Aleph-um).

CAPÍTULO 2

2.1. O Conjunto dos Números Racionais (\mathbb{Q})

Segundo NIVEN (1984), como se sabe, o Conjunto dos Números Inteiros (\mathbb{Z}) – que pode ser representado por: $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ é fechado em relação à adição, à subtração e à multiplicação. No entanto, este não é um conjunto fechado em relação à divisão, pois a divisão de inteiros pode resultar em frações como $4/3$, $7/6$, $-2/5$, etc. O conjunto de todas as frações, como essas apresentadas anteriormente, acrescentadas aos números inteiros, é o Conjunto dos Números Racionais. *Mais precisamente, um número racional (ou uma fração ordinária) é um número da forma a/b , com a e b inteiros e $b \neq 0$.*

É necessário que se façam algumas observações a partir da definição anterior a respeito do Conjunto dos Números Racionais.

a) Exige-se que b seja diferente de zero, isto é, $b \neq 0$. Isto é necessário porque b é de fato um divisor, no sentido em que assume um valor pelo qual se divide um outro valor (menor, igual ou maior do que b) chamado de dividendo.

b) Observe-se que, enquanto os termos número racional e fração ordinária são usados, às vezes, como sinônimos, a palavra *fração*, sozinha, é utilizada para representar qualquer expressão algébrica que contenha um numerador e um denominador, como: $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{x}$, $\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

c) A definição de número racional contém as palavras “um número que pode ser colocado na forma a/b , com a e b inteiros e $b \neq 0$. Por que não se deve dizer apenas “um número na forma a/b , com a e b inteiros e $b \neq 0$ ”? A razão é que existem infinitas maneiras de se representar um número racional qualquer: por exemplo, $3/2$ pode ser escrito como $6/4$, $9/6$, ..., $15\pi/10\pi$, ou $3\sqrt{3}/2\sqrt{3}$, para mencionar apenas alguns exemplos. Existem diferentes frações como forma de representar um mesmo número racional – são as classes de frações equivalentes. E não se pode fazer com que apenas uma ou outra representação de um número racional seja a escolhida, em detrimento de outras. Como uma fração é definida de tal maneira que se, ao multiplicar-se o numerador e o denominador dessa fração por uma mesma quantidade a fração resultante representará o mesmo número anterior,

não se pode afirmar apenas de olhar à primeira vista que uma fração é um número racional. Exemplos: $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. A primeira é igual a 2, pois $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$; já a segunda é igual a $\sqrt{5}$, que não é um número racional.

d) Todo número inteiro é também um número racional, pois pode ser escrito como uma fração cujo numerador é o mesmo número inteiro dado e cujo denominador é igual a 1.

SOBRE REPRESENTAÇÕES DECIMAIS FINITAS E INFINITAS

Também segundo NIVEN (1984), além da representação de um número racional a/b , e das formas $2a/2b$, $3a/3b$, ..., ka/kb , $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, existe a conhecida representação decimal. Por exemplo, o número $1/2$ possui, além das representações $2/4$, $3/6$, ..., $k/2k$, a representação decimal 0,5.

As representações decimais para alguns números racionais são finitas. Outros números racionais possuem representações decimais infinitas.

Exemplos:

$\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{3}{2} = 1,5$; $\frac{12}{6} = 2$ (possuem representação decimal finita)

$\frac{1}{3} = 0,333 \dots$; $\frac{5}{6} = 0,8333 \dots$; $\frac{4}{7} = 0,571428571 \dots$ (possuem representação decimal infinita)

Como se pode observar, nos casos em que a representação decimal é infinita são colocadas as reticências para indicar a repetição de um ou mais algarismos que compõem o chamado período ou parte decimal periódica. A representação decimal é sempre obtida ao dividir-se o numerador pelo denominador.

Uma dúvida que deve vir à mente daqueles que observam a questão da representação decimal, finita ou infinita, é: em que casos o número racional apresenta uma representação decimal finita?

Sabe-se que qualquer fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a 10, 100 ou alguma potência de 10.

Exemplo:

$$0,345 = \frac{345}{1000} = \frac{69}{200}$$

Tem-se que, no denominador da fração irredutível (mais à direita), só há fatores primos 2 e 5. O ponto importante está neste fato: será que a condição necessária, e suficiente, para que uma fração decimal, na forma de fração ordinária, seja finita, é que o denominador contenha apenas, como fatores primos em sua decomposição, 2 e 5 (um deles ou ambos)?

Há, portanto, uma proposição a ser provada, a qual consiste em que:

“ Um número racional, na forma irredutível a/b , possui uma representação na forma de fração decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos, em sua decomposição, além de 2 ou 5.”

Demonstração do caso geral: primeiramente, deve-se entender que somente se quer dizer “ apenas nos casos em que b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5, mesmo que não tenha ambos ao mesmo tempo”. Posto isso, suponha-se que b seja da forma $2^m \cdot 5^n$, com m e n números inteiros positivos ou nulos. Há duas possibilidades a serem analisadas, a partir daqui: ou $m \geq n$ ou $m < n$. Se $m \geq n$, então $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n}$. Daí, multiplicam-se numerador e denominador por 5^{m-n} . Logo, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}$. Se $m - n$ é um inteiro positivo, 5^{m-n} também é um inteiro. Assim, é possível escrever $a \cdot 5^{m-n} = c$ e, então, $\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m}$. Como a divisão de c por 10^m exige apenas que se coloque a vírgula na posição correta para uma representação decimal, o número racional a/b pode ser escrito na forma decimal finita. De outro modo, se $m < n$, tem-se para o mesmo número a/b o seguinte desenvolvimento: $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 2^{n-m} \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}$. Se $n - m$ é um inteiro positivo, é possível escrever $a \cdot 2^{n-m} = d$ e, então, $\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n}$. Analogamente ao caso anterior, como a divisão de d por 10^n exige apenas que se coloque a vírgula na posição correta para uma representação decimal, o número racional a/b pode ser escrito na forma decimal finita.

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Segundo NIVEN (1984), os números racionais podem ser separados em dois tipos: os que apresentam uma representação decimal finita e os que apresentam uma representação decimal infinita. É necessário demonstrar que, os que apresentam uma representação decimal infinita, possuem um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente. Como exemplos, podemos mostrar

$$\frac{3}{11} = 0,272727 \dots \quad \frac{4231}{990} = 4,273737 \dots$$

Para evitar-se confusão por parte do leitor (ou do estudante), é melhor que se utilize uma notação mais confiável; no caso, por meio de uma barra sobre o(s) algarismo(s) que se repete(m). Alguns exemplos para a utilização da barra sobre a parte que se repete estão a seguir:

$$\frac{2}{11} = 0,1\bar{8} \quad \frac{15}{9} = 1,\bar{6} \quad \frac{367}{90} = 4,0\bar{7}$$

Por quê isso ocorre? Como se dá e em que momento da divisão (entre o número que ocupa o lugar de numerador e o número que ocupa o lugar de denominador) se dá essa repetição contínua e sem fim? Utilizando-se como exemplo a fração ordinária $4/7$, e reescrevendo-a como fração decimal, temos:

$$\begin{array}{r} 40 \quad | \quad \underline{7} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 35 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 0,5\overline{71428} \\ 50 \\ 49 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 010 \\ \quad \underline{7} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ \quad 30 \\ \quad \underline{28} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ \quad \quad 20 \\ \quad \quad \underline{14} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ \quad \quad \quad 60 \\ \quad \quad \quad \underline{56} \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ \quad \quad \quad \quad 4 \end{array}$$

No decorrer da divisão apresentada anteriormente, os restos são, pela ordem, 5, 1, 3, 2, 6, 4. Ao se atingir o resto 4, completa-se um ciclo e repete-se a divisão inicial 40 por 7. Os restos são, todos eles, menores do que o divisor 7 e, assim, haverá uma repetição – tendo em vista que só há 6 restos possíveis (O resto 0 está fora de cogitação). No exemplo analisado, a divisão que se repetiu foi exatamente a que ocorreu no primeiro passo, isto é, 40 por 7. Isso nem sempre ocorre. A repetição que caracteriza o início de um período pode acontecer em qualquer um dos $n - 1$ passos, relativos aos $n - 1$ restos possíveis para um divisor n .

Podemos, analogamente, concluir que, para todo número racional representado pela fração ordinária a/b , sempre que o numerador a for dividido pelo denominador b haverá possíveis restos iguais a: 1, 2, 3, 4, ..., $b - 2$, $b - 1$. Portanto, há certeza de que algum desses restos se repetirão e, quando isso ocorrer, será iniciado um novo ciclo, o que irá resultar em uma dízima periódica.

Até aqui, foi provada a primeira parte da proposição “ todo número racional a/b pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica; ou, reciprocamente, toda fração decimal, finita ou infinita e periódica, representa um número racional.”.

