LUAN CARLOS LINS TRANNIN

EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE SOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS LINEARES

Londrina
2023

LUAN CARLOS LINS TRANNIN

EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE SOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS LINEARES

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Profª.Drª.Michele de Oliveira Alves

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

T772e Trannin, Luan Carlos Lins .

Existência e estabilidade exponencial de solução de algumas equações diferenciais via semigrupos lineares / Luan Carlos Lins Trannin. - Londrina, 2023.

148 f. : il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2023.

Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Tese. 2. Semigrupos de operadores lineares - Tese. 3. Existência de solução - Tese. 4. Estabilidade exponencial - Tese. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

LUAN CARLOS LINS TRANNIN

EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DE SOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS VIA SEMIGRUPOS LINEARES

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Adeval Lino Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 29 de Junho de 2023.

AGRADECIMENTOS

A todo o universo, pessoas e seres que de alguma forma moldaram minha forma de ser.

A Joquinha, por toda força, companheirismo e amizade.

Agradeço a minha orientadora, Profª. Drª. Michele de Oliveira Alves, por toda paciência e ajudas nos momentos de dificuldades.

Agradeço o corpo docente do PGMAC, pelas disciplinas ministradas com qualidade.

Aos envolvidos que de certa forma me motivaram ou ajudaram, como o grande amigo Sandro Bernardes entre outros.

RESUMO

O trabalho apresenta uma abordagem simplificada das equações diferenciais parciais lineares, como a equação do calor, equação da onda, sistema termoelástico e sistemas de vigas de Timoshenko com a Lei Térmica de Fourier. Esses problemas são analisados utilizando a teoria de semigrupos lineares e resultados de Análise Funcional.

A ideia central é tratar os problemas de valor inicial e de fronteira como um problema de Cauchy Abstrato

$$\begin{cases} U_t = AU, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Nesse contexto, considera-se um operador linear não limitado A, definido em um espaço de Banach (ou Hilbert) H. O objetivo é demonstrar a existência e unicidade da solução e a estabilidade exponencial para cada modelo estudado.

Para alcançar esses resultados, são utilizados conceitos e técnicas da Análise Funcional e da teoria de semigrupos lineares. A Análise Funcional permite estudar os espaços de Banach (ou Hilbert) nos quais as equações são formuladas, enquanto a teoria de semigrupos lineares é aplicada para analisar a evolução temporal dos sistemas descritos pelas equações diferenciais parciais.

O trabalho apresenta uma abordagem detalhada, mostrando as etapas necessárias para obter a existência e unicidade da solução, bem como a estabilidade exponencial para cada modelo. Essa abordagem é baseada em fundamentos teóricos sólidos e resultados estabelecidos na área.

No geral, o trabalho tem como objetivo fornecer uma compreensão simplificada e acessível das equações diferenciais parciais lineares, demonstrando a existência, unicidade e estabilidade exponencial das soluções para cada modelo abordado.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais; Existência; Unicidade; Estabilidade.

ABSTRACT

The work presents a simplified approach to linear partial differential equations, such as the heat equation, wave equation, thermoelastic system, and Timoshenko beam systems with the Fourier Thermal Law. These problems are analyzed using the theory of linear semigroups and results from Functional Analysis.

The central idea is to treat initial value and boundary value problems as an abstract Cauchy problem

$$\begin{cases} U_t = AU, \ \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

In this context, an unbounded linear operator A is considered, defined in a Banach (or Hilbert) space H. The goal is to demonstrate the existence and uniqueness of the solution, as well as exponential stability for each studied model.

To achieve these results, concepts and techniques from Functional Analysis and the theory of linear semigroups are utilized. Functional Analysis allows for the study of the Banach (or Hilbert) spaces in which the equations are formulated, while the theory of linear semigroups is applied to analyze the temporal evolution of systems described by partial differential equations.

The work presents a detailed approach, showing the necessary steps to obtain the existence and uniqueness of the solution, as well as exponential stability for each model. This approach is based on solid theoretical foundations and established results in the field.

Overall, the work aims to provide a simplified and accessible understanding of linear partial differential equations, demonstrating the existence, uniqueness, and exponential stability of solutions for each addressed model.

Keywords: Partial Differential Equations; Existence; Uniqueness; Stability.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto
I	subintervalo de $\mathbb{R}$ aberto
$\overline{X}$	fecho do conjunto X
$\mathbb{K}$	corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos
$C(\Omega)$	espaço das funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{R}$
$C^j(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciáveis até a ordem j
$C^\infty(\Omega)$	espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções de $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto
$L^p(\Omega)$	espaço $L^p(\Omega)$ usual
$L_*^2(\Omega)$	espaço das funções em $L^2(\Omega)$ que possuem média nula
$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev usual
$H^m(\Omega)$	espaço $W^{m,p}(\Omega)$ para $p = 2$
$H_*^1(\Omega)$	espaço das funções em $H^1(\Omega)$ que possuem média nula
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares limitados $A : X \to X$
I	operador identidade
$D(A)$	domínio do operador A
$\rho(A)$	conjunto resolvente do operador A
$\sigma(A)$	espectro do operador A
supp(ϕ)	suporte da função ϕ
$\Vert \cdot \Vert$	norma usual em $L^2(\Omega)$
$\Vert \cdot \Vert_{H^1(I)}$	norma em $H^1(I)$ dada por $\Vert u\Vert_{H^1(I)}^2 = \Vert u\Vert_{L^2(I)}^2 + \Vert u_x\Vert_{L^2(I)}^2$
$\Vert \cdot \Vert_{H^2(I)}$	norma em $H^2(I)$ dada por $\Vert u\Vert_{H^2(I)}^2 = \Vert u\Vert_{L^2(I)}^2 + \Vert u_x\Vert_{L^2(I)}^2 + \Vert u_{xx}\Vert_{L^2(I)}^2$
$\Vert \cdot \Vert_{\mathcal{L}(X)}$	norma em $\mathcal{L}(X)$ dada por $\Vert A\Vert_{\mathcal{L}(X)} = \sup\left\{\dfrac{\Vert Ax\Vert_X}{\Vert x\Vert_X}; x \in X \text{ e } x \neq 0\right\}$
$\Vert \cdot \Vert_{D(A)}$	norma do gráfico em $D(A) \subset X$ dada por $\Vert U\Vert_{D(A)} = \Vert U\Vert_X + \Vert AU\Vert_X$
$\Vert \cdot \Vert_\infty$	norma em $C([a,b])$ dada por $\Vert f\Vert_\infty = \sup\{\vert f(x)\vert; x \in [a,b]\}$
i	unidade imaginária
$\overline{z}$	conjugado do número complexo$z$
Re(z)	parte real do número complexo z
Im(z)	parte imaginária do número complexo z
$\hookrightarrow$	imersão contínua
$\overset{c}{\hookrightarrow}$	imersão compacta

1 INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação matemática que envolve derivadas parciais de uma função desconhecida de várias variáveis. Em outras palavras, relaciona as taxas de variação de uma função em relação a cada uma de suas variáveis.

As EDP's são usadas para modelar uma ampla gama de fenômenos físicos, como transferência de calor, dinâmica de fluidos, eletromagnetismo e mecânica quântica, entre outros. Elas são ferramentas essenciais para entender e prever o comportamento de sistemas e processos complexos. São normalmente classificadas de acordo com sua ordem, linearidade e tipo de condições de contorno.

Resolver uma EDP envolve encontrar uma função que satisfaça a equação, sujeita a algumas condições iniciais ou de contorno. Isso pode ser uma tarefa desafiadora, especialmente para equações não lineares e de ordem superior, e geralmente requer o uso de métodos numéricos e simulações de computadores.

O estudo de EDP's remonta ao século XVIII, quando matemáticos começaram a investigar o comportamento do fluxo de calor e das vibrações de objetos elásticos. Uma das primeiras equações a ser estudada, foi a equação do calor, que descreve como a temperatura muda ao longo do tempo em um sistema físico.

Uma das mais influentes figuras na história das EDP's foi Joseph Fourier, que desenvolveu a série de Fourier no início do século XIX. Isso permitiu a solução de um amplo leque de equações diferenciais parciais, incluindo a equação do calor e a equação da onda, usando funções trigonométricas. Durante os séculos XIX e XX, muitos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da teoria das EDP's, incluindo Cauchy, Riemann, Laplace e Green. No entanto, a teoria moderna das EDP's não surgiu até meados do século XX, com o trabalho de pesquisadores como John von Neumann, Richard Courant e Fritz John.

Hoje, o estudo das EDP's é um campo próspero da matemática. O desenvolvimento de métodos numéricos e simulações por computador tornou possível resolver EDP's que anteriormente eram intratáveis e abriu novas possibilidades de pesquisa e aplicações. No que segue, usaremos a teorias dos espaços de Sobolev, a qual foi introduzida pelo matemático russo Sergei Lvovich Sobolev(1908-1989) e de Semigrupos lineares, as quais serão apresentadas de forma resumida no Cápitulo 2.

Os espaços de Sobolev são de espaços de funções usados em análise matemática, especialmente em análise funcional, cálculo de variações e equações diferenciais parciais. Esses espaços são importantes porque incluem funções que não são diferenciáveis no sentido clássico, mas têm derivadas fracas ou distribucionais. Os espaços de Sobolev também são úteis na formulação de problemas de otimização e na descrição de propriedades de soluções de equações diferenciais parciais.

O espaço de Sobolev mais básico é o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e p é um número real positivo. Esse espaço é composto por funções f em Ω cuja primeira derivada fraca esta em $L^p(\Omega)$. Intuitivamente, isso significa que f é "quase" diferenciável, mas pode ter descontinuidades e outras irregularidades. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de funções em Ω cujas primeiras k derivadas fracas estão em $L^p(\Omega)$.

Os espaços de Sobolev têm muitas propriedades interessantes, incluindo a propriedade de completude, o que significa que eles contêm todas as funções necessárias para resolver certos tipos de problemas. Eles também têm uma estrutura de espaço vetorial, o que permite a aplicação de técnicas algébricas em problemas envolvendo esses espaços. Em resumo, os espaços de Sobolev são uma ferramenta poderosa para a análise matemática.

No presente trabalho, analisaremos equações e sistemas de equações diferenciais lineares. Nossa principal meta é transformar todos os problemas abordados no seguinte Problema de Cauchy Abstrato de Primeira ordem:

$$\begin{cases} u_t = Au, \;\; t > 0, \\ u(0) := u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador linear não limitado definido em um espaço de Banach (ou Hilbert) $\mathcal{H}$. Assim, determinar a solução de (1.1) se reduzirá em determinar propriedades do operador A em cada caso. Para tanto, usaremos a teoria de Semigrupos Lineares, tal teoria será apresentada de forma sucinta no Capítulo 2, cuja principal referência base é livro do Pazy [29].

A teoria de semigrupos tem sido usada para estudar a estabilidade, regularidade, existência e unicidade de soluções desses tipos de problemas. Em particular, a teoria dos semigrupos teve um grande avanço com a prova do teorema de Hille-Yosida, que estabelece condições suficientes e necessárias para que o operador linear A gere um semigrupo. Já o teorema de Lumer-Phillips caracteriza quando um operador linear é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Por fim, analisaremos a estabilidade exponencial para um C_0-semigrupo de contrações utilizando o Teorema de Prüss.

No mais, o trabalho está dividido na seguinte forma, o Capítulo 2 apresenta uma série de resultados de Análise Funcional, assim como os principais resultados da teoria de Espaços de Sobolev unidimensionais e resultados de extabilidade. Alguns resultados importantes deste capítulo são os Teoremas de Lax-Milgram, Hille-Yosida, Lumer-Phillips e Prüss.

No Capítulo 3 apresentamos alguns modelos de equações diferenciais. Em cada caso, faremos uma breve dedução do problema, exibindo algumas características físicas e apresentando sua versão autônoma. Por fim, através dos resultados obtidos no Capítulo 3, apresentaremos uma breve conclusão, seguida pelas principais referências utilizadas.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo serão introduzidos alguns conceitos de Análise Funcional para ajudar na compreensão dos resultados nos próximos capítulos.

2.1 ESPAÇOS DE BANACH

Definição 2.1. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ tal que*

(i) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*

(ii) $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X, \ \ \forall x \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*;*

(iii) $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \ \ \forall x, y \in X.$

Observação 1. (i) O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço vetorial normado. Quando não houver confusão, será denotado somente por X um espaço vetorial normado e por $\|\cdot\|$ a norma em X;

(ii) Nesta seção, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou corpo dos números complexos($\mathbb{C}$).

Definição 2.2. *Seja X um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ duas normas em X. Diz-se que a norma $\|\cdot\|_1$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$, tais que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.3. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Denota-se por $x_n := x(n)$ e $x(\mathbb{N}) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por (x_n). Uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \to X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 2.4. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é:*

• *Convergente em X quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Denota-se a convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \to x$.*

• *De Cauchy em X se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$.*

Definição 2.5. *Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado de espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X com respeito à norma $\|\cdot\|_X$.*

Definição 2.6. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. É dito que Y está imerso continuamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é contínua em Y, ou seja, quando existe $C > 0$ tal que $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y, \forall x \in Y$.*
Denota-se a imersão contínua de Y em X por $Y \hookrightarrow X$.

Definição 2.7. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. Dizemos que uma aplicação $T : Y \to X$ é **compacta** se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(T)$, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y .*

Definição 2.8. *Sejam X e Y dois espaços de Banach com $Y \subset X$. É dito que Y está imerso compactamente em X quando a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é compacta em Y.*
Denota-se a imersão compacta de Y em X por $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$.

Definição 2.9. *Um espaço vetorial normado X é dito reflexivo quando*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J(x) \end{aligned}$$

definida por $J(x)(f) = \langle f, x\rangle$ é sobrejetora.

2.2 Operadores Lineares

Definição 2.10. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. Diz-se que um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ é linear quando*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y), \text{ para quaisquer } x, y \in D(T) \text{ e } \alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

O conjunto $D(T)$ é o domínio de T. No caso particular $Y = \mathbb{K}$, diz-se que T é um funcional linear.

Definição 2.11. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais normados. Diz-se que um operador $T : D(T) \subset X \to Y$ é antilinear quando*

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \overline{\alpha} T(y), \text{ para quaisquer } x, y \in D(T) \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Definição 2.12. *Um operador linear $T : D(T) \subset X \to Y$ definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y é dito:*

*(i) um **isomorfismo** quando T é bijetor;*

*(ii) um **isomorfismo isométrico** quando T é bijetor e $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$, para todo $x \in D(T)$;*

*(iii) **contínuo** em $a \in D(T)$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D(T)$ com $\|x - a\|_X < \delta$, então $\|T(x) - T(a)\|_Y < \epsilon$;*

(iv) ***contínuo*** *quando T é contínuo em todo $x \in D(T)$;*

(v) ***compacto*** *se para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(T)$, a sequência $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y .*

O conjunto dos operadores lineares limitados, que será denotado por $\mathcal{L}(X,Y)$, é um espaço vetorial normado com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = sup\{\|Tx\|_Y; \|x\|_X = 1\}$.

Observação 2. (i) Quando $Y = X$ o conjunto dos operadores lineares limitados será denotado por $\mathcal{L}(X)$ com norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup\{\|Tx\|_X; \|x\|_X = 1\}$;

(ii) Quando $Y = \mathbb{K}$, denota-se $\mathcal{L}(X,\mathbb{K}) := X'$. O espaço X' é chamado de espaço dual do espaço X. Para todo $f \in X'$ denota-se $f(x) := \langle f, x\rangle\,, x \in X$.

Proposição 2.13. *Se X é um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$subespaço vetorial é fechado, então M é reflexivo.*

Demonstração. Ver [19], página 30, Teorema 1.4-7. □

Proposição 2.14. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se existe um isomorfismo $T : X \to Y$ fechado tem-se: X é reflexivo se, e somente se, Y é reflexivo.*

Demonstração. Ver [9], página 71, Corolário 3.21 □

Teorema 2.15. *Seja $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear definido entre dois espaços vetoriais normados X e Y . Então, T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

Demonstração. Ver [19], página 97, Teorema 2.7-9. □

Teorema 2.16. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados. Se Y é um espaço de Banach, então $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ é um espaço de Banach. Em particular, X' e $X'' = (X')'$ são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver [19], página 118, Teorema 2.10-2. □

2.3 O Teorema de Lax-Milgram e Espaços de Hilbert

Definição 2.17. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ é chamada de forma sesquilinear em $X \times Y$ se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a(x+y,z) = a(x,z) + a(y,z),\ \ \forall x,y \in X$ *e* $\forall z \in Y$;

(ii) $a(x,y+z) = a(x,y) + a(x,z),\ \ \forall x \in X$ *e* $\forall y,z \in Y$;

(iii) $a(\alpha x,y) = \alpha a(x,y),\ \ \forall x \in X,\ \ \forall y \in Y$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

(iv) $a(x,\alpha y) = \overline{\alpha} a(x,y),\ \ \forall x \in X,\ \ \forall y \in Y$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a é chamada de forma bilinear.

Definição 2.18. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é*

(a) *coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}(a(x,x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$;*

(b) *contínua (limitada) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x,y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo par $(x,y) \in X \times Y$;*

(c) *hermitiana quando $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$, para todo $(x,y) \in X \times X$.*

Definição 2.19. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot,\cdot)_X$ um produto interno em X. A função $\|\cdot\|_X = (\cdot,\cdot)_X^{\frac{1}{2}}$, define uma norma em X. Esta norma é chamada de norma proveniente do produto interno $(\cdot,\cdot)_X$. Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ é chamado de espaço de Hilbert quando a norma $\|\cdot\|_H$ é proveniente de um produto interno em H.*

Teorema 2.20. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [19], página 242, Teorema 4.6-6. □

Teorema 2.21 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert real (complexo) e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva. Então, para todo f linear (antilinear) e limitado, existe um único $x \in H$ tal que $a(x,y) = \langle f, y\rangle, \quad \forall y \in H$.*

Demonstração. Para o caso real ver [9], página 140, Corolário 5.8 e para o caso complexo ver [28], página 595, Corolário 6.6.2. □

Definição 2.22. *Seja A um operador linear de um espaço de Banach X. Diz–se que A é um operador densamente definido quando seu domínio é denso em X*

Definição 2.23. *Seja A um operador linear de um espaço de Banach X. O conjunto formado pelos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador linear $(\lambda I_X - A)$ é inversível, seu inverso é limitado e densamente definido, é dito **conjunto resolvente** de A e representado por $\rho(A)$.*
*O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$ é chamado **espectro** de A. Para $\lambda \in \rho(A)$, denota-se por $R(\lambda, A) = (\lambda I_X - A)^{-1}$ o **resolvente** de A.*

Proposição 2.24. *Sejam A um operador linear fechado de um espaço de Banach X e $\lambda \in \rho(A)$. Então, $D(R(\lambda, A)) = X$. Em particular, $R(\lambda, A)$ é fechado.*

Demonstração. Ver [19], página 376, Teorema 7.3-2. □

2.4 ESPAÇOS L^p

No que segue, nesta seção abordaremos alguns resultados sobre os espaços L^p, onde tomaremos $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$

Definição 2.25. *Diz-se que uma propriedade vale quase sempre (q.s.) em um conjunto Ω, se o conjunto dos pontos onde ela não se verifica tem medida nula. Denota-se ainda a medida de Ω por $|\Omega|$.*

Definição 2.26. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $0 < p < \infty$. Seja $\mathscr{L}^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido de Lebesgue) em Ω, ou seja,*

$$\mathscr{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; \;\; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Dizemos que duas funções $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ são equivalentes $(f \sim g)$, se $f = g$ quase sempre em Ω.
Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto

$$L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega) \backslash \sim.$$

Para $p = \infty$ definimos $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é limitada quase sempre (q.s.) em } \Omega\}$.

Observação 3. Os elementos do conjunto $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções em $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Entretanto, é conveniente olhar esses elementos como sendo funções. Assim, escrevemos $f \in L^p(\Omega)$ no lugar de $[f] \in L^p(\Omega)$, admitindo que f é o representante da classe de equivalência.

Definição 2.27. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que um número real q é expoente conjugado de p quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ onde $p \in (1, \infty)$. Convenção $q = \infty$, $p = 1$.*

Lema 2.28. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b > 0$, então $a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.*

Demonstração. Ver [1], página 23, Lema 2.2. □

Lema 2.29. *Sejam a e b números reais não negativos e $0 < \lambda < 1$. Então,*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Demonstração. Ver [1], página 171, Lema 8.2.12. □

Lema 2.30. *(i) (Desigualdade de Young). Sejam A e B números reais não negativos, e seja $1 < p < \infty$ e q seu expoente conjugado. Usando o Lema 2.34 com $\lambda = \frac{1}{p}$, $a = A^p$ e $b = B^q$, obtém-se*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

(ii) (Desigualdade de Young com ε). Dados $a, b \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Demonstração. Ver [14], página 622, Seção B.2. $\square$

Teorema 2.31 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e sejam p e q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [9], página 92, Teorema 4.6. $\square$

Teorema 2.32 (Desigualdade de Minkowiski)**.** *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ e, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver em [19], páginas 13-15. $\square$

Proposição 2.33. *Suponha que $|\Omega| < \infty$ e que $1 \leq p \leq q \leq \infty$.*

(i) Se $f \in L^q(\Omega)$, então $f \in L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q(\Omega)};$$

(ii) Se $f \in L^\infty(\Omega)$, então

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [9]. $\square$

Observação 4. O item (i) da Proposição (2.33) significa que se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $L^q(\Omega)$ é imerso em $L^p(\Omega)$, isto é, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e a aplicação inclusão

$$i : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

é contínua. Neste caso, denota-se imersão por

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Definição 2.34. *Uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente integrável se*

$$\int_K f(x)dx < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto.}$$

Indica-se por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é localmente integrável, isto é,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_K |f(x)|^p < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

Corolário 2.35. *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega).$$

Demonstração. A demonstração segue dos resultados de imersões de Sobolev que podem ser encontrados em [10]. □

Definição 2.36. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O Suporte de ϕ é o conjunto*

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega| \;\; \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Denotamos por $C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega);\;\; \text{supp}(\phi) \;\;$ é compacto$\}$.

Proposição 2.37. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Então,*

(i) Se $0 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial;

(ii) O conjunto $L^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial;

(iii) Se $f \in L^p(\Omega)$, denotamos por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(\Omega)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 0 < p < \infty,$$

e para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|f(x)| := \inf\{c > 0; \;\; |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Demonstração. Ver [9], página 93, Teorema 4.7. □

Corolário 2.38. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.*

(i) Se $1 \leq p < \infty$, então a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^p(\Omega)$;

(ii) A função

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{ess}|f(x)|\end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9], página 93, Teorema 4.7. □

Teorema 2.39. *Se $1 \le p < \infty$. Os espaços $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ e $(L^\infty(\Omega), \|.\|_\infty)$ saõ espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno e norma definidos por*

$$(u,v)_2 = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx \ \ e \ \ \|u\|_2 = (u,u)_2^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Ver [9], página 93, Teorema 4.7. □

Teorema 2.40. *Se $1 < p \le \infty$, então $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [9], página 95, Teorema 4.10. □

Proposição 2.41. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $1 \le p < \infty$, então $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [9], página 96, Teorema 4.12. □

Corolário 2.42. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $1 \le p < \infty$, então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Demonstraçaõ análoga à Proposição 2.41, notando que $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ □

Proposição 2.43. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Então, $f(x) = 0$ para quase todo x em Ω.

Demonstração. Ver [10], página 17, Proposição 3 □

Proposição 2.44 (Lema de Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $u(x) = 0$ para quase todo x em Ω.

Demonstração. Ver [9], página 110, Corolário 4.24. □

Teorema 2.45. *Seja $1 < p < \infty$ e $q > 1$ o expoente conjugado de p. Então, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $1 \le p < \infty$, então $[L^p(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^q(\Omega)$. Em particular, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Ver [18], página 169, Teorema 6.2.1. □

Teorema 2.46. *O espaço $[L^1(\Omega)]'$ é isometricamente isomorfo ao espaço $L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [18], página 174, Teorema 6.3.2. □

Por abuso de notação, identifica-se os espaços isometricamente isomorfos acima descritos e, neste trabalho, indica-se por

$$[L^p(\Omega)]' = L^q(\Omega) \text{ para } 1 < p, q < \infty \ \text{ e } [L^1(\Omega)]' = L^\infty(\Omega).$$

Lema 2.47. *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) Seja E um espaço vetorial. Dado um subespaço vetorial G de E, se $g \in G'$, então existe $f \in E'$ tal que$f|_G = g$ (Corolário do Teorema de Hahn-Banach);

(ii) Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in (L^P(\Omega))'$, então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \text{ para toda } \ f \in L^p(\Omega);$$

(iii) Se $p = 1$ e $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx, \text{ para toda } \ f \in L^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver [9], página 97-99, Teorema 4.14. □

2.4.1 Espaços de Sobolev Unidimensionais

Esta seção define e caracteriza conceitos muito importantes relacionados aos espaços de Hilbert e/ou Banach que são utilizados ao longo do trabalho.

2.4.2 Os Espaços $W^{1,p}(I)$

Seja $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.48. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular $p = 2$, denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$, ou seja,

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I);\ \exists g \in L^2(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Observação 5. Dada $u \in W^{1,p}(I)$, a função g é chamada de derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$ e será denotada por u'.

Afirmação : A função u' é única a menos de um conjunto de medida nula. Com efeito, suponha que exista $h = u' \in L^p(I)$ que também é derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_I g\varphi dx = -\int_I u\varphi' dx = \int_I h\varphi dx,\ \forall \varphi \in C_0^1(I) \\ \Rightarrow \int_I (g-h)\varphi dx = 0,\ \forall \varphi \in C_0^1(I). \end{aligned}$$

Pela Lema de Du Bois Raymond tem-se que $g - h = 0$, q.s em I. Logo $h(x) = g(x)$ para quase todo x em I, como desejado.

Observação 6. (i) Na definição de $W^{1,p}(I)$ pode-se usar $\varphi \in C_0^\infty$ no lugar de $\varphi \in C_0^1$. Neste caso φ é chamada função teste;

(ii) Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e a derivada $u' \in L^p(I)$, então $u \in W^{1,p}(I)$ e a derivada usual u' coincide com a derivada fraca $g = u'$ de u em $W^{1,p}(I)$;

(iii) Se I é limitado, então $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$, e para qualquer que seja $I, C_0^1(I) \subset W^{1,p}(I)$.

Proposição 2.49. *(i) O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço vetorial normado, munido da norma (usual)*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I),\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, se $1 < p < \infty$, então podemos definir a norma

$$\|u\|_p = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p}$$

em $W^{1,p}(I)$, a qual é equivalente à norma usual;

(ii) O espaço $H^1(I)$ é um espaço vetorial com produto interno e norma definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (u,v)_{H^1} &= (u,v)_{L^2} + (u_x,v_x)_{L^2} = \int_I u\overline{v} dx + \int_I u_x \overline{v_x} dx,\ \ \forall u,v \in H^1(I) \\ \|u\|_{H^1} &= \left(\int_I |u|^2 dx + \int_I |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração dos itens (i) e (ii) seguem mostrando as propriedades de norma e produto interno para os espaços definidos. □

Teorema 2.50. *Os espaços $W^{1,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(I)$ uma sequência de Cauchy. Como

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u_m\|_{L^p} + \|u'_n - u'_m\|_{L^p},$$

então (u_n) e (u'_n) são sequências de Cauchy em $L^p(I)$, o qual é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Assim, existem $u, v \in L^p$ tais que $u_n \to u$ e $u' \to v$ em $L^p(I)$, ou seja, $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$ e $\|u'_n - v\|_{L^p} \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, note que para toda função $\varphi \in C_0^1(I)$ tem-se

$$\int_I u_n(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u'_n(x)\varphi(x)dx. \tag{2.1}$$

Deste modo, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_I u_n(x)\varphi'(x)dx - \int_I u(x)\varphi'(x)dx \right| &= \left| \int_I (u_n(x) - u(x))\varphi'(x)dx \right| \\ &\leq \int_I |u_n(x) - u(x)||\varphi'(x)|dx \\ &\leq \|u_n - u\|_{L^p}\|\varphi'\|_{L^p} \to 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_I u_n(x)\varphi'(x)dx \to \int_I u(x)\varphi' dx. \tag{2.2}$$

Analogamente, pode-se mostrar que

$$\int_I u'_n(x)\varphi(x)dx \to \int_I v(x)\varphi dx. \tag{2.3}$$

Sendo assim, de (2.1), (2.2) e (2.3) e pela unicidade do limite obtém-se

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I v(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^1(I),$$

isto é, $u \in W^{1,p}(I)$ e $v = u'$ é a derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$. Além disso,

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_{L^p} + \|u'_n - u'\|_{L^p} \to 0.$$

Portanto, $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$, de onde concluí-se que $W^{1,p}(I)$ é Banach. □

Teorema 2.51. *Os espaços $W^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Sabe-se que os espaços $L^p(I)$ são de Banach reflexivos para $1 < p < \infty$, assim como o espaço $X_p = L^p(I) \times L^p(I)$ é reflexivo. Agora defina o operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(I) &\to X_p = L^p(I) \times L^p(I) \\ u &\mapsto T(u) = (u, u') \end{aligned}$$

Tem-se que T é linear. Além disso, T é também uma isometria. De fato,

$$\|T(u)\|_{X_p} = \|(u, u')\| + X_p = \|u\|_{L_p} + \|u'\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Temos ainda que T é injetora. Com efeito,

$$u \in \ker(T) \Rightarrow \|T(u)\|_{X_p} = 0 \Rightarrow \|u\|_{W^{1,p}} = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \ker(T) = \{0\}.$$

Sendo $T : W^{1,p}(I) \to M = T(W^{1,p}(I))$ sobrejetora, conclui-se que T é um isomorfismo sobre sua imagem. Afirma-se que $M = T(W^{1,p}(I))$, subespaço vetorial de X_p, é fechado. De fato, seja $v \in \overline{M}$ então existe uma sequência $v_n = T(u_n) \in M$, com $u_n \in W^{1,p}(I)$, tal que $v_n = T(u_n) \to v$ quando $n \to \infty$ em X_p. Assim, (v_n) é de Cauchy em X_p, ou seja, $\|v_n - v_m\| \to 0$ se m e n tendem ao infinito. Como

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|T(u_n) - T(u_m)\|_{X_p} = \|T(u_n - u_m)\|_{X_p} = \|v_n - v_m\|_{W^{1,p}} \to 0,$$

então (u_n) é de Cauchy em $W^{1,p}(I)$, o qual é Banach. Logo existe $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$, e assim

$$\|v_n - T(u)\|_{X_p} = \|T(u_n) - T(u)\|_{X_p} = \|T(u_n - u)\|_{X_p} = \|u_n - u\|_{W^{1,p}} \to 0.$$

Então, $v_n \to T(u)$ em X_p, de onde segue que $v = T(u) \in M$. Portanto, $M = \overline{M}$, como desejado. Pela Proposição 2.13, $M = T(W^{1,p}(I))$ é reflexivo.
Afirmação : Com efeito, sejam $u_n \in W^{1,p}(I)$, $u_n \to u$ e $T(u_n) \to v$. Como $u \in W^{1,p}(I)$, $u_n \to u$ e $\|T(u_n) - T(u)\| \to 0$, então $T(u_n) \to T(u)$ e pela unicidade do limite $v = T(u)$. Como T é fechada, segue da Proposição 2.14 que $W^{1,p}(I)$ é reflexivo, $1 < p < \infty$.

□

Lema 2.52. *Seja $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que $\int_I f(x)\varphi'(x)dx = 0$, para toda $\varphi \in C^1_0(I)$. Então, existe uma constante C tal que $f = C$ quase sempre em I.*

Demonstração. Ver [9], páginas 204 e 205, Lema 8.1. □

Corolário 2.53. *Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' = 0$ quase sempre em I, então u é constante quase sempre em I.*

Demonstração. Observe que $u \in W^{1,p}(I) \subset L^p(I) \subset L^1_{loc}(I)$ e

$$\int_I u(x)\varphi'(x)dx = -\int_I u'(x)\varphi(x)dx = 0,$$

para todo $\varphi \in C^1_0(I)$, então pelo Lema 2.52 tem-se que u é constante quase sempre em I. □

Lema 2.54. *Seja $g \in L^1_{loc}(I)$. Para algum $y_0 \in I$, considere*

$$v(x) = \int_{y_0}^{x} g(t)dt, \text{com } x \in I.$$

Então, $v \in C(I)$ e $\int_I v(x)\varphi'(x)dx = -\int_I g(x)\varphi(x)dx$, para toda $\varphi \in C_0^1(I)$.

Demonstração. Ver [9], página 205, Lema 8.2. □

Observação 7. Como consequência do Lema 2.62 se $g, v \in L^p(I)$, então $v \in W^{1,p}(I)$. Mais ainda, se I for limitado, então $g \in L^p(I)$ implica em $v \in W^{1,p}(I)$.

Teorema 2.55. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$tal que $u = \tilde{u}$ quase sempre em I e $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt$, para quaisquer que sejam $x, y \in I$.*

Demonstração. Ver [9], página 204, Teorema 8.2. □

Proposição 2.56. *Seja $u \in L^p(I)$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(I)$*;*

(ii) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_I u(x)\varphi(x)dx \right| \leq C\|\varphi\|_{L^q}$$

sendo $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (C := \|u'\|_{L_p})$.

Demonstração. Ver [9], página 208, Proposição 8.5. □

Teorema 2.57 (Operador Extensão)**.** *Seja $1 \leq p < \infty$. Então, existe um operador linear e contínuo*

$$P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$$

chamado operador extensão, satisfazendo

(i) $Pu|_I = u, \forall u \in W^{1,p}(I)$;

(ii) $\|Pu\|_{L^p}(\mathbb{R}) \leq \|u\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I)$;

(iii) $\|Pu\|_{W^{1,p}}(\mathbb{R}) \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}$*, onde* $c = c(|I|), |I| \leq \infty$.

Demonstração. Ver [9], página 209, Teorema 8.6. □

Teorema 2.58 (Imersões de Sobolev)**.** *Tem-se que* *(i)* $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$, *para todo* $1 \leq p \leq \infty$, *com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante* $c = c(|I|), |I| \leq \infty$, *tal que* $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(I)$*;*

(ii) Se I *é limitado* ($|I| < \infty$)*, então* $W^{1,p}(I) \subset C(I)$*, para todo* $1 < p \leq \infty$*, com inclusão compacta;*

(iii) Se I *é limitado* ($|I| < \infty$)*, então* $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$*, para todo* $1 \leq q < \infty$*, onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, com inclusão compacta.*

Demonstração. Ver [9], páginas 212 a 214, Teorema 8.8. □

Teorema 2.59. *Seja* $u \in L^p(I) \cap W^{2,r}(I)$*, com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $1 \leq r \leq \infty$*. Então* $u \in W^{1,q}(I)$ *onde* q *é a média harmônica de* p *e* r*, ou seja,* $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$ *e*

$$\|u_x\|_{L^q} \leq C\|u\|_{W^{2,r}}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Ver [9], páginas 233 e 234. □

Corolário 2.60 (Derivação do produto)**.** *Sejam* $u, v \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então, temos* $uv \in W^{1,p}(I)$ *e* $(uv)' = u'v + uv'$*. Além disso, vale a fórmula de integração por partes*

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds.$$

Demonstração. Ver [9], página 215, Corolário 8.10. □

Corolário 2.61 (Derivação da composição)**.** *Sejam* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *e* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ *e* $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$*.*

Demonstração. Ver [9], páginas 215 e 216, Corolário 8.11. □

Proposição 2.62. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, consequentemente, contínuas)*

(a) $i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \to (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$*;*

(b) $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$*.*

Demonstração. Ver [1], páginas 168-172, Teorema 6.3. □

2.4.3 Os Espaços $W_0^{1,p}(I)$

Definição 2.63. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço* $W_0^{1,p}(I)$ *é dado por*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}}.$$

No caso de $p = 2$ *denotamos por*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Teorema 2.64. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$. *Então* $u \in W_0^{1,p}(I)$ *se, e somente se,* $u(x) = 0$ *para* $x \in \partial I$.

Demonstração. Ver [9], página 217, Teorema 8.12. □

Observação 8. (i) Os espaços $W_0^{1,p}(I)$ e $H_0^1(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$;

(ii) Se $1 < p \leq \infty$, então $W_0^{1,p}(I)$ são espaços de Banach;

(iii) Se $1 < p < \infty$, então $W_0^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos;

(iv) $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$;

(v) $C_0^\infty(I)$ é denso em $W_0^{1,p}(I)$, para qualquer $I \subset \mathbb{R}$.

Lema 2.65. *Seja* $I \subset \mathbb{R}$. *Os espaços* $W_0^{1,p}(I)$ *são densos em* $L^p(I)$, *para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Do Corolário 2.48 vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$, deste modo $L^p(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} \subset \overline{W_0^{1,p}(I)}^{L^p(I)} \subset L^p(I)$. Portanto, $L^p(I) = \overline{W_0^{1,p}(I)}^{L^p(I)}$.
Um resultado muito utilizado neste trabalho é para o caso $p = 2$, isto é, $\overline{H_0^1(I)}^{L^2(I)} = L^2(I)$. □

Teorema 2.66 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* I *um intervalo limitado. Então, existe* $C > 0$, *tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Demonstração. Ver [9], página 218, Proposição 8.13. □

Observação 9. Do Teorema 2.66 vem que $\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ define uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(I)$. Além disso, é possível mostrar que $C = |I|$.

2.4.4 Os Espaços $L^p_*(I)$ e $W^{1,p}_*(I)$

Definição 2.67. *Denotamos por $L^p_*(I)$ e $W^{1,p}_*(I)$, respectivamente, os espaços de média nula, em que*

$$L^p_*(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\}$$

e

$$W^{1,p}_*(I) = \left\{ u \in W^{1,p}(I);\ \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx = 0 \right\}. \tag{2.4}$$

No caso de $p = 2$ denotamos por

$$H^1_*(I) = W^{1,2}_*(I).$$

Observação 10. Os espaços $W^{1,p}_*(I)$ e $H^1_*(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$.

