



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

**EFEITO DE CANAIS QUÂNTICOS SOBRE ESTADOS DE
QUATRO QUBITS E FIDELIDADE DE TELETRANSPORTE
CONTROLADO**

Londrina
2017

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

**EFEITO DE CANAIS QUÂNTICOS SOBRE ESTADOS DE
QUATRO QUBITS E FIDELIDADE DE TELETRANSPORTE
CONTROLADO**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly
Sharma

Londrina
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Tavares, Ladislau Vieira Teixeira.

Efeito de Canais Quânticos Sobre Estados de Quatro Qubits e Fidelidade de Teletransporte Controlado / Ladislau Vieira Teixeira Tavares. - Londrina, 2017.
129 f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

Inclui bibliografia.

1. Estado cluster - Tese. 2. Canais quânticos - Tese. 3. Teletransporte quântico - Tese. 4. Correlações quânticas - Tese. I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

**EFEITO DE CANAIS QUÂNTICOS SOBRE ESTADOS DE QUATRO
QUBITS E FIDELIDADE DE TELETRANSPORTE CONTROLADO**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Paulo José dos Reis
Universidade Estadual do Centro-Oeste -
UNICENTRO

Prof. Dr Antônio Edson Gonçalves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 17 de fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha irmã.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Dra. Santosh Shelly Sharma pela orientação e paciência durante todo o tempo, além da amizade e conselhos dados durante todo o mestrado.

Aos meus amigos Alisson, Felipe e Renan, e em especial, a Lucas Gabriel dos Santos por todos os incentivos e valiosas discussões.

Aos meus pais e minha irmã.

À CAPES pelo suporte financeiro.

*"Cada estação da vida é uma edição,
que corrige a anterior,
e que será corrigida também,
até a edição definitiva,
que o editor dá de graça aos vermes"*
Machado de Assis

TAVARES, Ladislau Vieira Teixeira. **Efeito de canais quânticos sobre estados de quatro qubits e fidelidade de teletransporte controlado**. 2017. 129 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

Resumo

A interação de um sistema quântico com o ambiente, pode ser simulada pela passagem do sistema quântico por um canal quântico. Neste trabalho é investigado o efeito da ação dos canais quânticos de, a) despolarização e b) amortecimento de amplitude, sobre três operadores de estado de quatro qubits. Um dos operadores de estado representa o estado cluster de quatro qubits, e os outros dois operadores representam as misturas estatísticas do estado cluster com outros estados quânticos com diferentes correlações. Para cada tipo de estado são consideradas três situações: a primeira corresponde ao caso em que o sistema quântico não apresenta a influência de canais quânticos. A segunda situação é aquela em que o qubit A_1 do sistema quântico sofre ação do canal de despolarização. E, por fim, o caso em que o qubit A_1 sofre influência do canal de amortecimento de amplitude. Foi estudado, quantitativamente, o efeito da ação dos canais quânticos sobre as propriedades, i) o quadrado do valor da negatividade global (a operação transposta parcial é realizada sobre o estado do qubit A_1), ii) a concorrência e iii) a informação mútua. A concorrência e a informação mútua são obtidas para o par de qubits A_1A_2 . Para os casos em que existe a ação do canal quântico, investiga-se também a entropia de troca e a informação coerente. A informação coerente é nula, quando o parâmetro de despolarização assume o valor $d \geq \frac{1}{4}$, ou quando o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Os valores limiares que permitem transmitir informação quântica por meio dos canais de despolarização e amortecimento de amplitude, utilizando o estado cluster, são $d = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, respectivamente. Em relação as misturas estatísticas, nos casos em que existe efeito do canal quântico sobre o sistema, o parâmetro do canal de despolarização assume os valores $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$, e o parâmetro de amortecimento de amplitude tem valores fixados em $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$. A quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 , é parcialmente perdida, independentemente do canal empregado. Os valores da entropia de troca e informação coerente, variam de acordo com o parâmetro do canal, mas não dependem necessariamente do parâmetro de mistura p . Ao final do trabalho, foi discutido o efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre o teletransporte quântico controlado, quando o primeiro qubit do estado cluster, utilizado no protocolo, sofre perda de coerência. A fidelidade, entre o estado quântico desconhecido teleportado por Alice e o estado quântico obtido por Bob, depende de γ , e do parâmetro de estado α . É verificado que a fidelidade é sempre maior do que 70%.

Palavras-chave: Estado cluster. Canais quânticos. Teletransporte quântico. Correlações quânticas. Informação coerente.

TAVARES, Ladislau Vieira Teixeira. **Effect of quantum channels on four qubits states and fidelity of controlled teleportation.** 2017. 129 p. Dissertation (Master Degree in Physics) – University State of Londrina, Londrina, 2017.

Abstract

The interaction of a quantum system with the environment can be simulated by the action of a quantum channel on the quantum system. In this work the effect of, a) depolarization channel and b) amplitude damping channel on three qubit states is investigated. One of the state operators represents a four-qubit cluster state, while the other two operators represent a statistical mixture of the cluster state with quantum states containing different correlations. Three situations are considered for each type of state. Firstly, the quantum system is investigated without any channel action. The second situation is that in which qubit A_1 of the quantum system undergoes the action of depolarization channel. Thirdly, the action of amplitude damping channel on qubit A_1 of the state is examined. The effect of selected quantum channels on properties of the system that is, i) the squared negativity of partially transposed state operator (the partial transpose is taken with respect to the state of qubit A_1), ii) the concurrence, and iii) mutual information, is studied. Concurrence and mutual information are obtained for the qubit pair A_1A_2 . In all the cases where a quantum channel acts on a state, we also examine the behavior of entropy exchange and coherent information. The coherent information is null, when depolarization parameter assumes the value $d \geq \frac{1}{4}$, or when the amplitude damping parameter $\gamma \geq \frac{1}{2}$. These are the threshold values up to which quantum information may be transmitted by using the cluster state passing through the depolarization channel and the amplitude damping channel, respectively. The parameter of the depolarization channel assumes the values $d = \frac{1}{8}$ and $d = \frac{1}{4}$, and the amplitude damping parameter is set to $\gamma = \frac{1}{8}$ and $\gamma = \frac{1}{4}$, for the cases when a statistical mixtures of states are considered. The amount of information mutually shared between the qubits A_1 and A_2 is partially lost, regardless of the channel being used. The values of entropy exchange and coherent information vary according to the channel parameter, but do not necessarily depend on the mixture parameter p . To finalize, the effect of amplitude damping channel on controlled quantum teleportation is discussed, when the first qubit of the cluster state, used in the protocol, suffers loss of coherence. Fidelity, between the unknown quantum state teleported by Alice and the quantum state received by Bob, depends of the γ , and the state parameter α . It is verified that fidelity is always greater than 70%.

Keywords: Cluster state. Quantum channels. Quantum teleportation. Quantum correlations. Coherent information.

Lista de figuras

- Figura 1 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas são função do parâmetro de despolarização d , com exceção de $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ e $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ 48
- Figura 2 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas são função do parâmetro de amortecimento de amplitude γ , com exceção de $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$. 55
- Figura 3 – Informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}, \hat{\rho}_{CW}^{A_2})$ (linha azul), quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ (linha vermelha) e concorrência $C(\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2})$ (linha preta). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$ 64
- Figura 4 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$. É considerado o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $d = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior). 76
- Figura 5 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$. É considerado o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $\gamma = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior). 87
- Figura 6 – Informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2})$ (linha azul), quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$ (linha vermelha) e concorrência $C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1A_2})$ (linha preta). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$ 93

- Figura 7 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$, $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$. É considerado o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $d = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior). 102
- Figura 8 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$, $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$. É considerado o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $\gamma = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior). 111
- Figura 9 – Fidelidade entre o estado desconhecido $|\psi\rangle^{A_0}$ e o operador de estado $\hat{\rho}_E^{A_4}$ obtido por Bob, em função do parâmetro de amortecimento de amplitude γ 122

Lista de abreviaturas e siglas

LOCC	Local operations and classical communication.
SLOCC	Stochastic local operation and classical communication.
QIP	Quantum information processing.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1	O qubit	21
2.2	Estado multiqubit	21
2.3	Operador densidade	22
2.3.1	Propriedades do operador densidade	23
2.3.2	O operador densidade reduzido	23
2.4	Estado separável	24
2.5	Estado emaranhado	25
2.6	Medidas de emaranhamento	25
2.6.1	Critério de separabilidade de Peres	25
2.6.2	Negatividade global	26
2.6.3	Concorrência	27
2.7	Medidas quânticas	28
2.7.1	Representação do operador soma	29
2.8	Canais	29
2.8.1	Canal quântico de despolarização	30
2.8.2	Canal quântico de amortecimento de amplitude	30
2.9	Entropia	31
2.9.1	Entropia de Shannon	31
2.9.2	Entropia conjunta	32
2.9.3	Entropia condicional	32
2.9.3.1	Propriedades da entropia de Shannon	33
2.9.4	Entropia de Von Neumann	33
2.9.4.1	Propriedades da entropia de Von Neumann	33
2.9.5	Entropia de troca	34
2.10	Informação mútua	34
2.10.1	Informação mútua clássica	34
2.10.2	Informação mútua quântica	35
2.11	Informação coerente	35
3	ESTADO CLUSTER DE QUATRO QUBITS	37
3.1	Caracterização do estado $ \psi_C\rangle$	39
3.1.1	Informação mútua	39
3.1.2	Negatividade	40

3.1.3	Concorrência	40
3.2	Caracterização do estado cluster $C\rangle$	41
3.3	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\psi_C\rangle$	42
3.3.1	Informação mútua	43
3.3.2	Negatividade	43
3.3.3	Concorrência	43
3.3.4	Entropia de troca	44
3.3.5	Informação coerente	45
3.4	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $C\rangle$	46
3.5	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\psi_C\rangle$	49
3.5.1	Informação mútua	50
3.5.2	Negatividade	50
3.5.3	Concorrência	50
3.5.4	Entropia de troca	51
3.5.5	Informação coerente	51
3.6	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $C\rangle$	53
4	ESTADO MISTO FORMADO PELO ESTADO CLUSTER E O ESTADO $W\rangle$ DE QUATRO QUBITS	57
4.1	Caracterização do estado misto formado pelo estado $\psi_C\rangle$ e pelo estado $W\rangle$	59
4.1.1	Informação Mútua	60
4.1.2	Negatividade	61
4.1.3	Concorrência	61
4.2	Caracterização do estado misto formado pelo estado $C\rangle$ e estado $W\rangle$	62
4.3	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_C W E}$	65
4.3.1	Informação Mútua	67
4.3.2	Negatividade	67
4.3.3	Concorrência	67
4.3.4	Entropia de Troca	68
4.3.5	Informação Coerente	69
4.4	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{C W E}$ com $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$	70

4.5	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_{CWE}}$	77
	
4.5.1	Informação Mútua	78
4.5.2	Negatividade	78
4.5.3	Concorrência	79
4.5.4	Entropia de Troca	79
4.5.5	Informação coerente	80
4.6	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{CWE}$ com $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{8}$	81
	
5	ESTADO MISTO FORMADO PELO ESTADO CLUSTER E O ESTADO $B\rangle$ DE QUATRO QUBITS	88
	
5.1	Caracterização do estado misto formado pelo estado $\psi_C\rangle$ e estado $B\rangle$	90
	
5.1.1	Informação Mútua	90
5.1.2	Negatividade	91
5.1.3	Concorrência	91
5.2	Caracterização do estado misto formado pelo estado $C\rangle$ e estado $B\rangle$	92
	
5.3	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}$	94
	
5.3.1	Informação Mútua	95
5.3.2	Negatividade	95
5.3.3	Concorrência	95
5.3.4	Entropia de Troca	96
5.3.5	Informação Coerente	97
5.4	Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{CBE}$ com $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$	98
	
5.5	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}$	103
	
5.5.1	Informação Mútua	104
5.5.2	Negatividade	104
5.5.3	Concorrência	104
5.5.4	Entropia de Troca	105
5.5.5	Informação Coerente	105

5.6	Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{CBE}$ com $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$	106
6	TELEPORTE CONTROLADO COM CANAL QUÂNTICO DE AMORTECIMENTO DE AMPLITUDE	112
6.1	Fidelidade	121
7	CONCLUSÃO	123
	REFERÊNCIAS	126

1 Introdução

Sistemas quânticos emaranhados, tem sido estudados devido a possibilidade de serem empregados em tarefas que envolvem o processamento de informação quântica (QIP). As correlações contidas em sistemas quânticos, são essenciais para a implementação e sucesso de protocolos de comunicação e computação. O emaranhamento é visto como o recurso físico, que possibilita a realização de processamento de informação. Em especial, os estados cluster são utilizados em protocolos de comunicação quântica, como por exemplo, o teleporte quântico [1] e o código superdenso [2], além de serem empregados no contexto de código de correção de erros quânticos [3], protegendo o sistema contra a perda de coerência. Em processos computacionais, modelos cuja essência é o estado cluster já foram propostos [4], alias, realizações experimentais já foram demonstradas em [5] e [6], oferecendo um ganho computacional incomparável, quando comparado aos computadores clássicos existentes atualmente.

Em qualquer experimento, por mais perfeito que seja, a preparação e a execução, o sistema quântico interage com o sistema externo. O sistema quântico externo é conhecido como sistema ambiente. A interação do sistema quântico com o ambiente pode ser simulada por canais quânticos. Um canal de comunicação é qualquer meio de transmissão físico (um fio por exemplo), utilizado por duas partes (remetente e destinatário) para enviarem mensagens clássicas entre si. No caso quântico, os dados clássicos são transmitidos através de uma linha de comunicação física, que emprega um “mensageiro” quântico (uma fibra ótica operando com luz). A fibra ótica não é um dispositivo quântico, no entanto, um feixe de luz polarizado apresenta o caráter quântico [7] e [8]. Canais quânticos podem ser vistos como a realização de uma operação quântica sobre o sistema. O sistema quântico interage com o sistema ambiente, conseqüentemente as propriedades do sistema dependem dos resultados das medidas realizadas sobre o sistema ambiente. Uma das conseqüências da interação de um sistema quântico com ambiente, é a perda de coerência. Possivelmente, a perda de coerência do sistema quântico ocorre como conseqüência do emaranhamento deste com o sistema ambiente. Um estado representado por um operador de estado misto, pode ser visto como parte de um sistema quântico composto maior. O sistema quântico composto maior é representado por um operador de estado puro, que compreende o sistema representado pelo operador de estado misto e o sistema externo. Matematicamente um canal quântico pode ser representado em termos dos operadores de Kraus. A vantagem de representar canais quânticos por meio dos operadores de Kraus é a simplicidade adquirida nos cálculos. Canais quânticos introduzem ruído em sistemas quânticos. O estado quântico que inicialmente era conhecido sofre perda de informação. Em outras palavras, o canal quântico pode levar um sistema quântico inicialmente no estado puro, a um estado misto. No caso, do estado inicial de um sistema

quântico for um estado misto, o canal quântico leva o sistema quântico a um novo estado com grau maior de mistura. Em criptografia quântica, o sistema ambiente do canal não apenas introduz o ruído mas, mas também pode ser simulado como um espião [9].

Em 2001, os físicos teóricos Hans J. Briegel e Robert Raussendorf propuseram um estado quântico constituído de N corpos, denominado por estado Cluster $|C_N\rangle$. Uma das propriedades interessantes do estado cluster esta relacionada com as correlações quânticas intrínsecas (emaranhamento) contidas neste. Todos os qubits que compõe o estado cluster $|C_N\rangle$ estão emaranhados entre si e a quantidade de emaranhamento entre os qubits é máxima. O emaranhamento contido no estado cluster, pode ser utilizado como recurso físico, possibilitando a realização de tarefas relacionadas a QIP. Obtém-se o estado cluster quando o termo de interação do hamiltoniano dos N corpos equivale ao do modelo quântico de Ising de cadeia de spin, e em casos mais gerais, rede de spin. É necessário, ajustar os parâmetros de interação para que o estado obtido seja maximamente emaranhado. O modelo proposto é válido para baixas temperaturas e interações de curto alcance [10]. O estado cluster pode ser criado a partir de técnicas de resfriamento e armadilha de átomos neutros ([11] e [12]). Com condições apropriadas, é possível ligar e desligar o acoplamento entre todos os qubits, manipulando os parâmetros da armadilha de laser. Em outras palavras, o estado cluster pode ser criado experimentalmente a partir de uma única operação global realizada sobre o sistema. A interação tipo Ising pode também ser implementada por meio de colisões atômicas frias [12], entre outras técnicas [13] e [14].

Existem modelos teóricos que permitem a possibilidade da construção de um computador quântico, prometendo um poder de processamento muito maior que o dos computadores clássicos existentes atualmente, possibilitando a realização de tarefas até então intratáveis [15]. Raussendorf e Briegel propuseram um modelo diferente de computação, denominado por computação quântica de uma única via ou computação quântica baseada em medidas projetivas. Neste modelo, todo o recurso necessário para a computação, é fornecido inicialmente na forma de um estado quântico puro (o estado cluster), contendo um grande número de qubits. A informação é escrita, processada e lida a partir do estado cluster, por meio de medidas constituídas de operadores que atuam em partículas (qubits) únicas [4]. O estado cluster pode ser empregado em códigos de correção de erros quânticos. Na época em que foi proposto o modelo de computador quântico de Raussendorf e Briegel, os físicos já tinham conhecimento de que era de extrema importância a implementação de códigos de correção de erro, de modo que servisse de auxílio para os modelos de computador quântico. A função dos códigos de correção de erros é de minimizar os erros que possivelmente viessem a ocorrer, desde o início até o fim do processo computacional. Sem códigos de correção de erros, efeitos devido a perda de coerência poderiam aniquilar o ganho computacional prometido pelo modelo computacional.

Em 2001, Schlingemann e Werner em [3], apresentaram uma maneira de

como construir códigos de correção de erros quânticos, e descobriram que os diagramas de códigos (*graph code*), poderiam ser relacionados com o estado cluster proposto por Briegel e Raussendorf. Segundo Schlingemann e Werner, os estados cluster poderiam ser utilizados em processos quânticos computacionais, através de medidas de Von Neumann (que são as mesmas medidas realizadas no modelo de computador quântico proposto por Briegel e Raussendorf), para o armazenamento de informação. Os diagramas de códigos poderiam diretamente ser implementados para a proteção do estado cluster contra a perda de coerência. O conceito de correção de erros está intimamente ligado ao de canal quântico [9]. O estado cluster pode ser utilizado em testes de não localidade (testes de violação das desigualdades de Bell) [16].

Em teoria da informação quântica, podem ser exploradas propriedades de emaranhamento, entre elas, a persistência de emaranhamento [10] e a máxima conexão de estados quânticos. A persistência de emaranhamento, relaciona a quantidade de emaranhamento contido em um sistema quântico multipartido (sistema quântico que contém m partes com $m \geq 2$), ao esforço operacional levado (em termos de operações locais), para destruir todo o emaranhamento presente no sistema quântico. Um estado quântico é dito como maximamente conectado se, por meio de medidas sobre subsistemas quânticos pertencentes a um sistema composto, os subsistemas residuais são projetados em estados de Bell. Um estado que é maximamente conectado pode ser utilizado para transportar informação quântica através de canais quânticos, além da possibilidade de ser empregado em protocolos de computação quântica [4] e no teleporte quântico.

Neste trabalho, é de interesse o estudo da ação de canais quânticos sobre um estado específico, o estado cluster de quatro qubits. O estado cluster utilizado no trabalho é um dos estados quânticos (três) propostos por Gour e Wallach em [17]. O estado cluster $|C\rangle$ escolhido tem a mesma forma que o estado cluster proposto por Briegel e Raussendorf (de quatro qubits). A partir do estado cluster $|C\rangle$, é construída a família de estados quânticos $|\psi_C\rangle$. Dependendo do estado quântico $|\psi_C\rangle$, o estado pode conter tanto correlações de dois corpos como também de quatro corpos. O estado cluster $|C\rangle$ genuíno apresenta apenas correlações de quatro corpos.

O primeiro objetivo é quantificar as correlações presentes nos estados quânticos pertencentes a família de estados cluster $|\psi_C\rangle$, e a quantidade de informação mutuamente compartilhada entre dois subsistemas que compõe o estado quântico $|\psi_C\rangle$. O segundo objetivo é explorar o efeito da ação de canais quânticos sobre a família de estados $|\psi_C\rangle$. Além disso, duas grandezas, relacionadas a canais quânticos são exploradas: a entropia de troca e a informação coerente. A entropia de troca mostra o quanto de informação é trocada entre um sistema quântico e o ambiente [18]. O informação coerente fornece a quantidade de emaranhado que é preservada em um sistema quântico devido a interação com o ambiente [19]. Os canais quânticos utilizados neste trabalho são: o de despolarização e de amortecimento de amplitude. Um sistema quântico, depois de interagir

com o sistema ambiente simulado pelo canal de despolarização, tem a probabilidade de evoluir para um estado quântico despolarizado ($\frac{\hat{I}}{D}$, onde \hat{I} é o operador identidade e a dimensão do sistema quântico é $\dim = D$). Um sistema quântico representado por um estado despolarizado, aponta a possibilidade deste sistema estar emaranhado com outro sistema. O canal quântico de amortecimento de amplitude pode descrever efeitos relacionados a dissipação de energia de sistema quânticos, causando o efeito de amortecimento de amplitude de estados quânticos [20]. A ação dos canais quânticos pode propiciar a perda de coerência de sistemas quânticos. O terceiro objetivo é investigar a influência do canal quântico de amortecimento de amplitude sobre a fidelidade entre estados quânticos.

No capítulo dois apresenta-se as ferramentas matemáticas utilizadas neste trabalho, tal como definições de entropia, operações e medidas quânticas, representação do operador soma (associado a canais quânticos), quantificadores de emaranhamento e informações mútua e coerente.

No capítulo três investiga-se o efeito de canais quânticos sobre o estado cluster de quatro qubits. Considera-se as situações em que um dos qubits (o qubit A_1) do estado cluster interage ou não com o sistema ambiente. No caso em que não existe efeito de canal sobre o sistema quântico, é feita apenas a caracterização do sistema quântico por meio de dois quantificadores de emaranhamento e a informação mútua. Um dos quantificadores de emaranhamento, chamado de negatividade global, tem o papel de mostrar o quão “forte” é o emaranhamento de um subsistema quântico com o resto do sistema composto. A negatividade global é uma medida de emaranhamento, sendo baseada no critério de separabilidade de Peres [21]. Este quantificador de emaranhamento foi proposto por Vidal e Werner em [22]. No entanto, é obtida a expressão analítica do quadrado do valor da negatividade global (com operação transposta parcial realizada sobre o qubit A_1 , do sistema quântico). O outro quantificador, conhecido como concorrência, diz o quanto dois qubits estão emaranhados e foi proposta por S. Hill e W. K. Wootters em [23]. Obtêm-se a expressão analítica da quantidade de emaranhamento contido no sistema quântico composto pelos qubits A_1 e A_2 . A quantidade de informação mutuamente compartilhada entre duas partes de um sistema quântico composto, tem como foco o sistema bipartido A_1A_2 . O quadrado do valor da negatividade global, da concorrência e informação mútua, são quantidades que permitem caracterizar o estado cluster, mesmo no caso em que existe a ação de canal quântico sobre o sistema. Nas situações em que existe a ação de canal sobre o sistema quântico, são determinadas expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade global e da concorrência. Afim de verificar o ação sobre estas grandezas pelos canais quânticos, as mesmas foram comparadas quantitativamente com expressões analíticas obtidas sem a presença de canal. Foram obtidas as expressões analíticas da entropia de troca e da informação coerente. Os resultados com relação a entropia de troca e a informação coerente são comparados para

os diferentes canais.

Nos capítulos quatro e cinco é realizado o mesmo procedimento descrito em relação ao capítulo 3. Entretanto, os sistemas quânticos tratados ao início de todo o processo, são representados por meio de operadores de estados mistos. As expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, da concorrência, da entropia de troca e da informação coerente foram obtidas considerando o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{4}$ e $d = \frac{1}{8}$, e de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{8}$. No capítulo 3 é explicado o motivo dos parâmetros de canal valerem não mais do que $\frac{1}{4}$. No capítulo quatro, o sistema quântico é representado pela mistura estatística formada pelo estado cluster e o estado $|W\rangle$. O estado $|W\rangle$ contém apenas correlações de dois corpos e as correlações não possuem o grau máximo de emaranhamento. O sistema quântico investigado no capítulo cinco, é representado pelo operador de estado formado estado cluster e um estado $|B\rangle$. O estado quântico $|B\rangle$ é um estado produto entre o estado de Bell $|\phi^+\rangle^{A_1A_2}$ e o estado quântico $|10\rangle^{A_3A_4}$. O estado possui emaranhamento apenas entre os qubits A_1 e A_2 , e é máximo. A intenção em estudar os sistemas quânticos dos capítulos quatro e cinco, é examinar quantitativamente a ação efetiva dos canais quânticos sobre estado com diferentes tipos de correlações.

No capítulo seis, é estudado o efeito da ação do canal quântico de amortecimento de amplitude sobre o teletransporte controlado. Tal protocolo de comunicação foi proposto por Yi-You Nie et al [1] e utiliza o estado cluster. Antes de dar início ao protocolo, um dos qubits que compõe o estado cluster (o qubit A_1) passa pelo canal quântico de amortecimento de amplitude. É estudado o efeito do canal quântico sobre a fidelidade entre o estado quântico obtido por Bob (com dependência do sistema ambiente), e o estado desconhecido $|\psi\rangle^{A_0}$ que Alice deseja teleportar para Bob.

2 Fundamentação teórica

Os estados de poucos qubits podem ser usados para realizar tarefas como computação quântica, teleporte de estados e comunicação. A utilidade de um dado estado para realização de uma tarefa depende das correlações quânticas e do conteúdo de informação do estado. O objetivo principal deste trabalho é quantificar os recursos físicos presentes nos estados pertencentes a classe de estados cluster.

Este capítulo introduz os conceitos básicos necessários para se quantificar o emaranhamento e a informação presente em um estado quântico. É dada a definição de qubit, de estado multiqubit, de estado separável e de estado emaranhado. É dada a definição de matriz densidade e as devidas propriedades. Em sequência são introduzidos dois quantificadores de emaranhamento (negatividade global e concorrência), e em seguida é dada a definição de operação quântica (e feita a associação de canal quântico com o operador soma). As definições de informação mútua e a informação coerente são inseridas ao final do capítulo.

2.1 O qubit

A computação e a teoria da informação clássica são construídas com base no bit (dígito binário), o elemento que representa a menor unidade de informação que pode ser transmitida ou armazenada. O bit pode assumir os valores 0 ou 1. Não diferente, a computação e a informação quântica são alicerçadas sobre um elemento fundamental semelhante ao bit, mas, na versão quântica, o qubit. O qubit é representado por um vetor de estado, um ket, segundo a notação de Dirac. Além da possibilidade de poder ser representado como um dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ (a chamada base computacional), que são elementos de um espaço de Hilbert (bidimensional e forma uma base ortonormal), oferece a vantagem poder ser representado pela superposição destes estados da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.1)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ [20]. O qubit pode ser visto como um sistema que pode estar em um dos estados de um sistema de dois níveis (estado fundamental e excitado), ou pode ser medido com spin *up* ou *down*.

2.2 Estado multiqubit

Um sistema quântico composto de dois subsistemas (ou um sistema composto dividido em duas partes) é chamado de sistema bipartido. Se a dimensão do

sistema A_1 é $\dim = d_{A_1}$ e do sistema A_2 é $\dim = d_{A_2}$, o sistema composto terá dimensão $\dim(d_{A_1 A_2}) = d_{A_1} \otimes d_{A_2}$. O estado quântico de dois qubits, na base computacional $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$, pode ser representado pelo estado [20]:

$$|\psi\rangle^{A_1 A_2} = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (2.2)$$

com $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \in \mathbb{C}$ e $|\alpha_{00}|^2$ representando a probabilidade dos dois qubits estarem no estado quântico $|00\rangle$, e assim por diante. Um sistema quântico formado por mais do que dois subsistemas é denominado sistema multiqubit. Um sistema quântico composto por N qubits pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle^{A_1 A_2 \dots A_N} = \sum_{x_1=0}^1 \dots \sum_{x_N=0}^1 \alpha_{x_1 \dots x_N} |x_1 \dots x_N\rangle, \quad (2.3)$$

onde $\alpha_{x_1 \dots x_N} \in \mathbb{C}$ e $\sum_{x_1=0}^1 \dots \sum_{x_N=0}^1 |\alpha_{x_1 \dots x_N}|^2 = 1$.

2.3 Operador densidade

Em situações na mecânica quântica, em que os vetores de estado que representam um sistema quântico são bem conhecidos, os vetores de estados são suficientes para representar o sistema quântico de interesse. O estado do sistema após um tempo t é obtido aplicando um operador de evolução temporal. Além disso, é possível calcular observáveis físicos por meio da atuação de operadores de medida sobre o vetor de estado do sistema.

No mundo real, existem situações onde o estado quântico que representa o sistema quântico não é bem conhecido. O sistema quântico pode ser representado por uma mistura estatística de estados quânticos. A informação sobre o sistema é incompleta, no sentido de que há a probabilidade do sistema ser encontrado em qualquer um dos estados quânticos que compõe a mistura estatística. Sendo assim, é necessário o emprego de outra representação para descrever o sistema, o chamado operador de estado. Esta representação, permite também trabalhar com os estados quânticos de subsistemas que fazem parte de um sistema quântico composto [24] e [20].

O operador de estado é utilizado para representar tanto estados puros como estados mistos. Os estados puros são aqueles em que o estado do sistema é conhecido e são vistos como um caso particular dos estados mistos. Por outro lado, os estados mistos são representados como uma mistura estatística de estados puros [20], neste caso são utilizados para representar um sistema que não é totalmente conhecido. Um exemplo de estado misto é o estado de polarização de fótons que emergem de uma fonte de luz não polarizada [24].

Considere um sistema quântico representado por um ensemble de estados quânticos puros $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, onde p_i é a probabilidade de encontrar o sistema no

estado $|\psi_i\rangle$. A representação do operador de estado para este sistema é:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.4)$$

onde $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$ [20].

Um estado quântico puro é representado como um projetor $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$.

2.3.1 Propriedades do operador densidade

Para que um operador densidade $\hat{\rho}$ possa ser utilizado para representar um ensemble $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, de estados quânticos $|\psi_i\rangle$, com probabilidade p_i , são impostas algumas condições:

1 - A soma dos elementos da diagonal principal que constitui $\hat{\rho}$, ou melhor dizendo na linguagem algébrica, o traço da matriz do operador densidade $\hat{\rho}$ deve ser igual a 1:

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1. \quad (2.5)$$

2 - O operador densidade deve ser um operador positivo. Considere um vetor de estado arbitrário $|\varphi\rangle$. O valor esperado do operador $\hat{\rho}$ no estado $|\varphi\rangle$ deve satisfazer a condição:

$$\langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0. \quad (2.6)$$

3 - O operador de estado deve ser hermitiano:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad (2.7)$$

o que implica em autovalores λ_k reais, possibilitando escrever o operador de estado por meio de um espectro de decomposição na forma:

$$\hat{\rho} = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|, \quad (2.8)$$

onde os vetores de estado $|k\rangle$ são ortogonais [20].

2.3.2 O operador densidade reduzido

Uma das vantagens de representar sistemas quânticos por meio do operadores de estado, é a possibilidade de estudar subsistemas de um sistema composto. O estado quântico de um subsistema de um sistema composto é obtido por meio da operação chamada traço parcial. O traço parcial também apresenta um significado importante, no contexto de medidas. Considere que é desejado realizar uma medida sobre um sistema quântico A_1 . A medida é feita sobre o sistema A_1 com o operador de medida Λ_{A_1} . A

mesma medida por ser feita sobre o sistema composto $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$, entretanto, o operador que atua no sistema composto tem a forma $\Lambda_{A_1 A_2} = \Lambda_{A_1} \otimes I_{A_2}$. O valor médio de um observável Λ_{A_1} calculado sobre estado $\hat{\rho}^{A_1}$, de um sistema A_1 , deve ser o mesmo, não importando se é calculado diretamente por meio de $\hat{\rho}^{A_1}$ ou, via o sistema composto $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ [20]:

$$\langle \Lambda_{A_1} \rangle = \text{Tr}_{A_1} (\Lambda_{A_1} (\hat{\rho}^{A_1})) = \text{Tr}_{A_1 A_2} (\Lambda_{A_1 A_2} (\hat{\rho}^{A_1 A_2})) = \text{Tr}_{A_1 A_2} (\Lambda_{A_1} \otimes I_{A_2} (\hat{\rho}^{A_1 A_2})).$$

Suponha um operador de estado (puro e separável) $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ composto por dois sistemas, A_1 e A_2 , que tem a forma:

$$\hat{\rho}^{A_1 A_2} = \hat{\rho}^{A_1} \otimes \hat{\rho}^{A_2}.$$

Em termos da matriz densidade $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ é escrito como:

$$\hat{\rho}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{A_1} & \rho_{12}^{A_1} \\ \rho_{21}^{A_1} & \rho_{22}^{A_1} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \rho_{11}^{A_2} & \rho_{12}^{A_2} \\ \rho_{21}^{A_2} & \rho_{22}^{A_2} \end{bmatrix}.$$

O operador de estado do sistema A_1 é obtido tomando o traço sobre o sistema A_2 , matematicamente:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{A_1} &= \text{Tr}_{A_2} (\hat{\rho}^{A_1 A_2}) \\ &= \hat{\rho}^{A_1} (\rho_{11}^{A_2} + \rho_{22}^{A_2}) \\ &= \hat{\rho}^{A_1}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

o traço sobre o sistema A_2 leva o operador de estado bipartido $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ para um operador de estado que representa o sistema A_1 , em outras palavras a operação traço sobre o sistema A_2 elimina os graus de liberdade do sistema A_2 .

2.4 Estado separável

Um estado quântico é chamado de separável se pode ser escrito como o produto tensorial dos estados dos subsistemas que fazem parte do sistema quântico composto. Os estados de um subsistema A_1 pertencem a um espaço de Hilbert \mathcal{H}_{A_1} , e os de um subsistema A_2 do espaço de Hilbert \mathcal{H}_{A_2} . Considerando um sistema quântico composto por N subsistemas, o espaço de Hilbert do sistema é definido como o produto tensorial de todos espaços de Hilbert que representa cada subsistema, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_{A_3} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{A_N}$. O estado quântico separável de um sistema composto por N subsistemas, na linguagem de operadores de estado, é representado por:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{A_1} \otimes \hat{\rho}^{A_2} \otimes \hat{\rho}^{A_3} \otimes \dots \otimes \hat{\rho}^{A_N}. \tag{2.10}$$

Um exemplo de estado quântico separável é o estado de dois qubits $|\psi\rangle^{A_1 A_2} = |0\rangle \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$, onde o operador de estado $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ tem a representação:

$$\hat{\rho}^{A_1 A_2} = |0\rangle^{A_1} \langle 0| \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{A_2} \left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right).$$

2.5 Estado emaranhado

Um estado quântico emaranhado constituído de N subsistemas é aquele que não pode ser escrito como um estado produto:

$$\hat{\rho} \neq \hat{\rho}^{A_1} \otimes \hat{\rho}^{A_2} \otimes \hat{\rho}^{A_3} \otimes \dots \hat{\rho}^{A_N}. \quad (2.11)$$

Exemplos de estados quânticos emaranhados bipartidos são os estados de Bell, e são representados pelos vetores de estado:

$$|\phi^+\rangle^{A_1 A_2} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |\phi^-\rangle^{A_1 A_2} = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.12)$$

e

$$|\psi^+\rangle^{A_1 A_2} = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |\psi^-\rangle^{A_1 A_2} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.13)$$

O operador de estado do estado $|\phi^+\rangle^{A_1 A_2}$ é:

$$\hat{\rho}^{A_1 A_2} = \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{A_1 A_2} \left(\frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) \neq \hat{\rho}^{A_1} \otimes \hat{\rho}^{A_2},$$

onde $\hat{\rho}^{A_1} = \hat{\rho}^{A_2} = Tr(\hat{\rho}^{A_1 A_2})$.

Os estados de Bell são utilizados em informação e computação quântica em geral e são estados onde o grau de emaranhamento é máximo. Esses estados serão utilizados como projetores no capítulo 6.

2.6 Medidas de emaranhamento

Nesta seção são definidos dois quantificadores de emaranhamento. A primeira medida é a negatividade, que é baseada no critério de separabilidade de Peres, e é uma medida global de emaranhamento. A segunda medida, chamada concorrência, definida a partir da operação *spin flip* [25], é uma medida de emaranhamento contido entre dois qubits.

2.6.1 Critério de separabilidade de Peres

Em 19 de Agosto de 1996, Asher Peres publicou um artigo [21] que estabelece uma condição necessária, mas não suficiente para caracterizar sistemas quânticos como separáveis ou não. O critério proposto por Peres é baseado na operação transposta parcial da matriz densidade do sistema bipartido representado pela matriz densidade $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$. Segundo Peres, para que um sistema possa ser escrito como apenas um produto direto dos subsistemas que compõe o sistema quântico composto, é necessário efetuar a operação transposta parcial com relação a um dos subsistemas, e estudar os autovalores da matriz

transposta obtida. Se algum dos autovalores da matriz transposta parcial (considerando que a operação transposta parcial foi tomada sobre o sistema A_1) for negativo, indica que o sistema A_1 possui emaranhamento com o resto do sistema. Os elementos de matriz da transposta parcial do estado $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$, com relação ao subsistema A_1 , podem ser obtidos a partir de:

$$(\hat{\rho}^{A_1 A_2})_{n\mu m\nu}^{T_{A_1}} = \hat{\rho}_{m\mu n\nu}^{A_1 A_2},$$

onde $m, n \in A_1$ e $\mu, \nu \in A_2$.