Como já está provado, pelo que já foi apresentado anteriormente, qualquer fração decimal finita representa um número racional. Então, o que precisa ser provada é a outra parte da recíproca, que se refere às frações decimais infinitas periódicas.

Tomando-se como exemplo $x = 2,15\overline{347}$, por meio de um processo que inclui multiplicações (em ambos os membros da equação) e uma subtração, na sequência, é possível realizar uma transformação na equação inicial para que se determine o resultado na forma de fração. Então,

$$100000.x = 215347,\overline{347}$$

$$100.x = 215,\overline{347}$$

$$99900.x = 215132 \Rightarrow x = \frac{215132}{99900}$$

Obteve-se, assim, x como um número racional.

Para generalizar tal processo, deve-se desconsiderar a parte inteira (à esquerda da vírgula, na representação decimal) da fração decimal, pois ela não interfere no processo. Assim, qualquer fração decimal infinita e periódica pode ser representada da seguinte maneira:

$x = a_1 a_2 a_3 \dots a_s \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_t}$, em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ representam os s algarismos da parte não-periódica e $b_1, b_2, b_3, \dots, b_t$ representam os t algarismos que compõem o período.

Se o número x for multiplicado, primeiramente por 10^{s+t} e, em seguida, por 10^s , haverá duas equações que, ao serem subtraídas, resultarão em $(10^{s+t} - 10^s) \cdot x = a_1 a_2 a_3 \dots a_s b_1 b_2 b_3 \dots b_t - a_1 a_2 a_3 \dots a_s$, de modo que

$$x = \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_s b_1 b_2 b_3 \dots b_t - a_1 a_2 a_3 \dots a_s}{10^{s+t} - 10^s},$$

O que mostra que x é um número racional (inteiro sobre inteiro).

Segundo BAHIANO (2005) há, também, números racionais que na representação decimal apresentam um ou mais do que um algarismo, diferente(s) daquele(s) que compõe(m) o período, posicionado entre a parte inteira e a parte periódica. Vejamos alguns exemplos:

0,0121212 ...; 0,00353535 ...; 1,02797979

Para cada uma dessas dízimas há uma representação fracionária, de tal modo que:

$$\frac{12}{990} = \frac{2}{165} = 0,0121212 \dots$$

$$\frac{35}{9900} = \frac{7}{1980} = 0,003535 \dots$$

$$\frac{1026}{999} = \frac{342}{333} = 1,027979 \dots$$

Assim, podemos apresentar algumas das formas mais comuns de dízimas periódicas (simples e compostas):

a) $0,aaa \dots = \frac{a}{9}$

b) $0,abab \dots = \frac{ab}{99}$

c) $0,0abab \dots = \frac{ab}{990}$

$$d) 0,00abab \dots = \frac{ab}{9900}$$

$$e) 1,0ab0ab \dots = \frac{999+ab}{999}$$

$$f) 0,0a0b0a0b \dots = \frac{a0b}{9999}$$

A seguir, são apresentadas as justificativas para as identidades a), b) e c) indicadas anteriormente:

$$a) 0,aaa \dots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \dots = \frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{a}{9}$$

$$b) 0,abab \dots = \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{a}{1000} + \frac{b}{10000} + \dots = \left(\frac{a}{10} + \frac{a}{1000} + \dots \right) + \left(\frac{b}{100} + \frac{b}{10000} + \dots \right)$$

$$= \frac{\frac{a}{10}}{1-\frac{1}{1000}} + \frac{\frac{b}{100}}{1-\frac{1}{10000}} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{999}{1000}} + \frac{\frac{b}{100}}{\frac{9999}{10000}} = \frac{10a}{999} + \frac{b}{999} = \frac{ab}{99}$$

$$c) 0,0abab \dots = \frac{a}{100} + \frac{b}{1000} + \frac{a}{10000} + \frac{b}{100000} + \dots = \left(\frac{a}{100} + \frac{a}{10000} + \dots \right) +$$

$$\left(\frac{b}{1000} + \frac{b}{100000} + \dots \right) = \frac{\frac{a}{100}}{1-\frac{1}{10000}} + \frac{\frac{b}{1000}}{1-\frac{1}{100000}} = \frac{\frac{a}{100}}{\frac{9999}{10000}} + \frac{\frac{b}{1000}}{\frac{99999}{100000}} = \frac{a}{99} + \frac{b}{990} = \frac{10a+b}{990} = \frac{ab}{990}$$

Observação: para apresentar as justificativas anteriormente, utilizou-se a fórmula da soma de uma P.G. infinita, de acordo com as seguintes considerações:

Uma sequência de termos (crescente ou decrescente), em que cada termo é calculado como o produto do termo anterior pelo número constante denominado razão da sequência ou progressão, denomina-se de Progressão Geométrica.

Caso essa P.G. seja finita, e sua razão seja um número q tal que $|q| < 1$, $q \neq 0$, a soma S_n de todos os n termos dessa P.G. é calculada por: $S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$.

Então, se n for aumentando e tender ao infinito, teremos q^n tendendo a zero de modo que: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

OPERAÇÕES BÁSICAS, EM ARITMÉTICA, ENVOLVENDO OS NÚMEROS RACIONAIS

Em relação às operações aritméticas – adição, subtração, multiplicação e divisão – envolvendo dois ou mais números racionais, de acordo com BAHIANO (2005), são apresentados com os seus respectivos procedimentos.

a) A soma de dois números racionais é definida a seguir:

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ tem-se a soma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+b.c}{b.d}$.

A adição para os números racionais apresenta as propriedades comutativa e associativa.

Para somar-se dois números racionais representados por suas frações ordinárias $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, basta obter-se suas frações equivalentes às respectivas frações ordinárias inicialmente de tal modo que seus denominadores sejam iguais; em seguida, é suficiente somar seus numeradores (das frações equivalentes), mantendo-se o mesmo denominador.

b) O produto de dois números racionais é definido a seguir:

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ tem-se o produto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$.

Essa operação apresenta as propriedades: comutativa, associativa, distributiva e elemento neutro.

c) A subtração de dois números racionais é definida a seguir:

Dados dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ tem-se a diferença $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d-b.c}{b.d}$.

De fato, a diferença entre dois números racionais quaisquer se dá como se fosse a soma de um deles com o oposto do outro.

d) A divisão de dois números racionais é definida a seguir:

Se o propósito é realizar a divisão de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, o que se quer é determinar um número racional $\frac{x}{y}$, denominado quociente, tal que $\frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, o que implica: $\frac{c.x}{d.y} = \frac{a}{b} \Rightarrow$

$$\frac{x}{y} = \frac{a.d}{b.c} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Portanto, o quociente $\frac{x}{y}$ é o produto do primeiro número racional dado anteriormente pelo inverso do segundo número racional dado anteriormente.

PROPOSTAS DE ATIVIDADES – INCLUINDO SOLUÇÕES – COM NÚMEROS RACIONAIS

O propósito desta seção é apresentar sugestões de exercícios para atividades de matemática, orientadas no Ensino Básico, que envolvam os números racionais, suas formas de representação e suas principais propriedades. A proposta é utilizar uma linguagem adequada às séries que compõem o nível do Ensino Fundamental (anos finais) e o Ensino Médio, com a apresentação de alguma solução também.

“Dê um exemplo de número racional, maior do que $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$ e menor do que $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, para $n \in \mathbb{N}$.”

$$\text{Temos que: } \sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \text{ pois } \frac{n}{n+1} < 1 \text{ e } \sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^4} < \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[6]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}.$$

Então, para um racional $\frac{x}{y} > 0$, devemos ter:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} < \frac{x}{y} < \sqrt{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{x}{y} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Logo, } \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{n}{n+1} \text{ e } \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{Portanto, } \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{n}{n+1} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Para que $\frac{n}{n+1}$ seja da forma $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}}$, isto é, seja racional, deve-se ter o expoente $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Neste caso, isto é impossível. Ocorre, portanto, que deve existir uma fração racional compreendida entre as duas fornecidas pelo enunciado, de tal modo que ela não é da forma $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$.

Leia e procure resolver a situação que se apresenta a seguir

“Um menino, chamado Fracionildo, resolveu tomar uma folha de papel sulfite em mãos, dobrá-la e dela retirar sua quarta parte. Com a parte restante, repetiu o processo e retirou dela sua quarta parte. Quantas vezes, a partir do início, Fracionildo terá de repetir o processo até que a parte restante seja menor do que 10% da folha de papel original?”

“Escolhendo-se dois números, de 1 a 10, um de cada vez, com direito à repetição, qual será a probabilidade de formar uma fração (o 1º número pertencerá ao numerador e o 2º número pertencerá ao denominador) tal que:

- a) Seja uma fração própria?
- b) Seja uma fração inteira?
- c) Seja uma fração imprópria?
- d) Seja uma fração geratriz de uma dízima periódica?”