Teorema 2.68. *(i) Se $1 < p \leq \infty$, então $W^{1,p}_*(I)$ são espaços de Banach;*

(ii) Se $1 < p < \infty$, então $W^{1,p}_*(I)$ são espaços reflexivos;

(iii) $H^1_*(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.

Demonstração. As demonstrações dos itens (i)-(v) são consequências da Observação 10 e resultados de Análise Funcional que podem ser encontrados em [9] e [11]. □

Lema 2.69. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Os espaços $W^{1,p}_*(I)$ são densos em $L^p_*(I)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [33], Página 34, Lema 2.86. □

Teorema 2.70 (Desigualdade de Poincaré para espaço de medida nula)**.** *Seja I um intervalo limitado. Então, existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)},\ \ \forall u \in W^{1,p}_*(I),$$

onde $W^{1,p}_*(I)$ é dado em (2.4)*.*

Demonstração. Ver [33], Página 34, Teorema 2.87. □

Observação 11. Do Teorema 2.70 vem que $\|u\|_{W^{1,p}_*} = \|u'\|_{L^p}$ define uma norma equivalente em $W^{1,p}_*(I)$.

Notação 1. O dual dos espaços $W^{1,p}_0(I)$ com $1 \leq p < \infty$ e $H^1_0(I)$ serão denotados por $W^{-1,q}(I)$ e $H^{-1}(I)$, respectivamente, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.4.5 Os Espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$

Definição 2.71. *Dado $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$ são definidos como*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in L^p(I);\ \exists\, u', u'', ..., u^{(m)} \in L^p(I)\},$$

onde as funções $u', u'', ..., u^{(m)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem 1, 2,..., m, respectivamente. Além disso, se $u \in W^{m,p}(I)$

$$\int_I u D^j \varphi dx = (-1)^j \int_I u^{(j)} \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \ \ 1 \leq j \leq m,$$

onde D^j representa a derivada clássica de ordem j.

Observação 12. (i) $W^{m,p}(I)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|_{L^p(I)};$$

(ii) Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(I) = H^m(I)$ que é um espaço de Hilbert com o produto interno e norma dados por

$$(u,v)_{H^m(I)} = (u,v)_{L^2(I)} + \sum_{j=1}^{m} (D^j u, D^j v)_{L^2(I)},$$

$$\|u\|_{H^m(I)} = \left(\|u\|^2_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^{m} \|D^j u\|^2_{L^p(I)} \right)^{\frac{1}{2}};$$

(iii) Para $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Também podemos escrever

$$W^{m,p} = \{u \in W^{m-1,p}(I); \ \ u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Então, $W^{m,p}(I) \subset W^{1,p}(I), \ \ \forall m \geq 2$, com inclusão contínua.

Teorema 2.72. *(i) $W^{m,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;*

(ii) $W^{m,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$;

(iii) $H^m(I)$ é um espaço de Hilbert;

(iv) $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é dendo em $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [10]. □

Lema 2.73. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Então, $H_0^1(I) = \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)}$.*

Demonstração. Da Observação 10 item (iv) vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{H_0^1(I)} = H_0^1(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset H^2(I)$, deste modo,

$$H_0^1(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{H_0^1(I)} = \overline{C_0^\infty(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)} \subset \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)} \subset H_0^1(I).$$

Portanto, $H_0^1(I) = \overline{H_0^1(I) \cap H^2(I)}^{H_0^1(I)}$. □

Definição 2.74. *Dado $1 \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$ são definidos como*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I); u(x) = u'(x) = \cdots = u^{(m-1)}(x) = 0 \textit{ para } x \in \partial I\}$$

onde as funções $u', u'', \cdots, u^{(m-1)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem $1, 2, \cdots m-1$, respectivamente, da função u.
Em particular $H_0^2(I) = \{u \in H^2(I); u(x) = u'(x) = 0 \textit{ para } x \in \partial I\}$.

Observação 13. Os espaços $W_0^{m,p}(I)$ e $H_0^m(I)$ são subespaços de $W^{m,p}(I)$ $H^m(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{m,p}(I)$ $H^m(I)$.

Teorema 2.75. *(i) $W_0^{m,p}(I)$ são despaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;*

(ii) $W_0^{m,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$;

(iii) $H_0^m(I)$ é um espaço de Hilbert;

(iv) $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $W_0^{m,p}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver [10]. □

Lema 2.76. *Seja $I \subset \mathbb{R}$. Para $1 \leq p < \infty$, os espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$ são densos em $L^p(I)$.*

Demonstração. Do Corolário 2.48 vem que $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} = L^p(I)$, e sabe-se também que $C_0^\infty(I) \subset W^{m,p}(I) \subset L^p(I)$, deste modo $L^p(I) = \overline{C_0^\infty(I)}^{L^p(I)} \subset \overline{W^{m,p}(I)}^{L^p(I)} \subset L^p(I)$.
Portanto, $L^p(I) = \overline{W^{m,p}(I)}^{L^p(I)}$.
O caso $p = 2$, isto é, $L^2(I) = \overline{H^m(I)}^{L^2(I)}$, é um resultado que será muito utilizado neste trabalho.
De modo análogo mostra-se que $L^p(I) = \overline{H_0^m(I)}^{L^p(I)}$. □

2.5 SEMIGRUPOS LINEARES

A teoria de semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach tem um papel importante no estudo de Equações Diferenciais. Historicamente, teve seu grande avanço a partir de 1948 com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida, ver por exemplo Pazy [29]. Decorrente deste, temos o principal resultado do presente capítulo, a saber, o Teorema de Lumer-Phillips.

2.5.1 Definições e Propriedades

Definição 2.77. *Diz-se que uma aplicação $S : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

(i) $S(0) = I_X$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *para todos* $t, s \in [0,\infty)$;
Além disso, diz-se que o semigrupo S é de classe C_0, ou é um C_0-semigrupo, se

(iii) $\lim\limits_{t\to 0_+} \|S(t)x - x\|_X = 0,$ *para cada* $x \in X$.

Proposição 2.78. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então a função $t \mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em intervalos limitados.*

Demonstração. Basta provar para intervalos da forma $[0,T], T > 0.$ Pelo Princípio da Limitação Uniforme é suficiente provar que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)x\|_X < \infty, \forall x \in X.$$

De (iii) na Definição 2.77, existe $\delta > 0$ tal que $0 \leq t \leq \delta$ então

$$\|S(t)x - x\|_X \leq 1.$$

Consequentemente,

$$|\|S(t)x\|_X - \|x\|_X| \leq \|S(t)x - x\|_X \leq 1,$$

onde $\|S(t)x\|_X \leq 1 + \|x\|_X$, para todo $t \in [0,\delta]$. Isto prova que

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|S(t)x\|_X < \infty, \forall x \in X.$$

Logo, existe $M \geq 1$ satisfazendo

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < M.$$

Vamos provar que a limitação se estende a qualquer subintervalo $[0,t] \subseteq [0,T]$, mas com uma constante possivelmente diferente. Fixado $t \in [0,T]$, pode-se escrever $t = n\delta + r$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < \delta$. Logo da Proposição 2.78 e da Definição 2.77 (ii), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \|S(\delta)^n S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|S(\delta)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq M^n M.
\end{aligned}$$

□

Observação 14. Se $\omega = \dfrac{t-r}{\delta t}\ln(M)$, então $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$.

Corolário 2.79. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e $t_0 \in \mathbb{R}$, então*

$$\lim_{t\to t_0} S(t)x = S(t_0)x, x \in X.$$

Demonstração. Vamos calcular os limites laterais $t \to t_0^+$ e $t \to t_0^-$. Se $h \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\|S(t_0+h)x - S(t_0)x\|_X &= \|S(t_0)[S(h) - I_X]x\|_X \\ &\leq \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(h)x - x\|_X \to 0, \text{ quando} h \to 0.\end{aligned}$$

Se $h < 0$, então

$$\begin{aligned}\|S(t_0-h)x - S(t_0)x\|_X &= \|S(t_0-h)[I_X - S(h)]x\|_X \\ &\leq \|S(t_0-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(h)x - x\|_X \to 0, \quad \text{quando} \quad h \to 0,\end{aligned}$$

onde nos limites acima, uma parcela é limitada pela Proposição 2.78 e a outra tende a zero pela Definição 2.77. □

Observação 15. (i) O Corolário 2.79 mostra que $S(t)x \in C(\mathbb{R}_+, X)$, justificando o nome de semigrupo de classe C_0 em $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;

(ii) Na demonstração da Proposição 2.78 foi visto que, se $S(t)$ é um C_0-semigrupo, então existem números reais $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

A proposição a seguir refina ainda mais este resultado.

Proposição 2.80. *Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C_0. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} := \omega_0,$$

com $-\infty \leq \omega_0 < \infty$. Além disso, para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver em [29], página 4, Teorema 2.2. □

Definição 2.81. *Quando $\omega = 0$, tem-se que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, diz-se que $S(t)$ é um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disto, $M = 1$, $S(t)$ é dito um semigrupo de contrações.*

2.5.2 Gerador Infinitesimal de um C_0-semigrupo

Definição 2.82. *Seja $S(t)$ um C_0-semigrupo em X. O operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h\to 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h\to 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x, \ \ x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal $(g.i.)$ do semigrupo $S(t)$.

Observação 16. $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Proposição 2.83. *Sejam $S(t)$ um C_0-semigrupo e A seu g.i. As seguintes propriedades são válidas:*

(i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{dS}{dt}(t)x = AS(t)x = S(t)Ax,\ \forall t \geq 0;$$

(ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Axd\xi,\ 0 \leq s \leq t;$$

(iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\xi)xd\xi \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t S(\xi)xd\xi \right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Ver [29], página 5, Teorema 2.4. □

Proposição 2.84. *Sejam S um C_0-semigrupo e A seu $g.i.$. Então, $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Ver [29], página 6, Teorema 2.5. □

Observação 17. A Proposição 2.84 nos dá condições necessárias para que um operador A seja o $g.i.$ de algum semigrupo de classe C_0. A partir de agora será investigado condições suficientes para que um operador A seja $g.i.$ de um C_0-semigrupo. A importância desta caracterização se dá no item (i) da Proposição 2.83, uma vez que, se A for o $g.i.$ de um C_0-semigrupo $S(t)$, então poderemos estudar problemas de valor inicial, tal conceito será abordado logo após o Teorema de Lumer-Phillips.

2.5.3 Teorema de Hille-Yosida

Teorema 2.85 (Hille-Yosida). *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ um operador linear. Então, A é g.i. de um C_0-semigrupo se, e somente se, são válidas*

(i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X;

(ii) existem números reais M e ω tais que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > \omega$, temos $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\rho(A)$ e $R(\lambda, A)$. Neste caso,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \;\; t > 0.$$

Demonstração. Ver [29], página 20, Teorema 5.2. □

O Teorema 2.85 nos dá condições necessárias e suficientes para a caracterização de um C_0-semigrupo, mas a verificação de suas hipóteses não são simples. Deste modo, serão apresentados na próxima seção alguns resultados preliminares para a verificação de um resultado muito importante para este trabalho, o qual decorre do Teorema de Hille-Yosida. Além disso, a verificação de suas hipóteses são bem mais simples como veremos.

2.5.4 Teorema de Lumer-Phillips

Definição 2.86. *Escrevemos $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que o operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t)$ que satisfaz*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega t}, \;\; t \geq 0.$$

Observação 18. (i) No caso em que $\omega = 0$, temos que $A \in G(M, 0)$ e significa que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo limitado com

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \;\; t \geq 0;$$

(ii) No caso particular em que $M = 1$, e $\omega = 0$, então $A \in G(1, 0)$, significa que A é g.i. de um C_0-semigrupo de contrações, pois

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \;\; t \geq 0.$$

Proposição 2.87 (Hille-Yosida para Contrações). *Um operador linear A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações $(A \in G(1, 0))$ se, e somente se,* *(i) A é um operador linear fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = A$;*

(ii) Para todos $\lambda > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, temos

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [29], página 8, Teorema 3.1. □

Proposição 2.88. *$A \in G(M, \omega)$ se, e somente se, $(A - \omega I_X) \in G(M, 0)$.*

Demonstração. Ver [33], página 47, Proposição 3.12. □

Definição 2.89. *Uma aplicação dualidade, é qualquer aplicação $j : X \longrightarrow X'$ tal que para cada $x \in X$, temos $j(x) \in F_x$, onde*

$$F_x = \left\{x^* \in X'; \langle x^*, x\rangle_{X',X} = \|x^*\|^2_{X'} = \|x\|^2_X\right\}.$$

Observação 19. Note que o conjunto $F_x \neq \emptyset$ devido ao Teorema de Hahn-Banach.

Definição 2.90. *Um operador linear A é dito dissipativo relativamente à aplicação dualidade j, se*

$$Re\langle j(x), Ax\rangle_{X',X} \leq 0, \ \ \forall x \in D(A). \tag{2.5}$$

Se A é um operador dissipativo (relativamente à alguma aplicação dualidade) e, além disto, $\mathrm{Im}\,(I_X - A) = X$, dizemos que A é m-dissipativo.

Lema 2.91. *Se A é dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade, então*

$$\|(\lambda I_X - A)x\| \geq Re\lambda\|x\|_X, \forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in D(A).$$

Demonstração. Ver [29], página 14, Teorema 4.2. □

Teorema 2.92. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear dissipativo. Se $\mathrm{Im}\,(\lambda_0 I - A) = H$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\mathrm{Im}\,(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [29], página 15, Teorema 4.5. □

Lema 2.93. *Seja $A : D(A) \subseteq X \to X$ fechado e dissipativo relativamente à alguma aplicação dualidade. Então, $\rho(A) \cap (0, \infty)$ é aberto em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver [29], página 15. □

Teorema 2.94. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador dissipativo tal que $\mathrm{Im}\,(I - A) = X$. Se X é um espaço reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [29], página 16, Teorema 4.6. □

Teorema 2.95 (Lumer-Phillips)**.** *Se A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações em espaços de Banach, então*

(i) A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade;

(ii) $\operatorname{Im}(\lambda I_X - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ é denso em X;

(iv) A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade;

(v) $\operatorname{Im}(\lambda_0 I_X - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,

então A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [29], página 14, Teorema 4.3. □

Observação 20. As aplicações dos próximos capítulos serão realizadas em espaços de Hilbert

$$(H, (\cdot,\cdot)_H, \|\cdot\|_H).$$

Deste modo, nos próximos capítulos utilizamos a aplicação dualidade $j(x) = x$. Neste caso, (2.5) resumimos a $\operatorname{Re}(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A)$.

O Teorema 2.96, é um resultado muito importante e bastante utilizado na parte de existência dos problemas apresentados nos próximos capítulos. Esse resultado é consequência do Teorema 2.95 com a dualidade definida na Observação 20.

Teorema 2.96. *(Lumer-Phillips 1) Se A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações em espaços de Hilbert $(H, (\cdot,\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$, então*

(i) A é dissipativo, isto é, $\operatorname{Re}(Ax, x)_H \leq 0, \ \forall x \in D(A)$;

(ii) $\operatorname{Im}(\lambda I_H - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.

Reciprocamente, se

(iii) $D(A)$ é denso em H;

(iv) A é dissipativo;

(v) $\operatorname{Im}(\lambda_0 I_H - A) = H$, para algum $\lambda_0 > 0$,

então A é um $g.i.$ de um C_0-semigrupo de contrações.

Demonstração. A demontração segue do Teorema 2.95. □

Corolário 2.97. *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se $0 \in \rho(A)$, então A é um g.i. de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

Demonstração. Ver [23], página 88, Teorema 2.12.3. □

O Corolário 2.97, consequência do Teorema 2.96, é também um resultado muito utilizado no Capítulo 3. Além disso, de posse de toda a teoria descrita anteriormente, estamos aptos a considerar um resultado de existência e unicidade para problemas de valores iniciais abstratos. Em outras palavras, a teoria de semigrupos nos permite estudar problemas de valor inicial para equações de evolução abstratas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(u(t)), \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach (ou Hilbert) e $u : \mathbb{R}^+ \to X$.

Definição 2.98. *Um sistema de equações diferenciais é chamado autônomo, quando suas equações não dependem explicitamente da variável temporal t. E dizemos que o mesmo é não autônomo em caso contrário.*

Observação 21. No caso do sistema 2.6 temos um problema autônomo, visto que $A = A(u(t))$ não depende explicitamente da variável temporal t. Por outro lado, se tivéssemos $A = A(t, u(t))$, então teríamos um problema não autônomo, cuja resolução via teoria de semigrupo dependeria da relação de A com respeito a variável temporal.

Definição 2.99. *Diz-se que $u : [0, \infty) \to X$ é uma solução (ou solução clássica) para o problema (2.6) se $u(t)$ é contínua para todo $t \in [0, \infty), u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \infty)$, $u(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz 2.6 quase sempre em $[0, \infty)$. No caso em que $x \in X$, a função $u \in C([0, \infty), X)$ dada por $u(t) = S(t)x, t \geq 0$, é chamada de solução generalizada ("mild solution") de (2.6).*

No âmbito de determinar soluções (clássica e generalizada) para PVI's do tipo (2.6), o próximo resultado mostra a importância em caracterizar um $g.i.$ A de um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$.

Teorema 2.100. *Considere o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(u(t)), \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Se A é o g.i. de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X, então para cada $u_0 \in D(A)$ ($u_0 \in X$), existe uma única função na classe

$$u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X) \ \big(u \in C([0,\infty), X)\big),$$

que é solução clássica (generalizada) do PVI (2.7)*, dada por $u(t) = S(t)u_0$. Além disso, se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ for um C_0-semigrupo de contrações, temos que*

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \ \ e \ \ \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Demonstração. Ver [9], página 185, Teorema 7.4. □

Observação 22. O problema (2.7) também pode ser abordado sob o ponto de vista de operadores maximais monótonos, ver por exemplo [8, Capítulo 8] ou [12, Capítulo 3]. Neste caso, o problema (2.7) é abordado na forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + B(u(t)) = 0, \ \ t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

com $B := -A$. Portanto, as propriedades obtidas para o operador A se refletem para $-B$ e vice-versa.

2.5.5 Resultados de Estabilidade

O primeiro resultado é uma versão já adaptada para espaços de Hilbert e fornece uma caracterização de estabilidade exponencial para C_0-semigrupos de contrações, ver por exemplo os artigos [17, 31] ou o livro [22, Teorema 1.3.2]. A partir deste momento, e^{At} indica um C_0-semigrupo cujo g.i. é o operador A.

Teorema 2.101 (Prüss)**.** *Um C_0-semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ definido em um espaço de Hilbert H é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições a seguir*

$$(i) \quad i\mathbb{R} \subseteq \rho(A); \tag{2.8a}$$

$$(ii) \quad \limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \tag{2.8b}$$

Demonstração. Ver [17, 31, 22]. □

O resultado seguinte é bem peculiar da teoria de semigrupos lineares. O mesmo pode ser usado para mostrar que o resolvente $\rho(A)$ de um operador linear A contém o eixo imaginário $i\mathbb{R}$, hipótese fundamental na estabilidade de semigrupos e requerida no Teorema 2.101. No que segue apresentaremos uma versão que resume dois resultados do livro de Engel and Nagel [13], a saber, o Corolário 1.15 e Proposição 5.8. Vejamos:

Teorema 2.102. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com conjunto resolvente $\rho(A)$ não vazio.*

B1. *O operador A tem resolvente compacto (isto é, existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda I_d - A)^{-1}$ é compacto) se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \to (X, \|\cdot\|_X)$ é compacta.*

B2. *Se o operador A possui resolvente compacto, então o espectro $\sigma(A)$ de A é composto apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Ver [13], página 107, Proposição 5.8 e Corolário 1.15.

□

2.6 Problemas Variacionais

Nesta seção, separamos alguns resultados úteis de unicidade de solução para alguns problemas variacionais, as quais serão utilizados nas Seções 3.4, 3.5 e 3.6 do capítulo seguinte. A partir deste momento, usaremos $\|\cdot\|$ para indicar $\|\cdot\|_{L^2(0,L)}$.

Lema 2.103. *Sejam $g_1 \in L^2(0,L)$ e $g_2 \in L^2(0,L)$(ou $L^2_*(0,L)$) e $M_1, M_2 > 0$. Então, existe um único par (φ, ψ) no espaço $H^1_0(0,L) \times H^1_0(0,L)$ (respectivamente, $H^1_0(0,L) \times H^1_*(0,L)$) de tal forma que,*

$$\begin{cases} M_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0,L), \\ M_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 & \text{em } L^2(0,L) \ (\text{ou } L^2_*(0,L)), \end{cases} \tag{2.9}$$

e ainda, $\psi \in H^2(0,L)$, com $\psi_x \in H^1_*(0,L)$ no caso em que $g_2 \in L^2_*(0,L)$.

Demonstração. Para provarmos o resultado de forma mais rápida, consideremos os seguintes espaços,

$$\Lambda_1 := H^1_0(0,L) \times H^1_0(0,L)$$

e

$$\Lambda_2 := H^1_0(0,L) \times H^1_*(0,L).$$

Feito isso, observe que podemos associar a (2.9) o seguinte problema variacional,

$$\int_0^L \left[M_1\varphi\overline{\tilde{\varphi}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + M_2\psi\overline{\tilde{\psi}} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}\right]dx = \int_0^L \left[g_1\overline{\tilde{\varphi}} + g_2\overline{\tilde{\psi}}\right]dx, \tag{2.10}$$

mostraremos que existe um único par $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \Lambda_j$ com $j = 1, 2$, satisfazendo (2.10). Definindo $\tilde{\mathcal{H}}_j = \Lambda_j$ e considerando a seguinte forma sesquilinear

$$a : \Lambda_j \times \Lambda_j \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por,

$$
\begin{aligned}
((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))\mapsto a((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})) &= M_1(\varphi,\tilde{\varphi})+k(\varphi_x+\psi,\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi})\\
&+ M_2(\psi,\tilde{\psi})+b(\psi_x,\tilde{\psi}_x).
\end{aligned}
$$

Note que a é contínua e coerciva, pois usando as desigualdades de Poincaré, Cauchy-Schwarz e Triangular, vem que

$$
\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}))| &\leq M_1\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\|+k\|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\|+M_2\|\psi\|\|\tilde{\psi}\|+b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|\\
&\leq k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+k\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}\|+k\|\psi\|\|\tilde{\psi}\|+k\|\psi\|\|\tilde{\varphi}_x\|\\
&+ M_1\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\|+M_2\|\psi\|\|\tilde{\psi}\|+b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|\\
&\leq k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|+kL^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|+kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|\\
&+ M_1L^2\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+M_2L^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|+b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|\\
&= (M_1L^2+k)\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}\|+(b+kL^2+M_2L^2)\|\psi\|\|\tilde{\psi}\|\\
&+ kL\|\psi\|\|\tilde{\varphi}_x\|\\
&\leq C_1(\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}\|+\|\psi\|\|\tilde{\psi}\|+\|\psi\|\|\tilde{\varphi}_x\|)\\
&= (\|\varphi_x\|+\|\psi\|)(\|\tilde{\varphi}_x\|+\|\tilde{\psi}\|)\\
&= C_1\|(\varphi,\psi)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_j}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_{\tilde{\mathcal{H}}_j},
\end{aligned}
$$

onde $C_1=\max\{M_1L^2+k, b+kL^2+M_2L^2, kL\}$, mostrando que a é continua. Note ainda que tomando $C_2=\min\{\frac{b}{4},\frac{k}{4},\frac{M_2}{4}\}$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)) &= M_1\|\varphi\|^2+M_2\|\psi\|^2+k\|\varphi+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2\\
&\geq k\|\varphi+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2+M_2\|\psi\|^2\\
&= 4\left[\frac{k}{4}\|\varphi+\psi\|^2+\frac{b}{4}\|\psi_x\|^2+\frac{M_2}{4}\|\psi\|^2\right]\\
&\geq C_2\big[4\|\varphi+\psi\|^2+4\|\psi_x\|^2+4\|\psi\|^2\big]\\
&\geq C_2\big[\|\varphi+\psi\|+\|\psi_x\|+\|\psi\|\big]^2\\
&\geq C_2\big[\|\varphi\|-\|\psi\|+\|\psi_x\|+\|\psi\|\big]^2\\
&= C_2\big[\|\varphi\|+\|\psi_x\|\big]^2\\
&= C_2\|(\varphi,\psi)\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}_j},
\end{aligned}
$$

mostrando assim que a é coerciva.

Agora, consideremos o seguinte funcional antilinear,

$$
\begin{aligned}
F:\Lambda_j &\longrightarrow \mathbb{C}\\
(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) &\mapsto F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=\int_0^L\big[g_1\overline{\tilde{\varphi}}+g_2\overline{\tilde{\psi}}\big]dx.
\end{aligned}
$$

Observe que F é contínua (consequentemente limitada), pois

$$
\begin{aligned}
|F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})| &= |(g_1,\tilde{\varphi})+(g_2,\tilde{\psi})| \\
&\leq L\|g_1\|\|\tilde{\varphi}_x\| + L\|g_2\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
&\leq C_3\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\|_{\tilde{\mathcal{H}}_j},
\end{aligned}
$$

onde $C_3 = \max\{L\|g_1\|, L\|g_2\|\}$. Portanto, $F \in \Lambda_j'$. Dessa forma, usando o Teorema 2.21, temos que existe um único par $(\varphi,\psi) \in \Lambda_j$ satisfazendo (2.10), ou ainda,

$$
a((\varphi,\psi),(\varphi,\psi)) = F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}),\ \forall(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) \in \Lambda_j.
$$

Consideremos agora $(\varphi,\psi) \in \Lambda_j$ solução de (2.9), tomando $\tilde{\varphi} = \gamma \in C_0^1 \subset H_0^1$ e $\tilde{\psi} = 0$ em (2.10), temos

$$
\int_0^L \big[M_1\varphi\overline{\gamma} + k(\varphi_x+\psi)\overline{\gamma_x}\big]dx = \int_0^L g_1\overline{\gamma}dx,
$$

ou seja,

$$
\int_0^L \varphi_x\overline{\gamma_x}dx = -\frac{1}{k}\int_0^L \big[M_1\varphi - g_1 - k\psi_x\big]\overline{\gamma}dx,\ \forall\gamma \in C_0^1(0,L). \tag{2.11}
$$

Como vale (2.11) para $\varphi_x, M_1\varphi - g_1 - k\psi_x \in L^2(0,L)$, segue da definição de derivada fraca que $\varphi_x \in H^1(0,L)$, ou seja, $\varphi \in H^2(0,L)$, e ainda

$$
k\varphi_{xx} = M_1\varphi - g_1 - k\psi_x \text{ em } L^2(0,L).
$$

Na sequência, trataremos os caos $j=1$ e $j=2$ separadamente.

Caso $j = 1$: Note que o caso $\psi \in H_0^1$ segue de forma inteiramente análoga. De fato, tomando $\tilde{\psi} = \xi \in C_0^1(0,L)$ e $\tilde{\varphi} = 0$ em (2.10), temos

$$
\int_0^L \big[M_2\psi\overline{\xi} + k(\varphi_x+\psi)\overline{\xi} + b\psi_x\overline{\xi_x}\big]dx = \int_0^L g_2\overline{\xi}dx,
$$

ou seja,

$$
\int_0^L \psi_x\overline{\xi_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L \big[M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x+\psi)\big]\overline{\xi}dx,\ \forall\xi \in C_0^1(0,L). \tag{2.12}
$$

Como vale (2.12) para $\psi_x, M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x+\psi) \in L^2(0,L)$, segue da definição de derivada fraca que, $\psi_x \in H^1(0,L)$, implicando em $\psi \in H^2(0,L)$, e ainda

$$
b\psi_{xx} = M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x+\psi) \text{ em } L^2(0,L).
$$

<u>Caso $j = 2$:</u> Agora, tomando $\beta \in C^1(0, L)$, note que $\tilde{\beta} = \beta - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx$ é tal que $\tilde{\beta} \in H^1_*(0, L)$, dessa forma, tomando $\tilde{\psi} = \tilde{\beta} \in H^1_*(0, L)$ e $\tilde{\varphi} = 0$ em (2.10), obtemos

$$\int_0^L \left[M_2\psi\overline{\tilde{\beta}} + k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\beta}} + b\psi_x\overline{\tilde{\beta}_x}\right]dx = \int_0^L g_2\overline{\tilde{\beta}}dx,$$

ou seja,

$$\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\beta}_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L \left[M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi)\right]\overline{\tilde{\beta}}dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \psi_x\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L \left[M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi)\right]\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx.$$

Como $g_2, \psi \in H^1_*$, $\overline{\left(\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx\right)_x} = 0$, $\varphi \in H^1_0$ e $C^1_0 \subset C^1$, em particular, para $\beta \in C^1_0$, segue que

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L \left[M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi)\right]\overline{\beta}dx, \ \forall \beta \in C^1_0(0, L). \tag{2.13}$$

Como vale (2.13) para $\psi_x, M_2\psi - g_2 - k(\varphi_x + \psi) \in L^2(0, L)$, segue da definição de derivada fraca que, $\psi_x \in H^1(0, L)$, implicando em $\psi \in H^2(0, L)$, e ainda,

$$b\psi_{xx} = M_2\psi - g_2 + k(\varphi_x + \psi) \text{ em } L^2(0, L).$$

O que nos fornece que

$$g_2 = M_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) \text{ em } L^2(0, L). \tag{2.14}$$

Substituindo (2.14) em (2.13) e usando integração por partes, obtemos

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\beta}dx$$
$$\Rightarrow \int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\int_0^L \psi_{xx}\overline{\beta}dx = -\psi_x\beta\Big|_0^L + \int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx$$
$$\Rightarrow -\psi_x\beta\Big|_0^L = -\psi_x(L)\beta(L) + \psi_x(0)\beta(0) = 0, \ \forall \beta \in C^1(0, L),$$

como $\beta \in C^1(0, L)$, tomando $\beta(L) = 0$ e $\beta(0) = 1$, temos que $\psi_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\beta(L) = 1$ e $\beta(0) = 0$, vem que $\psi_x(L) = 0$, ou seja, $\psi_x \in H^1_0(0, L)$. O que conclui a prova do lema em ambos os casos. $\square$

No que segue, apresentaremos um resultado no caso particular em que $M_1 = M_2 = 0$.

Lema 2.104. *Sejam* $g_1 \in L^2(0,L)$ *e* $g_2 \in L^2(0,L)$*(ou* $L^2_*(0,L)$*). Então, existe um único par* (φ, ψ) *no espaço* $H^1_0(0,L) \times H^1_0(0,L)$ *(respectivamente,* $H^1_0(0,L) \times H^1_*(0,L)$*) de tal forma que,*

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \textit{em } L^2(0,L), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 & \textit{em } L^2(0,L) \ (\textit{ou}\, L^2_*(0,L)), \end{cases}$$

e ainda, $\psi \in H^2(0,L)$*, com* $\psi_x \in H^1_*(0,L)$ *no caso em que* $g_2 \in L^2_*(0,L)$*.*

Demonstração. Segue de maneira exatamente análoga ao Lema 2.103, considerando
$M_1 = M_2 = 0$. $\square$

3 APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Neste Capítulo, será utilizada a teoria estudada no Capítulo 2, juntamente com as ferramentas apresentadas no Capítulo 1, para resolver diversos problemas de valores inicial e de fronteira envolvendo equações diferenciais lineares da física-matemática. Em cada caso, será apresentada uma breve dedução do modelo e, em seguida, o resultado de existência, unicidade e estabilidade exponencial via semigrupos lineares. Por comodidade, omitiremos o subíndice $L^2(0, L)$ e denotaremos o produto interno em $L^2(0, L)$ apenas por $(\cdot, \cdot)$. No caso da norma usaremos a notação $\|\cdot\|$.

3.1 EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

A equação do calor é uma equação diferencial parcial que descreve a difusão de calor em um meio contínuo. Essa equação descreve como a temperatura muda com o tempo em um meio, devido ao fluxo de calor através dele. A solução dessa equação é muito importante em diversas áreas da física e da engenharia, como a análise de transferência de calor em materiais sólidos, a modelagem do clima, a previsão do tempo, a engenharia de materiais e a termodinâmica.

Utilizaremos como principal referência para dedução do modelo [16] [33], considerando as mesmas hipóteses e notações adotadas.

Estamos tomando como domínio $(0, L) \times (0, \infty)$. Como estamos assumindo que nas extremidades da barra, 0 e L não tem variação de temperatura, temos a seguinte condição de fronteiras,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

a qual é chamada também de condição de fronteira de Dirichlet. Consideraremos também uma condição inicial, a qual é fornecida no instante $t = 0$ e previamente conhecida, sendo assim, denotaremos tal condição por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L).$$

No que segue, apresentaremos um resultado de existência e unicidade de solução para o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF). Assumiremos por simplicidade que $K = 1$, ou seja, consideraremos a equação do calor normalizada.

3.1.1 Existência e Unicidade

Por intermédio do modelo da equação do calor feito em [16] [33], consideremos o seguinte problema,

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.1}$$

Prosseguindo, mostraremos que o sistema (3.1) possui uma única solução, faremos tal exposição utilizando a teoria de semigrupos lineares. Dessa forma, consideremos o seguinte operador diferencial $A = \partial_{xx}$ e a função vetorial $U(t) = u(\cdot, t)$. Assim, podemos reescrever (3.1) como o seguinte problema de Cauchy abstrato de primeira ordem:

$$\begin{cases} U_t = AU, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0 := u_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

A fim de contemplar a condição de fronteira em (3.1), consideremos o seguinte espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0,L)$, com protudo interno e norma dados por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = (u, \hat{u}) \qquad \text{e} \qquad \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|^2 = (u,u),$$

para todos $U = u$, $\hat{U} = \hat{u} \in \mathcal{H}$, onde $(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$ designam o produto interno e a norma em $L^2(0,L)$, definidos no Teorema 2.39 do Capítulo 2, juntamente com o dominio do operador A dado por,

$$D(A) = H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L).$$

Feito essas considerações, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (3.2) possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$.

Demonstração. Em virtude do Teorema 2.100, basta provar que o operador linear $A = \partial_{xx}$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$ em $\mathcal{H}$, e a solução de (3.2) é da forma $u(t) = S(t)u_0$. Para isso, face ao Corolário 2.97, basta verificar as seguintes condições:

(i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$;

(ii) A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) $0 \in \rho(A)$.

A veracidade do item (i) segue imediatamente do Lema 2.65 e Lema 2.76

(ii) Seja $U \in D(A) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$, assim, integrando por partes e usando $(3.1)_2$, temos

$$(AU,U)_{\mathcal{H}} = (u_{xx},u) = \int_0^L u_{xx}\overline{u}dx = -\int_0^L u_x\overline{u_x}dx = -\|u_x\|^2.$$

Assim,

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -\|u_x\|^2 \leq 0.$$

Portanto, A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Agora mostraremos que $0 \in \rho(A)$, ou seja, que o operador $-A$ é invertível com inverso limitado. De fato, dado $f \in \mathcal{H}$, mostraremos que a equação $-AU = f$ possui uma única solução $U \in D(A)$. Equivalentemente, vamos provar que existe uma única solução $u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ para equação

$$-u_{xx} = f \quad \text{em} \quad L^2(0,L). \tag{3.3}$$

Com efeito, consideremos

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) &\to \mathbb{C} \\ (u,v) &\mapsto a(u,v) = (u_x,v_x) = \int_0^L u_x\overline{v_x}dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F : H_0^1(0,L) &\to \mathbb{C} \\ v &\mapsto F(v) = (f,v) = \int_0^L f\overline{v}dx. \end{aligned}$$

Note que $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva, pois

$$|a(u,v)| = |(u_x,v_x)| \leq \|u_x\|\|v_x\| = \|u\|_{H_0^1(0,L)}\|v\|_{H_0^1(0,L)}, \forall u,v \in H^1(0,L),$$

e

$$|a(u,u)| = |(u_x,u_x)| = \|u_x\|^2 = \|u\|^2_{H_0^1(0,L)},\ \forall u \in H_0^1(0,L).$$

Além disso, é facil verificar que F é antilinear, e ainda, da Desigualdade de Pincaré obtemos

$$|F(v)| = |(f,v)| \leq \|f\|\|v\| \leq C\|v\|_{H_0^1(0,L)},\ \forall v \in H_0^1(0,L),$$

onde $C = L\|f\|$. Logo, $F \in H^{-1}(0,L)$. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in H_0^1(0,L)$ tal que

$$a(u,v) = F(v), \forall\ v\ H_0^1(0,L),$$

ou ainda, existe uma única $u \in H_0^1(0,L)$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_0^L u_x(x)\overline{v_x(x)}dx = \int_0^L f(x)\overline{v(x)}dx, \forall v \in H_0^1(0,L). \tag{3.4}$$

Em particular, a equação (3.4) é satisfeita para toda $v \equiv \varphi \in C_0^1(0,L)$, isto é

$$\int_0^L u_x(x)\overline{\varphi_x(x)}dx = -\int_0^L (-f(x))\overline{\varphi(x)}dx, \forall \varphi \in C_0^1(0,L).$$

Como $u_x, f \in L^2(0,L)$, segue da definição de derivada fraca que

$$u_{xx} = (u_x)_x = -f \in L^2(0,L).$$

Logo, $u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ é a única solução de (3.3) como desejado. Logo $-A$ é invertível. Resta provar que $(-A)^{-1}$ é limitado. Para tanto, considere $U \in D(A)$ a única solução de $-AU = F \in \mathcal{H}$. Então, usando o fato de que $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, obtemos

$$\|(-A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} = \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\|AU\|_{\mathcal{H}} = C_1\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Isto mostra o desejado e, portanto, a condição (iii) fica provada. A prova do Teorema (3.1) está completa □

3.1.2 Estabilidade Exponencial

Posteriormente, verificaremos a estabilidade exponencial do sistema (3.2) empregando o Teorema 2.101.