Considere o sistema quântico composto bipartido $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$, representado por um estado separável. Os elementos de matriz de $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ podem ser escritos como:

$$\hat{\rho}_{m\mu n\nu}^{A_1 A_2} = \sum_i \alpha_i (\hat{\rho}_i^{A_1})_{mn} \otimes (\hat{\rho}_i^{A_2})_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

Os elementos de matriz da transposta parcial com relação ao sistema quântico A_1 são:

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}^{A_1 A_2})_{n\mu m\nu}^{T_{A_1}} &= \sum_i \alpha_i (\hat{\rho}_i^{A_1})_{nm}^{T_{A_1}} \otimes (\hat{\rho}_i^{A_2})_{\mu\nu} \\ &= \sum_i \alpha_i (\hat{\rho}_i^{A_1})_{mn} \otimes (\hat{\rho}_i^{A_2})_{\mu\nu} \\ &= \sum_i \alpha_i (\hat{\rho}_i^{A_1})_{nm}^* \otimes (\hat{\rho}_i^{A_2})_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

O operador de estado referente a eq. 2.15 representa um estado quântico com autovalores positivos, por conta do operador de estado $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ ser separável e hermitiano. No entanto, se $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ for um estado emaranhado, então $(\hat{\rho}^{A_1 A_2})_{n\mu m\nu}^{T_{A_1}}$ pode ser negativo.

2.6.2 Negatividade global

A negatividade global é uma medida de emaranhamento, sendo baseada no critério de separabilidade de Peres [21]. Este quantificador de emaranhamento foi proposto por Vidal e Werner em [22]. Inicialmente, para calcular a negatividade, deve ser realizada a operação transposta parcial sobre a matriz densidade, que representa o sistema quântico em que existe o interesse em estudar o emaranhamento. A expressão que fornece o valor da negatividade é escrita em termos da norma do traço da matriz transposta parcial obtida. A negatividade pode ser calculada tanto para estados puros como para estados mistos de um sistema bipartido, no entanto, é necessária, mas não suficiente para detectar emaranhamento quando a dimensão do sistema é maior do que 2×3 . A expressão da negatividade tem a forma:

$$\mathcal{N}_G(\hat{\rho}^{A_1 A_2}) = \left\| \hat{\rho}_{A_1 A_2}^{T_{A_1}} \right\| - 1, \quad (2.16)$$

onde $\mathcal{N}_G(\hat{\rho}^{A_1 A_2})$ varia entre 0 e 1, e $\left\| \hat{\rho}_{A_1 A_2}^{T_{A_1}} \right\|$ representa a soma do módulo dos autovalores negativos da matriz densidade $\hat{\rho}_{A_1 A_2}^{T_{A_1}}$. A negatividade não aumenta sob LOCC. O valor

da negatividade também pode ser escrita em termos dos autovalores negativos de $\left\| \hat{\rho}_{A_1 A_2}^{T A_1} \right\|$, e é representada pela expressão:

$$\mathcal{N}_G(\hat{\rho}^{A_1 A_2}) = 2 \sum_i |\lambda_i^-|. \quad (2.17)$$

Uma expressão que fornece o quadrado do valor da negatividade, válida apenas para sistemas constituídos de um único qubit, tem a forma:

$$\mathcal{N}_G^2(\hat{\rho}^{A_1}) = 4 \det(\hat{\rho}^{A_1}). \quad (2.18)$$

2.6.3 Concorrência

Em 1997, S. Hill e W. K. Wootters em [23] propuseram uma medida de emaranhamento com respeito a dois corpos, a medida foi chamada pelos autores de Concorrência. Segundo os autores a concorrência quantifica a quantidade de recurso necessário para criar um estado quântico emaranhado. A concorrência pode ser calculada tanto para estados quânticos puros como para estados quânticos mistos.

O primeiro passo para obter a concorrência entre dois sistemas quânticos é efetuar a operação conhecida como *spin flip*, individualmente sobre o estado quântico conjugado que representa o sistema quântico composto bipartido. A operação *spin flip* nada mais é do que a ação da matriz $\hat{\sigma}_y$ de Pauli. O vetor de estado $|\tilde{\psi}\rangle^{A_1 A_2}$ é obtido por:

$$|\tilde{\psi}\rangle^{A_1 A_2} = (\hat{\sigma}_y^{A_1} \otimes \hat{\sigma}_y^{A_2}) |\psi^*\rangle^{A_1 A_2}, \quad (2.19)$$

onde $|\psi^*\rangle$ é o vetor de estado conjugado de $|\psi\rangle$. A concorrência em termos de vetores de estado é definida como:

$$C = \left| \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle \right|, \quad (2.20)$$

A concorrência também pode ser obtida por meio do formalismo da matriz densidade. Para obter a concorrência por meio deste formalismo é necessário calcular a matriz $\widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}}$, que é obtida por meio de:

$$\widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}} = (\hat{\sigma}_y^{A_1} \otimes \hat{\sigma}_y^{A_2}) (\hat{\rho}^{A_1 A_2 *}) (\hat{\sigma}_y^{A_1} \otimes \hat{\sigma}_y^{A_2})^\dagger. \quad (2.21)$$

Logo em seguida é preciso calcular os autovalores de $\hat{\rho}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}}$. A concorrência é definida como:

$$C(\hat{\rho}^{A_1 A_2}) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (2.22)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sendo os autovalores do operador $\hat{\rho}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}}$ e λ_1 o maior deles. O valor da concorrência varia entre 0 e 1.

2.7 Medidas quânticas

Sistemas quânticos que não interagem com um sistema quântico externo são chamados de sistemas quânticos fechados e apresentam uma evolução unitária. No entanto, no mundo real qualquer sistema quântico interage com um sistema quântico ambiente. O simples fato de realizar uma medida sobre um sistema quântico pode torná-lo não mais fechado. O aparato experimental interage com o sistema quântico que se deseja estudar, e a consequência disto é a mudança de um sistema que antes era tido como fechado, e que durante a medida torna-se aberto, ou então, a evolução que antes era unitária deixa de ser unitária [20]. O sistema utilizado para medir mais o sistema quântico que está sendo medido, formam um sistema isolado. Uma outra forma de observar um sistema quântico que não evolui de forma unitária é observar o estados de alguns subsistemas de um sistema quântico composto, pode ser que o estado quântico desses subsistemas não evoluam de forma unitária, o sistema quântico composto apresenta uma evolução unitária. Afim de explicar o efeito de medidas (considerando um caso especial de operadores de medida, os projetores) sobre sistemas quânticos segue a definição de medida [20]: As medidas realizadas sobre um sistema quântico são formadas por uma coleção de operadores $\{\hat{M}_m\}$. Cada operador \hat{M}_m tem a forma de um projetor e atua sobre os vetores de estado do sistema quântico. Projetores correspondem a um caso especial de operadores de medida. O conjunto de operadores satisfazem a relação de completeza, tal que:

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{I}, \quad (2.23)$$

A soma das probabilidades (igual a um), esta associada a relação de completeza dos operadores pela equação:

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle. \quad (2.24)$$

Considere um sistema quântico descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$. Ao fazer uma medida sobre o sistema com o conjunto de operadores \hat{M}_m , o estado após a medida é $|\phi\rangle = \hat{M}_m |\psi\rangle$. A probabilidade do resultado m ser obtido é $p(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle$. O estado quântico normalizado após a medida é:

$$|\phi\rangle = \frac{\hat{M}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}}. \quad (2.25)$$

No contexto de operadores de estados, considerando uma coleção de projetores de medidas e o operador de estado misto $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$. A probabilidade de realizar uma medida e obter o resultado m é $p(m) = \text{Tr}(\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \hat{\rho})$. O novo operador de estado após a medida é $\rho_m = \sum_i p_i \frac{\hat{M}_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{M}_m^\dagger}{\text{Tr}(\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \hat{\rho})}$.

2.7.1 Representação do operador soma

O operador soma é uma das maneiras de representar uma operação quântica $\hat{\varepsilon}$, como por exemplo o efeito da interação de um sistema quântico com um sistema quântico externo. A motivação de utilizar tal representação é a vantagem em relação a simplicidade nos cálculos. Para obter a representação do operador soma, primeiramente suponha que um sistema quântico ambiente seja representado por uma base finita e ortonormal $|e_k\rangle$. Suponha-se que o sistema ambiente comece (ou, pode-se dizer que o sistema ambiente foi preparado) no estado $\hat{\rho}_{env} = |e_0\rangle\langle e_0|$. Considerando o operador de evolução unitária \hat{U} (que depende da interação entre o sistema quântico e o sistema ambiente), que atua no sistema quântico $\hat{\rho}$ e no sistema ambiente, o estado final $\hat{\varepsilon}(\hat{\rho})$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(\hat{\rho}) &= \sum_k \langle e_k | \left(\hat{U} (\hat{\rho} \otimes |e_0\rangle\langle e_0|) \hat{U}^\dagger \right) | e_k \rangle \\ &= \sum_k \langle e_k | \hat{U} | e_0 \rangle \hat{\rho} \langle e_0 | \hat{U}^\dagger | e_k \rangle \\ &= \sum_k \hat{E}_k \hat{\rho} \hat{E}_k^\dagger,\end{aligned}\tag{2.26}$$

onde operador $\hat{E}_k = \langle e_k | \hat{U} | e_0 \rangle$ pode ser representado por uma matriz com dimensão igual ao do ambiente. Os operadores \hat{E}_k são chamados de operadores de Kraus e satisfazem a relação $\sum_k \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k \leq 1$, e são elementos do operador soma $\hat{\varepsilon}$. Na representação do operador soma, não há a preocupação em como o sistema ambiente é descrito. Ao final do processo é tomado o traço sobre o sistema ambiente (na base $|e_k\rangle$), e o sistema residual $\hat{\varepsilon}(\hat{\rho})$ é um sistema quântico com a dependência do efeito do ambiente. A eq. 2.26 é a chamada representação do operador soma. Como o próprio nome sugere, este operador soma é representado por uma soma de operadores \hat{E}_k que atuam sobre o sistema quântico principal. A coleção de operadores $\{\hat{E}_k\}$ contém “resíduos”, que é consequência da interação do sistema quântico com o ambiente.

2.8 Canais

Um canal de comunicação é definido como qualquer meio que possa ser utilizado para enviar informações entre duas partes de um sistema. Uma das partes é chamada de remetente e a outra de destinatário [26]. Existe dois tipos de canais de comunicação, os canais clássicos e os quânticos. Exemplos de canais clássicos de comunicação são o rádio e o telefone. Exemplos de canais quânticos, e que serão utilizados neste trabalho são os canais de despolarização e de amortecimento de amplitude.

Um canal quântico é associado a uma operação quântica realizada sobre um sistema quântico composto, ou até mesmo sobre algum subsistema que compõe um sistema quântico composto. O canal quântico pode ser visto como um ruído, causado pela

interação do sistema quântico principal com um sistema quântico ambiente. A adição de ruído ao sistema quântico pode acarretar na mudança do operador de estado que representa o sistema quântico, em outras palavras, o canal quântico pode causar a perda de coerência do estado do sistema quântico. Na transmissão de informação de uma parte para outra, parte da informação (codificada no operador de estado) pode ser perdida devida a interação do sistema quântico com o ambiente. Os canais quânticos utilizados neste trabalho são operações quânticas que atuam sobre um único qubit.

2.8.1 Canal quântico de despolarização

Um sistema quântico, ao interagir com o sistema quântico ambiente do canal de despolarização, pode sofrer a despolarização, ou seja, o operador de estado do sistema quântico passa a ser representado, parcialmente, pelo operador \hat{I} , onde \hat{I} é o operador identidade. Para sistemas D -dimensionais a representação do operador de estado de um sistema quântico, sob ação do canal quântico de despolarização é:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{\rho}) = d \frac{\hat{I}}{D} + (1 - d) \hat{\rho}. \quad (2.27)$$

A eq. 2.27 mostra que o sistema quântico após passar pelo canal de despolarização, tem probabilidade d de estar no estado quântico maximamente misto $\frac{\hat{I}}{D}$ e probabilidade $(1 - d)$ de continuar no estado $\hat{\rho}$. A letra D representa a dimensão do sistema quântico. O parâmetro de despolarização d varia entre $[0, 1]$.

O efeito do canal quântico de despolarização sobre um sistema quântico pode ser escrito na representação do operador soma, e tem a forma [20]:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{\rho}) = \hat{E}_0(\hat{\rho}) \hat{E}_0^\dagger + \hat{E}_1(\hat{\rho}) \hat{E}_1^\dagger + \hat{E}_2(\hat{\rho}) \hat{E}_2^\dagger + \hat{E}_3(\hat{\rho}) \hat{E}_3^\dagger, \quad (2.28)$$

onde os elementos de operação são: $\hat{E}_0 = \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} \hat{I}$, $\hat{E}_1 = \frac{\sqrt{d}}{2} \hat{\sigma}_x$, $\hat{E}_2 = \frac{\sqrt{d}}{2} \hat{\sigma}_y$ e $\hat{E}_3 = \frac{\sqrt{d}}{2} \hat{\sigma}_z$. Os operadores $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ são os operadores de Pauli. Neste trabalho é utilizada a operação de despolarização referente a eq. 2.28. Como exemplo de aplicação do operador de despolarização, considere um qubit representado pelo operador de estado $\hat{\rho}^{A_1} = |0\rangle\langle 0|$. Após passar pelo canal quântico de despolarização o operador de estado do qubit A_1 passa ser:

$$\hat{\rho}_E^{A_1} = d \left(\frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \right) + (1 - d) \hat{\rho}^{A_1},$$

portanto, o estado quântico que inicialmente era puro, após interagir com o sistema ambiente E do canal quântico, tem probabilidade d de passar a ser escrito como um estado misto.

2.8.2 Canal quântico de amortecimento de amplitude

O canal quântico de amortecimento de amplitude é extremamente importante devido ao fato de poder descrever efeitos relacionados a dissipação de energia de

sistema quânticos. Um processo que pode ser associado a este canal quântico é a emissão de um fóton por um átomo. Na representação do operador soma o canal quântico de amortecimento de amplitude tem a representação [20]:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{\rho}) = \hat{E}_0(\hat{\rho})\hat{E}_0^\dagger + \hat{E}_1(\hat{\rho})\hat{E}_1^\dagger, \quad (2.29)$$

com os elementos de operação $\hat{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}$ e $\hat{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \sin^2\theta$ e varia entre $[0, 1]$. Como exemplo da aplicação do canal de amortecimento de amplitude considere um qubit cujo operador de estado é $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$. Após passar pelo canal quântico o estado do sistema é:

$$\hat{\rho}_E^{A_1} = \gamma |0\rangle\langle 0| + (1 - \gamma) |1\rangle\langle 1|,$$

portanto, o sistema continua no estado $|1\rangle$ com probabilidade $(1 - \gamma)$, e tem probabilidade γ de estar no estado $|0\rangle$. Fisicamente a situação acima pode ser vista como um fóton passando por um canal, e que apresenta probabilidade γ de ser perdido para o ambiente [20].

2.9 Entropia

Entropia é um conceito empregado em termodinâmica e diz o quão desordenado é um sistema sob certas condições. Este conceito é aplicado tanto em teoria da informação clássica como em teoria da informação quântica. Em teoria clássica da informação, a entropia é utilizada para medir o quanto de informação pode, por exemplo, ser produzida por uma fonte discreta [26]. Em teoria da informação quântica esta relacionado ao grau de conhecimento do estado correspondente a um sistema físico [20].

2.9.1 Entropia de Shannon

A entropia de Shannon é a base da teoria da informação clássica. Considere uma distribuição de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, relacionada a possibilidade de algum evento $x \in X$ ocorrer, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de eventos. A entropia de Shannon para este sistema pode ser interpretada de diferentes maneiras, entre elas:

1. Pode ser utilizada para medir o quanto de informação é obtida, na média, quando o valor da probabilidade de algum evento de x de X ocorrer;
2. Pode ser vista como uma medida da quantidade de incerteza sobre o evento x de X antes de informar seu valor da probabilidade do evento ocorrer;
3. Pode ser utilizada para quantificar o recurso necessário para transmitir e armazenar informação [20].

Um fonte de informação discreta é caracterizada como um processo de Markov. Para que seja possível quantificar a informação produzida pela fonte, uma medida $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ que fará este papel deverá satisfazer as condições:

1. A medida H deve ser contínua em p_i . A probabilidade p_i deve variar entre o intervalo $[0, 1]$.
2. Se todas as probabilidades p_i são iguais, $p_i = \frac{1}{n}$, então H deve ser uma função monotônica aumentando em n , com as chances dos eventos ocorrerem ser equiprováveis, o que resulta em mais escolhas, ou incertezas, quando há mais eventos possíveis. Como exemplo considere dois eventos que podem ocorrer com a mesma probabilidade $\frac{1}{2}$ e quatro eventos que podem ocorrer com probabilidade $\frac{1}{4}$.
3. Se a escolha for dividida em outras duas possíveis, a quantidade H deve ser a soma ponderada dos valores individuais de H .

A única função H que satisfaz as condições acima tem a forma:

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i), \quad (2.30)$$

onde K é uma constante positiva. A eq. 2.30 pode ser escrita como:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i), \quad (2.31)$$

devido a fato da constante K ser equivalente a uma escolha da unidade de medida da entropia. A entropia de Shannon representa a entropia de um conjunto de probabilidades p_1, \dots, p_n [26].

2.9.2 Entropia conjunta

A entropia de Shannon de duas variáveis X e Y , levando em conta que nada é conhecido sobre as variáveis é definida como:

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2(p(x, y)), \quad (2.32)$$

onde $p(x, y)$ é a probabilidade conjunta de $x \in X$ e $y \in Y$ [27].

2.9.3 Entropia condicional

A entropia condicional também é definida a partir de duas variáveis e é definida a partir do conhecimento de uma das variáveis e tem a seguinte representação:

$$H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y), \quad (2.33)$$

a entropia condicional de X , dado que é conhecido o valor da variável Y equivale a diferença entre a entropia conjunta [27] das variáveis X e Y e entropia da variável Y . A entropia condicional é uma medida do quanto é desconhecido, na média sobre o valor de X , dado que é conhecido o valor da variável Y .

2.9.3.1 Propriedades da entropia de Shannon

A entropia de Shannon obedece as seguintes propriedades:

1 - A entropia conjunta de duas variáveis X e Y desconhecidas satisfaz $H(X, Y) = H(Y, X)$.

2 - A entropia da variável X obedece $H(X) \leq H(X, Y)$, sendo a entropia da variável X igual a entropia do par de variáveis apenas se Y é função de X .

3 - A entropia conjunta do par de variáveis (X, Y) é em geral menor que a soma das entropias individuais de cada variável (podendo ter o mesmo valor apenas se as variáveis X e Y são independentes), $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$.

2.9.4 Entropia de Von Neumann

A entropia de Von Neumann é intensamente utilizada em teoria da informação quântica. Pode ser utilizada para medir o quanto é desconhecido o estado quântico que representa um sistema físico e é definida de duas maneiras:

1. Em termos do traço da matriz densidade que descreve o sistema quântico:

$$S(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho} \log_2(\hat{\rho})). \quad (2.34)$$

2. Em termos dos autovalores do operador densidade que caracteriza o sistema quântico:

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \log_2(\lambda_i). \quad (2.35)$$

A entropia de Von Neumann é escrita em termos do logaritmo na base 2, consequentemente a unidade é o bit [20].

2.9.4.1 Propriedades da entropia de Von Neumann

A entropia de Von Neumann tem as seguintes propriedades:

1 - A entropia $S(\hat{\rho}) \geq 0$, valendo zero no caso em caso $\hat{\rho}$ é puro.

2 - Considerando um espaço de Hilbert d -dimensional a entropia será no máximo $\log_2(d)$. A entropia valerá $\log_2(d)$ apenas se $\hat{\rho}$ for um estado completamente misturado, $\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{d}$.

3 - No caso de um sistema composto puro $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$, a entropia dos subsistemas do sistema composto são iguais, $S(\hat{\rho}^{A_1}) = S(\hat{\rho}^{A_2})$.

4 - Suponha que dois sistemas A_1 e A_2 formam um sistema misto $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$, a entropia conjunta do sistema composto satisfaz:

$$S(\hat{\rho}^{A_1 A_2}) \leq S(\hat{\rho}^{A_1}) + S(\hat{\rho}^{A_2}),$$

onde a igualdade é válida apenas no caso onde o sistema composto é puro.

2.9.5 Entropia de troca

A entropia de troca mostra o quanto de informação é trocada entre um sistema quântico A e um sistema ambiente E . A expressão analítica da entropia de troca pode ser calculada de duas maneiras. A primeira maneira é purificando o operador de estado do sistema quântico composto $\hat{\rho}_E$. O subscrito E em $\hat{\rho}_E$ indica que $\hat{\rho}$ interagiu com um sistema quântico externo E . Deve ser calculada a entropia de Von Neumann do sistema quântico de referência R que purifica $\hat{\rho}_E$. Outra forma de calcular a entropia de troca é a partir do cálculo da entropia de Von Neumann da matriz de troca W . Os elementos de matriz da matriz W são calculados por meio da equação:

$$W_{ij} = Tr_Q(\hat{E}_i(\hat{\rho}^Q)\hat{E}_j^\dagger). \quad (2.36)$$

Neste trabalho a entropia de troca foi calculada a partir da matriz W . No caso do cálculo da entropia de troca via matriz W , o operador de estado $\hat{\rho}^Q$ representa o estado do sistema quântico composto Q que interage com o sistema ambiente. Os operadores \hat{E}_i e \hat{E}_j são os operadores de Kraus do canal quântico utilizado. A dimensão da matriz de troca W depende do número de operadores de Kraus que o canal quântico possui. A notação utilizada para representar a entropia de troca será $S_e(\hat{\rho}^{QE})$.

2.10 Informação mútua

A Informação mútua fornece o quanto de informação pode ser compartilhada entre duas partes de um sistema. A expressão apresenta duas versões, uma aplicada a sistemas clássicos e outra para sistemas quânticos.

2.10.1 Informação mútua clássica

Considere que exista duas distribuições de probabilidades X e Y . A informação compartilhada entre duas variáveis aleatórias X e Y , fornece o quanto de informação as variáveis X e Y tem em comum. Como exemplo considere que X seja a entrada de um canal de comunicação e Y represente a saída, a informação mútua pode ser interpretada como quantidade de informação que pode ser transmitida de X para Y através do canal clássico. A expressão da informação mútua entre as variáveis X e Y é:

$$I_m(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (2.37)$$

ou

$$I_m(X, Y) = H(X) - H(X | Y). \quad (2.38)$$

O termo $H(X, Y)$ na eq. 2.18 está relacionado ao erro causado por um canal que apresenta ruído, levando assim a diminuição de $I_m(X, Y)$. A informação mútua clássica é utilizada para calcular a capacidade de envio de informação de um canal clássico [20].

2.10.2 Informação mútua quântica

A definição da informação mútua quântica é análoga à informação mútua clássica, no entanto, é definida em termos da entropia de Von Neumann. A expressão que quantifica a informação mútua quântica é:

$$I_m(\hat{\rho}^{A_1}, \hat{\rho}^{A_2}) = S(\hat{\rho}^{A_1}) + S(\hat{\rho}^{A_2}) - S(\hat{\rho}^{A_1 A_2}), \quad (2.39)$$

onde $S(\hat{\rho}^{A_1})$ representa a entropia do sistema quântico A_1 , $S(\hat{\rho}^{A_2})$ do sistema A_2 e $S(\hat{\rho}^{A_1 A_2})$ a entropia conjunta do sistema $A_1 A_2$ [20]. O termo $S(\hat{\rho}^{A_1 A_2})$ reflete o efeito (na maioria das vezes prejudicial a tarefa a ser feita) da interação entre o sistema quântico $\hat{\rho}$ e o sistema ambiente E .

A informação mútua quântica tem um papel análogo a informação mútua clássica, porém, é utilizada para calcular o quanto de informação pode ser transmitida utilizando um canal de comunicação quântico. Além disso, quantifica a soma das correlações clássicas e quânticas existentes no sistema quântico.

2.11 Informação coerente

A informação coerente foi introduzida por Benjamin Schumacher e M. A. Nielsen em [18]. A informação coerente pode ser utilizada para medir o quanto de emaranhamento é preservado por um sistema quântico ao passar por um canal quântico, ou o quanto de informação pode ser transmitida pelo sistema quântico com o auxílio do canal quântico. A informação coerente é definida como:

$$I_c(\hat{\rho}^{QE}) = S(\hat{\rho}_E^Q) - S_e(\hat{\rho}^{QE}), \quad (2.40)$$

onde $S(\hat{\rho}_E^Q)$ é a entropia de Von Neumann do sistema $\hat{\rho}_E^Q$ sob efeito de um canal quântico $\hat{\varepsilon}$ e $S_e(\hat{\rho}^{QE})$ é a entropia de troca do sistema $\hat{\rho}^{QE}$. A informação coerente é máxima apenas para situações com a ausência da ação de canal quântico. No entanto, não faz sentido este tipo de situação neste trabalho, como dito anteriormente, por mais perfeito que seja um experimento, sempre haverá interação entre um sistema quântico ambiente E e o sistema quântico em que está sendo tratado. No caso de estados de quatro qubits, a ação do canal pode resultar na redistribuição de emaranhamento do qubit em foco com os três qubits restantes e o sistema quântico ambiente E do canal quântico. A informação coerente será

nula para o caso em que $S(\rho_E^Q) = S_e(\hat{\rho}^{QE})$ o que significa que todo emaranhamento inicial entre A_1 e $A_2A_3A_4$ é transferido para o sistema quântico ambiente E do canal quântico, o que implica agora na existência de emaranhamento apenas entre o sistema A_1 e o sistema quântico ambiente E . Quando o emaranhamento entre os sistemas A_1 e E é máximo, significa que o canal quântico não pode ser utilizado para enviar informação quântica, a informação anteriormente contida no sistema $A_1A_2A_3A_4$ é perdida para o ambiente E . A ação do canal sobre um sistema de quatro qubits, pode levar este o operador de estado a um operador que não apresenta emaranhamento nem com os outros três qubits e nem com a sistema ambiente E .

3 Estado cluster de quatro qubits

Estados maximamente emaranhados, isto é, estados onde os subsistemas que compõem o sistema quântico composto são maximamente correlacionados, em especial os chamados estados cluster, tem sido estudados devido a possibilidade de serem empregados em tarefas que envolvem QIP. Os estados cluster de poucos qubits são utilizados em protocolos de comunicação quântica, como por exemplo, o teleporte quântico [1] e o código superdenso [2], além de serem empregados no contexto de código de correção de erros quânticos [3]. O conceito de correção de erros pode ser associado a um canal quântico que minimiza o erro causado pela ação de um sistema ambiente sobre o sistema principal. Uma aplicação experimental do estado cluster é na possível produção de um computador quântico baseado em medidas [4]. Realizações experimentais com relação ao computador com base no estado cluster já foram demonstradas em [5] e [6].

Gour e Wallach [17] usaram o four-tangle (uma medida de emaranhamento entre quatro qubits [28]) para caracterizar todos os estados quânticos de quatro qubits maximamente emaranhados. Os autores definiram um estado quântico com emaranhamento máximo como sendo aquele em que, a média do emaranhamento com respeito a todos possíveis cortes bipartidos (divisão do sistema em duas partes) que podem ser feitos é máximo. Os autores identificam em especial três estados cluster:

$$|C\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle}{2}, \quad (3.1)$$

$$|C_1\rangle = \frac{|0000\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle - |1111\rangle}{2}, \quad (3.2)$$

e

$$|C_2\rangle = \frac{|0000\rangle + |1010\rangle + |0101\rangle - |1111\rangle}{2}. \quad (3.3)$$

Os três estados acima estão relacionados pela permutação entre os qubits. Neste trabalho será utilizado o estado cluster $|C\rangle$, pois é exatamente igual ao proposto por Briegel e Raussendorf. Poderia ser utilizado qualquer um dos outros dois estados.

A partir do estado cluster $|C\rangle$ é construída a classe de estados cluster $|\psi_C\rangle$. Os estados quânticos $|\psi_C\rangle$ por definição são todos os estados escritos na base $|0000\rangle$, $|0011\rangle$, $|1100\rangle$ e $|1111\rangle$, com os coeficientes a_{0000} , a_{0011} , a_{1100} , a_{1111} assumindo quaisquer valores, desde que $|a_{0000}|^2 + |a_{0011}|^2 + |a_{1100}|^2 + |a_{1111}|^2 = 1$. As correlações existentes nos estados $|\psi_C\rangle$ variam de acordo com o valor dos coeficientes do estado quântico. Dentre todos os estados quânticos de $|\psi_C\rangle$, o estado cluster $|C\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle}{2}$ é o único com emaranhamento máximo. Como o estado quântico $|\psi_C\rangle$ é o estado geral da classe de estado cluster, todos os cálculos realizados neste capítulo são obtidos para este estado geral,

mas nenhuma análise é feita. O estudo das grandezas de interesse é feita posteriormente, a partir de certas condições, que recaem no estado cluster propriamente dito, que é o foco do trabalho.

São calculadas três quantidades, responsáveis pela caracterização do estado quântico pertencente a classe de estados cluster. São calculadas, a informação mútua (com relação aos qubits A_1 e A_2), a concorrência (para a caracterização do recurso físico presente no estado quântico reduzido de dois qubits A_1A_2) e o quadrado do valor da negatividade, onde a operação transposta parcial é feita sobre o qubit A_1 do estado quântico de quatro qubits.

São consideradas as seguintes situações:

1. O estado quântico puro de quatro qubits.
2. O qubit A_1 do estado quântico pertencente a classe de estados cluster interage com o sistema ambiente E do canal de despolarização.
3. O subsistema A_1 do estado quântico de quatro qubits passa pelo canal de amortecimento de amplitude.

A primeira situação é importante pelo fato de permitir a caracterização do estado quântico $|\psi_C\rangle$, por meio das medidas de emaranhamento (quadrado do valor da negatividade e concorrência) e da quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os sistemas quânticos A_1 e A_2 . Para os casos com a presença de canal quântico, além do quadrado do valor da negatividade, da concorrência e da informação mútua, são obtidas as expressões analíticas da entropia de troca e da informação coerente.

Nas seções 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, a matriz densidade ou operador de estado do estado quântico após a passagem por um dos canais quânticos, sempre será denotada com um índice inferior E . Em relação ao canal quântico de despolarização (seção 2.8.1) o parâmetro de despolarização é denotado por d . Para evitar a confusão entre o parâmetro de despolarização e a dimensão do sistema, a letra d se refere apenas ao parâmetro de canal, a dimensão de qualquer sistema será especificada pela notação dim (ou será escrito por extensão). Levando em conta o canal quântico de amortecimento de amplitude (seção 2.8.2) o parâmetro de ruído é denotado por γ . Os autovalores referentes as matrizes densidade de um qubit A_1 e A_2 e de dois qubits A_1A_2 serão denotados sempre por β , γ (com índices) e α , respectivamente. Nesta trabalho, a notação γ por si só, representará (sempre) o parâmetro de amortecimento de amplitude. Os autovalores do operador $\hat{\rho}^{A_1A_2}\widehat{\hat{\rho}^{A_1A_2}}$, necessários para o cálculo da concorrência, sempre serão denotados por δ . Os autovalores da matriz de troca W , utilizados no cálculo da entropia de troca serão sempre rotulados por κ .

As expressões analíticas para todas as quantidades acima, com e sem a presença de canal quântico, considerando especificamente o estado com emaranhamento máximo são obtidas nas seções 3.2, 3.4 e 3.6.

3.1 Caracterização do estado $|\psi_C\rangle$

Um representante dos estados quânticos contidos na classe de estados cluster $|\psi_C\rangle$, é definido como:

$$|\psi_C\rangle = a_{0000}|0000\rangle + a_{0011}|0011\rangle + a_{1100}|1100\rangle + a_{1111}|1111\rangle. \quad (3.4)$$

Para obter a expressão analítica da informação mútua é preciso obter primeiramente o estado quântico reduzido de dois qubits, $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2} = \text{Tr}_{A_3 A_4}(|\psi_C\rangle\langle\psi_C|)$. Os autovalores do da matriz densidade $\rho_{\psi_C}^{A_1 A_2}$ são:

$$\alpha_1^{\psi_C} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}{2}, \quad (3.5)$$

e

$$\alpha_2^{\psi_C} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}{2}, \quad (3.6)$$

onde $D^{0000} = a_{0000}a_{1111}$ e $D^{0011} = a_{0011}a_{1100}$.

No cálculo da informação mútua, também são utilizados os autovalores dos operadores dos estados quânticos reduzidos de um único qubit, $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2 A_3 A_4}(|\psi_C\rangle\langle\psi_C|)$ e $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_2} = \text{Tr}_{A_1 A_3 A_4}(|\psi_C\rangle\langle\psi_C|)$, e são respectivamente:

$$\beta_1^{\psi_C} = P_{00}, \quad \beta_2^{\psi_C} = P_{11} \quad (3.7)$$

e

$$\gamma_1^{\psi_C} = P_{00} \text{ e } \gamma_2^{\psi_C} = P_{11}, \quad (3.8)$$

onde foi usada a notação:

$$P_{00} = |a_{0000}|^2 + |a_{0011}|^2 \text{ e } P_{11} = |a_{1100}|^2 + |a_{1111}|^2, \quad (3.9)$$

que respeita a condição de normalização $P_{00} + P_{11} = 1$. Neste caso os qubits A_1 e A_2 possuem matrizes densidade iguais.

3.1.1 Informação mútua

A expressão analítica da informação mútua é obtida por meio do cálculo dos autovalores da matriz densidade reduzida de dois qubits $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2}$, utilizando também os autovalores das matrizes densidade reduzidas dos qubits individuais A_1 e A_2 , $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_2}$. A expressão da informação compartilhada mutuamente entre os qubits A_1 e A_2 é:

$$I_m(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_C}^{A_2}) = -2P_{00}\log_2(P_{00}) - 2P_{11}\log_2(P_{11}) + \frac{1}{2}\log_2\left(|D^{0000} - D^{0011}|^2\right) + \frac{\sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}{2}\log_2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}{1 - \sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}\right). \quad (3.10)$$

3.1.2 Negatividade

A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da quantidade de emaranhamento existente entre o qubit A_1 , e os outros três qubits do estado quântico $|\psi_C\rangle$ é

$$\begin{aligned} N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1}) &= 4P_{00}P_{11}, \\ &= 4 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + |D^{0011}|^2 + |D^{0000}|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} = a_{0000}a_{1100}$ e $D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} = a_{0011}a_{1111}$. O valor máximo de $N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1})$ é alcançado para a escolha $P_{00} = P_{11}$, que é justamente a condição em que $|\psi_C\rangle = |C\rangle$.

3.1.3 Concorrência

Conforme explicado na subseção 2.6.3, para obter a expressão da quantidade de emaranhamento contido entre os qubits A_1 e A_2 , requer a utilização dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2}}$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2}}$ são:

$$\delta_1^{\psi_C} = 2 \left[P_{00}P_{11} + \sqrt{P_{00}P_{11} \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)} \right] - |D^{0000} - D^{0011}|^2, \quad (3.12)$$

e

$$\delta_2^{\psi_C} = 2 \left[P_{00}P_{11} - \sqrt{P_{00}P_{11} \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)} \right] - |D^{0000} - D^{0011}|^2. \quad (3.13)$$

A quantidade de emaranhamento contido no sistema reduzido de dois qubits é calculada pela expressão:

$$C(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2}) = \sqrt{\delta_1^{\psi_C}} - \sqrt{\delta_2^{\psi_C}}. \quad (3.14)$$

A concorrência quantifica o emaranhamento presente apenas entre dois qubits, neste trabalho foi calculado o emaranhamento entre o primeiro e segundo qubit que compõe o estado $|\psi_C\rangle$. Observamos a seguinte relação entre o quadrado do valor da negatividade global e a concorrência:

$$C^2(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2}) = N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1}) - 4 |D^{0000} - D^{0011}|^2. \quad (3.15)$$

3.2 Caracterização do estado cluster $|C\rangle$

Nesta seção é feita a caracterização do estado cluster $|C\rangle$. São obtidos os valores, do quadrado do valor da quantidade de emaranhamento contido entre o qubit A_1 e o restante do sistema (qubits A_2, A_3 e A_4), do emaranhamento contido entre os qubits A_1 e A_2 e da informação mútua (entre os qubits A_1 e A_2). Para obter o valor da informação mútua, é preciso obter os autovalores dos operadores de estado reduzido de um qubit, $\hat{\rho}_C^{A_1} = Tr_{A_2A_3A_4}(|C\rangle\langle C|)$ e $\hat{\rho}_C^{A_2} = Tr_{A_1A_3A_4}(|C\rangle\langle C|)$, e dois qubits $\hat{\rho}_C^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(|C\rangle\langle C|)$, que valem respectivamente:

$$\beta_1^C = \beta_2^C = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_1^C = \gamma_2^C = \frac{1}{2},$$

e

$$\alpha_1^C = \alpha_2^C = \frac{1}{2}.$$

A quantidade de informação $I_m(\hat{\rho}_C^{A_1}, \hat{\rho}_C^{A_2})$ compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 vale um bit. O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento global entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4$ é máximo, $N_G^2(\hat{\rho}_C^{A_1}) = 1$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_C^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_C^{A_1A_2}}$ são $\delta_1^C = \delta_2^C = \frac{1}{4}$, (eq. 3.41) mostrando que não existe emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 . A concorrência existe quando há correlações de dois qubits em sistemas quânticos, já é esperado $C(\hat{\rho}_C^{A_1A_2}) = 0$ para o estado $|C\rangle$.