“Escreva uma sequência de números racionais, com pelo menos 3 termos, cuja razão aritmética seja igual a $\frac{1}{20}$, que esteja entre $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{5}$.” (Deve ser apresentado somente para o Ensino Médio, quando já terão sido estudadas sequências e progressões)

“Determine um exemplo de número racional que esteja entre $\frac{11}{37}$ e $\frac{11}{35}$.”

“Com relação à ordem das frações resultantes em cada caso, coloque os sinais de $>$, $<$ ou $=$ entre as potências de números racionais:

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \dots\dots \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- b) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \dots\dots \left(\frac{4}{3}\right)^3$
- c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 \dots\dots \left(\frac{3}{7}\right)^4$
- d) $\left(\frac{10}{3}\right)^3 \dots\dots \left(\frac{9}{4}\right)^4$

2.2. DÚVIDAS E QUESTÕES REFERENTES AOS NÚMEROS RACIONAIS

Durante os meses de junho, julho e agosto do ano letivo de 2015, dei aulas para duas turmas de 8º ano de uma escola da rede estadual, em Londrina. Essas turmas já haviam sido formadas pelas pedagogas que trabalhavam naquele colégio, de acordo com critérios sócio-comportamentais e, em uma delas, os 30 alunos que a compunham eram mais receptivos às aulas e melhor comportados (menos indisciplinados) do que na outra. As aulas sobre números racionais, mais explicativas, ainda que tradicionais, começaram a despertar a atenção dos alunos em tentar aprender tudo que lhes era passado a respeito do conjunto \mathbb{Q} . Comecei a mostrar a necessidade de incluir números fracionários e números decimais – aqueles que são representados com a vírgula como símbolo de separação entre a parte inteira e a parte não-inteira – nos cálculos e expressões numéricas, junto aos inteiros positivos e negativos. A partir daí, pude observar que alguns erros e conceitos que não estavam de acordo com a sistemática e com a teoria estabelecida surgiam continuamente, em exercícios que exigiam o cálculo de operações com números fracionários e também com números decimais. Entre aqueles, podem ser citados:

- Utilização de procedimentos equivocados, em cálculos simples envolvendo, por exemplo, a adição ou a subtração entre frações;
- Dificuldade em estabelecer a equivalência entre frações, notadamente pela dificuldade em compreender o papel do m.m.c. de números naturais;
- Falta de conhecimento das diferentes formas de representação no sistema de numeração de base decimal;
- Pouca habilidade para transformar números fracionários em números decimais e vice-versa;
- Dificuldade em visualizar/compreender a reta numérica, sobretudo a reta dos números reais;

O estudo das frações, enquanto números racionais, foi bem sucedido até que as frações fossem representações de números inteiros ou de decimais exatos*. A partir do momento em que a parte (numerador) passava a não ser comensurável** com a outra parte (denominador), gerando fragmentação e indefinição, o processo de assimilação e aprendizagem foi se tornando mais desgastante e dificultoso.

Houveram situações propostas em que os alunos teriam que verificar a que valores decimais correspondiam algumas frações escolhidas a priori – algumas, na verdade, eram frações geratrizes* de dízimas periódicas. Sempre foi combinado que eles teriam que realizar os cálculos a lápis, no caderno, e somente depois poderiam conferir se estavam acertando, pela utilização da calculadora. Algumas dessas situações foram reutilizadas (adaptadas) e colocadas em listas de exercícios e, posteriormente, em avaliações – ver anexos.

Mas a questão da localização dos números racionais na reta numérica, bem como a densidade deles nos reais (quantidade infinita por intervalo), era uma questão que deveria ser abordada de uma maneira coerente para que este conteúdo pudesse ser melhor compreendido, além de ser importante para que houvesse a percepção do aluno com relação à existência de números não-rationais. Assim, procurou-se explorar durante a aula a localização de números racionais em “pedaços” da reta numérica, bem como levar o aluno a compreender os critérios de ordem e de comparação entre números racionais. Por exemplo: pedi ao aluno para mencionar/ escrever um caso de número racional maior do que $\frac{1}{4}$ e menor do que $\frac{1}{3}$. Foi feito isto de modo que a cada aula, fosse colocado um intervalo menor do que os anteriores para que o aluno encontrasse nele um novo exemplo de racional contido ali.

Outro exemplo: em um intervalo $(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n})$, cujo “comprimento” é menor do que $\frac{1}{n}$, qual seria um número racional que estaria contido nesse intervalo? Admitindo-se $m, n \in \mathbb{N}$ para facilitar, mostrou-se que existe um racional que está no ponto médio entre as extremidades do intervalo, no caso: $\frac{2m+1}{2n}$. Isto é algo que foi apresentado aos alunos, procurando mostrar a eles sua veracidade, fazendo com que eles mesmos fizessem m e n assumirem alguns valores naturais. Depois de alguns cálculos, de algumas tentativas, a maioria dos alunos começou a perceber a idéia-chave por trás dessa situação.

Mais à frente, na sequência de aulas do 2º bimestre, começou-se a lançar situações para que os alunos se deparassem com as mesmas e fizessem suas próprias deduções, referentes à questão da relação entre a medida do lado de um quadrado e a área correspondente. Depois de alguns poucos casos explorados, percebeu-se que para a área de 2 unidades de superfície (ou para a área de 3

unidades) não havia uma medida racional relativa ao lado daquele quadrado. Começava, assim, o estudo sobre números irracionais. Em seguida, foi realizada a experiência com um jogo de tampas circulares e a relação entre o comprimento em volta de cada tampa (com barbante) e a medida do seu diâmetro, levando ao entendimento de que existe um fator constante, um número cuja quantidade de casas decimais é infinita e não periódica, denominado de π (letra grega pi), e cujo valor é aproximado para 3,14.

Outra questão, que muitas vezes não faz parte do pensamento comum, é a seguinte: se n é um número natural qualquer e no conjunto \mathbb{N} , somente se n for um quadrado perfeito é que \sqrt{n} representa um número inteiro positivo, é fato que $\frac{\sqrt{n}}{n}$ representa, na maior parte dos casos, um número não-racional. Portanto, não deveria ser tão estranho de se pensar que o conjunto $\sim\mathbb{Q}$ fosse maior ou “com mais elementos” do que o próprio conjunto \mathbb{Q} , seria?

Para esclarecer alguns conceitos e propriedades contidos no parágrafo anterior, sugiro que o professor leitor desta dissertação atente ao convite “para pensar” sobre algumas questões e sobre algumas demonstrações envolvendo raízes de números n , em geral, e de números primos p , em especial. A seguir, exercícios resolvidos e as demonstrações já mencionadas.

* Decimais exatos: em nosso sistema numérico decimal, os números (todos) podem ser expressos em uma sequência de algarismos. Essa sequência pode ser finita ou infinita. Quando a quantidade de algarismos, que ocupam uma sequência de casas, é finita, pode-se nomear o número de um número decimal finito ou decimal exato. Já quando a quantidade de algarismos, que ocupam uma sequência de casas, é infinita, pode-se nomear o número de um decimal infinito ou decimal não-exato.

** Comensurável: em geral, duas quantidades são comensuráveis se é possível exprimí-las na mesma unidade. Em matemática, diz-se que dois números reais são comensuráveis se a razão entre eles for um número racional.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

De fato, suponhamos que $\sqrt{3}$ seja racional. Assim, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, com m.d.c. $(a,b)=1$.

Então, $3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3 \cdot b^2 \Rightarrow a^2 = 3 \cdot q, q \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow a = 3 \cdot k, k \in \mathbb{Z}_+$. (a não pode ser $3k+1$ nem $3k+2$).

Seguindo, $(3k)^2 = 3 \cdot b^2 \Rightarrow 9 \cdot k^2 = 3 \cdot b^2 \Rightarrow b^2 = 3 \cdot k^2 \Rightarrow b = 3 \cdot k', k' \in \mathbb{Z}_+$. (b não pode ser $3 \cdot k' + 1$ nem $3 \cdot k' + 2$).

Portanto, se $a = 3 \cdot k$ e se $b = 3 \cdot k'$, então o m.d.c. (a,b) deve ser igual a 3, no mínimo. Assim, há uma contradição entre essa conclusão e uma das premissas assumidas no início, o que é absurdo. Logo, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2. Mostre que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, sendo p um primo qualquer.

Equivalentemente à demonstração da afirmação acima, pode-se considerar: dado que qualquer número primo p não é um quadrado perfeito e que a raiz quadrada de qualquer número natural n só é um número racional se n é um quadrado perfeito, então será demonstrada a segunda afirmação.

