Universidade Estadual de Londrina

THAIS MIKAMI ORNELLAS

RELAÇÕES CONCENTRAÇÃO-MASSA EM ESCALAS DE GRUPOS E AGLOMERADOS DE GALÁXIAS:

IMPACTO NAS RESTRIÇÕES DE MASSA E DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Londrina
2025

THAIS MIKAMI ORNELLAS

RELAÇÕES CONCENTRAÇÃO-MASSA EM ESCALAS DE GRUPOS E AGLOMERADOS DE GALÁXIAS:

IMPACTO NAS RESTRIÇÕES DE MASSA E DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Profª. Drª. Mariana Penna Lima Vitenti.

Londrina
2025

Thais, Ornellas
Relações concentração-massa em escalas de grupos e aglomerados de galáxias: impacto nas restrições de massa e de parâmetros cosmológicos/ Ornellas Thais. – Londrina, Paraná, 2025.
77 f. : il.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Campus Londrina, 2025.

1. Lenteamento Gravitacional Fraco. 2. Perfil de Densidade. 3. Relação Concentração-Massa. I. Penna Lima Vitenti, Mariana. II. Universidade Estadual de Londrina. III. Campus Londrina. IV. Relações concentração-massa em escalas de grupos e aglomerados de galáxias: impacto nas restrições de massa e de parâmetros cosmológicos.

THAIS MIKAMI ORNELLAS

RELAÇÕES CONCENTRAÇÃO-MASSA EM ESCALAS DE GRUPOS E AGLOMERADOS DE GALÁXIAS:
IMPACTO NAS RESTRIÇÕES DE MASSA E DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

_____
Orientador: Profa. Dra. Mariana Penna Lima Vitenti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

_____
Prof. Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

_____
Dr. Eduardo José Barroso
Laboratoire d'Annecy de Physique des Particules

Londrina, 29 de agosto de 2025.

AGRADECIMENTOS

Sou profundamente grata a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse possível.

Primeiramente, agradeço à minha orientadora, Prof. Dra. Mariana Penna Lima Vitenti, pela orientação dedicada, paciência e incentivo durante os dois anos do mestrado. Sua orientação foi fundamental para meu crescimento acadêmico e pessoal.

Agradeço os professores Dr. Thiago dos Santos Pereira, Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti e aos colegas do grupo de Cosmologia pelas conversas e ensinamentos ao longo do curso.

Agradeço em especial ao Alexandre pela amizade, paciência e companheirismo de sempre. Sou grata por toda a ajuda e apoio seu nessa jornada. E ao Henrique Vedoveli, que mesmo de longe, nunca deixou de estar presente nos momentos importantes.

Sou grata a minha família (Donizeti, Juliana, Eduardo e Anna Julia) por todo o amor, conversas, risadas e por sempre acreditarem em mim. O apoio incondicional de vocês foi essencial para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a Ana por estar sempre comigo em todos os momentos, por sempre me apoiar, ouvir meus choros e risadas e tornar a vida mais leve. Obrigada por acreditar em mim mesma quando eu duvidava, e por comemorar comigo cada pequena vitória. Ter você ao meu lado fez toda a diferença.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

A todos, o meu sincero obrigado.

RESUMO

ORNELLAS, Thais. **Relações concentração-massa em escalas de grupos e aglomerados de galáxias:** impacto nas restrições de massa e de parâmetros cosmológicos. 2025. 154 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

A distribuição das estruturas do universo desempenha um papel fundamental como sonda cosmológica. Exemplos importantes incluem o lenteamento gravitacional e as distribuições de galáxias e aglomerados de galáxias em grande escala. Tanto o lenteamento quanto essas distribuições (no contexto do Modelo de Halos) dependem do chamado perfil de densidade de matéria, como, por exemplo, o perfil de Navarro, Frenk & White (NFW). Esse perfil descreve a densidade de halos de matéria escura com simetria esférica e em equilíbrio dinâmico. Nas últimas três décadas, tem-se buscado identificar um perfil universal para a densidade de matéria de halos por meio de simulações de N-corpos. Nesse contexto, é comum definir a concentração como uma característica fundamental no estudo de halos. A concentração, definida como a razão entre o raio do halo e um raio de escala interno ($c = R_\Delta / r_s$), indica o quão centralizada está a massa dentro do halo. Ela atua como um parâmetro, junto à massa, na modelagem desses perfis. A chamada relação concentração-massa surge como uma forma de reduzir o número de parâmetros na modelagem dos perfis de densidade. Neste trabalho, implementamos diferentes relações concentração-massa na Numerical Cosmology Library (NumCosmo) e comparamos os resultados com os obtidos por meio da Core Cosmology Library (CCL) e do Colossus.

Palavras-chave: lenteamento gravitacional fraco; perfil de densidade; relação concentração-massa.

ABSTRACT

ORNELLAS, Thais. **Concentration–mass relations on group and galaxy cluster scales:** impact on mass and cosmological parameter constraints 2025. 154 p. Dissertation (Master in Physics) – State University of Londrina, Londrina, 2025.

The distribution of structures in the universe plays a fundamental role as a cosmological probe. Im- portant examples include gravitational lensing and the large-scale distributions of galaxies and galaxy clusters. Both lensing and these distributions (in the context of the Halo Model) depend on the so- called matter density profile, such as the Navarro, Frenk & White (NFW) profile. This profile des- cribes the density of dark matter halos with spherical symmetry and in dynamical equilibrium. Over the past three decades, efforts have been made to identify a universal profile for the matter density of halos through N-body simulations. In this context, concentration is commonly defined as a key feature in studying halos. Concentration, defined as the ratio between the halo radius and an internal scale radius ($c = R_\Delta / r_s$), indicates how centrally concentrated the mass is within the halo. It serves as a parameter, along with mass, in modeling these profiles. The so-called concentration–mass relation emerges as a way to reduce the number of parameters in modeling density profiles. In this work, we implement different c-M relations using the Numerical Cosmology Library (NumCosmo) and compare the results with those obtained through the Core Cosmology Library (CCL) and Colossus.

Key-words: weak gravitational lensing; halo density profile; concentration-mass relation.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	**MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA**	12
1.1	**O universo homogêneo e isotrópico**	12
1.2	**Dinâmica do espaço-tempo**	13
1.3	**Formação de estruturas**	16
1.3.1	Perturbações lineares	16
1.3.2	Regime não linear	18
1.3.3	Altura do pico	20
2	**O MODELO DE HALOS**	21
2.1	**Espectro de potência no modelo de halos**	22
2.2	**Perfil de densidade**	24
2.2.1	Perfil externo	25
2.3	**Perfil interno + externo**	26
3	**TEORIA DO LENTEAMENTO GRAVITACIONAL**	28
3.1	**Lenteamento gravitacional fraco**	28
3.1.1	Equação da lente e ângulo de deflexão	29
3.1.2	Matriz jacobiana	32
3.1.3	Densidade superficial e densidade crítica	33
3.1.4	Componentes do cisalhamento	34
3.1.5	Degenerescência de massa-folha	35
3.1.6	NFW no lenteamento gravitacional	35
4	**RELAÇÃO c-M NO MODELO DE HALOS**	37
4.1	**Concentração em simulações de N corpos**	38
4.2	**Discussão sobre a relação c-M**	50
4.3	**Concentração em simulação hidrodinâmica**	53

5 **RESULTADOS** 56

6 **CONCLUSÃO** 68

A **ANÁLISE DE σ** 69

REFERÊNCIAS 72

INTRODUÇÃO

Halos de matéria escura associados com aglomerados de galáxias são os maiores objetos a terem atingido o equilíbrio dinâmico, e, por isso, desempenham um papel fundamental nos estudos cosmológicos [1, 2]. No entanto, estimar a massa de estruturas como aglomerados de galáxias é um desafio. Por não ser possível medir a massa de forma direta, é necessário recorrer a métodos indiretos como a cinemática de galáxias [3], observações em raios-X [4] e lenteamento gravitacional [5]. No caso do lenteamento gravitacional, os observáveis correspondem a distorções nas imagens de galáxias de fundo causadas pelo campo gravitacional de objetos massivos na linha de visão [6, 7]. Esse efeito fornece informações sobre o desvio sofrido por raios de luz em sua trajetória. Um aspecto do lenteamento gravitacional é que a deflexão da luz ocorre igualmente para matéria escura e para matéria bariônica, independente de estar ou não em equilíbrio. Por isso, é uma ferramenta ideal para medir a massa total de objetos [6].

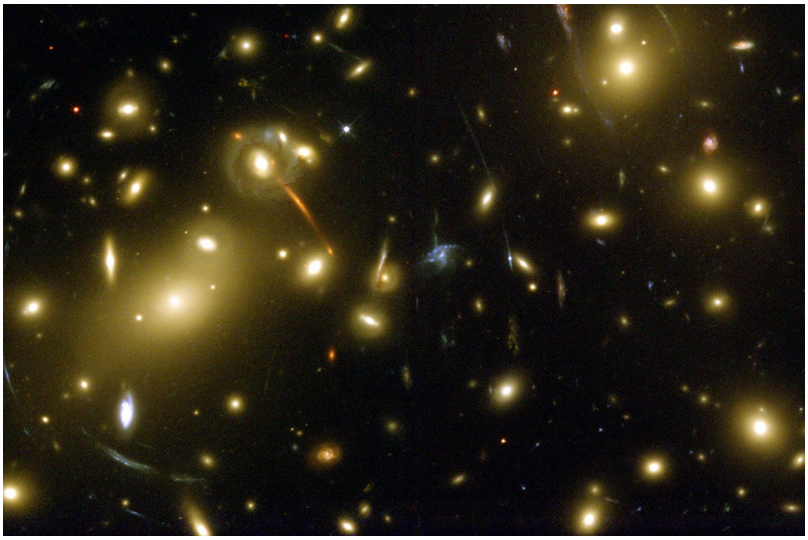

Figura 1: Lenteamento gravitacional no aglomerado de galáxias Abell 2218. Imagem do Telescópio Espacial Hubble (HST) [8].

Para estimar a massa de um aglomerado por meio dessa técnica, pode-se distinguir entre o regime de lenteamento gravitacional forte e fraco. Na Figura 1 se observa mais predominantemente o lenteamento gravitacional forte, que se caracteriza por grandes distorções podendo formar anéis de Einstein [9, 10]. Entretanto, o lenteamento gravitacional fraco não é menos importante e é objeto de estudo deste trabalho. É feito essa escolha pois queremos considerar somente pequenas distorções na imagem, dado que no regime de lenteamento forte a equação de lente passa a ser não linear. O regime de lenteamento fraco não descreve a distribuição de massa na região mais central do aglomerado, enquanto o forte se limita a região mais interna. Dessa forma, a combinação dos dois regimes seria a abordagem ideal para reconstruir a massa de uma estrutura [11]. Dois efeitos do lenteamento gravitacional fraco são descritos em termos da densidade superficial de massa e do cisalhamento reduzido, em que a modelagem teórica depende necessariamente do perfil de densidade de massa.

Devido ao aumento de volume e qualidade de dados observacionais em levantamentos como Euclid[1], LSST[2] e DES[3], [12–14] essas estruturas têm necessitado de uma modelização cada vez mais detalhada dos perfis de densidade de matéria desses objetos. Nas últimas três décadas, simulações de N-corpos têm sido utilizadas para encontrar um perfil de densidade universal para descrever sua distribuição. Os perfis mais estudados possuem simetria esférica [15, 16] e perfis modernos consideram, além do perfil interno, o ambiente ao redor do halo, configurando uma composição de perfil interno e externo [17]. Em geral, os perfis são descritos em termos de dois parâmetros-chave: massa e concentração. O estudo entre as duas variáveis tem sido feito principalmente com simulações de N-corpos. A relação concentração-massa é introduzida na descrição do perfil de forma que a dimensão do problema é reduzida a ser descrita somente pela massa do halo.

Algumas limitações ao introduzir modelos de relação concentração–massa (c–M) estão nas diferenças de calibração entre eles, que utilizam faixas específicas de massa e definições variadas para essa grandeza. Neste trabalho, implementamos modelos de relação c–M para ampliar as ferramentas disponíveis na biblioteca NumCosmo [18]. Bibliotecas como Colossus [19] e CCL [20] já oferecem diversas relações c–M, e uma parte deste estudo consiste em comparar os resultados entre essas implementações. Essa comparação é importante para avaliar a consistência dos resultados e identificar possíveis vieses nas diferentes bibliotecas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta a base teórica para a Cosmologia, abrangendo temas como a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), espectro de potência de matéria e formação de estruturas. No Capítulo 2 é discutido o modelo de halos e perfis de densidade de matéria escura. O Capítulo 3 discute a teoria do lenteamento gravitacional e o Capítulo 4 detalha os modelos de relação concentração-massa. O Capítulo 5 apresenta os resultados de comparação das implementações dos modelos e, no Capítulo 6 está a conclusão.

[1] esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Euclid_overview
[2] lsstdesc.org/
[3] darkenergysurvey.org/

1 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA.

Neste capítulo é realizada uma revisão de conceitos básicos do Modelo Padrão da Cosmologia, como o Princípio Cosmológico e a Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). O capítulo teve como fontes principais [21–23].

1.1 O UNIVERSO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO

Uma das bases fundamentais para o estudo da cosmologia é a suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Isso é conhecido como o **Princípio Cosmológico** e assume que, em grandes escalas, o universo apresenta simetria sob rotações e translações. Dessa forma, a homogeneidade do universo não se aplica a um universo visto em pequenas escalas, mas somente quando observado com raios grandes o suficiente para incluir vários aglomerados de galáxias, ou seja, distâncias maiores que ≈ 200 Mpc. A ideia de um universo ser isotrópico vem do pensamento de que não existe posição especial, de forma que não estamos em uma posição privilegiada no universo. Com esse raciocínio, conclui-se que ele deve ser isotrópico para observadores em todo o universo. Entretanto, isso não significa que não ocorra uma situação em que um observador veja um universo não isotrópico. Isso acontece, por exemplo, quando tomamos o referencial de um observador com uma velocidade de metade da velocidade da luz. Esses observadores verão a radiação cósmica de fundo vindo de encontro a eles da direção que estão seguindo mais intensamente do que por outros lados. Logo, quando se fala de isotropia, é necessário especificar que ela só se dá quando se considera observadores em queda livre.

A homogeneidade do universo pode ser ligada a esse princípio de isotropia. O princípio de isotropia pode ser observado, enquanto a homogeneidade é somente inferida a partir da análise da isotropia. O princípio de homogeneidade traz a ideia de que as condições devem ser as mesmas no mesmo tempo em qualquer ponto que pode ser ligado com uma rotação. A homogeneidade diz que observadores em todas as galáxias típicas vêem condições iguais no mesmo tempo. Esses princípios são a base do modelo padrão da cosmologia pois levam a uma escolha de um sistema de coordenadas do espaço-tempo em que a métrica tem uma forma simples, como a proposta por Friedmann, com contribuições de Robertson e Walker com a ideia de homogeneidade e isotropia e de Lemaître ao mostrar que o universo está se expandindo. A métrica de FLRW desse espaço é descrita por

$$ds'^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2/R_0^2} + r^2d\Omega^2\right], \tag{1.1}$$

onde c é a velocidade da luz, $a(t)$ é o fator de escala, k é uma constante associada a curvatura, R_0 o raio de curvatura e $d\Omega$ é a parte angular em que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

1.2 DINÂMICA DO ESPAÇO-TEMPO

Para estudar a dinâmica do espaço-tempo, tomamos como base as equações de Einstein da Teoria da Relatividade Geral:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, R é o escalar de Ricci, G é a constante gravitacional, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que pode ser definido em termos dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}, \tag{1.3}$$

em que

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{\lambda\nu}). \tag{1.4}$$

Utilizando a definição acima e dada a métrica de FLRW, pode-se calcular os símbolos de Christoffel. Os valores não nulos são dados por:

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{1}{c^2}\frac{a\dot{a}}{(1-kr^2)} \qquad \Gamma^{0}_{22} = \frac{1}{c^2}a\dot{a}r^2 \qquad \Gamma^{0}_{33} = \frac{1}{c^2}a\dot{a}r^2 sen^2\theta$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{kr}{1-kr} \qquad \Gamma^{1}_{22} = -r(1-kr^2) \qquad \Gamma^{1}_{33} = -r(1-k^2)sen^2\theta$$

$$\Gamma^{i}_{0i} = \frac{\dot{a}}{a} = \Gamma^{i}_{i0} \qquad \Gamma^{i}_{i1} = \frac{1}{r} = \Gamma^{i}_{i1} \qquad \Gamma^{2}_{33} = -sin\theta cos\theta$$

$$\Gamma^{3}_{23} = cotg\theta = \Gamma^{3}_{32}$$

com $\dot{a} = da/dt$. Com isso, utilizando a equação (1.3) foram encontradas as componentes R_{00} e R_{ij} do tensor de Ricci

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{1.5}$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{(1-kr^2)c^2}, \tag{1.6}$$

$$R_{22} = \frac{1}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2, \tag{1.7}$$

$$R_{33} = \frac{1}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)r^2 sen^2\theta. \tag{1.8}$$

Note que é possível escrever as três equações de uma forma mais geral

$$R_{ij} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{kc^2}{a^2}\right]g_{ij}. \tag{1.9}$$

A partir das componentes do tensor de Ricci fica simples o cálculo do escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{6}{c^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right). \tag{1.10}$$

Com isso, têm-se os ingredientes para escrever as componentes do tensor de Einstein utilizando a equação 1.2. Lembrando que $G^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\lambda}G_{\lambda\nu}$ os valores não nulos são dados por

$$G^0_{\ 0} = -\frac{3}{c^2}\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right), \tag{1.11}$$

$$G^i_{\ j} = -\frac{1}{c^2}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2}\right). \tag{1.12}$$

Analisando a parte direita da equação de Einstein (1.2), nota-se o tensor energia-momento, que representa a informação sobre a matéria e conteúdo do universo. De forma geral, por se tratar de um universo homogêneo e isotrópico o tensor de energia-momento pode ser descrito por aquele de um fluido perfeito.

$$T^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

onde ρ é a densidade de matéria e P é a pressão. Dessa forma, escrevendo $G^0_{\ 0} = (8\pi G/c^4)T^0_{\ 0}$ em (1.12) temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{1.14}$$

conhecida como **Equação de Friedmann**, a equação fundamental para descrever a evolução do fator de escala $a(t)$. Fazendo o mesmo para a equação (1.12), encontra-se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \tag{1.15}$$

conhecida como a **segunda equação de Friedmann**. Outra maneira de representar a primeira equação de Friedmann é por meio da função de Hubble, definida como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{1.16}$$

Dessa forma, assumindo um universo plano com $k = 0$, temos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{1.17}$$

em que ρ deve ser entendido como a soma de todas as contribuições de densidade de matéria e energia do universo ($\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$, sendo a densidade de matéria, radiação e energia escura, respectivamente).