3.3 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $|\psi_C\rangle$

Nesta seção é considerado o caso quando o qubit A_1 pertencente ao estado quântico $|\psi_C\rangle$ interage com o sistema ambiente E através do canal de despolarização. A operação quântica que representa o canal quântico de despolarização foi discutida com detalhes na seção 2.8.1. A operação quântica que descreve o estado quântico $|\psi_C\rangle$ devido a influência do canal quântico é $\hat{\rho}_{\psi_{CE}} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}\right) (\hat{\rho}_{\psi_C})$.

O operador de estado reduzido de dois qubits sob influência da interação com o sistema quântico ambiente, $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_{CE}})$, na base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, equivale a matriz densidade:

$$\rho_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} P_{00} \left(1 - \frac{d}{2}\right) & 0 & 0 & (1-d)(a_{0000}a_{1100}^* + a_{0011}a_{1111}^*) \\ 0 & \frac{d}{2}P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2}P_{00} & 0 \\ (1-d)(a_{1100}a_{0000}^* + a_{1111}a_{0011}^*) & 0 & 0 & P_{11} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

Na eq. 3.16 a letra d representa o parâmetro de despolarização. A matriz densidade $\rho_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2}$ possui os autovalores:

$$\alpha_1^{\psi_{CE}} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{d}{2} \\ + \sqrt{(1 - \frac{d}{2})^2 - 4 \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \\ + (1-d)^2 (|D^{0000} - D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2) \\ + d(1 - \frac{3}{4}d) (|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2) \end{array} \right.} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

$$\alpha_2^{\psi_{CE}} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{d}{2} \\ - \sqrt{(1 - \frac{d}{2})^2 - 4 \left\{ \begin{array}{l} (1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \\ + (1-d)^2 (|D^{0000} - D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2) \\ + d(1 - \frac{3}{4}d) (|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2) \end{array} \right.} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

$$\alpha_3^{\psi_{CE}} = P_{00} \frac{d}{2}; \quad \alpha_4^{\psi_{CE}} = P_{11} \frac{d}{2}. \quad (3.19)$$

A matriz densidade referente ao qubit A_1 , com efeito do sistema quântico ambiente E do canal de despolarização, $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1} = Tr_{A_2} (\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2})$, possui os autovalores:

$$\beta_1^{\psi_{CE}} = \left(1 - \frac{d}{2}\right) P_{00} + \frac{d}{2} P_{11}, \quad (3.20)$$

e

$$\beta_2^{\psi_{CE}} = \left(1 - \frac{d}{2}\right) P_{11} + \frac{d}{2} P_{00}. \quad (3.21)$$

Todos os autovalores da matrizes densidade que representam o sistema quântico A_1 ou o sistema quântico bipartido $A_1 A_2$ dependem do parâmetro de despolarização d .

Os autovalores da matriz densidade que representa o qubit A_2 são:

$$\gamma_1^{\psi_{CE}} = P_{00}; \quad \gamma_2^{\psi_{CE}} = P_{11}. \quad (3.22)$$

É evidente não haver nenhuma influência do canal quântico sobre o qubit A_2 .

3.3.1 Informação mútua

A expressão analítica que descreve a quantidade de informação que pode mutuamente ser compartilhada pelo sistema quântico bipartido A_1A_2 , com a influência do canal quântico de despolarização $\hat{\varepsilon}$ é:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_2}) &= -\beta_1^{\psi_{CE}} \log_2(\beta_1^{\psi_{CE}}) - \beta_2^{\psi_{CE}} \log_2(\beta_2^{\psi_{CE}}) - \gamma_1^{\psi_{CE}} \log_2(\gamma_1^{\psi_{CE}}) \\ &- \gamma_2^{\psi_{CE}} \log_2(\gamma_2^{\psi_{CE}}) + \alpha_1^{\psi_{CE}} \log_2(\alpha_1^{\psi_{CE}}) + \alpha_2^{\psi_{CE}} \log_2(\alpha_2^{\psi_{CE}}) \\ &+ \alpha_3^{\psi_{CE}} \log_2(\alpha_3^{\psi_{CE}}) + \alpha_4^{\psi_{CE}} \log_2(\alpha_4^{\psi_{CE}}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como os autovalores da matriz densidade $\rho_{\psi_{CE}}^{A_1A_2}$ são extensos, a expressão analítica de $I_m(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_2})$ é escrita apenas em termos da notação dos autovalores das matrizes densidade $\rho_{\psi_{CE}}^{A_1}$, $\rho_{\psi_{CE}}^{A_2}$ e $\rho_{\psi_{CE}}^{A_1A_2}$.

3.3.2 Negatividade

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento presente entre o qubit A_1 , sob efeito do sistema quântico ambiente E do canal, e o sistema composto, $A_2A_3A_4E$, é obtida através da expressão:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1}) = 4P_{00}P_{11} + d(2-d)(P_{00} - P_{11})^2. \quad (3.24)$$

O sistema quântico externo E tem o papel de levar o estado $|\psi_C\rangle$ a um sistema cujo operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}$ é misto, indicando que o estado cluster pode agora estar emaranhado com o sistema ambiente E . O sistema quântico obtido a partir da operação $(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4})(\hat{\rho}_{\psi_C})$ não é um sistema purificado. Observamos que se $P_{00} \neq P_{11}$, o emaranhamento do qubit A_1 após passar pelo canal quântico será menor do que no estado cluster $|C\rangle$.

3.3.3 Concorrência

A quantidade de emaranhamento contido entre os qubits A_1 e A_2 é obtida por meio dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_{CE}}^{A_1A_2}$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_{CE}}^{A_1A_2}$ são:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\psi_{CE}} &= \delta_2^{\psi_{CE}} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11}, \\ \delta_1^{\psi_{CE}} &= \delta_2^{\psi_{CE}} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\left|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}\right|^2 + |D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2 + \left|D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}\right|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
\delta_3^{\psi_C E} &= \begin{cases} (1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \\ + (1 - d)^2 (D^{0000} D^{*0011} + D^{0011} D^{*0000}) \\ + (2 + d(\frac{5}{4}d - 3)) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \end{cases} \\
+ & \sqrt{\left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & \left((1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + (1 - d)^2 (D^{0000} D^{*0011} + D^{0011} D^{*0000}) \right. \\ & \left. + (2 + d(\frac{5}{4}d - 3)) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \end{aligned} \right)^2 \\ & - \left(\begin{aligned} & \left((1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + (1 - d)^2 (|D^{0000} - D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + d(1 - \frac{3}{4}d) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \end{aligned} \right)^2 \end{aligned} \right]^2, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta_4^{\psi_C E} &= \begin{cases} (1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \\ + (1 - d)^2 (D^{0000} D^{*0011} + D^{0011} D^{*0000}) \\ + (2 + d(\frac{5}{4}d - 3)) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \end{cases} \\
- & \sqrt{\left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & \left((1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + (1 - d)^2 (D^{0000} D^{*0011} + D^{0011} D^{*0000}) \right. \\ & \left. + (2 + d(\frac{5}{4}d - 3)) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \end{aligned} \right)^2 \\ & - \left(\begin{aligned} & \left((1 - \frac{d}{2})^2 (|D^{0000}|^2 + |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + (1 - d)^2 (|D^{0000} - D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2) \right. \\ & \left. + d(1 - \frac{3}{4}d) \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \end{aligned} \right)^2 \end{aligned} \right]^2. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Os autovalores $\delta_1^{\psi_C E}$, $\delta_2^{\psi_C E}$, $\delta_3^{\psi_C E}$ e $\delta_4^{\psi_C E}$ podem assumir diferentes valores de acordo com o parâmetro de despolarização d e dos coeficientes a_{0000} , a_{0011} , a_{1100} e a_{1111} . Assim como a concorrência (subseção 2.6.3), o quadrado do valor da negatividade (subseção 2.6.2) depende dos coeficientes do estado quântico $|\psi_C\rangle$ e do parâmetro de despolarização d .

3.3.4 Entropia de troca

Para obter a expressão analítica da quantidade de entropia trocada entre o sistema quântico externo E e o qubit A_1 , é preciso calcular os autovalores da matriz de troca W . O procedimento utilizado para obter a matriz W é discutido na seção 2.9.5. Na

base computacional $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, a matriz W tem a representação:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3d}{4} & 0 & 0 & \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} \frac{\sqrt{d}}{2} (P_{11} - P_{00}) \\ 0 & \frac{d}{4} & i\frac{d}{4} (P_{00} - P_{11}) & 0 \\ 0 & -i\frac{d}{4} (P_{00} - P_{11}) & \frac{d}{4} & 0 \\ \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} \frac{\sqrt{d}}{2} (P_{11} - P_{00}) & 0 & 0 & \frac{d}{4} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Os autovalores da matriz de troca W são:

$$\kappa_1^{\psi_{CE}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{2} + \sqrt{(1-d)^2 - d \left(\frac{3d}{4} - 1 \right) (P_{00} - P_{11})^2} \right), \quad (3.29)$$

$$\kappa_2^{\psi_{CE}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{2} - \sqrt{(1-d)^2 - d \left(\frac{3d}{4} - 1 \right) (P_{00} - P_{11})^2} \right), \quad (3.30)$$

$$\kappa_3^{\psi_{CE}} = \frac{d}{4} (1 + P_{00} - P_{11}), \quad (3.31)$$

e

$$\kappa_4^{\psi_{CE}} = \frac{d}{4} (1 - P_{00} + P_{11}). \quad (3.32)$$

A quantidade de informação trocada entre o qubit A_1 e o sistema quântico ambiente E do canal quântico é dada por:

$$S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}) = -\kappa_1^{\psi_{CE}} \log_2(\kappa_1^{\psi_{CE}}) - \kappa_2^{\psi_{CE}} \log_2(\kappa_2^{\psi_{CE}}) - \kappa_3^{\psi_{CE}} \log_2(\kappa_3^{\psi_{CE}}) - \kappa_4^{\psi_{CE}} \log_2(\kappa_4^{\psi_{CE}}). \quad (3.33)$$

3.3.5 Informação coerente

A quantidade de informação quântica que pode ser enviada por meio do canal quântico utilizando o sistema quântico A_1 é obtida por meio da expressão:

$$I_c(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}) = - \left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{00} + \frac{d}{2} P_{11} \right) \log_2 \left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{00} + \frac{d}{2} P_{11} \right) \\ - \left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{11} + \frac{d}{2} P_{00} \right) \log_2 \left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{11} + \frac{d}{2} P_{00} \right) - S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}), \quad (3.34)$$

onde $\left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{00} + \frac{d}{2} P_{11} \right)$ e $\left(\left(1 - \frac{d}{2} \right) P_{11} + \frac{d}{2} P_{00} \right)$ são os autovalores da matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{\psi_{CE}})$ que corresponde ao qubit A_1 , sujeito a influência do sistema ambiente E do canal quântico de despolarização.

3.4 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $|C\rangle$

Com respeito as medidas utilizadas para caracterizar o estado quântico $|\psi_C\rangle$ (informação mútua, quadrado do valor da negatividade e concorrência), e medidas relacionadas à interação com o sistema quântico ambiente E do canal de despolarização e o qubit A_1 , neste momento são obtidas as expressões analíticas destas grandezas para o estado cluster genuíno $|C\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle}{2}$.

A operação quântica que representa o estado cluster devido a influência do sistema quântico ambiente E é $\hat{\rho}_{CE} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}\right) (|C\rangle \langle C|)$. Os autovalores da matriz densidade de um qubit, $\hat{\rho}_{CE}^{A_1} = Tr_{A_2A_3A_4}(\hat{\rho}_{CE})$ e $\hat{\rho}_{CE}^{A_2} = Tr_{A_1A_3A_4}(\hat{\rho}_{CE})$, e de dois qubits $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(\hat{\rho}_{CE})$, valem em sequência:

$$\beta_1^{CE} = \beta_2^{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_1^{CE} = \gamma_2^{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_1^{CE} = \alpha_2^{CE} = \left(\frac{2-d}{4}\right),$$

e

$$\alpha_3^{CE} = \alpha_4^{CE} = \frac{d}{4}.$$

A expressão analítica da quantidade de informação $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ compartilhada em comum para o sistema A_1A_2 é:

$$I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2}) = 2 + \log_2\left(\frac{2-d}{4}\right) + \frac{d}{2}\log_2\left(\frac{d}{2-d}\right).$$

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ entre o qubit A_1 e o sistema quântico $A_2A_3A_4E$ continua sendo máximo. O sistema quântico E é responsável por levar o estado $|C\rangle$ a um estado quântico misto.

Os autovalores da matriz densidade de dois qubits $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2}}$, valem:

$$\delta_1^{CE} = \delta_2^{CE} = \left(\frac{d}{4}\right)^2 \text{ e } \delta_3^{CE} = \delta_4^{CE} = \left(\frac{2-d}{4}\right)^2,$$

Observe que $\delta_1^{CE} = (\alpha_3^{CE})^2$ e $\delta_4^{CE} = (\alpha_1^{CE})^2$. O canal quântico de despolarização não afeta o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 . Independente do valor do parâmetro de despolarização, o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 sempre será nulo.

A quantidade de informação trocada entre o qubit A_1 e o ambiente E é obtida pela equação:

$$S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = 2 - \log_2(4-3d) + \frac{3d}{4}\log_2\left(\frac{4-3d}{d}\right).$$

Note que quantidade máxima de entropia trocada entre o sistema quântico externo E e o qubit A_1 do estado cluster é atingido quando o parâmetro de despolarização vale $d = 1$, e vale 2bits .

A quantidade de emaranhamento preservada entre o qubit A_1 e os três qubits $A_2A_3A_4$ durante a passagem pelo canal quântico, depende do peso dado para o fator d de despolarização, e é calculada por meio da expressão:

$$I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = \log_2(4 - 3d) - \frac{3d}{4} \log_2\left(\frac{4 - 3d}{d}\right) - 1.$$

A figura 1 mostra o efeito do canal de despolarização sobre a negatividade (onde a operação transposta parcial é tomada sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre os sistemas quânticos E e A_1 , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o qubit A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado cluster, durante a passagem pelo canal quântico de despolarização, em função do parâmetro de despolarização d .

Devido ao fato do quadrado do valor da negatividade global $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ com relação ao qubit A_1 permanecer constante, e além disso, apresentar o valor máximo, pode indicar que o qubit A_1 esteja emaranhado tanto com o sistema composto $A_2A_3A_4$, mas também com o sistema ambiente E . O fato do quadrado do valor da negatividade permanecer constante, e levando em conta que o qubit A_1 (para $d > 0$) troca informação com o sistema ambiente E , sugere que a quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2A_3A_4$ diminui, em compensação, o qubit A_1 pode estar emaranhado com o sistema ambiente, de modo que o emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4E$ seja máximo.

A concorrência é nula para qualquer valor do parâmetro de despolarização, em outras palavras, não existe nenhum emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 . Não há nenhuma surpresa com relação ao valor obtido para a concorrência, uma vez que na seção 3.2 $C(\hat{\rho}_C^{A_1A_2}) = 0$, e como não pode ser gerado emaranhamento (entre os qubits A_1 e A_2) por meio de $\hat{\varepsilon}$, consequentemente $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2}) = 0$. A negatividade (considerando o emaranhamento com o sistema externo) e a concorrência não são afetadas pelo canal quântico, quantitativamente.

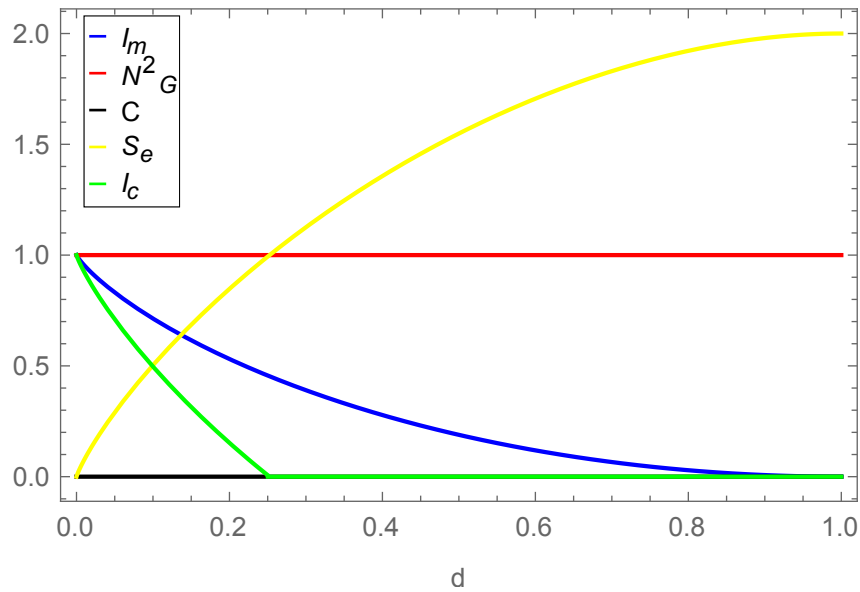
A medida que o parâmetro de despolarização torna-se maior, a quantidade de informação $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 diminui. Quando a quantidade máxima de ruído é adicionada ao sistema ($d = 1$), $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2}) = 0\text{bit}$.

A entropia de troca depende do valor do parâmetro de despolarização d , e atinge o valor máximo para a situação onde a interação entre o sistema composto A_1E é máxima. A quantidade de informação trocada entre o qubit A_1 e o sistema E reflete diretamente no valor que a informação coerente assume. Note que a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ é nula para o parâmetro de canal valendo $d = 0$, consequentemente a informação coerente vale $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = 1$, mas este é o caso em que não existe a ação do canal quântico

sobre o estado cluster, e o quadrado do valor da negatividade global obtida refere-se ao emaranhamento entre o qubit A_1 e $A_2A_3A_4$. Quanto maior o valor de $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$, menor será o valor da informação coerente. Para o valor do parâmetro de despolarização $d \approx \frac{1}{4}$ ($I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = 0$), todo o emaranhamento contido entre o qubit A_1 e o sistema quântico $A_2A_3A_4$ é perdido, observe que para este valor do parâmetro de despolarização a entropia de troca vale $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) \approx 1 \text{ bit}$, sugerindo a possibilidade do qubit A_1 estar emaranhado com o sistema ambiente E .

Pode ser enviada informação quântica pelo qubit A_1 aproximadamente até a faixa $d \approx \frac{1}{4}$. Para valores $d > \frac{1}{4}$ o canal de despolarização não apresenta utilidade alguma para envio de informação quântica.

Figura 1 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas são função do parâmetro de despolarização d , com exceção de $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ e $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$.



Fonte: o próprio autor.

3.5 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $|\psi_C\rangle$

Nesta seção também serão obtidas as expressões analíticas do quadrado do valor da negatividade (onde a operação transposta parcial é realizada sobre o qubit A_1 do estado quântico de quatro qubits), da concorrência, da informação mútua, da entropia de troca e da informação coerente. Os resultados analíticos que esboçam a informação mútua e a concorrência continuam sendo para os sistemas quânticos A_1 e A_2 .

O canal quântico de amortecimento de amplitude possui um sistema quântico ambiente E de dimensão ($dim = 2$), menor que aquele do canal quântico de despolarização ($dim = 4$). A operação quântica que descreve o canal quântico de amortecimento de amplitude encontra-se detalhadamente na seção 2.8.2. O estado quântico de quatro qubits sob influência do canal quântico é obtido por meio da operação $\hat{\rho}_{\psi_C E} = (\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}) (\hat{\rho}_{\psi_C})$.

O operador de estado reduzido de dois qubits sob influência da interação com o sistema quântico ambiente, $\hat{\rho}_{\psi_C E}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_C E})$, em termos da matriz densidade (na base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), é descrito por:

$$\rho_{\psi_C E}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} P_{00} & 0 & 0 & \sqrt{1-\gamma} \begin{Bmatrix} a_{0000} a_{1100}^* \\ + a_{0011} a_{1111}^* \end{Bmatrix} \\ 0 & P_{11}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\gamma} \begin{Bmatrix} a_{1100} a_{0000}^* \\ + a_{1111} a_{0011}^* \end{Bmatrix} & 0 & 0 & P_{11}(1-\gamma) \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

A matriz densidade $\rho_{\psi_C E}^{A_1 A_2}$ contém os autovalores:

$$\alpha_1^{\psi_C E} = P_{11}\gamma, \quad (3.36)$$

$$\alpha_2^{\psi_C E} = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma P_{11} + \sqrt{(1 - \gamma P_{11})^2 - 4(1 - \gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2} \right), \quad (3.37)$$

e

$$\alpha_3^{\psi_C E} = \frac{1}{2} \left(1 - \gamma P_{11} - \sqrt{(1 - \gamma P_{11})^2 - 4(1 - \gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2} \right). \quad (3.38)$$

A matriz densidade que descreve o operador de estado do qubit A_1 , $\hat{\rho}_{\psi_C E}^{A_1} = Tr_{A_2 A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_C E})$, sob efeito da interação com o sistema quântico ambiente E possui os autovalores:

$$\beta_1^{\psi_C E} = P_{00}(1 - \gamma) + \gamma, \quad (3.39)$$

e

$$\beta_2^{\psi_C E} = P_{11}(1 - \gamma). \quad (3.40)$$

A matriz que representa o operador densidade do qubit A_2 possui os autovalores:

$$\gamma_1^{\psi_{CE}} = P_{00} \text{ e } \gamma_2^{\psi_{CE}} = P_{11}. \quad (3.41)$$

Observe que, os autovalores da matriz densidade que rege o qubit A_2 dependem apenas dos coeficientes do estado quântico $|\psi_C\rangle$. Os autovalores que descrevem a matriz densidade do qubit A_1 , além de conter os fatores que descrevem os autovalores do qubit A_2 , contém termos adicionais, $\beta_1^{\psi_{CE}} = \gamma_1^{\psi_{CE}} - \gamma P_{00} + \gamma$ e $\beta_2^{\psi_{CE}} = \gamma_2^{\psi_{CE}} - \gamma P_{11}$, o que mostra o efeito do canal quântico sobre o qubit A_1 .

3.5.1 Informação mútua

A expressão analítica da quantidade de informação comum e compartilhada, entre os qubits A_1 e A_2 , é obtida com auxílio dos autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1}$, $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_2}$ e $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2}$. A expressão analítica da informação mútua é:

$$\begin{aligned} I_m \left(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_2} \right) &= -(P_{00}(1-\gamma) + \gamma) \log_2 (P_{00}(1-\gamma) + \gamma) - (P_{11}(1-\gamma)) \log_2 (P_{11}(1-\gamma)) - P_{00} \log_2 (P_{00}) \\ &- P_{11} \log_2 (P_{11}) + P_{11} \gamma \log_2 (P_{11} \gamma) + \left(\frac{1-\gamma P_{11}}{2} \right) \log_2 \left(\frac{\gamma P_{11} (1 + 2\gamma P_{11}) + 4(1-\gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2}{4} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} (1-\gamma P_{11})^2 \\ -4(1-\gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2 \end{array} \right\}} \right) \log_2 \left(\frac{\frac{1-\gamma P_{11}}{2} + \sqrt{(1-\gamma P_{11})^2 - 4(1-\gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2}}{1-\gamma P_{11}}}{-\sqrt{(1-\gamma P_{11})^2 - 4(1-\gamma) |D^{0000} - D^{0011}|^2}} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.5.2 Negatividade

A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da quantidade de emaranhamento existente entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2 A_3 A_4 E$ é:

$$N_G^2 \left(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1} \right) = 4P_{11} (1-\gamma) (\gamma + (1-\gamma) P_{00}). \quad (3.43)$$

O operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}$ não é a purificação do sistema quântico composto $A_1 A_2 A_3 A_4 E$. A dimensão do sistema quântico E é menor que o da seção 3.3. O quadrado do valor da negatividade diminui conforme o parâmetro de amortecimento de amplitude γ torna-se maior. Pode ser que o qubit A_1 além de estar emaranhado com os qubits $A_2 A_3 A_4$, também esta emaranhado com o sistema quântico externo E para a condição em que o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma < 1$. Considerando o parâmetro de de amortecimento de amplitude $\gamma = 1$, pode não haver emaranhamento entre o o qubit A_1 com os qubits $A_2 A_3 A_4$ e nem com o ambiente E .

3.5.3 Concorrência

Para obter a quantidade de emaranhamento contido no sistema quântico bipartido $A_1 A_2$ é preciso calcular os autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}}^{A_1 A_2}_{\psi_{CE}}$. O operador

$\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_{CE}}^{A_1 A_2}$ possui dependência do canal quântico de amortecimento de amplitude, e os autovalores são:

$$\delta_1^{\psi_{CE}} = (1 - \gamma) \delta_{1ec}^{\psi_C}, \quad (3.44)$$

e

$$\delta_2^{\psi_{CE}} = (1 - \gamma) \delta_{2ec}^{\psi_C}, \quad (3.45)$$

onde $\delta_{1ec}^{\psi_C}$ e $\delta_{2ec}^{\psi_C}$ são os autovalores obtidos na seção 3.1. Como $\delta_1^{\psi_{CE}}$ e $\delta_2^{\psi_{CE}}$ diferem de $\delta_{1ec}^{\psi_C}$ e $\delta_{2ec}^{\psi_C}$ apenas por um fator e sabendo que a concorrência obtida na seção 3.1 é nula, a concorrência com relação ao canal quântico de amortecimento de amplitude também será nula.

3.5.4 Entropia de troca

A expressão analítica da quantidade de informação trocada entre o sistema quântico externo E e o qubit A_1 , é obtida mediante o cálculo da entropia de Von Neumann da matriz W . Os passos para obter a matriz de troca W estão descritos detalhadamente na subseção 2.9.5.

Diferentemente da matriz W obtida na seção 3.3, a matriz de troca W , com respeito ao canal quântico de amortecimento de amplitude possui dimensão menor. O motivo é devido ao fato do sistema quântico ambiente E , do canal de amortecimento de amplitude ser menor que o do canal de despolarização, conseqüentemente, as expressões analíticas da entropia de troca e da informação coerente (para o canal quântico de amortecimento de amplitude) serão mais simples. É esperado que o valor máximo atingido pela entropia de troca nesta subseção seja menor do que na subseção 3.3.4. A matriz de troca W possui a forma:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - P_{11}\gamma & 0 \\ 0 & P_{11}\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

A expressão analítica da quantidade de informação trocada entre o sistema quântico E do canal de amortecimento de amplitude e o qubit A_1 é:

$$S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}) = -(1 - P_{11}\gamma) \log_2(1 - P_{11}\gamma) - P_{11}\gamma \log_2(P_{11}\gamma). \quad (3.47)$$

3.5.5 Informação coerente

A expressão analítica da quantidade de informação quântica transmitida pelo canal quântico de amortecimento de amplitude utilizando o qubit A_1 é:

$$\begin{aligned} I_c(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}) &= -(P_{00}(1 - \gamma) + \gamma) \log_2(P_{00}(1 - \gamma) + \gamma) \\ &\quad - (P_{11}(1 - \gamma)) \log_2(P_{11}(1 - \gamma)) - S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1 E}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $(P_{00}(1 - \gamma) + \gamma)$ e $P_{11}(1 - \gamma)$ são os autovalores da matriz reduzida do sistema quântico A_1 , ($\hat{\rho}_{\psi_{CE}}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{\psi_{CE}})$), sob efeito da interação com o sistema externo E . É esperado que o valor da informação coerente obtido nesta subseção seja maior que o que valor da subseção 3.3.5.

3.6 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $|C\rangle$

Nesta seção são obtidas as mesmas quantidades da seção 3.5, porém, para o estado específico $|C\rangle = \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle}{2}$. Os autovalores da matriz densidade de um qubit, $\hat{\rho}_{CE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CE}^{A_2}$, e de dois qubits $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2}$, valem, em seqüência:

$$\beta_1^{CE} = \frac{1+\gamma}{2} \text{ e } \beta_2^{CE} = \frac{1-\gamma}{2},$$

$$\gamma_1^{CE} = \gamma_2^{CE} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_1^{CE} = \frac{\gamma}{2}, \alpha_2^{CE} = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha_3^{CE} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Os autovalores das matrizes $\hat{\rho}_{CE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2}$ dependem da interação com o sistema quântico E do canal quântico. A quantidade de informação comum entre os qubits A_1 e A_2 , sob influência do sistema quântico ambiente E é dada pela equação:

$$I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2}) = -\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \log_2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\gamma}{2}\right) \log_2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

A equação acima mostra nitidamente a dependência da informação compartilhada entre o sistema quântico bipartido com respeito ao canal quântico. Quando parâmetro de amortecimento de amplitude atinge o valor máximo nenhuma quantidade de informação é partilhada pelo sistema quântico A_1A_2 . Para esta condição, o quadrado do valor da negatividade (cujo centro continua sendo o qubit A_1) vale $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}) = 1 - \gamma^2$. A medida que o parâmetro do canal quântico de amortecimento de amplitude aumenta o emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema $A_2A_3A_4E$ diminui, até não existir mais. (se houver emaranhamento entre o qubit A_1 e o ambiente E para $\gamma < 1$).

A quantidade de emaranhamento presente no sistema quântico bipartido A_1A_2 , pode ser obtida por meio dos autovalores do operador $(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2}})$. Os autovalores são:

$$\delta_1^{CE} = \delta_2^{CE} = \frac{1-\gamma}{4}.$$

É possível observar que não existe emaranhamento entre os dois qubits. Este canal quântico também não afeta o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 .

A expressão analítica da entropia de troca tem a forma:

$$(S_e)_{CE} = -\log_2\left(\frac{2-\gamma}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} \log_2\left(\frac{2-\gamma}{\gamma}\right).$$

A quantidade máxima de informação trocada entre o sistema quântico do canal quântico de amortecimento de amplitude é menor que do canal quântico de despolarização, e vale no máximo um bit.

A expressão analítica que mostra a quantidade de emaranhamento preservado pelo estado cluster, após a interação com o sistema quântico ambiente do canal quântico é:

$$I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = - \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) \log_2 \left(\frac{1+\gamma}{2} \right) - \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) \log_2 \left(\frac{1-\gamma}{2} \right) \\ + \log_2 \left(\frac{2-\gamma}{2} \right) - \frac{\gamma}{2} \log_2 \left(\frac{2-\gamma}{\gamma} \right).$$

A figura 2 demonstra o efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre o quadrado do valor da negatividade (cuja operação transposta parcial é realizada sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre os sistemas quânticos A_1 e E , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o sistema quântico A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado cluster, durante a passagem pelo canal quântico de amortecimento de amplitude, em função do parâmetro de amortecimento de amplitude γ .

Considerando o parâmetro de amortecimento de amplitude $0 < \gamma < 1$, pode ser que o qubit A_1 esteja emaranhado, além dos qubits $A_2A_3A_4$, também com o sistema ambiente E . A ação do canal quântico em relação ao quadrado do valor da negatividade global é a diminuição do emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2A_3A_4E$. No caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = 1$, o sistema quântico composto $A_1 - A_2A_3A_4E$ não possui emaranhamento. A explicação para o decréscimo de $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ pode estar relacionada a redistribuição do emaranhamento entre os qubits $A_2A_3A_4$ do estado cluster, ou possivelmente o estado cluster é mapeado para um estado em que o qubit A_1 não possui emaranhamento com os qubits $A_2A_3A_4$, e nem mesmo com o ambiente E (se houver para $\gamma < 1$). Devido ao fato do estado cluster não possuir correlações de dois corpos, a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ é nula.

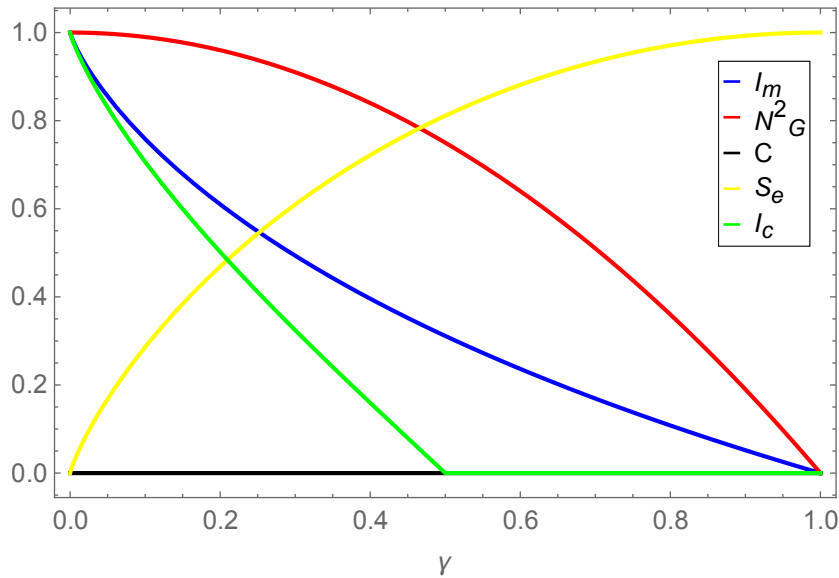
A informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 é afetada pelo canal quântico. A medida que o parâmetro amortecimento de amplitude aumenta, $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ diminui. A justificativa para a diminuição da informação mútua pode estar ligada a diminuição das correlações presentes no estado cluster devido a ação efetiva do canal quântico, uma vez que $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ quantifica também soma das correlações clássicas e quânticas existentes no sistema quântico.

A entropia de troca assume valores significantes ao passo que ruído é adicionado ao sistema quântico. O valor máximo alcançado por $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ vale um *bit*. Note que o valor máximo atingido pela entropia de troca nesta seção corresponde a metade do valor alcançado na seção 3.4. O valor assumido da entropia de troca esta diretamente ligado a dimensão do sistema quântico externo que interage com o sistema quântico. No

caso do canal de amortecimento de amplitude, um qubit pode muito bem simular o sistema quântico externo, por outro lado, um sistema quântico externo de dimensão $dim = 4$ é quem simula o canal de despolarização. Isto pode ser comprovado purificando $\hat{\rho}_{CE}$. A entropia de troca levando em conta o canal de despolarização, sempre será maior que aquela obtida via canal de amortecimento de amplitude, o canal de despolarização possui quatro elementos de Kraus (seção 2.8.1), no entanto, o canal de amortecimento de amplitude possui apenas dois elementos do operador soma (seção 2.8.2).

Um comportamento contrário ao da entropia de troca é observado com respeito a informação coerente. Conforme o parâmetro do canal quântico aumenta, o emaranhamento inicialmente entre o sistema quântico A_1 com o sistema quântico $A_2A_3A_4$ é supostamente transferido para o sistema ambiente E . O canal quântico de amortecimento de amplitude é inviável para transmissão de informação quântica para $\gamma \approx 0.5$.

Figura 2 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas são função do parâmetro de amortecimento de amplitude γ , com exceção de $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2})$.



Fonte: o próprio autor.

A informação coerente obtida nas seções 3.4 e 3.6 foram muito importantes, pois forneceram pistas para o cálculo destas quantidades, com relação aos estados quânticos representados pelos operadores de estado misto, referente aos capítulos 4 e 5. Note que a informação coerente é nula com relação ao canal de despolarização para $d \geq \frac{1}{4}$. Como é de interesse comparar a ação efetiva dos canais quânticos sobre os sistemas

quânticos, não há interesse no cálculo na entropia de troca e nem da informação coerente para $d > \frac{1}{4}$.

4 Estado misto formado pelo estado cluster e o estado $|W\rangle$ de quatro qubits

O estado quântico dos qubits A_1 e A_2 , obtido a partir de estado cluster analisado na capítulo 3, não possui emaranhamento. Neste capítulo é considerado uma mistura do estado $|\psi_C\rangle$ e do estado $|W\rangle = \frac{|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle}{2}$ de quatro qubits como ponto de partida. No caso específico referente a mistura do estado cluster com o estado quântico $|W\rangle$, o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 não é destruído totalmente quando é removido os qubits A_3 e A_4 .

São consideradas as seguintes situações:

1. O estado misto de quatro qubits.
2. O qubit A_1 do estado misto interage com o sistema quântico ambiente E do canal de despolarização.
3. O qubit A_1 passa por um canal quântico de amortecimento de amplitude.

A primeira situação é importante pelo fato de permitir a caracterização do estado misto, por meio das medidas de emaranhamento (negatividade e concorrência) e da quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 do sistema composto.