Dado um número natural n , suponha que \sqrt{n} seja um número racional. Então, pode-se escrever: $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, com m.d.c. $(a,b) = 1$.

Ora, $\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \cdot \sqrt{n}$. Assim, $b \cdot \sqrt{n}$ é um número inteiro.

Por outro lado, $b \cdot \sqrt{n} = a \Rightarrow b \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = a \cdot \sqrt{n} \Rightarrow b \cdot n = a \cdot \sqrt{n}$.

Assim, $a \cdot \sqrt{n}$ também é um número inteiro.

Como m.d.c. $(a,b) = 1$, sabe-se que existem números inteiros x e y tais que $a \cdot x + b \cdot y = 1$. Então, $a \cdot x \cdot \sqrt{n} + b \cdot y \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $(\sqrt{n})^2 = n$ é um quadrado perfeito.

3. Mostre que

a) Se $a \in \mathbb{Q}$ e $x \in \sim\mathbb{Q}$, então $a \cdot \bar{x} \in \sim\mathbb{Q}$

b) Se $a \in \mathbb{Q}$ e $x \in \sim\mathbb{Q}$, então $a \cdot x$ (ou $x \cdot a$) $\in \sim\mathbb{Q}$

CAPÍTULO 3

3.1. O Bingo dos Conjuntos Numéricos

Dentro das perspectivas de educação matemática no século XXI, de acordo com as diretrizes curriculares dos PCN e da matriz curricular da SEED/PR, a utilização do jogo como recurso indispensável para levar a aprendizagem para um contexto lúdico e de prática sócio-educativa é muito bem aceita.

Sendo assim, nas aulas do 2º bimestre de 2015, foi aplicada essa estratégia a partir de um jogo desenvolvido por mim mesmo, de modo que passo a descrever: a intencionalidade, os objetivos, um relatório a partir da prática, bem como a apresentação dos materiais digitalmente elaborados (e que foram impressos para manuseio dos estudantes).

A ideia para este jogo surgiu ao pensar em algum tipo de jogo já conhecido – dominó, bingo, sudoku, jogo de cartas – visto que eu gostaria de elaborar algum jogo que pudesse ser levado para a sala de aula e que tivesse um conjunto de regras fáceis de aprender, que levasse os alunos a pensarem sobre o conteúdo estudado, que envolvesse todos em torno de uma situação prazerosa e que apresentasse uma nova forma de “enxergar” os conjuntos numéricos recentemente estudados.

O jogo em questão pode ser batizado de “Bingo dos Conjuntos Numéricos”. Consiste em utilizar o formato das peças que compõem o bingo tradicional – cartelas e pedras (no caso, quadrados de papel) – sendo ao todo, 8 modelos de cartelas e 100 “pedras” marcadas com os símbolos dos conjuntos numéricos até então estudados (Ver páginas 31 a 34).

Após o sorteio das cartelas, distribuídas entre exatamente 10 trios de alunos (portanto, havia repetição de modelos de cartelas sendo utilizadas), o professor iniciou a leitura de cada símbolo de conjunto numérico sorteado, escrevendo-o no quadro negro para não deixar dúvidas. Os alunos/ jogadores, em seus grupos, deveriam ir anotando em uma folha de caderno o símbolo que foi sorteado, identificar a qual conjunto numérico aquele símbolo se referia e riscar um dos números de sua cartela que pertenceria àquele conjunto em questão. Logicamente, algumas cartelas continham mais símbolos para números inteiros, outras para

racionais, mas todas continham “apenas” números reais – cujo símbolo para o referido conjunto também estava disponível para sorteio.

Como os alunos poderiam riscar/ descartar mais depressa os números contidos em suas cartelas? Deveriam riscar um número natural (47, por exemplo) como um número real? Ou deveriam esperar para riscar o tal número natural apenas quando surgisse no quadro o símbolo \mathbb{N} ? Deveriam riscar os números irracionais ($\sqrt{15}$, por exemplo) somente quando aparecesse o símbolo $\sim\mathbb{Q}$? Ou no caso daqueles números, deveriam riscá-los quando fosse sorteado o símbolo dos números reais? Essas dúvidas, questionamentos, ficaram paupáveis quando da realização deste jogo durante a aula no 8º ano, permitindo com que muito do que se pode esperar quanto ao processo de aprendizagem deste conteúdo fosse cristalizado e pudesse ser debatido, inclusive e principalmente, após a aula do jogo.

Alguns grupos tiveram muitas dificuldades, por ainda não dominarem o conteúdo – confundiam símbolos dos conjuntos, tinham dúvidas se frações (e se números decimais) eram números racionais (talvez nem pensassem se seriam reais!), não sabiam quais os números de sua cartela eram irracionais, etc. Outros, tiveram “menos sorte” se considerarmos as distribuições de números por conjuntos numéricos em suas cartelas, bem como a da ordem de símbolos/ conjuntos sorteada pelo professor – mas isso é um assunto para outra dissertação, para outro momento!

De qualquer modo, após uma sucessão de 28 símbolos retirados/ anunciados pelo professor, um time formado pelas alunas ANA, MARIA e PAULA (os nomes são fictícios) se saiu vencedor, riscando corretamente todos os números de sua cartela em correspondência aos símbolos já anunciados e escritos no quadro, pelo professor, e por elas, numa folha de caderno.

3.2. EXEMPLO DE CARTELA DO JOGO DO BINGO DOS CONJUNTOS

Q	Z	Q	R	Z	N	\sim Q	N	R	Q
R	Q	\sim Q	N	Q	Q	Q	N	Q	R
R	\sim Q	R	Q	R	Z	R	Q	R	N
\sim Q	Z	R	\sim Q	N	N	\sim Q	R	Z	R
Z	R	\sim Q	R	Z	R	Z	Z	R	Z
R	N	Z	\sim Q	N	\sim Q	N	\sim Q	Q	\sim Q
Z	\sim Q	N	Q	\sim Q	N	\sim Q	Q	R	Q
Q	R	Q	R	Q	R	Q	R	Q	R
R	Z	Z	\sim Q	R	Z	\sim Q	Z	R	Z
Z	\sim Q	Q	Z	Q	\sim Q	Z	\sim Q	Z	\sim Q

3.2. Cartelas numeradas para jogo do bingo dos conjuntos

	$\frac{3}{5}$			41		- 10,1		2,31...	
0		$\sqrt{7}$	- 2		0,555...				$\frac{35}{7}$
	1,35	- 5,9		1,75		$\sqrt{15}$		1459	
$-\frac{2}{9}$			- 2,3		64		π		0,129
	$\frac{10}{3}$			$-\frac{7}{10}$		- 32		- 77	
0,111...		$\sqrt{81}$			$\frac{1}{3}$		676	$\sqrt{169}$	

$\sqrt{25}$		$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{7}$		10,58		12,33...		
	7,9			7,77				- 87	
- 33			π	- 5,6		32	$\frac{1}{6}$		- 2,9
	-1,333...	$\sqrt{11}$			- 123			$\frac{8}{5}$	
	1000			$\sqrt{64}$		0,012			68
0		- 0,1	5,222...		$\sqrt{557}$		450	$\sqrt{441}$	

$\sqrt{2}$		$\frac{2}{9}$			12,34		3,33...		394
		$-\frac{3}{10}$		575		0,001		- 75	
- 9			0				$\frac{1}{5}$		- 0,99...
$\sqrt{16}$	-1,5717	$\sqrt{39}$			- 7957	2,45		$\frac{2}{11}$	
	π		23,7	$\sqrt{8}$			$\sqrt{17}$		- 16
	450	- 34			$\sqrt{\frac{4}{3}}$			$\sqrt{196}$	

$\sqrt{113}$	$-1/10$	1,22...		- 7,3	0,55				4670
		$-3/10$				- 9		$\sqrt{10}$	
- 25			- 4,6...		$\sqrt{9}$		$1/5$		$-5/9$
	2,3571	$\sqrt{256}$		0,125	- 79,5	2,45		$2/13$	
$6/5$			58	$\sqrt{81}$		47	π		-1,77...
	0	-3,77...			$24/3$			0,456	

	$3/5$			35		- 10,1		0,111...	
6,125		$\sqrt{49}$	0		0,57				$35/7$
	1	- 99		1,75		$\sqrt{15}$		1459	
$-2/9$			- 2,11...		64		π		$\sqrt{9}$
	$1/6$			$-7/10$		- 32		- 77	
$\sqrt{11}$		$-3/9$			$15/3$		676	$\sqrt{100}$	

$\sqrt{5}$		$4/9$			10,64		2,77...		152
		$-5/10$		$\sqrt{81}$		0,009		- 35	
- 12			π				$1/5$		-9,999...
$\sqrt{9}$	-5,0717	$\sqrt{29}$			- 971	15,45		$2/11$	
	0		13,5	$\sqrt{12}$			$\sqrt{17}$		- 7
	50	- 62			$\sqrt{9}/3$			$\sqrt{900}$	