A partir de (1.17) define-se a densidade crítica como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{1.18}$$

Valores de densidade maiores, menores ou igual à densidade crítica indicam um universo fechado, aberto e plano, respectivamente. É conveniente introduzir os parâmetros de densidade relativa

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \tag{1.19}$$

$$\Omega_\kappa = \frac{-\kappa c}{(aH)^2}, \tag{1.20}$$

em que $\sum \Omega_i + \Omega_\kappa = 1$. Para analisar como a densidade e a pressão evoluem com o tempo, tomamos a **equação de continuidade**

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0, \tag{1.21}$$

que é obtida a partir da conservação do tensor energia-momento,

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{1.22}$$

O universo tem como principais componentes a matéria, radiação e energia escura. Esses componentes podem ser aproximados por fluidos perfeitos que podem ser parametrizados utilizando a equação de estado $w = P/(\rho c^2)$, que, juntamente com a equação de continuidade (1.21) se obtém $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Cada componente do universo tem sua própria equação de estado e valor para w.

1. O termo de matéria refere-se ao fluido em que a pressão é muito menor que a densidade de energia. Neste regime, é considerado um fluido tipo poeira em que a pressão seja nula, ou seja, não apresenta colisões entre as partículas. Isso corresponde ao caso de um gás de partículas não relativísticas. Da matéria, temos a relação $\rho \propto a^{-3}$ e $w \approx 0$. Isso nos diz que o volume de uma região no espaço aumenta proporcionalmente com a^3 enquanto a energia nesta região permanece constante. Uma componente da matéria não relativística seria os bárions, as matérias ordinárias encontrada nos núcleos. A matéria escura fria, ou CDM (*Cold Dark Matter*) é um exemplo que interage principalmente de forma gravitacional. Em grandes escalas a matéria escura tem sido detectada por lenteamento gravitacional e é a matéria que está mais presente no universo. A componente da matéria é expressa por Ω_m.

2. A radiação é outro fluido que faz parte da evolução do universo. Ela é caracterizada por fluidos em que a pressão é um terço da densidade de energia. Temos a relação $\rho \propto a^{-4}$ e $w = 1/3$. É expressa por Ω_r e exemplos incluem a radiação eletromagnética e neutrinos relativísticos.

3. A energia escura é o último fluido que faz parte do universo. De forma geral, são caracterizados por $w < -1/3$ e, dessa forma, têm pressão negativa $P = w\rho c^2$. Como exemplo, tem-se, no modelo de ΛCDM, onde Λ é a constante cosmológica de Einstein. Neste contexto, o universo é

dominado por energia escura, com pressão negativa $P = -\rho c^2$ e densidade de energia constante $\rho \propto a^0$ com $w = -1$. É expressa por Ω_Λ e permanece constante com o tempo enquanto o universo se expande.

Considerando a variação no fator de escala dado por essas componentes, podemos escrever

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda \tag{1.23}$$

com Ω_r a contribuição da radiação, Ω_m a contribuição da matéria (bárions Ω_b e matéria escura Ω_c), a geometria do universo Ω_k e o termo de energia escura Ω_Λ.

1.3 Formação de estruturas

Até então, tem-se estudado um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico. Entretanto, se o universo fosse dessa forma, não haveria formação de estruturas. Em pequenas escalas, têm-se estruturas e, para entender as estruturas de grande escala e a formação de tais estruturas, é necessário introduzir perturbações que, se considerarmos pequenas, podem ser estudadas pela teoria de perturbação. Nessa seção, foram consultados os trabalhos de [1, 2, 21].

1.3.1 Perturbações lineares

Uma descrição matemática da evolução das não homogeneidades envolve tratar a matéria como um fluido sem pressão que se expande com o universo. Pode-se caracterizar as flutuações no campo de densidade de matéria relativa a densidade média do universo pelo contraste de densidade

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\bar{\rho}} - 1, \tag{1.24}$$

em que $\bar{\rho}$ é a densidade média. Dessa forma, para $\delta > 0$ ($\delta < 0$) tem-se regiões de sobredensidade (subdensidade) e para $\delta = 0$ [24], tem-se uma região com a densidade média do universo. Contanto que $\delta << 1$ é possível tratar como um regime linear, para $\delta > 1$ o caso entra em um regime não linear [21]. Se $\delta(x)$ é obtida a partir de um processo Gaussiano aleatório, homogêneo e isotrópico, podemos caracterizá-lo através do espectro de potência.

O espectro de potência é a transformada de Fourier da função de correlação. Em um espaço de coordenadas real é possível expressar a função de correlação de n-pontos dos contrastes de densidade da forma

$$\langle \delta(\vec{x_1}, z) ... \delta(\vec{x_n}, z) \rangle \equiv \xi_n(\vec{x_1}, ..., \vec{x_n}, z), \tag{1.25}$$

de modo que a função de correlação de 2-pontos é definida por

$$\langle \delta(\vec{x}, z) \delta(\vec{x}', z') \rangle \equiv \xi_n(\vec{x}, \vec{x}', z). \tag{1.26}$$

O contraste de densidade $\delta(\vec{x}, z)$ é dado pela relação entre a perturbação no campo de densidade de matéria no universo e a densidade média de matéria

$$\delta(\vec{x}, z) \equiv \frac{\rho(\vec{x}, z)}{\rho_m(z)} - 1, \tag{1.27}$$

em que a transformada de Fourier é dada por

$$\delta(\vec{k}, z) = \int \delta(\vec{x}, z) e^{i\vec{k}.\vec{x}} d^3\vec{x}, \tag{1.28}$$

e a transformada inversa é

$$\delta(\vec{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{k}, z) e^{-i\vec{k}.\vec{x}} d^3\vec{k}. \tag{1.29}$$

O espectro de potência $P(k, z)$ é definido pela função de correlação de dois pontos no espaço de Fourier [25]

$$\langle \delta(\vec{k}, z) \delta(\vec{k'}, z) \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k'}) P(k, z), \tag{1.30}$$

em que δ_{Dirac} é o delta de Dirac, definido por

$$\delta_{Dirac}(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{x}} d^3\vec{x}. \tag{1.31}$$

É comum utilizar também a definição para o espectro de potência sem dimensões [25]

$$\Delta(k) = 4\pi \left(\frac{k}{2\pi}\right)^3 P(k). \tag{1.32}$$

O espectro de potência descreve a variância das flutuações de densidade em função do número de onda k, fornecendo uma descrição estatística das perturbações iniciais. De modo geral, o espectro de potência é dado pela função de correlação de dois pontos de forma que ela indica as flutuações na densidade entre dois pontos. Em uma determinada escala k o valor do espectro de potência indica uma variação nas flutuações que pode ser mais forte ou fraca dependendo da escala [1]. Como a distribuição do contraste de densidade é dada como Gaussiana, determinamos a variância

$$V(\delta(\vec{x}, z)) = \langle \delta^2(\vec{x}, z) - \langle \delta(\vec{x}, z) \rangle^2 \rangle = \langle \delta^2(\vec{x}, z) \rangle . \tag{1.33}$$

Em uma escala R, o contraste de densidade é dado por

$$\delta(\vec{x}, R, z) \equiv \int \bar{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R) \delta(\vec{y}, z) d^3y, \tag{1.34}$$

no qual $\bar{W}(|\vec{y} - \vec{x}|, R)$ caracteriza a função janela, que é comum ser escolhida como sendo uma função

do tipo *top hat* no espaço real [2],

$$\bar{W}(x) = \frac{3}{x^2}(\sin x - \cos x), \tag{1.35}$$

e tem como objetivo filtrar a escala de interesse. Dessa forma, a variância é calculada e dada por

$$\sigma^2(R,z) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 P(k,z)|W(k,R)|^2 \,\mathrm{d}k. \tag{1.36}$$

O raio lagrangiano R é o raio de uma esfera no universo homogêneo que contém a massa M.

O contraste de densidade de matéria $\delta(\vec{x},z)$ evolui com o tempo no regime linear de formação de estruturas da forma

$$\delta(\vec{x},z) = D_+(z)\delta(\vec{x},0). \tag{1.37}$$

em que D_+ representa o **fator de crescimento linear**, e é normalizada para que $D_+(0) \equiv 1$. Para o caso de um Universo descrito pelo modelo ΛCDM a função de crescimento tem a forma [25]

$$D_+(a) = \frac{5\Omega_m}{2}\frac{H(a)}{H_0}\int_0^a \frac{da'}{(a'H(a')/H_0)^3}. \tag{1.38}$$

com $a = 1/(1+z)$ sendo o fator de escala.

1.3.2 Regime não linear

Quando a perturbação atinge um valor de $\delta \sim 1$, o regime de crescimento linear não é mais válido, sendo necessária uma abordagem diferente para descrever o regime de crescimento não linear em que $\delta \geq 1$. [21]. Por esse motivo, grandes simulações de N-corpos têm sido desenvolvidas e utilizadas para descrever a evolução dos objetos que interagem gravitacionalmente em um universo em expansão [26, 27]. No entanto, devido ao elevado custo computacional dessas simulações, abordagens perturbativas e semi-analíticas têm sido estudadas. Um exemplo é o modelo de **colapso esférico**, ou *spherical collapse*, que considera uma região com simetria esférica que, inicialmente, se expande junto com o Universo, mas que, devido à sua própria gravidade, inverte o movimento e se colapsa. A estrutura atinge equilíbrio dinâmico por meio da **virialização**, formando um halo estável, não permitindo que ocorra uma singularidade [28].

Para observar, vamos considerar uma perturbação esfericamente simétrica de raio R, massa M e densidade $\bar{\rho}(1+\delta)$ no interior da esfera, no qual $\bar{\rho}$ é a densidade média do Universo. Da lei de conservação de energia, temos

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 - \frac{GM}{R} \tag{1.39}$$

em que E é a energia total do sistema. Para $E > 0$ a expansão será eterna e para $E < 0$ a expansão atinge um valor de R máximo e o sistema passa a contrair até seu colapso. A solução para (1.39) no segundo caso é dada na forma paramétrica por $R = A(1-\cos\theta)$ e $t + T = B(\theta - \sin\theta)$, em que as

constantes A e B estão relacionadas por [29]

$$\frac{A^3}{B^2} = GM. \tag{1.40}$$

Quando $\theta = \pi$, o raio R atinge seu valor máximo e ocorre o chamado *turn around*, que é quando o raio passa a diminuir. Em $\theta = 2\pi$ é onde ocorre a virialização [30], note que corresponde a $t = 2t_{ta}$ e $R \to 0$, entretanto, o processo de virialização não permite que essa configuração singular ocorra.

Para o processo de *turn around*, temos $R_{ta} = R(\theta = \pi) = 2A$ e $t_{ta} = t(\theta = \pi) = \pi B$[1], logo

$$R = \frac{R_{ta}}{2}(1 - cos\theta), \tag{1.41}$$

$$t = \frac{t_{ta}}{\pi}(\theta - sen\theta). \tag{1.42}$$

O R_{ta} representa esse raio máximo e t_{ta} o tempo que isso ocorre. Nesse processo o sistema entra em equilíbrio virial [31] no qual as energias cinética e potencial (E_K e E_U, respectivamente) são relacionadas da forma

$$E_{Kvir} = -\frac{1}{2}E_{Uvir} \tag{1.43}$$

ou seja

$$E_{vir} = E_{Kvir} + E_{Uvir}, \tag{1.44}$$

$$E_{vir} = -\frac{1}{2}E_{Uvir} + E_{Uvir}, \tag{1.45}$$

$$E_{vir} = \frac{1}{2}E_{Uvir}. \tag{1.46}$$

No ponto do *turn around* a energia cinética E_K é igual a zero, dessa forma, temos

$$E_{ta} = E_{Uta} \tag{1.47}$$

e pela conservação da energia, $E_{vir} = E_{ta}$, ou melhor

$$\frac{1}{2}E_{Uvir} = E_{Uta} \tag{1.48}$$

como a energia potencial é proporcional a R^{-1}, encontramos uma relação para R_{ta} e R_{vir} de $R_{vir} = \frac{1}{2}R_{ta}$.

Para que a virialização de um halo ocorra, é necessário que a região tenha um excesso de densidade acima de um certo valor crítico. O valor varia dependendo do modelo cosmológico escolhido. Tomamos como exemplo, por simplicidade, o universo de Einstein-de-Sitter (EDS), dominado pela

[1] Aqui tomamos a constante T da solução paramétrica como $T = 0$. [29]

matéria em que $H = \frac{2}{3}t^{-1}$, o contraste de densidade do halo virializado é dado por

$$\Delta = (1 + \delta) = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = 18\pi^2 \approx 178 \tag{1.49}$$

Essa é a origem de muitos trabalhos utilizarem o critério de ~ 200 para a sobredensidade ao definir halos em simulação [2].

Teorias como Press-Schechter [32] são uma forma de se testar os modelos de formação de estruturas de forma a prever a abundância de halos. Essas previsões são comumente definidas através da função de massa dos objetos $n(M)$. A função de massa é definida de modo que $n(M)dM$ descreve o número de aglomerados ligados gravitacionalmente por unidade de volume comóvel em um intervalo de massa entre M e $M + dM$.

1.3.3 Altura do pico

A altura do pico (ou *peak height*) é definida por

$$\nu(M, z) \equiv \delta_c(z)/\sigma(M, z), \tag{1.50}$$

em que δ_c é o contraste de densidade linear crítico necessário para os halos colapsarem em um certo *redshift* z. Considerando colapso esférico e um universo de Einstein-de Sitter, temos a constante $\delta_c = 1.686$ em que $z = 0$. O $\sigma(M, z)$ é a raiz quadrada da variância definida em (1.36). Além da dependência explícita com M e z, a altura do pico também tem dependência do modelo cosmológico e das condições iniciais.

2 O MODELO DE HALOS

Como visto no Capítulo anterior, em grandes escalas, a teoria de perturbação linear é suficiente para descrever as flutuações de massa, entretanto, com o passar do tempo, as perturbações do campo de densidade inicial de matéria escura passam a ficar mais desenvolvidas, de forma que as propriedades não conseguem mais ser explicadas com as equações lineares. O modelo de halos é uma abordagem teórica usada como uma forma de descrever a distribuição de matéria no universo, trazendo uma maneira de analisar essas regiões não lineares.

O **Modelo de Halos** postula que toda massa do universo está distribuída em estruturas chamadas halos. De acordo com simulações numéricas, os halos são da ordem de 100 vezes mais densos que a média [2]. Para utilizar o modelo de halos é necessário algumas propriedades: o **viés do halo**, que descreve como os halos se juntam com respeito à distribuição real de matéria. De modo geral, a probabilidade de um halo se formar depende do campo de densidade inicial e esse efeito, por afetar diretamente a distribuição de galáxias, é importante principalmente em grandes escalas. Dessa forma, pode-se dizer que a densidade de matéria está ligada à formação de estruturas. O viés é modelado a partir de uma função de massa, como por exemplo de Press-Schecter [32]; a **função de massa do halo**, que descreve a distribuição de massa de halos, mais especificamente, a densidade número de halos por intervalo de massa; e, por fim, o **perfil de densidade**, que dita como a matéria é distribuída no interior de um halo, por se ligar diretamente com a relação concentração-massa, entramos em mais detalhes nesse Capítulo (2.2). Esses ingredientes são comumente retirados de simulações numéricas.

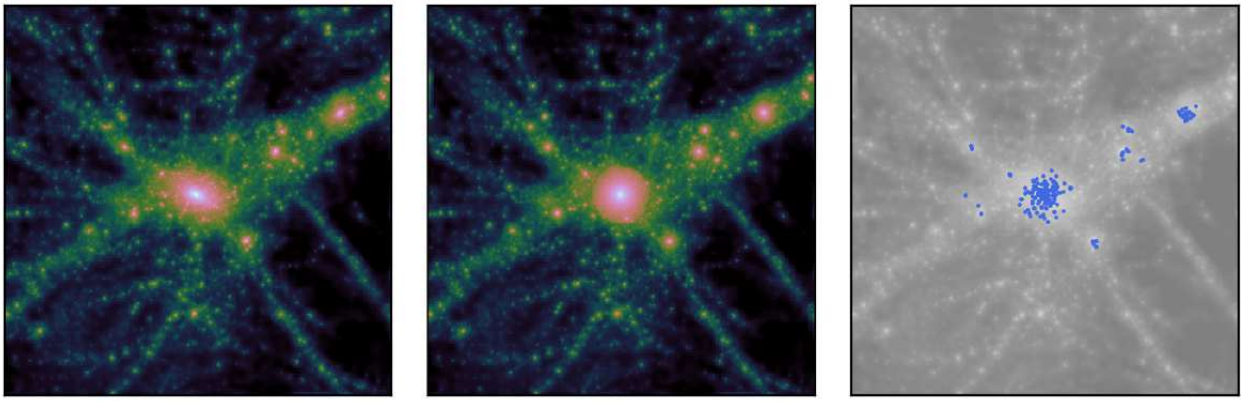

Figura 2.1: Esquema do processo de modelo de halos [2].

A Figura 2.1 mostra o processo do modelo de halos. A primeira imagem apresenta um campo de densidade de uma simulação de N-corpos centrada em um halo massivo. O painel central mostra os halos sendo identificados com um formato esférico para cada um, e a última imagem mostra uma possível distribuição de galáxias dado esses halos.

Conhecendo as propriedades e distribuições dos halos, é possível estimar as propriedades estatísticas da distribuição de matéria no universo. A distribuição da matéria é modelada combinando

duas contribuições: a correlação dentro de um único halo (termo de 1 halo) e entre diferentes halos (termo de 2 halos). Isso permite estudar propriedades como o espectro de potência. Principais referências para este Capítulo são [1, 2].