Nos casos 2 e 3, além do quadrado do valor da negatividade, concorrência e informação mútua, são obtidas as expressões analíticas da entropia de troca e da informação coerente. Nas seções 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, a matriz densidade ou o operador de estado, responsável por descrever o do estado quântico após a passagem por um dos canais quânticos sempre é denotada com um índice inferior E . Em relação ao canal quântico de despolarização o parâmetro de despolarização é denotado por d . Com respeito ao canal quântico de amortecimento de amplitude o parâmetro de ruído é denotado por γ . Os autovalores referentes as matrizes densidade de um qubit A_1 e A_2 e de dois qubits A_1A_2 serão denotados sempre por β , γ (com índices) e α , respectivamente. Os autovalores do operador $\hat{\rho}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1A_2}}$ sempre serão denotados por δ . Os autovalores da matriz de troca W são denotados pela letra grega κ .

Nas seções 4.3 e 4.5 os cálculos da informação mútua, concorrência, quadrado do valor da negatividade, entropia de troca e informação coerente são realizados para operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_C W E}$.

Nas seções 4.2 4.4 e 4.6, são obtidas as expressões analíticas para todas as quantidades acima, com e sem a presença de canal. No entanto, o estado misto é formado pelo estado quântico com emaranhamento máximo $|C\rangle$ com a adição do estado $|W\rangle$. Na seção 4.4, o parâmetro de despolarização vale respectivamente $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$. Com relação

a seção 4.6, o parâmetro de amortecimento de amplitude vale, em sequência, $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$.

4.1 Caracterização do estado misto formado pelo estado $|\psi_C\rangle$ e pelo estado $|W\rangle$

Nesta seção são obtidas as expressões analíticas do quadrado do valor da negatividade (com a operação transposta parcial feita sobre o qubit A_1), da concorrência e da informação mútua.

A negatividade fornece a quantidade de emaranhamento contido entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4R_{\psi_C W}$. Os qubits $A_2A_3A_4$ são aqueles que compõem o restante do operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_C W}$. O operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ pode ser visto como um subsistema de um sistema composto maior. O sistema quântico composto $R_{\psi_C W}$ tem a função de purificar o estado misto.

Os resultados obtidos para a informação mútua e a concorrência referem-se aos qubits A_1 e A_2 .

Uma estudo com relação ao estado $|W\rangle$ foi realizada por Dür, Vidal e Cirac em [29]. A representação geral do estado $|W\rangle$ para N qubits é:

$$|W_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|N-1, 1\rangle),$$

onde $|N-1, 1\rangle$ corresponde a um estado totalmente simétrico incluindo $N-1$ zeros e 1 uns. Segundo os autores, considerando um sistema representado pelo estado $|W_N\rangle$, e tomando o traço sobre quaisquer $N-2$ qubits, o subsistema bipartido residual tem a forma:

$$\hat{\rho}_{\kappa\mu} = \frac{1}{N} (2|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + (N-2)|00\rangle\langle 00|),$$

com $|\psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$. A quantidade de emaranhamento contido no sistema restante de dois qubits é determinada pela expressão:

$$C(\hat{\rho}_{\kappa\mu}) = \frac{2}{N},$$

onde $\hat{\rho}_{\kappa\mu}$ é o operador de estado que representa qualquer sistema bipartido reduzido obtido a partir do estado $|W_N\rangle$ de N qubits. O estado $|W_3\rangle = |W\rangle^{A_1A_2A_3}$ de três qubits tem a forma $|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$. O operador de estado reduzido de quaisquer dois qubits obtido a partir de $|W\rangle^{A_1A_2A_3}$ é $\hat{\rho}^{A_1A_2} = \hat{\rho}^{A_1A_3} = \hat{\rho}^{A_2A_3} = \frac{1}{3} (2|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |00\rangle\langle 00|)$, e conseqüentemente $C(\hat{\rho}^{A_1A_2}) = C(\hat{\rho}^{A_1A_3}) = C(\hat{\rho}^{A_2A_3}) = \frac{2}{3}$. Neste capítulo é utilizado o estado $|W_4\rangle = |W\rangle^{A_1A_2A_3A_4}$ de quatro qubits. Qualquer operador de estado bipartido obtido a partir de $|W\rangle^{A_1A_2A_3A_4}$ tem a forma $\hat{\rho}^{A_1A_2} = \hat{\rho}^{A_1A_3} = \hat{\rho}^{A_1A_4} = \hat{\rho}^{A_2A_3} = \hat{\rho}^{A_2A_4} = \hat{\rho}^{A_3A_4} = \frac{1}{2} (|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |00\rangle\langle 00|)$, logo $C(\hat{\rho}^{A_1A_2}) = C(\hat{\rho}^{A_1A_3}) = C(\hat{\rho}^{A_1A_4}) = C(\hat{\rho}^{A_2A_3}) = C(\hat{\rho}^{A_2A_4}) = C(\hat{\rho}^{A_3A_4}) = \frac{1}{2}$. A quantidade de emaranhamento (concorrência) presente no estado $|W\rangle$ diminui a medida o número de qubits que compõem o estado quântico aumenta. Neste trabalho o estado $|W\rangle^{A_1A_2A_3A_4}$ de quatro qubits é denotado simplesmente por $|W\rangle$.

Considere o estado misto de quatro qubits formado pela mistura entre o estado quântico $|\psi_C\rangle$ e o estado $|W\rangle$, cujo operador de estado tem a forma:

$$\hat{\rho}_{\psi_C W} = p |\psi_C\rangle \langle \psi_C| + (1-p) |W\rangle \langle W|. \quad (4.1)$$

Observe que o estado misto $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ corresponde a uma mistura estatística de um estado quântico ($|\psi_C\rangle$) que possui correlações de dois e quatro corpos, e um estado quântico que possui correlações de apenas dois corpos. O parâmetro de mistura p define o quão “forte” são as correlações presentes no estado misto, seja de dois ou quatro corpos. O estado $|\psi_C\rangle$ é ortogonal a $|C\rangle$, tal que $\langle \psi_C | C \rangle = 0$.

O operador de estado reduzido de dois qubits, $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2} = p \text{Tr}_{A_3 A_4} (|\psi_C\rangle \langle \psi_C|) + \frac{(1-p)}{2} \text{Tr}_{A_3 A_4} (|\psi^+\rangle \langle \psi^+| + |00\rangle \langle 00|)$, possui os autovalores:

$$\alpha_1^{\psi_C W} = \frac{1-p}{2}, \quad (4.2)$$

$$\alpha_2^{\psi_C W} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+p}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - 4p \left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)} \right), \quad (4.3)$$

e

$$\alpha_3^{\psi_C W} = \frac{1}{2} \left(\frac{1+p}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - 4p \left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)} \right). \quad (4.4)$$

A matriz densidade reduzida do qubit A_1 , $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} (\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2})$, e do qubit A_2 , $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_2} = \text{Tr}_{A_1} (\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2})$, possuem os autovalores iguais:

$$\beta_1^{\psi_C W} = pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p) \text{ e } \beta_2^{\psi_C W} = pP_{11} + \frac{1-p}{4}, \quad (4.5)$$

onde $\gamma_1^{\psi_C W} = \beta_1^{\psi_C W}$ e $\gamma_2^{\psi_C W} = \beta_2^{\psi_C W}$.

4.1.1 Informação Mútua

A expressão analítica da quantidade de informação compartilhada entre as duas partes do sistema quântico de dois qubits ($A_1 A_2$) é obtida em termos dos autovalores dos operadores de estado $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1}$, $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_2}$ e $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2}$. A expressão é:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_2}) &= -2 \left(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p) \right) \log \left(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p) \right) - 2 \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \log \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \\ &+ \frac{1-p}{2} \log \left(\frac{1-p}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{1+p}{4} \right) \log_2 \left(p \left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - 4p \left\{ P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right\}} \log_2 \left(\frac{\frac{1+p}{2} + \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - 4p \left\{ P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right\}}}{\frac{1+p}{2} - \sqrt{\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - 4p \left\{ P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right\}}} \right). \quad (4.6) \end{aligned}$$

4.1.2 Negatividade

O estado $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ é um estado misto, cuja purificação é $|\psi_C W\rangle_{pur} = \sqrt{p}|\psi_C\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|W\rangle|1\rangle$, onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os estados do sistema quântico de referência $R_{\psi_C W}$ que purifica $\hat{\rho}_{\psi_C W}$. O operador de estado do qubit A_1 é obtido através de $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1} = Tr_{A_2 A_3 A_4 R_{\psi_C W}} \left(|\psi_C W\rangle_{pur} \langle \psi_C W| \right)$. A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema quântico $A_2 A_3 A_4 R_{\psi_C W}$ é dada por:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1}) = 4 \left(p P_{11} \left(p P_{00} + \frac{1-p}{2} \right) - \left(\frac{1+p}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (4.7)$$

A negatividade depende apenas do parâmetro de mistura p e dos coeficientes do estado quântico $|\psi_C\rangle$.

4.1.3 Concorrência

Para obter a expressão analítica da quantidade de emaranhamento presente no sistema quântico de dois qubits $A_1 A_2$, é imprescindível diagonalizar o operador $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2} \widehat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2}$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2} \widehat{\rho}_{\psi_C W}^{A_1 A_2}$ são:

$$\delta_1^{\psi_C W} = \left(\frac{1-p}{2} \right)^2, \quad (4.8)$$

$$\delta_2^{\psi_C W} = p \left\{ \begin{array}{l} \left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2 \right) \right) \\ + \sqrt{\left(\left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(\begin{array}{l} 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \\ + |D^{0000} + D^{0011}|^2 \end{array} \right) \right) \right)^2} \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

e

$$\delta_3^{\psi_C W} = p \left\{ \begin{array}{l} \left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2 \right) \right) \\ - \sqrt{\left(\left(P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(\begin{array}{l} 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \\ + |D^{0000} + D^{0011}|^2 \end{array} \right) \right) \right)^2} \end{array} \right\}. \quad (4.10)$$

Como $\delta_2^{\psi_C W}$ e $\delta_3^{\psi_C W}$ dependem dos coeficientes do estado $|\psi_C\rangle$ e parâmetro de mistura p , visto que estes autovalores podem assumir diferentes valores de acordo com o valor atribuído a estes parâmetros, na seção a seguir será fornecida a expressão analítica da concorrência considerando o estado específico $|\psi_C\rangle = |C\rangle$.

4.2 Caracterização do estado misto formado pelo estado $|C\rangle$ e estado $|W\rangle$

A seguir são fornecidas as expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, e da concorrência. A informação mútua e a concorrência referem-se aos qubits A_1 e A_2 . A negatividade global tem como centro o qubit A_1 . O operador de estado misto tem a forma $\hat{\rho}_{CW} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|W\rangle\langle W|$. O estado $\hat{\rho}_{CW}$ exibe correlações de dois corpos (presente no estado quântico $|W\rangle$) e correlações de quatro corpos do estado cluster.

Para obter a expressão analítica da informação mútua é obrigatório determinar os autovalores dos operadores de estado reduzido de dois qubits (sistema quântico composto A_1A_2), e de um qubit (qubits A_1 e A_2 , respectivamente). Os autovalores da matrizes densidade $\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(p|C\rangle\langle C| + (1-p)|W\rangle\langle W|)$, $\hat{\rho}_{CW}^{A_1} = Tr_{A_2}(\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2})$ e $\hat{\rho}_{CW}^{A_2} = Tr_{A_1}(\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2})$, valem respectivamente:

$$\alpha_1^{CW} = \frac{1-p}{2}, \alpha_2^{CW} = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha_3^{CW} = \frac{p}{2},$$

$$\beta_1^{CW} = \frac{3-p}{4} \text{ e } \beta_2^{CW} = \frac{1+p}{4},$$

e

$$\gamma_1^{CW} = \frac{3-p}{4} \text{ e } \gamma_2^{CW} = \frac{1+p}{4}.$$

Obviamente $\beta_1^{CW} = \gamma_1^{CW}$ e $\beta_2^{CW} = \gamma_2^{CW}$.

A expressão analítica da informação mútua com respeito ao sistema quântico bipartido A_1A_2 , nessas condições será:

$$I_m(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}, \hat{\rho}_{CW}^{A_2}) = -\left(\frac{3-p}{2}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \log_2\left(\frac{1-p}{1+p}\right) + \frac{p}{2} \log_2\left(\frac{4p}{1-p^2}\right).$$

A expressão analítica que descreve o quadrado do valor da negatividade com respeito ao sistema A_1 é:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}) = 1 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2.$$

Como o estado $\hat{\rho}_{CW}$ é um estado misto, a purificação é $|CW\rangle_{pur} = \sqrt{p}|C\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|W\rangle|1\rangle$, onde novamente $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os estados do sistema quântico de referência R_{CW} que tem o papel de purificar $\hat{\rho}_{CW}$. O operador de estado do qubit A_1 é obtido tomando o traço parcial sobre o sistema quântico $A_2A_3A_4R_{CW}$, ou seja, $\hat{\rho}_{CW}^{A_1} = Tr_{A_2A_3A_4P}(|CW\rangle_{pur}\langle CW|)$. O emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema quântico quadripartido $A_2A_3A_4R_{CW}$ diminui a medida que o estado misto sofre perda de coerência para o estado tipo $|W\rangle$. É esperado que $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ diminua a medida que

$\hat{\rho}_{CW}$ evolui para $\hat{\rho}_W$. O estado $|W\rangle$ é um estado que não possui o grau máximo de emaranhamento entre os pares de qubits correlacionados.

A expressão que fornece a quantidade de emaranhamento contida no sistema quântico bipartido A_1A_2 é obtida a partir do estudo dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2}}$. Os autovalores de $\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2}}$ são:

$$\delta_1^{CW} = \left(\frac{1-p}{2}\right)^2, \quad \delta_2^{CW} = \delta_3^{CW} = \frac{p}{4}.$$

Observe que os autovalores do operador $\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2}}$ estão relacionados com os autovalores do sistema quântico reduzido de dois corpos $\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2}$, logo, $\delta_1^{CW} = (\alpha_1^{CW})^2$ e $\delta_2^{CW} = \frac{\alpha_3^{CW}}{2}$. A expressão analítica da concorrência é:

$$C(\hat{\rho}_{CW}^{A_1A_2}) = \frac{1-p}{2} - \sqrt{p}.$$

A figura 3 ilustra o comportamento do quadrado do valor da negatividade (a operação transposta parcial é feita sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (entre os qubits A_1 e A_2), em função do parâmetro de mistura $(1-p)$.

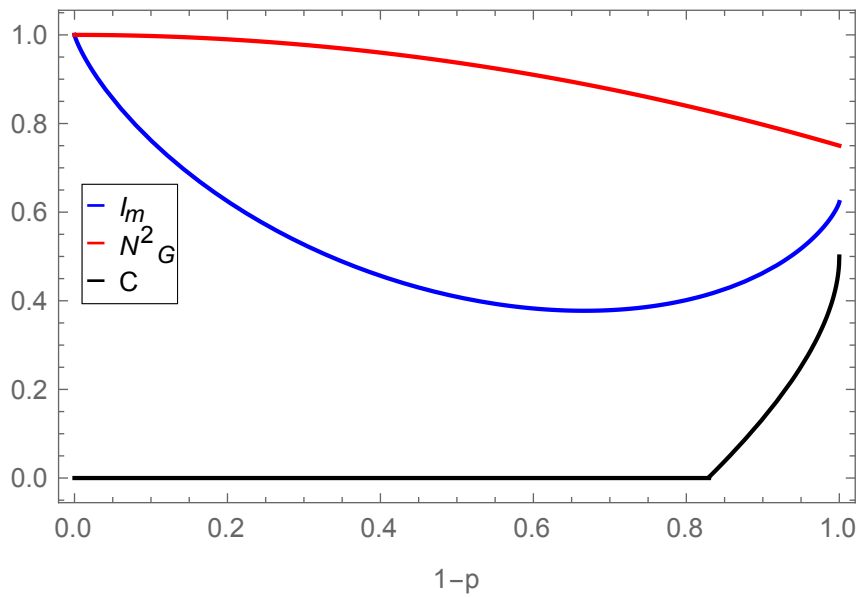
O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento existente entre o qubit A_1 e os outros três qubits do estado misto ($A_2A_3A_4$) diminui, a medida que o parâmetro de mistura $(1-p)$ aumenta (conforme o estado quântico $|W\rangle$ é misturado ao estado misto). A explicação para a diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ pode estar ligada ao fato dos diferentes tipos de correlações existentes em $\hat{\rho}_{CW}$. O estado cluster apresenta correlações de quatro corpos (com grau máximo), e implica no emaranhamento máximo entre o qubit A_1 e o sistema $A_2A_3A_4$. Por outro lado, como o estado $|W\rangle$ possui correlações de dois corpos (e não são máximas), então o qubit A_1 deve estar emaranhado com os qubits A_2 , A_3 e A_4 , mas aos pares. As correlações de dois corpos (do qubit A_1 e os outros qubits) do estado $|W\rangle$ devem estar sendo captadas por $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$. É esperado que o valor adquirido por $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ seja menor do que de $N_G^2(\hat{\rho}_C^{A_1})$. Portanto, $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ diminui a medida que o peso $(1-p)$ aumenta, o que pode ser visto como a subtração das correlações de quatro corpos (do estado cluster) do sistema misto, e a adição de correlações de dois corpos (do estado quântico $|W\rangle$), até que exista no sistema quântico apenas correlações de dois corpos.

As correlações de dois corpos presentes no estado $|W\rangle$ são significantes apenas para uma pequena faixa do parâmetro de mistura $(1-p)$. O gráfico também mostra que o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 existente no estado $|W\rangle$ não é máximo (mesmo que o sistema quântico sofra total perda de coerência para o estado $|W\rangle$).

A informação compartilhada entre as duas partes do sistema quântico de dois qubits A_1A_2 vale inicialmente um *bit* ($(1-p) = 0$). A medida que o parâmetro de mistura aumenta a informação mútua decresce. O tipo de correlações existentes no sistema quântico influi diretamente em $I_m(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}, \hat{\rho}_{CW}^{A_2})$. A troca de correlações de quatro

corpos por correlações de dois corpos prejudica a quantidade informação mutuamente compartilhada $I_m(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}, \hat{\rho}_{CW}^{A_2})$ pelo sistema bipartido. Um fato interessante é que para $(1-p) \sim 0.68$ até 1 a informação mútua do sistema passa a ser recuperada, mas não totalmente. A adição do estado quântico $|W\rangle$ ao sistema misto pode ser o responsável pela recuperação da informação mútua entre os qubits A_1 e A_2 .

Figura 3 – Informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CW}^{A_1}, \hat{\rho}_{CW}^{A_2})$ (linha azul), quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ (linha vermelha) e concorrência $C(\hat{\rho}_{CW}^{A_1 A_2})$ (linha preta). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1-p)$.



Fonte: o próprio autor.

4.3 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_C WE}$

Neste momento é considerada a situação em que o qubit A_1 do estado misto $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ interage com o sistema quântico ambiente E do canal de despolarização. A operação quântica que descreve o estado misto, formado pelo estado $|\psi_C\rangle$ e o estado $|W\rangle$ devido a influência do canal é $\hat{\rho}_{\psi_C WE} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}\right) (\hat{\rho}_{\psi_C W})$. O canal quântico de despolarização leva o estado misto $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ para um estado ainda mais misto. São obtidas as expressões analíticas do quadrado do valor da negatividade, da informação mútua, da concorrência, da entropia de troca e da informação coerente a partir de $\hat{\rho}_{\psi_C WE}$.

A expressão analítica da informação compartilhada em comum entre os sistemas A_1 e A_2 é obtida a partir dos autovalores das matrizes densidades reduzidas $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1 A_2}$, $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_2}$, onde o índice inferior E indica que os subsistemas passaram por algum canal quântico.

O operador de estado reduzido dos qubits $A_1 A_2$, $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_C WE})$, na base computacional $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ tem a forma:

$$\rho_{\psi_C WE}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} \left\{ pP_{00} \left(1 - \frac{d}{2}\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2 - \frac{d}{2}\right) \right. & 0 & 0 & p(1-d) \left\{ \begin{array}{l} a_{0000} a_{1100}^* \\ + a_{0011} a_{1111}^* \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{pd}{2} P_{11} \\ + \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) \end{array} \right. & \left(\frac{1-p}{4}\right) (1-d) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-p}{4}\right) (1-d) & \left\{ \begin{array}{l} \frac{pd}{2} P_{00} \\ + \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 + \frac{d}{2}\right) \end{array} \right. & 0 \\ p(1-d) \left\{ \begin{array}{l} a_{1100} a_{0000}^* \\ + a_{1111} a_{0011}^* \end{array} \right. & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{l} pP_{11} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \\ + \frac{d}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) \end{array} \right. \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

A matriz densidade que descreve o sistema $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1 A_2}$ contém os autovalores:

$$\alpha_1^{\psi_C WE} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} 1 - p(1-d) \\ + \sqrt{\left((1-p(1-d))^2 - 4 \left\{ \begin{array}{l} (pd)^2 P_{00} P_{11} \\ + pd \left(\frac{1-p}{2}\right) + pd^2 \left(\frac{1-p}{4}\right) (P_{11} - P_{00}) + d \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{4}d\right) \end{array} \right\} \right)} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

$$\alpha_2^{\psi_C WE} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} 1 - p(1-d) \\ - \sqrt{\left((1-p(1-d))^2 - 4 \left\{ \begin{array}{l} (pd)^2 P_{00} P_{11} \\ + pd \left(\frac{1-p}{2}\right) + pd^2 \left(\frac{1-p}{4}\right) (P_{11} - P_{00}) + d \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{4}d\right) \end{array} \right\} \right)} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

$$\alpha_3^{\psi_C WE} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} 1 + p(1-d) \\ \sqrt{\left[\begin{array}{l} (1+p(1-d))^2 \\ (2-d)^2 p P_{00} \left(p P_{11} - \left(\frac{1-p}{2} \right) \right) \\ + (1-p) \left(2 - \frac{d}{2} \right) \left(p + \frac{d}{8} (1-5p) \right) \\ -4p^2 (1-d)^2 \left(P_{00} P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right) \end{array} \right]} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

e

$$\alpha_4^{\psi_C WE} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} 1 + p(1-d) \\ \sqrt{\left[\begin{array}{l} (1+p(1-d))^2 \\ (2-d)^2 p P_{00} \left(p P_{11} - \left(\frac{1-p}{2} \right) \right) \\ + (1-p) \left(2 - \frac{d}{2} \right) \left(p + \frac{d}{8} (1-5p) \right) \\ -4p^2 (1-d)^2 \left(P_{00} P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right) \end{array} \right]} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

A matriz densidade que representa o estado do qubit A_1 , com a dependência da interação com o sistema quântico externo E , $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1} = Tr_{A_2} (\rho_{\psi_C WE}^{A_1 A_2})$, apresenta os autovalores:

$$\beta_1^{\psi_C WE} = p P_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (3-d) - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}), \quad (4.16)$$

e

$$\beta_2^{\psi_C WE} = p P_{11} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (1+d) + \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}). \quad (4.17)$$

Os autovalores da matriz densidade que representa o qubit A_2 são diferentes dos autovalores de $\rho_{\psi_C WE}^{A_1}$. Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_2} = Tr_{A_1} (\rho_{\psi_C WE}^{A_1 A_2})$ são:

$$\gamma_1^{\psi_C WE} = p P_{00} + \frac{3}{4} (1-p), \quad (4.18)$$

e

$$\gamma_2^{\psi_C WE} = p P_{11} + \frac{1-p}{4}. \quad (4.19)$$

O qubit A_1 devido a interação com o sistema quântico ambiente E possui explicitamente a dependência com relação ao canal quântico em seus autovalores. O qubit A_2 não depende do canal, este sistema não interage com nenhum sistema externo. Como os autovalores do qubit A_2 não possuem influência nenhuma do canal quântico, é fácil ver quais fatores são adicionados aos autovalores pelo canal. O autovalor $\beta_1^{\psi_C WE}$ ganha os fatores $-d \left(\frac{1-p}{4} \right) - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11})$ e o autovalor $\beta_2^{\psi_C WE}$ os fatores $d \left(\frac{1-p}{4} \right) + \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11})$.

4.3.1 Informação Mútua

A expressão analítica que descreve a informação comum compartilhada entre o sistema quântico de dois qubits (A_1A_2) é dada pela equação:

$$\begin{aligned} I_m \left(\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_2} \right) &= -\beta_1^{\psi_CWE} \log_2 \left(\beta_1^{\psi_CWE} \right) - \beta_2^{\psi_CWE} \log_2 \left(\beta_2^{\psi_CWE} \right) \\ &- \gamma_1^{\psi_CWE} \log_2 \left(\gamma_1^{\psi_CWE} \right) - \gamma_2^{\psi_CWE} \log_2 \left(\gamma_2^{\psi_CWE} \right) + \alpha_1^{\psi_CWE} \log_2 \left(\alpha_1^{\psi_CWE} \right) \\ &+ \alpha_2^{\psi_CWE} \log_2 \left(\alpha_2^{\psi_CWE} \right) + \alpha_3^{\psi_CWE} \log_2 \left(\alpha_3^{\psi_CWE} \right) + \alpha_4^{\psi_CWE} \log_2 \left(\alpha_4^{\psi_CWE} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

A expressão analítica da informação mútua é escrita apenas em termos dos coeficientes dos autovalores das matrizes densidade, devido ao fato da matriz densidade $\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1A_2}$ ter autovalores extensos.

4.3.2 Negatividade

A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da negatividade (com olhar sobre o qubit A_1) é obtida por meio da equação:

$$N_G^2 \left(\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1} \right) = 2 - 2 \left\{ \begin{aligned} &\left(pP_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (3-d) - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) \right)^2 \\ &+ \left(pP_{11} + \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) + \left(\frac{1-p}{4} \right) (1+d) \right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.21)$$

Neste caso a negatividade mede a quantidade de emaranhamento presente entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4R_{\psi_CWE}$. O sistema de referência R_{ψ_CW} tem o papel de purificar o estado misto $\hat{\rho}_{\psi_CW}$. O sistema quântico E é o responsável por levar a mistura $\hat{\rho}_{\psi_CW}$ a um sistema onde o operador de estado possui um número maior de projetores.

4.3.3 Concorrência

O operador $\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_CWE}^{A_1A_2}$, onde o operador $\widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_CWE}^{A_1A_2}$ é obtido a partir da aplicação da operação spin flip ($\hat{\sigma}_y$) individualmente sobre cada um dos qubits do sistema quântico $(\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1A_2})^*$, deve ser (se for necessário) diagonalizado. Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}}_{\psi_CWE}^{A_1A_2}$ são:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\psi_CWE} &= \left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) \left(1 - \frac{d}{2} (P_{00} - P_{11}) \right) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 \left(2 + 2d + \frac{3}{4}d^2 \right) \\ &+ \sqrt{\left[\left(\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) \left(1 - \frac{d}{2} (P_{00} - P_{11}) \right) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 \left(2 + 2d + \frac{3}{4}d^2 \right) \right)^2 \right.} \\ &\left. - \left[\left(\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) \left(1 - \frac{d}{2} (P_{00} - P_{11}) \right) - \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 \left(2d + \frac{5}{4}d^2 \right) \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\delta_2^{\psi_C WE} = \left(\frac{pd}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \left(2 + 2d + \frac{3}{4}d^2\right) - \sqrt{\left(\left(\frac{pd}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \left(2 + 2d + \frac{3}{4}d^2\right)\right)^2 - \left(\left(\frac{pd}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) - \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \left(2d + \frac{5}{4}d^2\right)\right)^2}, \quad (4.23)$$

$$\delta_3^{\psi_C WE} = \left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ + p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\} + \sqrt{\left(\left(\left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) \\ + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ + p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\}\right)^2 - \left(\left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) \\ + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ - p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\}\right)^2}, \quad (4.24)$$

e

$$\delta_4^{\psi_C WE} = \left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ + p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\} - \sqrt{\left(\left(\left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) \\ + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ + p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\}\right)^2 - \left(\left\{ \begin{array}{l} p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00}P_{11} + p \left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(2P_{11} + \frac{d}{2}(P_{00} - P_{11})\right) \\ + \frac{d}{2} \left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \\ - p^2 (1-d)^2 \left(P_{00}P_{11} - |D^{0000} - D^{0011}|^2\right) \end{array} \right\}\right)^2}. \quad (4.25)$$

A expressão analítica que descreve a quantidade de emaranhamento contida no sistema de dois qubits A_1A_2 será fornecida na próxima seção.

4.3.4 Entropia de Troca

A expressão analítica da quantidade de entropia trocada entre o sistema quântico externo E e o qubit A_1 do sistema composto $\hat{\rho}_{\psi_C WE}$, é obtida a partir do cálculo da entropia de Von Neumann da matriz de troca W . A matriz W na base computacional

possui a representação:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3d}{4} & 0 & 0 & \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} \frac{\sqrt{d}}{2} \begin{Bmatrix} p(P_{00} - P_{11}) \\ -\frac{1-p}{2} \end{Bmatrix} \\ 0 & \frac{d}{4} & i\frac{d}{4} \begin{Bmatrix} p(P_{00} - P_{11}) \\ -\frac{1-p}{2} \end{Bmatrix} & 0 \\ 0 & -i\frac{d}{4} \begin{Bmatrix} p(P_{00} - P_{11}) \\ -\frac{1-p}{2} \end{Bmatrix} & \frac{d}{4} & 0 \\ \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} \frac{\sqrt{d}}{2} \begin{Bmatrix} p(P_{00} - P_{11}) \\ -\frac{1-p}{2} \end{Bmatrix} & 0 & 0 & \frac{d}{4} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

É preciso diagonalizar a matriz W . O autovalores da matriz de troca W são:

$$\kappa_1^{\psi_C W E} = \frac{d}{4} \left(1 + p(P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right), \quad (4.27)$$

$$\kappa_2^{\psi_C W E} = \frac{d}{4} \left(1 - p(P_{00} - P_{11}) - \frac{1-p}{2} \right), \quad (4.28)$$

$$\kappa_3^{\psi_C W E} = \frac{1}{4} \left(2 - d + \sqrt{(2-d)^2 - d(4-3d) \left(1 - p(P_{00} - P_{11}) - \frac{1-p}{2} \right)^2} \right), \quad (4.29)$$

e

$$\kappa_4^{\psi_C W E} = \frac{1}{4} \left(2 - d - \sqrt{(2-d)^2 - d(4-3d) \left(1 - p(P_{00} - P_{11}) - \frac{1-p}{2} \right)^2} \right). \quad (4.30)$$

Finalmente, a quantidade de entropia trocada entre o sistema externo E e o qubit A_1 é calculada por meio da expressão:

$$\begin{aligned} S_e(\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 E}) &= -\kappa_1^{\psi_C W E} \log_2(\kappa_1^{\psi_C W E}) - \kappa_2^{\psi_C W E} \log_2(\kappa_2^{\psi_C W E}) \\ &\quad - \kappa_3^{\psi_C W E} \log_2(\kappa_3^{\psi_C W E}) - \kappa_4^{\psi_C W E} \log_2(\kappa_4^{\psi_C W E}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

4.3.5 Informação Coerente

A quantidade de informação quântica que pode ser enviada utilizando o canal quântico de despolarização é quantificada utilizando os autovalores do operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1}$, e a expressão da entropia de troca. A expressão analítica que representa a informação coerente é:

$$\begin{aligned} I_c(\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 E}) &= - \left(\begin{pmatrix} (1 - \frac{d}{2})(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) \\ +\frac{d}{2}(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) \end{pmatrix} \right) \log_2 \left(\begin{pmatrix} (1 - \frac{d}{2})(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) \\ +\frac{d}{2}(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - \left(\begin{pmatrix} (1 - \frac{d}{2})(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) \\ +\frac{d}{2}(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) \end{pmatrix} \right) \log_2 \left(\begin{pmatrix} (1 - \frac{d}{2})(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) \\ +\frac{d}{2}(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - S_e(\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 E}), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $\left((1 - \frac{d}{2})(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) + \frac{d}{2}(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) \right)$ e $\left((1 - \frac{d}{2})(pP_{11} + \frac{1-p}{4}) + \frac{d}{2}(pP_{00} + \frac{3}{4}(1-p)) \right)$ são os autovalores do operador de estado reduzido $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1}$.

4.4 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{CWE}$ com $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$

Nesta seção novamente é considerado que o qubit A_1 do estado misto $\hat{\rho}_{CW}$ interage com o sistema ambiente E do canal quântico de despolarização. A restrição feita é que o estado misto de quatro qubits é representado pela mistura estatística entre o estado cluster $|C\rangle$ e o estado $|W\rangle$. O estado misto inicialmente tem a forma $\hat{\rho}_{CW} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|W\rangle\langle W|$. O estado misto $\hat{\rho}_{CWE}$ é obtido através da operação $\hat{\rho}_{CWE} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}\right)(\hat{\rho}_{CW})$. São obtidas as expressões analíticas para o quadrado do valor da negatividade global com relação ao qubit A_1 do sistema quântico, da concorrência e informação mútua (com respeito aos qubits A_1 e A_2), da entropia de troca (entre o qubit A_1 e o sistema quântico ambiente E) e da informação coerente com respeito ao qubit A_1 . Os cálculos são realizados considerando o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$, respectivamente.

- Caso em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{8}$.

A expressão analítica da quantidade de informação comum entre o sistema quântico de dois qubits (A_1A_2), é obtida por meio do cálculo da entropia de Von Neumann dos autovalores das matrizes densidade reduzidas de um qubit, $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1} = Tr_{A_2}(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ e $\hat{\rho}_{CWE}^{A_2} = Tr_{A_1}(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$, e de dois qubits $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(\hat{\rho}_{CWE})$. A matriz densidade $\rho_{CWE}^{A_1A_2}$ possui quatro autovalores, e são:

$$\alpha_1^{CWE} = \frac{16 - 14p + \sqrt{197 - 402p + 205p^2}}{64},$$

$$\alpha_2^{CWE} = \frac{16 - 14p - \sqrt{197 - 402p + 205p^2}}{64},$$

$$\alpha_3^{CWE} = \frac{14p + 16 + (1-p)\sqrt{225}}{64},$$

e

$$\alpha_4^{CWE} = \frac{14p + 16 - (1-p)\sqrt{225}}{64}.$$

As matrizes densidade de um qubit, $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CWE}^{A_2}$, possuem os autovalores, respectivamente:

$$\beta_1^{CWE} = \frac{23 - 7p}{32}, \beta_2^{CWE} = \frac{9 + 7p}{32},$$

$$\gamma_1^{CWE} = \frac{3 - p}{4} \text{ e } \gamma_2^{CWE} = \frac{1 + p}{4}.$$

A expressão analítica que diz o quanto de informação é compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 é:

$$\begin{aligned}
 I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2}) &= -\left(\frac{23-7p}{32}\right) \log_2\left(\frac{23-7p}{32}\right) - \left(\frac{9+7p}{32}\right) \log_2\left(\frac{9+7p}{32}\right) \\
 &- \left(\frac{3-p}{4}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{4}\right) - \left(\frac{1+p}{4}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{4}\right) \\
 &+ \left(\frac{16-14p+\sqrt{197-402p+205p^2}}{64}\right) \log_2\left(\frac{16-14p+\sqrt{197-402p+205p^2}}{64}\right) \\
 &+ \left(\frac{16-14p-\sqrt{197-402p+205p^2}}{64}\right) \log_2\left(\frac{16-14p-\sqrt{197-402p+205p^2}}{64}\right) \\
 &+ \left(\frac{14p+16+(1-p)\sqrt{225}}{64}\right) \log_2\left(\frac{14p+16+(1-p)\sqrt{225}}{64}\right) \\
 &+ \left(\frac{14p+16-(1-p)\sqrt{225}}{64}\right) \log_2\left(\frac{14p+16-(1-p)\sqrt{225}}{64}\right).
 \end{aligned}$$

A expressão analítica do quadrado do valor da negatividade (cuja operação transposta parcial é realizada sobre o qubit A_1 do operador de estado misto) é:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) = 2 - 2 \left(\left(\frac{23-7p}{32} \right)^2 + \left(\frac{9+7p}{32} \right)^2 \right).$$

A quantidade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ fornece o quanto de emaranhamento apresenta o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4R_{CWE}$. O sistema quântico E é o responsável por levar a mistura $\hat{\rho}_{CW}$ a um sistema ainda mais misturado.

A quantidade de emaranhamento presente entre os qubits A_1 e A_2 é fornecida por meio da análise dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1A_2}}_{CWE}$, cujos autovalores são:

$$\delta_1^{CWE} = \left(\frac{1}{16}\right)^3 \left(4p^2 + 579(1-p)^2 + \sqrt{(4p^2 + 579(1-p)^2)^2 - (4p^2 - 69(1-p)^2)^2} \right),$$

$$\delta_2^{CWE} = \left(\frac{1}{16}\right)^3 \left(4p^2 + 579(1-p)^2 - \sqrt{(4p^2 + 579(1-p)^2)^2 - (4p^2 - 69(1-p)^2)^2} \right),$$

e

$$\delta_2^{CWE} = \delta_4^{CWE} = \left(\frac{1}{16}\right)^3 (960p - 60p^2 + 31(1-p)^2).$$

A concorrência presente no sistema quântico A_1A_2 é diferente de zero apenas para o caso em que o autovalor δ_1^{CWE} é o maior dos autovalores. A expressão analítica da concorrência é:

$$C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}) = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}} \begin{cases} \sqrt{4p^2 + 579(1-p)^2 + \sqrt{(4p^2 + 579(1-p)^2)^2 - (4p^2 - 69(1-p)^2)^2}} \\ -\sqrt{4p^2 + 579(1-p)^2 + \sqrt{(4p^2 + 579(1-p)^2)^2 - (4p^2 - 69(1-p)^2)^2}} \\ -2\sqrt{(960p - 60p^2 + 31(1-p)^2)}. \end{cases}$$

A expressão analítica que descreve o quanto de entropia é trocada entre o sistema ambiente E do canal e o qubit A_1 nestas condições é:

$$S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = - \left(\frac{3-p}{64} \right) \log_2 \left(\frac{3-p}{64} \right) - \left(\frac{1+p}{64} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{64} \right) \\ - \left(\frac{15 + \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \log_2 \left(\frac{15 + \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \\ - \left(\frac{15 - \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \log_2 \left(\frac{15 - \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right).$$

A quantidade de informação quântica que pode ser enviada utilizando o canal quântico e qubit A_1 é obtida por meio da equação:

$$I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = - \left(\frac{23-7p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{23-7p}{32} \right) \\ - \left(\frac{9+7p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{9+7p}{32} \right) \\ + \left(\frac{3-p}{64} \right) \log_2 \left(\frac{3-p}{64} \right) + \left(\frac{1+p}{64} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{64} \right) \\ + \left(\frac{15 + \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \log_2 \left(\frac{15 + \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \\ + \left(\frac{15 - \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right) \log_2 \left(\frac{15 - \sqrt{29p^2 - 58p + 813}}{32} \right),$$

onde $\frac{3-p}{64}$ e $\frac{1+p}{64}$ são os autovalores de $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}$.