Teorema 3.2. *Sob as notações anteriores e hipóteses do Teorema 3.1, o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *correspondente ao sistema (3.1) é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $C, \omega > 0$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\omega t}, \ \ t \geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ *de (3.2) satisfaz*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.101, devemos mostrar 2.8 para o operador $A = \partial_{xx}$, ou seja, que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ e $\lim\limits_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$, onde $\rho(A)$ designa o conjunto resolvente do operador A. Mostraremos primeiramente que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.
Como $D(A) = H^2(0,L) \cap H_0^1(0L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,L)$, então $\sigma(A)$ é formado apenas por autovalores de A, onde $\sigma(A)$ designa o espectro do operador A. Suponha que $i\mathbb{R} \nsubseteq \rho(A)$. Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \notin \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Portanto, $i\beta \in \sigma(A)$. Considere $0 \neq U \in D(A)$

autovetor associado a β, isto é, $AU = -i\beta U$. Então, tomando o produto interno com U em $\mathcal{H} = L^2(0, L)$ e, em seguida, tomando a parte real, obtemos

$$Re(i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (AU, U)_{\mathcal{H}}) = 0.$$

Assim, da dissipatividade do Problema (3.1), temos

$$Re(-AU, U)_{\mathcal{H}} = \|u_x\|^2 = 0.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, concluímos que $U = 0$, o que é um absurdo. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.
Mostraremos agora que

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Como vimos, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$, assim, vale que dada $F \in \mathcal{H}, \exists! U \in D(A)$ tal que

$$(i\beta I_d - A)U = F \Leftrightarrow U = (i\beta I_d - A)^{-1}F.$$

Desse modo,

$$\|(i\beta I_d - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}}=1; F\in\mathcal{H}} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C,$$

ou seja, é suficiente mostrar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Dada $F \in \mathcal{H}$, seja $U \in D(A)$ solução da equação resolvente $i\beta U - AU = F$. Tomando o produto interno com U em $\mathcal{H} = L^2(0, L)$ e a parte real, obtemos

$$Re(i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (AU, U)_{\mathcal{H}}) = Re(F, U)_{\mathcal{H}},$$

e ainda, pela dissipatividade de A, segue que

$$\|u_x\|^2 = Re(F, U)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré e Young com $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, concluímos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L^2\|U_x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{L^2}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq L\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, segue do Teorema de Prüss (ver Teorema 2.101) que o sistema (3.1) é exponencialmente estável. □

3.2 EQUAÇÃO DA ONDA COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL (FRACA)

A equação da onda descreve a propagação de ondas em um meio físico, e é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que descreve a relação entre a curvatura da onda e sua velocidade de propagação. A equação da onda tem origem na física, mais especificamente na teoria das ondas eletromagnéticas. Ela foi desenvolvida inicialmente por Jean-Baptiste le Rond d'Alembert em 1746 para descrever a propagação de ondas sonoras no ar, a qual posteriormente foi refinada por outros matemáticos como Daniel Bernoulli e Joseph Louis Lagrange.

No que segue, adotaremos a dedução do modelo de ondas, notações e considerações físicas apresentadas em [16], [33].
Assim, obtemos a seguinte equação da onda com dissipação friccional

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) + bu_t(x,t) = 0. \tag{3.5}$$

A equação (3.5) será estudada adiante, sendo considerada no domínio $(0,L) \times (0,\infty)$. O termo bu_t é chamado de dissipação friccional (ou fraca), pois representa um termo dissipativo de fricção no sistema. Mais precisamente, o mesmo causa uma dissipação de energia fazendo com que o sistema se estabilize de forma exponencial ao longo do tempo. Como estamos assumimdo que as extremidades da corda permanecem fixadas em 0 e L, segue que

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0.$$

E ainda, como a variável temporal da equação da onda possui derivadas de segunda ordem e, sendo assim, precisamos (a grosso modo) considerar duas condições iniciais, as quais serão fornecidas no tempo $t = 0$. Denotamos essas condições iniciais por

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in (0,L).$$

Sem perda de generalidade, assumiremos por simplicidade que $\alpha = b = 1$, visto que a mesma não exerce diferença nos cálculos efetuados, ou seja, estudaremos o caso da equação da onda normalizada.

3.2.1 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira **(PVIF)**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_t = 0 \qquad \text{em} \quad (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.6}$$

Para aplicar a teoria de semigrupos lineares devemos reescrever (3.6) como um problema de Cauchy abstrato de primeira ordem. Assim, tomando

$$v = u_t \qquad \text{e} \qquad U = (u,v)^T$$

vem que

$$U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ \partial_{xx} & -I_d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

$$U(0) = \begin{bmatrix} u(0) \\ u_t(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} := U_0.$$

Denotando por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_d \\ \partial_{xx} & -I_d \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

então podemos reescrever (3.6) como:

$$\begin{cases} U_t = AU, \;\; t > 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

A fim de contemplarmos as condições de fronteira em $(3.6)_2$ e enxergarmos (3.8) como uma equação de evolução abstrata de primeira ordem, definamos o seguinte espaço de Hilbert.

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$

com produto interno dado por

$$(U,\hat{U})_{\mathcal{H}} = \int_0^L u_x \hat{u}_x dx + \int_0^L v\hat{v} dx, \quad U = (u,v), \hat{U} = (\hat{u},\hat{v}) \in \mathcal{H},$$

e respectiva norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. O domínio do operador matricial A é dado por

$$D(A) = (H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L).$$

Com estas notações e considerações feitas, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (3.8) e, consequentemente, para o PVIF (3.6), conforme segue.

Teorema 3.3. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (3.8) possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$.

Demonstração. Face ao Teorema 2.100, basta provar que o operador matricial A definido em (3.7) com domínio definido em (3.2.1) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$ em $\mathcal{H}$, e a solução de (3.8) é da forma $U(t) = S(t)U_0$. Para tanto, em virtude do Teorema 2.96 (de Lumer-Phillips), é suficiente mostrar que:

(i) $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$;

(ii) A é dissipativo em $\mathcal{H}$;

(iii) $I_d - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.

A verificação de (i) segue imediatamente dos resultados de espaços de Sobolev (consultar os lemas 2.65 e 2.76), no que segue, verifiquemos a validade dos itens (ii) e (iii).
(ii) Dado $U \in D(A) = (H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L)$, usando integração por partes e ofato que $u \in H_0^1(0,L)$, obtemos

$$\begin{aligned}(AU,U)_{\mathcal{H}} = (v_x, u_x) + (u_{xx} - v, v) &= \int_0^L v_x \overline{u_x} dx + \int_0^L (u_{xx} - v)\overline{v} dx \\ &= \int_0^L v_x \overline{u_x} dx - \int_0^L u_x \overline{v_x} dx - \int_0^L vx\overline{v} dx \\ &= (v_x, u_x) - \overline{(v_x, u_x)} - \|v\|^2.\end{aligned}$$

Relembremos que, dado $w \in \mathbb{C}$, temos $Re(w - \overline{w}) = 0$. Assim, tomando a parte real, temos

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -\|v\|^2 \leq 0.$$

Portanto, A é dissipativo em $\mathcal{H}$.
(iii) Considere $F = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$, vamos mostrar que a equação resolvente $(I_d - A)U = F$ possui uma solução $U \in D(A)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes obtemos os seguinte sistema

$$\left\{\begin{aligned} u - v &= f_1, \quad \text{em } H_0^1(0,L), \\ -u_{xx} + 2v &= f_2, \quad \text{em } L^2(0,L). \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Da primeira equação $v = u - f$, e considerando $h = 2f_1 + f_2 \in L^2(0,L)$, podemos reduzir o sistema (3.9) na seguinte equação

$$-u_{xx} + 2u = h \ \text{ em } \ L^2(0,L). \tag{3.10}$$

Afirmação : Existe $u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ satisfazendo (3.10) quase sempre em $(0,L)$.

Note que, uma vez provada esta afirmação, então $v = u - f_1 \in H_0^1(0,L)$, de onde segue que $(u,v) \in D(A)$ é solução de (3.9), como desejado. Isto acarreta que A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$ e a conclusão do Teorema 3.3 está completa.

Etapa 1: Existe uma única função $u \in H_0^1(0,L)$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_0^L u_x \overline{\varphi_x} dx + 2\int_0^L u\overline{\varphi} dx = \int_0^L h\overline{\varphi} dx, \forall \varphi \in H_0^1(0,L). \tag{3.11}$$

Com efeito, consideremos a seguinte forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) &\to \mathbb{C} \\ (u,\varphi) \mapsto a(u,\varphi) &= \int_0^L u_x \overline{\varphi_x} dx + 2\int_0^L u\overline{\varphi} dx, \end{aligned}$$

e o funcional,

$$\begin{aligned} F : H_0^1(0,L) &\to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto F(\varphi) &= \int_0^L h\overline{\varphi} dx. \end{aligned}$$

Note que $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva, pois

$$|a(u,\varphi)| \leq C\|u\|_{H_0^1(0,L)}\|\varphi\|_{H_0^1(0,L)} \forall u, \varphi \in H_0^1(0,L),$$

onde $C = 2L + 1$, e

$$a(u,u) = (u,u)_{H_0^1(0,L)} + 2(u,u) \geq \|u\|^2_{H_0^1(0,L)}, \forall u, \in H_0^1(0,L).$$

É facil verificar que F é antilinear, da Desigualdade de Pincaré obtemos

$$|F(\varphi)| = |(h,\varphi)| \leq \|h\|_{H_0^1(0,L)}\|\varphi\|_{H_0^1(0,L)}, \forall \varphi \in H_0^1(0,L).$$

Portanto, $F \in H^{-1}(0,L)$. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in H_0^1(0,L)$ tal que

$$a(u,\varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in H_0^1(0,L),$$

ou seja, $u \in H_0^1(0,L)$ é solução de (3.11).

Etapa 2: Seja $u \in H_0^1(0,L)$ a solução de (3.11). Então, $u \in H^2(0,L)$ e satisfaz (3.10) quase sempre em $(0,L)$.

De fato, de (3.11)

$$\int_0^L u_x \overline{\varphi_x} dx = -\int_0^L (2u-h)\overline{\varphi} dx, \forall \varphi \in C_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L). \tag{3.12}$$

Como $u_x, 2u-h \in L^2(0,L)$ e vale (3.12), então $u_x \in H^1(0,L)$, pela noção de derivada fraca. Assim, $u \in H^2(0,L)$, além disso, de (3.12) vem,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 2u - h \text{ em } L^2(0,L) \\ \Rightarrow -u_{xx} + 2u &= h \text{ em } L^2(0,L) \end{aligned}$$

provando (3.10). De (3.9) vem que $v = u - f_1 \in H_0^1(0,L)$, mostrando que
$U = (u,v)^T \in D(A)$ provando a veracidade do item (iii), o que conclui a prova do Teorema 3.3. $\square$

3.2.2 Estabilidade Exponencial

No que segue, verificaremos a estabilidade exponencial do sistema (3.8) utilizando o Teorema 2.101. Iniciaremos verificando que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Primeiramente verificaremos que $0 \in \rho(A)$, pois no que segue, precisaremos afirmar que estamos tomando $\beta \neq 0$, para $i\beta \in i\mathbb{R}$.

Lema 3.4. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.7). Então,* $0 \in \rho(A)$.

Demonstração. Observe que mostrar que $0 \in \rho(A)$ é o mesmo que mostrarmos que o operador $-A^{-1}$ existe e é limitado. Dada $F \in \mathcal{H}$ mostraremos que equação resolvente

$$-AU = F \tag{3.13}$$

possui uma única solução $U \in D(A)$. Reescrevendo (3.13) em termos de suas componentes, obtemos

$$-v = f_1, \tag{3.14}$$

$$-u_{xx} + v = f_2. \tag{3.15}$$

De (3.14), temos que $v = -f_1$, substituindo em (3.15), e denotando por $h := f_2 + f_1$, obtemos

$$-u_{xx} = h \quad \text{em} \quad L^2(0,L),$$

o qual foi provado do Teorema (3.1)- item (iii).
Mostraremos agora que $-A^{-1}$ é limitado, como $-A^{-1}.F = U$ é suficiente mostrar que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

relembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u_x\|^2 + \|v\|^2$$

estimaremos uma limitação para cada termo da norma de U.
De (3.14), e usando a Desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|v\|^2 = \|f_1\|^2 \leq L^2\|f_{1x}\|^2 = L^2\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.16}$$

Por fim, fazendo o produto interno de (3.15) por u em $L^2(0,L)$, usando integração por partes, e em seguida as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, obtém-se

$$\begin{aligned}
(-u_{xx}, u) &= (f_2, u) - (v, u) \\
\|u_x\|^2 &\leq \|f_2\|\|u\| + \|v\|\|u\| \\
\|u_x\|^2 &\leq L\|f_2\|\|u_x\| + L\|v\|\|u_x\| \\
\|u_x\|^2 &\leq C_{\varepsilon_1}L^2\|f_2\|^2 + \varepsilon_1\|u_x\|^2 + C_{\varepsilon_2}L^2\|v\|^2 + \varepsilon_2\|u_x\|^2.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{1}{4}$ e usando (3.16), segue que

$$\|u_x\|^2 \leq 2(L^2 + L^4)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.17}$$

Assim, tomando $C_1^2 = 2(L^2 + L^4)$ de (3.16) e (3.17), temos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, $(-A)^{-1}$ é limitado. □

Teorema 3.5. *Sob as notações da subsessão 3.2.1 e hipóteses do Teorema 3.3, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ correspondente ao sistema (3.6) é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes $C, \omega > 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\omega t}, \ \ t \geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ de (3.8) satisfaz

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.101, é suficiente mostrar que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ e $\lim\limits_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$.

Suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(A)$. Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \notin \rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$. Portanto, $i\beta \in \sigma(A)$. Como $D(A) \hookrightarrow \mathcal{H}$ com inclusão compacta ($H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \hookrightarrow H_0^1(0,L)$ e $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ com inclusão compacta), então é suficiente mostrar que, para $\beta \neq 0$, vale a implicação

$$i\beta U - AU = 0 \Rightarrow U = 0.$$

Seja $U \in D(A)$ tal que $i\beta U - AU = 0$. Escrevendo em termos de suas componentes, temos

$$\begin{cases} i\beta u - v = 0, \\ i\beta v - u_{xx} + v = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Assim, tomando o produto interno de $AU - i\beta U = 0$ com U em $\mathcal{H}$ e, em seguida tomando a parte real, vem que

$$Re(i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (AU, U)_{\mathcal{H}}) = 0.$$

Dessa forma, pela dissipatividade do operador A, segue que

$$0 = Re(-AU, U)_{\mathcal{H}} = \|v\|^2.$$

Ou seja, $v = 0$. Da primeira equação em (3.18), concluímos que $u = 0$, assim, $U = 0$. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Vejamos que a segunda exigência do Teorema de Prüss é satisfeita. Temos que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$, assim, vale para $F \in \mathcal{H}$ que $\exists U \in D(A)$ tal que

$$(i\beta I_d - A)U = F \Leftrightarrow U = (i\beta I_d - A)^{-1}F.$$

Desse modo,

$$\|(i\beta I_d - A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}}=1; F\in\mathcal{H}} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C,$$

ou seja, é suficiente mostrar que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Dado $F = (f, g)^T \in \mathcal{H}$, consideremos $U \in D(A)$ solução da equação resolvente

$$i\beta U - AU = F.$$

Reescrevendo-a em termos de suas componentes, temos

$$\begin{cases} i\beta u - v = f, \\ i\beta v - u_{xx} + v = g. \end{cases} \tag{3.19}$$

Tomando o produto interno de $i\beta U - AU = F$ com U em $\mathcal{H}$ e, em seguida a parte real, obtemos

$$Re(i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (AU, U)_{\mathcal{H}}) = Re(F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue novamente da dissipatividade de A que

$$\|v\|_{L^2(0,L)}^2 = Re(F, U)_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.20}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(0,L)$ de $(3.19)_2$ com u temos

$$\underbrace{\int_0^L i\beta v\overline{u}dx}_{(a)} - \underbrace{\int_0^L u_{xx}\overline{u}dx}_{(b)} + \int_0^L v\overline{u}dx = \int_0^L g\overline{u}dx.$$

Substituindo $u = \dfrac{f+v}{i\beta}$ em (a) e integrando (b) por partes, temos

$$\|u_x\|^2 = \int_0^L g\overline{u}dx + \int_0^L v\overline{f}dx - \int_0^L v\overline{u}dx + \|v\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{3.21}$$

Tomando módulo em (3.21), usando (3.20) e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, vemos que

$$\begin{aligned}
\|u_x\|^2 &\le |(g,u)| + |(v,f)| + |(v,u)| + \|v\|^2 \\
&\le \|g\|\|u\| + \|v\|\|f\| + \|v\|\|u\| + \|v\|^2 \\
&\le L\|g\|\|u_x\| + L\|v\|\|f_x\| + L\|v\|\|u_x\| + \|v\|^2 \\
&\le L\|g\|\|u_x\| + L\|v\|\|f_x\| + \frac{L^2}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 + \|v\|^2 \\
&\le (1+2L)\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{L^2}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 \\
&\le \left(1+2L+\frac{L^2}{2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|u_x\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_x\|^2 \le (2+4L+L^2)\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.22}$$

Além disso, usando (3.20) e (3.22), vem que

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathcal{H}} &= \|u_x\|^2 + \|v\|^2 \\
&\le (3+4L+L^2)\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&\le \frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{(3+4L+L^2)^2}{2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \le K\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $K = 3+4L+L^2$. Isto conclui a prova de que o problema (3.8) (e, consequentemente, o sistema (3.6)) é exponencialmente estável via Teorema 2.101. □

3.3 SISTEMA TERMOELÁSTICO

A termoelasticidade estuda efeitos do campo de temperatura sobre a tensão-deformação de sólidos elásticos submetidos a pequenas deformações e flutuações infinitesimais de temperatura. Em outras palavras, a termoelasticidade se preocupa com a relação entre a temperatura e as deformações e tensões que ocorrem em um material quando ele é aquecido ou resfriado.

Usando as mesmas hipóteses e notações de [33], temos o seguinte modelo linear, o qual descreve vibrações de corda termoelástica de comprimento $L > 0$ feita de material homogêneo, dado pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \gamma u_{xt} & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.23}$$

Como estamos supondo que as extremidades da barra permanecem fixadas e sem transferência de calor, obtemos as seguintes condições de fronteira

$$u(0, t) = u(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \tag{3.24}$$

e condições iniciais dadas por,

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in (0, L). \tag{3.25}$$

No que segue, apresentamos um resultado de existência e unicidade para o PVIF (3.23)-(3.25) via semigrupos lineares.

3.3.1 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte problema,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_t - \theta_{xx} + \gamma u_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) & x \in (0, L). \end{cases} \tag{3.26}$$

Com as seguintes condições de fronteira:

$$u(0, t) = u(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \tag{3.27}$$

ou

$$u(0, t) = u(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0. \tag{3.28}$$

Inicialmente, reescreveremos o problema (3.26) com condições de fronteira dada por (3.27) ou (3.28), como um PVI abstrato. Considerando a seguinte mudança de variavél dada por, $\vartheta = u_t$

e a função vetorial $U = (u, \vartheta, \theta)^T$, então

$$U_t = \begin{bmatrix} \vartheta \\ u_{xx} - \gamma\theta_x \\ -\gamma\vartheta_x + \theta_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ \partial_{xx} & 0 & -\gamma\partial_x \\ 0 & -\gamma\partial_x & \partial_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ \vartheta \\ \theta \end{bmatrix} \text{ e } U(0) = U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix}.$$

Denotando por A_j com $j = 1, 2$, o seguinte operador diferencial

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ \partial_{xx} & 0 & -\gamma\partial_x \\ 0 & -\gamma\partial_x & \partial_{xx} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Assim, obtemos o seguinte problema abstrato de Cauchy de primeira ordem

$$\begin{cases} U_t = A_j U, \ \ t > 0, \ j = 1, 2 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Consideremos agora, para as condições de fronteira (3.27) e (3.28), os seguintes espaços de fase, respectivamente:

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \text{ e}$$
$$\mathcal{H}_2 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

onde $L_*^2(0, L)$ é definido em (2.4), ambos com o produto interno e norma dado por

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}_j} = \int_0^L u_x \overline{\hat{u}_x} dx + \int_0^L \vartheta \overline{\hat{\vartheta}} dx + \int_0^L \theta \overline{\hat{\theta}} dx, \forall U, \hat{U} \in \mathcal{H}_j,$$

e norma $\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = (U, U)_{\mathcal{H}_j}$, com $j = 1, 2$.
Assim, definimos o domínio do operador A_j como

$$D(A_1) = (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \times H_0^1(0, L) \times (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L))$$

e

$$D(A_2) = \{(u, \vartheta, \theta) \in \mathcal{H}_2 : u, \theta \in H^2(0, L), \ \vartheta, \theta_x \in H_0^1(0, L)\}$$

Sob estas notações, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o problema (3.30) e, consequentemente, para o PVIF (3.26) com condições de fronteira (3.27) ou (3.28), conforme o teorema a seguir.

Teorema 3.6. *Se $U_0 \in D(A_j)$, então o problema (3.30) possui uma única solução*

$$U \in C([0, \infty), D(A_j)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$.

Demonstração. Aplicando novamente o Teorema 2.100, basta mostrar que o operador A_j definido, é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_j$. Neste caso, pelo Teorema 2.96, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A_j)} = \mathcal{H}_j$;

(ii) A_j é dissipativo em $\mathcal{H}_j$;

(iii) $I_d - A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$ é sobrejetor.

(ii) Seja $U \in D(A_j)$, fazendo o produto interno de A_jU com U em $\mathcal{H}_j$ e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
(A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} &= (\vartheta_x, u_x) + (u_{xx} - \gamma\theta_x, \vartheta) + (\theta_{xx} - \gamma\vartheta_x, \theta) \\
&= \int_0^L \vartheta_x \overline{u_x} dx + u_x\vartheta\Big|_0^L - \int_0^L u_x \overline{\vartheta_x} dx - \gamma \int_0^L \theta_x \overline{\vartheta} dx \\
&+ \theta_x\theta\Big|_0^L - \int_0^L \theta_x \overline{\theta_x} dx - \gamma \int_0^L \vartheta_x \overline{\theta} dx \\
&= (\vartheta_x, u_x) - \overline{(\vartheta_x, u_x)} - \gamma(\theta_x, \vartheta) + \gamma\overline{(\theta_x, \vartheta)} - \|\theta_x\|^2. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Tomando a parte real em (3.31), obtém-se

$$Re(A_jU, U)_{\mathcal{H}} = -\|\theta_x\|^2 \leq 0. \qquad (3.32)$$

Dessa forma, A_j é dissipaivo em $\mathcal{H}_j$ para $j = 1, 2$.
(iii) Dado $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}_j$ será mostrado que a equação resolvente $(I_d - A_j)U = F$ possui uma única solução $U \in D(A_j)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes, obtém-se o seguinte sistema

$$u - \vartheta = f_1, \qquad (3.33)$$

$$\vartheta - u_{xx} + \gamma\theta_x = f_2, \qquad (3.34)$$

$$\theta - \theta_{xx} + \gamma\vartheta_x = f_3. \qquad (3.35)$$

De (3.33), temos que $\vartheta = u - f_1$. Assim, tomando $h_1 = f_2 + f_1$ e $h_2 = f_3 + f_{1x}$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
-u_{xx} + u + \gamma\theta_x &= h_1, \\
-\theta_{xx} + \theta + \gamma u_x &= h_2.
\end{aligned}$$

Considerando $(\tilde{u},\tilde{\theta}) \in H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L) = \tilde{\mathcal{H}}_j$ (ou $H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$), temos o seguinte problema variacional

$$\int_0^L \left[u_x\overline{\tilde{u}_x} + u\overline{\tilde{u}} + \gamma\theta_x\overline{\tilde{u}} + \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + \theta\overline{\tilde{\theta}} + \gamma u_x\overline{\tilde{\theta}}\right]dx = \int_0^L (h_1\overline{\tilde{u}} + h_2\overline{\tilde{\theta}})dx. \tag{3.36}$$

Dessa forma, considerando a seguinte forma sesquilinear

$$\begin{aligned} a : \tilde{\mathcal{H}}_j \times \tilde{\mathcal{H}}_j &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta})) &\mapsto a((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta})) \\ &= \int_0^L \left[u_x\overline{\tilde{u}_x} + u\overline{\tilde{u}} + \gamma\theta_x\overline{\tilde{u}} + \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x} + \theta\overline{\tilde{\theta}} + \gamma u_x\overline{\tilde{\theta}}\right]dx. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Triangular, vem que

$$\begin{aligned} |a((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta}))| &\leq \|u_x\|\|\tilde{u_x}\| + \|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + \|u\|\|\tilde{u}\| + \|\theta\|\|\tilde{\theta}\| + \gamma\|u_x\|\|\tilde{\theta}\| \\ &+ \gamma\|\theta_x\|\|\tilde{u}\| \\ &\leq \|u_x\|\|\tilde{u_x}\| + \|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + L^2\|u_x\|\|\tilde{u_x}\| + L^2\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| \\ &+ L\gamma\|u_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + L\gamma\|\theta_x\|\|\tilde{u_x}\| \\ &= (1+L^2)\|u_x\|\|\tilde{u_x}\| + (1+L^2)\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + L\gamma\|u_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + L\gamma\|\theta_x\|\|\tilde{u_x}\| \\ &\leq C_1\|u_x\|\|\tilde{u_x}\| + C_1\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + C_1\|u_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + C_1\|\theta_x\|\|\tilde{u_x}\| \\ &= C_1(\|u_x\| + \|\theta_x\|)(\|\tilde{u_x}\| + \|\tilde{\theta_x}\|) \\ &= C_1\|(u,\theta)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_j}\|(\tilde{u},\tilde{\theta})\|_{\tilde{\mathcal{H}}_j}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{1+L^2, L\gamma\}$, ou seja, a é continua. Observe ainda que,

$$\begin{aligned} a((u,\theta),(u,\theta)) &= \|u_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \gamma(\theta_x,u) + \gamma(u_x,\theta) \\ &= \|u_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \gamma[(\theta_x,u) - (u,\theta_x)] \\ &= \|u_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|u\|^2 + \|\theta\|^2 + \gamma[(\theta_x,u) - \overline{(\theta_x,u)}] \end{aligned}$$

como $(\theta_x,u) - \overline{(\theta_x,u)} = 2Im(\theta_x,u)$, onde $Im(\theta_x,u)$ representa a parte imaginaria de (θ_x,u). Assim, tomando a parte real e usando o Lema 2.28 vem que

$$\begin{aligned} Re(a((u,\theta),(u,\theta))) &= \|u_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 + \|u\|^2 + \|\theta\|^2 \\ &\geq \|u_x\|^2 + \|\theta_x\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(\|u_x\| + \|\theta_x\|)^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\|(u,\theta)\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}_j}, \end{aligned}$$

ou seja, a é coerciva.
E ainda, definindo o seguinte funcional antilinear

$$\begin{array}{rcl} F:\tilde{\mathcal{H}}_j & \to & \mathbb{C} \\ (\tilde{u},\tilde{\theta}) & \mapsto & F(\tilde{u},\tilde{\theta}) = \displaystyle\int_0^L (h_1\overline{\tilde{u}} + h_2\overline{\tilde{\theta}})dx, \end{array}$$

e usando as desigualdades Triangular, de Poincaré e Cauchy-Schwarz e tomando $C_2 = \max\{L\|h_1\|, L\|h_2\|\}$, vem que

$$\begin{array}{rcl} |F(\tilde{u},\tilde{\theta})| & \leq & \|h_1\|\|\tilde{u}\| + \|h_2\|\|\tilde{\theta}\| \\ & \leq & C_2\|(\tilde{u},\tilde{\theta})\|_{\tilde{\mathcal{H}_j}} \end{array}$$

ou seja, $F \in \left(\tilde{\mathcal{H}}_j\right)'$. Assim, do Teorema 2.21 temos que existe um único par $(u,\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}_j$ tal que

$$a((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta})) = F(\tilde{u},\tilde{\theta}),\ \forall(\tilde{u},\tilde{\theta}) \in \tilde{\mathcal{H}}_j.$$

Seja $(u,\theta) \in \tilde{\mathcal{H}}_j$ tal que $a((u,\theta),(\tilde{u},\tilde{\theta})) = F(\tilde{u},\tilde{\theta})$, logo, tomando $\tilde{\theta} = 0$ e $\tilde{u} = \alpha \in C_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L)$ em (3.36), temos

$$\int_0^L u_x\overline{\alpha_x}dx = \int_0^L \big[h_1 - \gamma\theta_x - u\big]\overline{\alpha}dx,\ \forall\alpha \in C_0^1(0,L). \tag{3.37}$$

Como $u_x, (h_1 - \gamma\theta_x - u) \in L^2(0,L)$ e vale (3.37), pela definição de derivada fraca, temos que $u \in H^2(0,L)$ com

$$u_{xx} = -(h_1 - \gamma\theta_x - u) \text{ em } L^2(0,L),$$

ou seja,

$$-u_{xx} + \gamma\theta_x + u = h_1 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.38}$$

Analogamente, trataremos do caso em que $\hat{\theta} \in H_0^1(0,L)$ e em seguida o caso $\tilde{\theta} \in H_*^1(0,L)$.
De fato, se $\hat{\theta} \in H_0^1(0,L)$, tomando $\hat{\theta} = \beta \in C_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L)$ e $\tilde{u} = 0$ em (3.36), obtemos que,

$$\int_0^L \theta_x\overline{\beta_x}dx = \int_0^L \big[h_2 - \gamma u_x - \theta\big]\overline{\beta}dx,\ \forall\beta \in C_0^1(0,L). \tag{3.39}$$

Como $(h_2 - \gamma u_x - \theta), \theta_x \in L^2(0,L)$ e vale (3.39), segue da definição de derivada fraca que $\theta \in H^2(0,L)$, e ainda

$$-\theta_{xx} + \gamma u_x + \theta = h_2 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.40}$$

Portanto, de (3.38) e (3.40), vem que $I_d - A_1 : D(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ é sobrejetor.
Observe que, dado $\xi \in C^1(0,L)$ e definindo $\tilde{\xi} = \xi - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \xi dx$, obtemos que $\tilde{\xi} \in H_*^1(0,L)$.

Assim, suponhamos que $\tilde{\theta} \in H^1_*(0,L)$, logo, tomando $\tilde{u} = 0$ e $\tilde{\theta} = \tilde{\xi}$ em (3.36), obtemos

$$\int_0^L \theta_x \overline{\tilde{\xi}_x} dx = \int_0^L \big[h_2 - \gamma u_x - \theta\big] \overline{\tilde{\xi}} dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \theta_x \overline{\left(\xi - \frac{1}{L}\int_0^L \xi dx\right)_x} dx = \int_0^L \big[h_2 - \gamma u_x - \theta\big] \overline{\left(\xi - \frac{1}{L}\int_0^L \xi dx\right)} dx.$$

Pelo fato que $h_2,\ \theta \in L^2_*(0,L)$, $u \in H^1_0(0,L)$ e $\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \xi dx\right)_x} = 0$, temos que

$$\int_0^L \theta_x \overline{\xi_x} dx = \int_0^L \big[h_2 - \gamma u_x - \theta\big] \overline{\xi} dx,\ \forall \xi \in H^1(0,L). \tag{3.41}$$

Como $(h_2 - \gamma u_x - \theta), \theta_x \in L^2(0,L)$ e vale a igualdade (3.41) para $\xi \in C^1_0 \subset C^1 \subset H^1$ em particular, segue da definição de derivada fraca, que $\theta \in H^2(0,L)$ e ainda

$$-\theta_{xx} + \theta + \gamma u_x = h_2 \text{ em } L^2(0,L), \tag{3.42}$$

substituindo (3.42) em (3.41), vem que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \theta_x \overline{\xi_x} dx = -\int_0^L \theta_{xx} \overline{\xi} dx = -\theta_x \xi \Big|_0^L + \int_0^L \theta_x \overline{\xi_x} dx \\ \Rightarrow \quad -\theta_x \xi \Big|_0^L = -\theta_x(L)\xi(L) + \theta_x(0)\xi(0) = 0, \end{aligned}$$

como $\xi \in C^1(0,L)$, tomando $\xi(L) = 0$ e $\xi(0) = 15$, segue que $\theta_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\xi(L) = 4$ e $\xi(0) = 0$, segue que $\theta_x(L) = 0$. Dessa forma, temos $\theta_x \in H^1_0(0,L)$. Portanto, de (3.38) e do exposto acima, segue que (3.33)-(3.35) possui uma única solução $U \in D(A_2)$, mostrando que $I_d - A_2 : D(A_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ é sobrejetor. Em resumo, $I_d - A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$ é sobrejetor.

(i) Do item (ii), temos que A_j é dissipativo em $\mathcal{H}_j$. No item (iii), mostramos que o operador $I_d - A_j = \mathcal{H}_j$ (sobrejetor). Como $\mathcal{H}_j$ é um espaço de Hilbert, segue do Teorema 2.20 que $\mathcal{H}_j$ é reflexivo. Assim, pelo Teorema 2.90, segue que $\overline{D(A_j)} = \mathcal{H}_j$, finalizando assim a prova do Teorema 3.6. □

3.3.2 Estabilidade Exponencial

Assim como nos casos anteriores, verificaremos a estabilidade exponencial do sistema (3.29) utilizando o Teorema 2.101. Em seguida, iniciaremos verificando que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Vale ressaltar que nesta subseção estaremos considerando o corpo dos reais e não dos complexos como no restante do trabalho. Esta escolha foi extremamente necessária para a demonstração do Teorema 3.9 no caso de $j = 1$.