2.1 Espectro de potência no modelo de halos

O modelo de halos tem como uma peça essencial o estudo da correlação de dois pontos divididas entre um halo e dois halos. A correlação de um halo descreve a estatística entre dois pontos considerados dentro de um mesmo halo e a de dois halos é a situação em que os dois pontos se encontram em halos diferentes. Essa divisão é encontrada também ao analisar o espectro de potência, sendo dividido entre o termo de um halo e dois halos,

$$P(k) = P^{1h}(k) + P^{2h}(k). \tag{2.1}$$

O termo de **um halo** para o espectro de potência é dado por

$$P^{1h}_{uv}(k) = \int_0^\infty dM n(M) \langle u(k|m) v(k|m) \rangle, \tag{2.2}$$

em que $n(M)$ é a densidade número e $u(k|m)$ e $v(k|m)$ são a transformada de Fourier da distribuição de matéria em uma massa m. Essa distribuição pode ser caracterizada pelo perfil de densidade 2.2, ou pela distribuição de estruturas em um halo [33]. Nesse caso, por simplicidade, e por ser objeto de estudo do nosso trabalho, assumimos uma correlação de matéria-matéria, da forma que $u(k|m)$ e $v(k|m)$ são dados por um perfil de densidade. Dessa forma, pode-se simplificar $\langle u(k|m)v(k|m)\rangle = u(k|m)v(k|m) = |u(k|m)|^2$ obtendo o espectro de potência normalizado como

$$P^{1h}(k) = \frac{m^2}{\bar{\rho}^2} \int_0^\infty dM n(M) |u(k|m)|^2. \tag{2.3}$$

Para limites de grandes escalas, $k \to 0$, a transformada de Fourier do perfil de densidade satisfaz

$$u(k|m) \xrightarrow{k \to 0} 1 \tag{2.4}$$

fazendo com que o termo de um halo contribua como uma constante $P(k \to 1)$, chamada de *shot noise*. Dessa forma, nesse limite, o perfil do halo não influencia no espectro de potência.

O termo de **dois halos** normalizado para uma correlação matéria-matéria é dado por

$$P^{2h}(k) = \left[\frac{1}{\bar{\rho}^2} \int_0^\infty dm_1 n(m_1) b(m_1) u(k|m_1) m_1 \int_0^\infty dm_2 n(m_2) b(m_2) v(k|m_2) m_2 \right] P_{lin}(k), \tag{2.5}$$

em que P_{lin} é o espectro de potência do regime linear e $b(m)$ é o viés linear de halos com massa m. Devido à tendência de halos de matéria escura em se agrupar, o viés indica o fato de que halos mais massivos tendem a se formar em regiões com densidade maior do que a densidade média do universo [34].

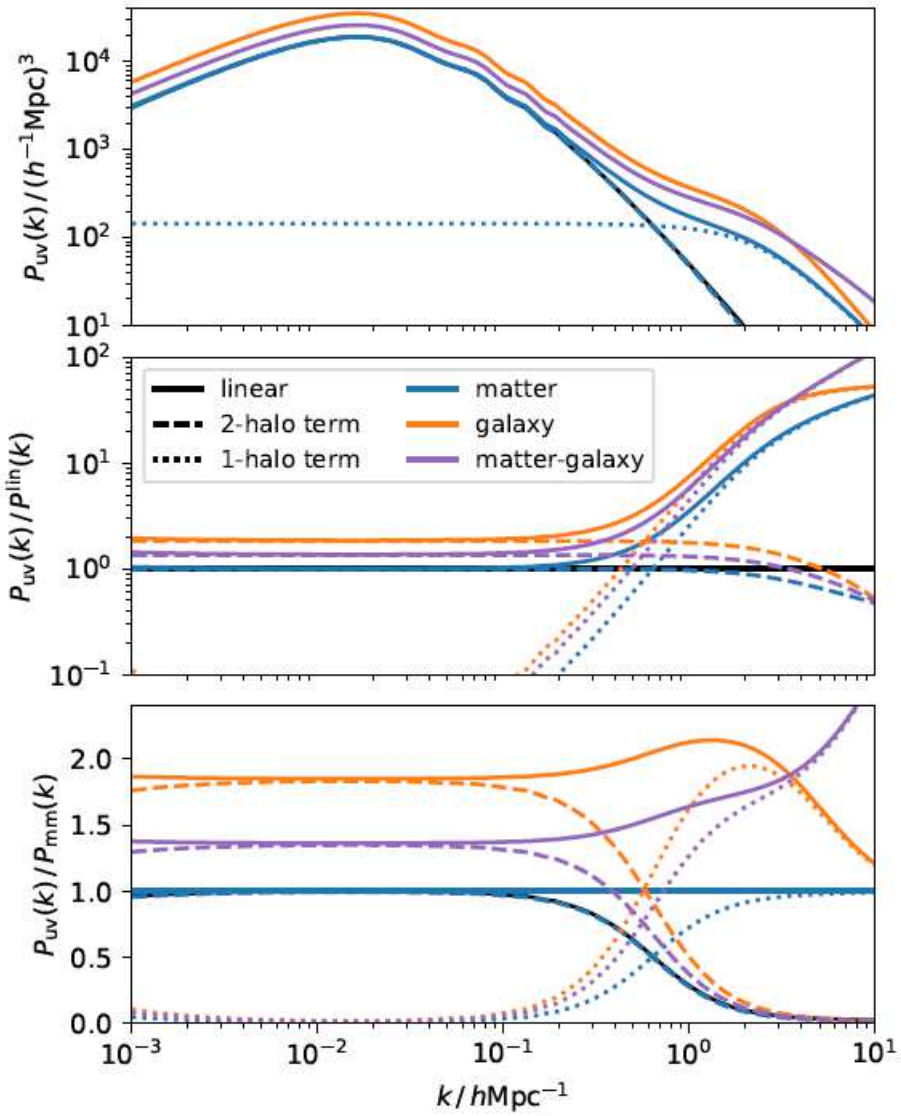

Figura 2.2: Exemplo do espectro de potência utilizando o *halo model* em $z = 0$ para matéria, galáxia e matéria-galáxia [2].

Como mencionado anteriormente, os espectros de potência podem ser divididos dependendo dos traçadores a serem estudados, dado como exemplo P_{gg}, P_{gm}, P_{mm} que são espectros de potência galáxia-galáxia, galáxia-matéria e matéria-matéria (Figura 2.2) . Note que para casos de traçadores discretos, como o envolvendo galáxia-galáxia, é tido como perfil o *Halo Occupation Distribution* (HOD), que descreve a ocupação das galáxias no espaço [33]. Já para os casos como o de matéria-matéria, o espectro de potência utiliza um perfil de densidade do halo para se encontrar o campo, como por exemplo NFW e Einasto descritos na seção 2.2. O perfil de densidade é dado em função de dois parâmetros fundamentais[1]: massa e concentração. Note que é possível utilizar um modelo de concentração, como os descritos no Capítulo 4, que coloca a concentração como função de massa, ao invés de utilizá-la somente como parâmetro livre. Para o caso cruzado, é utilizado o cálculo dos

[1]De maneira geral, o perfil de densidade tem a massa e a concentração como parâmetros, no entanto, podem existir parâmetros adicionais, como no caso do perfil de Einasto, que além dos parâmetros fundamentais, também possui o α como parâmetro [16].

dois perfis. Com um perfil de densidade escolhido, é necessário obter a transformada de Fourier, visto que o espectro de potência é dado como $P(k)$. Além da correlação de dois pontos, o modelo de halo permite expressões para três e quatro pontos que são derivadas de forma semelhante à de dois pontos [1].

2.2 Perfil de densidade

Como visto anteriormente, um dos ingredientes para descrever um modelo de halo é o perfil de densidade. Parte desse estudo é encontrar um perfil de densidade que consiga descrever de forma universal a distribuição de matéria no interior dos halos, para isso são realizadas simulações de N corpos para encontrar ajustes que descrevem a densidade ρ de modo coerente visto que não há solução analítica para a evolução das perturbações de densidade em um contexto não linear.

Perfil NFW

Navarro, Frenk & White [15] partiram de simulações de N-corpos para encontrar um perfil de densidade de halos de matéria escura fria em equilíbrio que se formaram a partir da formação hierárquica de estruturas[2]. O perfil foi denominado NFW e é dado por

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2}, \tag{2.6}$$

um perfil com apenas dois parâmetros livres ρ_s e r_s sendo a densidade de escala e o raio de escala, respectivamente. A partir do perfil de NFW define-se a relação de concentração com o raio de escala, dado por $c = r/r_s$, sendo r a distância em relação ao centro do halo. O raio de escala r_s marca a transição do comportamento do perfil de densidade. Note que para $r_s = r$ a densidade torna-se $\rho_{NFW} = \rho_s/4$.

Perfil Einasto

O perfil de Einasto [16] foi primeiramente introduzido como uma lei de potência para descrever a distribuição de estrelas antigas na Via Láctea. O perfil é uma expressão com três parâmetros livres:

$$\rho_{EIN}(r) = \rho_s exp\left(-\frac{2}{\alpha}\left[\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\alpha} - 1\right]\right). \tag{2.7}$$

Entretanto, como observado por Gao et al. [36], o parâmetro α pode ser escrito como uma função da altura do pico, ν 1.3.3. Essa função de $\alpha(\nu)$ é dada por $\alpha(\nu) = 0.155 + 0.0095\nu^2$.

Perfil Hernquist

O perfil de Hernquist [37] foi originalmente proposto para descrever a distribuição de densidade de galáxias esféricas. O perfil é dado por

[2] Teoria de que pequenos objetos se formam primeiro e se fundem para formar estruturas maiores [35]

$$\rho_{HER}(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^3}. \tag{2.8}$$

A partir deste perfil é possível avaliar de forma analítica propriedades como a função de distribuição, a densidade de estados, o brilho superficial projetado e a dispersão de velocidade em termos de funções elementares.

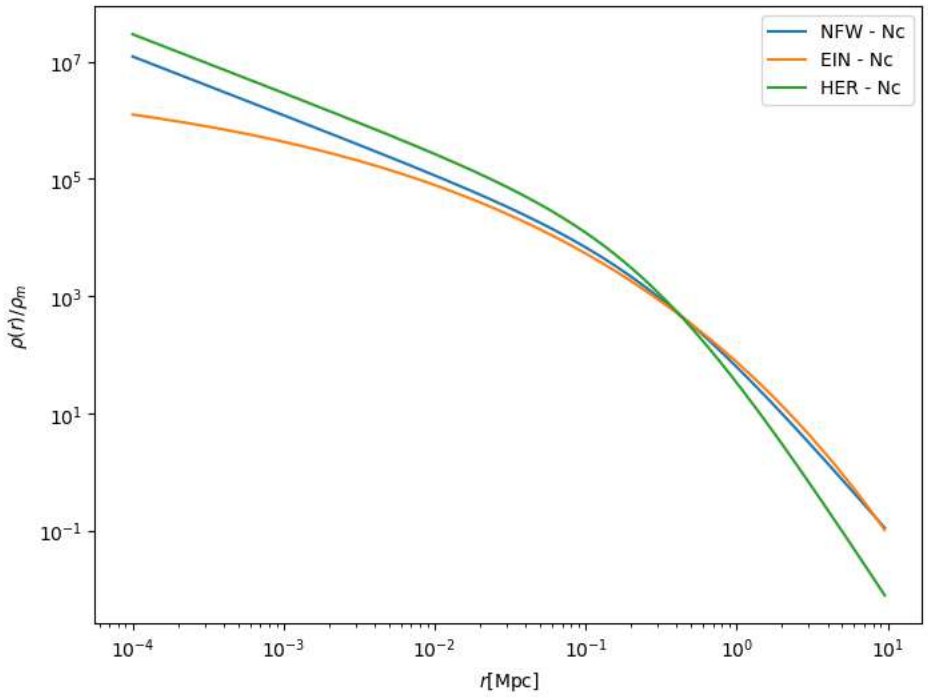

Figura 2.3: Comparação entre perfil interno de NFW, Einasto (α = 0.2) e Hernquist.

Na Figura 2.3 observa-se que, principalmente os perfis de NFW e Einasto, coincidem na faixa de raios $r \sim 0.1$Mpc a $r \sim 10$Mpc, correspondendo a região de interesse para densidade de aglomerados de galáxias. Os perfis apresentam uma maior divergência em regiões para $r < 0.01$ Mpc. Apesar do Herniquist apresentar uma maior divergência dos outros perfis, na faixa de aglomerados de galáxias é onde ele cruza os outros dois.

2.2.1 Perfil externo

Perfis modernos, além de levarem em conta a estrutura interna, também consideram o ambiente ao redor do halo, incorporando assim uma combinação de perfil interno e externo que é dado pela soma dos dois $\rho_{int} + \rho_{ext}$. O perfil externo pode ser modelado por um termo ou pela combinação de termos.

Densidade média

A densidade média do universo pode ser dada como perfil externo nos casos em que o perfil é analisado em raios grandes $r > r_{vir}$, dado que nesse caso, a densidade do halo pode se comparar à

densidade média do universo,

$$\rho_{ext} = \rho_m(z). \tag{2.9}$$

Note que o perfil externo de densidade média pode ser ignorado se analisando o perfil para raios pequenos.

Termo de 2-halos

O termo de 2-halos para perfil externo considera a contribuição de halos vizinhos no perfil. Para isso, é utilizado o termo de correlação de dois halos, sendo descrito da forma

$$\rho_{ext} = \rho_m(z) b(\nu) \epsilon_{hh}(r, z), \tag{2.10}$$

em que $b(\nu)$ é o *halo bias*. Esse termo se torna mais relevante a raios grandes em que é esperada uma maior correlação entre os halos vizinhos.

Lei de potências

A lei de potências, como termo de perfil externo, é uma aproximação para raios relativamente pequenos em que o perfil pode ser aproximado a uma lei de potência simples.

2.3 PERFIL INTERNO + EXTERNO

A combinação entre o perfil interno e o perfil externo é fundamental para tornar a descrição do perfil de densidade dos halos mais realista para grandes raios. Essa abordagem permite uma análise mais completa dos modelos de halos, incorporando essa contribuição externa ao espectro de potência. Além disso, é particularmente relevante para o estudo do lenteamento gravitacional fraco, pois possibilita avaliar os efeitos das regiões externas do halo na distorção da luz.

Diemer e Kravtov (DK14)

No perfil de Diemer & Kravtov [17] é apresentado um perfil completo, com as componentes do perfil interno e externo. DK14 utiliza como perfil interno o perfil de Einasto e como externo uma combinação da densidade média do Universo com o termo de 2-halos ou uma lei de potência:

$$\rho_{DK14}(r) = \rho_{EIN} f_{trans} + \rho_{ext}, \tag{2.11}$$

em que f_{trans} é um termo adicionado para descrever a transição entre os dois regimes, e é dado por

$$f_{trans} = \left[1 + \left(\frac{r}{r_t}\right)^{\beta}\right]^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \tag{2.12}$$

sendo r_t o raio de truncamento, γ definido como a inclinação do perfil em $r \sim R_{200m}$ e β sendo a rapidez com que a inclinação muda. No estudo de DK14, eles mostram que os halos apresentam uma

dependência na taxa de acresção de massa, definida por

$$\Gamma = \frac{\Delta \log m}{\Delta \log a}. \tag{2.13}$$

em que m é a massa do halo e a o fator de escala. Dessa forma, os halos não são descritos de maneira universal por perfis como Einasto ou NFW para raios $r \gtrsim 0.5 R_{200m}$.

3 TEORIA DO LENTEAMENTO GRAVITACIONAL

A obtenção de massa de aglomerados de galáxias não é um processo trivial, visto que a massa não é uma grandeza que se pode medir diretamente. Por isso, é necessário utilizar outros métodos para estimar a massa de tais estruturas. Há diversas maneiras de inferir a distribuição de massa partindo de métodos observacionais. Um modo comum utilizado em aglomerados de galáxias é o raio-X, emitido por meio do processo de Bremsstrahlung[1], que parte da combinação entre a temperatura e o brilho superficial do aglomerado para obter informações sobre a massa [4].

Outro método para estimar a massa é a distribuição da velocidade e o método das cáusticas. O primeiro é uma função que relaciona o número de aglomerados de galáxias com a velocidade da linha de visão [3, 38] e o método das cáusticas [39] é utilizado na projeção da velocidade da linha de visão com o raio para identificar as cáusticas e inferir o potencial do aglomerado e, então, a massa.

As lentes gravitacionais são outro método de estimativa de massa. Elas utilizam o fenômeno em que a luz de objetos distantes sofre uma alteração no caminho ao passar por estruturas massivas até chegar ao observador. A distribuição da massa de um aglomerado que serve como lente é tirada na análise da posição e orientação das imagens lenteadas. As lentes gravitacionais são divididas entre lenteamento gravitacional fraco, em que as distorções não são tão radicais, e lenteamento gravitacional forte, em que se produzem imagens mais distorcidas do objeto de fundo, como imagens múltiplas e o anel de Einstein. A combinação entre lenteamento fraco e forte também é um método observacional. Ela pode apresentar um melhor resultado na distribuição de massa e quebra a degenerescência de massa-folha 3.1.5. O método de lenteamento gravitacional fraco é utilizado em nosso trabalho e será discutido com mais detalhes. Este Capítulo foi baseado nos textos de revisão [1, 5, 30, 40, 41].

3.1 LENTEAMENTO GRAVITACIONAL FRACO

O lenteamento gravitacional fraco é o fenômeno em que a luz de objetos distantes sofre uma alteração no caminho ao passar por estruturas massivas para chegar até o observador. Esse desvio de caminho implica em distorções das imagens do objeto fonte. O nome lenteamento gravitacional vem de as estruturas massivas se comportarem como uma lente para as estruturas distantes que estão sendo observadas. Como se trata de lenteamento *fraco* as distorções não serão tão evidentes.

[1] Bremsstrahlung acontece quando uma parte da energia de uma partícula é convertida em radiação.

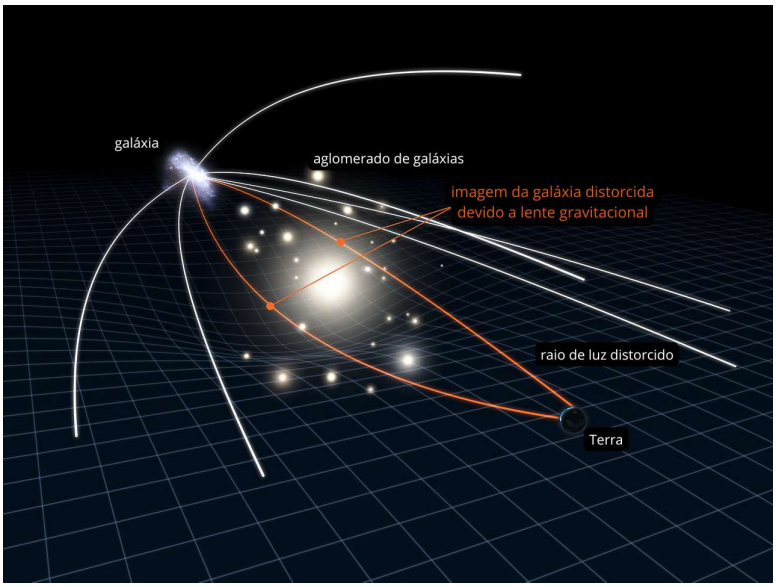

Figura 3.1: Ilustração do fenômeno de lentes gravitacionais: a luz emitida por uma galáxia distante é desviada ao passar por um aglomerado de galáxias. As trajetórias curvas representam os caminhos distorcidos da luz até a Terra devido ao aglomerado de galáxias massivo. [42].