- Caso em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{4}$.

A matriz densidade $\rho_{CWE}^{A_1A_2}$ possui quatro autovalores e são:

$$\alpha_1^{CWE} = \frac{8-6p+(1-p)\sqrt{37}}{32}, \alpha_2^{CWE} = \frac{8-6p-(1-p)\sqrt{37}}{32}, \\ \alpha_3^{CWE} = \frac{15-p}{32} \text{ e } \alpha_4^{CWE} = \frac{1+13p}{32}.$$

As matrizes densidade que representa os qubits A_1 e A_2 possuem os autovalores, respectivamente:

$$\beta_1^{CWE} = \frac{11-3p}{16}, \beta_2^{CWE} = \frac{5+3p}{16}, \\ \gamma_1^{CWE} = \frac{3-p}{4} \text{ e } \gamma_2^{CWE} = \frac{1+p}{4}.$$

Note que os autovalores do qubit A_2 continuam sendo os mesmos, o canal quântico não afeta este sistema.

A expressão analítica que mostra o quanto de informação é compartilhada em comum entre os qubits A_1 e A_2 é:

$$\begin{aligned}
I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2}) &= -\left(\frac{11-3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{11-3p}{16}\right) - \left(\frac{5+3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{5+3p}{16}\right) \\
&- \left(\frac{3-p}{4}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{4}\right) - \left(\frac{1+p}{4}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{4}\right) \\
&+ \left(\frac{8-6p+(1-p)\sqrt{37}}{32}\right) \log_2\left(\frac{8-6p+(1-p)\sqrt{37}}{32}\right) \\
&+ \left(\frac{8-6p-(1-p)\sqrt{37}}{32}\right) \log_2\left(\frac{8-6p-(1-p)\sqrt{37}}{32}\right) \\
&+ \left(\frac{15-p}{32}\right) \log_2\left(\frac{15-p}{32}\right) \\
&+ \left(\frac{1+13p}{32}\right) \log_2\left(\frac{1+13p}{32}\right).
\end{aligned}$$

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento contido entre o sistema A_1 e o sistema $A_2A_3A_4R_{CW}E$ é calculado pela expressão:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) = \frac{1}{64} (55 + 9p(2-p)).$$

O sistema quântico R_{CW} é quem purificar o estado misto sem considerar a existência do canal quântico de despolarização. O sistema quântico E é o sistema que interage com o sistema $A_2A_3A_4R_{CW}$.

Para obter a expressão da concorrência é preciso encontrar os autovalores do operador $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}}$. Os autovalores de $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}}$ são:

$$\delta_1^{CWE} = \frac{1}{16^2} + \left(p^2 + 225 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right) + 5(1-p) \sqrt{16(1-p)^2 + (3p^2 + 2p - 1)},$$

$$\delta_2^{CWE} = \frac{1}{16^2} + \left(p^2 + 225 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right) - 5(1-p) \sqrt{16(1-p)^2 + (3p^2 + 2p - 1)},$$

e

$$\delta_2^{CWE} = \delta_4^{CWE} = \frac{1}{16^3} (15-p)(1+13p).$$

A expressão analítica da concorrência é:

$$\begin{aligned}
C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}) &= \sqrt{\frac{1}{16^2} + \left(p^2 + 225 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right) + 5(1-p) \sqrt{16(1-p)^2 + (3p^2 + 2p - 1)}} \\
&- \sqrt{\frac{1}{16^2} + \left(p^2 + 225 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2\right) - 5(1-p) \sqrt{16(1-p)^2 + (3p^2 + 2p - 1)}} \\
&- 2\sqrt{\frac{1}{16^3} (15-p)(1+13p)}.
\end{aligned}$$

A quantidade de informação trocada entre o sistema quântico E e o qubit A_1 é obtida pela expressão:

$$\begin{aligned}
 S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = & -\left(\frac{3-p}{32}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{32}\right) - \left(\frac{1+p}{32}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{32}\right) \\
 & - \left(\frac{14 + \sqrt{144 + 13(1-p)^2}}{32}\right) \log_2\left(\frac{14 + \sqrt{144 + 13(1-p)^2}}{32}\right) \\
 & - \left(\frac{14 - \sqrt{144 + 13(1-p)^2}}{32}\right) \log_2\left(\frac{14 - \sqrt{144 + 13(1-p)^2}}{32}\right).
 \end{aligned}$$

A expressão que informa o quanto de emaranhamento é preservado pelo estado misto devido a passagem pelo canal quântico é:

$$\begin{aligned}
 I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = & -\left(\frac{11-3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{11-3p}{16}\right) \\
 & - \left(\frac{5+3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{5+3p}{16}\right) \\
 & + \left(\frac{3-p}{32}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{32}\right) + \left(\frac{1+p}{32}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{32}\right) \\
 & + \left(\frac{7 + \sqrt{36 + 13\left(\frac{1-p}{2}\right)^2}}{16}\right) \log_2\left(\frac{7 + \sqrt{36 + 13\left(\frac{1-p}{2}\right)^2}}{16}\right) \\
 & + \left(\frac{7 - \sqrt{36 + 13\left(\frac{1-p}{2}\right)^2}}{16}\right) \log_2\left(\frac{7 - \sqrt{36 + 13\left(\frac{1-p}{2}\right)^2}}{16}\right),
 \end{aligned}$$

onde $\frac{11-3p}{16}$ e $\frac{5+3p}{16}$ são os autovalores de $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}$.

A figura 4 demonstra o efeito do canal de despolarização sobre a negatividade (onde a operação transposta parcial foi feita sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre os sistemas quânticos E e A_1 , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o qubit A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado misto, durante a passagem pelo canal, em função do parâmetro de mistura $(1-p)$ com o parâmetro de despolarização valendo $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$, que equivalem ao gráfico superior e inferior da figura, respectivamente.

Para ambos os gráficos, o quadrado do valor da negatividade diminui a medida que o parâmetro de mistura $(1-p)$ aumenta. Pode ser que a justificativa para a diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$, conforme o sistema quântico sofre perda de coerência para o estado $|W\rangle$, seja devido a adição de correlações de dois corpos, onde o grau de emaranhamento é menor, e a subtração de correlações de quatro corpos onde o grau de emaranhamento é máximo. Entretanto, comparando os dois gráficos, a medida que o sistema quântico sofre perda de coerência para o estado $|W\rangle$, o valor atingido por $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ é maior, considerando o caso em que o parâmetro de despolarização vale

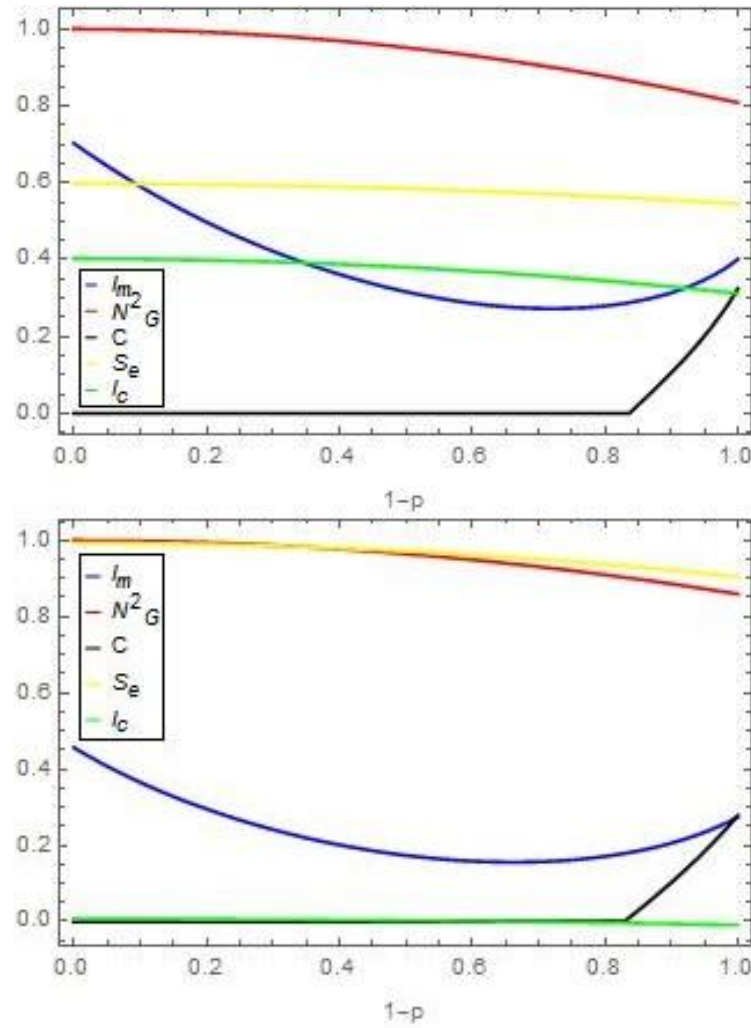
$d = \frac{1}{4}$. Este resultado pode ser indicando que o qubit A_1 pode estar emaranhado com o sistema quântico ambiente E , e o emaranhamento pode estar aumentando a medida que o parâmetro de interação torna-se maior, visto que a quantidade de entropia trocada entre o qubit A_1 e o sistema E aumenta consideravelmente com relação ao parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{4}$, comparando com o gráfico em que o parâmetro de canal vale $d = \frac{1}{8}$. O valor mínimo de $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ da figura 4, é maior que aquele obtido na seção 4.2, este fato pode estar mostrando, também, a existência de emaranhamento entre o qubit A_1 com outro sistema quântico (supostamente o sistema ambiente), além do sistema composto $A_2A_3A_4R_{CW}$.

A quantidade de emaranhamento existente entre os qubits A_1 e A_2 do sistema quântico diminui a medida que o parâmetro de despolarização aumenta, note que o valor máximo atingido pela concorrência considerando o caso em que $d = \frac{1}{4}$ é menor em relação a situação em que $d = \frac{1}{8}$. Independente do valor do parâmetro de despolarização, o valor máximo $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ é menor que o da seção 4.2. A diminuição da concorrência para os casos em que existe efeito do canal quântico, pode estar sugerindo a transferência de emaranhamento entre o sistema A_1A_2 para o sistema A_1E , pode ser que exista a transferência de emaranhamento do qubit A_1 para o sistema $A_2A_3A_4$.

A quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 do sistema quântico composto é menor para a situação em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{4}$, porém, parte de $I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2})$ é recuperada em ambos os casos. O caso em que a soma das correlações clássicas e quânticas no sistema é máxima, é aquela em que não há o efeito de canal quântico no sistema (seção 4.2). A recuperação parcial da informação mútua entre os qubits A_1 e A_2 pode estar relacionada com a adição de correlações de dois corpos no sistema quântico. Possivelmente diminuição do valor de $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ prejudica o compartilhamento de informação mutuamente entre os qubits A_1 e A_2 .

A quantidade de informação trocada entre o qubit A_1 e o sistema ambiente E diminui levemente a medida que o operador de estado $\hat{\rho}_{CWE}$ sofre perda de coerência para o estado $|W\rangle$. A quantidade de entropia trocada entre o qubit A_1 do estado cluster é maior que aquela trocada pelo estado $|W\rangle$. Como $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) > S_e(\hat{\rho}_{WE}^{A_1E})$ é esperado que $I_c(\hat{\rho}_{WE}^{A_1E}) > I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E})$, porém, não é isto que a figura 4 mostra, em ambos os gráficos. Considerando o caso em que o parâmetro de canal vale $d = \frac{1}{8}$, para qualquer estado quântico compreendido pela mistura é possível transmitir informação quântica através do canal quântico. Para a situação em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{4}$, não é possível transmitir informação quântica com o auxílio do canal de despolarização para nenhum estado quântico representado pela mistura estatística.

Figura 4 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1-p)$. É considerado o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $d = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior).



Fonte: o próprio autor.

4.5 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado

$$\hat{\rho}_{\psi_C W E}$$

Nesta seção é considerada a situação em que o qubit A_1 do estado misto $\hat{\rho}_{\psi_C W}$ interage com o sistema ambiente E do canal quântico de amortecimento de amplitude. O novo operador de estado sob influência do canal quântico é obtido por meio da operação $\hat{\rho}_{\psi_C W E} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4} \right) (\hat{\rho}_{\psi_C W})$, a diferença em relação a seção 4.3 é que a operação quântica $\hat{\varepsilon}$ representa o canal quântico de amortecimento de amplitude.

A expressão analítica da informação comum entre os qubits A_1 e A_2 é obtida a partir dos autovalores das matrizes densidades reduzidas $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 A_2}$, $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_2}$, onde o índice inferior E indica que os subsistemas passaram por algum canal quântico.

A representação matricial do operador reduzido de dois qubits, após interagir com o sistema ambiente do canal, $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_C W E})$, é:

$$\rho_{\psi_C W E}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} \left\{ pP_{00} + \left(\frac{1-p}{4}\right)(2+\gamma) \right. & 0 & 0 & p\sqrt{1-\gamma} \left\{ \begin{array}{l} a_{0000} a_{1100}^* \\ + a_{0011} a_{1111}^* \end{array} \right. \\ 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-p}{4} \\ + p\gamma P_{11} \end{array} \right. & \left(\frac{1-p}{4}\right)\sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-p}{4}\right)\sqrt{1-\gamma} & \left(\frac{1-p}{4}\right)(1-\gamma) & 0 \\ p\sqrt{1-\gamma} \left\{ \begin{array}{l} a_{1100} a_{0000}^* \\ + a_{1111} a_{0011}^* \end{array} \right. & 0 & 0 & pP_{11}(1-\gamma) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_C W E}^{A_1 A_2}$ são:

$$\alpha_1^{\psi_C W E} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} p\gamma P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right) \\ + \sqrt{\left(p\gamma P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right)\right)^2 - 4(p\gamma P_{11}(1-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right))} \end{array} \right\}, \quad (4.34)$$

$$\alpha_2^{\psi_C W E} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} p\gamma P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right) \\ - \sqrt{\left(p\gamma P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right)\right)^2 - 4(p\gamma P_{11}(1-\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right))} \end{array} \right\}, \quad (4.35)$$

$$\alpha_3^{\psi_C W E} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} p - \gamma p P_{11} + \left(\frac{1-p}{4}\right)(2+\gamma) \\ + \sqrt{\left(\left(p - \gamma p P_{11} + \left(\frac{1-p}{4}\right)(2+\gamma) \right)^2 - 4p(1-\gamma) \left\{ \begin{array}{l} pP_{00}P_{11} + P_{11}(2+\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right) \\ - p \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) \right\} \right)} \end{array} \right\}, \quad (4.36)$$

e

$$\alpha_4^{\psi_C W E} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} p - \gamma p P_{11} + \left(\frac{1-p}{4}\right)(2+\gamma) \\ - \sqrt{\left(\left(p - \gamma p P_{11} + \left(\frac{1-p}{4}\right)(2+\gamma) \right)^2 - 4p(1-\gamma) \left\{ \begin{array}{l} pP_{00}P_{11} + P_{11}(2+\gamma) \left(\frac{1-p}{4}\right) \\ - p \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) \right\} \right)} \end{array} \right\}. \quad (4.37)$$

A matriz densidade reduzida do qubit A_1 , $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2} (\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1 A_2})$ apresenta os autovalores:

$$\beta_1^{\psi_C WE} = p(P_{00} + \gamma P_{11}) + \left(\frac{1-p}{4}\right)(3 + \gamma), \quad (4.38)$$

e

$$\beta_2^{\psi_C WE} = \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4}\right)(1 - \gamma). \quad (4.39)$$

O qubit A_2 é representado pela matriz densidade $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_2} = \text{Tr}_{A_1} (\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1 A_2})$. Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_2}$ são:

$$\gamma_1^{\psi_C WE} = pP_{00} + \frac{3}{4}(1 - p), \quad (4.40)$$

e

$$\gamma_2^{\psi_C WE} = pP_{11} + \frac{1-p}{4}. \quad (4.41)$$

Devido a interação com o sistema ambiente, o autovalor $\beta_1^{\psi_C WE}$ de $\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1}$ ganha o fator $p\gamma P_{11} + \gamma\left(\frac{1-p}{4}\right)$ e o fator $\beta_2^{\psi_C WE}$ ganha o fator $-\gamma\left(pP_{11} + \frac{1-p}{4}\right)$.

4.5.1 Informação Mútua

A expressão analítica da quantidade de informação em comum compartilhada pelo sistema quântico bipartido $A_1 A_2$, vale:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_C WE}^{A_2}) &= -\beta_1^{\psi_C WE} \log_2(\beta_1^{\psi_C WE}) - \beta_2^{\psi_C WE} \log_2(\beta_2^{\psi_C WE}) \\ &- \gamma_1^{\psi_C WE} \log_2(\gamma_1^{\psi_C WE}) - \gamma_2^{\psi_C WE} \log_2(\gamma_2^{\psi_C WE}) + \alpha_1^{\psi_C WE} \log_2(\alpha_1^{\psi_C WE}) \\ &+ \alpha_2^{\psi_C WE} \log_2(\alpha_2^{\psi_C WE}) + \alpha_3^{\psi_C WE} \log_2(\alpha_3^{\psi_C WE}) + \alpha_4 \log_2(\alpha_4^{\psi_C WE}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.5.2 Negatividade

A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da negatividade com foco no qubit A_1 é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) &= 2 - 2 \left(p(P_{00} + \gamma P_{11}) + \left(\frac{1-p}{4}\right)(3 + \gamma) \right)^2 \\ &- 2 \left(\left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) (1 - \gamma) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

É investigado o emaranhamento com relação ao qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2 A_3 A_4 R_{\psi_C WE}$. Para qualquer valor do parâmetro γ de amortecimento de amplitude (exceto $\gamma = 0$), $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) < 1$.

4.5.3 Concorrência

Para obter a expressão analítica da quantidade de emaranhamento contido no sistema composto A_1A_2 é preciso diagonalizar o operador $\hat{\rho}_{\psi_{CWE}}^{A_1A_2}\hat{\rho}_{\psi_{CWE}}^{\widetilde{A_1A_2}}$. Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_{CWE}}^{A_1A_2}\hat{\rho}_{\psi_{CWE}}^{\widetilde{A_1A_2}}$ são:

$$\delta_1^{\psi_{CWE}} = \frac{1}{8}(1-p) \left\{ \begin{array}{l} (1-\gamma)(2p\gamma P_{11} + 1 - p) \\ + \sqrt{\left\{((1-\gamma)(2p\gamma P_{11} + 1 - p))^2 - 4p^2\gamma^2 P_{11}^2\right\}} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

$$\delta_2^{\psi_{CWE}} = \frac{1}{8}(1-p) \left\{ \begin{array}{l} (1-\gamma)(2p\gamma P_{11} + 1 - p) \\ - \sqrt{\left\{((1-\gamma)(2p\gamma P_{11} + 1 - p))^2 - 4p^2\gamma^2 P_{11}^2\right\}} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

$$\delta_3^{\psi_{CWE}} = p(1-\gamma) \left\{ \begin{array}{l} p \left(2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) + \left| D^{0000} + D^{0011} \right|^2 \right) \\ + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \\ \sqrt{\left(\left(\left(\left(p \left(2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) + \left| D^{0000} + D^{0011} \right|^2 \right) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \right) \right)^2 \right. \\ \left. \sqrt{\left(- \left(p \left| D^{0000} - D^{0011} \right|^2 + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \right)^2 \right)} \end{array} \right) \quad (4.46)$$

e

$$\delta_4^{\psi_{CWE}} = p(1-\gamma) \left\{ \begin{array}{l} p \left(2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) + \left| D^{0000} + D^{0011} \right|^2 \right) \\ + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \\ \sqrt{\left(\left(\left(\left(p \left(2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 \right) + \left| D^{0000} + D^{0011} \right|^2 \right) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \right) \right)^2 \right. \\ \left. \sqrt{\left(- \left(p \left| D^{0000} - D^{0011} \right|^2 + P_{11} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2 + \gamma) \right)^2 \right)} \end{array} \right) \quad (4.47)$$

A expressão analítica da concorrência é determinada na próxima seção, onde é considerado um operador de estado específico.

4.5.4 Entropia de Troca

Primeiramente, para obter a quantidade de informação trocada entre o sistema E e o qubit A_1 é preciso obter a matriz de troca W . Os detalhes de como obter a matriz W estão na subseção 2.9.5. A expressão analítica da entropia de troca é obtida a partir do cálculo da entropia de Von Neumann da matriz W . A matriz W tem a

representação:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) & 0 \\ 0 & \gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Neste caso não é preciso diagonalizar a matriz W . A expressão analítica da entropia de troca é:

$$\begin{aligned} S_e(\hat{\rho}_{\psi_C^{A_1 E}}^{A_1 E}) &= - \left(1 - \gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right) \log_2 \left(1 - \gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right) \\ &\quad - \left(\gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right) \log_2 \left(\gamma \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.5.5 Informação coerente

A expressão que fornece a informação coerente é:

$$\begin{aligned} I_c(\hat{\rho}_{\psi_C^{A_1 E}}^{A_1 E}) &= - \left(p(P_{00} + P_{11}\gamma) + \left(\frac{1-p}{4} \right) (3 + \gamma) \right) \log_2 \left(p(P_{00} + P_{11}\gamma) + \left(\frac{1-p}{4} \right) (3 + \gamma) \right) \\ &\quad - \left((1 - \gamma) \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right) \log_2 \left((1 - \gamma) \left(pP_{11} + \frac{1-p}{4} \right) \right) \\ &\quad - S_e(\hat{\rho}_{\psi_C^{A_1 E}}^{A_1 E}), \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde $(p(P_{00} + P_{11}\gamma) + (\frac{1-p}{4})(3 + \gamma))$ e $(1 - \gamma)(pP_{11} + \frac{1-p}{4})$ são os autovalores da matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_{\psi_C^{A_1 E}}^{A_1 E}$.

4.6 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado

$\hat{\rho}_{CWE}$ com $\gamma = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{8}$

A seguir são obtidas as expressões analíticas da informação mútua e concorrência (entre os qubits A_1 e A_2), do quadrado do valor da negatividade, (com a operação transposta parcial tomada sobre o qubit A_1), e das quantidades relacionadas ao canal quântico, entropia de troca e informação coerente, com olhar sempre sobre o qubit A_1 . Com a finalidade de estudar o efeito da perda de coerência do estado misto, a partir do estado quântico $|C\rangle$ até o estado $|W\rangle$ é atribuído ao parâmetro de amortecimento de amplitude o valor $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$, em sequência. Em outras palavras, as expressões analíticas obtidas são funções do do parâmetro de mistura $(1 - p)$. A operação quântica que descreve a evolução do estado com a influência do sistema externo é $\hat{\rho}_{CWE} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4}\right) (\hat{\rho}_{CW})$, onde o estado misto $\hat{\rho}_{CW} = p|C\rangle\langle C| + (1 - p)|W\rangle\langle W|$.

- Caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$.

Os autovalores da matriz densidade reduzida que representa o qubit A_2 ($\hat{\rho}_{CWE}^{A_2} = Tr_{A_1 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CWE})$), são:

$$\gamma_1^{CWE} = \frac{3 - p}{4}, \text{ e } \gamma_2^{CWE} = \frac{1 + p}{4}.$$

A matriz densidade reduzida com respeito ao qubit A_1 , sob efeito do canal quântico ($\hat{\rho}_{CWE}^{A_1} = Tr_{A_2 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CWE})$), apresenta os autovalores:

$$\beta_1^{CWE} = \frac{25 - 7p}{32}, \text{ e } \beta_2^{CWE} = \frac{7 + 7p}{32}.$$

Os sistema quântico bipartido $A_1 A_2$, obtido a partir da eliminação dos graus de liberdade dos sistemas A_3 e A_4 , $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CWE})$, possui os autovalores:

$$\alpha_1^{CWE} = \frac{1}{64} \left(15 - 13p + \sqrt{(15 - 13p)^2 - 56p(1 - p)} \right),$$

$$\alpha_2^{CWE} = \frac{1}{64} \left(15 - 13p - \sqrt{(15 - 13p)^2 - 56p(1 - p)} \right),$$

$$\alpha_3^{CWE} = \frac{1}{64} \left(17 + 13p + \sqrt{(17 + 13p)^2 - 56p(17 - p)} \right),$$

e

$$\alpha_4^{CWE} = \frac{1}{64} \left(17 + 13p - \sqrt{(17 + 13p)^2 - 56p(17 - p)} \right).$$

A expressão analítica da informação mútua entre os sistemas quânticos A_1 e A_2 será:

$$\begin{aligned}
 I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2}) &= -\left(\frac{25-7p}{32}\right) \log_2\left(\frac{25-7p}{32}\right) - \left(\frac{7+7p}{32}\right) \log_2\left(\frac{7+7p}{32}\right) \\
 &- \left(\frac{3-p}{4}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{4}\right) - \left(\frac{1+p}{4}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{4}\right) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(15-13p + \sqrt{(15-13p)^2 - 56p(1-p)}\right) \log_2\left(\frac{1}{64} \left(15-13p + \sqrt{(15-13p)^2 - 56p(1-p)}\right)\right) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(15-13p - \sqrt{(15-13p)^2 - 56p(1-p)}\right) \log_2\left(\frac{1}{64} \left(15-13p - \sqrt{(15-13p)^2 - 56p(1-p)}\right)\right) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(17+13p + \sqrt{(17+13p)^2 - 56p(17-p)}\right) \log_2\left(\frac{1}{64} \left(17+13p + \sqrt{(17+13p)^2 - 56p(17-p)}\right)\right) \\
 &+ \frac{1}{64} \left(17+13p - \sqrt{(17+13p)^2 - 56p(17-p)}\right) \log_2\left(\frac{1}{64} \left(17+13p - \sqrt{(17+13p)^2 - 56p(17-p)}\right)\right).
 \end{aligned}$$

O quadrado do valor da negatividade, com centro sobre o qubit A_1 é calculada a partir da expressão:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) = 2 - 2 \left(\left(\frac{25-7p}{32} \right)^2 + \left(\frac{7+7p}{32} \right)^2 \right).$$

Diferente da seção 4.4, $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ representa o quadrado do valor da quantidade de emaranhamento presente é com relação ao qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4R_{CWE}$.

Para calcular a concorrência é preciso analisar novamente os autovalores do operador $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}}^{A_1A_2}_{CWE}$. Os autovalores são:

$$\delta_1^{CWE} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 (1-p) \left(7(8-7p) + \sqrt{(7(8-7p))^2 - 64p^2}\right),$$

$$\delta_2^{CWE} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 (1-p) \left(7(8-7p) - \sqrt{(7(8-7p))^2 - 64p^2}\right),$$

e

$$\delta_3^{CWE} = \delta_4^{CWE} = \frac{p}{8^3} (17-p).$$

Neste caso é fácil obter a expressão da concorrência. A concorrência é diferente de zero apenas para o caso onde δ_1^{CWE} é o maior dos autovalores. A expressão analítica da concorrência é:

$$C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}) = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}} \begin{cases} \sqrt{(1-p) \left(7(8-7p) + \sqrt{(7(8-7p))^2 - 64p^2}\right)} \\ -\sqrt{(1-p) \left(7(8-7p) - \sqrt{(7(8-7p))^2 - 64p^2}\right)} \\ -2\sqrt{7p(17-p)}. \end{cases}$$

A expressão analítica da entropia de troca é:

$$(S_e)_{CWE} = - \left(\frac{31-p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{31-p}{32} \right) - \left(\frac{1+p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{32} \right).$$

Note que para este canal quântico, a expressão da entropia de troca é bem mais simples que aquela obtida com relação ao canal quântico de despolarização (seção 4.4). A dimensão do sistema quântico que representa do canal de amortecimento de amplitude é representado por um qubit, basta purificar o sistema $\hat{\rho}_{CWE}$.

A quantidade de informação quântica que pode ser transmitida pelo qubit A_1 através do canal quântico é obtida por meio da expressão:

$$I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = - \left(\frac{25-7p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{25-7p}{32} \right) - \left(\frac{7+7p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{7+7p}{32} \right) \\ + \left(\frac{31-p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{31-p}{32} \right) + \left(\frac{1+p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{32} \right).$$

- Caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{4}$.

A matriz densidade reduzida do qubit A_1 , $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1} = Tr_{A_2}(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$, onde $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(\hat{\rho}_{CWE})$ apresenta os autovalores:

$$\beta_1^{CWE} = \frac{13-3p}{16}, \text{ e } \beta_2^{CWE} = \frac{3+3p}{16}.$$

O matriz densidade que descreve o qubit A_2 , $\hat{\rho}_{CWE}^{A_2}$, tem os autovalores:

$$\gamma_1^{CWE} = \frac{3-p}{4}, \text{ e } \gamma_2^{CWE} = \frac{1+p}{4}.$$

Por fim, a matriz densidade do sistema quântico A_1A_2 , $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2}$ é caracterizada pelos autovalores:

$$\alpha_1^{CWE} = \frac{1}{32} \left(7 - 5p + \sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)} \right),$$

$$\alpha_2^{CWE} = \frac{1}{32} \left(7 - 5p - \sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)} \right),$$

$$\alpha_3^{CWE} = \frac{1}{32} \left(9 + 5p + \sqrt{49p^2 - 126p + 81} \right),$$

e

$$\alpha_4^{CWE} = \frac{1}{32} \left(9 + 5p - \sqrt{49p^2 - 126p + 81} \right).$$

A expressão analítica da quantidade de informação comum entre os qubits $A_1 A_2$ é descrita por meio de:

$$\begin{aligned}
 I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2}) &= -\left(\frac{13-3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{13-3p}{16}\right) - \left(\frac{3+3p}{16}\right) \log_2\left(\frac{3+3p}{16}\right) \\
 &- \left(\frac{3-p}{4}\right) \log_2\left(\frac{3-p}{4}\right) - \left(\frac{1+p}{4}\right) \log_2\left(\frac{1+p}{4}\right) \\
 &+ \left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{7-5p}{+\sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)}} \right\}\right) \log_2\left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{7-5p}{+\sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)}} \right\}\right) \\
 &+ \left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{7-5p}{-\sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)}} \right\}\right) \log_2\left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{7-5p}{-\sqrt{(7-5p)^2 - 24p(1-p)}} \right\}\right) \\
 &+ \left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{9+5p}{+\sqrt{49p^2 - 126p + 81}} \right\}\right) \log_2\left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{9+5p}{+\sqrt{49p^2 - 126p + 81}} \right\}\right) \\
 &+ \left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{9+5p}{-\sqrt{49p^2 - 126p + 81}} \right\}\right) \log_2\left(\frac{1}{32} \left\{ \frac{9+5p}{-\sqrt{49p^2 - 126p + 81}} \right\}\right).
 \end{aligned}$$

O quadrado do valor da negatividade, cujo foco continua sendo o qubit A_1 é descrita pela equação:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) = 2 - \frac{2}{16^2} ((13-3p)^2 + (3+3p)^2).$$

A expressão analítica da concorrência pode ser obtida a partir da análise dos autovalores:

$$\delta_1^{CWE} = \left(\frac{1-p}{32}\right) \left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right) + \sqrt{\left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\right)^2 - \frac{p^2}{16}}\right),$$

$$\delta_2^{CWE} = \left(\frac{1-p}{32}\right) \left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right) - \sqrt{\left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\right)^2 - \frac{p^2}{16}}\right),$$

e

$$\delta_3^{CWE} = \delta_4^{CWE} = 3p \left(\frac{9-p}{128}\right).$$

Os autovalores acima são autovalores do operador $\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}}^{A_1 A_2}_{CWE}$. A expressão analítica que fornece a quantidade de emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 é:

$$\begin{aligned}
 C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 A_2}) &= \sqrt{\left(\frac{1-p}{32}\right) \left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right) + \sqrt{\left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\right)^2 - \frac{p^2}{16}}\right)} \\
 &- \sqrt{\left(\frac{1-p}{32}\right) \left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right) - \sqrt{\left(3\left(1 - \frac{3}{4}p\right)\right)^2 - \frac{p^2}{16}}\right)} \\
 &- 2\sqrt{3p \left(\frac{9-p}{128}\right)}.
 \end{aligned}$$

A expressão analítica da entropia de troca é:

$$S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = - \left(\frac{15-p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{15-p}{16} \right) - \left(\frac{1+p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{16} \right).$$

A expressão analítica da informação coerente vale:

$$I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1E}) = - \left(\frac{13-3p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{13-3p}{16} \right) - \left(\frac{3+3p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{3+3p}{16} \right) \\ + \left(\frac{15-p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{15-p}{16} \right) + \left(\frac{1+p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{1+p}{16} \right).$$

A figura 5 demonstra o efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a negatividade (cuja operação transposta parcial é realizada sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre os sistemas quânticos E e A_1 , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o sistema quântico A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado misto, durante a passagem pelo canal, em função do parâmetro de mistura $(1-p)$ com o parâmetro de amortecimento de amplitude valendo $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$, que equivalem ao gráfico superior e inferior da figura, respectivamente.

Conforme o sistema quântico sofre perda de coerência para o estado $|W\rangle$ (em ambos os gráficos), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ diminui. No entanto, para qualquer um dos casos (desta seção), o maior valor alcançado por $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) < 1$, independente do valor do parâmetro de mistura. Os resultados obtidos para $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ com respeito ao caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$, são maiores que na situação em que o parâmetro do canal quântico tem o valor $\gamma = \frac{1}{4}$. Além das suposições feitas com relação a negatividade para o canal quântico de despolarização, pode ser que exista e redistribuição entre os qubits $A_2A_3A_4$ do sistema composto, e a redistribuição (caso exista) parece ser mais efetiva para valores maiores com respeito ao parâmetro de interação.

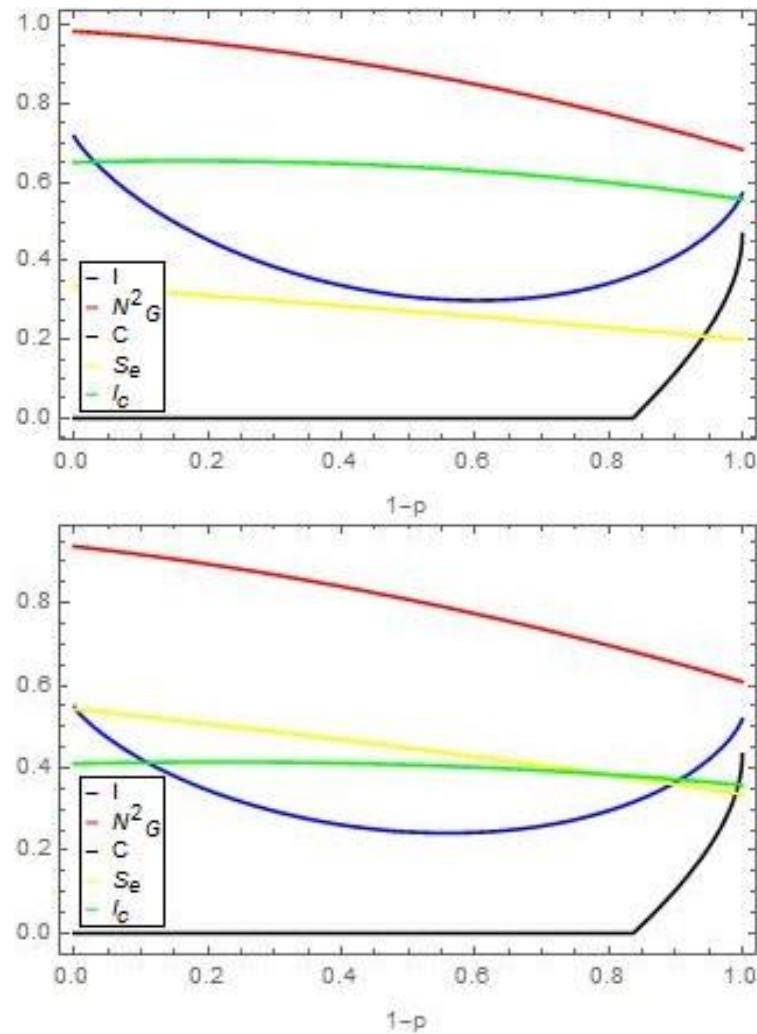
Em relação a concorrência $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ uma pequena quantidade é perdida devido a ação do canal quântico. O valor máximo atingido pela concorrência é maior para o caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$. A pequena diminuição de $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1A_2})$ indica que pode ter ocorrido a transferência de uma pequena quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema quântico composto $A_2A_3A_4R_{\psi_{CW}}$ para o sistema composto A_1E , ou até mesmo o emaranhamento pode ter sido redistribuído entre o sistema $A_2A_3A_4$. Se houver a transferência ou redistribuição de emaranhamento, o resultado obtido mostra a ação efetiva do canal quântico de amortecimento de amplitude, pelo menos para a concorrência pode ser menor que o efeito do canal quântico de despolarização.