Lema 3.7. *Seja $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$ com $j = 1, 2$ definido em (3.29). Então, o espectro $\sigma(A_j)$ do operador A_j é formado apenas por autovalores de A_j.*

Demonstração. Da Proposição 2.102 basta mostrar que a aplicação inclusão

$$i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \to (\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$$

é compacta. Consideremos $U_n = (u^n, \vartheta^n, \theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $D(A_j)$ e note que

$$\begin{aligned}\|U_n\|_{D(A_j)} &= \|U_n\|_{\mathcal{H}_j} + \|AU_n\|_{\mathcal{H}_j} \\ &= \|u^n_x\|^2 + \|\vartheta^n\|^2 + \|\theta^n\|^2 + \|\vartheta^n_x\|^2 + \|u^n_{xx} - \gamma\theta^n_x\|^2 + \|\theta^n_{xx} - \gamma\vartheta^n_x\|^2\end{aligned}$$

ou seja, $(u^n_x)_{\in\mathbb{N}}$, $(\vartheta^n)_{\in\mathbb{N}}$ e $(\theta^n)_{\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0, L)$.
Da dissipatividade do operador A_j , temos

$$c\|\theta^n_x\|^2 = |Re(A_jU_n, U_n)_{\mathcal{H}_j}| \leq \frac{1}{2}\|A_jU_n\|^2_{\mathcal{H}_j} + \frac{1}{2}\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_j} = \frac{1}{2}\|U_n\|^2_{D(A_j)} \leq \|U_n\|^2_{D(A_j)},$$

ou seja, $(\theta^n_x)_{n\in\mathbb{N}}$ é limtada em $L^2(0, L)$.
Usando a desigualdade triangular e o Lema 2.28, temos

$$\begin{aligned}\|u^n_{xx}\|^2 &= \|u^n_{xx} - \gamma\theta^n_x + \gamma\theta^n_x\|^2 \\ &\leq 2\|u^n_{xx} - \gamma\theta^n_x\|^2 + 2\|\gamma\theta^n_x\|^2,\end{aligned}$$

ou seja, $(u^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}}$é limitada em $L^2(0, L)$, o que nos leva a concluir que $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $H^2(0, L)$. Dessa forma, segue da Proposição 2.62 que

$$i : (H^2(0, L), \|\cdot\|_{H^2(0,L)}) \to (H^1(0, L), \|\cdot\|_{H^1(0,L)})$$

é compacta. Dessa forma, existe uma subsequência $(u^n)_{n\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e uma função $u \in H^1$ de tal forma que

$$\|u^n - u\|_{H^1} \to 0.$$

Como $u^n \in H^1_0(0, L)$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$ e como $(H^1(0, L), \|\cdot\|_{H^1(0,L)})$ é completo, segue que $u \in H^1_0(0, L)$.
Observe que da limitação da norma de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A_j)$, vem que $(\vartheta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(0, L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0, L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\vartheta^n)_{n\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e uma função $\vartheta \in C[0, L]$ tal que

$$\|\vartheta^n - \vartheta\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\vartheta^n - \vartheta\|^2 = \int_0^L |\vartheta^n(x) - \vartheta(x)|^2 dx \le L \sup_{x\in[0,L]} |\vartheta^n(x) - \vartheta(x)|^2 = L\|\vartheta^n - \vartheta\|_\infty^2 \to 0.$$

Como $L^2(0, L)$ é completo e $\vartheta^n \in L^2(0, L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_2$, segue que $\vartheta \in L^2(0, L)$.
Finalmente, notando que $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $H^1(0, L)($ ou $H^1_*(0, L))$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0, L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2}$ e uma função $\theta \in C[0, L]$ tal que

$$\|\theta^n - \theta\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\theta^n - \theta\|^2 = \int_0^L |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 dx \le L \sup_{x\in[0,L]} |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 = L\|\theta^n - \theta\|_\infty^2 \to 0.$$

Como $L^2(0, L)$ é completo e $\theta^n \in L^2(0, L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_3$, segue que $\theta \in L^2(0, L)$.
Em resumo, encontramos uma subsequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_4\subset\mathbb{N}_3}$ e $U \in \mathcal{H}_j$ tal que

$$\|U_n - U\|_{\mathcal{H}_j} \to 0,$$

ou seja, dada uma sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(A_j)$, esta possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}_j$. Portanto,

$$i : (D(A_j), \|\cdot\|_{D(A_j)}) \to (\mathcal{H}_j, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_j})$$

é compacta, mostrando que $\sigma(A_j)$ é formado apenas por autovalores de A_j. $\square$

Lema 3.8. *Seja $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j$ com $j = 1, 2$ definido em (3.29). Então, $0 \in \rho(A_j)$.*

Demonstração. Mostrar que $0 \in \rho(A_j)$ é o mesmo que mostrarmos que o operador $(-A_j)^{-1}$ existe e é limitado. Dada $F \in \mathcal{H}_j$ mostraremos que equação resolvente

$$-A_j U = F \tag{3.43}$$

possui uma única solução $U \in D(A_j)$, reescrevendo (3.43) em termos de suas componentes, obtemos

$$-v = f_1, \tag{3.44}$$

$$-u_{xx} + \gamma\theta_x = f_2, \tag{3.45}$$

$$-\theta_{xx} + \gamma v_x = f_3. \tag{3.46}$$

De (3.44), temos que $v = -f_1$, substituindo em (3.46) e tomando g_1 e g_2 como

$$g_1 = f_1,$$

$$g_2 = f_3 + \gamma(f_1)_x,$$

obtemos o seguinte sistema nas variáveis u e θ

$$-u_{xx} + \gamma\theta_x = g_1, \tag{3.47}$$

$$-\theta_{xx} = g_2. \tag{3.48}$$

Caso j=1 :
Já foi provado que (3.48) possui uma única solução θ, onde $\theta \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ (ver (3.3)). Assim substituindo em (3.47), obtemos a seguinte equação

$$-u_{xx} = h, \quad \text{onde} \quad h = g_1 - \gamma\theta_x,$$

a qual possui uma única solução em $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ (ver (3.3)). Portanto, (3.44)-(3.46), possui uma única solução $U \in D(A_1)$.
Caso j=2 :
Note inicialmente que se mostrarmos que a equação

$$-\theta_{xx} = g_2 \quad \text{em} \quad L_*^2(0,L) \tag{3.49}$$

possui uma única solução em $L_*^2(0,L)$, então, assim como no caso $j = 1$, teremos que o sistema (3.44)-(3.46), possui uma única solução $U \in D(A_2)$.
Com efeito, consideremos

$$a : H_*^1(0,L) \times H_*^1(0,L) \to \mathbb{C}$$
$$(\theta, \tilde{\theta}) \mapsto a(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta_x, \tilde{\theta}_x) = \int_0^L \theta_x \overline{\tilde{\theta}_x} dx$$

e

$$F : H^1_*(0,L) \to \mathbb{C}$$
$$\tilde{\theta} \mapsto F(\tilde{\theta}) = (g_2, \tilde{\theta}) = \int_0^L g_2 \overline{\tilde{\theta}} dx.$$

Note que $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma sesquilinear contínua e coerciva, pois

$$|a(\theta,\tilde{\theta})| = |(\theta_x, \tilde{\theta_x})| \leq \|\theta_x\| \|\tilde{\theta_x}\| = \|\theta\|_{H^1_*(0,L)} \|\tilde{\theta}\|_{H^1_*(0,L)}, \forall \theta, \tilde{\theta} \in H^1(0,L),$$

e

$$|a(\theta,\theta)| = |(\theta_x,\theta_x)| = \|\theta_x\|^2 = \|\theta\|^2_{H^1_*(0,L)}, \ \forall \theta \in H^1_*(0,L).$$

Além disso, é facil verificar que F é antilinear, e ainda, da Desigualdade de Pincaré obtemos

$$|F(\tilde{\theta})| = |(g_2, \tilde{\theta})| \leq \|g_2\| \|\tilde{\theta}\| \leq C \|\tilde{\theta}\|_{H^1_*(0,L)}, \ \forall \tilde{\theta} \in H^1_*(0,L),$$

onde $C = L\|g_2\|$. Logo, $F \in (H^1_*(0,L))'$. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in H^1_*(0,L)$ tal que

$$a(\theta,\tilde{\theta}) = F(\tilde{\theta}), \forall \ \tilde{\theta} \ H^1_*(0,L),$$

ou ainda, existe uma única $\theta \in H^1_*(0,L)$ satisfazendo a equação variacional

$$\int_0^L \theta_x \overline{\tilde{\theta}_x} dx = \int_0^L g_2 \overline{\tilde{\theta}} dx, \forall \tilde{\theta} \in H^1_*(0,L). \tag{3.50}$$

Tomando $\varphi \in C^1$, temos que $\tilde{\varphi} \in H^1_*(0,L)$, onde $\tilde{\varphi} = \varphi - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \varphi dx$.
Assim, tomando $\tilde{\theta} = \tilde{\varphi}$ em (3.50), obtemos que

$$\int_0^L \theta_x \overline{\left(\varphi - \frac{1}{L}\int_0^L \varphi dx\right)}_x dx = \int_0^L g_2 \overline{\left(\varphi - \frac{1}{L}\int_0^L \varphi dx\right)} dx,$$

como $g_2 \in L^2_*(0,L)$ e $\overline{\left(\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \varphi dx\right)}_x = 0$, segue que

$$\int_0^L \theta_x \overline{\varphi_x} dx = \int_0^L g_2 \overline{\varphi} dx, \quad \forall \varphi \in C^1(0,L). \tag{3.51}$$

Como $\theta_x, g_2 \in L^2(0,L)$ e vale (3.51), pela definição de derivada fraca, segue que

$$-\theta_{xx} = g_2. \tag{3.52}$$

Substituindo (3.52) em (3.51) e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \theta_x \overline{\varphi_x} dx &= -\int_0^L \theta_{xx} \overline{\varphi} dx \\ \Rightarrow \int_0^L \theta_x \overline{\varphi_x} dx = -\int_0^L \theta_{xx} \overline{\varphi} dx &= -\theta_x \varphi \Big|_0^L + \int_0^L \psi_x \overline{\varphi_x} dx \\ \Rightarrow -\theta_x \varphi \Big|_0^L &= -\theta_x(L)\varphi(L) + \theta_x(0)\varphi(0) = 0,\ \forall \varphi \in C^1(0,L), \end{aligned}$$

como $\varphi \in C^1(0,L)$, tomando $\varphi(L) = 0$ e $\varphi(0) = 6$, temos que $\theta_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\varphi(L) = 2$ e $\varphi(0) = 0$, vem que $\theta_x(L) = 0$, ou seja, $\theta_x \in H_0^1(0,L)$. Portanto, θ satisfaz (3.49). Assim, ao substituir θ encontrado na equação (3.48), obtemos que

$$-u_{xx} = h, \quad \text{onde} \quad h = g_1 - \gamma \theta_x,$$

a qual possui uma única solução em $H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ (ver 3.3). Portanto, (3.44)-(3.46), possui uma única solução $U \in D(A_2)$.
Finalmente, mostraremos que $-A_j^{-1}$ é limitado, como $-A_j^{-1}.F = U$ é suficiente mostrar que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

relembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \|u_x\|^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2,$$

estimaremos cada termo da norma de U.
De fato, como $-A_jU = F$, então $(-A_jU, U)_{\mathcal{H}_j} = (F, U)_{\mathcal{H}_j}$. Logo, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré e da dissipatividade do operador A_j, segue que

$$\begin{aligned} &\|\theta_x\|^2 = (F, U)_{\mathcal{H}_j} \\ \Rightarrow \quad &\|\theta_x\|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}_j} \|U\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\|\theta\|^2 \leq L^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \|U\|_{\mathcal{H}_j}. \tag{3.53}$$

De (3.44), segue que

$$\|v\| = \|f_1\| \leq L\|(f_1)_x\|,$$

o que nos fornece

$$\|v\|^2 \leq L^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{3.54}$$

Finalmente, fazendo o produto interno de (3.45) com u em $L^2(0,L)$ e em seguida, utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}(-u_{xx}, u) &= (f_2, u) - \gamma(\theta_x, u)\\ \|u_x\|^2 &= (f_2, u) + \gamma(\theta, u_x).\end{aligned}$$

Tomando o módulo e utilizando as Desigualdades Triangular, Cauchy-Schawarz, Poincaré e Young, obtém-se

$$\begin{aligned}\|u_x\|^2 &\leq \|f_2\|\|u\| + \gamma\|\theta\|\|u_x\|\\ &\leq L\|f_2\|\|u_x\| + \gamma\|\theta\|\|u_x\|\\ &\leq C_{\varepsilon_1}L^2\|f_2\|^2 + \varepsilon_1\|u_x\|^2 + C_{\varepsilon_2}\gamma^2\|\theta\|^2 + \varepsilon_2\|u_x\|^2,\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{1}{4}$, obtemos

$$\|u_x\|^2 \leq 2L^2\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + 2\gamma^2L^2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j}. \tag{3.55}$$

Portanto, de (3.53), (3.54) e (3.55), segue que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} \leq 2L^2\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + 2\gamma^2L^2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j} + L^2\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + L^2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

definindo, $C_1 = 3L^2$ e $C_2 = 2\gamma^2L^2 + L^2$, segue que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} \leq C_1\|F\|^2_{\mathcal{H}_j} + C_2\|F\|_{\mathcal{H}_j}\|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

por fim, usando a Desigualdade de Young, segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde $K = \sqrt{2C_1 + C_2^2}$, mostrando assim que $(-A_j)^{-1}$ é limitado. □

Teorema 3.9. *Sob as notações da subsessão 3.3.1 e hipóteses do Teorema 3.6, o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *correspondente ao sistema (3.26) com condições* (3.27) *ou* (3.28) *é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $C, \omega > 0$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} \leq Ce^{-\omega t}, \;\; t \geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ *de (3.30) satisfaz*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}_j}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.101, devemos mostrar que o operador A_j definido em (3.29)

satisfaz as seguintes condições, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$ e $\lim\limits_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I_d - A_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < \infty$.
De fato, como $D(A_j)$ tem inclusão compacta, então para mostrar que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$,basta mostrarmos que

$$i\beta U - A_j U = 0 \Rightarrow U = 0.$$

Com efeito, considere $U \in D(A_j)$ satisfazendo

$$i\beta U - A_j U = 0. \tag{3.56}$$

Em termos de suas componentes, temos

$$i\beta u - \vartheta = 0, \tag{3.57}$$

$$i\beta\vartheta - u_{xx} + \gamma\theta_x = 0, \tag{3.58}$$

$$i\beta\theta - \theta_{xx} + \gamma\vartheta_x = 0. \tag{3.59}$$

Assim, tomando o produto interno de (3.56) com U em $\mathcal{H}_j$, temos

$$\begin{aligned} i\beta(U,U)_{\mathcal{H}_j} - (A_jU,U)_{\mathcal{H}_j} = 0 \quad &\Rightarrow \quad i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} - (A_jU,U)_{\mathcal{H}_j} = 0, \\ &\Rightarrow \quad Re\big[i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}_j} - (A_jU,U)_{\mathcal{H}_j}\big] = 0, \\ &\Rightarrow \quad \|\theta_x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré, vem que

$$\frac{1}{L^2}\|\theta\|^2 \le \|\theta_x\|^2 = 0 \Rightarrow \theta = 0.$$

Substituindo em (3.59), e como $\beta \neq 0$, temos que $\vartheta_x = 0$, novamente pela Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\frac{1}{L^2}\|\vartheta\|^2 \le \|\vartheta_x\|^2 = 0 \Rightarrow \vartheta = 0.$$

Analogamente, substituindo em (3.57), vem que $u = 0$. Dessa forma, $U = (0,0,0)$, absurdo. Portanto $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A_j)$.
No que segue, faremos a demonstração do item (ii) para os casos $j = 1$ e $j = 2$ separados.
Caso $j = 1$:
Faremos a prova do item (ii) por contradição, suponha que

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \|(i\beta I_d - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} = \infty,$$

assim, existem $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}_1$ e $\beta_n \in \rho(A_1)$ de tal forma que, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\|(i\beta I_d - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}} \geq n \Leftrightarrow \|(i\beta I_d - A_1)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_1} \geq n\|F_n\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Como existe um único $U \in D(A_1)$ tal que

$$i\beta U - A_1 U = F \text{ em } \mathcal{H}_1,$$

temos que existe uma única $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A_1)$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} = 1$ de tal forma que

$$i\beta_n U_n - A_1 U_n = F_n \text{ em } \mathcal{H}_1,$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} \|(i\beta_n I_d - A_1)^{-1}(i\beta_n U_n - A_1 U_n)\|_{\mathcal{H}_1} &\geq n\|i\beta_n U_n - A_1 U_n\|_{\mathcal{H}_1} \\ \Rightarrow \|(i\beta_n I_d - A_1)^{-1}(i\beta_n I_d - A_1)U_n\|_{\mathcal{H}_1} &\geq n\|i\beta_n U_n - A_1 U_n\|_{\mathcal{H}_1}, \end{aligned}$$

o que nos fornece que

$$\frac{1}{n} \geq \|i\beta_n U_n - A_1 U_n\|_{\mathcal{H}_1},$$

ou seja,

$$\|i\beta_n U_n - A_1 U_n\|_{\mathcal{H}_1} \to 0.$$

De onde segue que

$$i\beta_n U_n - A_1 U_n \to 0 \text{ em } \mathcal{H}_1, \tag{3.60}$$

denotando por $U_n = (u^n, \vartheta^n, \theta^n)$ e reescrevendo (3.60) em termos de sua componentes, obtemos

$$i\beta_n u^n - \vartheta^n \to 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \tag{3.61}$$

$$i\beta_n \vartheta^n - u^n_{xx} + \gamma\theta^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0, L), \tag{3.62}$$

$$i\beta_n \theta^n - \theta^n_{xx} + \gamma\vartheta^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0, L). \tag{3.63}$$

Definindo $X_n := i\beta_n U_n - A_1 U_n$ e fazendo o produto interno de $i\beta_n U_n - A_1 U_n$ com U_n em $\mathcal{H}_1$ e em seguida tomando a parte real e usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} & (i\beta_n U_n - A_1 U_n, U_n)_{\mathcal{H}_1} = (X_n, U_n)_{\mathcal{H}_1} \\ \Rightarrow\ & Re\big[i\beta_n \|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} - (A_1 U_n, U_n)_{\mathcal{H}_1}\big] = Re(X_n, U_n)_{\mathcal{H}_1} \\ \Rightarrow\ & \|\theta^n_x\|^2 = Re(X_n, U_n)_{\mathcal{H}_1} \leq \|X_n\|_{\mathcal{H}_1}\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \\ \Rightarrow\ & \|\theta^n_x\|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\|\theta^n\| \leq L\|\theta^n_x\| \Rightarrow \|\theta^n\| \to 0,$$

ou seja,

$$\theta^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.64}$$

Note ainda que

$$\|X_n\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|i\beta_n u^n_x - \vartheta^n_x\|^2 + \|i\beta_n \vartheta^n - u^n_{xx} + \gamma\theta^n_x\|^2 + \|i\beta_n\theta^n - \theta^n_{xx} + \gamma\vartheta^n_x\|^2 \to 0$$

e

$$\|U_n\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|u^n_x\|^2 + \|\vartheta^n\|^2 + \|\theta^n\|^2 = 1.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned} & \|i\beta_n\theta^n - \theta^n_{xx} + \gamma\vartheta^n_x\|^2 \to 0 \\ \Rightarrow \quad & i\beta_n\theta^n - \theta^n_{xx} + \gamma\vartheta^n_x \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Fazendo o produto interno de (3.65) com θ^n em $L^2(0,L)$, integrando por partes, obtemos que

$$\begin{aligned} & i\beta_n\|\theta^n\|^2 + \underbrace{\|\theta^n_x\|^2}_{\to 0} + \gamma(\vartheta^n_x, \theta^n) \to 0 \\ \Rightarrow \quad & i\beta_n\|\theta^n\|^2 + \gamma(\vartheta^n_x, \theta^n) \to 0. \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} i\beta_n\|\theta^n\|^2 &= i\beta_n\|\theta^n\|^2 + \gamma(\vartheta^n_x, \theta^n) - \gamma(\vartheta^n_x, \theta^n) \\ &= \underbrace{i\beta_n\|\theta^n\|^2 + \gamma(\vartheta^n_x, \theta^n)}_{\to 0} + \gamma(\vartheta^n, \theta^n_x) \to 0, \end{aligned}$$

o que nos fornece que

$$\begin{aligned} & i\beta_n\|\theta^n\|^2 \to 0 \\ \Rightarrow \quad & |\beta_n|\|\theta^n\|^2 \to 0 \\ \Rightarrow \quad & \beta_n^{\frac{1}{2}}\theta^n \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Afirmação : $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \rho(A_1)$ é limitada.

De fato, suponha que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \rho(A_1)$ é ilimitada, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $M_n > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$|\beta_{n_0}| > M_n \Rightarrow |\beta_{n_0}|\|\theta^{n_0}\|^2 > M_n\|\theta^{n_0}\|^2,$$

usando (3.66) chegamos em uma contradição. Assim, temos que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \rho(A_1)$ é limitada, provando assim a afirmação. Agora, de (3.65), como $\theta^n \to 0$ e usando o fato que $\|\vartheta_x^n\| \leq 1$, obtemos que (θ_{xx}^n) é limitada em $L^2(0,L)$. Fazendo o produto interno de (3.62) com ϑ^n em $L^2(0,L)$ e usando integração por partes, obtemos

$$i\beta_n\|\vartheta^n\|^2 + (u_x^n, \vartheta_x^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.67}$$

Fazendo o produto interno de (3.61) com u_x^n em $L^2(0,L)$ e usando integração por partes

$$i\beta_n\|u_x^n\|^2 - (\vartheta_x^n, u_x^n) \to 0 \text{ em } L^2(0,L). \tag{3.68}$$

Somando (3.68) de (3.67) e considerando o corpo dos números reais, tem-se

$$\beta_n\|\vartheta^n\|^2 + \beta_n\|u_x^n\|^2 \longrightarrow 0 \Longrightarrow \beta_n\|\vartheta^n\|^2 \longrightarrow 0 \text{ e } \beta_n\|u_x^n\|^2 \longrightarrow 0 \tag{3.69}$$

Como a sequencia (β_n) é limitada, existe uma subsequência (β_n) e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_n \longrightarrow \beta$. Observe que as convergências em (3.69) se mantém para as subsequências.

Por outro lado como $\|U_n - U\|_{\mathcal{H}_1} \longrightarrow 0$ segue que

$$\|u_x^n - u_x\|^2 + \|\vartheta^n - \vartheta\|^2 + \|\theta^n - \theta\|^2 \longrightarrow 0.$$

Assim temos que $\beta_n\|\vartheta^n\|^2 \longrightarrow \beta\|\vartheta\|^2$, e pela unicidade do limite segue que $\beta\|\vartheta\|^2 = 0$, ou seja, $\beta = 0$ ou $\vartheta = 0$.

Caso 1: Suponha que $\vartheta = 0$. Sabemos que

$$i\beta_n u^n - \vartheta^n \longrightarrow i\beta u - \vartheta = i\beta u$$

em L^2, mas de (3.61) sabemos que converge para zero, logo pela unicidade do limite $i\beta u =$, ou seja, $\beta = 0$ ou $u = 0$.

Caso 1.1: Se $u = 0$, chegamos que no absurdo de $U = 0$.

Caso 1.2: Suponha que $\beta = 0$.

Com (u^n) é limitada em L^2, temos por (3.62) que

$$(i\beta_n\vartheta^n - u_{xx}^n + \gamma\theta_x^n, u^n) \longrightarrow 0,$$

ou seja, usando integração por partes

$$i\beta_n(\vartheta^n, u^n) + \|u_x^n\|^2 + \gamma(\theta_x^n, u^n) \longrightarrow 0, \tag{3.70}$$

Mas $i\beta_n(\vartheta^n, u^n) \longrightarrow 0$ e $\gamma(\theta_x^n, u^n) \longrightarrow 0$, logo em (3.70) segue que $\|u_x^n\|^2 \longrightarrow 0$ onde por unicidade do limite temo que $\|u_x\|^2 = 0$, ou seja, $u = 0$ e chegamos que no absurdo de $U = 0$.

Caso 2: Suponha que $\beta = 0$.

Sabemos que

$$i\beta_n u^n - \vartheta^n \longrightarrow i\beta u - \vartheta = \vartheta \text{ em } L^2,$$

logo por (3.61) e a unicidade do limite segue que $\vartheta = 0$.

Com (u^n) é limitada em L^2, temos por (3.62) que

$$(i\beta_n \vartheta^n - u^n_{xx} + \gamma\theta^n_x, u^n) \longrightarrow 0,$$

ou seja, usando integração por partes

$$i\beta_n(\vartheta^n, u^n) + \|u^n_x\|^2 + \gamma(\theta^n_x, u^n) \longrightarrow 0, \tag{3.71}$$

Mas $i\beta_n(\vartheta^n, u^n) \longrightarrow 0$ e $\gamma(\theta^n_x, u^n) \longrightarrow 0$, logo $\|u^n_x\|^2 \longrightarrow 0$ onde por unicidade do limite temo que $\|u_x\|^2 = 0$, ou seja, $u = 0$ e, segue que $U = (0,0,0)$, um absurdo. Portanto,

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \sup \|(i\beta I_d - A_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)} < \infty,$$

provando assim o Teorema 3.9 para o caso $j = 1$.

Caso j=2:

Consideremos agora $U \in D(A_2)$ solução da equação resolvente

$$i\beta U - A_2 U = F, \tag{3.72}$$

mostraremos que dada $F = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}_2$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(i\beta I_d - A_2)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Dada $F \in \mathcal{H}_2, \exists! U \in D(A_2)$ tal que

$$(i\beta I_d - A_2)U = F \Leftrightarrow U = (i\beta I_d - A_2)^{-1} F.$$

Desse modo,

$$\|(i\beta I_d - A_2)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2} \Leftrightarrow \sup_{\|F\|_{\mathcal{H}_2}=1; F\in\mathcal{H}_2} \|(i\beta I_d - A_2)^{-1}\|_{\mathcal{H}_2} \leq C,$$

ou seja, é suficiente mostrar que $\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_2}$.

Reescrevendo (3.72) em termos de suas componentes, temos

$$i\beta u - \vartheta = f_1, \tag{3.73}$$

$$i\beta\vartheta - u_{xx} + \gamma\theta_x = f_2, \tag{3.74}$$

$$i\beta\theta - \theta_{xx} + \gamma\vartheta_x = f_3. \tag{3.75}$$

De (3.32), vem

$$Re(A_2U, U)_{\mathcal{H}_2} = -\|\theta_x\|^2,$$

o que nos fornece que

$$\|\theta\|^2 \leq L^2\|\theta_x\|^2 \leq L^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}\|F\|_{\mathcal{H}_2} \tag{3.76}$$

Agora, integrando (3.75) de 0 à x, temos

$$\begin{aligned} & i\beta\int_0^x \theta(s,t)ds - \int_0^x \theta_{xx}(s,t)ds + \gamma\int_0^x \vartheta_x(s,t)ds = \int_0^x f_3(s,t)ds \\ \Rightarrow\quad & i\beta\int_0^x \theta(s,t)ds - \theta_x + \gamma\vartheta = \int_0^x f_3(s,t)ds \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(0,L)$ com ϑ, temos

$$i\beta\big(\int_0^x \theta(s,t)ds, \vartheta\big) - \big(\theta_x, \vartheta\big) + \gamma\|\vartheta\|^2 = \big(\int_0^x f_3(s,t)ds, \vartheta\big),$$

ou ainda,

$$\gamma\|\vartheta\|^2 = \left(\int_0^x f_3(s,t)ds, \vartheta\right) + \big(\int_0^x \theta(s,t)ds, i\beta\vartheta\big) + \big(\theta_x, \vartheta\big).$$

Usando (3.74) e integrando por partes

$$\begin{aligned} \gamma\|\vartheta\|^2 &= \left(\int_0^x f_3(s,t)ds, \vartheta\right) + \left(\int_0^x \theta(s,t)ds, f_2 + u_{xx} - \gamma\theta_x\right) + \big(\theta_x, \vartheta\big) \\ &= \big(g\int_0^x f_3(s,t)ds, \vartheta\Big) + \left(\int_0^x \theta(s,t)ds, f_2\right) + \left(\int_0^x \theta(s,t)ds, u_{xx}\right) \\ &- \gamma\left(\int_0^x \theta(s,t)ds, \theta_x\right) + \big(\theta_x, \vartheta\big) \\ &= \left(\int_0^x f_3(s,t)ds, \vartheta\right) + \big(\theta_x, \vartheta\big) + \left(\int_0^x \theta(s,t)ds, f_2\right) - \big(u_x, \theta\big) \\ &+ \gamma\|\theta\|^2. \end{aligned}$$

Tomando o módulo, e aplicando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular, vem que

$$
\begin{aligned}
\gamma\|\vartheta\|^2 &\leq \left\|\int_0^x f_3(s,t)ds\right\|\|\vartheta\| + \|\theta_x\|\|\vartheta\| + \left\|\int_0^x \theta(s,t)ds\right\|\|f_2\| + \|u_x\|\|\theta\| + \gamma\|\theta\|^2 \\
&\leq \sqrt{L}\|f_3\|\|\vartheta\| + \|\theta_x\|\|\vartheta\| + \sqrt{L}\|\theta\|\|f_2\| + \|u_x\|\|\theta\| + \gamma\|\theta\|^2.
\end{aligned}
$$

Reagrupando os termos e usando as Desigualdades de Poincaré e Young, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\vartheta\|^2 &\leq \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|f_3\|\|\vartheta\| + \frac{1}{\gamma}\|\theta_x\|\|\vartheta\| + \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|\theta\|\|f_2\| + \frac{1}{\gamma}\|u_x\|\|\theta\| + \|\theta\|^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|f_3\|\|\vartheta\| + \frac{1}{\gamma}\|\theta_x\|\|\vartheta\| + \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|\theta\|\|f_2\| + \frac{L}{\gamma}\|u_x\|\|\theta_x\| + L^2\|\theta_x\|^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|f_3\|\|\vartheta\| + \frac{1}{2\gamma^2}\|\theta_x\|^2 + \frac{1}{2}\|\vartheta\|^2 + \frac{\sqrt{L}}{\gamma}\|\theta\|\|f_2\| \\
&+ \frac{C_{\varepsilon_1}L^2}{\gamma^2}\|\theta_x\|^2 + \varepsilon_1\|u_x\|^2 + L^2\|\theta_x\|^2 \\
&\leq \left[\frac{2\sqrt{L}}{\gamma} + L^2 + \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{C_{\varepsilon_1}L^2}{\gamma^2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + \varepsilon_1\|u_x\|^2 + \frac{1}{2}\|\vartheta\|^2.
\end{aligned}
$$

Tomando $C_1 = \left[\frac{\sqrt{L}}{\gamma} + \frac{L^2}{2} + \frac{1}{4\gamma^2} + \frac{C_{\varepsilon_1}L^2}{2\gamma^2}\right]$ e reorganizando os termos, obtemos que

$$
\|\vartheta\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + 2\varepsilon_1\|u_x\|^2.
$$

Finalmente, fazendo o produto interno em $L^2(0,L)$ de (3.74) com u e integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
& i\beta(\vartheta, u) = (f_2, u) + (u_{xx}, u) - \gamma(\theta_x, u) \\
\Rightarrow\quad & \|u_x\|^2 = (\vartheta, i\beta u) + (f_2, u) + \gamma(\theta, u_x).
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Tomando o módulo em (3.77), usando (3.73), (3.76) e as Desiguldades de Poincaré, Cauchy-Schwarz, Triangular e Young, seque que

$$
\begin{aligned}
\|u_x\|^2 &\leq \|f_2\|\|u\| + \gamma\|\theta\|\|u_x\| + \|\vartheta\|\|f_1\| + \|\vartheta\|^2 \\
&\leq L\|f_2\|\|u_x\| + L\gamma\|\theta_x\|\|u_x\| + L\|\vartheta\|\|f_{1x}\| + \|\vartheta\|^2 \\
&\leq \left(2L + \frac{L^2\gamma^2}{2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2 + \|\vartheta\|^2.
\end{aligned}
$$

Tomando $C_2 = 4L + L^2\gamma^2 + 2C_1$, obtemos que

$$\|u_x\|^2 \leq C_2\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2\|F\|_{\mathcal{H}_2}^2 + 4\varepsilon_1\|u_x\|^2.$$

Dessa forma,

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|u_x\|^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2 \leq (C_2 + C_1 + L)\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2} + 6\varepsilon_1\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2,$$

tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{12}$ e $C_3 = 2(C_2 + C_1 + L)$,

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}_2}\|U\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Novamente, usando a Desigualdade de Young, obtemos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}_2},$$

o que conclui a prova do Teorema 3.9 para o caso $j = 2$.

□

3.4 SISTEMA DE TIMOSHENKO

O Sistema Timoshenko é um modelo matemático usado em mecânica de materiais para analisar o comportamento de vigas, o qual descreve a vibração de uma viga levando em consideração o deslocamento transversal (vertical) e o ângulo de rotação. Este modelo foi desenvolvido na década de 1920 pelo engenheiro ucraniano Stephen Timoshenko.

O modelo de Timoshenko (tendo suas origens nos trabalhos de Timoshenko [34, 35]), leva em consideração a distribuição de deformações na seção transversal da viga, o que permite uma melhor aproximação da distribuição real de tensões e deformações. A influência do efeito de cisalhamento também é levada em consideração no cálculo das deformações e tensões, o que o torna mais preciso do que o modelo de vigas de Euler-Bernoulli, que não considera essa influência.

Assim, mediante as hipóteses e dedução do modelo dado em [33], obtemos o seguinte sistema de Timoshenko com dissipações friccionais (fracas)

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.78}$$

Considerando que as extremidade da viga estão fixadas, tomamos as seguintes condições na fronteira $\{0, L\}$ da viga

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{3.79}$$

Como ambas equações do sistema possuem derivadas temporais de segunda ordem, então as condições iniciais associadas ao sistem a (3.78) são dadas por

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x),\ x \in (0,L). \tag{3.80}$$

Feitas essas considerações, nosso objetivo é determinar a existência e unicidade de solução para o PVIF (3.78)-(3.80) utilizando a teoria de semigrupos lineares.

3.4.1 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte PVFI:

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\varphi_t = 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\psi_t = 0, & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), & x \in (0,L), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), & x \in (0,L), \\ \varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3.81}$$

Mostraremos que o sistema (3.81), possui uma única solução, tal exposição será feita via teoria de semigrupos lineares. Para tanto, introduziremos as seguintes notações $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{\alpha}{\rho_2}\Phi \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{\beta}{\rho_2}\Psi \end{bmatrix} := AU,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & -\dfrac{\alpha}{\rho_1}I_d & \dfrac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \\ -\dfrac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \dfrac{b\partial_{xx} - kI_d}{\rho_2} & -\dfrac{\beta}{\rho_2}I_d \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

e

$$U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T := U_0.$$

Assim, podemos escrever o seguinte problema de Cauchy abstrato associado ao sistema (3.81)

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t \geq 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.83}$$

onde A é definido em (3.82) e com seu dominio dado por,

$$D(A) = (H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L) \times (H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L),$$

afim de contemplar as condições de fronteira em (3.81), definimos o seguinte espaço de Hilbert:

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$$

com produto interno e norma dados por

$$((U, \hat{U}))_{\mathcal{H}} = (\varphi_x, \hat{\varphi_x}) + (\psi_x, \hat{\psi_x}) + (\Phi, \hat{\Phi}) + (\Psi, \hat{\Psi})$$

e

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 \tag{3.84}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}) \in \mathcal{H}$.

Lema 3.10. *Consideremos o seguinte espaço de fase*

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L).$$

Então, dados quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}) \in \mathcal{H}$, temos que:

(i) $(U, \hat{U})_{\mathcal{H}}$ é um produto interno em $\mathcal{H}$, onde

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi_x} + \hat{\psi}) + b(\psi_x, \hat{\psi_x}) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}).$$

(ii) A norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ dada em (3.84) é equivalente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, onde

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2.$$

Demonstração. (i) No que segue, mostraremos apenas que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0,$$

as demais propriedades seguem naturalmente da definição de produto interno em $L^2(0,L)$ aplicada a cada parcela de $(U,\hat{U})_{\mathcal{H}}$.
Dado $U \in \mathcal{H}$, temos que

$$(U,U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \|\varphi_x + \psi\| = \|\psi_x\| = \|\Phi\| = \|\Psi\| = 0.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\|\psi_x\| = 0 \Rightarrow \|\psi\| = 0 \Rightarrow \psi = 0,$$

assim, novamente pela Desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|\varphi_x\| = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \Rightarrow \varphi = 0,$$

o que nos leva a concluir que

$$(U,U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0.$$

(ii) Dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in \mathcal{H}$, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular juntamente com o Lema 2.28, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathcal{H}} &= k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 \\
&\leq 2k\|\varphi_x\|^2 + 2L^2k\|\psi_x\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 \\
&\leq m_1(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) \\
&= m_1|U|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde $m_1 = \max\{2k, 2kL^2 + b, \rho_1, \rho_2\}$, ou seja,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq m_1|U|^2_{\mathcal{H}}.$$

Analogamente, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular, e o Lema 2.28, note que

$$\begin{aligned}
|U|^2_{\mathcal{H}} &= \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 \\
&\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2L^2\|\psi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 \\
&= \frac{2k}{k}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{(2L^2+1)b}{b}\|\psi_x\| + \frac{\rho_1}{\rho_1}\|\Phi\|^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2}\|\Psi\|^2 \\
&\leq m_2\big[k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2\big] \\
&= m_2\|U\|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde, $m_2 = \max\left\{\frac{2}{k}, \frac{2L^2+1}{b}, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right\}$, ou ainda,

$$|U|^2_{\mathcal{H}} \leq m_2 \|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$m_3 |U|^2_{\mathcal{H}} \leq \|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq m_1 |U|^2_{\mathcal{H}},$$

com $m_3 = \frac{1}{m_2}$ provando o item (ii) do lema. □

Sob as considerações mencionadas, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o PVI (3.83) conforme segue.

Teorema 3.11. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (3.83) possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$.

Demonstração. Conforme o Teorema 2.100, é suficiente mostrar que A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Assim, pelo Teorema de Lummer-Phillips é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$;

(ii) A é um operador dissipativo em $\mathcal{H}$;

(iii) $I_d - A = \mathcal{H}$.

A veracidade do item (i) segue imediatamente dos lemas 2.65 e 2.76, pois $\overline{H^1_0(0,L)} = L^2(0,L)$ e $\overline{H^1_0(0,L) \cap H^2(0,L)} = H^1_0(0,L)$, ou seja,

$$\overline{D(A)} = \mathcal{H}.$$

(ii) Seja $U \in D(A)$, observe que

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L k(\Phi_x+\Psi)\overline{(\varphi_x+\psi)}dx + \int_0^L k((\varphi_x+\psi)_x - \alpha\Phi)\overline{\Phi}dx \\
&+ \int_0^L (b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi) - \beta\Psi)\overline{\Psi}dx + \int_0^L b\Psi_x\overline{\psi_x}dx \\
&= k\left[\int_0^L \Phi_x\overline{(\varphi_x+\psi)}dx + \int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi)}dx\right] + \int_0^L k(\varphi_x+\psi)_x\overline{\Phi}dx \\
&- \alpha\|\Phi\|^2 - \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\overline{\Psi}dx - \beta\|\Psi\|^2 + \int_0^L b\Psi_x\overline{\psi_x}dx + \int_0^L b\psi_{xx}\overline{\Psi}dx \\
&= k[(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi) - \overline{(\Phi_x+\Psi,\varphi_x+\psi)}] + b[(\Psi_x,\psi) - \overline{(\Psi_x,\psi)}] \\
&- \alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real obtemos

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -(\alpha\|\Phi\|^2 + \beta\|\Psi\|^2) \leq 0.$$

Portanto A é dissipativo em $\mathcal{H}$.
(iii) Dado $F = (f_1,f_2,f_3,f_4)^T \in \mathcal{H}$ mostraremos que a equação resolvente $(I_d - A)U = F$ possui uma única solução $U \in D(A)$. De fato, reescrevendo-a em termos de suas componentes, obtém-se

$$\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.85}$$
$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi = f_2, \tag{3.86}$$
$$\psi - \Psi = f_3, \tag{3.87}$$
$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \frac{\beta}{\rho_2}\Psi = f_4. \tag{3.88}$$

Pela equação (3.85) temos que $\Phi = \varphi - f_1$, analogamente de (3.87), temos que $\Psi = \psi - f_3$, substituindo nas equações (3.86) e (3.88), segue que

$$\begin{cases} (\rho_1+\alpha)\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x = (\rho_1+\alpha)f_1 + \rho_1 f_2, \\ (\rho_2+\beta)\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) = (\rho_2+\beta)f_3 + \rho_2 f_4, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} M_1\varphi - k(\varphi_x+\psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0,L), \\ M_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x+\psi) = g_2 & \text{em } L^2(0,L)\,, \end{cases} \tag{3.89}$$

onde,

$$g_1 = (\rho_1+\alpha)f_1 + \rho_1 f_2, g_2 = (\rho_2+\beta)f_3 + \rho_2 f_4, M_1 = \rho_1+\alpha \text{ e } M_2 = \rho_2+\beta.$$

Ademais, utilizando o Lema 2.103, segue que o sistema (3.89) possui uma única solução.