3.1.1 Equação da lente e ângulo de deflexão

Assumimos que o efeito do lenteamento gravitacional ocorre por um objeto massivo entre a fonte e o observador que pode ser chamado de lente. A figura 3.2 esquematiza um sistema típico de lente gravitacional. A luz é emitida pela fonte S, passa pela lente L e chega ao observador O sofrendo uma deflexão de ângulo $\hat{\alpha}$. Como as distâncias observador-fonte, observador-lente e lente-fonte (D_F, D_L e D_{LF}, respectivamente) são muito maiores que as dimensões da lente, é feita a aproximação de lente fina (despreza-se a espessura da lente).

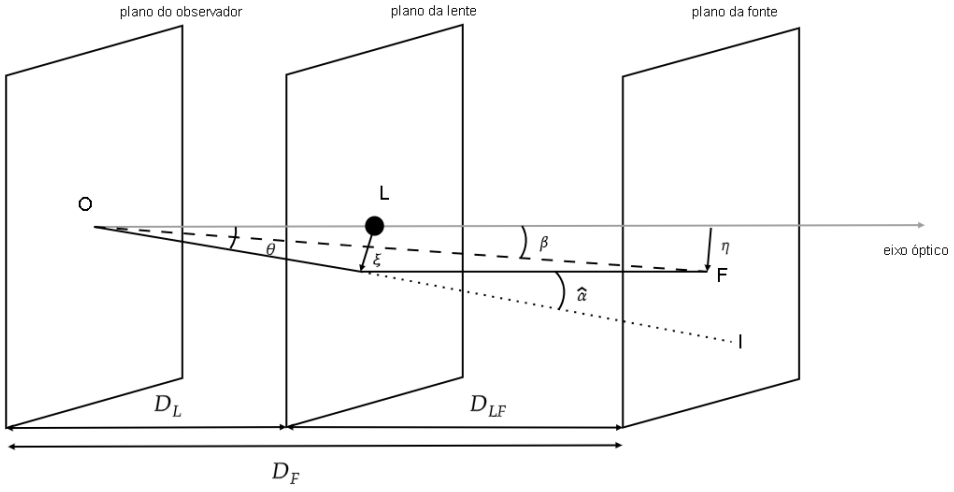

Figura 3.2: Ilustração de um sistema típico de lente gravitacional com O, L e F representando o observador, a lente e a fonte respectivamente. Adaptado de [40].

Partindo da imagem, pelas relações trigonométricas, obtemos

$$\vec{\theta} D_F = \vec{\beta} D_F + \vec{\hat{\alpha}} D_{LF}, \tag{3.1}$$

podendo ser escrita por

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \tag{3.2}$$

Ela é conhecida como **equação de lente**, que descreve o desvio sofrido pelo feixe de luz ao passar pela lente, relacionando a posição angular real β com a posição angular θ da imagem observada. No caso em que essa equação apresentar mais de uma solução para um certo valor de β, uma única fonte pode ser observada em mais de uma posição angular θ. Isso é mais comum nos casos de lenteamento gravitacional *forte*, que é quando a lente produz múltiplas imagens da fonte.

O índice de refração efetivo n descreve o efeito da curvatura no espaço-tempo sobre os raios de luz e é dado por

$$n = 1 - \frac{2}{c^2}\Phi = 1 + \frac{2}{c^2}|\Phi|, \tag{3.3}$$

em que, para valores de $n > 1$, há um decréscimo na velocidade ao passar pelo meio. A deflexão da luz acontece quando o raio passa pelo campo gravitacional e é dada pela integral ao longo da trajetória da luz do gradiente de n perpendicular à trajetória:

$$\vec{\hat{\alpha}} = -\int \vec{\Delta}_\perp n dl = \frac{2}{c^2}\int \vec{\Delta}_\perp \Phi dl. \tag{3.4}$$

No caso das lentes gravitacionais fracas, o ângulo de deflexão é bem pequeno, de forma que, para facilitar o cálculo, integramos $\vec{\nabla_\perp} n$ ao longo da linha de um raio não perturbado com o mesmo parâmetro de impacto b.

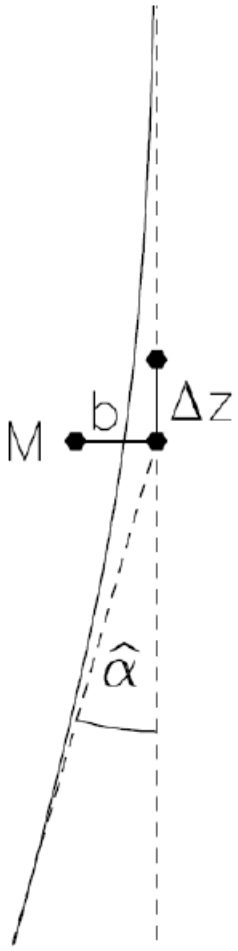

Figura 3.3: Deflexão da luz causada por uma massa pontual M. O raio não perturbado tem parâmetro de impacto b e angulo $\hat{\alpha}$ de deflexão. A região $\Delta z \sim \pm b$ do ponto de menor distância do raio de luz até a massa é onde ocorre a maior parte da deflexão.

O potencial Newtoniano da lente é dado por

$$\Phi(b,z) = -\frac{GM}{(b^2+z^2)^{1/2}}, \tag{3.5}$$

sendo b o parâmetro de impacto e z a menor distância com que o raio de luz não perturbado se aproxima da lente. Calculando o gradiente

$$\vec{\Delta}_\perp \Phi(b,z) = \frac{GM\vec{b}}{(b^2+z^2)^{3/2}}, \tag{3.6}$$

é possível obter o ângulo de deflexão como

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2}\int \vec{\nabla}_\perp \Phi dz = \frac{4GM}{c^2 b}. \tag{3.7}$$

Como estamos fazendo a aproximação por lentes finas, a distribuição da massa da lente pode ser substituída pela massa-folha ortogonal à linha de visão, caracterizada pela densidade superficial de

massa Σ (definida em (3.23)). Dessa forma, o ângulo de deflexão pode ser escrito por

$$\vec{\hat{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2}\int \frac{\left(\vec{\xi}-\vec{\xi}'\right)\Sigma\left(\vec{\xi}'\right)}{\left|\vec{\xi}-\vec{\xi}'\right|^2}d^2\xi', \tag{3.8}$$

em que $\vec{\xi}$ é o vetor bi-dimensional no plano da lente. No caso particular de uma lente esfericamente simétrica, o ângulo de deflexão aponta para o centro da simetria e tem módulo igual a

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi}, \tag{3.9}$$

com $M(\xi)$ sendo

$$M(\xi) = 2\pi\int_0^{\xi}\Sigma(\xi')\,\xi' d\xi', \tag{3.10}$$

em que ξ é a distância do centro da lente e $M(\xi)$ sendo a massa dentro desse raio.

3.1.2 Matriz Jacobiana

É definido o potencial escalar ψ como um potencial gravitacional newtoniano da lente

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{2}{c^2}\frac{D_{LF}}{D_L D_F}\int \Phi(D_L\vec{\theta}, z)dz, \tag{3.11}$$

de forma que é possível relacionar o potencial com a convergência da lente através do laplaciano de ψ

$$\nabla^2_\theta\psi(\vec{\theta}) = 2\frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} = 2\kappa(\vec{\theta}). \tag{3.12}$$

As propriedades locais da lente podem ser mapeadas pela matriz Jacobiana $\mathcal{A}$, tal que

$$\mathcal{A} = \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\theta} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j}, \tag{3.13}$$

em que o inverso da matriz Jacobiana é a matriz de magnificação $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{-1}$. A convergência pode ser escrita como uma combinação linear,

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22}), \tag{3.14}$$

e as outras componentes de ψ_{ij} são descritas pelo cisalhamento γ

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}), \tag{3.15}$$

$$\gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21}. \tag{3.16}$$

sendo $\gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}$ a magnitude do cisalhamento de $\gamma(\vec{\theta}) \equiv \gamma_1(\vec{\theta}) + i\gamma_2(\vec{\theta}) = |\gamma(\vec{\theta})|e^{i(2\phi)}$, e ϕ representa a orientação do cisalhamento. O cisalhamento é o responsável por tornar uma fonte

circular em uma imagem elíptica.

A matriz Jacobiana escrita em termos da convergência e do cisalhamento tem a forma

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-\kappa-\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1-\kappa+\gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Por se tratar de um lenteamento gravitacional fraco, é conveniente escrever o cisalhamento em termos de um observável de cisalhamento reduzido, dado por

$$g = \frac{\gamma}{1-\kappa}, \tag{3.18}$$

que tem como componentes $g \equiv g_1 + ig_2 = \frac{|\gamma|}{1-\kappa} e^{2i\phi}$. Dessa forma, a matriz Jacobiana pode ser escrita em termos do cisalhamento reduzido

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1+g_1 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Para uma fonte circular mapeada pela matriz de magnificação $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{-1}$, a imagem no plano da lente será dada por uma elipse com elipticidade de

$$\epsilon \equiv \frac{a-b}{a+b}, \tag{3.20}$$

e semi-eixos a e b

$$a = \frac{1}{1-\kappa-|\gamma|}, \quad b = \frac{1}{1-\kappa-|\gamma|}. \tag{3.21}$$

A magnificação μ descreve como a lente amplia a imagem de fonte e é dada por

$$\mu = \frac{1}{det\mathcal{A}} = det\mathcal{M} = \frac{1}{(1-\kappa)^2-\gamma^2}. \tag{3.22}$$

3.1.3 Densidade superficial e densidade crítica

A integral da densidade volumétrica de massa ρ ao longo da linha de visão $\hat{z}$

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \tag{3.23}$$

fornece a chamada densidade superficial de massa (ou densidade projetada de massa), que representa a quantidade de massa na linha de visão sendo comprimida em um plano bidimensional. É conveniente definir a grandeza de densidade crítica Σ_{cr}, que representa o valor de densidade superficial de massa necessário para ocorrer efeitos de lenteamento gravitacional forte. Ela é dada por

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_F}{D_L D_{LF}}. \tag{3.24}$$

A partir das definições de densidade superficial, é possível definir uma densidade superficial adimensional, chamada de convergência κ, dada por

$$\kappa(\theta) \equiv \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma_{cr}}. \tag{3.25}$$

O valor da convergência caracteriza uma lente forte ou fraca e é responsável pela magnificação ou desmagnificação da fonte. Pela definição de Σ_{cr}, nota-se que para valores de $\kappa \geq 1$, a lente pode produzir imagens múltiplas, estando em um regime de lenteamento gravitacional forte.

3.1.4 Componentes do Cisalhamento

Podemos redefinir as componentes γ_1 e γ_2 do cisalhamento para um referencial rotacionado, medindo em direções diferentes, definindo o cisalhamento em duas partes: **tangencial** γ_t e **cruzado** $\gamma_{\rm x}$, que é rotacionada em $45°$. De maneira geral, as lentes gravitacionais distorcem o formato de objetos de fundo na direção tangencial, o que permite obter a distribuição de massa da lente, enquanto o cisalhamento cruzado permite identificar erros sistemáticos na medição do sinal de lenteamento fraco. Para um dado referencial 3.4, as componentes do cisalhamento são dadas por

$$\gamma_t = -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi \tag{3.26}$$

$$\gamma_{\rm x} = \gamma_1 \sin 2\phi - \gamma_2 \cos 2\phi \tag{3.27}$$

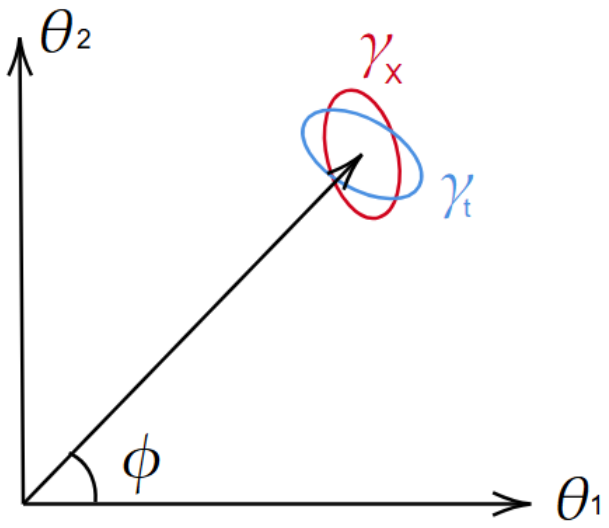

Figura 3.4: Sistema de coordenadas com as componentes do cisalhamento tangencial e cruzado.

O cisalhamento tangencial está relacionado a densidade superficial de massa atráves do excesso de densidade superfícial

$$\gamma_t(R) = \frac{\Delta\Sigma(R)}{\Sigma_{cr}}, \tag{3.28}$$

em que $\Delta\Sigma(R) = \overline{\Sigma}(R) - \Sigma(R)$ e

$$\overline{\Sigma}(R) = \frac{2\pi \int_0^R \Sigma(R')R'dR'}{\pi R^2} \tag{3.29}$$

é a densidade superficial média. do raio R.

O cisalhamento medido em qualquer ponto deve estar orientado de maneira tangencial a direção que aponta para o centro de coordenadas, enquanto o cisalhamento cruzado aparece inclinada em $45°$ da componente tangencial 3.4. Por não haver cisalhamento nesse ângulo, ele é usado como uma ferramenta para identificar possíveis erros sistemáticos.

3.1.5 Degenerescência de Massa-Folha

A Degenerescência de Massa-Folha, (ou *Mass Sheet Degeneracy*) aborda o viés que aparece na estimativa de massa total utilizando o lenteamento gravitacional. Esse viés ocorre pelo fato das medidas de cisalhamento serem invariantes sob a transformação de

$$\kappa' = (1 - \lambda) + \lambda\kappa, \quad \gamma' = \lambda\gamma \tag{3.30}$$

com λ representando uma folha de densidade homogênea sendo adicionada (ou retirada) do plano da lente. Para $\lambda \neq 0$, essa transformação resulta em um mesmo observável de cisalhamento reduzido $g' = g$. A inclusão de medidas de magnificação pode quebrar essa degenerescência.

3.1.6 NFW no lenteamento gravitacional

É interessante encontrar as funções analíticas para a densidade superficial de massa, de forma a descrever um perfil de densidade em termos das grandezas de lentes gravitacionais κ e γ. Para isso, tomamos como exemplo o perfil de NFW 2.2, que assume uma simetria esférica. Podemos obter de maneira analítica a projeção da densidade de massa na linha de visão, $\Sigma(R)$, para o perfil e escrever em termos das grandezas **cisalhamento** e **convergência** das lentes gravitacionais na dependência radial:

$$\kappa_{NFW}(R) = \frac{\Sigma_{NFW}(R)}{\Sigma_{cr}}, \tag{3.31}$$

$$\gamma_{NFW}(R) = \frac{\Delta\Sigma_{NFW}(R)}{\Sigma_{cr}}. \tag{3.32}$$

Pela Equação (3.23), integrando o perfil de densidade (2.6), obtemos

$$\Sigma_{\rm NFW}(x) = \begin{cases} \frac{2r_s\delta_{\delta_c}\rho_{\rm cr}}{(x^2-1)}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] & x < 1, \\ \frac{2r_s\delta_c\rho_{\rm cr}}{3} & x = 1, \\ \frac{2r_s\delta_c\rho_{\rm cr}}{(x^2-1)}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\arctan\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}\right] & x > 1. \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\bar{\Sigma}_{\mathrm{NFW}}(x) = \begin{cases} \frac{4}{x^2} r_s \delta_c \rho_{\mathrm{cr}} \left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right] & x < 1, \\ 4 r_s \delta_c \rho_{\mathrm{cr}} \left[1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right] & x = 1, \\ \frac{4}{x^2} r_s \delta_c \rho_{\mathrm{cr}} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{1+x}} + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right] & x > 1. \end{cases} \tag{3.34}$$

Detalhes para a obtenção das equações descritas nessa seção podem ser vistos em [43].

4 RELAÇÃO C-M NO MODELO DE HALOS.

A concentração é uma das características fundamentais no estudo de halos, é com ela que se entende a distribuição de matéria no interior de halos. Se a concentração pode ser obtida a partir de uma função da massa, é possível obter uma descrição completa do perfil de densidade somente inferindo a massa, tornando a relação de concentração-massa uma ferramenta para descrição do perfil de halos. Entretanto, essa relação não é tão simples, visto que ela depende do redshift e da cosmologia escolhida. Parte do estudo desse tema é a analise de como a massa, o redshift e os parâmetros cosmológicos afetam a concentração. O objetivo do estudo dessas relações é analisar expressões em que a concentração seja uma função da massa visando diminuir um parâmetro na analise do perfil de densidade de halos. Para analisar uma relação de concentração-massa é necessário realizar simulações numéricas para encontrar o melhor ajuste de forma estatística. Há duas categorias principais de simulações cosmológicas: N corpos e hidrodinâmica e neste Capítulo será feito uma revisão bibliográfica de trabalhos que propõem modelos de concentração e sua relação com a massa, *redshift* e cosmologia nas duas categorias de simulação.

Quando se utiliza simulações para definir os halos é necessário escolher um tipo de limite para ele de modo que é possível identificar um halo em uma distribuição de matéria. Normalmente é utilizado um entre dois algorítimos:

Friends-of-friends (FoF): Identifica halos como grupo de partículas e define uma distância limite que as partículas devem ter para serem partes do mesmo halo. Essa distância é definida por um parâmetro b multiplicado pela densidade média de partículas n da forma $bn^{-1/3}$. É comum utilizar o valor de b = 0.2 nas simulações e devido a sua definição resulta em grupos com formatos arbitrários.

Spherical Overdensity (SO): Identifica halos como grupos esféricos, definindo um centro e crescendo esferas até atingir uma densidade limiar Δ. Os centros são normalmente definidos a partir de pontos mínimos no potencial gravitacional e a densidade limiar é comum ser dada por $\Delta = 200\rho_m$, representando 200 vezes a densidade média do universo. Também é possível dar como densidade de referência a densidade crítica do universo (ρ_c) ou a densidade virial (ρ_{vir}). A massa M de uma sobredensidade esférica é definida como a massa que está dentro do raio r_h dado uma densidade limiar Δ_h

$$M = \frac{4}{3}\pi r_h^3 \Delta_h \rho_{ref}, \tag{4.1}$$

em que tanto o raio quanto a densidade irá carregar o subscrito da densidade limiar, da forma ρ_{200m} e r_{200m} para o primeiro caso. O subscrito é carregado da mesma forma para concentração.