A quantidade de informação compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 diminui consideravelmente ao longo de toda faixa do parâmetro de mistura. Conforme o sistema quântico sofre perda de decoerência para o estado $|W\rangle$ a informação mutua é recuperada

também para este canal. O interessante é que o valor da informação mútua para $(1 - p) = 0$ e $(1 - p) = 1$ são bem próximos para a condição em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{4}$.

A quantidade de informação trocada entre o estado cluster é maior quando comparado ao estado $|W\rangle$, para ambos os valores do canal quântico. Pelo fato do sistema ambiente do canal quântico de amortecimento de amplitude ser menor que o sistema ambiente do canal de despolarização, os valores da entropia de troca obtidas nesta seção são menores que aqueles obtidos na seção 4.4. O qubit A_1 interage com um sistema externo menor, logo, o resultado da entropia de troca também será menor. A consequência da troca de uma quantidade menor informação entre o qubit A_1 e o sistema quântico ambiente E influencia diretamente a quantidade de emaranhamento preservada pelo estado misto durante a passagem pelo canal quântico. O valor obtido para a informação coerente é maior com relação a seção 4.4. Mesmo para o caso em que $\gamma = \frac{1}{4}$ ainda é possível transmitir informação quântico com o auxílio do canal quântico, independente do valor do parâmetro de mistura $(1 - p)$.

Figura 5 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CWE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1 E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1-p)$. É considerado o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $\gamma = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior).



Fonte: o próprio autor.

5 Estado misto formado pelo estado cluster e o estado $|B\rangle$ de quatro qubits

O estado misto considerado no capítulo 4 era uma mistura do estado cluster e o estado $|W\rangle$. No estado $|W\rangle$, o qubit A_1 é emaranhado com todos os outros qubits (A_1A_2 , A_1A_3 e A_1A_4) através de correlações de dois corpos. O emaranhamento do qubit A_1 com o qubit A_2 do estado $|W\rangle$ é menor que o emaranhamento do qubit A_1 com o qubit A_2 do estado de Bell (eq. 2.13 do capítulo 2). O estado quântico $|B\rangle$ é um produto do estado de Bell com outro estado (qubits A_3 e A_4). Espera-se, que uma mistura de estado $|B\rangle$ e o estado cluster, resulte em um estado com quantidade maior de correlações de dois corpos entre qubit A_1 e qubit A_2 , em comparação com o estado misto que contém estado $|W\rangle$.

Neste capítulo são calculadas, a informação mútua e a concorrência (entre os qubits A_1 e A_2), o quadrado do valor da negatividade global (do qual o foco continua sendo o qubit A_1). A informação mútua, concorrência e negatividade tem o papel de caracterizar do estado misto. A mistura estatística é representada pelo operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$.

Nas situações em que há a presença de canal quântico, além das quantidades calculadas com a ausência de canal quântico, também são calculadas, a entropia trocada entre o sistema quântico ambiente E do canal quântico e o sistema quântico A_1 , e ao final a informação coerente.

São consideradas as seguintes possibilidades:

1. O estado misto de quatro qubits.
2. O qubit A_1 do operador de estado misto interage com o sistema ambiente E do canal quântico de despolarização.
3. O qubit A_1 passa por um canal quântico de amortecimento de amplitude.

Primeiramente todos cálculos são realizados para um estado compreendido pela mistura estatística do estado quântico $|\psi_C\rangle$ e o estado $|B\rangle$, seções 4.1, 4.3 e 4.5.

Os autovalores referentes as matrizes densidade de um qubit A_1 e A_2 e de dois qubits A_1A_2 continuam sendo denotados por β , γ e α (com índice), respectivamente. Os autovalores do operador $\hat{\rho}^{A_1A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1A_2}}$ são denotados por δ . Os autovalores da matriz de troca W continuam sendo denotados por κ . O parâmetro p é o parâmetro de mistura.

Nas seções 4.2, 4.4 e 4.6, é considerado o estado misto cujo operador de estado é $\hat{\rho}_{CB}$. O operador de estado $\hat{\rho}_{CB}$ possui correlações de dois e quatro corpos. Para investigar a ação dos canais de despolarização e de amortecimento de amplitude, os

parâmetros de canal valem respectivamente, $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$ (seção 4.4) e $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$ (seção 4.6).

Os estados quânticos $|\psi_C\rangle$ e $|B\rangle$ são ortonormais, $\langle\psi_C|B\rangle = 0$. Um fato interessante é que a matriz densidade reduzida de um qubit, $\hat{\rho}^{A_1}$, de qualquer uma das matrizes densidades dos estados cluster ou do estado $|B\rangle$ são idênticas, conseqüentemente, o valor da entropia troca e informação coerente, para qualquer canal quântico obtido a partir de $\hat{\rho}_{\psi_C B}$ (independente do parâmetro de canal), não variam com relação ao parâmetro de mistura. Os valores obtidos para a da entropia de troca e informação coerente assumem os mesmos valores calculados no capítulo três.

5.1 Caracterização do estado misto formado pelo estado $|\psi_C\rangle$ e estado $|B\rangle$

Considere um estado misto de quatro qubits formado pelo estado que representa a classe de estados cluster $|\psi_C\rangle$ e o estado quântico $|B\rangle$. A mistura estatística é representada por:

$$\hat{\rho}_{\psi_C B} = p |\psi_C\rangle \langle \psi_C| + (1-p) |B\rangle \langle B|. \quad (5.1)$$

O estado quântico $|B\rangle$ corresponde a um estado de Bell $|\psi^+\rangle^{A_1 A_2}$ produto com o estado $|10\rangle^{A_3 A_4}$, e tem a forma:

$$|B\rangle = \frac{|0110\rangle + |1010\rangle}{\sqrt{2}}.$$

O estado quântico $|B\rangle$ possui emaranhamento apenas entre os qubits A_1 e A_2 .

O operador de estado reduzido de dois qubits, $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1 A_2}$, equivale a $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1 A_2} = p \hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2} + (1-p) \hat{\rho}_B^{A_1 A_2}$, onde $\hat{\rho}_B^{A_1 A_2} = |\psi^+\rangle \langle \psi^+|$ e $\hat{\rho}_{\psi_C}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4}(\hat{\rho}_{\psi_C})$. A matriz densidade $\rho_{\psi_C B}^{A_1 A_2}$ possui os autovalores:

$$\alpha_1^{\psi_C B} = 1 - p, \quad (5.2)$$

$$\alpha_2^{\psi_C B} = p\alpha_{clst}^+ \text{ e } \alpha_3^{\psi_C B} = p\alpha_{clst}^-, \quad (5.3)$$

onde $\alpha_{clst}^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4|D^{0000} - D^{0011}|^2}}{2}$ são os autovalores da matriz densidade que representa o estado quântico $|\psi_C\rangle$, obtidos na seção 3.1. Os operadores de estado de um qubit, $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1} = Tr_{A_2}(\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1 A_2})$ e $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_2} = Tr_{A_1}(\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1 A_2})$ possuem os autovalores, respectivamente:

$$\beta_1^{\psi_C B} = pP_{00} + \frac{1-p}{2}, \quad \beta_2^{\psi_C B} = pP_{11} + \frac{1-p}{2}, \quad (5.4)$$

e

$$\gamma_1^{\psi_C B} = pP_{00} + \frac{1-p}{2} \text{ e } \gamma_2^{\psi_C B} = pP_{11} + \frac{1-p}{2}. \quad (5.5)$$

Observe que os operadores de estado $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_2}$ possuem os mesmos autovalores, devido ao fato de nenhum dos qubits interagirem com o sistema quântico externo.

5.1.1 Informação Mútua

A expressão analítica que descreve a quantidade de informação compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 vale:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_2}) &= -2\beta_1^{\psi_C B} \log_2(\beta_1^{\psi_C B}) - 2\beta_2^{\psi_C B} \log_2(\beta_2^{\psi_C B}) + \alpha_1^{\psi_C B} \log_2(\alpha_1^{\psi_C B}) \\ &+ p(\log_2(p) + \alpha_{clst}^+ \log_2(\alpha_{clst}^+) + \alpha_{clst}^- \log_2(\alpha_{clst}^-)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_2}$ foram escritos em termos dos autovalores $\hat{\rho}_{\psi_C B}^{A_1}$.

5.1.2 Negatividade

O estado $\hat{\rho}_{CB}$ é um estado misto com purificação $|\psi_{CB}\rangle_{pur} = \sqrt{p}|\psi_C\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p} |B\rangle|1\rangle$. Os estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os estados do sistema de referência ($R_{\psi_{CB}}$) utilizado para purificar $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$. O operador de estado do qubit A_1 é adquirido por meio de $Tr_{A_2A_3A_4R_{\psi_{CB}}}(|\psi_{CB}\rangle_{pur}\langle\psi_{CB}|)$. Assim como na seção 4.1, o operador de estado $\hat{\rho}_{CB}$ pode ser visto como sendo resultado da interação de algum estado quântico com um sistema (quântico) ambiente, antes de passar pelo canal quântico. Tomando o traço sobre o sistema ambiente é obtido $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$.

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema $A_2A_3A_4R_{\psi_{CB}}$ é dada pela expressão:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_{CB}}^{A_1}) = 4\det(\rho_{\psi_{CB}}^{A_1}) = 4\left(p^2\left(P_{00}P_{11} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right). \quad (5.7)$$

A expressão analítica do quadrado do valor da negatividade depende apenas dos coeficientes do estado quântico $|\psi_C\rangle$ e do parâmetro p de mistura.

5.1.3 Concorrência

Para calcular a quantidade de emaranhamento contido no sistema quântico bipartido A_1A_2 , deve ser diagonalizado o operador $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}^{A_1A_2}\widetilde{\hat{\rho}}^{A_1A_2}_{\psi_{CB}}$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}^{A_1A_2}\widetilde{\hat{\rho}}^{A_1A_2}_{\psi_{CB}}$ são:

$$\delta_1^{\psi_{CB}} = (1-p)^2, \quad (5.8)$$

$$\delta_2^{\psi_{CB}} = p^2 \left\{ \frac{\left(2\left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2\right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2\right)}{\sqrt{\left\{\left(2\left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2\right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2\right)^2 - |D^{0000} - D^{0011}|^4\right\}}} \right\} \quad (5.9)$$

e

$$\delta_3^{\psi_{CB}} = p^2 \left\{ \frac{\left(2\left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2\right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2\right)}{\sqrt{\left\{\left(2\left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2\right) + |D^{0000} + D^{0011}|^2\right)^2 - |D^{0000} - D^{0011}|^4\right\}}} \right\} \quad (5.10)$$

A expressão analítica da concorrência é fornecida na próxima seção.

5.2 Caracterização do estado misto formado pelo estado $|C\rangle$ e estado $|B\rangle$

Nesta seção são determinadas as expressões analíticas do quadrado do valor da negatividade, da concorrência e da informação mútua. Essas grandezas são obtidas a partir do operador de estado de quatro qubits $\hat{\rho}_{CB}$. O operador de estado misto de quatro qubits tem a forma $\hat{\rho}_{CB} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|B\rangle\langle B|$.

O operador de estado $\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2} = pTr_{A_3 A_4}(|C\rangle\langle C|) + (1-p)|\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ possui os autovalores:

$$\alpha_1^{CB} = 1-p \text{ e } \alpha_2^{CB} = \alpha_3^{CB} = \frac{p}{2}.$$

Os qubits A_1 e A_2 , cujas matrizes densidades são $\hat{\rho}_{CB}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CB}^{A_2}$, respectivamente, possuem os autovalores:

$$\beta_1^{CB} = \beta_2^{CB} = \frac{1}{2} \text{ e } \gamma_1^{CB} = \gamma_2^{CB} = \frac{1}{2}.$$

As matrizes densidade acima são calculadas eliminando os graus de liberdade do sistemas A_1 ou A_2 , dependendo do caso. A expressão analítica que descreve a quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 depende apenas do parâmetro de mistura e é:

$$I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2}) = -2\log_2\left(\frac{1}{2}\right) + (1-p)\log_2(1-p) + p\log_2\left(\frac{p}{2}\right).$$

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 do estado misto e o sistema composto $A_2 A_3 A_4 R_{CB}$ é máximo, $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}) = 1$. Portanto, a negatividade não depende do parâmetro de mistura. O operador $\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2}}$ possui os autovalores $\delta_1^{CB} = (1-p)^2$ e $\delta_2^{CB} = \delta_3^{CB} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. A expressão para a concorrência vale:

$$C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2}) = 1 - 2p.$$

Note novamente a relação entre os autovalores de $\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2}$ e $\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2}}$, $\delta_1^{CB} = (\alpha_1^{CB})^2$ e $\delta_2^{CB} = (\alpha_2^{CB})^2$.

A figura 6 ilustra o comportamento do quadrado do valor da negatividade (com a operação transposta parcial realizada sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), em função do parâmetro de mistura $(1-p)$.

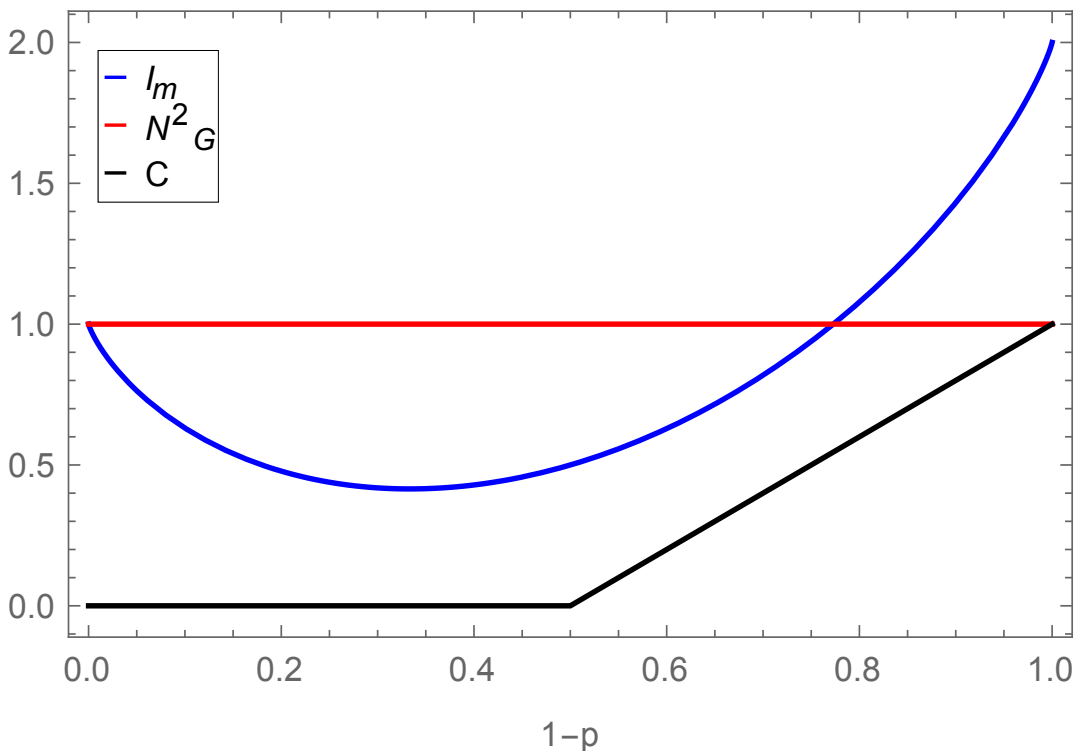
O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o resto do sistema de quatro qubits ($A_2 A_3 A_4 R_{CB}$) é sempre máximo, portanto $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$ não depende do parâmetro de mistura $(1-p)$. O fato de $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$ apresentar o valor máximo para qualquer valor do parâmetro de mistura, sugere que a negatividade deve estar captando as correlações de quatro corpos (do estado cluster), e as correlações de dois

corpos (do estado quântico $|W\rangle$). Como as correlações do estado cluster e do estado $|W\rangle$ são máximas, qualquer estado quântico representado pela mistura de estados apresenta o emaranhamento máximo entre o qubit A_1 e outro sistema quântico.

O emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 do sistema quântico é nulo para a situação em que o parâmetro de mistura vale $(1 - p) < 0,5$. A partir de $(1 - p) > 0,5$, a concorrência é diferente de zero, e alcança o valor máximo ($C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2}) = 1$) quando $(1 - p) = 1$, que é justamente a condição em que o sistema quântico é representando exclusivamente pelo estado $|W\rangle$. Observe que o valor máximo da concorrência atingido para este sistema quântico, é o dobro do valor alcançado pelo sistema quântico investigado no capítulo anterior (comparar as figuras 3 e 6).

A informação mutuamente compartilhada $I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2})$ entre os qubits A_1 e A_2 do estado misto inicialmente vale um *bit*, este é o caso em que o operador de estado $\hat{\rho}_{CB} = \hat{\rho}_C$. Observando a perda de coerência do estado misto para o estado quântico $|B\rangle$, a informação compartilhada em comum entre os qubits A_1 e A_2 inicialmente é perdida parcialmente, e em seguida é recuperada, até o ponto de valer *2bits* (que é a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_B^{A_1}, \hat{\rho}_B^{A_2})$ exclusivamente do estado quântico $|B\rangle$). O fato de $I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2})$ ser maior que $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$, é explicado pelo fato da informação mútua expressar a soma das correlações clássicas e quânticas existentes em um sistema quântico.

Figura 6 – Informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2})$ (linha azul), quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$ (linha vermelha) e concorrência $C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1 A_2})$ (linha preta). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1 - p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CB}^{A_1})$.



Fonte: o próprio autor.

5.3 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{\psi_{CB}E}$

Esta seção consiste no caso em que o qubit A_1 do estado misto $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$ interage com o sistema ambiente E do canal quântico de despolarização. A operação que descreve o estado misto sob influência do sistema ambiente E do canal é $\hat{\rho}_{\psi_{CB}E} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4} \right) (\hat{\rho}_{\psi_{CB}})$. O canal $\hat{\varepsilon}$ é representado pelo operador soma contido na seção 2.8.1, neste caso. O estado misto $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$ é aquele da seção 5.1. Novamente serão obtidas as expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, e da concorrência, mais também, as expressões da entropia de troca e da informação coerente.

O operador de estado reduzido de dois qubits $\hat{\rho}_{\psi_{CB}E}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_{CB}E})$, na forma matricial tem a representação:

$$\rho_{\psi_{CB}E}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} \begin{cases} pP_{00} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \\ + d \left(\frac{1-p}{4}\right) \end{cases} & 0 & 0 & p(1-d) \begin{cases} a_{0000} a_{1100}^* \\ + a_{0011} a_{1111}^* \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \frac{pd}{2} P_{11} \\ + \left(\frac{1-p}{4}\right) (2-d) \end{cases} & \left(\frac{1-p}{2}\right) (1-d) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-p}{2}\right) (1-d) & \begin{cases} \frac{pd}{2} P_{00} \\ + \left(\frac{1-p}{4}\right) (2-d) \end{cases} & 0 \\ p(1-d) \begin{cases} a_{1100} a_{0000}^* \\ + a_{1111} a_{0011}^* \end{cases} & 0 & 0 & \begin{cases} pP_{11} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \\ + d \left(\frac{1-p}{4}\right) \end{cases} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_{CB}E}^{A_1 A_2}$ são:

$$\alpha_1^{\psi_{CB}E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\frac{pd+(1-p)(2-d)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{pd+(1-p)(2-d)}{2}\right)^2 - 4 \left(\left(\frac{pd}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 (2-d)^2 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 (1-d)^2\right)}}, \right. \quad (5.12)$$

$$\alpha_2^{\psi_{CB}E} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\frac{pd+(1-p)(2-d)}{2}}{\sqrt{\left(\frac{pd+(1-p)(2-d)}{2}\right)^2 - 4 \left(\left(\frac{pd}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4}\right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 (2-d)^2 - \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 (1-d)^2\right)}}, \right. \quad (5.13)$$

$$\alpha_3^{\psi_{CB}E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p(1-d) + \frac{d}{2}}{\sqrt{\left(p(1-d) + \frac{d}{2}\right)^2 - 4 \left\{ \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 p^2 P_{00} P_{11} + dp \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 d^2 - (1-d)^2 p^2 \left(\left|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}\right|^2 + \left|D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}\right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right\}}, \right. \quad (5.14)$$

e

$$\alpha_4^{\psi_{CB}E} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{p(1-d) + \frac{d}{2}}{\sqrt{\left(p(1-d) + \frac{d}{2}\right)^2 - 4 \left\{ \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 p^2 P_{00} P_{11} + dp \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 d^2 - (1-d)^2 p^2 \left(\left|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}\right|^2 + \left|D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}\right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right\}}. \right. \quad (5.15)$$

Os operadores de estado do qubit A_1 e do qubit A_2 contém os autovalores, em ordem:

$$\beta_1^{\psi_{CBE}} = pP_{00} + \frac{pd}{2}(P_{11} - P_{00}) + \frac{1-p}{2}, \quad (5.16)$$

$$\beta_2^{\psi_{CBE}} = pP_{11} + \frac{pd}{2}(P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2}, \quad (5.17)$$

$$\gamma_1^{\psi_{CBE}} = pP_{00} + \frac{1-p}{2} \text{ e } \gamma_2^{\psi_{CB}} = pP_{11} + \frac{1-p}{2}. \quad (5.18)$$

Apenas os qubit A_1 é influenciado pelo sistema externo, e o resultado da influência é adição do fator $\frac{pd}{2}(P_{11} - P_{00})$ em $\beta_1^{\psi_{CB}}$ e $\frac{pd}{2}(P_{00} - P_{11})$ em $\beta_2^{\psi_{CB}}$.

5.3.1 Informação Mútua

A quantidade de informação que os qubits A_1 e A_2 compartilham em comum é obtida pela expressão analítica:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_2}) &= -\beta_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\beta_1^{\psi_{CBE}}) - \beta_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\beta_2^{\psi_{CBE}}) - \gamma_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\gamma_1^{\psi_{CBE}}) \\ &- \gamma_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\gamma_2^{\psi_{CBE}}) + \alpha_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_1^{\psi_{CBE}}) + \alpha_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_2^{\psi_{CBE}}) \\ &+ \alpha_3^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_3^{\psi_{CBE}}) + \alpha_4^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_4^{\psi_{CBE}}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como os autovalores da matriz densidade $\rho_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2}$ são extensos, a expressão da informação mútua é escrita em termos dos coeficientes do autovalores das matrizes densidade dos sistemas $A_1 A_2$, A_1 e A_2 .

5.3.2 Negatividade

A expressão analítica que fornece o quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2 A_3 A_4 R_{CBE}$, é obtida pela equação:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1}) = 2 - 2 \left(pP_{00} + \frac{pd}{2}(P_{11} - P_{00}) + \frac{1-p}{2} \right)^2 - 2 \left(pP_{11} + \frac{pd}{2}(P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right)^2. \quad (5.20)$$

O maior valor de $N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1})$ é obtido para a escolha $P_{00} = P_{11}$.

5.3.3 Concorrência

O emaranhamento presente entre os qubits A_1 e A_2 , após a interação com o sistema ambiente é fornecido pelos autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}}^{A_1 A_2}_{\psi_{CBE}}$. O

procedimento para obter o operador $\widehat{\rho}^{A_1 A_2}_{\psi_{CBE}}$ é discutido com detalhes na subseção 2.6.3. Os autovalores do operador $\widehat{\rho}^{A_1 A_2}_{\psi_{CBE}}$ são:

$$\delta_1^{\psi_{CBE}} = \frac{\left\{ p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + pd \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + d^2 \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \right.}{\left. + p^2 (1-d)^2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right.} \\ + 2 \sqrt{\left\{ \left(p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + pd \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + d^2 \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \right) \right.} \\ \left. \times \left(p^2 (1-d)^2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right) \right\}}, \quad (5.21)$$

$$\delta_2^{\psi_{CBE}} = \frac{\left\{ p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + pd \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + d^2 \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \right.}{\left. + p^2 (1-d)^2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right.} \\ - 2 \sqrt{\left\{ \left(p^2 \left(1 - \frac{d}{2}\right)^2 P_{00} P_{11} + pd \left(\frac{1-p}{4}\right) \left(1 - \frac{d}{2}\right) + d^2 \left(\frac{1-p}{4}\right)^2 \right) \right.} \\ \left. \times \left(p^2 (1-d)^2 \left(\left| D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00} \right|^2 + \left| D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00} \right|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right) \right\}}, \quad (5.22)$$

$$\delta_3^{\psi_{CBE}} = \frac{\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 (2-d)^2 + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2}{\left\{ \left(\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 (2-d)^2 + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2 \right)^2 \right.} \\ + \left\{ \left(\left(\frac{pd}{2} P_{11} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \left(\frac{pd}{2} P_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2 \right)^2 \right.} \\ \left. - \left((1-p)(1-d) \right)^2 \left(\frac{pd}{2} P_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \left(\frac{pd}{2} P_{11} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \right\}}, \quad (5.23)$$

e

$$\delta_4^{\psi_{CBE}} = \frac{\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 (2-d)^2 + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2}{\left\{ \left(\left(\frac{pd}{2} \right)^2 P_{00} P_{11} + \frac{pd}{2} \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) + \left(\frac{1-p}{4} \right)^2 (2-d)^2 + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2 \right)^2 \right.} \\ - \left\{ \left(\left(\frac{pd}{2} P_{11} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \left(\frac{pd}{2} P_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) + \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 (1-d)^2 \right)^2 \right.} \\ \left. - \left((1-p)(1-d) \right)^2 \left(\frac{pd}{2} P_{00} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \left(\frac{pd}{2} P_{11} + \left(\frac{1-p}{4} \right) (2-d) \right) \right\}}. \quad (5.24)$$

Os autovalores acima possuem uma representação complexa e dependem dos coeficientes do estado $|C\rangle$ e do canal quântico. Para quantificar o emaranhamento contido no sistema bipartido $(A_1 A_2)$ é preciso saber qual dos autovalores acima é maior, isto será feito na seção 5.4.

5.3.4 Entropia de Troca

A quantidade de informação trocada entre o sistema ambiente do canal quântico, e o qubit A_1 de $\widehat{\rho}_{\psi_{CBE}}$, é calculado a partir da entropia de Von Neumann dos autovalores da matriz de troca W . Na base computacional a matriz W tem a forma:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3d}{4} & 0 & 0 & p \frac{\sqrt{d}}{2} \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} (P_{00} - P_{11}) \\ 0 & \frac{d}{4} & -ip \frac{d}{4} (P_{00} - P_{11}) & 0 \\ 0 & ip \frac{d}{4} (P_{00} - P_{11}) & \frac{d}{4} & 0 \\ p \frac{\sqrt{d}}{2} \sqrt{1 - \frac{3d}{4}} (P_{00} - P_{11}) & 0 & 0 & \frac{d}{4} \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Os autovalores da matriz de troca W são

$$\kappa_1^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{2} + \sqrt{(1-d)^2 + dp^2 \left(1 - \frac{3d}{4}\right) (P_{00} - P_{11})^2} \right), \quad (5.26)$$

$$\kappa_2^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{2} - \sqrt{(1-d)^2 + dp^2 \left(1 - \frac{3d}{4}\right) (P_{00} - P_{11})^2} \right), \quad (5.27)$$

$$\kappa_3^{\psi_{CBE}} = \frac{d}{4} (1 + p(P_{00} - P_{11})), \quad (5.28)$$

e

$$\kappa_4^{\psi_{CBE}} = \frac{d}{4} (1 - p(P_{00} - P_{11})). \quad (5.29)$$

A matriz W diz que o sistema ambiente E do canal de despolarização compreende um sistema com dimensão $dim = 4$. A expressão analítica que fornece a quantidade de informação troca entre os sistemas quânticos E e A_1 é:

$$\begin{aligned} S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}) &= -\kappa_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\kappa_1^{\psi_{CBE}}) - \kappa_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\kappa_2^{\psi_{CBE}}) \\ &\quad - \kappa_3^{\psi_{CBE}} \log_2(\kappa_3^{\psi_{CBE}}) - \kappa_4^{\psi_{CBE}} \log_2(\kappa_4^{\psi_{CBE}}). \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.3.5 Informação Coerente

A quantidade de informação quântica que pode ser transmitida através do canal quântico de depolarização com o qubit A_1 é fornecida pela expressão:

$$\begin{aligned} I_c(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}) &= - \left(pP_{00} - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right) \log_2 \left(pP_{00} - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right) \\ &\quad - \left(pP_{11} + \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right) \log_2 \left(pP_{00} - \frac{pd}{2} (P_{00} - P_{11}) + \frac{1-p}{2} \right) \\ &\quad - S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}). \end{aligned} \quad (5.31)$$

5.4 Efeito do canal de despolarização sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado $\hat{\rho}_{CBE}$ com $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$

A seguir são obtidas as expressões analíticas da informação mútua e da concorrência (entre os qubits A_1 e A_2), do quadrado do valor da negatividade, (cujo operação transposta parcial é efetuada sobre o qubit A_1), e das quantidades relacionadas ao canal quântico, entropia de troca e informação coerente, com olhar sempre sobre o qubit A_1 .

Com a finalidade de estudar o efeito da perda de coerência do estado misto, a partir do estado cluster até o estado $|B\rangle$ é atribuído ao parâmetro de despolarização o valor $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$, respectivamente, e calculadas todas as grandezas mencionadas acima. Ao final de todos os cálculos são obtidas expressões analíticas apenas em função do parâmetro de mistura $(1 - p)$. A operação quântica que descreve o estado de quatro qubits, com a influência do sistema externo é $\hat{\rho}_{CBE} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4} \right) (\hat{\rho}_{CB})$. O estado misto $\hat{\rho}_{CB}$ tem a forma $\hat{\rho}_{CB} = p|C\rangle\langle C| + (1 - p)|B\rangle\langle B|$.

- Caso em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{8}$.

O estado reduzido de dois qubits, $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$ apresenta quatro autovalores, e são:

$$\alpha_1^{CBE} = \frac{29 - 28p}{32}, \quad \alpha_2^{CBE} = \frac{1}{32} \quad \text{e} \quad \alpha_3^{CBE} = \alpha_4^{CBE} = \frac{1 + 14p}{32}.$$

As matrizes densidade de um qubit $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1} = Tr_{A_2 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CBE})$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2} = Tr_{A_1 A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CBE})$ possuem autovalores iguais $\beta_1^{CBE} = \beta_2^{CBE} = \frac{1}{2}$ e $\gamma_1^{CBE} = \gamma_2^{CBE} = \frac{1}{2}$. A expressão analítica que descreve a informação mútua nessas condições é:

$$I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2}) = -2 \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{29 - 28p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{29 - 28p}{32} \right) + \frac{1}{32} \log_2 \left(\frac{1}{32} \right) + \left(\frac{1 + 14p}{32} \right) \log_2 \left(\frac{1 + 14p}{32} \right).$$

O quadrado do valor da quantidade emaranhamento cujo centro é o qubit A_1 continua sendo máximo, e vale, $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}) = 1$.

O quantidade de emaranhamento existente entre os qubits A_1 e A_2 é obtida por meio dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}}$. Os autovalores do operador $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}}$ são simplesmente:

$$\delta_1^{CBE} = \delta_2^{CBE} = \left(\frac{1 + 14p}{32} \right)^2, \quad \delta_3^{CBE} = \left(\frac{29 - 28p}{32} \right)^2 \quad \text{e} \quad \delta_4^{CBE} = \left(\frac{1}{32} \right)^2.$$

Note que $\delta_1^{CBE} = (\alpha_3^{CBE})^2$, $\delta_3 = (\alpha_1^{CBE})^2$ e $\delta_4 = (\alpha_2^{CBE})^2$. A expressão analítica da concorrência é $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}) = \left(\frac{13 - 28p}{16} \right)$.

A quantidade de informação trocada entre o sistema E e o qubit A_1 vale $(S_e)^{CBE} = 0,44886$. O valor da informação coerente é maior o que da entropia de troca e vale $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E}) = 0,55114$.

- Caso em que o parâmetro de despolarização vale $d = \frac{1}{4}$.

O operador de estado de dois qubits $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$ possui os autovalores:

$$\alpha_1^{CBE} = \frac{13 - 12p}{16}, \alpha_2^{CBE} = \frac{1}{16} \text{ e } \alpha_3^{CBE} = \alpha_4^{CBE} = \frac{1 + 6p}{16}.$$

As matrizes densidade de um qubit $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2}$ tem autovalores iguais, $\beta_1^{CBE} = \beta_2^{CBE} = \frac{1}{2}$ e $\gamma_1^{CBE} = \gamma_2^{CBE} = \frac{1}{2}$. Observe que os autovalores de $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2}$ não mudaram, apesar da mudança do parâmetro d . A informação comum entre os dois primeiros qubits em função do parâmetro de mistura vale:

$$I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2}) = -2 \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{13 - 12p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{13 - 12p}{16} \right) + \frac{1}{16} \log_2 \left(\frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1 + 6p}{16} \right) \log_2 \left(\frac{1 + 6p}{16} \right).$$

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o resto do sistema composto continua sendo máximo, $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}) = 1$. A concorrência é obtida a partir dos autovalores do operador $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}}$, que valem:

$$\delta_1^{CBE} = \delta_2^{CBE} = \left(\frac{1 + 6p}{16} \right)^2, \delta_3^{CBE} = \left(\frac{13 - 12p}{16} \right)^2 \text{ e } \delta_4^{CBE} = \left(\frac{1}{16} \right)^2.$$

A expressão do emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 é:

$$C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}) = \frac{5 - 12p}{8}.$$

O emaranhamento entre o sistema bipartido existe apenas para $5 > 12p$. Novamente os autovalores da matriz densidade $\widetilde{\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}}$ e do operador $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}}$ estão relacionados, $\delta_1^{CBE} = (\alpha_4^{CBE})^2$, $\delta_3^{CBE} = (\alpha_1^{CBE})^2$ e $\delta_4^{CBE} = (\alpha_2^{CBE})^2$. Os valores da entropia de troca e a quantidade de emaranhamento preservado pelo estado cluster ao passar pelo canal quântico valem, respectivamente, $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E}) = 0,99339$ e $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E}) = 0,00661$.

Como já sabíamos do capítulo 3, considerando o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{4}$ o canal quântico era inviável para transmissão de informação quântica, o mesmo resultado deve ser obtido para o operador de estado deste capítulo.

A figura 7 ilustra o efeito do canal de despolarização sobre a negatividade (onde a operação transposta parcial é realizada sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre o qubit A_1 e o sistema quântico ambiente A_1 , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o qubit A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado misto, durante a passagem pelo canal, em função do parâmetro de mistura $(1 - p)$, com o parâmetro de despolarização valendo $d = \frac{1}{8}$ (gráfico superior na figura) e $d = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior).

O canal quântico de despolarização não causa efeito nenhum sobre o emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto. Talvez uma quantidade de

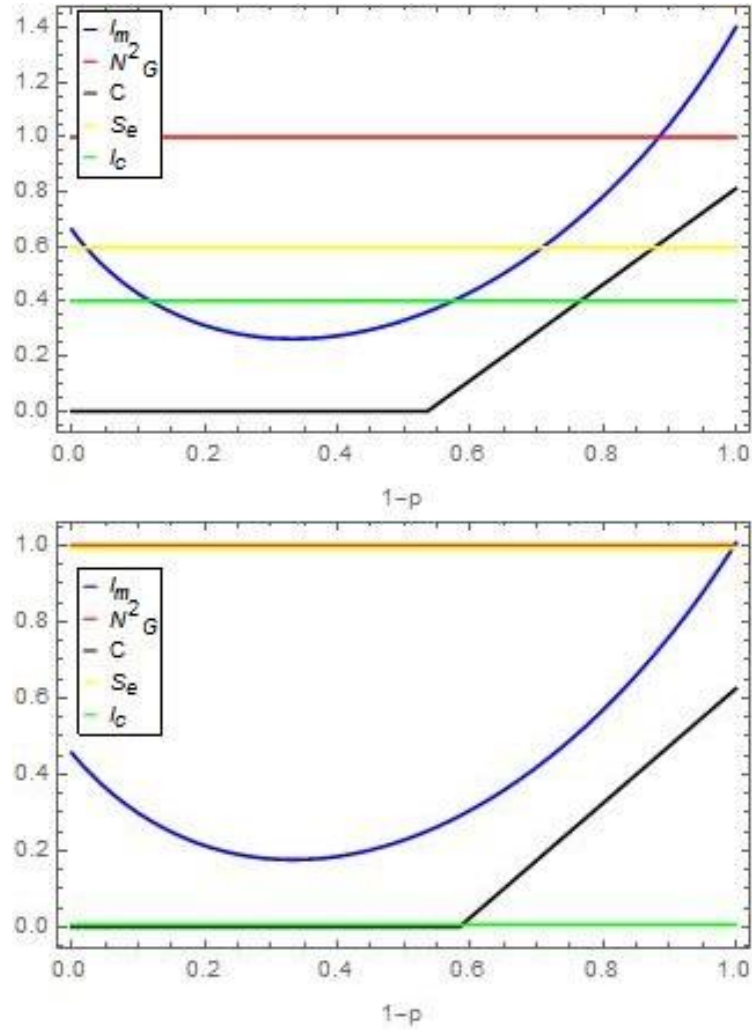
emaranhamento presente entre qubit A_1 com o sistema $A_2A_3A_4R_{CB}$ tenha sido transferido para o sistema composto A_1E , de modo que o emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2A_3A_4R_{CBE}$ seja máximo. Pode ser que o qubit A_1 possua uma quantidade maior de emaranhamento com o sistema quântico ambiente E , conforme o parâmetro de canal aumenta, visto que a medida que o parâmetro do canal aumenta a entropia de troca também aumenta (observar a figura 7).