Como $g_1 = (\rho_1 + \alpha)f_1 + \rho_1 f_2$, $g_2 = (\rho_2 + \beta)f_3 + \rho_2 f_4$, $M_1 = \rho_1 + \alpha$ e $M_2 = \rho_2 + \beta$, e relembrando que $\Phi = \varphi - f_1$, $\Psi = \psi - f_3$, conseguimos encontrar $U \in D(A)$ solução de (3.85)-(3.88). Concluindo assim a prova do Teorema 3.11. $\square$

3.4.2 Estabilidade Exponencial

Nesta etapa, iremos examinar a estabilidade exponencial do sistema (3.83) utilizando o Teorema 2.101. Iniciaremos verificando que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Lema 3.12. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.82). Então, $0 \in \rho(A)$.*

Demonstração. Observe que mostrar que $0 \in \rho(A)$ é o mesmo que mostrarmos que o operador $-A^{-1}$ existe e é limitado. Dada $F \in \mathcal{H}$ mostraremos que equação resolvente

$$-AU = F, \tag{3.90}$$

possui uma única solução $U \in D(A)$, reescrevendo (3.90) em termos de suas componentes, temos

$$-\Phi = f_1, \tag{3.91}$$
$$-k(\varphi_x + \psi)_x + \alpha\Phi = \rho_1 f_2, \tag{3.92}$$
$$-\Psi = f_3, \tag{3.93}$$
$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \beta\Psi = \rho_2 f_4. \tag{3.94}$$

De (3.91) e (3.93), temos respectivamente que, $\Phi = -f_1$ e $\Psi = -f_3$.
Substituindo em (3.92) e (3.94), e definindo

$$\rho_1 f_2 + \alpha f_1 = g_1,$$

$$\rho_2 f_4 + \beta f_3 = g_2,$$

obtemos o seguinte sistema nas variaveis φ e ψ,

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0, L), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = g_2 & \text{em } L^2(0, L), \end{cases}$$

O qual possui uma única solução, via Lema 2.104.

Mostraremos agora que $-A^{-1}$ é limitado, como $-A^{-1}.F = U$ é suficiente mostrar que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

relembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2$$

estimaremos uma limitação para cada termo da norma de U. No que segue, note que
• Usando (3.91) , e aplicando as desigualdades de Poincaré e Triangular, vem que

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|^2 = \|f_1\|^2 &\leq L^2\|(f_1)_x\|^2 \\
&\leq L^2(\|(f_1)_x + f_3\| + \|f_3\|)^2 \\
&\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^2\|f_3\|^2 \\
&\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^4\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq 2L^2\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
\Rightarrow \rho_1\|\Phi\|^2 &\leq \rho_1 2L^2\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

• Analogamente, de (3.93), temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 = \|f_3\|^2 &\leq L^2\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq \frac{L^2}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
\Rightarrow \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq \frac{\rho_2 L^2}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

• Fazendo o produto interno de (3.92) por φ em $L^2(0,L)$, usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
&-k((\varphi_x + \psi)_x, \varphi) + \alpha(\Phi, \varphi) = \rho_1(f_2, \varphi) \\
\Rightarrow\ &k(\varphi_x + \psi, \varphi_x) + \alpha(\Phi, \varphi) = \rho_1(f_2, \varphi), \qquad (3.97)
\end{aligned}$$

e ainda, fazendo o produto interno de (3.94) por ψ em $L^2(0,L)$, integrando por partes, vem que

$$\begin{aligned}
&-b(\psi_{xx}, \psi) + k(\varphi_x + \psi, \psi) + \beta(\Psi, \psi) = \rho_2(f_4, \psi) \\
\Rightarrow\ &b(\psi_x, \psi_x) + k(\varphi_x + \psi, \psi) = \rho_2(f_4, \psi) + \beta(\Psi, \psi). \qquad (3.98)
\end{aligned}$$

Assim, somando (3.97) e (3.98), e usando as Desigualdades de Poincaré, Cauchy-Schwarz,

Young e Triangular,

$$
\begin{aligned}
b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(f_4,\psi)+\rho_1(f_2,\varphi)+\alpha(\Phi,\varphi)+\beta(\Psi,\psi)\\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x\| + \alpha L\|\Phi\|\|\varphi_x\| + L\beta\|\Psi\|\|\psi_x\|\\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\big[\|\varphi_x+\psi\| + L\|\psi_x\|\big]\\
&+ \alpha L\|\Phi\|\big[\|\varphi_x+\psi\| + L\|\psi_x\|\big] + L\beta\|\Psi\|\|\psi_x\|\\
&\leq L\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + L^2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + L\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ \alpha L\|\Phi\|\|\varphi_x+\psi\| + L^2\alpha\|\Phi\|\|\psi_x\| + L\beta\|\Psi\|\|\psi_x\|\\
&\leq L\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + L^2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + L\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ C_{\varepsilon_1}\alpha^2L^2\|\Phi\|^2 + \varepsilon_1\|\varphi_x+\psi\|^2 + C_{\varepsilon_2}L^4\alpha^2\|\Phi\|^2\\
&+ \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 + C_{\varepsilon_3}\beta^2L^2\|\Psi\|^2 + \varepsilon_3\|\psi_x\|^2,
\end{aligned}
$$

tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{k}{2}$ e $\varepsilon_2=\varepsilon_3=\dfrac{b}{4}$, vem que $C_{\varepsilon_1}=\dfrac{1}{2k}$ e $C_{\varepsilon_2}=C_{\varepsilon_3}=\dfrac{1}{b}$.
Assim,

$$
b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x+\psi\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.99}
$$

onde $C_1 = 2\left[\dfrac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \dfrac{L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \dfrac{L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}} + \dfrac{L^2\alpha}{2k} + \dfrac{L^4\alpha}{b} + \dfrac{L^2\beta}{b}\right]$.
Dessa forma, de (3.95), (3.96) e (3.99), obtemos

$$
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
$$

onde $C_2 = \dfrac{\rho_2L^2}{\sqrt{b}} + \rho_1 2L^2(\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}})$.
Aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, temos

$$
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{C_1^2}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}^2}{2} + C_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
$$

o que nos leva a concluir que

$$
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (2C_2 + C_1^2)\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
$$

Portanto, existe um $C>0$ tal que

$$
\|(-A)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.
$$

Concluindo a prova do Lema. □

Teorema 3.13. *Sob as notações da subsessão 3.4.1 e hipóteses do Teorema 3.11, o semigrupo*

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *correspondente ao sistema (3.81) é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $C, \omega > 0$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\omega t}, \ \ t \geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ *de (3.83) satisfaz*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.101, basta mostrar que

(a) $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$;

(b) $\lim\limits_{|\delta|\to\infty} \|(i\delta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$,

onde $\rho(A)$ designa o conjunto resolvente do operador A definido em (3.82).
(a) Dos lemas 2.65 e 2.76, temos que $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \hookrightarrow H_0^1(0,L)$ e $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, o que nos fornece que $D(A) \hookrightarrow \mathcal{H}$, então $\rho(A)$ é formado apenas por autovalores de A. Suponha, por absurdo, que $i\mathbb{R} \subsetneq \rho(A)$. Então existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $i\delta \notin \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ assim, $i\delta \in \sigma(A)$ Considere $0 \neq U \in D(A)$ autovetor associado a δ, isto é,

$$AU = i\delta U \Leftrightarrow AU - i\delta U = 0.$$

Então, tomando o produto interno com U em $\mathcal{H}$ e, em seguida tomando a parte real, obtemos

$$\begin{aligned} AU - i\delta U = 0 \ &\Leftrightarrow \ (AU, U) - i\delta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ Re[(AU, U) - i\delta\|U\|_{\mathcal{H}}^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow \ Re(AU, U) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ -\alpha\|\Phi\|^2 - \beta\|\Psi\|^2 = 0, \end{aligned}$$

como $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, segue que $\Phi = \Psi = 0$, e ainda, como $AU - i\delta U = 0$, temos

$$\Phi - i\delta\varphi = 0, \tag{3.100}$$
$$\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi - i\delta\Phi = 0, \tag{3.101}$$
$$\Psi - i\delta\psi = 0, \tag{3.102}$$
$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\beta}{\rho_2}\Psi - i\delta\Psi = 0. \tag{3.103}$$

Assim, substituindo $\Phi = 0$ e $\Psi = 0$ em (3.100) e (3.102), respectivamente, obtemos que,
$\varphi = \psi = 0$, ou seja , $U = (0,0,0,0)$, absurdo, já que tomamos U como sendo um autovetor de A. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$
(b) Seja $F \in \mathcal{H}$ existe um único $U \in D(A)$ tal que $(A - i\delta I_d)U = F$ para todo $\delta \in \mathbb{R}$. Então

$U = (A - i\delta I_d)^{-1}F$. Assim, para mostrar que $(A - i\delta I_d)^{-1}$ é limitado para todo $\delta \in \mathbb{R}$, basta mostrar que existe $C > 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{H}$

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $U = (A - i\delta U)^{-1}F$. Consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi) \in D(A)$ tal que $U = (A - i\delta U)^{-1}F$, para todo δ, assim

$$\begin{aligned} i\delta U - AU = F \quad &\Rightarrow \quad i\delta(U,U)_{\mathcal{H}} - (AU,U)_{\mathcal{H}} = (F,U) \\ &\Rightarrow \quad Re\big[i\delta(U,U)_{\mathcal{H}} - (AU,U)_{\mathcal{H}}\big] = Re(F,U) \\ &\Rightarrow \quad \alpha\|\Phi\|^2 + \beta\|\Psi\|^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Poranto,

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq \frac{\rho_1}{\alpha}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{3.104}$$

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq \frac{\rho_2}{\beta}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.105}$$

E ainda, reescrevendo $i\delta U - AU = F$ em termo de suas componentes, obtemos

$$i\delta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.106}$$

$$i\delta\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}\Phi = f_2, \tag{3.107}$$

$$i\delta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.108}$$

$$i\delta\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\beta}{\rho_2}\Psi = f_4. \tag{3.109}$$

Fazendo o produto interno em $L^2(0, L)$ de (3.107) por φ, integração por partes e usando (3.106), obtemos que

$$k(\varphi_x + \psi, \varphi_x) = \rho_1(f_2, \varphi) + \rho_1(\Phi, f_1) + \rho_1\|\Phi\|^2 - \alpha(\Phi, \varphi). \tag{3.110}$$

Analogamente, fazendo o produto interno em $L^2(0, L)$ de (3.109) por ψ, integração por partes e usando (3.108), temos

$$k(\varphi_x + \psi, \psi) + b\|\psi_x\|^2 = \rho_2(f_4, \psi) + \rho_2(\Psi, f_3) + \rho_2\|\Psi\|^2 - \beta(\Psi, \psi). \tag{3.111}$$

Assim, somando (3.110) com (3.111), segue que

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 \quad &= \quad \rho_2(f_4, \psi) + \rho_2(\Psi, f_3) + \rho_2\|\Psi\|^2 - \beta(\Psi, \psi) \\ &+ \quad \rho_1(f_2, \varphi) + \rho_1(\Phi, f_1) + \rho_1\|\Phi\|^2 - \alpha(\Phi, \varphi), \end{aligned}$$

tomando o módulo e utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Poincaré, Young e Triangular, temos

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2 &\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\|+L\rho_2\|\Psi\|\|(f_3)_x\|+\rho_2\|\Psi\|^2+L\beta\|\Psi\|\|\psi_x\| \\
&+ L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x+\psi\|+\rho_1L^2\|f_2\|\|\psi_x\|+\rho_1\|\Phi\|\|f_1\| \\
&+ \rho_1\|\Phi\|^2+L\alpha\|\Phi\|\|\varphi_x+\psi\|+L^2\alpha\|\Phi\|\|\psi_x\| \\
&\leq C_{\varepsilon_1}\rho_2^2L^2\|f_4\|^2+\varepsilon_1\|\psi_x\|^2+L\rho_2\|\Psi\|\|(f_3)_x\|+\rho_2\|\Psi\|^2 \\
&+ C_{\varepsilon_2}L^2\beta^2\|\Psi\|^2+\varepsilon_2\|\psi_x\|^2+C_{\varepsilon_3}L^2\rho_1^2\|f_2\|^2+\varepsilon_3\|\varphi_x+\psi\|^2 \\
&+ C_{\varepsilon_4}L^4\|f_2\|^2+\varepsilon_4\|\psi_x\|^2+L\rho_1\|\Phi\|\|(f_1)_x+f_3\| \\
&+ L^2\rho_1\|\Phi\|\|(f_3)_x\|+\rho_1\|\Phi\|^2+C_{\varepsilon_5}L^2\alpha^2\|\Phi\|^2 \\
&+ \varepsilon_5\|\varphi_x+\psi\|^2+C_{\varepsilon_6}L^4\alpha^2\|\Phi\|^2+\varepsilon_6\|\psi_x\|^2.
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_4=\varepsilon_6=\dfrac{1}{8}$, temos que $C_{\varepsilon_1}=C_{\varepsilon_2}=C_{\varepsilon_4}=C_{\varepsilon_6}=2$. Agora, tomando $\varepsilon_3=\varepsilon_5=\dfrac{1}{4}$, temos que $C_{\varepsilon_3}=C_{\varepsilon_5}=1$, logo

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2 &\leq 4L^2\rho_2^2\|f_4\|^2+2\rho_2\|\Psi\|^2+2L\rho_2\|\Psi\|\|(f_3)_x\| \\
&+ 4L^2\beta^2\|\Psi\|^2+2L^2\rho_1^2\|f_2\|^2+4L^4\|f_4\|^2 \\
&+ 2L\rho_1\|\Phi\|\|(f_1)_x+f_3\|+2L^2\rho_1\|\Phi\|\|(f_3)_x\| \\
&+ 2\rho_1\|\Phi\|^2+2L^2\alpha^2\|\Phi\|^2+4L^4\alpha^2\|\Phi\|^2,
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
k\|\varphi_x+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2 &\leq 4L^2\rho_2\|F\|^2_{\mathcal{H}}+\frac{2\rho_2}{\beta}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|+\frac{2L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ 4L^2\beta\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+2L^2\rho_1\|F\|^2_{\mathcal{H}}+\frac{4L^4}{\rho_2}\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{2\rho_1}{\alpha}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+2L^2\alpha\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+4L^4\alpha\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&= \left[\frac{2\rho_2}{\beta}+\frac{2L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}+4L^2\beta+\frac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\right]\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[\frac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}+\frac{2\rho_1}{\alpha}+2L^2\alpha+4L^4\alpha\right]\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[4L^2\rho_2+2L^2\rho_1+\frac{4L^4}{\rho_2}\right]\|F\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.104) e (3.105), segue que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \left[\frac{2\rho_2}{\beta} + \frac{2L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + 4L^2\beta + \frac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\right]\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[\frac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}} + \frac{2\rho_1}{\alpha} + 2L^2\alpha + 4L^4\alpha + \frac{\rho_1}{\alpha} + \frac{\rho_2}{\beta}\right]\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \left[4L^2\rho_2 + 2L^2\rho_1 + \frac{4L^4}{\rho_2}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \left[\frac{2\rho_2}{\beta} + \frac{2L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + 4L^2\beta + \frac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \frac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}} + \frac{2\rho_1}{\alpha} + 2L^2\alpha + 4L^4\alpha + \frac{\rho_1}{\alpha} + \frac{\rho_2}{\beta}\right]$ e
$C_2 = \left[4L^2\rho_2 + 2L^2\rho_1 + \frac{4L^4}{\rho_2}\right]$, temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Usando a Desigualdade de Young, obtemos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_1^2}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_2\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que nos fornece que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (C_1^2 + C_2)\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

como queríamos demonstrar. Portanto, segue dos itens (a) e (b) que o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ correspondente ao sistema (3.81) é exponencialmente estável. $\square$

3.5 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM LEI TÉRMICA DE FOURIER

Nesta seção continuaremos usando as notações introduzidas na Seção 3.4. No entanto, agora consideramos o sistema de Timoshenko em meios não isotérmicos, ou seja, sob a influência de temperatura, o que resulta num sistema termoelástico de vigas de Timoshenko. Para título de informação, ressaltamos que os trabalhos pioneiros no estudo de sistemas de Timoshenko termoelásticos podem ser encontrados em [15, 27].

Assim, um modelo linear que descreve vibrações de vigas de Timoshenko de comprimento $L > 0$ em meios não isotérmicos segundo a Lei de Fourier é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\
\rho_3\theta_t - c\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty).
\end{cases} \tag{3.112}$$

O sistema (3.112) será estudado no domínio $(0, L) \times (0, \infty)$. Para diferenciar do caso anterior no que diz respeito às condições de fronteira, assumiremos neste caso que a viga não possui deslocamento vertical e transferência de calor nas extremidades da viga, ao passo que o ângulo poderá variar. Em termos matemáticos, adotaremos condições de fronteira de Dirichlet para as variáveis φ, θ e de Neumann para ψ, ou seja, consideramos as seguintes condições de fronteira

$$\varphi(0, L) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0,\ t \geq 0. \tag{3.113}$$

As condições inicias associadas ao sistema (3.112) são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x) \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in (0, L), \end{aligned} \tag{3.114}$$

A seguir, mostraremos que o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (3.112)-(3.114) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares. E posteriormente, sera mostrada a extabilidade exponencial, a qual se baseia em partes, nas idéias apresentadas em [6].

3.5.1 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - c\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \tag{3.115}$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x) \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad x \in (0, L), \end{aligned} \tag{3.116}$$

e de fronteira

$$\varphi(0, L) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0,\ t \geq 0. \tag{3.117}$$

No que segue, mostraremos que o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (3.115)-(3.117) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares. Para aplicar a teoria de semigrupos lineares, introduziremos inicialmente as seguintes notações $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e

$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T$. Assim,

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{m}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{c}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}\Psi_x \end{bmatrix} = AU$$

e $U(0) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0)^T := U_0$.
De onde obtemos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \dfrac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ -\dfrac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \dfrac{b\partial_{xx} - k\partial_x}{\rho_2} & 0 & -\dfrac{m}{\rho_2}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{m}{\rho_3}\partial_x & \dfrac{c}{\rho_3}\partial_{xx} \end{bmatrix}. \tag{3.118}$$

Assim, podemos escrever o seguinte problema de Cauchy abstrato associado ao sistema (3.115)

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t \geq 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.119}$$

onde A é dado por (3.118), afim de contemplar as condições de fronteira em (3.117), definimos o seguintes espaço de Hilbert,

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L)$$

com produto interno e norma dados respectivamente por

$$((U, \hat{U}))_{\mathcal{H}} = (\varphi_x, \hat{\varphi}_x) + (\psi_x, \hat{\psi}_x) + (\Phi, \hat{\Phi}) + (\Psi, \hat{\Psi}) + (\theta, \hat{\theta})$$

e

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 \tag{3.120}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}) \in \mathcal{H}$, juntamente com o seguinte domínio

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H} \mid \theta, \psi_x, \Phi \in H_0^1(0, L), \ \theta, \psi, \varphi \in H^2(0, L), \ \Psi \in H_*^1(0, L)\}.$$

Lema 3.14. *Consideremos o seguinte espaço de fase*

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L^2(0,L).$$

Então, dados quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)$ *e* $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}) \in \mathcal{H}$*, temos que:*

(i) $(U, \hat{U})_{\mathcal{H}}$ *é um produto interno em* $\mathcal{H}$*, onde*

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi}) + b(\psi_x, \hat{\psi}_x) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) + \rho_3(\theta, \hat{\theta}).$$

(ii) A norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ *dada em (3.120) é equivalente a norma* $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$*, onde*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2.$$

Demonstração. (i) No que segue, mostraremos apenas que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0,$$

as demais propriedades seguem naturalmente da definição de produto interno em $L^2(0, L)$ aplicada a cada parcela de $(U, \hat{U})_{\mathcal{H}}$.
Dado $U \in \mathcal{H}$, temos que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \|\varphi_x + \psi\| = \|\psi_x\| = \|\Phi\| = \|\Psi\| = \|\theta\| = 0.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\|\psi_x\| = 0 \Rightarrow \|\psi\| = 0 \Rightarrow \psi = 0,$$

assim, novamente pela Desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|\varphi_x\| = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \Rightarrow \varphi = 0,$$

o que nos leva a concluir que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0.$$

(ii) Dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{H}$, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular juntamente com o Lema 2.28, temos

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= k\|\varphi_x+\psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 \\
&\leq 2k\|\varphi_x\|^2 + 2L^2k\|\psi_x\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 \\
&\leq m_1(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2) \\
&= m_1|U|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}
$$

onde $m_1 = \max\{2k, 2kL^2+b, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, ou seja,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_1|U|_{\mathcal{H}}^2.$$

Analogamente, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular e o Lema 2.28, obtemos

$$
\begin{aligned}
|U|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 \\
&\leq 2\|\varphi_x+\psi\|^2 + 2L^2\|\psi_x\| + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 \\
&= \frac{2k}{k}\|\varphi_x+\psi\|^2 + \frac{(2L^2+1)b}{b}\|\psi_x\| + \frac{\rho_1}{\rho_1}\|\Phi\|^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2}\|\Psi\|^2 + \frac{\rho_3}{\rho_3}\|\theta\|^2 \\
&\leq m_2\big[k\|\varphi_x+\psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2\big] \\
&= m_2\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}
$$

onde $m_2 = \max\left\{\dfrac{2}{k}, \dfrac{2L^2+1}{b}, \dfrac{1}{\rho_1}, \dfrac{1}{\rho_2}, \dfrac{1}{\rho_3}\right\}$, ou ainda,

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_2\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto,

$$m_3|U|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_1|U|_{\mathcal{H}}^2,$$

com $m_3 = \dfrac{1}{m_2}$, provando assim o lema. □

Sob as considerações feitas anteriormente, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o PVI (3.119), conforme segue.

Teorema 3.15. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (3.119) possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$, $t \geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.100, basta mostrar que o operador A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ em $\mathcal{H}$. Neste caso, pelo Teorema de Lummer-Phillips, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$;

(ii) $Re(AU,U)_{\mathcal{H}} \leq 0$;

(iii) $I_d - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.

No que segue demonstraremos os itens (ii) e (iii), o item (i) segue como consequência via Teorema 2.94.

(ii) Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in D(A)$, fazendo o produto interno de AU com U em $\mathcal{H}$ definido em (3.118), integrando por partes e utilizando as condições de fronteira dadas em (3.115), obtemos

$$\begin{aligned}
(AU,U)_{\mathcal{H}} &= k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) + b(\Psi_x, \psi_x) + \rho_1(\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x, \Phi) \\
&+ \rho_2\left(\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}, \Psi\right) + \rho_2\left(\frac{-x}{\rho_2}(\varphi_x + \psi), \Psi\right) + \rho_2\left(\frac{-m}{\rho_2}\theta_x, \Psi\right) \\
&+ \rho_3\left(\frac{c}{\rho_3}\theta_{xx}, \theta\right) + \rho_3\left(\frac{m}{\rho_3}\Psi_x, \theta\right) \\
&= k[(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) - (\varphi_x + \psi, \Phi_x + \Psi)] - c\|\theta_x\|^2 \\
&+ b[(\Psi_x, \psi_x) - (\psi_x, \Psi_x)] + m[(\theta, \Psi_x) - (\Psi_x, \theta)].
\end{aligned}$$

Tomando a parte real, vem que

$$Re(AU,U)_{\mathcal{H}} = -c\|\theta_x\|^2 \leq 0,$$

ou seja, A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \in \mathcal{H}$, mostraremos que a equação $(I_d - A)U = F$ possui uma única solução $U \in D(A)$. De fato, reescrevendo $(I_d - A)U = F$ em termos de suas componentes, obtém-se

$$\begin{aligned}
\varphi - \Phi &= f_1, & (3.121)\\
\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x &= f_2, & (3.122)\\
\psi - \Psi &= f_3, & (3.123)\\
\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{m}{\rho_2}\theta_x &= f_4, & (3.124)\\
\theta - \frac{c}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}\Psi_x &= f_5. & (3.125)
\end{aligned}$$

De (3.121) e (3.123) temos, $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Psi = \psi - f_3$ respectivamente, substituindo em (3.122), (3.124) e (3.125) obtém-se o seguinte sistema nas variáveis φ, ψ e θ

$$\begin{cases} \varphi - f_1 - \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2, \\ \psi - f_3 - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta_x = f_4, \\ \theta - \dfrac{c}{\rho_3}\theta_{xx} + \dfrac{m}{\rho_3}\Psi_x = f_5. \end{cases} \tag{3.126}$$

Tomando

$$\begin{aligned} g_1 &:= \rho_1(f_2 + f_1) \in L^2(0, L), \\ g_2 &:= \rho_2(f_4 + f_3) \in L^2_*(0, L), \\ g_3 &:= \rho_3 f_5 + m f_{3x} \in L^2(0, L), \end{aligned}$$

podemos reescrever (3.126) como

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = g_1, & (3.127a) \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = g_2, & (3.127b) \\ \rho_3\theta - c\theta_{xx} + m\psi_x = g_3. & (3.127c) \end{cases}$$

No que segue, mostraremos que o sistema (3.127a)-(3.127c) possui solução, tal exposição sera feita em duas etapas.

Etapa 1: Existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L) \times H^1_0(0, L)$ satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} &\rho_1 \int_0^L \varphi\overline{\tilde{\varphi}}dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}dx + \rho_2 \int_0^L \psi\overline{\tilde{\psi}}dx + m \int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\theta}}dx \\ &+ b \int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx + m \int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\psi}}dx + \rho_3 \int_0^L \theta\overline{\tilde{\theta}}dx + c \int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}dx \\ &= \int_0^L g_1\overline{\tilde{\varphi}}dx + \int_0^L g_2\overline{\tilde{\psi}}dx + \int_0^L g_3\overline{\tilde{\theta}}dx. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Mostraremos via Teorema de Lax-Milgram que existe uma única terna $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\mathcal{H}}$ satisfazendo (3.128), onde $\tilde{\mathcal{H}} = H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L) \times H^1_0(0, L)$. Com efeito, consideremos a seguinte forma sesquilinear $a : \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \rho_1 &\int_0^L \varphi\overline{\tilde{\varphi}}dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L \psi\overline{\tilde{\psi}}dx + m \int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\theta}}dx + b \int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx \\ &+ m \int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\psi}}dx + \rho_3 \int_0^L \theta\overline{\tilde{\theta}}dx + c \int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}dx. \end{aligned}$$

Note que a é contínua e coerciva. De fato, usando as desigualdades de Poincaré e Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})| &\leq k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| + k\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}\| + k\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + k\|\psi\|\|\tilde{\varphi_x}\| \\
&+ b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + \rho_1\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\| + \rho_2\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + m\|\theta_x\|\|\tilde{\psi}\| \\
&+ m\|\psi_x\|\|\tilde{\theta}\| + \rho_3\|\theta\|\|\tilde{\theta}\| + c\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| \\
&\leq k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| + kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + kL^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| \\
&+ b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + \rho_1 L^2\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| + \rho_2 L^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + mL\|\theta_x\|\|\tilde{\psi_x}\| \\
&+ mL\|\psi_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + \rho_3 L^2\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + c\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\| \\
&= (k+L^2\rho_1)\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| + kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + (kL^2+b+L^2\rho_2)\|\psi_x\|\|\tilde{\psi_x}\| \\
&+ kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi_x}\| + mL\|\theta_x\|\|\tilde{\psi_x}\| + mL\|\psi_x\|\|\tilde{\theta_x}\| + \rho_3(L^2+c)\|\theta_x\|\|\tilde{\theta_x}\|.
\end{aligned}$$

Denotando por $C_1 = \max\{k+L^2\rho_1,\ kL,\ kL^2+b+L^2\rho_2, mL, \rho_3 L^2 + c, 1\}$, segue que

$$\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}))| &\leq C_1(\|\varphi_x\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\|)(\|\tilde{\psi_x}\| + \|\tilde{\psi_x}\| + \|\tilde{\theta_x}\|) \\
&= C_1\|(\varphi,\psi,\theta)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})\|_{\tilde{\mathcal{H}}}
\end{aligned}$$

para quaisquer $(\varphi,\psi,\theta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}) \in \tilde{\mathcal{H}}$. Observe ainda que

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta)) &= k\|\varphi_x+\psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 \\
&+ \rho_3\|\theta\|^2 + c\|\theta_x\|^2 + m(\theta_x,\psi) + m(\psi_x,\theta).
\end{aligned}$$

Como $\theta \in H_0^1(0,L)$, temos

$$\begin{aligned}
&(\psi_x,\theta) = \int_0^L \psi_x\overline{\theta}dx = \psi\theta\Big|_0^L - \int_0^L \psi\overline{\theta_x}dx = -\int_0^L \psi\overline{\theta_x}dx = -(\psi,\theta_x) \\
&\Rightarrow m[(\theta_x,\psi) + (\psi_x,\theta)] = m[(\theta_x,\psi) - (\psi,\theta_x)] = m[(\theta_x,\psi) - \overline{(\theta_x,\psi)}].
\end{aligned}$$

Assim, usando que $4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2) \geq (a_1+a_2+a_3+a_4)^2$ para todo $a_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1,2,3,4$, $\|\alpha_1+\alpha_2\| \geq \|\alpha_1\| - \|\alpha_2\|$, $C_2 = \min\left\{\frac{k}{4}, \frac{\rho_2}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right\}$ e em seguida fazendo a parte real de $a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta))$, obtemos que

$$
\begin{aligned}
Re[a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta))] &= k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + c\|\theta_x\|^2 \\
&\geq k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 + c\|\theta_x\| \\
&= 4(\frac{k}{4}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{\rho_2}{4}\|\psi\|^2 + \frac{b}{4}\|\psi_x\|^2 + \frac{c}{4}\|\theta_x\|^2) \\
&\geq C_2(4\|\varphi_x + \psi\|^2 + 4\|\psi\|^2 + 4\|\psi_x\|^2 + 4\|\theta_x\|^2) \\
&\geq C_2(\|\varphi_x + \psi\| + \|\psi\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\|)^2 \\
&\geq C_2(\|\varphi_x\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\|)^2 \\
&= C_2\|(\varphi, \psi, \theta)\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},
\end{aligned}
$$

mostrando o desejado. Agora, consideremos

$$
\begin{aligned}
F : \tilde{\mathcal{H}} &\to \mathbb{C} \\
(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) &\mapsto F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \int_0^L g_1\overline{\tilde{\varphi}} + \int_0^L g_2\overline{\tilde{\psi}}dx + \int_0^L g_3\overline{\tilde{\theta}}dx.
\end{aligned}
$$

É facil notar que F é antilinear, e ainda, usando as desigualdades de Poincaré e Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$
\begin{aligned}
|F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})| &\leq L\|g_1\|\|\tilde{\varphi}_x\| + L\|g_2\|\|\tilde{\psi}_x\| + L\|g_3\|\|\tilde{\theta}_x\| \\
&\leq C_3(\|\tilde{\varphi}_x\| + \|\tilde{\psi}_x\| + \|\tilde{\theta}_x\|) \\
&= C_3\|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\|_{\tilde{\mathcal{H}}}, \ \forall(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

onde $C_3 = L\max\{\|g_1\|, \|g_2\|, \|g_3\|\}$. Portanto, F é lmitada, assim, pelo Teorema 2.21, existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in \tilde{\mathcal{H}}$ tal que

$$
a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}), \ \forall(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \tilde{\mathcal{H}},
$$

ou seja, $(\varphi, \psi, \theta) \in \tilde{\mathcal{H}}$ é a única solução de (3.128), como queriamos mostrar.
Etapa 2: Mostraremos que as funções $\varphi, \psi, \theta \in H^2(0, L)$ satisfazem (3.127a)-(3.127c), e desse modo, teremos que $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in D(A)$ é solução de (3.121)-(3.125).
Consideremos $(\varphi, \psi, \theta) \in \tilde{\mathcal{H}}$, observe que $\Phi = \varphi - f_1 \in H^1_0(0, L)$ e $\Psi = \psi - f_3 \in H^1_*(0, L)$ satisfazem (3.121) e (3.123) respectivamente.
Tomando $\tilde{\varphi} = \gamma \in C^1_0(0, L) \subset H^1_0(0, L)$ e $\tilde{\theta} = \tilde{\psi} = 0$ em (3.128), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\gamma_x} + \rho_1\varphi\overline{\gamma}dx = \int_0^L g_1\overline{\gamma}dx \\
\Rightarrow &\int_0^L \varphi_x\overline{\gamma_x}dx = \frac{-1}{k}\int_0^L (\rho_1\varphi - k\psi_x - g_1)\overline{\gamma}dx, \ \forall\gamma \in C^1_0(0, L).
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

Como $\varphi_x, \rho_1\varphi - k\psi_x - g_1 \in L^2(0,L)$ e vale (3.129), então pela definição de derivada fraca, $\varphi_x \in H^1(0,L) \Rightarrow \varphi \in H^2(0,L)$, e ainda

$$k\varphi_{xx} = \rho_1\varphi - k\psi_x - g_1 \text{ em } L^2(0,L).$$

Como $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2)$ e $\Phi = \varphi - f_1$, temos

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2 \text{ em } L^2(0,L).$$

Portanto, $\varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e satisfaz (3.122). Agora, tomando $\beta \in C^1$, note que $\tilde{\beta} = \beta - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx$, nos fornece que $\tilde{\beta} \in H_*^1(0,L)$.
Assim, tomando $\tilde{\psi} = \tilde{\beta} \in H_*^1(0,L)$ e $\tilde{\theta} = \tilde{\varphi} = 0$ em (3.128), vem que

$$\int_0^L (k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\beta}} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\beta}} + b\psi_x\overline{\tilde{\beta}_x} + m\theta_x\overline{\tilde{\beta}})dx = \int_0^L g_2\overline{\tilde{\beta}}dx.$$

Substituindo $\tilde{\beta} = \beta - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx$, vem

$$\begin{aligned}
&\int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx + \int_0^L \rho_2\psi\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx \\
&+ \int_0^L b\psi_x\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx + \int_0^L m\theta_x\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx \\
&= \int_0^L g_2\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\beta}dx - \int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx + \int_0^L \rho_2\psi\overline{\beta}dx \\
&- \int_0^L \rho_2\psi\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx + \int_0^L b\psi_x\overline{\beta_x}dx - \int_0^L b\psi_x\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx \\
&+ \int_0^L m\theta_x\overline{\beta}dx - \int_0^L m\theta_x\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx \\
&= \int_0^L g_2\overline{\beta}dx - \int_0^L g_2\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx.
\end{aligned}$$

Como, $\varphi, \theta \in H_0^1(0,L)$, $\psi, g_2 \in H_*^1(0,L)$ e $\overline{\left(\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx\right)}_x = 0$, segue que

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L (k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi + m\theta_x - g_2)\overline{\beta}dx, \ \forall\beta \in C^1(0,L). \tag{3.130}$$

Como $\psi_x, k(\varphi_x+\psi)+\rho_2\psi+m\theta_x-g_2 \in L^2(0,L)$ e vale (3.130), então pela definição de derivada fraca, temos que $\psi_x \in H^1(0,L) \Rightarrow \psi \in H^2(0,L)$, e ainda

$$b\psi_{xx} = \rho_2\psi + m\theta_x + k(\varphi_x+\psi) - g_2 \text{ em } L^2(0,L), \tag{3.131}$$

como $g_2 = \rho_2(f_3+f_4)$ e $\Psi = \psi - f_3$, segue que

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) + \frac{m}{\rho_2}\theta_x = f_4,$$

ou seja, $\psi \in H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)$ satisfaz (3.127b). De (3.131) temos

$$g_2 = \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) - b\psi_{xx} + m\theta_x. \tag{3.132}$$

Dessa forma, substituindo (3.132) em (3.130) e usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx &= -\frac{1}{b}\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\beta}dx \\
\Rightarrow \int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx &= -\int_0^L \psi_{xx}\overline{\beta}dx = -\psi_x\beta\Big|_0^L + \int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx \\
\Rightarrow -\psi_x\beta\Big|_0^L &= -\psi_x(L)\beta(L) + \psi_x(0)\beta(0) = 0, \ \forall\beta \in C^1(0,L),
\end{aligned}$$

como $\beta \in C^1(0,L)$, tomando $\beta(L) = 0$ e $\beta(0) = 6$, temos que $\psi_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\beta(L) = 2$ e $\beta(0) = 0$, vem que $\psi_x(L) = 0$, ou seja, $\psi_x \in H^1_0(0,L)$. Portanto, ψ satisfaz (3.124).

Finalmente, tomando $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$ e $\tilde{\theta} = \alpha \in C^1_0(0,L) \subset H^1_0(0,L)$ em (3.128), vem que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \rho_3\theta\overline{\alpha} + c\theta_x\overline{\alpha_x} + m\psi_x\overline{\alpha}dx = \int_0^L g_3\overline{\alpha}dx \\
&\Rightarrow \int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x}dx = -\frac{1}{c}\int_0^L (\rho_3\theta + m\psi_x - g_3)\overline{\alpha}dx, \ \forall\alpha \in C^1_0(0,L).
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Como $\theta_x, \rho_3\theta + m\psi_x - g_3 \in L^2(0,L)$ e vale (3.133), então $\theta_x \in H^1(0,L) \Rightarrow \theta \in H^2(0,L)$, e ainda,

$$c\theta_{xx} = \rho_3\theta + m\psi_x - g_3 \text{ em } L^2(0,L).$$

Recordando que $g_3 = \rho_3 f_5 + m f_{3x}$ e $\Psi = \psi - f_3$, vem que

$$\theta - \frac{c}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}\Psi_x = f_5 \text{ em } L^2(0,L),$$

ou seja, $\theta \in H^2(0,L) \cap H^1_0(0,L)$ e satisfaz (3.125). Portanto, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta)^T \in D(A)$ satisfaz $(I_d - A)U = F$.