Esse capítulo será focado na literatura e artigos relacionados a relação concentração-massa. Os trabalhos que foram implementados estarão descritos em detalhes.

4.1 CONCENTRAÇÃO EM SIMULAÇÕES DE N CORPOS

A concentração de um halo de matéria escura é definida como a razão entre o raio característico do halo - seja ele o raio virial ou o raio correspondente a uma densidade limiar específica - r e o raio de escala r_s [15]

$$c = \frac{r}{r_s} \tag{4.2}$$

em que o raio de escala é obtido por um perfil de densidade. Logo, para determinar a concentração em simulações, é comum a utilização de um perfil de densidade para o ajuste. Entretanto, a concentração também pode ser inferida a partir da velocidade circular máxima V_{circ}, que, assumindo apenas o formato de um perfil, estabelece a relação entre velocidade, massa e concentração, sem a necessidade de ajustar diretamente o perfil de densidade [44]. Os modelos de relação $c - M$, além de fornecerem uma forma de entender a evolução hierárquica dos halos - como halos de menor massa tenderem a apresentar maiores concentrações [15, 45] - também contribuem para quebrar a degenerescência que surge ao manter a concentração e a massa como parâmetros independentes.

As simulações são fundamentais para o estudo de relações $c - M$. Em particular, as simulações de N corpos simulam a evolução gravitacional da estrutura, ou seja, é considerado somente os efeitos gravitacionais das interações entre as estruturas. É comum se referir a simulações de N-corpos como *dark matter-only simulations* devido ao fato de considerarem toda a matéria como sendo matéria escura. Na Figura 4.1 é mostrada uma simulação de alta resolução de como a matéria escura se distribui no universo. Na figura é observado acúmulos de matéria escura, formando regiões densas (áreas brilhantes) e regiões pouco densas, formadas por vazios (parte mais escura).

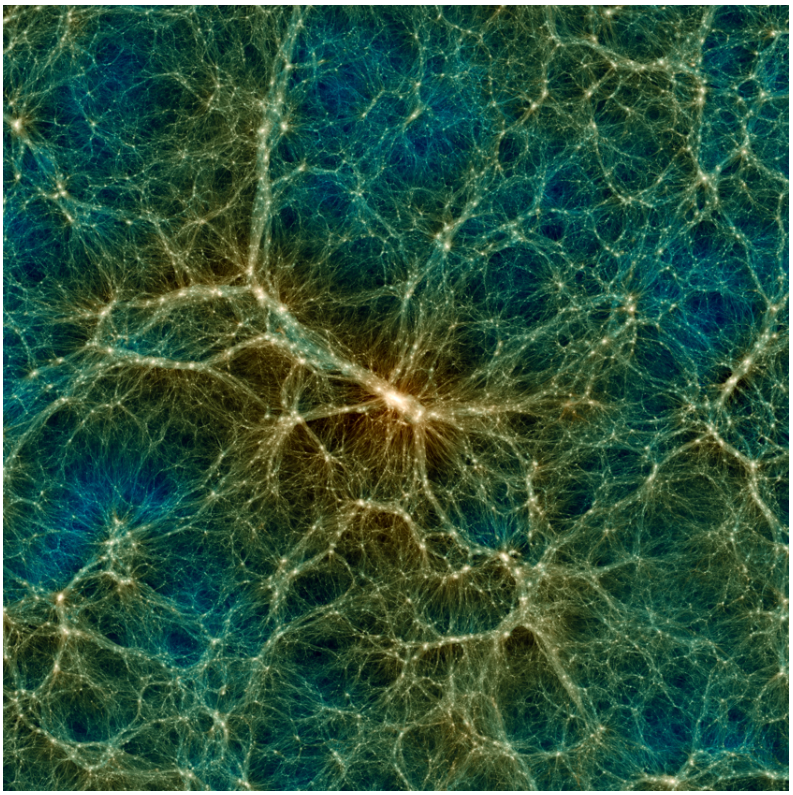

Figura 4.1: Distribuição de matéria escura na simulação Uchuu em $z = 0$. Source: Skies and universes.

Bullock2001

Bullock et al. [46] apresentou um modelo universal da relação de concentração-massa que descreve as mudanças da concentração para cosmologias com parâmetros diferentes. Em 2008 Macciò et al. [47] modificou seu trabalho a fim de melhorar os resultados de concentração para massas da ordem de aglomerado de galáxias propondo uma expressão para $\Delta = 200$,

$$c_{200c} = K_{200}\left[\frac{H(z_c)}{H(z)}\right]^{2/3}, \tag{4.3}$$

no qual K é uma constante determinada a partir das simulações (o subscrito K_{200} indica a definição de massa e concentração de $200c$) e z_c segue a definição proposta no trabalho original, utilizando o formalismo de colapso esférico no caso de $\nu(M_*, z_c) = 1$, ou seja,

$$\sigma(M_*, z_c) = \sigma(M_*, 0)D(z_c) = 1.686 \tag{4.4}$$

$$M_*(z_c) = FM_{vir}(z). \tag{4.5}$$

em que F é um número real que relaciona a massa característica M_* com a massa do halo M_{vir}. Utilizado $F = 0.01$ para todas as cosmologias, entretanto, para o parâmetro K foi observado que ele varia de acordo com a cosmologia utilizada na simulação. Dessa forma, para encontrar o melhor valor é necessário determinar por meio de simulações numéricas. No trabalho de 2008 é apresentado o melhor valor de K para as cosmologias WMAP1, WMAP3 e WMAP5 [48–50]. A Figura 4.2 mostra

o comportamento da concentração c_{200c} para *redshift* 0, 1 e 2.

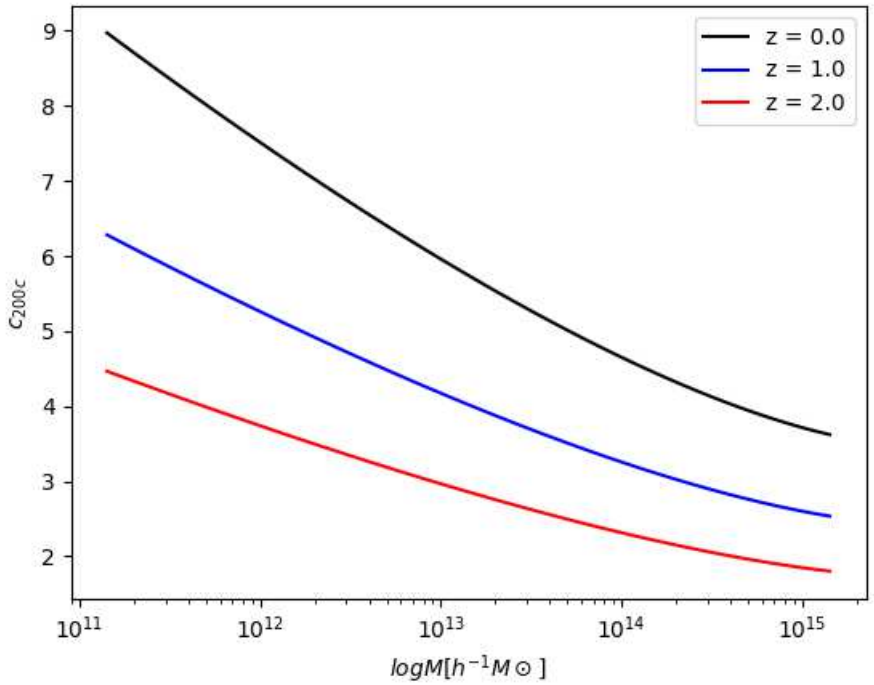

Figura 4.2: Modelo de Bullock e Maccio para intrevalo de massa de 10^{11} a 10^{15} e redshift z = 2.0.

Duffy2008

O modelo de Duffy et al. [51] foi obtido a partir de uma combinação de três grandes simulações de N-corpos (rodadas pelo GADGET2 [52]) calibradas com a cosmologia WMAP5. A relação de $c - M$ foi descrita por uma lei de potência que engloba um intervalo de massa de $10^{11}h^{-1}M_{\odot}$ a $10^{15}h^{-1}M_{\odot}$ e redshift $z < 2$ para halos ajustados com NFW e Einasto. O modelo é dado por

$$c(M,z) = A\left(\frac{M}{M_{pivot}}\right)^{B}(1+z)^{C}, \tag{4.6}$$

em que é utilizado $M_{pivot} = 2 \times 10^{12}h^{-1}M_{\odot}$ e os parâmetros A, B e C variam dependendo do perfil e definição de halo utilizado. O modelo é calibrado para definições de massa de $200m$, $200c$ e vir, como é mostrado na Figura 4.3.

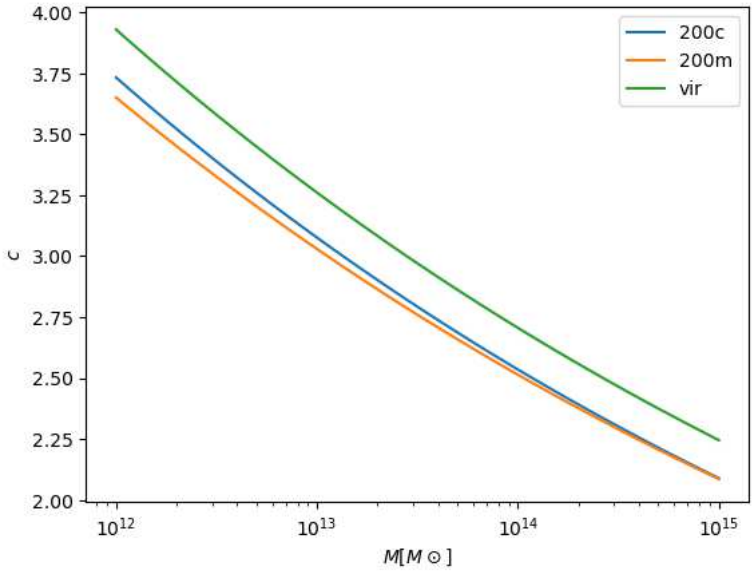

Figura 4.3: Modelo de Duffy et al. para intervalo de massa de 10^{12} a 10^{15} e redshift $z = 2.0$.

Klypin2011

O modelo de Kyplin et al. [44] depende de concentrações que foram obtidas a partir da velocidade circular máxima, ou seja, não é utilizado um perfil de densidade diretamente. Foi utilizada a simulação *Bolshoi* [44] calibrada com a cosmologia WMAP7 [53],

$$V_{circ} = \sqrt{\frac{GM(<r)}{r}}|_{max}. \tag{4.7}$$

A relação $c - M$ é dada como uma lei de potência com definição de massa vir com valores de massa podendo variar de $3 \times 10^{10} h^{-1} M_{\odot}$ a $5 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ e redshift $z = 0$,

$$c(M_{vir}) = 9.60 \left(\frac{M_{vir}}{10^{12} h^{-1} M_{\odot}} \right)^{-0.075}. \tag{4.8}$$

Com essa expressão é possível estimar a concentração a partir da massa virial para halos distintos. A Figura 4.8 mostra a variação da concentração seguindo a Equação (4.8). Para um redshift diferente de zero, é apresentada uma nova lei de potência [1]

$$c(M_{vir}, z) = c_0(z) \left(\frac{M_{vir}}{10^{12} h^{-1} M_{\odot}} \right)^{-0.075} \times \left[1 + \left(\frac{M_{vir}}{M_0(z)} \right)^{0.26} \right]. \tag{4.9}$$

[1] Entretanto, na visão da implementação numérica, não está definido uma maneira clara de interpolação entre os redshifts. A relação de $c - M$ para $z = 0$ apresenta uma função diferente, o que não torna possível uma transição suave para valores de $z > 0$. Dessa forma, somente a equação (4.8) foi implementada.

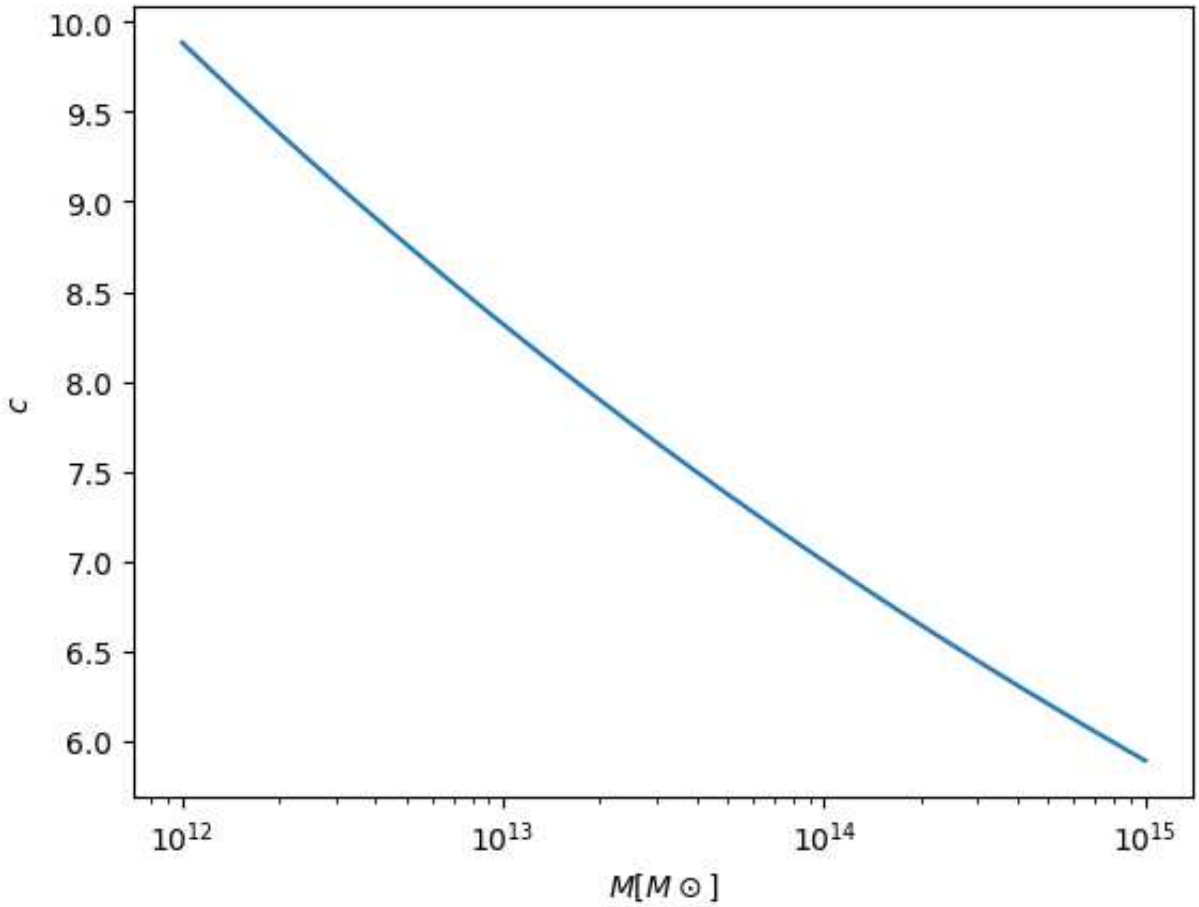

Figura 4.4: Modelo de Klypin et al. para intervalo de massa de 10^{10} a 10^{15} e redshift $z = 0.0$.

Prada2012

Prada et al. [54] apresenta um modelo de concentração de halos de matéria escura com simulações de N-corpos no modelo de cosmologia padrão ΛCDM. Os resultados são baseados em 4 grandes simulações de N-corpos: Millennium-I [55], Millenium-II [56], Bolshoi [44] e MultiDark [54]. Os halos são definidos pela velocidade circular e pelos algorítimos FOF e SO. O modelo é baseado na relação de $c - \sigma$ e um dos motivos é para remover a evolução da concentração com o redshift. O modelo cobre uma grande variação de redshift e utiliza como definição de massa $200c$. A concentração pode ser calculada pelas expressões.

$$c(M, z) = B_0(x)\mathcal{C}(\sigma'), \tag{4.10}$$

com

$$x = (\Omega_{\Lambda,0}/\Omega_{m,0})^{1/3}a, \quad a = (1 + z)^{-1} \tag{4.11}$$

em que $\Omega_{\Lambda,0}$ e $\Omega_{m,0}$ é a contribuição da densidade da energia escura e da matéria, respectivamente, para $z = 0$ e a é o fator de escala,

$$\sigma' = B_1(x)\sigma(M, x), \tag{4.12}$$

e

$$\mathcal{C}(\sigma') = A\left[\left(\frac{\sigma'}{b}\right)^{c} + 1\right] exp\left(\frac{d}{\sigma'^2}\right), \tag{4.13}$$

em que $A = 2.881$, $b = 1.257$, $c = 1.022$, $d = 0.060$ e aproximações para $B_0(x)$ e $B_1(x)$ dadas por

$$B_0(x) = \frac{c_{min}(x)}{c_{min}(1.393)}, \quad B_1(x) = \frac{\sigma^{-1}_{min}(x)}{\sigma^{-1}_{min}(1.393)}, \tag{4.14}$$

com

$$c_{min}(x) = c_0 + (c_1 - c_0)\left[\frac{1}{\pi}\arctan(\alpha(x - x_0) + \frac{1}{2})\right], \tag{4.15}$$

$$\sigma^{-1}_{min}(x) = \sigma^{-1}_0 + (\sigma^{-1}_1 - \sigma^{-1}_0)\left[\frac{1}{\pi}\arctan(\beta(x - x_1) + \frac{1}{2})\right], \tag{4.16}$$

em que $c_0 = 3.681$, $c_1 = 5.033$, $\alpha = 6.948$, $x_0 = 0.424$, $\sigma^{-1}_0 = 1.047$, $\sigma^{-1}_1 = 1.646$, $\beta = 7.386$, $x_1 = 0.526$. Na Figura 4.5 é possível observar o comportamento em "U"da concentração desse modelo com a variação do redshift em $z = 0.0$, $z = 0.5$ e $z = 1.0$

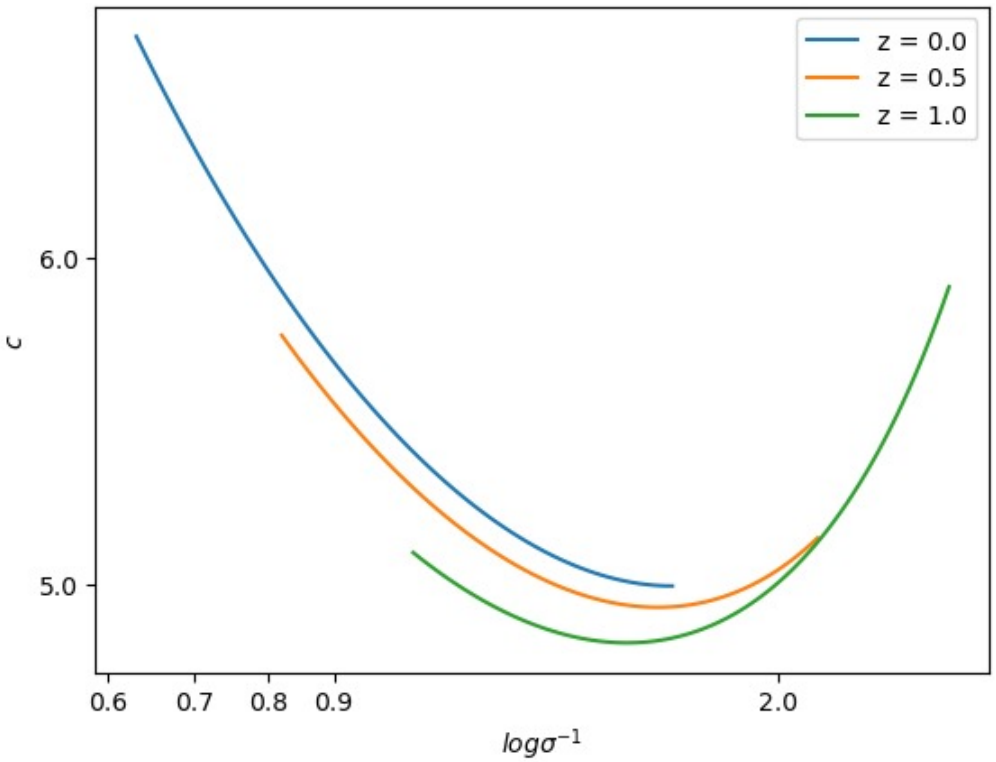

Figura 4.5: Modelo de Prada et al. para intervalo de massa de 10^{13} a 10^{15} e redshift $z = 0.0$, $z = 0.5$ $z = 1.0$.