A ação do canal quântico de depolarização é prejudicial em relação a informação mútua e a quantidade de emaranhamento contido entre os qubits A_1 e A_2 . Quanto maior o parâmetro do canal quântico menores são os valores de $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ e $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2})$. O decréscimo da informação mútua deve estar diretamente ligado a diminuição da concorrência, comparar o gráfico superior ($d = \frac{1}{8}$) e inferior ($d = \frac{1}{4}$) da figura 7.

Os valores da entropia de troca e informação coerente são iguais aqueles obtidos para o caso do estado cluster puro (figura 2), e permanecem sempre constantes. A explicação para o fato da entropia de troca e a informação coerente serem iguais aos resultados do estado cluster puro ($d = \frac{1}{8}$), é devido ao fato do estado cluster e o estado quântico $|B\rangle$ possuírem o operador de estado reduzido com respeito ao qubit A_1 igual. Matematicamente, se $\hat{\rho}_C^{A_1} = \hat{\rho}_B^{A_1}$, então $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = S_e(\hat{\rho}_{BE}^{A_1E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = I_c(\hat{\rho}_{BE}^{A_1E})$, o que resulta em $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) = I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$.

Para a situação em que o parâmetro de depolarização vale $d = \frac{1}{4}$, já é de se esperar que a entropia de troca tivesse o valor de um *bit* e a informação coerente seja nula. Na seção 3.4 do capítulo 3 no caso em que $d = \frac{1}{4}$ a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) \sim 1bit$, e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CE}^{A_1E}) \sim 0$.

Figura 7 – Efeito do canal de despolarização sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1-p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$, $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E})$. É considerado o parâmetro de despolarização $d = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $d = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior).



Fonte: o próprio autor.

5.5 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado

$$\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}$$

Imagine que um sistema quântico representado pelo operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CB}}$ passe pelo canal quântico de amortecimento de amplitude. Durante a passagem pelo canal quântico apenas o qubit A_1 do estado misto sofre efeito devido a interação com o sistema externo. O estado misto $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}$, que contém a dependência da interação com o sistema ambiente E , é obtido por meio da atuação do canal quântico apenas sobre o qubit A_1 , matematicamente $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}} = \left(\hat{\varepsilon}^{A_1} \otimes \hat{I}^{A_2} \otimes \hat{I}^{A_3} \otimes \hat{I}^{A_4} \right) (\hat{\rho}_{\psi_{CB}})$. Novamente serão obtidas as expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, e da concorrência, mais também, as expressões da entropia de troca e da informação coerente. A canal de despolarização $\hat{\varepsilon}$ é discutido na subseção 2.8.2.

O operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4} (\hat{\rho}_{\psi_{CBE}})$, onde $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}} = p |\psi_C\rangle \langle \psi_C| + (1-p) |B\rangle \langle B|$, na base computacional de dois qubits ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$), tem a forma:

$$\rho_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2} = \begin{bmatrix} pP_{00} + \gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) & 0 & 0 & p\sqrt{1-\gamma} (a_{0000} a_{1100}^* + a_{0011} a_{1111}^*) \\ 0 & \gamma p P_{11} + \frac{1-p}{2} & \sqrt{1-\gamma} \left(\frac{1-p}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \left(\frac{1-p}{2}\right) & (1-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right) & 0 \\ p\sqrt{1-\gamma} (a_{1100} a_{0000}^* + a_{1111} a_{0011}^*) & 0 & 0 & pP_{11} (1-\gamma) \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Os autovalores da matriz densidade do sistema bipartido são:

$$\alpha_1^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p + \gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - \gamma p P_{11}}{\sqrt{\left[\left(p + \gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - \gamma p P_{11} \right)^2 - 4p(1-\gamma) \left(\left\{ pP_{00}P_{11} + P_{11}\gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - p \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right\} \right]}} \right\}, \quad (5.33)$$

$$\alpha_2^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{p + \gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - \gamma p P_{11}}{\sqrt{\left[\left(p + \gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - \gamma p P_{11} \right)^2 - 4p(1-\gamma) \left(\left\{ pP_{00}P_{11} + P_{11}\gamma \left(\frac{1-p}{2}\right) - p \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 + |D^{0000} + D^{0011}|^2 - |D^{0000}|^2 - |D^{0011}|^2 \right) \right\} \right]}} \right\}, \quad (5.34)$$

$$\alpha_3^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma p P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right)}{\sqrt{\left(\gamma p P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right) \right)^2 - 4\gamma p P_{11} (1-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right)}} \right\}, \quad (5.35)$$

e

$$\alpha_4^{\psi_{CBE}} = \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\gamma p P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right)}{\sqrt{\left(\gamma p P_{11} + (2-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right) \right)^2 - 4\gamma p P_{11} (1-\gamma) \left(\frac{1-p}{2}\right)}} \right\}. \quad (5.36)$$

As matrizes densidades reduzidas de um qubit, $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1} = \text{Tr}_{A_2}(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2})$ e $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_2} = \text{Tr}_{A_1}(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2})$ possuem os autovalores, em seqüência:

$$\beta_1^{\psi_{CBE}} = p(P_{00} + \gamma P_{11}) + (1 + \gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right), \quad (5.37)$$

$$\beta_2^{\psi_{CBE}} = (1 - \gamma) \left(pP_{11} + \left(\frac{1-p}{2} \right) \right), \quad (5.38)$$

$$\gamma_1^{\psi_{CBE}} = pP_{00} + \frac{1-p}{2} \text{ e } \gamma_2^{\psi_{CBE}} = pP_{11} + \frac{1-p}{2}. \quad (5.39)$$

Como o qubit A_2 não apresenta efeito de canal, é possível observar os fatores que são introduzidos nos autovalores devido ao canal quântico. O autovalor $\beta_1^{\psi_{CBE}}$ ganhou os fatores $p\gamma P_{11} + \gamma \left(\frac{1-p}{2} \right)$ e o autovalor $\beta_2^{\psi_{CBE}}$ os fatores $-p\gamma P_{11}$ e $-\gamma \left(\frac{1-p}{2} \right)$.

5.5.1 Informação Mútua

A quantidade informação partilhada em comum entre os qubits A_1 e A_2 é descrita pela equação:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1}, \hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_2}) &= -\beta_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\beta_1^{\psi_{CBE}}) - \beta_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\beta_2^{\psi_{CBE}}) - \gamma_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\gamma_1^{\psi_{CBE}}) \\ &- \gamma_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\gamma_2^{\psi_{CBE}}) + \alpha_1^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_1^{\psi_{CBE}}) + \alpha_2^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_2^{\psi_{CBE}}) \\ &+ \alpha_3^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_3^{\psi_{CBE}}) + \alpha_4^{\psi_{CBE}} \log_2(\alpha_4^{\psi_{CBE}}). \end{aligned} \quad (5.40)$$

5.5.2 Negatividade

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2 A_3 A_4 R_{\psi_{CBE}}$ é obtida pela expressão:

$$N_G^2(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1}) = 2 - 2 \left(\left(pP_{00} + (1 + \gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right) + \gamma pP_{11} \right)^2 + \left((1 - \gamma) \left(pP_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right)^2 \right). \quad (5.41)$$

5.5.3 Concorrência

O emaranhamento presente no sistema quântico de dois qubits ($A_1 A_2$), pode ser quantificado pelos autovalores do operador $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1 A_2}}$. Os autovalores deste operador valem:

$$\delta_1^{\psi_{CBE}} = p(1 - \gamma) \left\{ \begin{array}{l} \gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(|D^{0000} + D^{0011}|^2 + 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \\ + \sqrt{\left(\left(\gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p \left(|D^{0000} + D^{0011}|^2 + 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \right)^2 \right.} \\ \left. - \left(\gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2} \right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)^2 \right. \end{array} \right\}, \quad (5.42)$$

$$\delta_2^{\psi_{CBE}} = p(1-\gamma) \left\{ \frac{\gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p \left(|D^{0000} + D^{0011}|^2 + 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right)}{\sqrt{\left\{ \left(\gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p \left(|D^{0000} + D^{0011}|^2 + 2 \left(|D_{(A_3)_0(A_4)_0}^{00}|^2 + |D_{(A_3)_1(A_4)_1}^{00}|^2 \right) \right) \right\}^2 - \left(-\left(\gamma P_{11} \left(\frac{1-p}{2}\right) + p |D^{0000} - D^{0011}|^2 \right)^2 \right)}} \right\} \quad (5.43)$$

$$\delta_3^{\psi_{CBE}} = (1-\gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right) \left(1-p + \gamma p P_{11} + \sqrt{2(1-p) \left(\gamma p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right)} \right), \quad (5.44)$$

e

$$\delta_4^{\psi_{CBE}} = (1-\gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right) \left(1-p + \gamma p P_{11} - \sqrt{2(1-p) \left(\gamma p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right)} \right). \quad (5.45)$$

Na próxima seção são dadas as expressões analíticas da concorrência considerando o $|\psi_C\rangle = |C\rangle$, e com os parâmetros de amortecimento de amplitude valendo $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$.

5.5.4 Entropia de Troca

No caso do canal de amortecimento de amplitude não é preciso diagonalizar a matriz de troca W . A matriz W é representada como:

$$W = \begin{bmatrix} 1 - \gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) & 0 \\ 0 & \gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

A expressão analítica que descreve o quanto de entropia é trocada entre o sistema ambiente E do canal quântico e o qubit A_1 é:

$$S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}) = - \left(1 - \gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right) \log_2 \left(1 - \gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right) - \left(\gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right) \log_2 \left(\gamma \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right), \quad (5.47)$$

como o operador soma do canal de amortecimento de amplitude possui apenas dois elementos, a matriz W possui dimensão 2×2 , em outras palavras, o sistema que representa o ambiente do deste canal é um sistema de dimensão $dim = 2$.

5.5.5 Informação Coerente

A expressão analítica da quantidade emaranhamento preservado pelo operador de estado $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}$ após interagir com o sistema ambiente E do canal quântico é:

$$I_c(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}) = - \left(p(P_{00} + \gamma P_{11}) + (1+\gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right) \right) \log_2 \left(p(P_{00} + \gamma P_{11}) + (1+\gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right) \right) - \left((1-\gamma) \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right) \log_2 \left((1-\gamma) \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right) \right) - S_e(\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}). \quad (5.48)$$

Na expressão da informação coerente os termos $p(P_{00} + \gamma P_{11}) + (1+\gamma) \left(\frac{1-p}{2} \right)$ e $(1-\gamma) \left(p P_{11} + \frac{1-p}{2} \right)$ são os autovalores de $\hat{\rho}_{\psi_{CBE}}^{A_1E}$.

5.6 Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre emaranhamento, entropia de troca e informação coerente do estado

$\hat{\rho}_{CBE}$ com $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$

Nesta seção é realizado o mesmo procedimento feito na seção anterior, são obtidas as expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, e da concorrência, mais também, as expressões da entropia de troca e da informação coerente, considerando o canal quântico de amortecimento de amplitude. Entretanto, o operador de estado antes de passar pelo canal quântico é $\hat{\rho}_{CBE} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|B\rangle\langle B|$. Como a intenção é observar o efeito do canal a medida que o estado cluster sofre perda de coerência para o estado $|B\rangle$, é atribuído ao parâmetro de amortecimento de amplitude o valor $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$, respectivamente.

- Caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$.

Com relação ao cálculo da informação mútua entre os qubits A_1 e A_2 é preciso obter os autovalores do operador de estado de dois qubits $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2}$ e também os autovalores dos estados reduzidos de um qubit, $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2}$. O operador de estado de dois qubits é obtido eliminando os graus de liberdade dos qubits A_3 e A_4 , $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2} = Tr_{A_3A_4}(\hat{\rho}_{CBE})$. Os autovalores da matriz densidade $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2}$ são:

$$\alpha_1^{CB} = \frac{1+7p}{16}, \alpha_2^{CB} = \frac{7p}{16},$$

$$\alpha_3^{CB} = \frac{1}{32} \left(15 - 14p + \sqrt{(15-14p)^2 - 28p(1-p)} \right),$$

e

$$\alpha_4^{CB} = \frac{1}{32} \left(15 - 14p - \sqrt{(15-14p)^2 - 28p(1-p)} \right).$$

Os operadores de estado que representam os qubits A_1 e A_2 ($\hat{\rho}_{CBE}^{A_1} = Tr_{A_2}(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2})$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2} = Tr_{A_1}(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2})$) contém os autovalores, respectivamente:

$$\beta_1^{CB} = \frac{9}{16}, \beta_2^{CB} = \frac{7}{16},$$

e

$$\gamma_1^{CB} = \frac{1}{2} \text{ e } \gamma_2^{CB} = \frac{1}{2}.$$

A expressão analítica da quantidade de informação compartilhada mutuamente entre os qubits A_1 e A_2 é dada por:

$$I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2}) = 2 - \frac{9}{16} \log_2 \left(\frac{9}{16} \right) - \frac{7}{16} \log_2 \left(\frac{7}{16} \right) \\ + \left(\frac{1}{32} \left\{ \begin{array}{l} 15 - 14p \\ + \sqrt{(15 - 14p)^2 - 28p(1 - p)} \end{array} \right\} \right) \log_2 \left(\frac{1}{32} \left\{ \begin{array}{l} 15 - 14p \\ + \sqrt{(15 - 14p)^2 - 28p(1 - p)} \end{array} \right\} \right) \\ + \left(\frac{1}{32} \left\{ \begin{array}{l} 15 - 14p \\ - \sqrt{(15 - 14p)^2 - 28p(1 - p)} \end{array} \right\} \right) \log_2 \left(\frac{1}{32} \left\{ \begin{array}{l} 15 - 14p \\ - \sqrt{(15 - 14p)^2 - 28p(1 - p)} \end{array} \right\} \right).$$

O quadrado do valor da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 , e o outros três qubits que compõe o estado cluster mais o qubit de referência o e qubit do sistema ambiente diminui, e vale $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}) = 0.9843$.

Novamente é necessário analisar os autovalores do operador $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}}_{CBE}$. Os autovalores são:

$$\delta_1^{CB} = \delta_2^{CB} = \frac{7p}{256} (1 + 7p),$$

$$\delta_3^{CB} = \frac{7}{256} (1 - p) \left(32 - 30p + 8\sqrt{(1 - p)(16 - 14p)} \right),$$

e

$$\delta_4^{CB} = \frac{7}{256} (1 - p) \left(32 - 30p - 8\sqrt{(1 - p)(16 - 14p)} \right).$$

Os autovalores de $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} \widetilde{\hat{\rho}^{A_1 A_2}}_{CBE}$ são diferentes dos autovalores de $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$. A expressão analítica da concorrência é:

$$C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}) = \sqrt{\frac{7}{256} (1 - p) \left(32 - 30p + 8\sqrt{(1 - p)(16 - 14p)} \right)} \\ - \sqrt{\frac{7}{256} (1 - p) \left(32 - 30p - 8\sqrt{(1 - p)(16 - 14p)} \right)} \\ - 2\sqrt{\frac{7p}{256} (1 + 7p)}.$$

A quantidade de entropia trocada pelos sistemas quânticos E e A_1 vale $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 E}) = 0.33729$. Comparando este resultado com o canal quântico de despolarização, a interação entre o sistema ambiente do canal de amortecimento de amplitude é menor que do canal de despolarização, isto pode ser explicado pelo fato do sistema ambiente do canal de despolarização ser menor que o sistema que representa o canal de amortecimento de amplitude. A matriz W do canal de amortecimento de amplitude possui apenas dois autovalores, enquanto que a matriz de troca W do canal despolarização possui quatro autovalores.

A quantidade de emaranhamento preservado entre o qubit A_1 e o sistema $A_2A_3A_4$ devido a passagem pelo canal de amortecimento de amplitude vale $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E}) = 0.6514$. O resultado obtido pela informação coerente é reflexo da quantidade de entropia troca entre os sistemas E e A_1 .

- Caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{4}$.

Nesta seção são obtidas as expressões analíticas da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, e da concorrência, mais também, as expressões da entropia de troca e da informação coerente, considerando o canal quântico de amortecimento de amplitude. O operador de estado antes de passar pelo canal é $\hat{\rho}_{CBE} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|B\rangle\langle B|$. Como a intenção é observar o efeito do canal a medida que o estado cluster sofre perda de coerência para o estado $|B\rangle$, é atribuído ao parâmetro de amortecimento de amplitude o valor $\gamma = \frac{1}{4}$.

Com relação ao cálculo da informação mútua entre os qubits A_1 e A_2 é preciso obter os autovalores do operador de estado de dois qubits $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$ e também os autovalores dos estados reduzidos de um qubit, $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2}$. O operador de estado de dois qubits ($\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$) é obtido eliminando os graus de liberdade dos qubits A_3 e A_4 , $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2} = Tr_{A_3 A_4}(\hat{\rho}_{CBE})$, onde $\hat{\rho}_{CBE} = p|C\rangle\langle C| + (1-p)|B\rangle\langle B|$. Os autovalores da matriz densidade $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1 A_2}$ são:

$$\alpha_1^{CBE} = \frac{1+3p}{8}, \quad \alpha_2^{CB} = \frac{3p}{8},$$

$$\alpha_3^{CBE} = \frac{1}{16} \left(7 - 6p + \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)} \right),$$

e

$$\alpha_4^{CBE} = \frac{1}{16} \left(7 - 6p - \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)} \right).$$

As matrizes densidade $\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}$ e $\hat{\rho}_{CBE}^{A_2}$ possuem os autovalores, em sequência:

$$\beta_1^{CBE} = \frac{5}{8} \text{ e } \beta_2^{CBE} = \frac{3}{8},$$

e

$$\gamma_1^{CBE} = \frac{1}{2} \text{ e } \gamma_2^{CBE} = \frac{1}{2}.$$

A informação comum entre os sistemas qubits A_1 e A_2 é calculada pela equação:

$$\begin{aligned} I_m(\hat{\rho}_{CB}^{A_1}, \hat{\rho}_{CB}^{A_2}) &= -\frac{5}{8} \log_2 \left(\frac{5}{8} \right) - \frac{3}{8} \log_2 \left(\frac{3}{8} \right) - \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1+3p}{4} \right) \log_2 \left(\frac{1+3p}{8} \right) \\ &+ \left(\frac{7-6p + \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)}}{16} \right) \log_2 \left(\frac{7-6p + \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)}}{16} \right) \\ &+ \left(\frac{7-6p - \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)}}{16} \right) \log_2 \left(\frac{7-6p - \sqrt{(7-6p)^2 - 12p(1-p)}}{16} \right). \end{aligned}$$

O quadrado do valor da negatividade (com centro sobre o qubit A_1) vale $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}) = 0.9375$. O emaranhamento presente no sistema quântico bipartido A_1A_2 é obtido a partir da expressão:

$$\begin{aligned} C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2}) &= \sqrt{\frac{3}{64} (1-p) \left(8 - 7p + 2\sqrt{(1-p)(4-3p)}\right)} \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{64} (1-p) \left(8 - 7p - 2\sqrt{(1-p)(4-3p)}\right)} \\ &\quad - 2\sqrt{\frac{3p}{64} (1+3p)}. \end{aligned}$$

A entropia trocada entre os subsistemas do sistema bipartido A_1E assume o valor $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E}) = 0.54356$. Novamente a entropia de troca é constante, porém, apresenta um valor que a obtida na situação em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$. A quantidade de informação quântica transmitida pelo canal vale $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E}) = 0.41087$, cujo valor é menor quando comparado ao caso em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$.

A figura 8 ilustra o efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a negatividade (sobre o qubit A_1), a concorrência e a informação mútua (referente aos qubits A_1 e A_2), a quantidade de entropia trocada entre os sistemas quânticos E e A_1 , e a quantidade de emaranhamento conservada entre o qubit A_1 e o resto do sistema composto que compõe o estado cluster, durante a passagem pelo canal, em função do parâmetro de mistura p com o parâmetro de amortecimento de amplitude valendo $\gamma = \frac{1}{8}$.

O quadrado do valor da negatividade global diminui ligeiramente, o que indica que pode ter ocorrido a redistribuição de emaranhamento entre os qubits $A_2A_3A_4$, causando a diminuição da quantidade de emaranhamento entre o qubit A_1 com qualquer outro sistema quântico. A redistribuição de emaranhamento entre os qubits $A_2A_3A_4$ (se houver), deve maior para a condição em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{4}$.

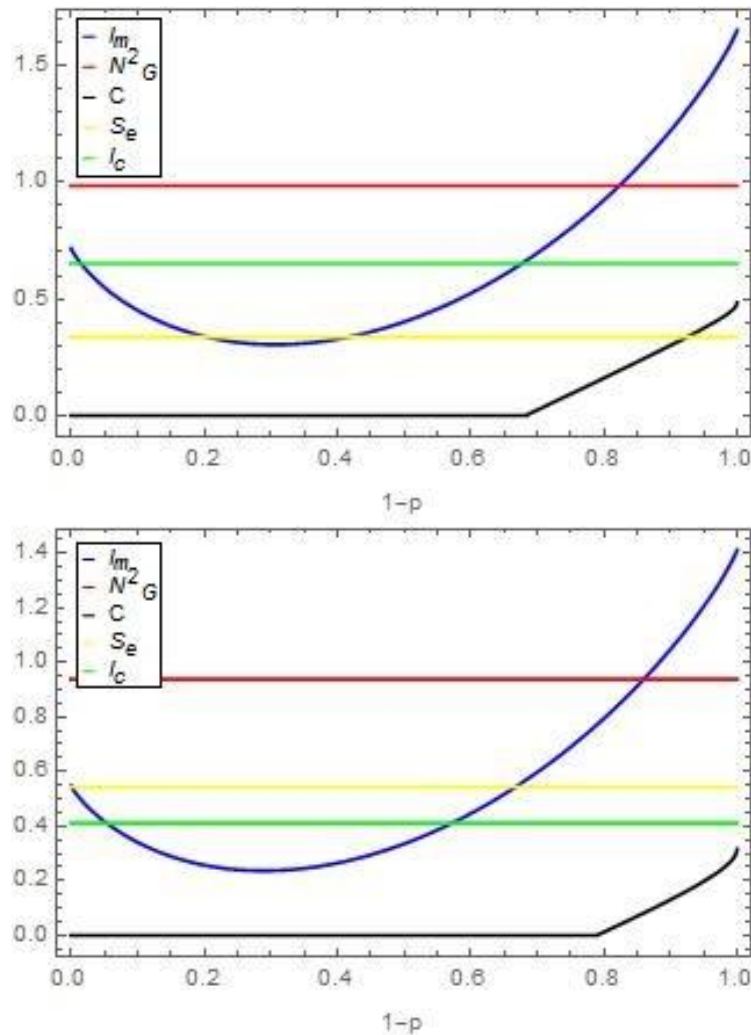
A quantidade de emaranhamento existente entre os qubits A_1 e A_2 é prejudica pela ação do canal. A concorrência depende do parâmetro de mistura $(1-p)$ e o valor máximo atingido por $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2})$ torna-se menor a medida que o parâmetro de amortecimento de amplitude aumenta. No caso em que é livre da ação de canal, a concorrência $C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1A_2}) \neq 0$ para a condição $(1-p) = 0,5$, por outro lado, nos casos em que há efeito de canal sobre o sistema quântico, a faixa em relação ao parâmetro de mistura em que a $C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1A_2}) \neq 0$ é menor, e depende do parâmetro de amortecimento de amplitude. Na situação em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$, a concorrência $C(\hat{\rho}_{CB}^{A_1A_2}) \neq 0$ para a condição em que o parâmetro de mistura $(1-p) > \sim 0,66$, e para o caso em que $\gamma = \frac{1}{4}$ a concorrência é diferente de zero para $(1-p) > \sim 0,78$.

A quantidade de informação mutuamente compartilhada entre os qubits A_1 e A_2 é afetada pela ação do canal quântico. A ação efetiva do canal quântico, com o

parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{4}$ é maior que no caso em que $\gamma = \frac{1}{8}$. O decréscimo de $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ deve estar ligada a diminuição da concorrência.

A quantidade de informação trocada entre o qubit A_1 e o sistema ambiente $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$ é menor que a informação coerente $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$, para a condição em que o parâmetro de amortecimento de amplitude vale $\gamma = \frac{1}{8}$. No caso em que o parâmetro do canal vale $\gamma = \frac{1}{4}$ o valor assumido pela informação coerente é menor que da entropia de troca. Assim como no caso da canal quântico de despolarização, a entropia de troca e a informação coerente não depende do parâmetro de mistura $(1-p)$.

Figura 8 – Efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre a informação mútua $I_m(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1}, \hat{\rho}_{CBE}^{A_2})$ (linha azul), o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$ (linha vermelha), a concorrência $C(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1A_2})$ (linha preta), a entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$ (linha amarela) e a informação coerente $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$ (linha verde). Todas as grandezas plotadas dependem do parâmetro de mistura $(1-p)$, exceto $N_G^2(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1})$, $S_e(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$ e $I_c(\hat{\rho}_{CBE}^{A_1E})$. É considerado o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma = \frac{1}{8}$ (gráfico superior) e $\gamma = \frac{1}{4}$ (gráfico inferior).



Fonte: o próprio autor.

6 Teleporte controlado com canal quântico de amortecimento de amplitude

O teleporte quântico é um protocolo de comunicação, cuja finalidade é enviar um estado quântico de uma parte para outra com o auxílio dos estados de Bell. Alice deseja enviar um estado quântico desconhecido ($|\Psi\rangle^{A_0}$) para Bob. Alice e Bob compartilham um estado maximamente emaranhado (um estado Bell). É permitido a Alice aplicar operações locais aos qubits que tem em mãos (o estado quântico desconhecido e um dos qubits do estado de Bell). Alice envia a Bob o resultado de suas medidas por meio de um canal de comunicação clássico, e Bob por meio de operações locais sobre o qubit que tem em mãos obtém o estado desconhecido.

O teleporte quântico foi proposto por Bennett, Brassard, Crépeau, Jozsa, Peres e Wootters em 1992 em [30]. As primeiras implementações experimentais do teleporte foram realizadas em 1997 por Bouwmeester, Pan, Mattle, Eibl, Weinfurter Zeilinger em [31] e Boschi, Branca, Martini, Hardy e Popescu em [32]. Além da teleportação de estados quânticos, o teleporte é aplicado na criação de portas quânticas e códigos de correção de erro [20].

Yi-You Nie e colaboradores em 2008 propuseram um protocolo de teleportação utilizando o estado cluster [1]. Três pessoas participam o protocolo. A vantagem do protocolo proposto por Yi-You Nie, é devido ao controle de todo o procedimento por uma das pessoas que participa do protocolo.

Como no mundo real sistemas quânticos interagem com sistemas externos. Neste capítulo é levado em conta que o qubit A_1 do estado cluster interage com o sistema quântico ambiente E do canal quântico de amortecimento de amplitude, antes de dar início ao protocolo. É analisado o efeito do canal quântico com relação ao estado em que Alice deseja teleportar a Bob. Ao final do processo é calculada a fidelidade entre o estado obtido por Bob com a influência do canal e o estado desconhecido que pertencia a Alice. O propósito do cálculo da fidelidade é verificar como ação do canal quântico afeta a fidelidade e a probabilidade do teleporte do estado. As matrizes densidade com índice E são aquelas em que existe a influência do sistema quântico externo.

Inicialmente, os qubits que compõe o estado cluster estão em mãos de três pessoas, Alice, Charlie (o controlador) e Bob. Alice tem em mãos o qubit A_1 , Charlie os qubits A_2 e A_3 e Bob o qubit A_4 . É permitido aos indivíduos realizar apenas operações locais sobre o sistema quântico. Para facilitar os cálculos o estado cluster é escrito da seguinte maneira:

$$|C\rangle^{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |\xi_0\rangle + |1\rangle |\xi_1\rangle), \quad (6.1)$$

onde os estados $|\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4}$ e $|\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4}$ são:

$$|\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} = \frac{|00\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} + |01\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4}}{\sqrt{2}}, \quad (6.2)$$

e

$$|\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} = \frac{|10\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} - |11\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4}}{\sqrt{2}}. \quad (6.3)$$

Os qubits de Charlie não apresentam emaranhamento algum, mas o qubit A_3 de Charlie e o qubit A_4 de Bob sim.

O operador de estado do estado de quatro qubits tem a forma:

$$\hat{\rho}_C^{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{2} \left(|0\rangle^{A_1} |\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} + |1\rangle^{A_1} |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \right) \left(\langle 0| \langle \xi_0| + \langle 1| \langle \xi_1| \right). \quad (6.4)$$

O operador de estado $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4}$ é obtido a partir da operação $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4} = \left(\hat{\varepsilon}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \hat{I}_3 \otimes \hat{I}_4 \right) \left(\hat{\rho}_C^{A_1A_2A_3A_4} \right)$. A operação quântica $\hat{\varepsilon}$ é discutida detalhadamente na subseção 2.8.2. O operador de estado $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4}$ apresenta a forma:

$$\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{2} \begin{cases} \left(|0\rangle^{A_1} |\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} + \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_1} |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \right) \left(\langle 0| \langle \xi_0| + \sqrt{1-\gamma} \langle 1| \langle \xi_1| \right) \\ \gamma |0\rangle^{A_1} \langle 0| |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \langle \xi_1|. \end{cases} \quad (6.5)$$

A equação acima mostra claramente que o canal quântico leva o operador de estado correspondente ao estado cluster para um operador de estado misto.

Em relação ao protocolo, o primeiro passo refere-se a Alice acoplar o estado quântico desconhecido (denotado por $|\psi\rangle^{A_0}$) a $\hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4}$. O estado quântico desconhecido é $|\psi\rangle^{A_0} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. O operador de estado de cinco qubits tem a forma $\hat{\rho}_{CE}^{A_0A_1A_2A_3A_4} = |\psi\rangle^{A_0} \otimes \hat{\rho}_{CE}^{A_1A_2A_3A_4} \otimes \langle \psi|$.

O segundo passo de Alice é fazer medidas com os operadores (projetores), definidos em termos das bases de Bell, $|\phi^+\rangle$, $|\phi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$ e $|\psi^-\rangle$ sobre os qubits A_0 e A_1 . Para facilitar o cálculos as bases $|00\rangle^{A_0A_1}$, $|01\rangle^{A_0A_1}$, $|10\rangle^{A_0A_1}$ e $|11\rangle^{A_0A_1}$ foram escritas em termos das bases $|\phi^+\rangle^{A_0A_1}$, $|\phi^-\rangle^{A_0A_1}$, $|\psi^+\rangle^{A_0A_1}$ e $|\psi^-\rangle^{A_0A_1}$.

- Se o resultado da medida de Alice é o estado $|\phi^+\rangle^{A_0A_1}$, $|\phi^-\rangle^{A_0A_1}$, $|\psi^+\rangle^{A_0A_1}$ e $|\psi^-\rangle^{A_0A_1}$, respectivamente, então o operador de estado que corresponde ao estado quântico de compartilhado por Charlie e Bob, dependendo da medida de Alice, em sequência é:

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_0A_1A_2A_3A_4} \right)^{\phi^+A_0A_1} = \zeta |\phi^+\rangle^{A_0A_1} \langle \phi^+| \left\{ \begin{aligned} & \left(\alpha |\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} + \beta \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \right) \left(\alpha^* \langle \xi_0| + \beta^* \sqrt{1-\gamma} \langle \xi_1| \right) \\ & + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \langle \xi_1|, \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_0A_1A_2A_3A_4} \right)^{\phi^-A_0A_1} = \zeta |\phi^-\rangle^{A_0A_1} \langle \phi^-| \left\{ \begin{aligned} & \left(\alpha |\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} - \beta \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \right) \left(\alpha^* \langle \xi_0| - \beta^* \sqrt{1-\gamma} \langle \xi_1| \right) \\ & + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} \langle \xi_1|, \end{aligned} \right. \quad (6.7)$$

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_0 A_1 A_2 A_3 A_4}\right)^{\psi^+ A_0 A_1} = \zeta |\psi^+\rangle^{A_0 A_1} \langle\psi^+| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} + \alpha \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\beta^* \langle\xi_0| + \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|, \end{array} \right. \quad (6.8)$$

e

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_0 A_1 A_2 A_3 A_4}\right)^{\psi^- A_0 A_1} = \zeta |\psi^-\rangle^{A_0 A_1} \langle\psi^-| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} - \alpha \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\beta^* \langle\xi_0| - \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

$$\text{com } \zeta = |\alpha|^2 (1 + \gamma) + |\beta|^2 (1 - \gamma).$$

O operador de estado (normalizado) de cinco qubits $(\hat{\rho}_{CE}^{A_0 A_1 A_2 A_3 A_4})_N$, em termos da base dos operadores de medida de Alice pode ser escrito como:

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_0 A_1 A_2 A_3 A_4}\right)_N = \frac{\zeta}{4} \left\{ \begin{array}{l} |\phi^+\rangle^{A_0 A_1} \langle\phi^+| \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} + \beta \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\alpha^* \langle\xi_0| + \beta^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|, \end{array} \right. \\ + |\phi^-\rangle^{A_0 A_1} \langle\phi^-| \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} - \beta \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\alpha^* \langle\xi_0| - \beta^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|, \end{array} \right. \\ + |\psi^+\rangle^{A_0 A_1} \langle\psi^+| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} + \alpha \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\beta^* \langle\xi_0| + \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\beta|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|, \end{array} \right. \\ + |\psi^-\rangle^{A_0 A_1} \langle\psi^-| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} - \alpha \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\beta^* \langle\xi_0| - \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\beta|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Imaginando que Alice faça uma medida com o operador $\hat{M}_A^{\phi^+ A_0 A_1}$, o operador de estado que estará nas “mãos” de Charlie e Bob será:

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_2 A_3 A_4}\right)^{\phi^+ A_0 A_1} = \delta \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha |\xi_0\rangle^{A_2 A_3 A_4} + \beta \sqrt{1-\gamma} |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4}\right) (\alpha^* \langle\xi_0| + \beta^* \sqrt{1-\gamma} \langle\xi_1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma |\xi_1\rangle^{A_2 A_3 A_4} \langle\xi_1|. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

$$\text{com } \delta = \frac{1}{(|\alpha|^2(1+\gamma) + |\beta|^2(1-\gamma))}.$$

O próximo passo consiste em Charlie fazer uma medida sobre os qubit A_2 e A_3 . Os operadores de medida de Charlie são:

$$\hat{M}_C^{\phi^+ A_2 A_3} = |\phi^+\rangle^{A_2 A_3} \langle\phi^+| \text{ e } \hat{M}_C^{\phi^- A_2 A_3} = |\phi^-\rangle^{A_2 A_3} \langle\phi^-|, \quad (6.12)$$

e

$$\hat{M}_C^{\psi^+ A_2 A_3} = |\psi^+\rangle^{A_2 A_3} \langle\psi^+| \text{ e } \hat{M}_C^{\psi^- A_2 A_3} = |\psi^-\rangle^{A_2 A_3} \langle\psi^-|. \quad (6.13)$$

Os estados quânticos $|\phi^+\rangle^{A_2 A_3}$, $|\phi^-\rangle^{A_2 A_3}$, $|\psi^+\rangle^{A_2 A_3}$ e $|\psi^-\rangle^{A_2 A_3}$, são os estado de Bell, no entanto, Charlie pode controlar o quão “forte” estão emaranhados estes estados por um ângulo θ . Os estados $|\phi^+\rangle^{A_2 A_3}$, $|\phi^-\rangle^{A_2 A_3}$, $|\psi^+\rangle^{A_2 A_3}$ e $|\psi^-\rangle^{A_2 A_3}$ tem a forma:

$$|\phi^+\rangle^{A_2 A_3} = \cos\theta |00\rangle + \sin\theta |11\rangle \text{ e } |\phi^-\rangle^{A_2 A_3} = \sin\theta |00\rangle - \cos\theta |11\rangle,$$

e

$$|\psi^+\rangle^{A_2A_3} = \cos\theta |01\rangle + \sin\theta |10\rangle \quad \text{e} \quad |\psi^-\rangle^{A_2A_3} = \sin\theta |01\rangle - \cos\theta |10\rangle.$$

Os estados quânticos $|00\rangle^{A_2A_3}$, $|01\rangle^{A_2A_3}$, $|10\rangle^{A_2A_3}$ e $|11\rangle^{A_2A_3}$ de Charlie, escritos em termos das bases $|\phi^+\rangle^{A_2A_3}$, $|\phi^-\rangle^{A_2A_3}$, $|\psi^+\rangle^{A_2A_3}$ e $|\psi^-\rangle^{A_2A_3}$ são:

$$|00\rangle^{A_2A_3} = \cos\theta |\phi^+\rangle^{A_2A_3} + \sin\theta |\phi^-\rangle^{A_2A_3} \quad \text{e} \quad |01\rangle^{A_2A_3} = \sin\theta |\phi^+\rangle^{A_2A_3} - \cos\theta |\phi^-\rangle^{A_2A_3}, \quad (6.14)$$

e

$$|10\rangle^{A_2A_3} = \cos\theta |\psi^+\rangle^{A_2A_3} + \sin\theta |\psi^-\rangle^{A_2A_3} \quad \text{e} \quad |11\rangle^{A_2A_3} = \sin\theta |\psi^+\rangle^{A_2A_3} - \cos\theta |\psi^-\rangle^{A_2A_3}. \quad (6.15)$$

Charlie ao fazer uma medida projeta o estado produto em uma combinação de estados emaranhados, apesar disso, Charlie ainda tem em mãos estados produtos, independente do valor do ângulo θ . As equações 6.2, e 6.3 podem ser escritas como:

$$|\xi_0\rangle^{A_2A_3A_4} = \frac{\left(|\phi^+\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} + |\psi^+\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4} \right) \cos\theta + \left(|\phi^-\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} + |\psi^-\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4} \right) \sin\theta}{\sqrt{2}}, \quad (6.16)$$

e

$$|\xi_1\rangle^{A_2A_3A_4} = \frac{\left(|\psi^+\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} - |\phi^+\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4} \right) \sin\theta - \left(|\psi^-\rangle^{A_2A_3} |0\rangle^{A_4} - |\phi^-\rangle^{A_2A_3} |1\rangle^{A_4} \right) \cos\theta}{\sqrt{2}}. \quad (6.17)$$

Charlie ao fazer medidas com os operadores $\hat{M}_{\phi_C}^{+\ A_2A_3}$, $\hat{M}_{\phi_C}^{-\ A_2A_3}$, $\hat{M}_{\psi_C}^{+\ A_2A_3}$ e $\hat{M}_{\psi_C}^{-\ A_2A_3}$, tem os resultados, respectivamente:

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_2A_3A_4} \right)^{\phi_A^{+A_0A_1} \phi_C^{+A_0A_1}} = \Omega_1 |\phi^+\rangle^{A_2A_3} \langle \phi^+| \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha \cos\theta |0\rangle^{A_4} - \beta \sin\theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4} \right) \left(\alpha^* \cos\theta \langle 0| - \beta^* \sin\theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1| \right) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2\theta |1\rangle^{A_4} \langle 1|, \end{array} \right. \quad (6.18)$$

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_2A_3A_4} \right)^{\phi_A^{+A_0A_1} \phi_C^{-A_0A_1}} = \Omega_2 |\phi^-\rangle^{A_2A_3} \langle \phi^-| \left\{ \begin{array}{l} \left(\alpha \sin\theta |0\rangle^{A_4} + \beta \cos\theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4} \right) \left(\alpha^* \sin\theta \langle 0| + \beta^* \cos\theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1| \right) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2\theta |1\rangle^{A_4} \langle 1|, \end{array} \right. \quad (6.19)$$

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_2A_3A_4} \right)^{\phi_A^{+A_0A_1} \psi_C^{+A_2A_3}} = \Omega_1 |\psi^+\rangle^{A_2A_3} \langle \psi^+| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta \sin\theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} + \alpha \cos\theta |1\rangle^{A_4} \right) \left(\beta^* \sin\theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| + \alpha^* \cos\theta \langle 1| \right) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2\theta |0\rangle^{A_4} \langle 0|, \end{array} \right. \quad (6.20)$$

e

$$\left(\hat{\rho}_{CE}^{A_2A_3A_4} \right)^{\phi_A^{+A_0A_1} \psi_C^{-A_2A_3}} = \Omega_2 |\psi^-\rangle^{A_2A_3} \langle \psi^-| \left\{ \begin{array}{l} \left(\beta \cos\theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} - \alpha \sin\theta |1\rangle^{A_4} \right) \left(\beta^* \cos\theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| - \alpha^* \sin\theta \langle 1| \right) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2\theta |0\rangle^{A_4} \langle 0|, \end{array} \right. \quad (6.21)$$

onde $\Omega_1 = \frac{1}{|\alpha|^2 \cos^2 \theta + (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2 \theta}$ e $\Omega_2 = \frac{1}{|\alpha|^2 \sin^2 \theta + (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2 \theta}$.