5,11...	7,5		14			$\sqrt{25}$	0,66...		
		$-13/10$		$\sqrt{81}$	555,5	100		-33	π
-1	$\sqrt{70}$		15,75				$15/5$		
$1/23$		$\sqrt{29}$			$5/6$	777		$2/9$	
	0		0,038	$\sqrt{21}$			-1,33...		-65
		2^3			-6			$\sqrt{861}$	

$\sqrt{55}$		$4/5$	$-1/7$		3^2		12,33...		
	9,997			3,333				π	
-300			$\sqrt{144}$	-0,6		4	$1/6$		-2,9
	-1,333...	$\sqrt{11}$			-123			$8/5$	
	1050			$\sqrt{4}$		0,012			146
0		5,11...	$11/6$		$\sqrt{51}$		$\sqrt{16}/4$	$\sqrt{441}$	

CAPÍTULO 4

4.1. Breve Histórico e Conceitos Relacionados

Após haver sido explicitada a principal condição para que um número seja racional, no Capítulo 2 (NIVEN, 1984), e também, após terem sido apresentadas propriedades associadas aos racionais, chega-se ao ponto em que se pretende abordar o que são e quais são as propriedades de números conhecidos por irracionais.

Todo número real, portanto, que não puder ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$, é denominado irracional. Que números aparecem neste conjunto infinito de elementos que podem ser assim classificados? Bem, em princípio, é possível responder: as dízimas não-periódicas, as raízes quadradas de números primos (entre muitas raízes, de todos os índices, de infinitos números naturais) e alguns números transcendentos, como π e e .

E quanto ao tamanho deste conjunto de números: se trata de um conjunto maior, menor ou do mesmo tamanho em relação ao conjunto dos racionais?

Bem, historicamente, os números irracionais começaram a ser “percebidos” e pesquisados quando os gregos, sobretudo os pitagóricos, deram conta que nem todas as medidas são comensuráveis entre si, isto é, nem sempre se consegue expressar duas medidas por meio de submúltiplos de uma única medida-padrão, comum às duas. Então, se percebeu que $\sqrt{2}$ ou que $\sqrt{3}$ não possuem uma representação decimal finita, nem uma representação decimal infinita e periódica.

A primeira descoberta de um número irracional é geralmente atribuída a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras. Ele teria produzido uma demonstração (provavelmente geométrica) de que a raiz de 2 (ou talvez que o número de ouro) é irracional. No entanto, Pitágoras considerava que a raiz de 2 "maculava" a perfeição dos números, e portanto não poderia existir. Mas ele não conseguiu refutar os argumentos de Hipaso com a lógica, e a lenda diz que Pitágoras condenou seu seguidor ao afogamento.

A partir daí os números irracionais entraram na obscuridade, e foi só com Eudoxo de Cnido que eles voltaram a ser estudados pelos gregos. O décimo livro da série Os elementos de Euclides é dedicado à classificação de números irracionais.

Foi só em 1872 que o matemático alemão Dedekind (de 1831 a 1916) fez entrar na Aritmética, em termos rigorosos, os números irracionais que a geometria sugerira havia mais de vinte séculos.

Mas foi só a partir dos séculos XVIII e XIX, que os matemáticos puderam sistematizar, em termos de linguagem de conjuntos e de Análise dos números reais, as propriedades e as próprias fronteiras dos conjuntos: dos irracionais e dos reais.

Então, passou-se a saber que, mais do que fazer distinção para os números reais em racionais e em irracionais, existem os números *algébricos*, raízes de equações algébricas de coeficientes inteiros, e os números *transcendentes* (todos os demais). E que alguns números *algébricos* são racionais, outros são irracionais; mas todos os *transcendentes* são irracionais.

Segundo NIVEN (1984), descrevem-se a seguir as propriedades relativas aos principais conjuntos que precisam ser analisadas com relação ao conjunto dos números irracionais.

Propriedade do fechamento

Ao contrário dos números racionais, em que ocorre o fechamento para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (à exceção por zero), para os números irracionais isso não ocorre. Por qual motivo? Porque se consegue, pelo menos com um contra-exemplo, mostrar que a soma de dois irracionais pode ser um número racional; que a subtração de um irracional por outro irracional também pode ser um número racional; que o produto de um irracional por outro irracional pode ser um número racional; e que o quociente da divisão de um irracional por outro irracional pode ser racional.

Existe um teorema importante, para auxiliar a demonstrar os fatos relacionados ao não-fechamento do conjunto dos irracionais para as principais operações aritméticas envolvendo números do próprio conjunto. Seu enunciado consiste em:

Teorema 1. *Seja um número irracional α qualquer e um número racional r qualquer, $r \neq 0$, tais que os resultados das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre α e r são números irracionais. Também $-\alpha$ e α^{-1} são números irracionais.”*

Para demonstrar o teorema anterior, pode-se recorrer ao método indireto (prova de redução ao absurdo). Assim, suponha que $-\alpha$ seja racional. Então, $-\alpha = r'$, em que r' é um suposto número racional. Logo, $\alpha = -r'$, onde $-r'$ é também um número racional. Mas isso é um absurdo, pois α é, por hipótese, um número irracional.

Caso 1: se α é irracional e r é um racional não-nulo, temos que $\alpha \pm r$ é um irracional.

Demonstração: vamos provar por redução ao absurdo; primeiramente, admitindo que $\alpha + r$ seja um número racional. Então, $\alpha + r = r_1$, o que implica que $\alpha = r_1 - r$ em que a expressão $r_1 - r$ é racional (a diferença entre dois números

racionais quaisquer é sempre racional). Logo, α seria um número racional, o que é um absurdo porque, pela hipótese, α é um irracional! Portanto, $\alpha + r$ é irracional.

Analogamente, pode-se provar que $\alpha - r$ é também um irracional, pelo mesmo método, porque a adição é também fechada no conjunto dos números racionais.

Caso 2: se α é irracional e r é um racional não-nulo, então $\alpha \cdot r$ é um irracional.

Demonstração: vamos provar pelo método da redução ao absurdo. Admitindo que $\alpha \cdot r$ é um racional, temos $\alpha \cdot r = r_2$. Mas, então, $\alpha = \frac{r_2}{r}$, o que significa que α é um número racional (o quociente entre dois números racionais quaisquer é um número racional). Logo, chegamos a um absurdo pois, por hipótese, α é irracional. Portanto, $\alpha \cdot r$ é um irracional.

Caso 3: se α é irracional e r é um racional não-nulo, então α/r é um irracional.

Demonstração: vamos provar pelo método da redução ao absurdo. Admitindo que α/r é um racional, temos $\frac{\alpha}{r} = r_3$. Isso implica que $\alpha = r \cdot r_3$; logo, α seria um número racional (o produto de dois números racionais quaisquer é sempre um número racional). Mas isto é absurdo, pois por hipótese α é irracional! Portanto, α/r é um irracional.

Caso 4: se α é irracional e r é um racional não-nulo, então r/α é um irracional.

Demonstração: vamos provar, mais uma vez, pelo método da redução ao absurdo. Admitindo que r/α é um racional, temos $\frac{r}{\alpha} = r_4$. Isso implica que $\alpha = \frac{r}{r_4}$; logo, α seria um número racional (o quociente entre dois números racionais quaisquer é um número racional). Logo, chegamos a um absurdo pois, por hipótese, α é irracional. Portanto, r/α é um irracional.

Assim, fica demonstrado o teorema que permite, por sua correta utilização, gerar uma infindável quantidade de números irracionais. A partir de um α irracional qualquer – por exemplo, $\sqrt{2}$ – e de diferentes valores racionais para r , surgem incontáveis `novos` números irracionais.

Ainda segundo NIVEN (1984), é necessário procurar um método mais generalizante para estabelecer a irracionalidade de uma classe de números. Isso é possível pelo estudo de equações polinomiais algébricas simples, cujas raízes podem ser números irracionais. É preciso estudar em que condições isso ocorre.

Por exemplo, números como $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[5]{12}$ são números irracionais que satisfazem as seguintes equações:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^3 - 7 = 0$$

$$x^5 - 12 = 0$$

Tais equações, entre muitas outras, não possuem soluções racionais (aquelas que atendem certas condições). Elas são equações polinomiais da forma

$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 = 0$, em que $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ são coeficientes racionais. Podemos escrever $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$, $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $c_2 = \frac{a_2}{b_2}$ e assim por diante, onde $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$, etc. são números inteiros.