Bhattacharya2013

Bhattacharya et al. [57] realizam três simulações de N-corpos com volumes e tamanhos diferentes todas calibradas com a cosmologia WMAP7. O modelo apresentado mostra uma lei de potência que cobre uma variação de massa de $2\times10^{12}h^{-1}M_\odot$ a $2\times10^{15}h^{-1}M_\odot$ e redshift de $z < 2$. As definições de massa são vir, $200c$ e $200m$. O modelo descreve uma relação direta entre concentração e a altura

do pico

$$c(M,z) = D(z)^A B \nu^C, \tag{4.17}$$

em que $D(z)$ é o fator de crescimento e A, B e C são parâmetros que variam dependendo da definição de massa ou do halo selecionado - podendo variar entre relaxados ou todas as amostras. O ν foi obtido a partir da definição (1.50). Para esse modelo, foi possível plotar uma relação de $c - M$ e $c - \nu$, como observado na Figura 4.6.

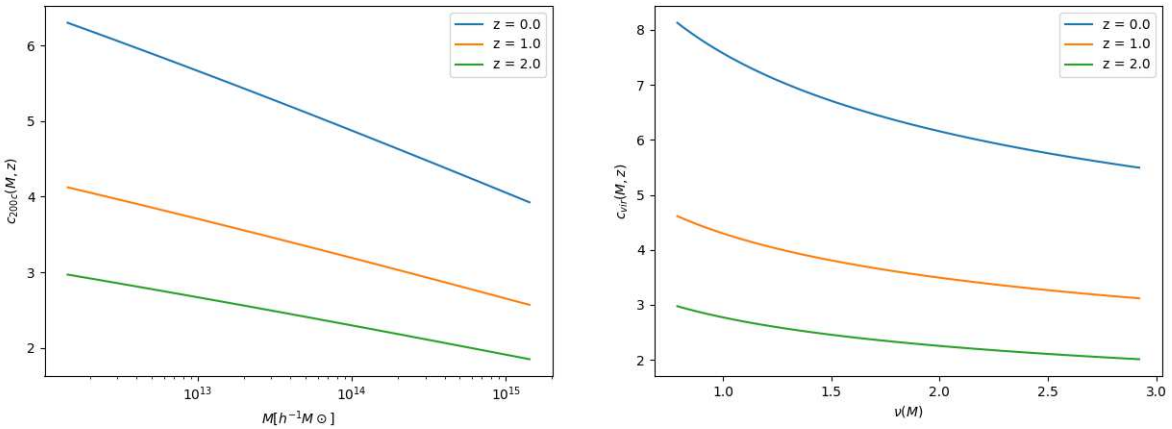

Figura 4.6: Modelo de Bhattacharya et al. para intervalo de massa de 10^{12} a 10^{15} e redshift $z = 0.0$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$.

Dutton2014

Dutton & Macció [58] rodaram simulações calibradas com a cosmologia *Planck* [59] em um intervalo de massa de $10^{10}h^{-1}M_\odot$ a $10^{15}h^{-1}M_\odot$ cobrindo valores de redshift entre $z = 0$ e $z = 5$. Com as simulações, foram capazes de obter uma lei de potência que descreve a relação de concentração-massa para perfil de densidade tanto de NFW como de Einasto:

$$\log_{10} c = a + b \log_{10}(M/[10^{12}h^{-1}M_\odot]). \tag{4.18}$$

Os valores dos parâmetros a e b são obtidos a partir de equações em função do redshift e dependem do perfil e da definição de massa.

***NFW** - 200c:*

$$a = 0.520 + (0.905 - 0.520)e^{-0.617z^{1.21}}, \tag{4.19}$$

$$b = -0.101 + 0.026z. \tag{4.20}$$

***NFW** - vir:*

$$a = 0.537 + (1.025 - 0.537)e^{-0.718z^{1.08}}, \tag{4.21}$$

$$b = -0.097 + 0.024z. \tag{4.22}$$

***Einasto** - 200c:*

$$a = 0.459 + (0.977 - 0.459)e^{-0.490z^{1.303}}, \tag{4.23}$$

$$b = -0.130 + 0.029z. \tag{4.24}$$

A Figura 4.7 mostra a concentração para o modelo de Dutton & Màccio para três *redshifts* distintos, $z = 0.0$, $z = 1.0$, $z = 2.0$ onde se pode observar que a evolução de z reduz a inclinação da relação concentração-massa.

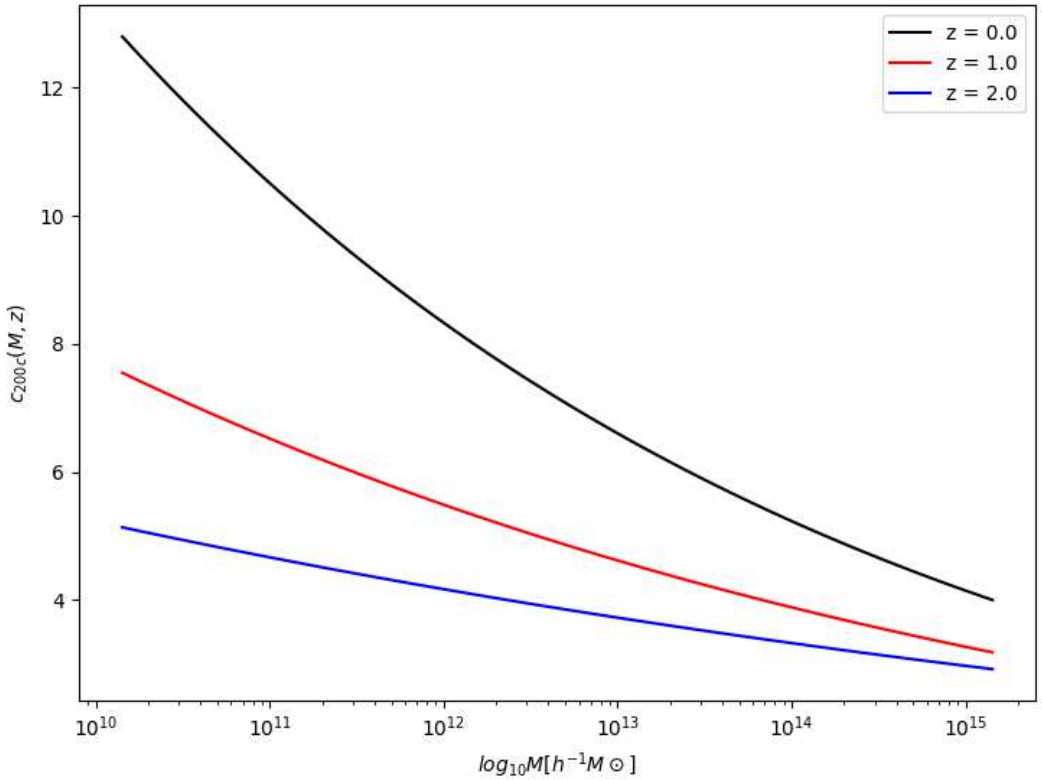

Figura 4.7: Modelo de Dutton & Macciò. para intervalo de massa de 10^{10} a 10^{15} e redshift $z = 0.0$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$.

Diemer2015

Diemer & Kravtsov [45] realizaram um estudo numérico de concentração de halos de matéria escura com o objetivo de encontrar uma relação universal entre concentração e massa. Realizaram tal feito com um modelo de 7 parâmetros, função de ν e n que foi calibrada com diversas cosmologias, testada para redshifts até $z \approx 30$ e massas em até 16 ordens de magnitude. A expressão é dada por

$$c_{200c} = \frac{c_{min}}{2}\left[\left(\frac{\nu}{\nu_{min}}\right)^{-\alpha} + \left(\frac{\nu}{\nu_{min}}\right)^{\beta}\right], \tag{4.25}$$

com

$$c_{min} = \phi_0 + \phi_1 n, \tag{4.26}$$

$$\nu_{min} = \eta_0 + \eta_1 n, \tag{4.27}$$

e

$$n(k) \equiv \frac{d \ln P(k)}{d \ln k}. \tag{4.28}$$

O modelo sofreu uma correção nos parâmetros no trabalho de Diemer & Joyce [60] em 2019. Foram feitos testes para algumas definições de massa, e aquela que apresentou uma melhor performance foi a de $200c$. Pela Figura 4.8, é possível observar a relação $c - \nu$ com a variação do *redshift*. Conforme mostrado, a relação $c - \nu$ apresenta praticamente o mesmo formato em todos os *redshifts*, variando apenas sua posição no diagrama.

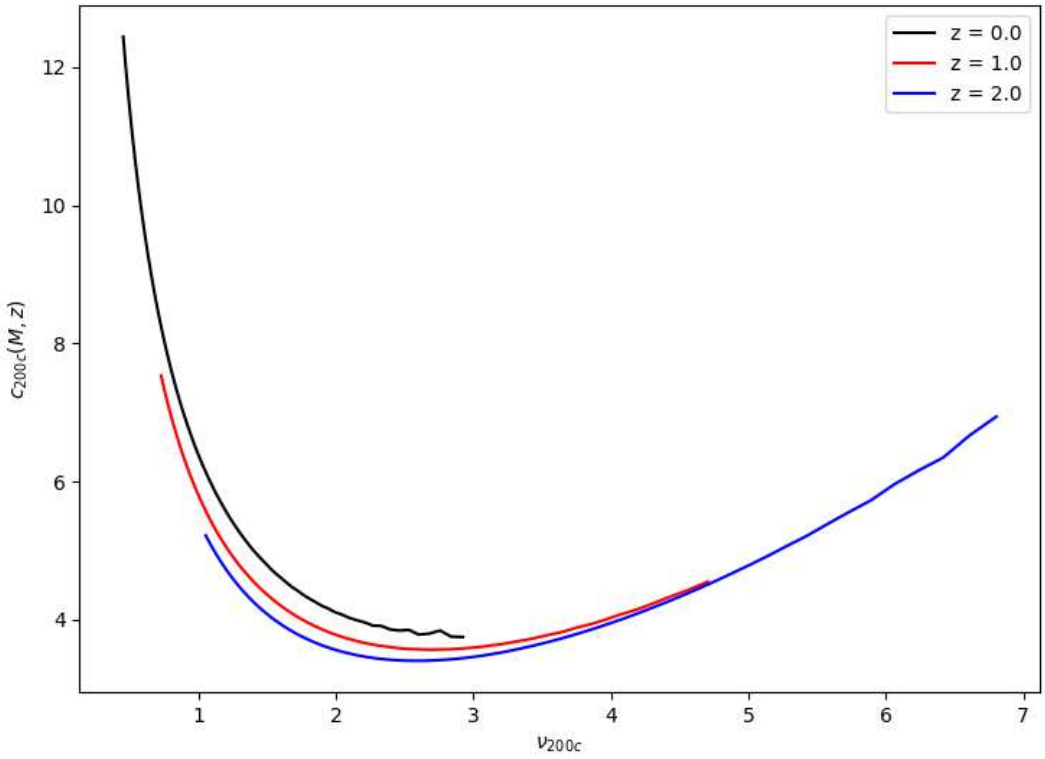

Figura 4.8: Modelo de Diemer & Kravtsov para intervalo de massa de 10^{10} a 10^{15} e redshift z = 0.0, z = 1.0 e z = 2.0.

Para o cálculo de espectro de potência, foi utilizado o modelo de Eisenstein & Hu, *no BAO* [61], que descarta as oscilações acústicas dos bárions com o objetivo de evitar comportamento oscilatório em n para halos mais massivos.

Klypin2016

Klypin et al. [62] em seu trabalho de 2016 apresenta duas expressões para a relação de concentração-

massa. Uma que calcula $c - M$ de forma direta pela equação (4.29), com parâmetros C_0, M_0 e γ variando conforme o *redshift* somente para cosmologia *Planck* e cosmologia WMAP7,

$$c(M) = C_0 \left(\frac{M}{10^{12} h^{-1} \mathrm{M}_\odot} \right)^{-\gamma} \left[1 + \left(\frac{M}{M_0} \right)^{0.4} \right]. \tag{4.29}$$

A outra expressão (eq. (4.30)) relaciona a concentração com o σ. Os parâmetros a_0 e b_0 variam com o redshift e foram calibrados na cosmologia *Planck*,

$$c(\sigma) = b_0 \left[1 + 7.37 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^{3/4} \right] \left[1 + 0.14 \left(\frac{\sigma}{a_0} \right)^{-2} \right]. \tag{4.30}$$

Tem como definição de massa o critério de $200c$ e vir e halos são selecionados pela massa ou através do cálculo da velocidade máxima e divididos entre todos os halos e halos que apresentam equilíbrio. A Figura 4.9 mostra a relação da concentração para o modelo de Klypin et al. com a variação do redshift. Nota-se que para $c - \nu$ o comportamento é parecido com o de Diemer & Kravtsov.

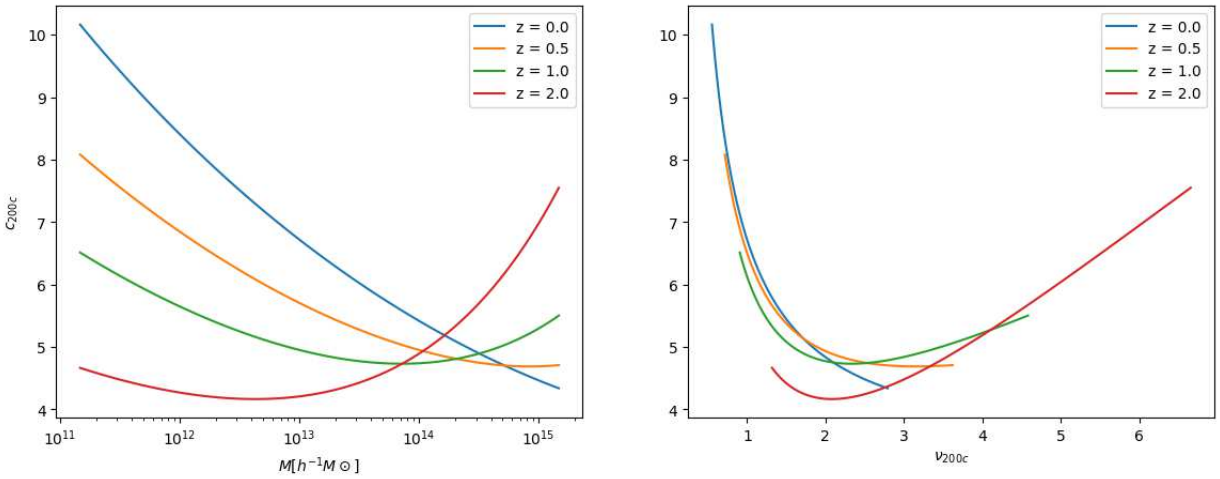

Figura 4.9: Modelo de Klypin et al. para intervalo de massa de 10^{11} a 10^{15}, *redshift* $z = 0.0$, $z = 0.5$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$ na cosmologia *Planck*.

Child2018

Child et al. [63] utilizam resultado de duas grandes simulações de N-corpos para determinar a relação de concentração-massa que engloba uma grande faixa de massa, com valores de $M > 2 \times 10^{11} M_\odot$ e variação de redshift de $0 \leq z \leq 4$. É apresentado uma separação entre halos relaxados, não relaxados, individuais e empilhados com definição de massa de $200c$. Para descrever as simulações realizadas no trabalho foi encontrado uma relação da forma $c - M/M_\star$ dada por

$$c_{200c} = A \left[\left(\frac{M_{200c}/M_\star}{b} \right)^m \left(1 + \frac{M_{200c}/M_\star}{b} \right)^{-m} - 1 \right] + c_0, \tag{4.31}$$

em que $M_\star = 4\pi/3 \rho_c(z) \omega_m(z) R_\star^3$ e $\sigma(R_\star, z) = 1.686$. É apresentado também uma lei de potência mais simples para cálculo de concentração no intervalo de *redshift* de $0 \leq z \leq 1$.

$$c_{200c} = A(1+z)^d M^m. \tag{4.32}$$

Entretanto, visando ter uma implementação de um modelo mais completo, para um maior intervalo de z, a Equação (4.31) foi a utilizada neste trabalho. Na Figura 4.10 é possível observar que, para $c - M/M_\star$, a variação do redshift também resulta em uma concentração com o mesmo formato, variando somente a posição no diagrama.