O operador de estado de três qubits $\hat{\rho}_{CE}^{A_2 A_3 A_4}$ normalizado vale:

$$\hat{\rho}_{CE}^{A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{4} \begin{cases} \Omega_1 |\phi^+\rangle^{A_2 A_3} \langle \phi^+| \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \cos \theta |0\rangle^{A_4} - \beta \sin \theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4}) (\alpha^* \cos \theta \langle 0| - \beta^* \sin \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2 \theta |1\rangle^{A_4} \langle 1| \end{array} \right. \\ + \Omega_2 |\phi^-\rangle^{A_2 A_3} \langle \phi^-| \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \sin \theta |0\rangle^{A_4} + \beta \cos \theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4}) (\alpha^* \sin \theta \langle 0| + \beta^* \cos \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2 \theta |1\rangle^{A_4} \langle 1| \end{array} \right. \\ + \Omega_1 |\psi^+\rangle^{A_2 A_3} \langle \psi^+| \left\{ \begin{array}{l} (\beta \sin \theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} + \alpha \cos \theta |1\rangle^{A_4}) (\beta^* \sin \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| + \alpha^* \cos \theta \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2 \theta |0\rangle^{A_4} \langle 0| \end{array} \right. \\ + \Omega_2 |\psi^-\rangle^{A_2 A_3} \langle \psi^-| \left\{ \begin{array}{l} (\beta \cos \theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} - \alpha \sin \theta |1\rangle^{A_4}) (\beta^* \cos \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| - \alpha^* \sin \theta \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2 \theta |0\rangle^{A_4} \langle 0|. \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.22)$$

Bob poderá ter em mãos os quatro possíveis operadores de estado:

$$\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1} \phi_C^{+ A_2 A_3} = \Omega_1 \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \cos \theta |0\rangle^{A_4} - \beta \sin \theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4}) (\alpha^* \cos \theta \langle 0| - \beta^* \sin \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2 \theta |1\rangle^{A_4} \langle 1|, \end{array} \right. \quad (6.23)$$

$$\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1} \phi_C^{- A_2 A_3} = \Omega_2 \left\{ \begin{array}{l} (\alpha \sin \theta |0\rangle^{A_4} + \beta \cos \theta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle^{A_4}) (\alpha^* \sin \theta \langle 0| + \beta^* \cos \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2 \theta |1\rangle^{A_4} \langle 1|, \end{array} \right. \quad (6.24)$$

$$\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1} \psi_C^{+ A_2 A_3} = \Omega_1 \left\{ \begin{array}{l} (\beta \sin \theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} + \alpha \cos \theta |1\rangle^{A_4}) (\beta^* \sin \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| + \alpha^* \cos \theta \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \sin^2 \theta |0\rangle^{A_4} \langle 0|, \end{array} \right. \quad (6.25)$$

e

$$\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1} \psi_C^{- A_2 A_3} = \Omega_2 \left\{ \begin{array}{l} (\beta \cos \theta \sqrt{1-\gamma} |0\rangle^{A_4} - \alpha \sin \theta |1\rangle^{A_4}) (\beta^* \cos \theta \sqrt{1-\gamma} \langle 0| - \alpha^* \sin \theta \langle 1|) \\ + |\alpha|^2 \gamma \cos^2 \theta |0\rangle^{A_4} \langle 0|. \end{array} \right. \quad (6.26)$$

Bob acopla ao seu sistema quântico um qubit auxiliar $|0\rangle^a$. Os possíveis operadores de estado do sistema quântico $A_4 a$ de Bob, na base $|00\rangle^{a A_4}$, $|01\rangle^{a A_4}$, $|10\rangle^{a A_4}$ e $|11\rangle^{a A_4}$ são, respectivamente:

$$|0\rangle^a \langle 0| \otimes \left(\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1} \phi_C^{+ A_2 A_3} \right) = \Omega_1 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \cos^2 \theta & -\alpha \beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ -\beta \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$|0\rangle^a \langle 0| \otimes \left(\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \phi_C^{-A_2 A_3}} \right) = \Omega_2 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \sin^2 \theta & \alpha \beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \beta \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

$$|0\rangle^a \otimes \left(\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \psi_C^{+A_2 A_3}} \right) = \Omega_1 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2 \theta & \beta \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \alpha \beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & |\alpha|^2 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.29)$$

e

$$|0\rangle^a \langle 0| \otimes \left(\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \psi_C^{-A_2 A_3}} \right) = \Omega_2 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2 \theta & -\beta \alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ -\alpha \beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos \theta \sin \theta & |\alpha|^2 \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Em seguida, Bob aplica ao sistema quântico $A_4 a$ uma transformação unitária. A escolha da transformação unitária a ser aplicada no sistema quântico de Bob, depende do operador de estado que ele tem em mãos e do ângulo θ que Charlie utiliza para fazer suas medidas. As transformações unitárias tem a função de emaranhar os dois sistemas quânticos e dependem do $|\tan \theta|$, portanto, duas considerações são feitas.

1. Se $|\tan \theta| \leq 1$

As transformações unitárias tem a forma:

$$U_1 = \begin{bmatrix} \tan \theta & 0 & \sqrt{1-\tan^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\tan^2 \theta} & 0 & -\tan \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

e

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tan \theta & 0 & \sqrt{1-\tan^2 \theta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\tan^2 \theta} & 0 & -\tan \theta \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Para os operadores de estado $\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \phi_C^{+A_2 A_3}}$, $\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \phi_C^{-A_2 A_3}}$, $\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \psi_C^{-A_2 A_3}}$ e $\hat{\rho}_C^{A_4 \phi_A^{+A_0 A_1} \psi_C^{+A_2 A_3}}$, são aplicadas as transformações U_1 , U_2 , U_2 e U_1 em seguida. As quatro possíveis matrizes

densidade obtidas após a transformação serão:

$$\begin{aligned} \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} &= U_1 \left(|0\rangle^a \left(\rho_C^{A_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} \right) \langle 0| \right) U_1^\dagger \\ \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} &= \Omega_1 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \sin^2\theta & -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 \\ -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2\theta & -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 \\ |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & |\alpha|^2 \cos^2\theta (1-\tan^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} &= U_2 \left(|0\rangle^a \left(\rho_C^{A_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} \right) \langle 0| \right) U_2^\dagger \\ \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} &= \Omega_2 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \sin^2\theta & \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & 0 & \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \\ \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2\theta & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times (1-\gamma) \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times (1-\gamma) \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\} & 0 & \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \cos^2\theta (1-\tan^2\theta) \end{array} \right\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} &= U_2 \left(|0\rangle^a \left(\rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} \right) \langle 0| \right) U_2^\dagger \\ \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} &= \Omega_1 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2\theta & \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & 0 & \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \\ \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & |\alpha|^2 \sin^2\theta & 0 & |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & |\alpha|^2 \cos^2\theta (1-\tan^2\theta) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} &= U_1 \left(|0\rangle^a \left(\rho_C^{A_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} \right) \langle 0| \right) U_1^\dagger \\ \rho_C^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} &= \Omega_2 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \sin^2\theta & -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) (1-\gamma) \\ \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\} & 0 \\ -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \sin^2\theta & |\alpha|^2 \sin^2\theta & -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\} & -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\tan^2\theta} & \left\{ \begin{array}{l} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \cos^2\theta (1-\tan^2\theta) \end{array} \right\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Bob precisa fazer uma medida sobre o sistema auxiliar a . Os projetores de medida são:

$$\hat{M}^{a0} = |0\rangle \langle 0| \quad (6.37)$$

e

$$\hat{M}^{a1} = |1\rangle \langle 1| \quad (6.38)$$

Bob ao fazer medidas sobre o qubit auxiliar dos operadores de estado $\hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3}$, $\hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3}$, $\hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3}$, $\hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3}$ com o projetor \hat{M}^{a0} , tem como resultado os operadores de estado, respectivamente:

$$\left(\hat{\rho}^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} \right) = \frac{1}{|\alpha|^2 (1+\gamma) + |\beta|^2 (1-\gamma)} \begin{cases} (\alpha |0\rangle - \beta \sqrt{1-\gamma} |1\rangle) (\langle 0| \alpha^* - \langle 1| \beta^* \sqrt{1-\gamma}) \\ + |\alpha|^2 \gamma |1\rangle \langle 1|, \end{cases} \quad (6.39)$$

$$\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \phi_C^- A_2 A_3} \right) = \frac{1}{|\alpha|^2 (1 + \gamma) + |\beta|^2 (1 - \gamma)} \begin{cases} (\alpha |0\rangle + \beta \sqrt{1 - \gamma} |1\rangle) (\langle 0| \alpha^* + \langle 1| \beta^* \sqrt{1 - \gamma}) \\ + |\alpha|^2 \gamma |1\rangle \langle 1|, \end{cases} \quad (6.40)$$

$$\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \psi_C^+ A_2 A_3} \right) = \frac{1}{|\alpha|^2 (1 + \gamma) + |\beta|^2 (1 - \gamma)} \begin{cases} (\alpha |1\rangle + \beta \sqrt{1 - \gamma} |0\rangle) (\langle 1| \alpha^* + \langle 0| \beta^* \sqrt{1 - \gamma}) \\ + |\alpha|^2 \gamma |0\rangle \langle 0|, \end{cases} \quad (6.41)$$

$$\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \psi_C^- A_2 A_3} \right) = \frac{1}{|\alpha|^2 (1 + \gamma) + |\beta|^2 (1 - \gamma)} \begin{cases} (\alpha |1\rangle - \beta \sqrt{1 - \gamma} |0\rangle) (\langle 1| \alpha^* - \langle 0| \beta^* \sqrt{1 - \gamma}) \\ + |\alpha|^2 \gamma |0\rangle \langle 0|. \end{cases} \quad (6.42)$$

Os estados acima mostram claramente o efeito do canal quântico sobre o possível estado que é teleportado a Bob, o canal leva o estado que antes era puro para um estado misto. Para que o protocolo seja bem sucedido é necessário que Bob faça medida apenas com o projetor de medida \hat{M}^{a_0} . Se Bob tivesse feito medidas com o projetor \hat{M}^{a_1} , os estados quânticos que estariam nas mãos de Bob seriam apenas estados produtos (do sistema quântico composto $A_4 a$). A probabilidade do teleporte dar certo é:

$$P = 2 \sin^2 \theta. \quad (6.43)$$

Dependendo do estado quântico que Bob tiver em mãos, ele necessita fazer transformações unitárias locais, de modo que o resultado final seja o estado desconhecido. Se Bob obtém $\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \phi_C^+ A_2 A_3} \right)$, ele aplica o operador $\hat{\sigma}_z^{A_4}$ e obtém $|\psi\rangle^{A_0}$. Se ele obtém $\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \phi_C^- A_2 A_3} \right)$ ele não precisa fazer nada sobre o estado. Se obtém $\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \psi_C^+ A_2 A_3} \right)$ aplica $\hat{\sigma}_x^{A_4}$. Se obtém $\left(\hat{\rho}^{A_4 \phi_A^+ A_0 A_1 \psi_C^- A_2 A_3} \right)$ aplica $i \hat{\sigma}_y^{A_4}$.

2 - Outra consideração é para $|\tan \theta| \geq 1$. Bob aplica sobre o sistema quântico $A_4 a$ representado pelas equações 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30 as transformações unitárias \tilde{U}_1 e \tilde{U}_2 . As transformações unitárias são representadas pelas matrizes

$$\tilde{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cot \theta & 0 & \sqrt{1 - \cot^2 \theta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \cot^2 \theta} & 0 & -\cot \theta \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

e

$$\tilde{U}_2 = \begin{bmatrix} \cot \theta & 0 & \sqrt{1 - \cot^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - \cot^2 \theta} & 0 & -\cot \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

Podem ser obtidos os quatro operadores de estado, dependendo do operador de estado que estiver com Bob:

$$\begin{aligned} \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} &= \tilde{U}_1 \left(|0\rangle_a \left(\rho^{A_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} \right) \langle 0| \right) \tilde{U}_1^\dagger \\ \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^+A_2A_3} &= \Omega_1 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \cos^2\theta & -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & 0 & \begin{cases} -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} \\ -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2\theta & 0 & \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \sin\theta \cos\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{cases} -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \sin\theta \cos\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & 0 & \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \sin^2\theta (1-\cot^2\theta) \end{cases} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} &= \tilde{U}_2 \left(|0\rangle_a \left(\rho^{A_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} \right) \langle 0| \right) U_2^\dagger \\ \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\phi_C^-A_2A_3} &= \Omega_2 \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \cos^2\theta & \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & \begin{cases} |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \\ \times \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & 0 \\ \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2\theta & \begin{cases} \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & 0 \\ \begin{cases} |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \\ \times \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & \begin{cases} \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & |\alpha|^2 \sin^2\theta (1-\cot^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} &= \tilde{U}_2 \left(|0\rangle_a \left(\rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} \right) \langle 0| \right) \tilde{U}_2^\dagger \\ \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^+A_2A_3} &= \Omega_1 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2\theta & \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & 0 \\ \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & |\alpha|^2 \cos^2\theta & \alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} & 0 \\ \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & \begin{cases} \beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & \begin{cases} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \\ \times \sin^2\theta (1-\cot^2\theta) \end{cases} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} &= \tilde{U}_1 \left(|0\rangle_a \left(\rho^{A_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} \right) \langle 0| \right) \tilde{U}_1^\dagger \\ \rho^{aA_4\phi_A^+A_0A_1\psi_C^-A_2A_3} &= \Omega_2 \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 \gamma + |\beta|^2 (1-\gamma)) \cos^2\theta & -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & 0 & \begin{cases} -\beta\alpha^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} \\ -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \cos^2\theta & |\alpha|^2 \cos^2\theta & 0 & |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{cases} -\alpha\beta^* \sqrt{1-\gamma} \\ \times \cos\theta \sin\theta \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & \begin{cases} |\alpha|^2 \cos\theta \sin\theta \\ \times \sqrt{1-\cot^2\theta} \end{cases} & 0 & \begin{cases} |\alpha|^2 \sin^2\theta \\ \times (1-\cot^2\theta) \end{cases} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Bob obtém a mesma sequência de estados obtidas através de \hat{U}_1 e \hat{U}_2 . A probabilidade do teleporte dar certo é:

$$P = 2\cos^2\theta \quad (6.50)$$

6.1 Fidelidade

A seguir é obtida a expressão analítica da fidelidade entre o estado quântico obtido por Bob considerando a presença de canal e sem a presença de canal. A fidelidade entre um estado quântico e um operador de estado é calculada pela equação:

$$F(|\psi\rangle, \hat{\rho}) = \sqrt{\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle}. \quad (6.51)$$

A fidelidade informa o quanto o operador de estado $\hat{\rho}$ é parecido com o estado $|\psi\rangle$. Na caso do teleporte a intenção é saber o quanto o operador de estado $\hat{\rho}_E^{A_4}$ se aproxima daquele obtido sem a aplicação do canal. Lembrando que sem a aplicação do canal (estado desconhecido) o estado obtido por Bob:

$$|\psi\rangle^{A_4} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (6.52)$$

O estado quântico obtido por Bob com a influência de canal é o operador de estado referente a eq. 6.40. A expressão analítica da fidelidade entre 6.40 e $|\psi\rangle^{A_4}$ é:

$$F\left(|\psi\rangle^{A_4}, \hat{\rho}_E^{A_4}\right) = \sqrt{\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2 \sqrt{1-\gamma})^2 + |\beta|^2 |\alpha|^2 \gamma}{(|\alpha|^2 + |\beta|^2) (|\alpha|^2 (1+\gamma) + |\beta|^2 (1-\gamma))}}. \quad (6.53)$$

Em termos do coeficiente α do estado $|\psi\rangle^{A_4}$ e do operador de estado $\hat{\rho}_E^{A_4}$, a fidelidade é dada pela expressão:

$$F\left(|\psi\rangle^{A_4}, \hat{\rho}_E^{A_4}\right) = \sqrt{\frac{(|\alpha|^2 (1 - \sqrt{1-\gamma}) + \sqrt{1-\gamma})^2 + (1 - |\alpha|^2) |\alpha|^2 \gamma}{\gamma (2|\alpha|^2 - 1) + 1}}. \quad (6.54)$$

Considerando o estado desconhecido fixo com $|\alpha|^2 = \frac{1}{4}$, $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}$ e $|\alpha|^2 = \frac{3}{4}$, as expressões para as fidelidades valem, respectivamente:

$$F\left(|\psi\rangle^{A_4}, \hat{\rho}_E^{A_4}\right)^{|\alpha|^2=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{10 - 6\gamma + 6\sqrt{1-\gamma}}{1 - \frac{\gamma}{2}}}, \quad (6.55)$$

$$F\left(|\psi\rangle^{A_4}, \hat{\rho}_E^{A_4}\right)^{|\alpha|^2=\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-\gamma}}{2}}, \quad (6.56)$$

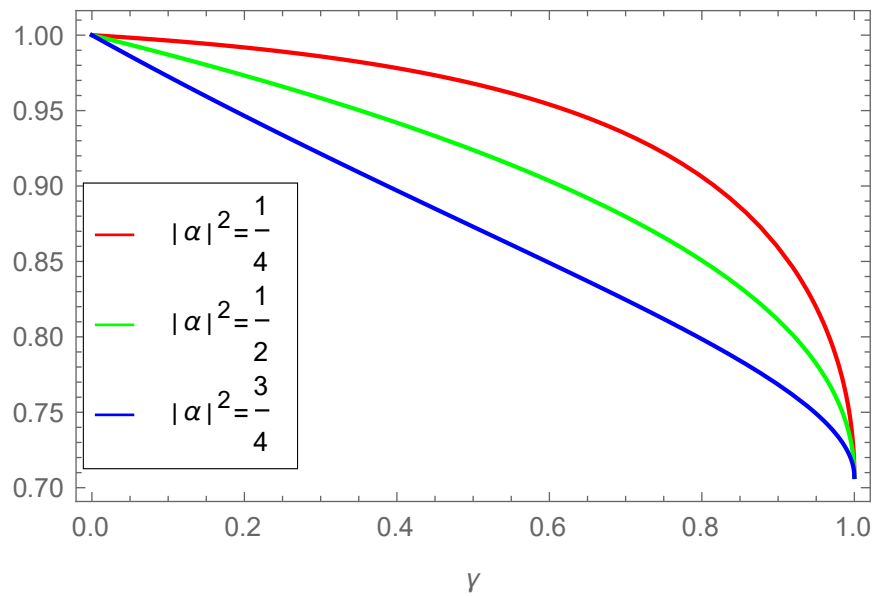
e

$$F\left(|\psi\rangle^{A_4}, \hat{\rho}_E^{A_4}\right)^{|\alpha|^2=\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{10 + 2\gamma + 6\sqrt{1-\gamma}}{\frac{\gamma}{2} + 1}}. \quad (6.57)$$

A figura 9 mostra o efeito da ação do canal sobre a fidelidade entre o estado quântico obtido por Bob sob influência do canal quântico e aquele em Alice deseja teleportar a ele. Conforme o parâmetro de amortecimento de amplitude aumenta, menos

o estado quântico obtido por Bob “se parece” com o estado que Alice deseja teleportar a ele. A fidelidade é fortemente influenciada pelo parâmetro de estado α . Considerando o parâmetro de amortecimento de amplitude $< 0,4$, a fidelidade, considerando $\alpha = \frac{1}{4}$ praticamente não sofre alteração, para os estados quânticos com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{4}$ a variação da fidelidade é significativa. Independente do valor do coeficiente α do estado desconhecido $|\psi\rangle^{A_0}$ e do operador de estado $\hat{\rho}_E^{A_1}$, o valor mínimo da fidelidade assume o mesmo valor.

Figura 9 – Fidelidade entre o estado desconhecido $|\psi\rangle^{A_0}$ e o operador de estado $\hat{\rho}_E^{A_1}$ obtido por Bob, em função do parâmetro de amortecimento de amplitude γ .



Fonte: o próprio autor.

7 Conclusão

Neste trabalho é investigado o efeito da ação dos canais quânticos de, a) despolarização e b) amortecimento de amplitude, sobre três operadores de estado de quatro qubits. Um dos operadores de estado representa o estado cluster $\hat{\rho}_C$ de quatro qubits, e os outros dois operadores representam as misturas estatísticas do estado cluster com outros estados quânticos ($\hat{\rho}_{CW}$ e $\hat{\rho}_{CB}$) com diferentes correlações. Em relação as misturas estatísticas, nos casos em que existe efeito do canal quântico sobre o sistema, o parâmetro do canal de despolarização assume os valores $d = \frac{1}{8}$ e $d = \frac{1}{4}$, e o parâmetro de amortecimento de amplitude tem valores fixados em $\gamma = \frac{1}{8}$ e $\gamma = \frac{1}{4}$. Foi estudado, quantitativamente, o efeito da ação dos canais quânticos sobre as propriedades, i) o quadrado do valor da negatividade global $N_G^2(\hat{\rho}^{A_1})$ (a operação transposta parcial é realizada sobre o estado do qubit A_1), ii) a concorrência $C(\hat{\rho}^{A_1 A_2})$ e iii) a informação mútua $I_m(\hat{\rho}^{A_1}, \hat{\rho}^{A_2})$. A concorrência e a informação mútua são obtidas para o par de qubits $A_1 A_2$. Os resultados contendo o efeito da ação dos canais quânticos, são comparados com o caso em que o sistema quântico permanece livre da interação com o ambiente. É feita a comparação dos valores numéricos da informação mútua, do quadrado do valor da negatividade, da concorrência, da entropia de troca $S_e(\hat{\rho}^{A_1 E})$ e da informação coerente $I_c(\hat{\rho}^{A_1 E})$, obtidos após a ação dos canais quânticos em estudo.

Com relação ao estado cluster $\hat{\rho}_C$, o canal de despolarização não afeta o emaranhamento entre o qubit A_1 com o restante do sistema composto ($N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ da figura 1). Espera-se que parte do emaranhamento existente entre o qubit A_1 e os outros três qubits do estado cluster tenha sido transferido para o ambiente E , de modo que, o emaranhamento entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2 A_3 A_4 E$ continua sendo máximo, e não dependa do parâmetro de despolarização d . Observa-se que conforme o valor do parâmetro d aumenta, mais informação $S_e(\hat{\rho}_{CE}^{A_1 E})$ é trocada entre o qubit A_1 e o ambiente (figura 1). O canal de amortecimento de amplitude afeta o emaranhamento global entre o qubit A_1 e o sistema composto $A_2 A_3 A_4 E$ ($N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1})$ ilustrado na figura 2). Na medida em que o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma \rightarrow 1$, $N_G^2(\hat{\rho}_{CE}^{A_1}) \rightarrow 0$, até que todo o emaranhamento seja perdido (para a condição $\gamma = 1$ o estado $\hat{\rho}_{CE}^{A_1}$ é separável). Independentemente do canal quântico considerado, a informação mutuamente compartilhada $I_m(\hat{\rho}_C^{A_1}, \hat{\rho}_C^{A_2})$ entre os qubits A_1 e A_2 , diminui com o aumento do valor do parâmetro de canal, até chegar no ponto onde nenhuma informação é compartilhada pelo par de qubits $A_1 A_2$. Para ambos os canais quânticos a concorrência $C(\hat{\rho}_{CE}^{A_1 A_2})$ é nula. A quantidade máxima de informação trocada entre o qubit A_1 e o ambiente simulado pelo canal de despolarização (figura 1), é o dobro da entropia de troca $S_e(\hat{\rho}_C^{A_1 E})$ obtida considerando o canal de amortecimento de amplitude (figura 2). O fato do canal de despolarização possuir quatro operadores de Kraus, enquanto que o canal de amortecimento de amplitude só tem dois operadores,

influência no valor máximo da entropia de troca. Quanto maior a entropia de troca, menor é o valor da informação coerente $I_c(\hat{\rho}^{A_1E})$. A informação coerente é nula, quando o parâmetro de despolarização assume o valor $d \geq \frac{1}{4}$ (figura 1), ou quando o parâmetro de amortecimento de amplitude $\gamma \geq \frac{1}{2}$ (figura 2). Os valores limiares que permitem transmitir informação quântica por meio dos canais de despolarização e amortecimento de amplitude, utilizando o estado cluster, são $d = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, respectivamente.

Para o estado $\hat{\rho}_{CW}$ todas as grandezas calculadas dependem do parâmetro de mistura p . Para a situação em que o sistema não apresenta efeito de canal, a medida que o coeficiente do estado $|W\rangle$ aumenta, ocorre a diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}^{A_1})$. A explicação está na diferença entre o tipo e a quantidade de correlações contidas no estado cluster e no estado $|W\rangle$. Observa-se que quando o parâmetro de mistura tem o valor $p = 0$, e o sistema quântico passa pelo canal de despolarização, o valor de $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1}) > N_G^2(\hat{\rho}_{CW}^{A_1})$ (figura 4 e 3). O valor mínimo alcançado por $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$, é maior para o caso $d = \frac{1}{4}$ (figura 4). A situação observada para o canal de amortecimento de amplitude é bem diferente. A ação desse canal sobre o sistema quântico é a diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ (figuras 3 e 5). A taxa de diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}_{CWE}^{A_1})$ aumenta com o aumento de γ . O efeito de ambos os canais sobre a concorrência e a informação mútua dos estados mistos é o decréscimo das mesmas. Entretanto, com o aumento no valor do parâmetro de mistura $(1 - p)$, a informação compartilhada entre o par de qubits A_1A_2 , diminui até o um mínimo e depois recupera parcialmente.

Em relação ao estado $\hat{\rho}_{CB}$, independentemente da ação do canal, o quadrado do valor da negatividade $N_G^2(\hat{\rho}^{A_1})$, da entropia de troca $S_e(\hat{\rho}^{A_1E})$ e da informação coerente $I_c(\hat{\rho}^{A_1E})$ não dependem do parâmetro de mistura p . A ação do canal de despolarização sobre o sistema não influencia $N_G^2(\hat{\rho}^{A_1})$ (figuras 6 e 7). A consequência da ação do canal de amortecimento de amplitude é a diminuição de $N_G^2(\hat{\rho}^{A_1})$ (figura 8). O fato de que o estado reduzido do qubit A_1 satisfaz $\hat{\rho}_B^{A_1} = \hat{\rho}_C^{A_1} = \hat{\rho}_{CB}^{A_1}$, verificamos que $S_e(\hat{\rho}_{CB}^{A_1E}) = S_e(\hat{\rho}_C^{A_1E}) = S_e(\hat{\rho}_B^{A_1E})$. O mesmo vale para a informação coerente. O efeito dos dois canais quânticos tanto sobre a concorrência como para a informação mútua, resulta na diminuição das mesmas, entretanto, $I_m(\hat{\rho}^{A_1}, \hat{\rho}^{A_2})$ é recuperada e atingir valores maiores que $1bit$. A justificativa é que a informação mútua fornece a quantidade de correlações clássicas mais as correlações quânticas presentes no sistema quântico.

Ao final do trabalho, foi discutido o efeito do canal de amortecimento de amplitude sobre o teletransporte quântico controlado, quando o primeiro qubit do estado cluster, utilizado no protocolo, sofre perda de coerência. A fidelidade, entre o estado quântico desconhecido teleportado por Alice $|\psi\rangle^{A_0}$ e o estado $\hat{\rho}_E^{A_4}$ obtido por Bob, depende de γ , e do parâmetro de estado α . É verificado que a fidelidade é sempre maior do que 70%.

Como possível trabalho futuro, pode-se apontar o estudo do efeito a ação dos canais quânticos sobre as correlações quânticas e clássicas, contidas em sistemas

quânticos mais complexos do que os tratados neste trabalho.

Referências

- [1] NIE, Y.-Y. et al. Non-maximally entangled controlled teleportation using four particles cluster states. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 48, n. 5, p. 1485–1490, 2009.
- [2] LI, S.-S. Dense coding with cluster state via local measurements. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 51, n. 3, p. 724–730, 2012.
- [3] SCHLINGEMANN, D.; WERNER, R. F. Quantum error-correcting codes associated with graphs. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 1, p. 012308, 2001.
- [4] RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, n. 22, p. 5188, 2001.
- [5] WALTHER, P. et al. Experimental one-way quantum computing. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 434, n. 7030, p. 169–176, 2005.
- [6] CHEN, K. et al. Experimental realization of one-way quantum computing with two-photon four-qubit cluster states. *Physical review letters*, APS, v. 99, n. 12, p. 120503, 2007.
- [7] GISIN, N. et al. Quantum cryptography. *Reviews of modern physics*, APS, v. 74, n. 1, p. 145, 2002.
- [8] CAVES, C. M.; DRUMMOND, P. D. Quantum limits on bosonic communication rates. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 66, n. 2, p. 481, 1994.
- [9] HOLEVO, A. S.; GIOVANNETTI, V. Quantum channels and their entropic characteristics. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 75, n. 4, p. 046001, 2012.
- [10] BRIEGEL, H. J.; RAUSSENDORF, R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. *Physical Review Letters*, APS, v. 86, n. 5, p. 910, 2001.
- [11] BRENNEN, G. K. et al. Quantum logic gates in optical lattices. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 5, p. 1060, 1999.
- [12] JAKSCH, D. et al. Entanglement of atoms via cold controlled collisions. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 9, p. 1975, 1999.
- [13] CALARCO, T. et al. Quantum gates with neutral atoms: Controlling collisional interactions in time-dependent traps. *Physical Review A*, APS, v. 61, n. 2, p. 022304, 2000.

- [14] BRIEGEL, H.-J. et al. Quantum computing with neutral atoms. *Journal of modern optics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 2-3, p. 415–451, 2000.
- [15] BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P. Quantum information and computation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 404, n. 6775, p. 247–255, 2000.
- [16] SCARANI, V. et al. Nonlocality of cluster states of qubits. *Physical Review A*, APS, v. 71, n. 4, p. 042325, 2005.
- [17] GOUR, G.; WALLACH, N. R. All maximally entangled four-qubit states. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 51, n. 11, p. 112201, 2010.
- [18] SCHUMACHER, B.; NIELSEN, M. A. Quantum data processing and error correction. *Physical Review A*, APS, v. 54, n. 4, p. 2629, 1996.
- [19] XIANG, Y.; XIONG, S.-J. Entropy exchange, coherent information, and concurrence. *Physical Review A*, APS, v. 76, n. 1, p. 014306, 2007.
- [20] NIELSON, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. 2000.
- [21] PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, APS, v. 77, n. 8, p. 1413, 1996.
- [22] VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 3, p. 032314, 2002.
- [23] HILL, S.; WOOTTERS, W. K. Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical review letters*, APS, v. 78, n. 26, p. 5022, 1997.
- [24] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B. *F. Laloë Quantum mechanics*. [S.l.]: Wiley, New York, 1977.
- [25] WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 10, p. 2245, 1998.
- [26] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, ACM, v. 5, n. 1, p. 3–55, 2001.
- [27] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of information theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- [28] SHARMA, S. S.; SHARMA, N. Four-tangle for pure states. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 1, p. 012340, 2010.
- [29] DÜR, W.; VIDAL, G.; CIRAC, J. I. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, APS, v. 62, n. 6, p. 062314, 2000.

- [30] BENNETT, C. H. et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- [31] BOUWMEESTER, D. et al. Experimental quantum teleportation. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 390, n. 6660, p. 575–579, 1997.
- [32] BOSCHI, D. et al. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 6, p. 1121, 1998.
- [33] WOLF, M. M.; PEREZ-GARCIA, D. Quantum capacities of channels with small environment. *Physical Review A*, APS, v. 75, n. 1, p. 012303, 2007.
- [34] DEUTSCH, D. Quantum computational networks. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.], 1989. v. 425, n. 1868, p. 73–90.
- [35] BARENCO, A. et al. Elementary gates for quantum computation. *Physical review A*, APS, v. 52, n. 5, p. 3457, 1995.
- [36] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- [37] SCHRÖDINGER, E. Discussion of probability relations between separated systems. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1935. v. 31, n. 04, p. 555–563.
- [38] BOHR, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, APS, v. 48, n. 8, p. 696, 1935.
- [39] BELL, J. S. *On the einstein podolsky rosen paradox*. 1964.
- [40] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [41] NUSSENSWEIG, H. M. Curso de física básica, vol. 4. *Editora Edgard Blücher*, 1997.
- [42] SAKURAI, J. J. *Advanced quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Education India, 1967.
- [43] LIN, C.-H.; LIN, Y.-C.; HO, Y. K. Quantification of linear entropy for quantum entanglement in he, h- and ps- ions using highly-correlated hylleraas functions. *Few-Body Systems*, Springer, v. 54, n. 11, p. 2147–2153, 2013.

-
- [44] PETERS, N. A.; WEI, T.-C.; KWIAT, P. G. Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks. *Physical Review A*, APS, v. 70, n. 5, p. 052309, 2004.
- [45] MACCHIAVELLO, C.; SACCHI, M. F. Detection of quantum channel capacities. *arXiv preprint arXiv:1510.00219*, 2015.
- [46] MACCHIAVELLO, C.; PALMA, G. M. Entanglement-enhanced information transmission over a quantum channel with correlated noise. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 5, p. 050301, 2002.