(i) Do item (ii), temos que A é dissipativo em $\mathcal{H}$. No item (iii), mostramos que o operador

$I_d - A = \mathcal{H}$ (sobrejetor). Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, segue do Teorema 2.20 que $\mathcal{H}$ é reflexivo. Assim, pelo Teorema 2.90, segue que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, finalizando assim a prova do Teorema 3.15. $\square$

3.5.2 Estabilidade Exponencial

Nesta seção verificaremos a estabilidade exponencial do sistema (3.119) utilizando o Teorema 2.101. Iniciaremos verificando que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Lema 3.16. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.118). Então o espectro $\sigma(A)$ do operador A é formado apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Da Proposição 2.102 basta mostrar que a aplicação inclusão

$$i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta. Para isso, considere $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada pela norma do gráfico em $D(A)$ tal que $U_n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \theta^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Precisamos mostrar que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ que converge em $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.
Da definição de $\|\cdot\|_{D(A)}$, temos

$$\begin{aligned}
\|U_n\|_{D(A)} &= |U_n|_{\mathcal{H}} + |AU_n|_{\mathcal{H}} \\
&= \|\varphi_x^n\|^2 + \|\Phi^n\|^2 + \|\psi_x^n\|^2 + \|\Psi^n\|^2 + \|\theta^n\|^2 \\
&+ \|\Phi_x^n\|^2 + \|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x\|^2 + \|\Psi_x^n\|^2 \\
&+ \left\|\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x^n + \psi^n) - \frac{m}{\rho_2}\theta_x^n\right\|^2 + \left\|\frac{c}{\rho_3}\theta_{xx}^n - \frac{m}{\rho_3}\Psi_x^n\right\|^2
\end{aligned}$$

assim, temos que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $H^1(0, L)$.
Da dissipatividade do operador A , temos

$$c\|\theta_x^n\|^2 = |Re(AU_n, U_n)_{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{2}\|AU_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|U\|_{D(A)}^2 \leq \|U\|_{D(A)}^2,$$

ou seja, $(\theta_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limtada em $L^2(0, L)$.
Usando a Desigualdade Triangular e o fato que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{xx}^n\|^2 &= \|\varphi_{xx}^n + \psi_x^n - \psi_x^n\|^2 \\
&= \left\|\frac{\rho_1}{k}\left[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x\right] - \psi_x^n\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_1}{k}\right)^2\left\|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x\right\|^2 + 2\|\psi_x^n\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $(\varphi^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,L)$, observe ainda que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,L)$, o que nos leva a concluir que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^2(0,L)$.
Segue da Proposição 2.62 que

$$i : (H^2(0,L), \|.\|_{H^2}) \to (H^1(0,L), \|.\|_{H^1})$$

é compacta. Dessa forma, existe uma subsequência $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e uma função $\varphi \in H^1(0,L)$, de tal forma que

$$\|\varphi^n - \varphi\|_{H^1} \to 0.$$

Como $\varphi^n \in H^1_0(0,L)$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$ e $(H^1_0(0,L), \|.\|_{H^1})$ é completo, segue que $\varphi \in H^1_0(0,L)$.
Analogamente, usando a Desigualdade Triangular e o Lema 2.28, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi^n_{xx}\|^2 &= \left\|\psi^n_{xx} - \frac{k}{b}(\varphi^n_x + \psi^n) - \frac{m}{b}\theta^n_x + \frac{k}{b}(\varphi^n_x + \psi^n) - \frac{m}{b}\theta^n_x\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{\rho_2}{b}\left[\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x + \psi^n) - \frac{m}{\rho_2}\theta^n_x\right] + \frac{k}{b}(\varphi^n_x + \psi^n) + \frac{m}{b}\theta^n_x\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_2}{b}\right)^2\left\|\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x + \psi^n) - \frac{m}{\rho_2}\theta^n_x\right\|^2 + 2\left\|\frac{k}{b}(\varphi^n_x + \psi^n) + \frac{m}{b}\theta^n_x\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_2}{b}\right)^2\left\|\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x + \psi^n) - \frac{m}{\rho_2}\theta^n_x\right\|^2 + 4\left\|\frac{k}{b}(\varphi^n_x + \psi^n)\right\|^2 + 4\left\|\frac{m}{b}\theta^n_x\right\|^2.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $(\psi^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $L^2(0,L)$, ou seja, $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $H^2(0,L)$.
Novamente, segue da Proposição 2.62 que a aplicação inclusão

$$i : (H^2(0,L), \|\cdot\|_{H^2}) \to (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta. Portanto, existe uma subsequência $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e uma função $\psi \in H^1(0,L)$, de tal forma que

$$\|\psi^n - \psi\|_{H^1} \to 0$$

como $\psi^n \in H^1_*(0,L)$, para todo $n \in \mathbb{N}_2$ e $(H^1_*(0,L), \|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue que $\psi \in H^1_*(0,L)$.

E ainda, usando a Desigualdade Triangular e o fato que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|\theta^n_{xx}\|^2 &= \left\|\theta^n_{xx} - \frac{m}{c_0}\Psi^n_x + \frac{m}{c_0}\Psi^n_x\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{\rho_3}{c_0}\left[\frac{c_0}{\rho_3}\theta^n_{xx} - \frac{m}{\rho_3}\Psi^n_x\right] + \frac{m}{c_0}\Psi^n_x\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_3}{c_0}\right)^2\left\|\frac{c_0}{\rho_3}\theta^n_{xx} - \frac{m}{\rho_3}\Psi^n_x\right\|^2 + 2\left\|\frac{m}{c_0}\Psi^n_x\right\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja, temos que $(\theta^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $L^2_*(0,L)$, ou ainda, $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $H^1(0,L)$, da Proposição 2.62 vem que $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \hookrightarrow (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ com inclusão compacta. Dessa forma, existe uma subsequência $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2}$ de $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ e uma função $\theta \in C[0,L]$, de tal forma que

$$\|\theta^n - \theta\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que,

$$\|\theta^n - \theta\|^2 = \int_0^L |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 = L\|\theta^n - \theta\|^2_\infty \to 0,$$

como $L^2_*(0,L)$ é completo e $\theta^n \in L^2_*(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_3$, segue que $\theta \in L^2_*(0,L)$.
Observe que da limitação da norma de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, vem que $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}_3}$ é limitada em $H^1(0,L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}_4\subset\mathbb{N}_3}$ e uma função $\Phi \in C[0,L]$ tal que

$$\|\Phi^n - \Phi\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\Phi^n - \Phi\|^2 = \int_0^L |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 = L\|\Phi^n - \Phi\|^2_\infty \to 0.$$

Como $L^2(0,L)$ é completo e $\Phi^n \in L^2(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_4$, segue que $\Phi \in L^2(0,L)$.
Finalmente, da limitação da norma de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, vem que $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}_4}$ é limitada em $H^1(0,L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}_5\subset\mathbb{N}_4}$ e uma função $\Psi \in C[0,L]$ tal que

$$\|\Psi^n - \Psi\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\Psi^n - \Psi\|^2 = \int_0^L |\Psi^n(x) - \Psi(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\Psi^n(x) - \Psi(x)|^2 = L\|\Psi^n - \Psi\|_\infty^2 \to 0.$$

Como $L^2(0,L)$ é completo e $\Psi^n \in L^2(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_5$, segue que $\Psi \in L^2(0,L)$.
Portanto, tomando $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{H}$ e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_6\subset\mathbb{N}_5}$ subsequência de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|U_n - U\|_{\mathcal{H}} &= \|\varphi^n - \varphi\|_{H^1}^2 + \|\Phi^n - \Phi\|^2 + \|\psi^n - \psi\|_{H^1}^2 \\ &+ \|\Psi^n - \Psi\|^2 + \|\theta^n - \theta\|^2 \to 0, \end{aligned}$$

ou seja, dada uma sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em D(A), esta possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$, ou ainda

$$i : (D(A), \|.\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta.
Portanto, $\sigma(A)$ é formado apenas por autovalores de A. □

Lema 3.17. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.118). Então, $0 \in \rho(A)$.*

Demonstração. Observe que mostrar que $0 \in \rho(A)$ é o mesmo que mostrarmos que o operador $-A^{-1}$ existe e é limitado. Dada $F \in \mathcal{H}$ mostraremos que a equação

$$-AU = F, \tag{3.134}$$

possui uma única solução $U \in D(A)$, reescrevendo (3.134) em termos de suas componentes, temos

$$\begin{aligned} -\Phi &= f_1, && (3.135)\\ -k(\varphi_x + \psi)_x &= \rho_1 f_2, && (3.136)\\ -\Psi &= f_3, && (3.137)\\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x &= \rho_2 f_4, && (3.138)\\ -c\theta_{xx} + m\Psi_x &= \rho_3 f_5, . && (3.139) \end{aligned}$$

De (3.135) e (3.137) temos , $\Phi = -f_1$ e $\Psi = -f_3$, respectivamente, assim, obtemos o seguinte sistema nas variáveis φ, ψ e θ

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = \rho_2 f_4, \\ -c\theta_{xx} = m f_{3x} + \rho_3 f_5. \end{cases} \tag{3.140}$$

Tomando

$$\begin{aligned} g_1 &:= \rho_1 f_2, \\ g_2 &:= \rho_2 f_4, \\ g_3 &:= m f_{3x} + \rho_3 f_5, \end{aligned}$$

podemos reescrever (3.140) como

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi)_x = -g_1, & (3.141a) \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - m\theta_x = -g_2, & (3.141b) \\ c\theta_{xx} = -g_3. & (3.141c) \end{cases}$$

O que nos leva ao seguinte problema variacional

$$\int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} + m\theta_x\overline{\psi} + c\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}\right]dx = \int_0^L \left[g_1\overline{\tilde{\varphi}} + g_2\overline{\tilde{\psi}} + g_3\overline{\tilde{\theta}}\right]dx. \tag{3.142}$$

Tomando $\overline{\mathcal{H}} = H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, podemos definir a seguinte forma sesquilinear

$$a : \overline{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{H}} \to \mathbb{C},$$

dada por,

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})} + b\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} + m\theta_x\overline{\psi} + c\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}\right]dx.$$

Note que a é contínua e coerciva, pois tomando o módulo e usando as desigualdades Triangular, de Cauchy-Schwarz e Poincaré, obtemos que

$$
\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}))| &\leq k\|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\|+b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
&+ m\|\theta_x\|\|\tilde{\psi}\|+c\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| \\
&\leq k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|+kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
&+ (kL^2+b)\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\|+mL\|\theta_x\|\|\tilde{\psi}_x\|+c\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| \\
&\leq C_1\big[\|\varphi_x\|+\|\psi_x\|+\|\theta_x\|\big]\big[\|\tilde{\varphi}_x\|+\|\tilde{\psi}_x\|+\|\tilde{\theta}_x\|\big] \\
&= C_1\|(\varphi,\psi,\theta)\|_{\overline{\mathcal{H}}}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})\|_{\overline{\mathcal{H}}},
\end{aligned}
$$

onde $C_1=\max\{k,kL,kL^2+b,c,mL,1\}$.
Note ainda que usando o Lema 2.28, obtemos

$$
\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta),(\varphi,\psi,\theta))| &= k\|\varphi_x+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2+c\|\theta_x\|^2+m(\theta_x,\psi) \\
&\geq k\|\varphi_x+\psi\|^2+b\|\psi_x\|^2+c\|\theta_x\|^2 \\
&= 2\left[\frac{k}{2}\|\varphi_x+\psi\|^2+\frac{b}{2}\|\psi_x\|^2+\frac{c}{2}\|\theta_x\|^2\right] \\
&\geq C_1\big[\|\varphi_x+\psi\|+\|\psi_x\|+\|\theta_x\|\big]^2 \\
&\geq C_1\big[\|\varphi_x\|-\|\psi\|+\|\psi_x\|+\|\theta_x\|\big]^2 \\
&\geq C_1\big[\|\varphi_x\|^2+\|\psi\|^2+\|\psi_x\|^2+\|\theta_x\|^2\big] \\
&\geq C_1\big[\|\varphi_x\|^2+\|\psi_x\|^2+\|\theta_x\|^2\big] \\
&= C_2\|(\varphi,\psi,\theta)\|^2_{\overline{\mathcal{H}}},
\end{aligned}
$$

onde $C_2=\min\left\{\frac{k}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right\}$.
Considere agora o seguinte funcional

$$
\begin{aligned}
F:\overline{\mathcal{H}} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}) &\mapsto F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})=\int_0^L\big[g_1\overline{\tilde{\varphi}}+g_2\overline{\tilde{\psi}}+g_3\overline{\tilde{\theta}}\big]dx,
\end{aligned}
$$

é fácil verificar que F é antilinear, observe ainda que tomando o módulo e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Triangular e Poincaré, obtemos que

$$
|F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})|\leq L\|g_1\|\|\tilde{\varphi}_x\|+L\|g_2\|\|\tilde{\psi}_x\|+L\|g_3\|\|\tilde{\theta}_x\|\leq C_3\|\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}\|_{\overline{\mathcal{H}}},
$$

onde $C_3=L\max\{\|g_1\|,\|g_2\|,\|g_3\|\}$, ou seja, F é limitado, portanto , $F\in\overline{\mathcal{H}}'$. Logo, pelo Teorema 2.21, existe um único $(\varphi,\psi,\theta)\in\overline{\mathcal{H}}$ tal que

$$
a((\varphi,\psi,\theta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}))=F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta}),\ \forall(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta})\in\overline{\mathcal{H}},
$$

ou ainda, (φ, ψ, θ) é solução de (3.142).
Mostraremos agora que $(\varphi, \psi, \theta) \in D(A)$ e satisfaz (3.135)-(3.139).
De fato, tomando $\tilde{\varphi} = \gamma \in H_0^1(0, L)$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$ em (3.142), vem que

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\gamma_x} dx = \int_0^L g_1 \overline{\gamma} dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \varphi_x \overline{\gamma_x} dx = \frac{1}{k} \int_0^L (g_1 + \psi_x)\overline{\gamma} dx, \forall \gamma \in H_0^1(0, L). \tag{3.143}$$

Como, $\varphi_x, g_1 + \psi_x \in L^2$ e vale (3.143) para $\gamma \in C_0^1(0, L) \subset H_0^1(0, L)$, segue da definição de derivada fraca que $\varphi \in H^2$, e ainda,

$$k(\varphi_x + \psi)_x = -g_1.$$

Como $g_1 = \rho_1 f_2$, obtemos que

$$-k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2.$$

Agora, tomando $\beta \in C^1(0, L)$, note que $\tilde{\beta} = \beta - \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^L \beta dx$ é tal que $\tilde{\beta} \in H_*^1(0, L)$, dessa forma, tomando $\tilde{\psi} = \tilde{\beta} \in H_*^1(0, L)$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = 0$ em (3.142), obtemos que

$$\int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\beta}} + b\psi_x \overline{\tilde{\beta}_x} + m\theta_x \overline{\tilde{\beta}}\right] dx = \int_0^L g_2 \overline{\tilde{\beta}} dx,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\int_0^L k(\varphi_x + \psi)\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)} dx + \int_0^L b\psi_x \overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x} dx \\ + \quad &\int_0^L m\theta_x \overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)} dx = \int_0^L g_2 \overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)} dx. \end{aligned}$$

Como $\overline{\left(\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \beta dx\right)_x} = 0$, $\psi \in H_*^1(0, L)$, $\varphi, \theta \in H_0^1(0, L)$, $g_2 \in H_*^1(0, L)$ e $C_0^1(0, L) \subset C^1(0, L)$, em particular, para $\beta \in C_0^1(0, L)$, obtemos que

$$\int_0^L \psi_x \overline{\beta_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x - g_2)\overline{\beta} dx, \ \forall \beta \in C_0^1(0, L). \tag{3.144}$$

Como $\psi_x, k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x - g_2 \in L^2(0, L)$ e vale (3.144), segue da definição de derivada fraca que $\psi \in H^2(0, L)$, e ainda

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x - g_2,$$

de onde segue que

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = g_2. \tag{3.145}$$

Substituindo (3.145) em (3.144) e usando integração por partes, obtemos

$$\int_0^L \psi_x \overline{\beta_x} dx = -\frac{1}{b}\int_0^L b\psi_{xx}\overline{\beta} dx$$
$$\Rightarrow \int_0^L \psi_x \overline{\beta_x} dx = -\int_0^L \psi_{xx}\overline{\beta} dx = -\psi_x\beta\Big|_0^L + \int_0^L \psi_x\overline{\beta_x} dx$$
$$\Rightarrow -\psi_x\beta\Big|_0^L = -\psi_x(L)\beta(L) + \psi_x(0)\beta(0) = 0,\ \forall\beta \in C^1(0,L),$$

como $\beta \in C^1(0,L)$, tomando $\beta(L) = 0$ e $\beta(0) = 6$, temos que $\psi_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\beta(L) = 2$ e $\beta(0) = 0$, vem que $\psi_x(L) = 0$, ou seja, $\psi_x \in H_0^1(0,L)$. Portanto, ψ satisfaz (3.138).
Finalmente, tomando $\tilde{\theta} = \alpha \in H_0^1(0,L)$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = 0$ em (3.142),

$$\int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x} dx = \frac{1}{c}\int_0^L g_3\overline{\alpha} dx,\ \forall\alpha \in C_0^1 \subset H_0^1. \tag{3.146}$$

Como $\theta_x, g_3 \in L^2(0,L)$ e vale (3.146), segue da definição de derivada fraca que $-c\theta_{xx} = g_3$, como $g_3 = \rho_3 f_5 + m(f_3)_x$ e $-\Psi = f_3$, segue que

$$-c\theta_{xx} + m\Psi_x = \rho_3 f_5.$$

Portanto, existe de fato um único $U \in D(A)$ solução de (3.135)-(3.139).
Mostraremos agora que $-A^{-1}$ é limitado. Como $-A^{-1}F = U$ é suficiente mostrar que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \le C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

relembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2,$$

estimaremos cada termo da norma de U. No que segue, note que :

• Usando (3.135) , e aplicando as desigualdades de Poincaré e Triangular, vem que

$$
\begin{aligned}
\|\Phi\|^2 = \|f_1\|^2 &\leq L^2\|(f_1)_x\|^2 \\
&\leq L^2(\|(f_1)_x + f_3\| + \|f_3\|)^2 \\
&\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^2\|f_3\|^2 \\
&\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^4\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq 2L^2(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}})\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow \rho_1\|\Phi\|^2 &\leq \rho_1 2L^2\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (3.147)
\end{aligned}
$$

• Analogamente, de (3.137), temos

$$
\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 = \|f_3\|^2 &\leq L^2\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq \frac{L^2}{\sqrt{b}}\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq \frac{\rho_2 L^2}{\sqrt{b}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (3.148)
\end{aligned}
$$

• Como $-AU = F$, então $(-AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}$. Logo, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré e da dissipatividade do operador A, segue que

$$
\begin{aligned}
&c\|\theta_x\|^2 = (F, U)_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow \quad &c\|\theta_x\|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Assim, segue que

$$
\rho_3\|\theta\|^2 \leq \frac{\rho_3 L^2}{c}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \qquad (3.149)
$$

• Fazendo o produto interno de (3.136) por φ em $L^2(0, L)$, usando integração por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-k((\varphi_x + \psi)_x, \varphi) = \rho_1(f_2, \varphi) \\
\Rightarrow \quad &k(\varphi_x + \psi, \varphi_x) = \rho_1(f_2, \varphi), \qquad (3.150)
\end{aligned}
$$

e ainda, multiplicando (3.138) por ψ em $L^2(0, L)$, integrando por partes, vem que

$$
\begin{aligned}
&-b(\psi_{xx}, \psi) + k(\varphi_x + \psi, \psi) + m(\theta_x, \psi) = \rho_2(f_4, \psi) \\
\Rightarrow \quad &b(\psi_x, \psi_x) + k(\varphi_x + \psi, \psi) - m(\theta, \psi_x) = \rho_2(f_4, \psi). \qquad (3.151)
\end{aligned}
$$

Assim, somando (3.150) e (3.151), e usando as desigualdades de Poincaré, Cauchy-Schwarz,

Young e Triangular,

$$
\begin{aligned}
b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 &= \rho_2(f_4, \psi) + \rho_1(f_2, \varphi) + m(\theta, \psi_x) \\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x\| + m\|\theta\|\|\psi_x\| \\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x + \psi\| + L^2\rho_1\|f_2\|\|\psi_x\| \\
&+ m\|\theta\|\|\psi_x\| \\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + C_{\varepsilon_1}L^2\rho_1^2\|f_2\|^2 + \varepsilon_1\|\varphi_x + \psi\|^2 + L^2\rho_1\|f_2\|\|\psi_x\| \\
&+ C_{\varepsilon_2}m^2\|\theta\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 \\
&\leq L\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon_1}L^2\rho_1\|F\|^2_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1\|\varphi_x + \psi\|^2 \\
&+ L^2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon_2}\frac{m^2L^2}{c}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2,
\end{aligned}
$$

tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{k}{2}$ e $\varepsilon_2 = \dfrac{b}{2}$, vem que $C_{\varepsilon_1} = \dfrac{1}{2k}$ e $C_{\varepsilon_2} = \dfrac{1}{2b}$.
Assim,

$$
b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x + \psi\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_2\|F\|^2_{\mathcal{H}} \tag{3.152}
$$

onde $C_1 = 2\left[L\dfrac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \dfrac{L^2m^2}{2kc} + L^2\dfrac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\right]$ e $C_2 = \dfrac{L^2\rho_1}{k}$.
Dessa forma, de (3.147), (3.148), (3.149) e (3.152), obtemos

$$
\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_4\|F\|^2_{\mathcal{H}},
$$

onde $C_3 = \dfrac{\rho_2L^2}{\sqrt{b}} + \rho_1 2L^2\left(\dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right) + C_2$ e $C_4 = C_1 + \dfrac{\rho_3L^2}{c}$.
Aplicando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, temos

$$
\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_3^2}{2}\|F\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{\|U\|^2_{\mathcal{H}}}{2} + C_4\|F\|^2_{\mathcal{H}},
$$

o que nos leva a concluir que

$$
\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq (2C_4 + C_3^2)\|F\|^2_{\mathcal{H}}.
$$

Portanto, existe um $C > 0$ tal que

$$
\|(-A)^{-1}F\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.
$$

Concluindo a prova do lema. □

Lema 3.18. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.118). Então, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.*

Demonstração. Como $D(A) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$, suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$. Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$i\beta \notin \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

Portanto, $i\beta \in \sigma(A)$. Considere $0 \neq U \in D(A)$ autovetor associado a β, isto é,

$$AU = i\beta U \Leftrightarrow AU - i\beta U = 0. \tag{3.153}$$

Então, tomando o produto interno de (3.153) com U em $\mathcal{H}$ e, em seguida a parte real, obtemos

$$\begin{aligned} AU - i\beta U = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (AU, U)_{\mathcal{H}} - i\beta \|U\|^2_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Re[(AU, U)_{\mathcal{H}} - i\beta \|U\|^2_{\mathcal{H}}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c\|\theta_x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

como $c \neq 0$, segue que $\theta = 0$. Reescrevendo $AU - i\beta U = 0$ em termos de suas componentes, vem que

$$\Phi - i\beta\varphi = 0 \tag{3.154}$$
$$\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - i\beta\Phi = 0, \tag{3.155}$$
$$\Psi - i\beta\psi = 0, \tag{3.156}$$
$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{m}{\rho_2}\theta_x - i\beta\Psi = 0, \tag{3.157}$$
$$\frac{c}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{m}{\rho_3}\Psi_x - i\beta\theta = 0, \tag{3.158}$$

substituindo $\theta = 0$ em (3.158), e usando a Desigualdade de Poincaré, vem que $\Psi = 0$. Logo (3.156) nos fornece que $\psi = 0$ e consequentemente, substituindo $\Psi = \psi = \theta = 0$ em (3.157), temos que $\varphi_x = 0$, e novamente pela Desigualdade de Poincaré, temos $\varphi = 0$. Finalmente, substituindo $\varphi = 0$ em (3.154), segue que $\Phi = 0$, ou seja, $U = (0, 0, 0, 0, 0)$, absurdo, pois tomamos $U \neq 0$. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$, provando assim o lema. $\square$

Vejamos agora o segundo item do Teorema de Prüss, a saber.
Seja $F \in \mathcal{H}$ existe um único $U \in D(A)$ tal que $(A - i\beta I_d)U = F$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$, então $U = (A - i\beta I_d)^{-1}F$. Assim, para mostrar que $(A - i\beta I_d)^{-1}$ é limitado para todo β, basta mostrar que existe $C \geq 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{H}$

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $U = (A - i\beta I_d)^{-1}F$. Reescrevendo $i\beta U - AU = F$ em termo de suas componentes, obtemos

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.159}$$

$$\rho_1 i\beta\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2, \tag{3.160}$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.161}$$

$$\rho_2 i\beta\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.162}$$

$$\rho_3 i\beta\theta - c\theta_{xx} + m\Psi_x = \rho_3 f_5. \tag{3.163}$$

Lema 3.19. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\rho_3\|\theta\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
i\beta U - AU = F \quad &\Leftrightarrow \quad i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}} \\
&\Leftrightarrow \quad Re[i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (AU, U)_{\mathcal{H}}] = (F, U)_{\mathcal{H}} \\
&\Leftrightarrow \quad -Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}} \\
&\Leftrightarrow \quad c\|\theta_x\|^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

assim, da Desigualdade de Poincaré, vem que

$$\rho_3\|\theta\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},$$

onde $C_1 = \dfrac{\rho_3 L^2}{c}$ □

Lema 3.20. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon_2 > 0$ existem $C_2, C_3, C_4, \varepsilon_2, > 0$ tal que*

$$b\|\psi_x\|^2 \leq \frac{C_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Considerando a equação (3.162), temos que

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\big[i\rho_2\beta\Psi + k(\varphi_x + \psi) + m\theta_x - \rho_2 f_4\big], \tag{3.164}$$

assim, tomando o produto interno de (3.163) com $b\psi_x$ em $L^2(0, L)$, usando integração por partes e usando (3.161) e (3.164), temos

$$\begin{aligned}
i\beta mb\|\psi_x\|^2 \quad &= \quad \rho_3 b(f_5, \psi_x) - i\rho_3\beta b(\theta, \psi_x) - c(\theta_x, i\rho_2\beta\Psi) - c(\theta_x, k(\varphi_x + \psi)) \\
&- \quad cm\|\theta_x\|^2 + c(\theta_x, \rho_2 f_4) + mb(f_{3x}, \psi_x).
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Poincaré, Cauchy-Schwarz, Triangular, Young e dividindo por $|i\beta m|$ tem-se

$$
\begin{aligned}
b\|\psi_x\|^2 &\leq \frac{\rho_3 b}{|\beta| m}\|f_5\|\|\psi_x\| + \frac{\rho_3 L b}{m}\|\theta_x\|\|\psi_x\| + \frac{c\rho_2}{m}\|\theta_x\|\|\Psi\| \\
&+ \frac{kc}{|\beta| m}\|\theta_x\|\|\varphi_x+\psi\| + \frac{c}{|\beta|}\|\theta_x\|^2 + \frac{c\rho_2}{m|\beta|}\|\theta_x\|\|f_4\| \\
&+ \frac{b}{|\beta|}\|f_{3x}\|\|\psi_x\| \\
&\leq \frac{1}{|\beta|}\left[\frac{\sqrt{b\rho_3}}{m} + c + \frac{c\sqrt{\rho_2}}{m\sqrt{\rho_3}} + 1\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{\rho_3 b L}{m}\|\theta_x\|\|\psi_x\| + \frac{\rho_2 c}{m}\|\theta_x\|\|\Psi\| + \frac{ck}{m|\beta|}\|\theta_x\|\|\varphi_x+\psi\| \\
&\leq \frac{1}{|\beta|}\left[\frac{\sqrt{b\rho_3}}{m} + c + \frac{c\sqrt{\rho_2}}{m\sqrt{\rho_3}} + 1\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C_{\varepsilon_1}\left(\frac{\rho_3 b L}{m}\right)^2\|\theta_x\|^2 + \varepsilon_1\|\psi_x\|^2 + C_{\varepsilon_2}\left(\frac{\rho_2 c}{m}\right)^2\|\theta_x\|^2 + \varepsilon_2\|\Psi\|^2 \\
&+ \varepsilon_3\left(\frac{ck}{m}\right)^2\|\theta_x\|^2 + \frac{C_{\varepsilon_3}}{|\beta|^2}\|\varphi_x+\psi\|^2
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{b}{2}$ e $\varepsilon_3 = \dfrac{m^2}{c^2k^2}$ obtemos que $C_{\varepsilon_1} = \dfrac{2}{b}$ e $C_{\varepsilon_3} = \dfrac{m^2}{2c^2k^2}$, respectivamente, dessa forma, considerando, $C_2 = \dfrac{2\sqrt{b\rho_3}}{m} + 2c + \dfrac{2c\sqrt{\rho_2}}{m\sqrt{\rho_3}} + 2$, $C_3 = C_1\left[\dfrac{L^2 b\rho_3}{m^2} + \dfrac{C_{\varepsilon_2\rho_2^2c^2}}{m^2\rho_3} + \dfrac{2}{\rho_3}\right]$ e $C_4 = \dfrac{m^2}{2c^2k^2}$ obtemos

$$
b\|\psi_x\|^2 \leq \frac{C_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.165}
$$

□

Lema 3.21. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon_2 > 0$ existem $C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12} > 0$ tal que*

$$
\rho_2\|\Psi\|^2 \leq C_9\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|}\|U\|^2 + \frac{C_{11}}{|\beta|^2}\|U\|^2 + 2C_{12}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}}.
$$

Demonstração. Fazendo o produto interno de (3.162) por $-\psi$ em $L^2(0,L)$, usando (3.161) e integrando por partes,

$$
\rho_2\|\Psi\|^2 = -\rho_2(\Psi, f_3) - \rho_2(f_4,\psi) + b\|\psi_x\|^2 + \frac{k}{i\beta}(f_{1x},\psi) - \frac{k}{i\beta}(\Phi,\psi_x) + k\|\psi\|^2 + m(\theta_x,\psi),
$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young, Poincaré e Triangular,

$$\begin{aligned}
\rho_2\|\Psi\|^2 &\leq L\rho_2\|\Psi\|\|f_{3x}\| + \rho_2 L\|f_4\|\|\psi_x\| + b\|\psi_x\|^2 + \frac{kL}{|\beta|}\|f_{1x} + f_3\|\|\psi_x\| \\
&+ \frac{L^2 k}{|\beta|}\|f_{3x}\|\|\psi_x\| + \frac{k}{|\beta|}\|\Phi\|\|\psi_x\| + kL^2\|\psi_x\|^2 + mL\|\theta_x\|\|\psi_x\| \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + b\|\psi_x\|^2 \\
&+ \frac{L\sqrt{k}}{\sqrt{b}|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{L^2 k}{b|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{\sqrt{\rho_1 b}|\beta|}\|U\|^2 \\
&+ L^2 k\|\psi_x\|^2 + \frac{L^2 m^2}{2c}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|\psi_x\|^2,
\end{aligned}$$

tomando $C_5 = \dfrac{L^2 m^2}{2c} + (L+1)\dfrac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}$, $C_6 = b + L^2 k + \dfrac{1}{2}$, $C_7 = \dfrac{L\sqrt{k}}{\sqrt{b}} + \dfrac{L^2 k}{b}$ e $C_8 = \dfrac{k}{\sqrt{\rho_1 b}}$, temos que

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq C_5\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_6\|\psi_x\|^2 + \frac{C_7}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|}\|U\|^2.$$

Assim, usando (3.165) e considerando as seguintes constantes,

$$C_9 = \left(C_5 + \frac{C_6 C_3}{b}\right), C_{10} = \left(C_7 + \frac{C_6 C_2}{b}\right), C_{11} = \frac{C_6 C_4}{b} \text{ e } C_{12} = \frac{2C_6}{b},$$

segue que

$$\rho_2\|\Psi\|^2 \leq C_9\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_{11}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2C_{12}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (3.166)$$

□

Lema 3.22. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon_2 > 0$ existem $C_{14}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18} > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
k^2\|\varphi_x + \psi\|^2 &\leq C_{14}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{15}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{16}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|.
\end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo o produto interno de (3.162) por $k(\varphi_x + \psi)$ em $L^2(0, L)$, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
k^2\|\varphi_x + \psi\|^2 &= k\rho_2(f_4, \varphi_x + \psi) - kb(\psi_x, (\varphi_x + \psi)_x) \\
&+ \rho_2(\Psi, i\beta k(\varphi + \psi)) - m(\theta_x, k(\varphi_x + \psi)).
\end{aligned}$$

Considerando as equações (3.160) e (3.161) , obtemos que

$$\begin{aligned} -kb(\psi_x,(\varphi_x+\psi)_x) &= -b(\psi_x,\rho_1 i\beta\Phi-\rho_1 f_2)\\ &= b\rho_1(f_{3x},\Phi)-b\rho_1(\Psi,\Phi_x)+b\rho_1(\psi_x,f_2), \end{aligned}$$

e ainda, de (3.159) e (3.161) , obtemos que

$$\begin{aligned} \rho_2(\Psi,i\beta k(\varphi_x+\psi)) &= \rho_2(\Psi,k(f_1+\Phi)_x)+\rho_2(\Psi,k(f_3+\Psi))\\ &= k\rho_2(\Psi,\Phi_x)+k\rho_2(\Psi,f_3)\\ &+ k\rho_2(\Psi,f_{1x})+k\rho_2\|\Psi\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} k^2\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(\Psi,k(f_1+\Phi)_x)+b\rho_1(f_{3x},\Phi)-b\rho_1(\Psi,\Phi_x)\\ &+ b\rho_1(\psi_x,f_2)+k\rho_2(\Psi,\Phi_x)+k\rho_2(\Psi,f_3)\\ &+ k\rho_2(\Psi,f_{1x})+k\rho_2\|\Psi\|^2-m(\theta_x,k(\varphi_x+\psi))\\ &= \rho_2(\Psi,k(f_1+\Phi)_x)+b\rho_1(f_{3x},\Phi)+(k\rho_2-b\rho_1)(\Psi,\Phi_x)\\ &+ b\rho_1(\psi_x,f_2)+k\rho_2(\Psi,f_{1x}+f_3)\\ &+ k\rho_2\|\Psi\|^2-m(\theta_x,k(\varphi_x+\psi)). \end{aligned}$$

Assim, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young,

$$\begin{aligned} k^2\|\varphi_x+\psi\|^2 &\le k\rho_2\|f_4\|\|\varphi_x+\psi\|+b\rho_1\|f_{3x}\|\|\Phi\|+|k\rho_2-b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|\\ &+ b\rho_1\|\psi_x\|\|f_2\|+k\rho_2\|\Psi\|\|f_{1x}+f_3\|+k\rho_2\|\Psi\|^2\\ &+ \frac{1}{2}m^2\|\theta_x\|^2+\frac{1}{2}k^2\|\varphi_x+\psi\|^2\\ &\le C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+k\rho_2\|\Psi\|^2+\varepsilon_4 k\|\varphi_x+\psi\|^2+|k\rho_2-b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|. \end{aligned}$$

Tomando $C_{13}=2\sqrt{k\rho_2}+2\sqrt{b\rho_1}+\dfrac{m^2}{2c}$, obtemos que

$$k^2\|\varphi_x+\psi\|^2\le 2C_{13}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+2k\rho_2\|\Psi\|^2+2|k\rho_2-b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|.$$

Dessa forma, usando a equação (3.166) e considerando $C_{14}=2C_{13}+2kC_9$, $C_{15}=2kC_{10}$, $C_{16}=2kC_8$, $C_{17}=2kC_{11}$ e $C_{18}=4kC_{12}$, obtemos que

$$\begin{aligned} k^2\|\varphi_x+\psi\|^2 &\le C_{14}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+\frac{C_{15}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{C_{16}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}}+C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}}+2|k\rho_2-b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|. \end{aligned} \tag{3.167}$$

□

Lema 3.23. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dado $\varepsilon_2 > 0$ existem $C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}$ e $C_{21} > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2 &\leq C_{19}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{20}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{21}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|.\end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo o produto interno de (3.160) por $-\varphi$ em $L^2(0, L)$, usando (3.159) e integração por partes, temos

$$\rho_1\|\Phi\|^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 - \rho_1(f_2, \varphi) - \rho_1(\Phi, f_1) + \frac{k}{i\beta}(\varphi_x + \psi, f_3) + \frac{k}{i\beta}(\varphi_x + \psi, \Psi),$$

e ainda, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Triangular e Poincaré, temos

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2 &\leq k\|\varphi_x + \psi\|^2 + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x\| + L\rho_1\|\Phi\|\|f_{1x}\|\\ &+ \frac{Lk}{|\beta|}\|\varphi_x + \psi\|\|f_{3x}\| + \frac{k}{|\beta|}\|\varphi_x + \psi\|\|\Psi\|\\ &\leq k\|\varphi_x + \psi\|^2 + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x + \psi\| + L^2\rho_1\|f_2\|\|\psi_x\|\\ &+ L\rho_1\|\Phi\|\|f_{1x} + f_3\| + L^2\rho_1\|\Phi\|\|f_{3x}\|\\ &+ \frac{Lk}{|\beta|}\|\varphi_x + \psi\|\|f_{3x}\| + \frac{k}{|\beta|}\|\varphi_x + \psi\|\|\Psi\|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho_1\|\Phi\|^2 \leq C_8\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_9}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + k\|\varphi_x + \psi\|^2,$$

onde $C_8 = \dfrac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \dfrac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}$, $C_9 = \dfrac{L\sqrt{k}}{\sqrt{b}}$ e $C_{10} = \dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{b}}$.
Assim, da limitação (3.167), obtemos que

$$\begin{aligned}\rho_1\|\Phi\|^2 &\leq C_{19}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{20}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{21}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|,\end{aligned}$$

onde $C_{19} = C_8 + C_{14}$, $C_{20} = C_{15} + C_9$ e $C_{21} = C_{10} + C_{16}$. □

Teorema 3.24. *Sob as notações anteriores e hipóteses do Teorema 3.15, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ correspondente ao sistema (3.115) é exponencialmente estável desde que $\dfrac{b}{\rho_2} = \dfrac{k}{\rho_1}$, ou seja,* *existem constantes $C, \omega > 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\omega t}, \ \ t \geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ de (3.119) satisfaz

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Inicialmente , notemos que $\|U\|^2_{\mathcal{H}}$ é dada por

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} + k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta_x\|^2.$$

Assim, aplicando os lemas (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) (3.22), e (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathcal{H}} \ \leq \ & C_{14}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{15}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{16}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
+ \ & \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\| \\
+ \ & \frac{C_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_4}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
+ \ & C_{19}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{20}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{21}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
+ \ & \frac{C_{17}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{18}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 2|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\| \\
+ \ & C_9\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C_{11}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
+ \ & 2C_{12}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \geq 1$. Dessa forma, reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\|U\|^2_{\mathcal{H}} \ \leq \ & C_{22}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{23}}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{24}}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\
+ \ & \frac{C_{25}}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_{26}\varepsilon_2\|U\|^2_{\mathcal{H}} + 4|k\rho_2 - b\rho_1|\|\Psi\|\|\Phi_x\|,
\end{aligned}$$

onde $C_{22} = C_{14} + C_3 + C_{19} + C_9 + C_1$, $\quad C_{23} = C_{15} + C_2 + C_{20} + C_{10}$, $\quad C_{24} = C_{16} + C_{21} + C_8$, $C_{25} = C_{11} + C_4 + 2C_{17}$ e $C_{26} = 2C_{18} + 2C_{12} + 2$.
Assim, tomando $C = 2(C_{22} + C_{23} + C_{24} + C_{25} + C_{26})$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2C_{26}} > 0$ e usando o fato que $\dfrac{b}{\rho_2} = \dfrac{k}{\rho_1}$, vem que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Logo, aplicando a Desigualdade de Young, obtêm-se

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \left(C^2 C_{\epsilon_1} + \frac{C^2 C_{\epsilon_2}}{|\beta|^2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{C^2 C_{\epsilon_3} + C}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

tomando $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 > 0$ de tal forma que $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \dfrac{1}{2}$, segue que

$$\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \left(C^2 C_{\epsilon_1} + \frac{C^2 C_{\epsilon_2}}{|\beta|^2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \left(\frac{C^2 C_{\epsilon_3} + C}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

ou ainda,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{C^2 C_{\epsilon_3} + C}{|\beta|^2}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \left(C^2 C_{\epsilon_1} + \frac{C^2 C_{\epsilon_2}}{|\beta|^2}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Finalmente, tomando $|\beta|^2 > 2C^2 C_{\epsilon_3} + 2C$, segue que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{C^2 C_{\epsilon_3} + C}{|\beta|^2} > 0$. Portanto, tomando $K_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{C^2 C_{\epsilon_3} + C}{|\beta|^2}\right)$ e $K_2 = C^2 C_{\epsilon_1} + \dfrac{C^2 C_{\epsilon_2}}{|\beta|^2}$, segue que existe $M = \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}} > 0$, tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$\lim_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty,$$

finalizando assim a prova do teorema. □

3.6 SISTEMA DE TIMOSHENKO COM LEI TÉRMICA DE FOURIER E DUAS TEMPERATURAS

Por fim, analisaremos um sistema termoelástico de Timoshenko com duas temperaturas, ou seja, dois acoplamentos térmicos, sendo um considerado no momento fletor e outro na força de cisalhamento. Observamos que, até o momento, foram estudados sistemas termoelásticos de Timoshenko constituídos de apenas uma variável retratando a temperatura, conforme visto na seção 3.6, onde o termo que denota a temperatura é acoplado apenas no momento fletor M. Além disso, como usaremos a Lei de Fourier para o fluxo de calor em ambas temperaturas, então o sistema apresentado nessa seção generaliza o problema estudado na Seção 3.6 em um certo sentido.