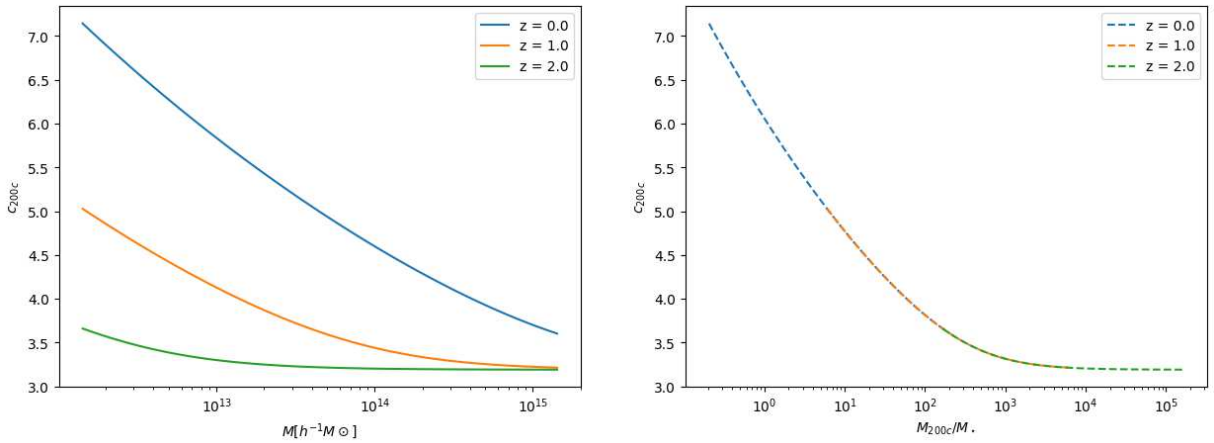

Figura 4.10: Modelo de Child et al. para intervalo de massa de 10^{12} a 10^{15} e *redshift* $z = 0.0$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$ e cosmologia WMAP7.

Diemer2019

Além de fazer correções no trabalho de 2015, Diemer & Joyce [60] melhoram o modelo proposto 4 anos antes com um modelo analítico de 6 parâmetros livres dado por

$$c = C(\alpha_{eff}) \times \tilde{G}\left(\frac{A(n_{eff})}{\nu}\left[1 + \frac{\nu^2}{B(n_{eff})}\right]\right), \tag{4.33}$$

em que

$$A(n_{eff}) = a_0(1 + a_1(n_{eff} + 3)), \tag{4.34}$$
$$B(n_{eff}) = b_0(1 + b_1(n_{eff} + 3)), \tag{4.35}$$
$$C(\alpha_{eff}) = 1 - c_\alpha(1 - \alpha_{eff}). \tag{4.36}$$

Os parâmetros a_0, b_0 e c_α variam de acordo com ajustes de média ou mediana e α_{eff} e n_{eff} são dados por

$$\alpha_{eff} = -\frac{d\ln D(z)}{d\ln(1+z)}, \tag{4.37}$$
$$n_{eff}(M) = -2\frac{d\ln\sigma(R)}{d\ln R}|_{R=\kappa R_L} - 3. \tag{4.38}$$

A definição de n_{eff} foi obtida a partir de σ, entretanto, é possível definir n_{eff} a partir da derivada do

espectro de potência $P(k)$. A função $\tilde{G}$ é a função inversa de G com os parâmetros dados entre os parênteses na equação (4.33),

$$G(x) = \frac{x}{[g(x)]^{(5+n_{eff})/6}}. \tag{4.39}$$

Note que $g(x)$ é uma função arbitrária que depende necessariamente de um perfil de densidade e, neste caso, foi utilizado o perfil de densidade NFW, que tem como função $g(x)$

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}. \tag{4.40}$$

O modelo segue a ideia de se obter uma universalidade e funciona para uma grande variação de massas e *redshift*, como também para diversas cosmologias. A definição de massa segue sendo $200c$. Graficamente, os resultados de Diemer & Joyce são semelhantes aos do trabalho de Diemer (2015), como mostrado na Figura 4.11.

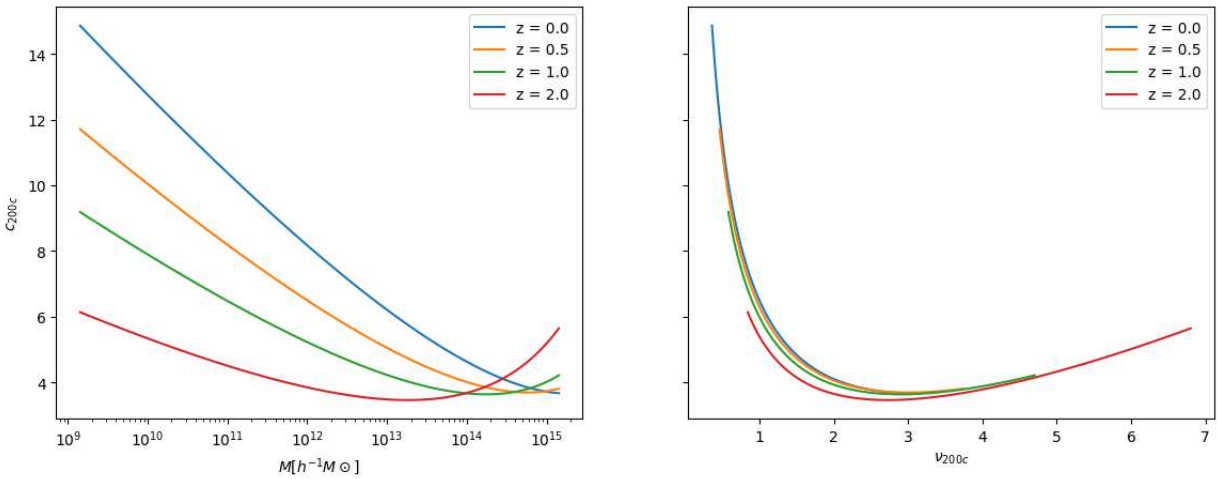

Figura 4.11: Modelo de Diemer & Joyce para intervalo de massa de 10^9 a 10^{15}, *redshift* $z = 0.0$, $z = 0.5$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$ na cosmologia WMAP7.

Ishiyama2021

O modelo de Ishiyama et al. [64] consiste em uma recalibração do trabalho de Diemer & Joyce (mostrado em 4.1). É utilizada a simulação Uchuu [64] para simulações de N-corpos de alta resolução com partículas de matéria escura. O modelo também propõe uma universalidade em massa e *redshift* e utiliza o perfil de NFW na equação (4.33). Os parâmetros foram calibrados para definições de massa $500c$, $200c$ e vir apresentam valores diferentes para os parâmetros κ, a_0, a_1, b_0, b_1 e c_α do modelo de referência, até para o caso de $200c$. Na Figura 4.12 observa-se a relação de $c - M$ para as três definições de massa em que o modelo foi calibrado.

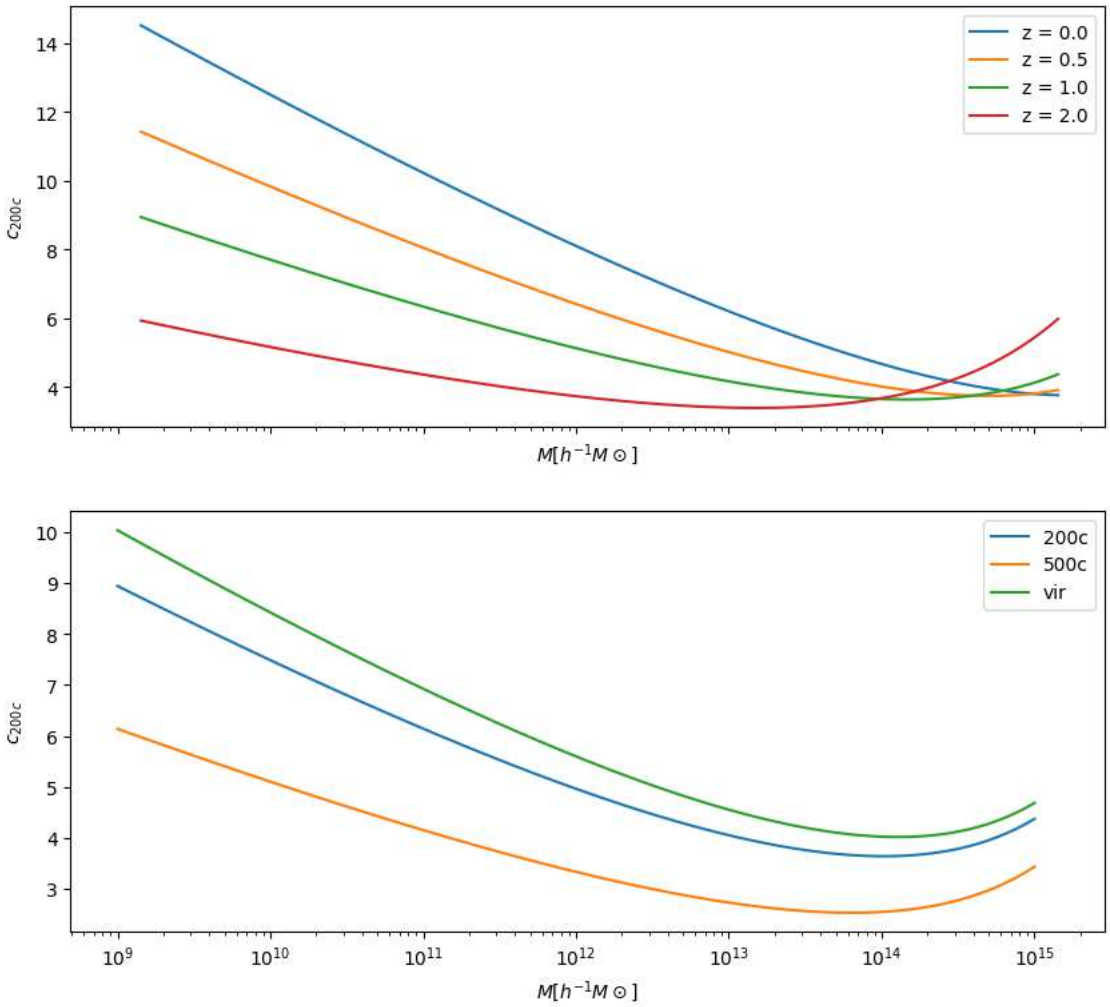

Figura 4.12: Modelo de Ishiyama et al. para intervalo de massa de 10^{09} a 10^{15}, *redshift* $z = 0.0$, $z = 0.5$, $z = 1.0$ e $z = 2.0$ na primeira figura e $z = 1.0$ e definição de massa $200c$, $500c$ e vir na segunda. Ambas na cosmologia WMAP7.

4.2 DISCUSSÃO SOBRE A RELAÇÃO C-M

De forma geral, os modelos encontram como resultado uma função de concentração que decresce com o aumento da massa para um redshift fixo. Entretanto, foi observado por alguns trabalhos uma relação de aumento da concentração com aumento da massa para halos massivos ($> 10^{13}$) em *redshifts* $z > 0$, de forma que a concentração atinge um valor de mínimo e passa a crescer com a massa. A figura 4.13 mostra esse fenômeno.

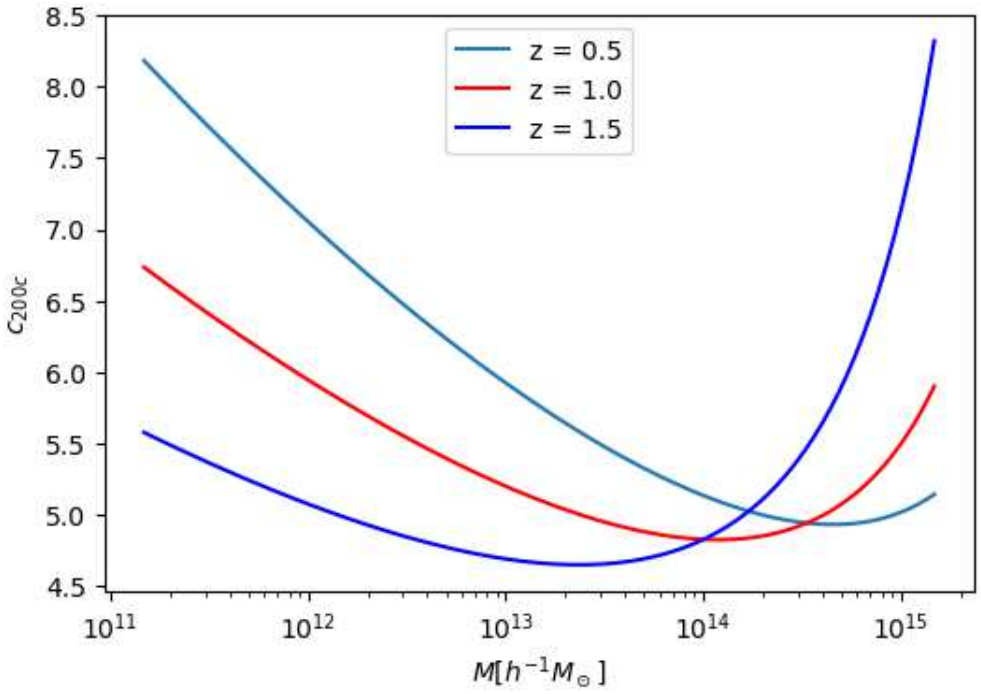

Figura 4.13: Relação c-M para três redshifts distintos no modelo de Prada et al.

Fenômeno discutido por Klypin et al. em 2011 e no ano seguinte encontrado por Prada et al. 2012 que fez uma análise mais profunda sobre o fenômeno. No entanto, outros estudos argumentam que o motivo se dá pela inclusão de halos que estão fora do equilíbrio [65]. Klypin et al. em 2016 contra-argumenta que Ludlow et al. não realizaram a correção do termo de pressão de forma a considerar que a maioria dos halos mais massivos dados como não relaxados estão, de fato, relaxados. Dessa forma, eles acreditam que o motivo do fenômeno ser devido a halos não relaxados não é válido. O motivo de tal relação existir ainda é discutido. Note que esse fenômeno varia com o *redshift*, para valores maiores de z o crescimento aparenta acontecer para massas menores.

Um número de autores discute sobre uma conexão entre a concentração do halo e o *Mass Accretion Histories* (MAH) [45, 65–67]. Considerando a formação de um halo, o MAH é definido como o aumento da massa do halo principal que forma o halo final. Halos com pouca massa são formados mais cedo e halos mais massivos apresentam um aumento de massa mais lento, de forma que a maior contribuição de massa acontece mais tarde. Isso se relaciona com a concentração, pois halos mais concentrados acumulam uma maior fração da massa final mais cedo, de maneira que halos que se formam em épocas mais tardias apresentam menores concentrações [68]. De modo geral, há uma relação entre concentração e o MAH. Pela influência dos parâmetros de pico de densidade inicial no MAH, é esperado que a concentração deva ser uma função desses parâmetros. Diferentes modelos mostram que a concentração pode ser escrita como uma função da altura do pico, explorando a relação de $c-\nu$ por acreditarem dar uma relação mais precisa e de maior universalidade que a relação direta de $c-M$ [45, 54, 63].

Com relação à cosmologia, estudos encontraram uma redução na concentração com a redução na densidade de matéria Ω_m e o aumento dos parâmetros σ_8, h e n faz com que o valor da concentração

Tabela 4.1: Guia para seleção de modelos de relação concentração-massa ($c - M$) para diferentes análises.

Modelo	**Faixa de Massa**	**Faixa de Redshift**	**Observações**
B01	$10^{10} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 5$	Modelo fundamentado na ideia de que a concentração está ligada à época de formação do halo e ao crescimento hierárquico da estrutura.
D08	$10^{11} - 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 2$	Calibrado para as três definições de massa $200m$, $200c$ e vir.
K11	$10^{10} - 10^{45} h^{-1} M_{\odot}$	$z = 0$	Modelo de concentração sem a necessidade de fitar um perfil de densidade.
P12	$10^{10} - 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 10$	Calibrado com 4 simulações de N-corpos. Apresenta um modelo de $c - \sigma$
B13	$10^{12} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 2$	Concentrações obtidas por lenteamento forte, fraco, cinemática de galáxias e raios-X apresentaram boa concordância com o modelo para aglomerados massivos $M > 4 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$, mas, apresentaram divergências para halos de menores massas.
D14	$10^{10} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 5$	Foi calibrado com o perfil de Einasto e NFW.
D15	$10^{10} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 6$	É recomendado o uso de $200c$. Reproduz concentrações observadas em simulações de halos de baixíssima massa em redshifts $z \sim 30$.
K16	$10^{11} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 5.5$	Para halos massivos utilizar Einasto e para halos de baixa massa NFW é suficiente. A faixa de *redshift* varia com $mdef$ para $c - \sigma$ e varia com a concentração para $c - M$
C18	$M \geq 10^{11} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 4$	Resultados em excelente concordância com dados de raio-X e lenteamento gravitacional, analisando tanto perfis empilhados quanto individuais.
D19	$10^{11} - 10^{15} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 6$	Uma versão atualizada de D15. Halos relaxados e não relaxados. Reproduz concentrações observadas em simulações de halos de baixíssima massa em redshifts $z \sim 30$.
I21	$10^{7} - 10^{12} M_{\odot}$	$0 \leq z \leq 10$	Calibrado com variedade de definição de massa ($200c$, $500c$, vir).

aumente [58]. Ragagnin et al. [69] confirmam os resultados de Prada et al., que mostram que, em cenários com baixa amplitude de flutuação *rms* (*root mean square*), a concentração dos halos aumenta com a massa. Um valor baixo para σ_8 leva a menores amplitudes de flutuação *rms*.

É observado que a maioria dos modelos são calibrados com definição de massa de $200c$. Diemer & Kravtsov [45] argumentam que ao utilizar a densidade crítica como definição de massa, há menor desvio de universalidade da relação de $c - \nu$.

Sobre o perfil de densidade, é comum a utilização de perfil de densidade NFW e Einasto para as simulações de N-corpos. Para Child et al. [63] o perfil de Einasto apresentou uma descrição melhor dos resultados de simulação, entretanto, para a escala de aglomerados, os dois perfis coincidem muito bem com os resultados de simulação. Em especial para massas $10^{14}\,h^{-1}M_{\odot}$ NFW e Einasto convergem em um resultado igual na concentração. Alguns estudos fazem o estudo da relação de $c - M$ utilizando a velocidade circular máxima para selecionar halos a partir de simulações. Os resultados de Ishiyama et al. [64] comparam a relação $c - M$ para halos com perfil NFW e halos selecionados pela velocidade máxima.

A Tabela 4.1 resume os modelos que foram apresentados nesta seção, indicando a faixa de massa e redshift que foram calibrados, Além disso, apresenta observações relevantes para a aplicação de cada um.