Portanto, um método para determinar se um dado número é ou não é racional passa por conseguir escrever uma equação polinomial algébrica que possua como uma de suas soluções, pelo menos, esse tal número. E isso vale para qualquer número cuja irracionalidade já seja conhecida – como raízes quadradas de alguns números – ou até para números mais complicados mesmo em sua forma de apresentação, como $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{7}}$.

Para estudar raízes racionais de equações polinomiais, ainda segundo Niven (1984), é necessário provar um teorema:

Teorema 2. *Considere uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$; se esta equação tiver uma raiz racional $\frac{a}{b}$, onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então a será divisor de c_0 e b será divisor de c_n .*

Para demonstrar esse teorema, é necessário utilizar um teorema auxiliar:

Teorema auxiliar. *Sejam u, v e w inteiros tais que u seja um divisor de $v \cdot w$ e tal que u e v não tenham fatores primos comuns. Então, u é um divisor de w . De modo mais geral, se u for um divisor de $v^n \cdot w$, em que n é um inteiro positivo qualquer, e u e v não tiverem fatores comuns, então u será um divisor de w .*

Demonstração do Teorema 2: seja um número racional $\frac{a}{b}$ uma raiz da equação $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$. Portanto, $c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$.

Iniciando pelo caso em que $n = 3$, tem-se:

$$c_3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

Multiplicando-se ambos os membros por b^3 , obtém-se:

$$c_3 \cdot a^3 + c_2 \cdot a^2 \cdot b + c_1 \cdot a \cdot b^2 + c_0 \cdot b^3 = 0 \quad (I)$$

Pode-se escrever a equação anterior da seguinte forma:

$$c_3 \cdot a^3 = b \cdot (-c_2 \cdot a^2 - c_1 \cdot a \cdot b - c_0 \cdot b^2)$$

E, então, é possível ver pela Aritmética que b é um divisor de $c_3 \cdot a^3$. Logo, pode-se aplicar o teorema auxiliar apresentado anteriormente, de tal modo que b , a e c_3 estejam nos lugares de u , v e w . Uma das hipóteses do teorema auxiliar está satisfeita, pois u e v não podem ter fatores comuns – o que ocorre porque $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. A outra também, pois vimos que b é um divisor de $c_3 \cdot a^3$ (sendo $n=3$). Portanto, b é um divisor de c_3 . Uma das teses do teorema principal está provada. Então, deve-se procurar reescrever a equação (I) tal que

$$c_0 \cdot b^3 = a \cdot (-c_1 \cdot b^2 - c_2 \cdot a \cdot b - c_3 \cdot a^2)$$

Deste modo, consegue-se verificar que a é um divisor de $c_0 \cdot b^3$ e, mais ainda, de c_0 . Fica, portanto, demonstrado o teorema principal para o caso em que $n = 3$.

É necessário, agora, fazer a demonstração para o caso geral (n qualquer).

Toma-se a equação geral, inicialmente dada, com $x = \frac{a}{b}$ e n qualquer:

$$c_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + c_{n-2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + c_2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0$$

Multiplicam-se ambos os membros por b^n , de modo que

$$c_n \cdot a^n + c_{n-1} \cdot b \cdot a^{n-1} + c_{n-2} \cdot b^2 \cdot a^{n-2} + \dots + c_2 \cdot b^{n-2} \cdot a^2 + c_1 \cdot b^{n-1} \cdot a + c_0 \cdot b^n = 0 \quad (II)$$

Pode-se reescrevê-la tal que

$$c_n \cdot a^n = b \cdot (-c_{n-1} \cdot a^{n-1} - c_{n-2} \cdot b \cdot a^{n-2} - \dots - c_2 \cdot b^{n-3} \cdot a^2 - c_1 \cdot b^{n-2} \cdot a - c_0 \cdot b^{n-1})$$

Consegue-se ver que b é um divisor de $c_n \cdot a^n$. Utilizando-se o teorema auxiliar, com b , a e c_n no lugar de u , v e w , respectivamente, conclui-se que b é um divisor de c_n .

Em seguida, reescreve-se a mesma equação (II), de modo que

$$c_0 \cdot b^n = a \cdot (-c_n \cdot a^{n-1} - c_{n-1} \cdot b \cdot a^{n-2} - c_{n-2} \cdot b^2 \cdot a^{n-3} \dots - c_2 \cdot b^{n-2} \cdot a - c_1 \cdot b^{n-1})$$

Então, aí se consegue ver que a é um divisor de $c_0 \cdot b^n$. Analogamente ao processo realizado anteriormente, pode-se concluir que a é um divisor de c_0 .

Portanto, está demonstrado o teorema principal.

A seguir dois resultados importantes, consequências do Teorema 2 demonstrado:

01) Considere uma equação da forma $x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + c_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x^1 + c_0 = 0$, com coeficientes inteiros. Se a equação possuir uma raiz racional, essa raiz será uma raiz inteira; além disso, essa raiz será um divisor de c_0 .

02) Um número da forma $\sqrt[n]{a}$, com a e n inteiros positivos, ou é um número irracional ou é um número inteiro; no segundo caso, a é uma enésima potência de um inteiro.

EXERCÍCIO

1. (AV3/ MA11/ PROFMAT2014)

a) Encontre uma expressão para $\text{sen } 3x$ como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de $\text{sen } x$.

b) Mostre que $\text{sen } 10^\circ$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e use este fato para concluir que $\text{sen } 10^\circ$ é um número irracional.

Solução:

a) Pela trigonometria, sabe-se que:

$$\begin{aligned}\text{sen } 3x &= \text{sen } 2x \cos x + \text{sen } x \cos 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x + \text{sen } x \cdot (1 - 2 \cdot \text{sen}^2 x) \\ &= 2 \cdot \text{sen } x \cdot (1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen } x - 2 \cdot \text{sen}^3 x = 3 \cdot \text{sen } x - 4 \cdot \text{sen}^3 x\end{aligned}$$

Logo, fazendo com que $\text{sen } x = u$, temos: $P(u) = 3 \cdot u - 4u^3$.

b) Suponha-se que $\text{sen } 10^\circ$ seja racional. Então, existem $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, primos entre si, tais que $\text{sen } 10^\circ = \frac{p}{q}$.

Usando o item anterior, pode-se ver que: $\frac{1}{2} = \text{sen } 30^\circ = 3 \cdot \text{sen } 10^\circ - 4 \cdot \text{sen}^3 10^\circ$ e isto implica que $\text{sen } 10^\circ$ é raiz da equação polinomial $8u^3 - 6u + 1 = 0$ equação (1)

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial (1), então: $8 \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$.

Escrevendo a última equação nas formas: $8p^3 = 6pq^2 - q^3$ e $q^3 = 6pq^2 - 8p^3$, e observando que p e q são primos entre si, vemos que $p|1$ e $q|8$. Assim, as únicas possibilidades para as raízes racionais são $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, visto que $\text{sen } 10^\circ$ é positivo e diferente de 1. Como nenhum desses números é raiz da equação (1), temos que (1) não tem raízes racionais e, visto que $\text{sen } 10^\circ$ é raiz de (1), concluímos que $\text{sen } 10^\circ$ é irracional.

4.2. Formas de Representação de Números Irracionais

Dentre as inúmeras classes de números que podem ser classificados como números irracionais, podem ser destacadas algumas. São elas:

a) Todos os números da forma $\sqrt[n]{a}$, desde que a não seja uma potência da forma $b^{k.n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Todos os números da forma $k.\sqrt{p}$, em que p é um natural primo, e $k \in \mathbb{Z}$.

c) Todos os números da forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, em que a e b não são, ao mesmo tempo, quadrados perfeitos.

d) Todos os números da forma $\log_b a^c$, de modo que a não pode ser decomposto em nenhum fator primo b .

e) Os números compostos pela adição, subtração, multiplicação e divisão, envolvendo dois ou mais de alguns números dessas classes já mencionadas – à exceção dos casos em que um ou mais número(s) anule(m) um deles (ou outros daqueles números).

f) Aqueles números especiais, cuja representação infinita e não-periódica é muitas vezes desconhecida mas sua simbolização pelo uso de algumas letras gregas é bastante conhecida: π , φ , ε , etc.