Portanto, usando como referências [5, 33], obtemos o seguinte sistema termoelástico de Timoshenko com duas temperaturas

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi_x)_t = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.168}$$

A estabilidade do sistema (3.168) tem sido objeto de estudos recentes do autores em [5] nos casos em que $\vartheta = \theta$ e $\vartheta \neq \theta$. O sistema (3.168) será estudado no domínio $(0,L)\times(0,\infty)$ com condições de fronteira mista, sendo que φ e ϑ possuem condições de fronteira de Dirichlet e as funções ψ e θ possuem condições de fronteira de Neumann, isto é,

$$\varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, \quad x \in \{0,L\},\ t \geq 0. \tag{3.169}$$

No que diz respeito às condições iniciais, quando $t = 0$, as funções $\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta$ e ϑ são conhecidas, sendo denotadas por

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x) \qquad x \in (0,L), \tag{3.170}$$

$$\psi_t(x,0) = \psi_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) \qquad x \in (0,L), \tag{3.171}$$

A seguir, mostraremos a existência e unicidade de solução para o PVIF (3.168)-(3.170).

3.6.1 Existência e Unicidade

Consideremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_3\theta_t - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi_x)_t = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \rho_4\vartheta_t - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x) & \quad x \in (0,L), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) & \quad x \in (0,L), \\ \varphi(x,t) = \psi_x(x,t) = \theta_x(x,t) = \vartheta(x,t) = 0, & \quad x \in \{0,L\},\ t \geq 0. \end{cases} \tag{3.172}$$

No que segue, mostraremos que o PVIF (3.172) possui uma única solução via teoria de semigrupos lineares. Afim de aplicar a teoria de semigrupos lineares, consideremos, $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e

$U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T$. Dessa forma, temos

$$U_t = \begin{bmatrix} \Phi \\ \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x \\ \Psi \\ \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \dfrac{m}{\rho_2}\theta - \dfrac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x \\ \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \dfrac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \\ \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \dfrac{\delta}{\rho_4}\Psi_x \end{bmatrix} := AU \tag{3.173}$$

e $U(0) = U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \vartheta_0)$. Assim, podemos escrever o problema (3.172) como seguinte problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t \geq 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.174}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \dfrac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & -\dfrac{m}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ \dfrac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & \dfrac{b}{\rho_2}\partial_{xx} - \dfrac{k}{\rho_2}I_d & 0 & \dfrac{m}{\rho_2}I_d & -\dfrac{\delta}{\rho_2}\partial_x \\ 0 & -\dfrac{m}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\dfrac{m}{\rho_3}I_d & \dfrac{c_0}{\rho_3}\partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\delta}{\rho_4}\partial_x & 0 & \dfrac{c_1}{\rho_4}\partial_{xx} \end{bmatrix}, \tag{3.175}$$

e afim de contemplar as condições de fronteira em (3.172), consideramos o seguinte espaços de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L)$$

com produto interno e norma dados por

$$((U, \hat{U}))_{\mathcal{H}} = (\varphi_x, \hat{\varphi_x}) + (\psi_x, \hat{\psi_x}) + (\Phi, \hat{\Phi}) + (\Psi, \hat{\Psi}) + (\theta, \hat{\theta}) + (\vartheta, \hat{\vartheta}),$$

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2, \tag{3.176}$$

para quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$. E ainda, consideramos o seguinte domínio para o operador A,

$$D(A) = \{U \in \mathcal{H} \mid \theta, \Psi \in H_*^1(0, L), \ \theta, \psi, \varphi, \vartheta \in H^2(0, L), \ \Phi, \vartheta, \psi_x, \theta_x \in H_0^1(0, L)\}.$$

Lema 3.25. *Consideremos o seguinte espaço de fase*

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L^2(0,L).$$

Então, dados quaisquer $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)$ e $\hat{U} = (\hat{\varphi}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\Psi}, \hat{\theta}, \hat{\vartheta}) \in \mathcal{H}$, temos que:

(i) $(U, \hat{U})_{\mathcal{H}}$ é um produto interno em $\mathcal{H}$, onde

$$(U, \hat{U})_{\mathcal{H}} = k(\varphi_x + \psi, \hat{\varphi}_x + \hat{\psi}) + b(\psi_x, \hat{\psi}_x) + \rho_1(\Phi, \hat{\Phi}) + \rho_2(\Psi, \hat{\Psi}) + \rho_3(\theta, \hat{\theta}) + \rho_4(\vartheta, \hat{\vartheta}).$$

(ii) A norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ dada em (3.176) é equivalente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, onde

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2.$$

Demonstração. (i) No que segue, mostraremos apenas que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0,$$

as demais propriedades seguem naturalmente da definição de produto interno em $L^2(0,L)$ aplicada a cada parcela de $(U, \hat{U})_{\mathcal{H}}$.
Dado $U \in \mathcal{H}$, temos que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \|\varphi_x + \psi\| = \|\psi_x\| = \|\Phi\| = \|\Psi\| = \|\theta\| = \|\vartheta\| = 0.$$

Usando a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$\|\psi_x\| = 0 \Rightarrow \|\psi\| = 0 \Rightarrow \psi = 0,$$

assim, novamente pela Desigualdade de Poincaré, obtemos que

$$\|\varphi_x\| = 0 \Rightarrow \|\varphi\| = 0 \Rightarrow \varphi = 0,$$

o que nos leva a concluir que

$$(U, U)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow U = 0.$$

(ii) Dado $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta) \in \mathcal{H}$, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular, e o fato que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\
&\leq 2k\|\varphi_x\|^2 + 2L^2k\|\psi_x\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\
&\leq m_1(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2) \\
&= m_1|U|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

onde $m_1 = \max\{2k, 2kL^2 + b, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$, ou seja,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_1|U|_{\mathcal{H}}^2.$$

Analogamente, usando as desigualdades de Poincaré e Triangular, e o fato que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, obtemos que

$$\begin{aligned}
|U|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2 \\
&\leq 2\|\varphi_x + \psi\|^2 + 2L^2\|\psi_x\| + \|\psi_x\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\vartheta\|^2 \\
&= \frac{2k}{k}\|\varphi_x + \psi\|^2 + \frac{(2L^2+1)b}{b}\|\psi_x\| + \frac{\rho_1}{\rho_1}\|\Phi\|^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2}\|\Psi\|^2 + \frac{\rho_3}{\rho_3}\|\theta\|^2 + \frac{\rho_4}{\rho_4}\|\vartheta\|^2 \\
&\leq m_2\big[k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2\big] \\
&= m_2\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

onde, $m_2 = \max\left\{\frac{2}{k}, \frac{2L^2+1}{b}, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}, \frac{1}{\rho_4}\right\}$, ou seja,

$$|U|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_2\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Portanto,

$$m_3|U|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq m_1|U|_{\mathcal{H}}^2,$$

com $m_3 = \dfrac{1}{m_2}$ provando o lema. □

Sob as considerações dadas anteriormente, temos o seguinte resultado de existência e unicidade para o PVI (3.174) conforme segue.

Teorema 3.26. *Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (3.174) possui uma única solução*

$$U \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

dada por $U(t) = S(t)U_0$.

Demonstração. Para demonstrar é suficiente mostrarmos que que A é um gerador infinitesimal de um C_0-smigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Assim, pelo Teorema de Lummer-Phillips, é suficiente mostrar que:

(i) $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$;

(ii) $Re(AU, U)_{\mathcal{H}} \leq 0$;

(iii) $I_d - A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é sobrejetor.

Assim como feito na demonstração do Teorema 3.15, mostraremos inicialmente os itens (ii) e (iii), (i) seguirá como decorrência.

(ii) Consideremos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta)^T \in D(A)$ e seja AU dado em (3.173), fazendo o produto interno de AU com U em $\mathcal{H}$, integrando por partes e utilizando as condições de fronteira dadas em (3.172), obtemos

$$\begin{aligned}
(AU, U)_{\mathcal{H}} &= k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) + k((\varphi_x + \psi)_x, \Phi) - m(\theta_x, \Phi) + b(\Psi_x, \psi_x) \\
&+ c_0(\theta_{xx}, \theta) - m((\Phi_x + \Psi), \theta) + c_1(\vartheta_{xx}, \vartheta) - \delta(\Psi_x, \vartheta) \\
&+ b(\psi_{xx}, \Psi) - k((\varphi_x + \psi), \Psi) + m(\theta, \Psi) - \delta(\vartheta_x, \Psi) \\
&= m[(\theta, \Phi_x + \Psi) - (\Phi_x + \Psi, \theta)] + b[(\Psi_x, \psi_x) - (\psi_x, \Psi_x)] \\
&- \delta[(\Psi_x, \vartheta) - (\vartheta, \Psi_x)] - c_0\|\theta_x\|^2 - c_1\|\vartheta_x\|^2 \\
&+ k[(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi) - (\varphi_x + \psi, \Phi_x + \Psi)] \\
&\Rightarrow Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = -(c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2) \leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo em $\mathcal{H}$.

(iii) Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$ mostraremos que a equação $(I_d - A)U = F$ possui uma única solução $U \in D(A)$. Assim, reescrevendo $U - AU = F$ em termos de suas componentes, temos

$$\begin{aligned}
\varphi - \Phi &= f_1, && (3.177)\\
\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{m}{\rho_1}\theta_x &= f_2, && (3.178)\\
\psi - \Psi &= f_3, && (3.179)\\
\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{m}{\rho_2}\theta + \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x &= f_4, && (3.180)\\
\theta - \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) &= f_5, && (3.181)\\
\vartheta - \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x &= f_6. && (3.182)
\end{aligned}$$

De (3.177) e (3.179) temos, $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Psi = \psi - f_3$ respectivamente, substituindo em (3.178), (3.180), (3.181) e (3.182) obtém-se o seguinte sistema nas variáveis φ, ψ e θ, ϑ

$$\begin{cases} \varphi - f_1 - \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \dfrac{m}{\rho_1}\theta_x = f_2, \\ \psi - f_3 - \dfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \dfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \dfrac{m}{\rho_2}\theta + \dfrac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x = f_4, \\ \theta - \dfrac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \dfrac{m}{\rho_3}((\varphi - f_1)_x + (\psi - f_3)) = f_5, \\ \vartheta - \dfrac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \dfrac{\delta}{\rho_4}(\psi - f_3)_x = f_6. \end{cases} \tag{3.183}$$

Tomando

$$\begin{aligned} g_1 &:= \rho_1(f_2 + f_1) \in L^2(0, L), \\ g_2 &:= \rho_2(f_4 + f_3) \in L^2_*(0, L), \\ g_3 &:= \rho_3 f_5 + m(f_{1x} + f_3) \in L^2_*(0, L), \\ g_4 &:= \rho_4 f_6 + \delta f_{3x} \in L^2(0, L), \end{aligned}$$

podemos reescrever (3.183) como

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = g_1, & (3.184a) \\ \rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = g_2, & (3.184b) \\ \rho_3\theta - c_0\theta_{xx} + m(\varphi_x + \psi) = g_3, & (3.184c) \\ \rho_4\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \delta\psi_x = g_4. & (3.184d) \end{cases}$$

No que segue, mostraremos que o sistema (3.184a)-(3.184d) possui solução, assim como no Teorema 3.15.

Etapa 1: Existe uma única quadra

$$(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{H}} := H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L) \times H^1_*(0, L) \times H^1_0(0, L),$$

satisfazendo o seguinte problema variacional

$$\begin{aligned} &\rho_1 \int_0^L \varphi\overline{\tilde{\varphi}}dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}dx + \rho_2\int_0^L \psi\overline{\tilde{\psi}}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx \\ &+ \rho_3\int_0^L \theta\overline{\tilde{\theta}}dx - m\int_0^L \theta\overline{(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})}dx - \delta\int_0^L \vartheta\overline{\tilde{\psi}_x}dx + c_0\int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}dx \\ &+ \rho_4\int_0^L \vartheta\overline{\tilde{\vartheta}}dx + m\int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\theta}}dx + c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}dx + \delta\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\vartheta}}dx \\ &= \int_0^L g_1\overline{\tilde{\varphi}}dx + \int_0^L g_2\overline{\tilde{\psi}}dx + \int_0^L g_3\overline{\tilde{\theta}}dx + \int_0^L g_4\overline{\tilde{\vartheta}}dx. \end{aligned} \tag{3.185}$$

Com efeito, consideremos a seguinte forma sesquilinear $a : \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) = {} & \rho_1\int_0^L \varphi\overline{\tilde{\varphi}}dx + k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(\overline{\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}})dx + \rho_2\int_0^L \psi\overline{\tilde{\psi}}dx \\
& + b\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\psi}_x}dx + \rho_3\int_0^L \theta\overline{\tilde{\theta}}dx - m\int_0^L \theta(\overline{\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}})dx \\
& + c_0\int_0^L \theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}dx + \rho_4\int_0^L \vartheta\overline{\tilde{\vartheta}}dx + m\int_0^L(\varphi_x+\psi)\overline{\tilde{\theta}}dx \\
& + c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\tilde{\vartheta}_x}dx + \delta\int_0^L \psi_x\overline{\tilde{\vartheta}}dx - \delta\int_0^L \vartheta\overline{\tilde{\psi}_x}dx
\end{aligned}$$

Note que a é contínua, pois, utilizando as desigualdades de Poincaré e Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta})) \leq {} & k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + k\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}\| + k\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + k\|\psi\|\|\tilde{\varphi}_x\| \\
& + b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + \rho_1\|\varphi\|\|\tilde{\varphi}\| + \rho_2\|\psi\|\|\tilde{\psi}\| + m\|\theta\|\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}\| \\
& + \rho_3\|\theta\|\|\tilde{\theta}\| + c_0\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + \delta\|\vartheta\|\|\tilde{\psi}_x\| + \rho_4\|\vartheta\|\|\tilde{\vartheta}\| \\
& + c_1\|\vartheta_x\|\|\tilde{\vartheta}_x\| + m\|\varphi_x+\psi\|\|\tilde{\theta}\| + \delta\|\psi_x\|\|\tilde{\vartheta}\| \\
\leq {} & k\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + kL^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| \\
& + b\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + \rho_1L^2\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + \rho_2L^2\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + mL^2\|\theta_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
& + mL\|\theta_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + \rho_3L^2\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| \\
& + \delta L\|v_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + c_0\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + \rho_4L^2\|\vartheta_x\|\|\tilde{\vartheta}_x\| \\
& + c_1\|\vartheta_x\|\|\tilde{\vartheta}_x\| + mL\|\varphi_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + mL^2\|\psi_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + L\delta\|\psi_x\|\|\tilde{v}_x\| \\
= {} & (k+L^2\rho_1)\|\varphi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + kL\|\varphi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + mL\|\varphi_x\|\|\tilde{\theta}_x\| \\
& + (L^2k+\rho_2L^2+b)\|\psi_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + mL^2\|\psi_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + L\delta\|\psi_x\|\|\tilde{\vartheta}_x\| \\
& + mL^2\|\theta_x\|\|\tilde{\psi}_x\| + (c_0+\rho_3L^2)\|\theta_x\|\|\tilde{\theta}_x\| + \delta L\|\vartheta_x\|\|\tilde{\psi}_x\| \\
& + mL\|\theta_x\|\|\tilde{\varphi}_x\| + (c_1+\rho_4L^2)\|\vartheta_x\|\|\tilde{\vartheta}_x\| + kL\|\psi_x\|\|\tilde{\varphi}_x\|.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \max\{k+L^2\rho_1, kL, mL^2, mL, kL^2+L^2\rho_2+b, L\delta, c_0+\rho_3L^2, c_1+\rho_4L^2\}$, vem que

$$\begin{aligned}
|a((\varphi,\psi,\theta,\vartheta),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}))| &\leq C_1(\|\varphi_x\|+\|\psi_x\|+\|\theta_x\|+\|\vartheta_x\|)(\|\tilde{\psi}_x\|+\|\tilde{\psi}_x\|+\|\tilde{\theta}_x\|+\|\tilde{\vartheta}_x\|) \\
&= C_1\|(\varphi,\psi,\theta,\vartheta)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\theta},\tilde{\vartheta}_x)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}
\end{aligned}$$

para quaisquer $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \tilde{\mathcal{H}}$, como queríamos. Observe ainda que

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \theta, v), (\varphi, \psi, \theta, \vartheta)) = {} & k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 \\ & + \rho_3\|\theta\|^2 + c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\ & - m(\theta, \varphi_x + \psi) + m(\varphi_x + \psi, \theta) + \delta(\psi_x, \vartheta) - \delta(\vartheta, \psi_x). \end{aligned} \tag{3.186}$$

Assim, tomando a parte real em (3.186), usando a Desigualdade Triangular e o Lema 2.28, obtemos

$$\begin{aligned} Re[a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\varphi, \psi, \theta, \vartheta))] &= k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\varphi\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 \\ &\quad + \rho_3\|\theta\|^2 + c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \\ &\geq k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_2\|\psi\|^2 + c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 \\ &\geq C_2(8\|\varphi_x + \psi\|^2 + 8\|\psi\|^2 + 8\|\psi_x\|^2 + 8\|\theta_x\|^2 + 8\|\vartheta_x\|^2) \\ &\geq C_2(\|\varphi_x + \psi\| + \|\psi\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\| + \|\vartheta_x\|)^2 \\ &\geq C_2(\|\varphi_x\| + \|\psi_x\| + \|\theta_x\| + \|\vartheta_x\|)^2 \\ &= C_2\|(\varphi, \psi, \theta, \vartheta)\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}, \end{aligned}$$

onde tomamos $C_2 = \min\left\{\frac{k}{8}, \frac{\rho_2}{8}, \frac{b}{8}, \frac{c_0}{8}, \frac{c_1}{8}\right\}$. Portanto, a é coerciva.
Consideremos agora

$$\begin{aligned} F : \tilde{\mathcal{H}} &\to \mathbb{C} \\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{v}) &\mapsto F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = \int_0^L g_1\overline{\tilde{\varphi}}dx + \int_0^L g_2\overline{\tilde{\psi}}dx + \int_0^L g_3\overline{\tilde{\theta}}dx + \int_0^L g_4\overline{\tilde{\vartheta}}dx. \end{aligned}$$

Note que F é antilinear e limitada, pois

$$\begin{aligned} |F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})| &\leq \|g_1\|\|\tilde{\varphi}\| + \|g_2\|\|\tilde{\psi}\| + \|g_3\|\|\tilde{\theta}\| + \|g_4\|\|\tilde{\vartheta}\| \\ &\leq C_3(\|\tilde{\varphi}\| + \|\tilde{\psi}\| + \|\tilde{\theta}\| + \|\tilde{\vartheta}\|) \\ &\leq C_3L(\|\tilde{\varphi_x}\| + \|\tilde{\psi_x}\| + \|\tilde{\theta_x}\| + \|\tilde{\vartheta_x}\|) \\ &= C_3L\|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{\|g_1\|, \|g_2\|, \|g_3\|, \|g_4\|\}$. Logo, pelo Teorema de Lax-Milgramm, existe um único $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{H}}$ tal que

$$a((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})) = F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}), \ \ \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \in \tilde{\mathcal{H}},$$

ou seja, $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{H}}$ é a única solução de (3.185), com queríamos.
Etapa 2: Consideremos $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \in \tilde{\mathcal{H}}$ a solução de (3.185), tomando $\Phi = \varphi - f_1 \in H_0^1(0, L)$ e $\Psi = \psi - f_3 \in H_*^1(0, L)$, então as equações (3.177) e (3.179) são satisfeitas, respectivamente.

Assim, tomando $\tilde{\varphi} = \gamma \in C_0^1(0,L) \subset H_0^1(0,L)$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = \tilde{\vartheta} = 0$ em (3.185), temos

$$\int_0^L \varphi_x \overline{\gamma_x} dx = \frac{-1}{k} \int_0^L (\rho_1 \varphi - k\psi_x - g_1 + m\theta_x)\overline{\gamma} dx, \ \forall \gamma \in C_0^1(0,L), \tag{3.187}$$

como $(\rho_1\varphi - k\psi_x - g_1 + m\theta_x), \varphi_x \in L^2(0,L)$ e vale (3.187), então

$$\varphi_x \in H^1(0,L) \Rightarrow \varphi \in H^2(0,L),$$

onde

$$k\varphi_{xx} = \rho_1\varphi - k\psi_x + m\theta_x - g_1 \text{ em } L^2(0,L).$$

Como $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2)$ e $\Phi = \varphi - f_1$, temos

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{m}{\rho_1}\theta_x = f_2 \text{ em } \ L^2(0,L).$$

Portanto, $\varphi \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ satisfaz (3.178).

Agora, tomando $\tilde{\psi} = \tilde{\beta}$, onde $\tilde{\beta} = \beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx$, com $\beta \in H^1(0,L)$ e $\tilde{\theta} = \tilde{\varphi} = \tilde{\vartheta} = 0$ em (3.185), vem que

$$\int_0^L [k(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\beta}} + \rho_2\psi\overline{\tilde{\beta}} + b\psi_x\overline{\tilde{\beta}_x} - m\theta\overline{\tilde{\beta}} - \delta\vartheta\overline{\tilde{\beta}_x}]dx = \int_0^L g_2\overline{\tilde{\beta}}dx,$$

como $\tilde{\beta} = \beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L k(\varphi_x+\psi)\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx + \int_0^L \rho_2\psi\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx \\
&+ \int_0^L b\psi_x\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx - \int_0^L m\theta\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx \\
&- \int_0^L \delta\vartheta\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx = \int_0^L g_2\overline{\left(\beta - \frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_0^L k(\varphi_x+\psi)\overline{\beta}dx - \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx + \int_0^L \rho_2\psi\overline{\beta}dx\\ +b\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx - b\int_0^L \psi_x\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta\right)_x}dx - m\int_0^L \theta\overline{\beta}dx + m\int_0^L \theta\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta\right)}dx\\ -\delta\int_0^L \vartheta\overline{\beta_x}dx + \delta\int_0^L \vartheta\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x}dx - \int_0^L \rho_2\psi\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx\\ = \int_0^L g_2\overline{\beta}dx + \int_0^L g_2\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)}dx,\end{aligned}$$

como $\varphi \in H_0^1(0,L), \psi, g_2, \theta \in H_*^1(0,L)$ e $\overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \beta dx\right)_x} = 0$, obtemos

$$\int_0^L \left[k(\varphi_x+\psi)\overline{\beta} + \rho_2\psi\overline{\beta} + b\psi_x\overline{\beta_x} - m\theta\overline{\beta} - \delta\vartheta\overline{\beta_x}\right]dx = \int_0^L g_2\overline{\beta}dx,$$

ou ainda,

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = \frac{-1}{b}\int_0^L \left[\delta\vartheta_x - g_2 - m\theta + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi)\right]\overline{\beta}dx,\ \forall\beta \in H^1(0,L). \quad (3.188)$$

Como $\psi_x, (\delta\vartheta_x - g_2 - m\theta + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi)) \in L^2(0,L)$ e vale (3.188) para $\beta \in C_0^1(0,L) \subset C^1(0,L) \subset H^1(0,L)$, então $\psi_x \in H^1(0,L)$. Dessa forma, $\psi \in H^2(0,L)$ e ainda

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\left[\delta\vartheta_x - g_2 - m\theta + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi)\right]\text{em } L^2(0,L). \quad (3.189)$$

Como $g_2 = \rho_2(f_4+f_3)$ e $\Psi = \psi - f_3$, temos que

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi) - \frac{m}{\rho_2}\theta + \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x = f_4 \text{ em } L^2(0,L),$$

ou seja, $\psi \in H^2(0,L)$ satisfaz (3.180). Observe ainda que de (3.189), temos que

$$-b\psi_{xx} + \delta\vartheta_x = m\theta + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi) = g_2, \quad (3.190)$$

substituindo (3.190) em (3.188), vem que

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\frac{1}{b}\int_0^L \left[\delta\vartheta_x + b\psi_{xx} - \delta\vartheta_x + m\theta - \rho_2\psi - k(\varphi_x+\psi) - m\theta + \rho_2\psi + k(\varphi_x+\psi)\right]\overline{\beta}dx,$$

de onde segue que

$$\int_0^L \psi_x\overline{\beta_x}dx = -\int_0^L \psi_{xx}\overline{\beta}dx.$$

Usando integração o por partes, tem-se

$$\int_0^L \psi_x \overline{\beta_x} dx = -\int_0^L \psi_{xx} \overline{\beta} dx = -\psi_x \beta \Big|_0^L + \int_0^L \psi_x \overline{\beta_x} dx$$
$$\Rightarrow -\psi_x \beta \Big|_0^L = -\psi_x(L)\beta(L) + \psi_x(0)\beta(0) = 0,\ \forall \beta \in C^1(0,L),$$

como $\beta \in C^1(0,L)$, tomando $\beta(L) = 0$ e $\beta(0) = 6$, temos que $\psi_x(0) = 0$. Analogamente, tomando $\beta(L) = 2$ e $\beta(0) = 0$, vem que $\psi_x(L) = 0$, ou seja, $\psi_x \in H_0^1(0,L)$.
Analogamente, tomando $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = 0$ e $\tilde{\theta} = \tilde{\alpha}$ em (3.185), onde $\tilde{\alpha} = \alpha - \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \alpha dx$, com $\alpha \in H^1(0,L)$, vem que

$$\int_0^L \big[c_0 \theta_x \overline{\tilde{\alpha}_x} + \rho_3 \theta \overline{\tilde{\alpha}} + m(\varphi_x + \psi)\overline{\tilde{\alpha}}\big] dx = \int_0^L g_3 \overline{\tilde{\alpha}} dx,$$

ou ainda,

$$c_0 \int_0^L \theta_x \overline{\alpha_x} dx - c_0 \int_0^L \theta_x \overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \alpha dx\right)_x} dx + \rho_3 \int_0^L \theta \overline{\alpha} dx$$
$$-\rho_3 \int_0^L \theta \overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \alpha dx\right)} dx + m \int_0^L (\varphi_x + \psi)\overline{\alpha} dx - m \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \alpha dx\right)} dx$$
$$= \int_0^L g_3 \overline{\alpha} dx - \int_0^L g_3 \overline{\left(\frac{1}{L}\int_0^L \alpha dx\right)},$$

como $\overline{\left(\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L \alpha dx\right)_x} = 0,\ \varphi \in H_0^1(0,L),\ \psi, \theta \in H_*^1(0,L)$ e $g_3 \in L_*^2(0,L)$, temos

$$\int_0^L \theta_x \overline{\alpha_x} dx = -\frac{1}{c_0}\int_0^L \big[\rho_3 \theta + m\varphi_x + m\psi - g_3\big]\overline{\alpha} dx,\ \forall \alpha \in H^1(0,L). \tag{3.191}$$

Como $\rho_3\theta + m\varphi_x + m\psi - g_3$ e $\theta_x \in L^2(0,L)$ e vale (3.191), segue da definição de derivada fraca que $\theta_x \in H^1(0,L)$. Assim, $\theta \in H^2(0,L)$, e ainda,

$$c_0 \theta_{xx} = \rho_3 \theta + m(\varphi_x + \psi) - g_3 \quad \text{em} \quad L^2(0,L), \tag{3.192}$$

usando o fato que $g_3 = \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3)$ e que $\Psi = \psi - f_3$, vem

$$\theta - \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} + \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_5,$$

ou seja, $\theta \in H^2(0,L)$ satisfaz (3.181).
De (3.192), segue que

$$g_3 = \rho_3 + m(\varphi_x + \psi) - c_0 \theta_{xx}. \tag{3.193}$$

Substituindo (3.193) em (3.191), temos

$$c_0\int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x}dx = -\int_0^L \big[\rho_3\theta + m(\varphi_x+\psi) - (\rho_3 + m(\varphi_x+\psi) - c_0\theta_{xx})\big]\overline{\alpha}dx$$
$$\Rightarrow \int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x}dx = -\int_0^L \theta_{xx}\overline{\alpha}dx.$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x}dx = -\int_0^L \theta_{xx}\overline{\alpha}dx = -\theta_x\alpha\Big|_0^L + \int_0^L \theta_x\overline{\alpha_x}dx,$$

o que nos leva a concluir que

$$-\theta_x\alpha\Big|_0^L = 0 \Rightarrow -\theta_x(L)\alpha(L) + \theta_x(0)\alpha(0) = 0.$$

Como $\alpha\in C^1(0,L)$, tomando $\alpha(L)=2$ e $\alpha(0)=0$, vem que $\theta_x(L)=0$, agora, tomando $\alpha(L)=0$ e $\alpha(0)=6$, então $\theta_x(L)=0$. Provando que, $\theta_x\in H_0^1(0,L)$.
Por fim, tomando $\tilde{\vartheta}=\pi\in H_0^1(0,L)$ e $\tilde{\varphi}=\tilde{\psi}=\tilde{\theta}=0$ em (3.185), tem-se

$$c_1\int_0^L \vartheta_x\overline{\pi_x}dx = -\int_0^L \Big[\delta\psi_x + \rho 4\vartheta - g_4\Big]\overline{\pi}dx, \quad \forall\pi\in H_0^1(0,L). \tag{3.194}$$

Como $\delta\psi_x+\rho4\vartheta-g_4$ e $\vartheta_x\in L^2(0,L)$ e vale (3.194), então $\vartheta_x\in H^1(0,L)$. Assim, $\vartheta\in H^2(0,L)$, e ainda , segue da definição de derivada fraca que

$$c_1\vartheta_{xx} = \delta\psi_x + \rho4\vartheta - g_4 \text{ em } L^2(0,L).$$

Como $g_4=\rho_4 f_6+\delta f_{3x}$, obtemos

$$\vartheta - \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} + \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x = f_6 \text{ em } \quad L^2(0,L),$$

ou seja, $\vartheta\in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ e satisfaz a equação (3.182). Portanto, mostramos que existe um único $U=(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\theta,\vartheta)\in D(A)$, tal que $(I_d-A)U=F$.
(i) Do item (ii), temos que A é dissipativo em $\mathcal{H}$. No item (iii), mostramos que o operador $I_d-A=\mathcal{H}$ (sobrejetor). Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, segue do Teorema 2.20 que $\mathcal{H}$ é reflexivo. Assim, pelo Teorema 2.90, segue que $\overline{D(A)}=\mathcal{H}$, finalizando assim a prova do Teorema 3.26. $\square$

3.6.2 Estabilidade Exponencial

No que segue, verificaremos a estabilidade exponencial do sistema (3.174) utilizando o Teorema 2.101. Primeiramente, vamos checar que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Lema 3.27. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.175). Então, o espectro $\sigma(A)$ do operador A é formado apenas por autovalores de A.*

Demonstração. Considerando a Proposição 2.102, basta mostrar que a aplicação inclusão

$$i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta. Para isso, considere $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada pela norma do gráfico em $D(A)$ tal que $U_n = (\varphi^n, \Phi^n, \psi^n, \Psi^n, \theta^n, \vartheta^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Precisamos mostrar que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ que converge em $(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$ com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.
Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}
\big\|U_n\big\|_{D(A)} &= \big|U_n\big|_{\mathcal{H}} + \big|AU_n\big|_{\mathcal{H}} \\
&= \|\varphi_x^n\|^2 + \|\Phi^n\|^2 + \|\psi_x^n\|^2 + \|\Psi^n\|^2 + \|\theta^n\|^2 + \|\vartheta^n\|^2 \\
&+ \|\Phi_x^n\|^2 + \left\|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 + \|\Psi_x^n\|^2 \\
&+ \left\|\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}^n - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x^n + \psi^n) + \frac{m}{\rho_2}\theta^n - \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x^n\right\|^2 \\
&+ \left\|\frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx}^n - \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x^n + \Psi^n)\right\|^2 + \left\|\frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx}^n - \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x^n\right\|^2
\end{aligned}$$

asim, temos que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ são limtadas em $H^1(0, L)$.
Da dissipatividade do operador A , temos

$$c_0\|\theta_x^n\|^2 + c_1\|\vartheta_x^n\|^2 = |Re(AU_n, U_n)_{\mathcal{H}}| \leq \frac{1}{2}|AU_n|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}|U_n|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|U\|_{D(A)}^2 \leq \|U\|_{D(A)}^2,$$

ou seja, $(\theta_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\vartheta_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ são limtadas em $L^2(0, L)$.
Usando a Desigualdade Triangular e fato que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{xx}^n\|^2 &= \left\|\varphi_{xx}^n + \psi_x^n - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n - \psi_x^n + \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{\rho_1}{k}\left[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right] - \psi_x^n + \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_1}{k}\right)^2\left\|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 + 2\left\|\psi_x^n - \frac{m}{k}\theta_x^n\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_1}{k}\right)^2\left\|\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x^n + \psi^n)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x^n\right\|^2 + 4\|\psi_x^n\|^2 + 4\left\|\frac{m}{k}\theta_x^n\right\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $(\varphi^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,L)$, observe ainda que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,L)$, o que nos leva a concluir que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^2(0,L)$.
Segue da Proposição 2.62 que a aplicação inclusão

$$i:(H^2(0,L),\|\cdot\|_{H^2})\to(H^1(0,L),\|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta. Assim, existe uma subsequência $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}}$ e uma função $\varphi\in H^1(0,L)$, de tal forma que

$$\|\varphi^n-\varphi\|_{H^1}\to 0,$$

como $\varphi^n\in H^1_0(0,L)$, para todo $n\in\mathbb{N}_1$ e como $(H^1_0(0,L),\|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue que $\varphi\in H^1_0(0,L)$.
Analogamente, note que

$$\begin{aligned}
\|\psi^n_{xx}\|^2 &= \left\|\psi^n_{xx}-\frac{k}{b}(\varphi^n_x+\psi^n)+\frac{m}{b}\theta^n-\frac{\delta}{b}\vartheta^n_x+\frac{k}{b}(\varphi^n_x+\psi^n)-\frac{m}{b}\theta^n+\frac{\delta}{b}\vartheta^n_x\right\|^2\\
&= \left\|\frac{\rho_2}{b}\left[\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x+\psi^n)+\frac{m}{\rho_2}\theta^n-\frac{\delta}{\rho_2}\vartheta^n_x\right]+\frac{k}{b}(\varphi^n_x+\psi^n)-\frac{m}{b}\theta^n+\frac{\delta}{b}\vartheta^n_x\right\|^2\\
&\le 2\left(\frac{\rho_2}{b}\right)^2\left\|\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x+\psi^n)+\frac{m}{\rho_2}\theta^n-\frac{\delta}{\rho_2}\vartheta^n_x\right\|^2\\
&+ 2\left\|\frac{k}{b}(\varphi^n_x+\psi^n)-\frac{m}{b}\theta^n+\frac{\delta}{b}\vartheta^n_x\right\|^2\\
&\le 2\left(\frac{\rho_2}{b}\right)^2\left\|\frac{b}{\rho_2}\psi^n_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi^n_x+\psi^n)+\frac{m}{\rho_2}\theta^n-\frac{\delta}{\rho_2}\vartheta^n_x\right\|^2+8\left\|\frac{k}{b}(\varphi^n_x+\psi^n)\right\|^2\\
&+ 8\left\|\frac{m}{b}\theta^n\right\|^2+4\left\|\frac{\delta}{b}\vartheta^n_x\right\|^2,
\end{aligned}$$

assim, temos que $(\psi^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $L^2(0,L)$, ou seja, $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $H^2(0,L)$.
Novamente, como a aplicação inclusão

$$i:(H^2(0,L),\|\cdot\|_{H^2})\to(H^1(0,L),\|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta, segue da pela Proposição 2.62 que existem uma subsequência $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}_2\subset\mathbb{N}_1}$ e uma função $\psi\in H^1(0,L)$, de tal forma que

$$\|\psi^n-\psi\|_{H^1}\to 0,$$

como $\psi^n\in H^1_*(0,L)$, para todo $n\in\mathbb{N}_2$ e $(H^*_0(0,L),\|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue que $\psi\in H^1_*(0,L)$.

E ainda, usando a Desigualdade Triangular e o fato que $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|\theta^n_{xx}\|^2 &= \left\|\theta^n_{xx} - \frac{m}{c_0}(\Phi^n_x+\Psi^n) + \frac{m}{c_0}(\Phi^n_x+\Psi^n)\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{\rho_3}{c_0}\left[\frac{c_0}{\rho_3}\theta^n_{xx} - \frac{m}{\rho_3}(\Phi^n_x+\Psi^n)\right] + \frac{m}{c_0}(\Phi^n_x+\Psi^n)\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_3}{c_0}\right)^2\left\|\frac{c_0}{\rho_3}\theta^n_{xx} - \frac{m}{\rho_3}(\Phi^n_x+\Psi^n)\right\|^2 + 2\frac{m^2}{c_0^2}\left\|(\Phi^n_x+\Psi^n)\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\frac{\rho_3}{c_0}\right)^2\left\|\frac{c_0}{\rho_3}\theta^n_{xx} - \frac{m}{\rho_3}(\Phi^n_x+\Psi^n)\right\|^2 + 4\left(\frac{m}{c_0}\right)^2\|\Phi^n_x\|^2 + 4\left(\frac{m}{c_0}\right)^2\|\Psi^n\|^2,
\end{aligned}$$

ou seja, temos que $(\theta^n_{xx})_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $L^2_*(0,L)$, ou ainda, $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ é limitada em $H^1(0,L)$, da Proposição 2.62 vem que

$$i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \hookrightarrow (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$$

com inclusão compacta. Dessa forma, existe uma subsequência $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_3\subset\mathbb{N}_2}$ de $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ e uma função $\theta \in C[0,L]$, de tal forma que

$$\|\theta^n - \theta\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\theta^n - \theta\|^2 = \int_0^L |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\theta^n(x) - \theta(x)|^2 = L\|\theta^n - \theta\|_\infty \to 0,$$

como $L^2_*(0,L)$ é completo e $\theta^n \in L^2_*(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_3$, segue que $\theta^n \in L^2_*(0,L)$. Observe que da limitação da norma de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, vem que $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}_3}$ é limitada em $H^1(0,L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\Phi^n)_{n\in\mathbb{N}_4\subset\mathbb{N}_3}$ e uma função $\Phi \in C[0,L]$ tal que

$$\|\Phi^n - \Phi\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\Phi^n - \Phi\|^2 = \int_0^L |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\Phi^n(x) - \Phi(x)|^2 = L\|\Phi^n - \Phi\|^2_\infty \to 0.$$

Como $L^2(0,L)$ é completo e $\Phi^n \in L^2(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_4$, segue que $\Phi \in L^2(0,L)$.

Analogamente, da limitação da norma de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$, obtemos que $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}_4}$ é limitada em $H^1(0,L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\Psi^n)_{n\in\mathbb{N}_5\subset\mathbb{N}_4}$ e uma função $\Psi \in C[0,L]$ tal que

$$\|\Psi^n - \Psi\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\Psi^n - \Psi\|^2 = \int_0^L |\Psi^n(x) - \Psi(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\Psi^n(x) - \Psi(x)|^2 = L\|\Psi^n - \Psi\|_\infty^2 \to 0.$$

Como $L^2_*(0,L)$ é completo e $\Psi^n \in L^2_*(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_5$, segue que $\Psi \in L^2_*(0,L)$.
Por fim, como $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $D(A)$, vem que $(\vartheta^n)_{n\in\mathbb{N}_5}$ é limitada em $H^1(0,L)$, e novamente pela Proposição 2.62, obtemos que

$$i : (H^1(0,L), \|\cdot\|_{H^1}) \to (C(\overline{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}),$$

é compacta, assim, existe uma subsequência $(\vartheta^n)_{n\in\mathbb{N}_6\subset\mathbb{N}_5}$ e uma função $\vartheta \in C[0,L]$ tal que

$$\|\vartheta^n - \vartheta\|_\infty \to 0.$$

Observe ainda que

$$\|\vartheta^n - \vartheta\|^2 = \int_0^L |\vartheta^n(x) - \vartheta(x)|^2 dx \leq L \sup_{x\in[0,L]} |\vartheta^n(x) - \vartheta(x)|^2 = L\|\vartheta^n - \vartheta\|_\infty^2 \to 0.$$

Como $L^2(0,L)$ é completo e $\vartheta^n \in L^2(0,L)$ para todo $n \in \mathbb{N}_6$, segue que $\vartheta \in L^2(0,L)$.
Portanto, tomando $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in \mathcal{H}$ e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_6}$ subsequência de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|U_n - U\|_{\mathcal{H}} &= \|\varphi^n - \varphi\|_{H^1}^2 + \|\Phi^n - \Phi\|^2 + \|\psi^n - \psi\|_{H^1}^2 \\ &+ \|\Psi^n - \Psi\|^2 + \|\theta^n - \theta\|^2 + \|\vartheta^n - \vartheta\|^2 \to 0, \end{aligned}$$

ou seja, dada uma sequência $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada em $D(A)$, esta possui uma subsequência convergente em $\mathcal{H}$, ou ainda

$$i : (D(A), \|.\|_{D(A)}) \to (\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$$

é compacta, assim, todos os valores espectrais de A são autovalores de A. □

Lema 3.28. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.175). Então,* $0 \in \rho(A)$.

Demonstração. Observe que mostrar que $0 \in \rho(A)$ é o mesmo que mostrarmos que o operador $-A^{-1}$ existe e é limitado. De fato, dada $F \in \mathcal{H}$ mostraremos que equação resolvente $-AU = F$ possui uma única solução $U \in D(A)$, assim, reescrevendo em termos de suas componentes, temos

$$-\Phi = f_1, \tag{3.195}$$

$$-k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.196}$$

$$-\Psi = f_3, \tag{3.197}$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.198}$$

$$-c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.199}$$

$$-c_1\vartheta_{xx} + \delta\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.200}$$

De (3.195) e (3.197) temos , $\Phi = -f_1$ e $\Psi = -f_3$ respectivamente, assim, obtemos o seguinte sistema nas variáveis φ, ψ θ e ϑ

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = \rho_2 f_4, \\ -c_0\theta_{xx} = m((f_1)_x + f_3) + \rho_3 f_5, \\ -c_1\vartheta_{xx} = \delta(f_3)_x + \rho_4 f_6. \end{cases} \tag{3.201}$$

Tomando

$$g_1 := \rho_1 f_2,$$
$$g_2 := \rho_2 f_4,$$
$$g_3 := \rho_3 f_5 + m((f_1)_x + f_3),$$
$$g_4 := \rho_4 f_6 + \delta(f_3)_x.$$

podemos reescrever (3.201) como

$$\begin{cases} -\, k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = g_1 \;\text{ em } L^2(0, L), & (3.202a) \\ -\, b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta + \delta\vartheta_x = g_2 \;\text{ em } L^2_*(0, L), & (3.202b) \\ -\, c_0\theta_{xx} = g_3 \text{ em } L^2_*(0, L), & (3.202c) \\ -\, c_1\vartheta_{xx} = g_4 \text{ em } L^2(0, L). & (3.202d) \end{cases}$$

Observe ainda que dado o sistema,

$$\begin{cases} -c_0\theta_{xx} = g_3 \text{ em } L^2_*(0, L), \\ -c_1\vartheta_{xx} = g_4 \text{ em } L^2(0, L), \end{cases} \tag{3.203}$$

já foi mostrado em (3.3) e (3.49), que (3.203) possui uma única solução (θ, ϑ) com $\theta, \vartheta \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $\theta_x \in H_0^1(0,L)$.

Agora, substituindo θ e ϑ em (3.202a) e (3.202b), obtemos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = h_1 & \text{em } L^2(0,L), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = h_2 & \text{em } L_*^2(0,L). \end{cases} \tag{3.204}$$

Onde $h_1 = g_1 - m\theta_x$ e $h_2 = g_2 + m\theta - \delta\vartheta_x$.

Assim, do Lema 2.104, segue que que o sistema (3.204) possui uma única solução (φ, ψ) com $\varphi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$, $\psi \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ e $\psi_x \in H_0^1(0,L)$.

Portanto, encontramos $(\varphi, \psi, \theta, \vartheta)$ solução de (3.202a)-(3.202d), ou seja, (3.195)-(3.200) possui uma única solução $(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \vartheta) \in D(A)$.
Mostraremos agora que $-A^{-1}$ é limitado, como $-A^{-1}F = U$ é suficiente mostrar que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

para algum $C > 0$. Relembrando que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2,$$

estimaremos cada termo da norma de U.
De fato,
• Usando (3.195) , e aplicando as desigualdades de Poincaré e Triangular, vem que

$$\begin{aligned} \|\Phi\|^2 = \|f_1\|^2 &\leq L^2\|(f_1)_x\|^2 \\ &\leq L^2(\|(f_1)_x + f_3\| + \|f_3\|)^2 \\ &\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^2\|f_3\|^2 \\ &\leq 2L^2\|(f_1)_x + f_3\|^2 + 2L^4\|(f_3)_x\|^2 \\ &\leq 2L^2\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ \Rightarrow \rho_1\|\Phi\|^2 &\leq \rho_1 2L^2\left(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.205}$$

• Analogamente, de (3.197), temos

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 = \|f_3\|^2 &\leq L^2\|(f_3)_x\|^2 \\
&\leq \frac{L^2}{\sqrt{b}}\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq \frac{\rho_2 L^2}{\sqrt{b}}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \qquad (3.206)
\end{aligned}$$

• Como $-AU = F$, então $(-AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}$. Logo, usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré e a dissipatividade de A, temos

$$\begin{aligned}
& c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 = (F, U)_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow\ & c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
\Rightarrow\ & c_0\|\theta_x\|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\|\theta\| \leq L\|\theta_x\| \Rightarrow \rho_3\|\theta\|^2 \leq \rho_3 L^2\|\theta_x\|^2 \leq \frac{\rho_3 L^2}{c_0}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Analogamente,

$$\|\vartheta\| \leq L\|\vartheta_x\| \Rightarrow \rho_4\|\vartheta\|^2 \leq \rho_4 L^2\|\vartheta_x\|^2 \leq \frac{\rho_4 L^2}{c_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim, segue que

$$\rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \leq L^2\left(\frac{c_1\rho_3 + c_0\rho_4}{c_0 c_1}\right)\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \qquad (3.207)$$

• Multiplicando (3.196) por φ em $L^2(0, L)$, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
& -k((\varphi_x + \psi)_x, \varphi) + m(\theta_x, \varphi) = \rho_1(f_2, \varphi) \\
\Rightarrow\ & k(\varphi_x + \psi, \varphi_x) - m(\theta, \varphi_x) = \rho_1(f_2, \varphi) \qquad (3.208)
\end{aligned}$$

e ainda, multiplicando (3.198) por ψ em $L^2(0, L)$, integrando por partes, vem que

$$\begin{aligned}
& -b(\psi_{xx}, \psi) + k(\varphi_x + \psi, \psi) - m(\theta, \psi) + \delta(\vartheta_x, \psi) = \rho_2(f_4, \psi) \\
\Rightarrow\ & b(\psi_x, \psi_x) + k(\varphi_x + \psi, \psi) - m(\theta, \psi) - \delta(\vartheta, \psi_x) = \rho_2(f_4, \psi) \qquad (3.209)
\end{aligned}$$

Assim, somando (3.208) e (3.209), e usando as desigualdades de Poincaré, Cauchy-Schwarz,

Young e Triangular,

$$\begin{aligned}
b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x+\psi\|^2 &= \rho_2(f_4,\psi) + \rho_1(f_2,\varphi) + m(\theta,\varphi_x+\psi) + \delta(\vartheta,\psi_x)\\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x\| + m\|\theta\|\|\varphi_x+\psi\|\\
&+ \delta\|\vartheta\|\|\psi_x\|\\
&\leq L\rho_2\|f_4\|\|\psi_x\| + L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x+\psi\| + L^2\rho_1\|f_2\|\|\psi_x\|\\
&+ m\|\theta\|\|\varphi_x+\psi\| + \delta\|\vartheta\|\|\psi_x\|\\
&\leq L\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon_1}m^2\|\theta\|^2 + \varepsilon_1\|\varphi_x+\psi\|^2\\
&+ C_{\varepsilon_2}\delta^2\|\vartheta\|^2 + \varepsilon_2\|\psi_x\|^2 + L\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ L^2\frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon_1 = \dfrac{k}{2}$ e $\varepsilon_2 = \dfrac{b}{2}$, vem que $C_{\varepsilon_1} = \dfrac{1}{2k}$ e $C_{\varepsilon_2} = \dfrac{1}{2b}$, assim,

$$b\|\psi_x\|^2 + k\|\varphi_x+\psi\|^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.210}$$

onde $C_1 = 2\left[L\dfrac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \dfrac{L^2m^2}{2kc_0} + \dfrac{L^2\delta^2}{2bc_1} + L\dfrac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + L^2\dfrac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}}\right]$.
Dessa forma, de (3.205), (3.206), (3.207) e (3.210), obtemos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_2\|F\|^2_{\mathcal{H}},$$

onde $C_2 = \dfrac{\rho_2L^2}{\sqrt{b}} + \rho_1 2L^2\left(\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{k}L^2}{\sqrt{kb}}\right)$ e $C_3 = C_1 + L^2\left(\dfrac{c_1\rho_3 + c_0\rho_4}{c_0c_1}\right)$.
Aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, temos

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_3^2}{2}\|F\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{\|U\|^2_{\mathcal{H}}}{2} + C_2\|F\|^2_{\mathcal{H}},$$

o que nos leva a concluir que

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq (2C_2 + C_3^2)\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, existe um $2C_2 + C_3^2 := C > 0$ tal que

$$\|(-A)^{-1}F\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.$$

Concluindo a prova do Lema.

□

Lema 3.29. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido em (3.175). Então, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.*

Demonstração. Como $D(A) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$, suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$. Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$i\beta \notin \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

Portanto, $i\beta \in \sigma(A)$. Considere $0 \neq U \in D(A)$ autovetor associado a β, isto é,

$$AU = i\beta U \Leftrightarrow AU - i\beta U = 0. \tag{3.211}$$

Então, tomando o produto interno de (3.211) com U em $\mathcal{H}$ e, em seguida a parte real, obtemos

$$\begin{aligned} AU - i\beta U = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (AU, U)_{\mathcal{H}} - i\beta \|U\|^2_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Re[(AU, U)_{\mathcal{H}} - i\beta \|U\|^2_{\mathcal{H}}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c_0 \|\theta_x\|^2 + c_1 \|\vartheta_x\|^2 = 0, \end{aligned}$$

como $c_0 \neq 0$ e $c_1 \neq 0$, da Desigualdade de Poincaré, segue que $\theta = \vartheta = 0$. Reescrevendo $AU - i\beta U = 0$ em termos de suas componentes, vem que

$$\begin{aligned} \Phi - i\beta\varphi \quad &= 0, & (3.212)\\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{m}{\rho_1}\theta_x - i\beta\Phi \quad &= 0, & (3.213)\\ \Psi - i\beta\psi \quad &= 0, & (3.214)\\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{m}{\rho_2}\theta - \frac{\delta}{\rho_2}\vartheta_x - i\beta\Psi \quad &= 0, & (3.215)\\ \frac{c_0}{\rho_3}\theta_{xx} - \frac{m}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) - i\beta\theta \quad &= 0, & (3.216)\\ \frac{c_1}{\rho_4}\vartheta_{xx} - \frac{\delta}{\rho_4}\Psi_x - i\beta\vartheta \quad &= 0. & (3.217) \end{aligned}$$

substituindo $\vartheta = 0$ em (3.217), e usando a Desigualdade de Poincaré, vem que $\Psi = 0$. Assim, (3.214) nos fornece que $\psi = 0$ e consequentemente, substituindo $\Psi = \theta = 0$ em (3.216), temos que $\Phi_x = 0$, e novamente pela Desigualdade de Poincaré, temos $\Phi = 0$. Finalmente, substituindo $\Phi = 0$ em (3.212), segue que $\varphi = 0$, ou seja, $U = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, absurdo, pois tomamos $U \neq 0$. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$, provando assim o lema. $\square$

Vejamos agora que a segunda exigência do Teorema 2.101 é satisfeita. Considere $F \in \mathcal{H}$, logo existe um único $U \in D(A)$ tal que $(i\beta I_d - A)U = F$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Então $U = (i\beta I_d - A)^{-1}F$. Assim, para mostrar que $(i\beta I_d - A)^{-1}F$ é limitado para todo β, basta mostrar que existe $C \geq 0$ tal que para todo $F \in \mathcal{H}$

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $U = (i\beta I_d - A)^{-1}F$. Reescrevendo $i\beta U - AU = F$ em termo de suas componentes, obtemos

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \tag{3.218}$$
$$i\rho_1\beta\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + m\theta_x = \rho_1 f_2, \tag{3.219}$$
$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \tag{3.220}$$
$$i\rho_2\beta\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - m\theta_x + \delta\vartheta_x = \rho_2 f_4, \tag{3.221}$$
$$i\rho_3\beta\theta - c_0\theta_{xx} + m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5, \tag{3.222}$$
$$i\rho_4\beta\vartheta - c_1\vartheta_{xx} + \delta\Psi_x = \rho_4 f_6. \tag{3.223}$$

No que segue, mostraremos a limitação para cada termo da norma

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = k\|\varphi_x + \psi\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2.$$

Lema 3.30. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que, $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} i\beta U - AU = F \quad &\Leftrightarrow \quad i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \quad Re[i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}} - (AU, U)_{\mathcal{H}}] = (F, U)_{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \quad -Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}} \\ &\Leftrightarrow \quad c_0\|\theta_x\|^2 + c_1\|\vartheta_x\|^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Assim, da Desigualdade de Poincaré obtemos que

$$\rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \leq \left[\frac{L^2\rho_3}{c_0} + \frac{L^2\rho_4}{c_1}\right]\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Tomando como $C_1 = \left[\dfrac{L^2\rho_3}{c_0} + \dfrac{L^2\rho_4}{c_1}\right]$, obtemos

$$\rho_3\|\theta\|^2 + \rho_4\|\vartheta\|^2 \leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.224}$$

$\square$

Lema 3.31. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existem $C_2, C_3, C_4 > 0$ tal que*

$$\|\psi_x\|^2 \leq \frac{C_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. De (3.223), obtemos que

$$\delta\Psi_x = \rho_4 f_6 - i\rho_4\beta\vartheta + c_1\vartheta_{xx}.$$

Usando (3.220), obtemos que

$$i\beta\psi_x = \frac{1}{\delta}\Big[\delta f_{3x} + \rho_4 f_6 - i\rho_4\beta\vartheta + c_1\vartheta_{xx}\Big]. \tag{3.225}$$

Fazendo o produto interno de (3.225) por ψ_x em $L^2(0,L)$, e usando integração por partes, vem que

$$i\beta\|\psi_x\|^2 = (f_{3x},\psi_x) + \frac{\rho_4}{\delta}(f_6,\psi_x) - \frac{i\rho_4\beta}{\delta}(\vartheta,\psi_x) - \frac{c_1}{\delta}(\vartheta_x,\psi_{xx}). \tag{3.226}$$

De (3.221), obtemos que

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}\Big[i\rho_2\beta\Psi + k(\varphi_x+\psi) - m\theta_x + \delta\vartheta_x - \rho_2 f_4\Big]. \tag{3.227}$$

Subistituindo (3.227) em (3.226) e multiplicando por $\dfrac{1}{i\beta}$, temos

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|^2 &= \frac{1}{i\beta}(f_{3x},\psi_x) + \frac{\rho_4}{i\beta\delta}(f_6,\psi_x) - \frac{\rho_4}{\delta}(\vartheta,\psi_x) + \frac{c_1\rho_2}{\delta b}(\vartheta_x,\Psi)\\ &- \frac{c_1}{i\beta\delta b}(\vartheta_x,k(\varphi_x+\psi)) + \frac{c_1 m}{i\beta\delta b}(\vartheta_x,\theta_x) - \frac{c_1}{i\beta b}\|\vartheta_x\|^2 + \frac{c_1\rho_2}{i\beta\delta b}(\vartheta_x,f_4).\end{aligned}$$

Tomando o módulo e utilizando as desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, obtemos

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|^2 &\leq \frac{1}{|\beta|}\|f_{3x}\|\|\psi_x\| + \frac{\rho_4}{|\beta|\delta}\|f_6\|\|\psi_x\| + \frac{\rho_4}{\delta}\|\vartheta\|\|\psi_x\| + \frac{c_1\rho_2}{\delta b}\|\vartheta_x\|\|\Psi\|\\ &+ \frac{c_1 k}{|\beta|\delta b}\|\vartheta_x\|\|(\varphi_x+\psi)\| + \frac{c_1 m}{|\beta|\delta b}\|\vartheta_x\|\|\theta_x\| + \frac{c_1}{|\beta| b}\|\vartheta_x\|^2 + \frac{c_1\rho_2}{|\beta|\delta b}\|\vartheta_x\|\|f_4\|\\ &\leq \frac{1}{|\beta|}\left[\frac{2}{b} + \frac{\sqrt{\rho_4}}{\delta\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c_1}m}{\sqrt{c_0}\delta b}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \left[C_{\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{\rho_2 c_1}}{\delta b}\right)^2 + \frac{\sqrt{\rho_4}}{\delta\sqrt{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \frac{1}{|\beta|^2}\left[C_{\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{c_1\rho_2}+\sqrt{c_1 k}}{\delta b}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando

$$C_2 = \frac{2}{b} + \frac{\sqrt{\rho_4}}{\delta\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c_1}m}{\sqrt{c_0}\delta b}, \ C_3 = C_{\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{c_1\rho_2} + \sqrt{c_1 k}}{\delta b}\right)^2 \quad \text{e} \quad C_4 = C_{\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{\rho_2 c_1}}{\delta b}\right)^2 + \frac{\sqrt{\rho_4}}{\delta\sqrt{b}},$$

obtemos

$$\|\psi_x\|^2 \leq \frac{C_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_3}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}}.$$

□

Lema 3.32. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dados $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$ existem $C_5, C_6, C_7, C_8 > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq C_6\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_7}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo o produto interno de (3.221) com ψ em $L^2(0, L)$, usando (3.220) e fazendo integração por partes, vem que

$$\rho_2\|\Psi\|^2 = \rho_2(\Psi, f_3) + b\|\psi_x\|^2 + k(\varphi_x + \psi, \psi) - m(\theta_x, \psi) + \delta(\vartheta_x, \psi) - \rho_3(f_5, \psi).$$

Tomando o módulo e utilizando as desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq L\rho_2\|\Psi\|\|f_{3x}\| + b\|\psi_x\|^2 + kL\|\varphi_x + \psi\|\|\psi_x\| \\ &+ m\|\theta\|\|\psi_x\| + \delta\|\vartheta\|\|\psi_x\| + L\rho_3\|f_5\|\|\psi_x\| \\ &\leq \left[\frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \frac{L\sqrt{\rho_3}}{\sqrt{b}}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)\|U\|^2_{\mathcal{H}} \\ &+ \left[b + L^2 k C_{\varepsilon_3} + \frac{C_{\varepsilon_4}m^2}{\rho_3} + \frac{C_{\varepsilon_5}\delta^2}{\rho_4}\right]\|\psi_x\|^2, \end{aligned}$$

usando o Lema 3.31, e definindo as seguintes constantes, $C_5 = b + L^2 k C_{\varepsilon_3} + \frac{C_{\varepsilon_4}m^2}{\rho_3} + \frac{C_{\varepsilon_5}\delta^2}{\rho_4}$, $C_6 = \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} + \frac{L\sqrt{\rho_3}}{\sqrt{b}} + C_5C_4$, $C_7 = C_5C_2$ e $C_8 = C_5C_3$ segue que

$$\begin{aligned} \rho_2\|\Psi\|^2 &\leq C_6\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_7}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ (\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C_5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

□

Lema 3.33. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dados $\varepsilon_6, \varepsilon_7, \varepsilon_8 > 0$ existem $C_9, C_{10}, C_{11} > 0$ tal que*

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_x + \psi\|^2 \;\; &\leq \;\; \frac{C_9}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_{11}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \;\; \varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (\varepsilon_7 + \varepsilon_8)\|U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}
$$

Demonstração. De (3.222), temos que

$$m(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_5 - i\rho_3\beta\theta + c_0\theta_{xx}.$$

Usando as equações (3.218) e (3.220), temos que

$$i\beta(\varphi_x + \psi) = -(f_{1x} + f_3) + \rho_3 f_5 - i\rho_3\beta\theta + c_0\theta_{xx}. \tag{3.228}$$

De (3.219), segue que

$$(\varphi_x + \psi)_x = \frac{1}{k}\Big[\rho_1 f_2 - i\rho_1\beta\Phi - m\theta_x\Big] \tag{3.229}$$

Fazendo o produto interno de (3.228) com $(\varphi_x + \psi)$ em $L^2(0, L)$, usando integração por partes, a equação (3.229), multiplicando por $\dfrac{1}{i\beta}$ e em seguida, tomando o módulo e utilizando as desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_x + \psi\|^2 \;\; &\leq \;\; \frac{1}{|\beta|}\|f_{1x} + f_3\|\|\varphi_x + \psi\| + \frac{\rho_3}{|\beta|}\|f_5\|\|\varphi_x + \psi\| + \frac{c_0\rho_1}{k|\beta|}\|\theta_x\|\|f_2\| \\
&+ \;\; \frac{c_0\rho_1}{k}\|\theta_x\|\|\Phi\| + \frac{c_0 m}{k|\beta|}\|\theta_x\|^2 + \rho_3\|\theta\|\|\varphi_x + \psi\| \\
&\leq \;\; \frac{C_9}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{10}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_{11}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \;\; \varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (\varepsilon_7 + \varepsilon_8)\|U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}
$$

onde $C_9 = \dfrac{1+m}{k} + \dfrac{\sqrt{\rho_3}}{\sqrt{k}}$, $C_{10} = \dfrac{C_{\varepsilon_6}\rho_1 c_0}{k}$ e $C_{11} = \dfrac{C_{\varepsilon_7}\rho_1 c_0}{k^2} + \dfrac{C_{\varepsilon_8}}{\sqrt{c_0}}\left(\dfrac{\rho_3 L}{\sqrt{k}}\right)^2$. □

Lema 3.34. *Sejam $U \in D(A)$ e $F \in \mathcal{H}$, tais que $(i\beta I_d - A)U = F$ para $\beta \in \mathbb{R}$. Então, dados $\varepsilon_9, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{11} > 0$ existem $C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15} > 0$ tal que*

$$
\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|^2 \;\; &\leq \;\; C_{13}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{14}}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{15}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \;\; k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + (k\varepsilon_7 + k\varepsilon_8 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \;\; (\varepsilon_9 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11})\|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração. De (3.219), obtemos que

$$i\beta\rho_1\Phi = \rho_1 f_2 + k(\varphi_x + \psi)_x - m\theta_x, \tag{3.230}$$

fazendo o produto interno de (3.230) com φ em $L^2(0,L)$, usando a equação (3.218), integração por partes e somando e subtraindo o termo $k(\varphi_x+\psi,\psi)$, obtemos

$$\rho_1\|\Phi\|^2 = -\rho_1(f_2,\varphi) + k\|\varphi_x+\psi\|^2 - k(\varphi_x+\psi,\psi) + m(\theta_x,\varphi) - \rho_1(\Phi,f_1).$$

Tomando o módulo e utilizando as desigualdades Triangular, Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|^2 &\leq L\rho_1\|f_2\|\|\varphi_x+\psi\| + L^2\rho_1\|f_2\|\|\psi_x\| + k\|\varphi_x+\psi\|^2\\
&+ kL\|\varphi_x+\psi\|\|\psi_x\| + Lm\|\theta_x\|\|\varphi_x+\psi\| + L^2m\|\theta_x\|\|\psi_x\|\\
&+ L\rho_1\|\Phi\|\|f_{1x}+f_3\| + L^2\|\Phi\|\|f_{3x}\|\\
&\leq \left[\frac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \frac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}} + \frac{C_{\varepsilon_{10}}}{\sqrt{c_0}}\left(\frac{Lm}{\sqrt{k}}\right)^2 + \frac{C_{\varepsilon_{11}}}{\sqrt{c_0}}\left(\frac{L^2m}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ k\|\varphi_x+\psi\|^2 + C_{\varepsilon_9}kL^2\|\psi_x\|^2 + (\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11})\|U\|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

usando o Lema 3.31 e o Lema 3.33 e definindo as seguintes constantes, $C_{12} = C_{\varepsilon_9}kL^2$, $C_{13} = kC_{11} + C_{12}C_4 + \dfrac{2L\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{k}} + \dfrac{2L^2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{b}} + \dfrac{C_{\varepsilon_{10}}}{\sqrt{c_0}}\left(\dfrac{Lm}{\sqrt{k}}\right)^2 + \dfrac{C_{\varepsilon_{11}}}{\sqrt{c_0}}\left(\dfrac{L^2m}{\sqrt{b}}\right)^2$, $C_{14} = kC_9 + C_{12}C_2$ e $C_{15} = kC_{10} + C_{12}C_3$, segue que

$$\begin{aligned}
\rho_1\|\Phi\|^2 &\leq C_{13}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{14}}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{15}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\
&+ k\varepsilon_6\|F\|^2_{\mathcal{H}} + (k\varepsilon_7 + k\varepsilon_8 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2)\|U\|^2_{\mathcal{H}}\\
&+ (\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11})\|U\|^2_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.35. *Sob as notações anteriores e hipóteses do Teorema 3.26, o semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *correspondente ao sistema (3.172) é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes* $C,\omega > 0$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\omega t}, \;\; t\geq 0.$$

Em particular, a solução $U(t) = S(t)U_0$ *de (3.174) satisfaz*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\omega t}\|U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.101, basta mostrar que

(a) $i\mathbb{R}\subseteq\rho(A)$;

(b) $\displaystyle\lim_{|\beta|\to\infty}\|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$,

onde $\rho(A)$ designa o conjunto resolvente do operador A definido em (3.175). Como vimos pelo Lema (3.29), $i\mathbb{R}\subseteq\rho(A)$.

Por outro lado, aplicando os lemas (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), e (3.34), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_1\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{bC_2}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{bC_3}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + bC_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ b(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_6\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_7}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_8}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ (\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{kC_9}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{kC_{10}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + kC_{11}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + k(\varepsilon_7+\varepsilon_8)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ C_{13}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{14}}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{15}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ (k\varepsilon_7 + k\varepsilon_8 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + (\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11})\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \Big[kC_{11} + bC_4 + C_{13} + C_6 + C_1\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + 2k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{1}{|\beta|}\Big[kC_9 + bC_2 + C_{14} + C_7\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{1}{|\beta|^2}\Big[kC_{10} + bC_3 + C_{15} + C_8\Big]\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \Big[(b + C_{12} + C_5)(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + (\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11}) + 2k(\varepsilon_7+\varepsilon_8)\Big]\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \frac{C_{16}}{2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + 2k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_{17}}{2|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{18}}{2|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C_{19}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_8+\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11})\|U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

onde, $C_{16} = 2(kC_{11} + bC_4 + C_{13} + C_6 + C_1)$, $C_{17} = 2(kC_9 + bC_2 + C_{14} + C_7)$, $C_{18} = 2(kC_{10} + bC_3 + C_{15} + C_8)$ e $C_{19} = \max\{1, 2k, b + C_{12} + C_5\}$. Assim, tomando $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_8+\varepsilon_9+\varepsilon_{10}+\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{2C_{19}} > 0$, segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{16}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + 4k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_{17}}{|\beta|}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_{18}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Finalmente, aplicando a Desigualdade de Young e reagrupando os termos, obtêm-se

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_{16}^2 C_{\varepsilon_{12}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon_{12}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + 4k\varepsilon_6\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_{17}^2 C_{\varepsilon_{13}}}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon_{13}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{C_{18}^2 C_{\varepsilon_{14}}}{|\beta|^4}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon_{14}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \left[C_{16}^2 C_{\varepsilon_{12}} + 4k\varepsilon_6 + \frac{C_{17}^2 C_{\varepsilon_{13}}}{|\beta|^2} + \frac{C_{18}^2 C_{\varepsilon_{14}}}{|\beta|^4}\right]\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ (\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13}+\varepsilon_{14})\|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Fazendo $(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13}+\varepsilon_{14}) = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{C}{2} = \left[C_{16}^2 C_{\varepsilon_{12}} + 4k\varepsilon_6 + \dfrac{C_{17}^2 C_{\varepsilon_{13}}}{|\beta|^2} + \dfrac{C_{18}^2 C_{\varepsilon_{14}}}{|\beta|^4}\right] > 0$, segue que existe uma constante $C > 0$, de tal forma que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

De onde segue que,

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

$\square$

4 CONCLUSÃO

No presente trabalho foram abordados sistemas de equações diferenciais com condições de contorno mistas, os quais modelam diversos fenômenos físicos. A existência e unicidade de solução foi encontrada por meio da teoria de semigrupos de operadores, além disso, foi possível estabelecer uma condição para a estabilidade exponencial de cada solução. Mediante o exposto no Capítulo 3, no que concerne a existência e unicidade de solução e a estabilidade exponencial para problemas de valores inciais e de fronteira, podemos dizer que a Teoria de Semigrupos Lineares é bastante eficaz para a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, uma vez que foram abordados diversos problemas com características distintas e foram apresentadas, em cada caso, as ferramentas necessárias para a solução de cada problema apresentado.

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A. and Founier, J.J.F.; *Sobolev Spaces.* vol. 140. Elsevier, 2003.

[2] Almeida Junior, D. S.; Santos, M, L.; Muñoz Rivera, J. E.; Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Math. Methods Appl. Sci.* 36 (2013) 1965-1976.

[3] Alves, M. S.; Jorge Silva, M. A.; Ma, T. F. and Muñoz Rivera, J. E.; Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic Timoshenko systems, *Z. Angew. Math. Phys.* 67 (2016), no. 3, Art. 70, 16 pp.

[4] Alves, M. S.; Jorge Silva, M. A.; Ma, T. F. and Muñoz Rivera, J. E.; Non-homogeneous thermoelastic Timoshenko systems. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, v.* 48 (3), p. 461–484, 2017.

[5] Alves, M. O., Caixeta, A. H., Jorge Silva, M. A., Rodrigues, J. H., Almeida Júnior, D. S.; On a Timoshenko system with thermal coupling on both the bending moment and the shear force *J. Evol. Equ.* 20, 295–320 (2020).

[6] Cardozo C. L., Jorge Silva M. A., Ma T. F., Muñoz Rivera J. E.; Stability of Timoshenko systems with thermal coupling on the bending moment. *Mathematische Nachrichten.* 2019;1–19.

[7] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera and R. Racke.; Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *J. Differential equations* 194 (2003), no. 1, 82-115.

[8] A. Borichev and Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, *Mathematische Annalen* 347 (2010) 455-478.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer New York, 2010.

[10] M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, PR, 2009.

[11] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and V. Komornik, *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá, PR, 2011.

[12] C. M. Dafermos, On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 29 (1968), 241-271.

[13] K. Engel and R. Nagel, *A short Course on Operator Semigroups*. Springer. New York, 2006.

[14] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[15] H. D. Fernández Sare, R. Racke, On the stability of damped Timoshenko Systems: Cattaneo Versus Fourier Law. *Arch. Rational Mech. Anal.* 194 (2009) 221–251.

[16] D. G. Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides-IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[17] L. Gearhart, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 236 (1978) 385-394.

[18] S. Kesavan, *Functional Analysis*. Texts and Readings in Mathematics, 2009.

[19] E. Kreysizg, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, 1989.

[20] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. Projeto Euclides-IMPA. Edição 3, Volume 1, 1993.

[21] Z. Liu and B. Rao, Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, *Z. Angew. Math. Phys*. 60 (2009), no. 1, 54-69.

[22] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1999.

[23] J. E. Muñoz Rivera, *Estabilização de semigrupos e aplicações.* Série de métodos matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[24] J. E. Muñoz Rivera and A. I. Ávila, Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body, *J. Differential Equations* 258 (2015), no. 10, 3468-3490.

[25] J. E. Muñoz Rivera and H. D. Fernández Sare, Stability of Timoshenko systems with past history.*J. Math. Anal. Appl.* 339 (2008) 482–502.

[26] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, Global stability for damped Timoshenko systems.*Discrete Contin. Dyn. Syst.*B9 (2003) 1625-1639.

[27] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability.*J. Math. Anal. Appl.* 276 (2002) 248–278.

[28] J. T. Oden and L. F. Demkowicz, *Applied Functional Analysis*. Computational Mechanics and Applied Analysis, 1996.

[29] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[30] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, *Applied Mathematical Letters* 18(2005) 535–541.

[31] J. Prüss, *On the spectrum of* C_0*-semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984) 847-857.

[32] M. L. Santos and D.S. Almeida Júnior, On Timoshenko-type systems with type III thermoelasticity: Asymptotic behavior, *J. Math. Anal. Appl.*448 (2017), 650-671.

[33] B. T. S. Sozzo, *Boa Colocação para Equações Diferenciais Via Semigrupos*. Dissertação (Dissertação em matemática) – UEL, Londrina, 2018.

[34] S. P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine, Series 6, 41, issue* 245, (1921) 744-746.

[35] S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.