Operações Aritméticas e Expressões Algébricas envolvendo Irracionais

$$\text{I. } \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{II. } \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{III. } \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = (a+b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\text{IV. } \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a \cdot b}}$$

$$\text{V. } \frac{a}{\sqrt{a}} - \frac{b}{\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\text{VI. } \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b}$$

VII. $\frac{\sqrt{a-b}}{a} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{b} = \frac{a-b}{a \cdot b}$ (sendo a e b inteiros, tal que $a > b$, o produto de dois irracionais pode ser racional)

$$\text{VIII. } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\text{IX. } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a-2\sqrt{a \cdot b}+b}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{a+b}{\sqrt{a \cdot b}} - 2$$

$$\text{X. } \frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(a+b) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (a-b) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{b}-a\sqrt{a}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} = \frac{2b\sqrt{a}+2a\sqrt{b}}{a-b}$$

$$\text{XI. } \frac{1}{a\sqrt{b}} - \frac{1}{b\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a \cdot b \cdot \sqrt{a \cdot b}} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{b}-a \cdot b \cdot \sqrt{a}}{a^2 \cdot b^2} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a \cdot b}$$

$$\text{XII. } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}-b+a-\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{(a-b) \cdot \sqrt{a \cdot b}}{a \cdot b}$$

4.3. A aproximação de números irracionais por números racionais

Dado um número irracional w e um número natural $n \geq 1$, sempre podemos encontrar um número racional $\frac{x}{y}$, tal que $0 < w - \frac{x}{y} < \frac{1}{10^n}$. (Isso quer dizer: a diferença entre um irracional e um racional pode ser diminuída à ordem de grandeza inversa à do número natural n).

De fato, temos

$$w = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots, \text{ em que } a \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

Podemos considerar

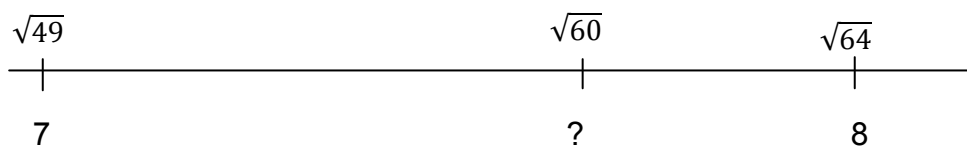
$$\frac{x}{y} = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} \text{ e, daí, teremos}$$

$$w - \frac{x}{y} = \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^{n+3}} + \dots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^{n+r}} + \dots = \frac{1}{10^n} \cdot \left(\frac{\alpha_{n+1}}{10} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^2} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^r} + \dots \right) = \frac{1}{10^n} \cdot (0, \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} \dots) < \frac{1}{10^n}.$$

Uma outra maneira de aproximação de números irracionais por um método que utiliza números racionais fracionários

Entre algumas possíveis estratégias para ensinar os alunos dos níveis Fundamental e Médio a calcularem, por aproximação, os resultados de raízes de índice par para números naturais - e que não sejam exatos - pode-se utilizar de uma técnica que faz uso de razão e proporção aplicada à representação em uma reta numérica. Vamos visualizar um exemplo:

a) Cálculo para $\sqrt{60}$.



$$\text{Então, } \sqrt{60} = 7 + \frac{11}{15} = \frac{116}{15} = 7,73 \dots \text{ ou } \sqrt{60} = 8 - \frac{4}{15} = \frac{116}{15} = 7,73 \dots$$

Tal erro é relativamente pequeno, aproximadamente de 0,02 (para uma aproximação até a ordem centesimal). É fato que este método nos traz um pouco mais de segurança aritmética do que, por exemplo, simplesmente realizar uma estimativa por aproximação de um valor entre duas outras raízes quadradas de valor exato e conhecido, o que é mais frequentemente ensinado em sala de aula, no Ensino Fundamental.

A tendência (projeção) é que esse erro possa aumentar e ser mais significativo quanto maior for o intervalo entre as raízes quadradas de valor decimal exato que sejam as extremidades utilizadas para este cálculo - de um valor aproximado para uma raiz quadrada de um número natural cujo valor não seja exato.

EXERCÍCIOS

1. Sejam x e y dois números racionais com $x < y$. Mostre que entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um número racional e um irracional.

Demonstração: O número $\frac{x+y}{2}$ está situado entre os números racionais x e y e como a soma e o produto de números racionais é um racional, segue que $\frac{x+y}{2}$ satisfaz a condição requerida.

O número $x + \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ também está situado entre os números racionais x e y e, para concluir, basta ver que $x + \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ é irracional. Sabemos que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é irracional e que o produto de um irracional por um racional (não-nulo) é irracional. Como $y - x > 0$ é racional, segue que $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y - x) = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ é irracional. A soma de um racional com um irracional também é irracional e, portanto, $x + \frac{y-x}{\sqrt{2}}$ é irracional e está situado entre os números racionais x e y .

2. Prove que o conjunto \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração: como $b - a > 0$, a propriedade arquimediana garante que existe um número natural n tal que $n \cdot (b - a) > 1$. Além disso, usando novamente a mesma propriedade arquimediana, existem naturais s e t tais que $s > n \cdot a$ e $t > -n \cdot a$. Portanto, $-t < na < s$. Logo, existe pelo menos um inteiro m entre $-t$ e s , tal que $m - 1 \leq na \leq m$. Temos:

$$na < m \leq 1 + na < nb$$

Como $n > 0$, tem-se $a < \frac{m}{n} < b$, o que prova a proposição, sendo $r = \frac{m}{n}$.

3. Seja o intervalo $(2^{-101}, 2^{-100}) \subset \mathbb{R}$. Mostre que neste intervalo existe uma infinidade de números racionais e uma infinidade de números irracionais. Sugestão: (utilize o exercício 1)

EXERCÍCIOS – PARTE II

4. Dado um número irracional w e um número natural $n \geq 1$, sempre podemos encontrar um número racional $\frac{x}{y}$, tal que $0 < w - \frac{x}{y} < \frac{1}{10^n}$. (Isso quer dizer: a diferença entre um irracional e um racional pode ser diminuída à ordem de grandeza inversa à do número natural n).

De fato, temos

$$w = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots, \text{ em que } a \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

Podemos considerar

$$\frac{x}{y} = a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} \text{ e, daí, teremos}$$

$$w - \frac{x}{y} = \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^{n+3}} + \dots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^{n+r}} + \dots = \frac{1}{10^n} \cdot \left(\frac{\alpha_{n+1}}{10} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^2} + \frac{\alpha_{n+3}}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_{n+r}}{10^r} + \dots \right) = \frac{1}{10^n} \cdot (0, \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \alpha_{n+3} \dots) < \frac{1}{10^n}.$$

CONTINUAÇÃO: EXERCÍCIOS E EXEMPLOS

5. Uma fórmula para aproximação de números irracionais por meio de racionais

Decorrente do Método de Newton, a seguinte fórmula: $\frac{x^2-n^2}{2n} + n \approx x$, em que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Q}$, nos permite calcular com o grau de aproximação mais conveniente o valor de um número irracional – como uma raiz quadrada de um número natural primo.

Vejamos a aplicação da fórmula para o cálculo de $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} \approx \frac{(\sqrt{3})^2 - 1^2}{2 \cdot 1} + 1 \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{3-1}{2} + 1 \Rightarrow \sqrt{3} \approx 2$$

$$\sqrt{3} \approx \frac{(\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot 2} + 2 \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{3-4}{4} + 2 \Rightarrow \sqrt{3} \approx -\frac{1}{4} + 2 \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{7}{4} = 1,75$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &\approx \frac{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{7}{4}} + \frac{7}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{3 - \frac{49}{16}}{\frac{7}{2}} + \frac{7}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{-\frac{1}{16}}{\frac{7}{2}} + \frac{7}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \approx -\frac{2}{112} + \frac{7}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \\ &\approx \frac{194}{112} = 1,73 \end{aligned}$$

6. “Dê um exemplo de número racional, maior do que $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$ e menor do que $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, para $n \in \mathbb{N}$.”

Temos que: $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, pois $\frac{n}{n+1} < 1$ e $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^4} < \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[6]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}$.

Então, para um racional $\frac{x}{y} > 0$, devemos ter:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} < \frac{x}{y} < \sqrt{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{x}{y} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Logo, } \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} > \frac{n}{n+1} \text{ e } \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{Portanto, } \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{n}{n+1} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Para que $\frac{n}{n+1}$ seja da forma $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}}$, isto é, seja racional, deve-se ter o expoente $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Neste caso, isto é impossível. Ocorre, portanto, que deve existir uma fração racional compreendida entre as duas fornecidas pelo enunciado, de tal modo que ela não é da forma $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$.

7. “O número $\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$, com $n \neq 1$, é racional? Ou é irracional? Justifique.”

$$\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = \frac{n^2+2n\sqrt{n}+(\sqrt{n})^2}{n^2-(\sqrt{n})^2} = \frac{n^2+n+2n\sqrt{n}}{n^2-n} = \frac{n+1+2\sqrt{n}}{n-1}.$$

Portanto: se n é quadrado perfeito, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \in \mathbb{Q}$. Caso contrário, $\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1º Exercício de aprofundamento (proposto para o Ensino Médio): determine um racional $\frac{x}{y}$ entre os irracionais $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}$ e $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Devemos ter: $\sqrt[3]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2} < \frac{x}{y} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, com $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{N}$ e $y \neq 0$.

Então, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{x}{y} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 < \frac{n}{n+1} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$

Mas, para que $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{n}{n+1}$, isto é, para que $\frac{x}{y}$ seja da forma $\frac{n}{n+1}$ devemos ter $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. O que é impossível, para o intervalo $2 < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$ ou mesmo para o intervalo $2 > \frac{a}{b} > \frac{3}{2}$.

Observação: no entanto, sabemos que existe um racional, pelo menos, entre os dois irracionais dados no enunciado – que não é da forma $\frac{n}{n+1}$.

2º Exercício de aprofundamento (proposto para o Ensino Médio): Seja $\frac{\sqrt{3k-1}}{1000} < \frac{m}{n} < \frac{\sqrt{3k+2}}{1000}$, $k \in \mathbb{N}$. Dê um exemplo de racional $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, compreendido entre os irracionais dados anteriormente.

Podemos escrever: $\frac{3k-1}{1000000} < \frac{m^2}{n^2} < \frac{3k+2}{1000000}$. Assim, se $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3k}}{1000}$, com $k \in \{3, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n+1}\}$ já temos exemplo de uma classe de racionais dentro da qual há inúmeros exemplos particulares.

3º Exercício de aprofundamento (proposto tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio): determine um irracional entre os racionais $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \neq b$.

Sendo $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b} < \frac{a}{b}$, temos que: $\sqrt{a \cdot b} < a \Rightarrow a \cdot b < a^2 \Rightarrow a^2 - a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot (a - b) > 0$

Como $a > 0$, então $a - b > 0 \Rightarrow a > b$.

Também sabemos que: $a \cdot b \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) > 0$. Assim: $a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 > 0 \Rightarrow$

$$a^3 \cdot b + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 > a^2 \cdot b^2 \Rightarrow \frac{a \cdot b}{b^2} > \frac{a^2}{a^2 + a \cdot b + b^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b} > \frac{a}{a+b}$$

Logo: $\frac{a}{a+b} < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} < \frac{a}{b}$, com $a > b$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conteúdo em foco nesta dissertação é formado de conhecimentos e ideias importantes para o desenvolvimento do conhecimento matemático acerca dos conjuntos dos números racionais e dos números irracionais e para a possibilidade de criar-se matemática relevante. Ele se mostra um campo de estudo amplo, que envolve diversas propriedades e aplicações, o que se evidencia por aquilo que foi apresentado por meio de definições, demonstrações, propostas pedagógicas e de algumas reflexões, não só a respeito de certos aspectos epistemológicos mas também quanto ao relatório de uma proposta colocada em prática na sala de aula.

De acordo com o que foi apresentado anteriormente, com base em pesquisas e citações de outros pesquisadores, foi possível aprender e perceber com mais ênfase os diversos aspectos que estão subjacentes à área em questão, bem como os resultados alcançados na prática do ensino em sala de aula desse conteúdo.

Isso serve para que o professor se comprometa a não ser apenas um facilitador ou simplificador enquanto professor preocupado com o ensino e com a aprendizagem da matemática na escola atual. Há oportunidades e perspectivas que estão sendo anunciadas e compartilhadas via SBM, OBMEP e PROFMAT, já há alguns anos.

O desafio é procurar não estar satisfeito ou conformado com o que tem sido oferecido aos alunos do Paraná e do Brasil, nas escolas públicas, principalmente diante do quadro da educação – ainda muito carente de investimento em formação pedagógica, condições de trabalho para os docentes e mesmo para a possibilidade de estudar-se com um mínimo de qualidade que existe para os alunos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Análise na Reta Real**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Blucher, 2006.

BAHIANO, Carlos E. N. . **Números Racionais e Irracionais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: OBMEP, 2005.

BARTLE, Robert G. . **Elementos de Análise Real**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1ª edição. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOYER, R.; SPIEGEL, M. **Álgebra**. 3ª Edição. Coleção Schaum. Rio de Janeiro: Bookman, 2015.

NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. 2ª edição. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

HAMMACK, R. Cardinality Of Sets. In: HAMMACK, R.. **Book Of Proof**: subtítulo. Edição 2.2 Local: Virginia, U.S.A. Creative Commons Attribution No-Derivative Works 3.0, 2013. p. 224-225.

NIVEN, I. **Numbers: Rational and Irrational**. Edição 1 Local: New York, U.S.A. The L.W. Singer Company – A Division Of Random House, 1961. p. 21-35.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. Diretrizes Curriculares Da Educação Básica. Matemática. 2008.

WHINSTON, Amy. **A Finite History Of Infinity**. In partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters of Science in Teaching Mathematics. Portland State University. 2009.

WIKIPÉDIA: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_irracional

APÊNDICE

Teorema: O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em \mathbb{R} .

Demonstração: Seja (a, b) um intervalo aberto qualquer em \mathbb{R} . Devemos mostrar que existem um número racional e um número irracional em (a, b) . Como $b - a > 0$, existe um número natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m}{p}, m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta \mathbb{R} em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Como $\frac{1}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a, b) , algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair dentro de (a, b) . Esta é a ideia intuitiva da demonstração. Raciocinemos agora logicamente: seja $A = \{m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{p} \geq b\}$. Como \mathbb{R} é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b.p$. Seja $m_0 \in A$ o menor elemento de A . Então, $b \leq \frac{m_0}{p}$ mas, como $m_0 - 1 < m_0$, tem-se $\frac{m_0 - 1}{p} < b$. Afirmamos que $a < \frac{m_0 - 1}{p} < b$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{m_0 - 1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0}{p}$. Isto acarretaria $b - a \leq \frac{m_0}{p} - \left(\frac{m_0 - 1}{p}\right) = \frac{1}{p}$, uma contradição.

Logo, o número racional $\frac{m_0 - 1}{p}$ pertence ao intervalo (a, b) . Para obter um número irracional no intervalo (a, b) , tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b - a}{\sqrt{2}}$, ou seja $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$. Os números da forma $\frac{m \cdot \sqrt{2}}{p}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, são (salvo $m = 0$) irracionais e dividem a reta \mathbb{R} em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{p}$ é menor do que o comprimento $b - a$ do intervalo (a, b) , conclui-se que algum $\frac{m \cdot \sqrt{2}}{p}$ deve pertencer a (a, b) . A demonstração formal se faz como no caso anterior: se m_0 for o menor inteiro tal que $b \leq \frac{m_0 \cdot \sqrt{2}}{p}$, então o número irracional $\frac{(m_0 - 1) \cdot \sqrt{2}}{p}$ pertence ao intervalo (a, b) .

Exemplos: Utilizando números para exemplificar o Teorema Anterior (Apêndice D)

PARTE A (para números racionais)

Escolhemos, $a=1$ e $b=2$ para o intervalo aberto (a,b) . Assim, $b - a = 2 - 1 = 1$.

Vamos escolher, também, um número natural p tal que $0 < \frac{1}{p} < 2 - 1 = 1$. Seja $p=5$.

(Qualquer $p \in \mathbb{N}$ satisfaz essa condição!).

Os números da forma $m \cdot \frac{1}{p}$, $m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta \mathbb{R} em intervalos de comprimento $\frac{1}{p}$. Sejam, então, $p=5$ e $m=6$. Como $\frac{1}{5} < 1$, algum dos números $\frac{m}{p}$ deve cair em $(1,2)$. Por exemplo, $\frac{6}{5} \in (1,2)$.

Seja $A = \{m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{5} \geq 2\}$. A não é vazio e é limitado inferiormente por $2.5 = 10$ ($m \geq 10$).

O menor elemento de A é $m_0 = 10$. Então, $2 \leq \frac{10}{5}$ e temos $\frac{10-1}{5} = \frac{9}{5} < 2$. Pode-se afirmar que $1 < \frac{9}{5} < 2$. Com efeito, se não fosse assim, teríamos $\frac{9}{5} \leq 1 < 2 \leq \frac{10}{5}$ e isto acarretaria $1 \leq \frac{10}{5} - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$, uma contradição. Portanto, o número racional $\frac{9}{5} \in (1,2)$.

PARTE B (para números irracionais)

Escolhemos, $a=1$ e $b=2$ para o intervalo aberto (a,b) . Assim, $b - a = 2 - 1 = 1$.

Tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, isto é, $\frac{\sqrt{2}}{p} < b - a$.

Escolho $p=5$, tal que $\frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Os números da forma $\frac{m \cdot \sqrt{2}}{5}$, onde $m \in \mathbb{Z}$, são irracionais e dividem a reta \mathbb{R} em intervalos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{5}$. Como $\frac{\sqrt{2}}{5}$ é menor do que o comprimento de $(1,2)$, conclui-se que algum número $\frac{m \cdot \sqrt{2}}{5}$ deve pertencer ao intervalo $(1,2)$.