4.3 Concentração em simulação hidrodinâmica.

É comum realizar medidas de concentração utilizando simulações de N corpos de partículas de matéria escura. Entretanto, dados observacionais apresentam contribuições de bárions e efeitos bariônicos. Pensando nisso, as simulações hidrodinâmicas apresentam uma reconstrução mais realista do universo. Além de considerar efeitos de gravitação entre os corpos, estas simulações incluem efeitos bariônicos como eletromagnetismo, formação de estrelas, resfriamento de gás, núcleo ativo de galáxia (AGN, do inglês, *Active Galactic Nuclei*), entre outros. Comparada com as simulações que consideram somente a gravidade, as simulações hidrodinâmicas apresentam um gasto computacional bem maior por incluir mais efeitos. Além da matéria escura, as galáxias e os aglomerados possuem contribuições de bárions - estrelas, gás quente e frio. Entretanto, é esperado que esses bárions sejam dominantes na região mais interna de um aglomerado. De qualquer forma, espera-se que a presença dos bárions nas estruturas modifique a distribuição de matéria escura ou afete a concentração [68].

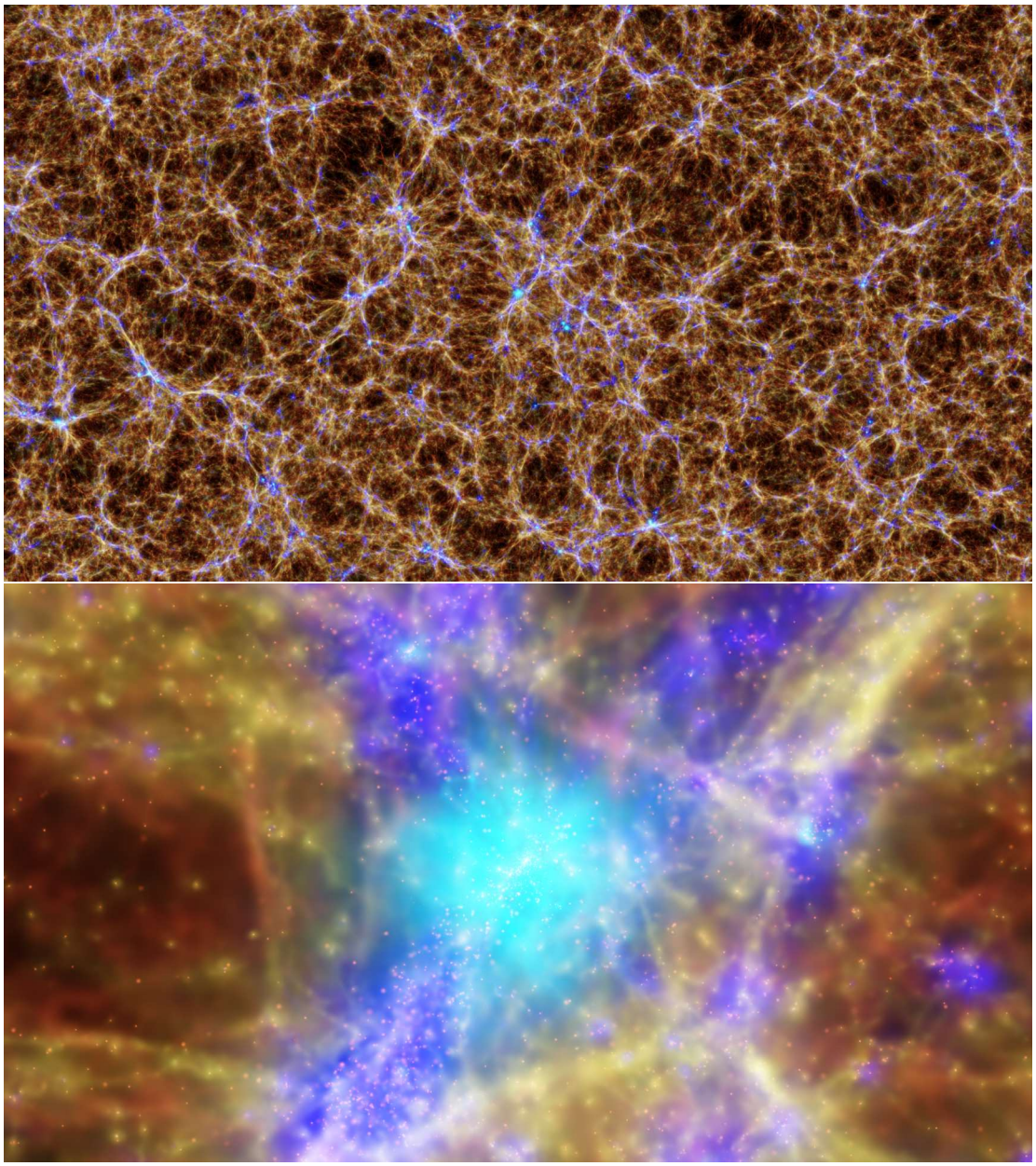

Figura 4.14: Simulação hidrodinâmica *Magneticum* em $z = 2$ em uma distância de 1000 Mpc com um número de 5.4×10^{10} partículas de matéria escura, gás estrela e partículas de buraco negro. É visualizado o gás que preenche os espaços entre as galáxias com as cores variando com a temperatura (marrom para frio e azul para quente) e estrelas e galáxias em branco. A figura mais abaixo apresenta uma ampliação da imagem no aglomerado de galáxia mais massivo. Source: Magneticum.

É esperado que os bárions dominem a região mais interna de uma estrutura, entretanto, dependendo da resolução das simulações, tal região é incluída. Dessa forma, é esperado que a presença de bárions modifique a distribuição ou propriedades como a concentração.

No caso de efeitos bariônicos, Ragagnin et al. [69] extrai a relação c-M de simulações cosmológicas hidrodinâmicas [70] para uma série de sobredensidades críticas. Tem como objetivo observar o impacto dos parâmetros cosmológicos na relação. Na análise deste trabalho, é analisada a dependência da concentração em parâmetros cosmológicos no contexto de simulações hidrodinâmicas, que incluem uma descrição total do processo bariônico, como a formação de estrelas e feedback. A função da concentração é dada por uma lei de potência da massa e fator de escala. Como resultado, é

encontrado que, de forma geral, a normalização da concentração decai com a fração de bárion Ω_b. De acordo com Duffy et al. 2010 [71], efeitos bariônicos resultam em uma diferença de 10% nas concentrações de halos quando a região 10% mais interna de um halo não é considerada. Efeitos radioativos contribuem para um aumento de 20-50% da concentração comparados a simulações de N corpos [68].

5 RESULTADOS

Após obter a base teórica com o estudo aprofundado das relações de concentração-massa, o próximo passo foi a implementação dos modelos e o *cross-check* com outras bibliotecas. As implementações dos modelos de relação concentração-massa (em Python) foram feitas utilizando a *Numerical Cosmology* (NumCosmo) [18] e estão disponíveis em <https://github.com/thaisornellas/nc_concentration> juntamente com o Jupyter Notebook (.ipynb) contendo as comparações dos modelos implementados entre duas bibliotecas distintas. As implementações foram sinalizadas com a inicial do modelo e o ano de publicação.

No código, foram implementadas relações para um total de 11 modelos (B01, D08, K11, P12, B13, D14, D15, K16, C18, D19, I21). Para o caso de K16, foram implementados os dois modelos propostos: $c - M$ e $c - \nu$. Os resultados obtidos foram comparados com o pacote Colossus [19] (sinalizados com Col) e com a *Core Cosmology Library* [20] (sinalizados com CCL). A Figura 5.1 mostra o comparativo entre as três bibliotecas e a Figura 5.2 apresenta a comparação de modelos que são somente implementados na Colossus. É apresentado o cálculo da diferença relativa entre os resultados, mostrando boa concordância com as duas outras bibliotecas.

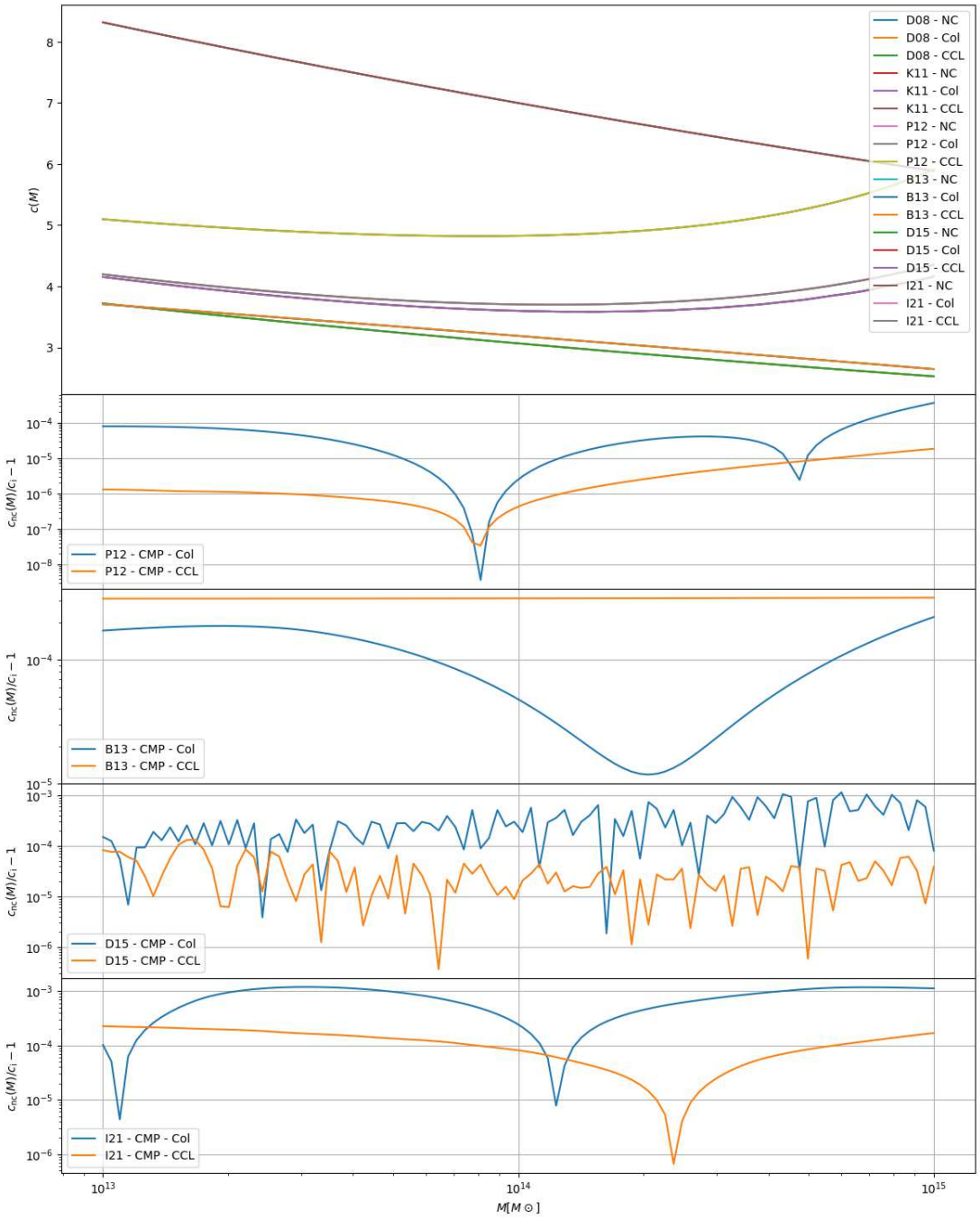

Figura 5.1: Modelos de relação de concentração-massa e o comparativo entre as bibliotecas Colossus e CCL. Os resultados foram obtidos para halos em *redshift* $z = 2.0$ e massas variando de $M = 10^{13} M_{\odot}$ a $M = 10^{15} M_{\odot}$ na definição de massa vir para P12 e $200c$ para as demais.

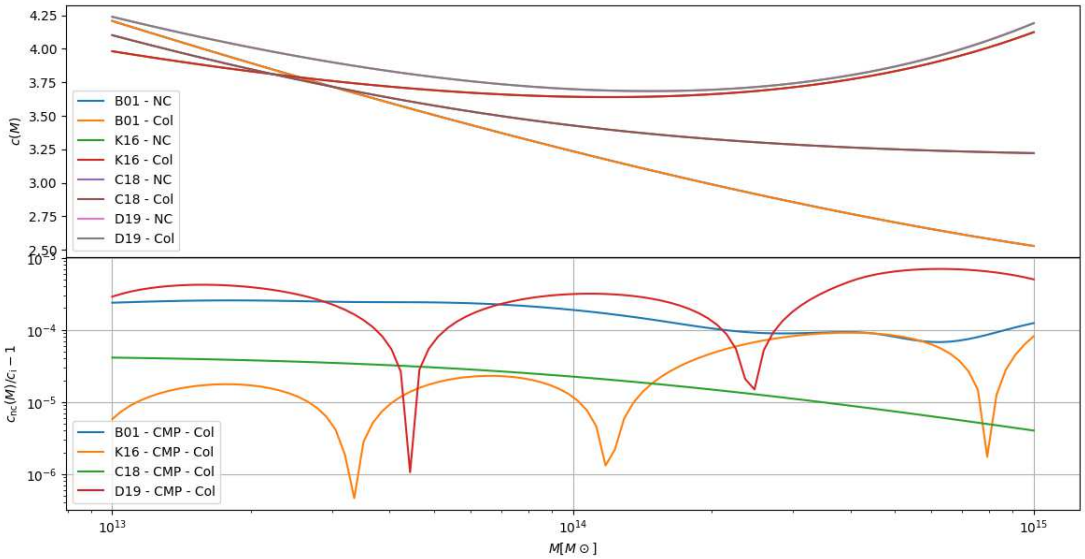

Figura 5.2: Modelos de relação de concentração-massa e o comparativo entre a biblioteca Colossus. Os resultados foram obtidos para halos em *redshift* $z = 2.0$ e massas variando de $M = 10^{13} M_\odot$ a $M = 10^{15} M_\odot$ na definição de massa vir para P12 e $200c$ para as demais.

Dado que os modelos D08, K11, P12, B13, D15, I21 são as relações implementadas em todas as bibliotecas, foi feita uma análise mais profunda sobre a diferença relativa entre as implementações. Ao manter o *redshift* fixo (Tabela 5.1), a diferença relativa do modelo implementado neste trabalho e o modelo da CCL chegou até um mínimo de ordem de 10^{-7} para as três cosmologias em $10^{14} M\odot$. Para o modelo I21 nota-se uma baixa precisão entre COL e CCL e NC e COL para massas de $M^{15} M\odot$ e cosmologias CCL1 e Planck2013.

Na Tabela 5.2, nota-se uma variação entre os valores de *redshift* e uma diminuição na precisão das implementações para valores de massa de $10^{15} M_\odot$. Para massa constante, como mostrado na Tabela 5.3 é possível observar uma menor precisão na comparação dos modelos com a biblioteca COL, tanto as implementações da NumCosmo quanto da CCL para as três cosmologias distintas.

Tabela 5.1: Diferença relativa entre CCL-NC, CCL-COL e NC-COL para definição de massa e redshift fixos.

	NC_CCL			COL-CCL			NC-COL		
	CCL1	WMAP7	Planck2013	CCL1	WMAP7	Planck2013	CCL1	WMAP7	Planck2013
					$10^{13} M_\odot$				
D08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}
D15	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
I21	10^{-7}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}
					$10^{14} M_\odot$				
D08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}
D15	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}
I21	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}
					$10^{15} M_\odot$				
D08	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
D15	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}

Tabela 5.2: Diferença relativa entre CCL-NC, CCL-COL e NC-COL para definição de massa e cosmologia fixa (WMAP7).

	NC_CCL			COL-CCL			NC-COL		
z	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	2.0
				$10^{13} M_{\odot}$					
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}
D15	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}
I21	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
				$10^{14} M_{\odot}$					
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
D15	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}
				$10^{15} M_{\odot}$					
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
D15	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}

Tabela 5.3: Diferença relativa entre CCL-NC, CCL-COL e NC-COL para definição de massa e massa constante (M = $10^{15} M_{\odot}$).

	NC-CCL			COL-CCL			NC-COL		
z	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	2.0	0.0	1.0	2.0
					CCL1				
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
D15	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-6}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
					WMAP7				
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-6}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
D15	10^{-4}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
					Planck2013				
D08	0	0	10^{-16}	0	0	10^{-16}	0	0	0
K11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P12	10^{-7}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-3}
B13	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-4}
D15	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}
I21	10^{-5}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}

Nesta análise, não foram levados em conta as cosmologias, os redshifts e o intervalo de massa nos quais os modelos foram calibrados. O objetivo dessa abordagem foi realizar uma comparação numérica entre as implementações em diferentes bibliotecas. A diferença de D15 da ordem de 10^{-3} presentes na comparação entre a biblioteca Colossus pode ser explicada pelo fato de a biblioteca utilizar o modelo de Eisenstein & Hu sem BAO (*Barion Acoustic Oscillations*) para a função de transferência no espectro de potência e as bibliotecas NumCosmo e CCL utilizarem o modelo de Eisenstein & Hu geral [61].

Além dos modelos implementados em Python, há uma colaboração com a biblioteca NumCosmo para disponibilizar os modelos diretamente da biblioteca, utilizando as funcionalidades de cosmologia e códigos escritos em C. No momento, há 2 modelos de $c - M$ implementados na NumCosmo e prontos para uso: D08 e K11. Foram implementados mais 4 modelos neste formato: P12, B13, D14 e D15, porém, eles ainda estão em fase de testes para uso definitivo. Dessa forma, não foram apresentados nesse trabalho. Seguindo a mesma prática das análises anteriores, foi feito o mesmo estudo para as duas concentrações implementadas.

Tabela 5.4: Comparação de valores entre NumCosmo (Nc), COL e CCL para D08 e K11.

Modelo	NC	COL	CCL	CMP (COL)	CMP (CCL)
D08	2.0889485841873	2.0889485841873	2.0889485841873	6.66e-16	4.44e-16
K11	5.88838684147852	5.88838684147852	5.88838684147852	3.33e-16	3.33e-16

A tabela 5.4 compara os valores de concentração obtidos pelas três bibliotecas diferentes. O cálculo foi feito utilizando $M = 10^{-15} M_\odot$, definição de massa $200c$ para D08 e vir para K11 e em *redshift* de $z = 2.0$ para D08 e $z = 0.0$ para K11 por conta da calibração de cada modelo. Nota-se que os dois modelos apresentam erros da ordem de 10^{-16}, isso ocorre por se tratarem de uma lei de potência simples que não faz uso de cosmologia.

Ao plotar os gráficos de D08 e K11 na Figura 5.3, nota-se que para as três bibliotecas, ambos apresentam o mesmo formato. No gráfico de diferença relativa, para M variando de 10^{12} a 10^{15}, observa-se um erro da ordem de 10^{-16}, em concordância com o valor apresentado na tabela anterior.

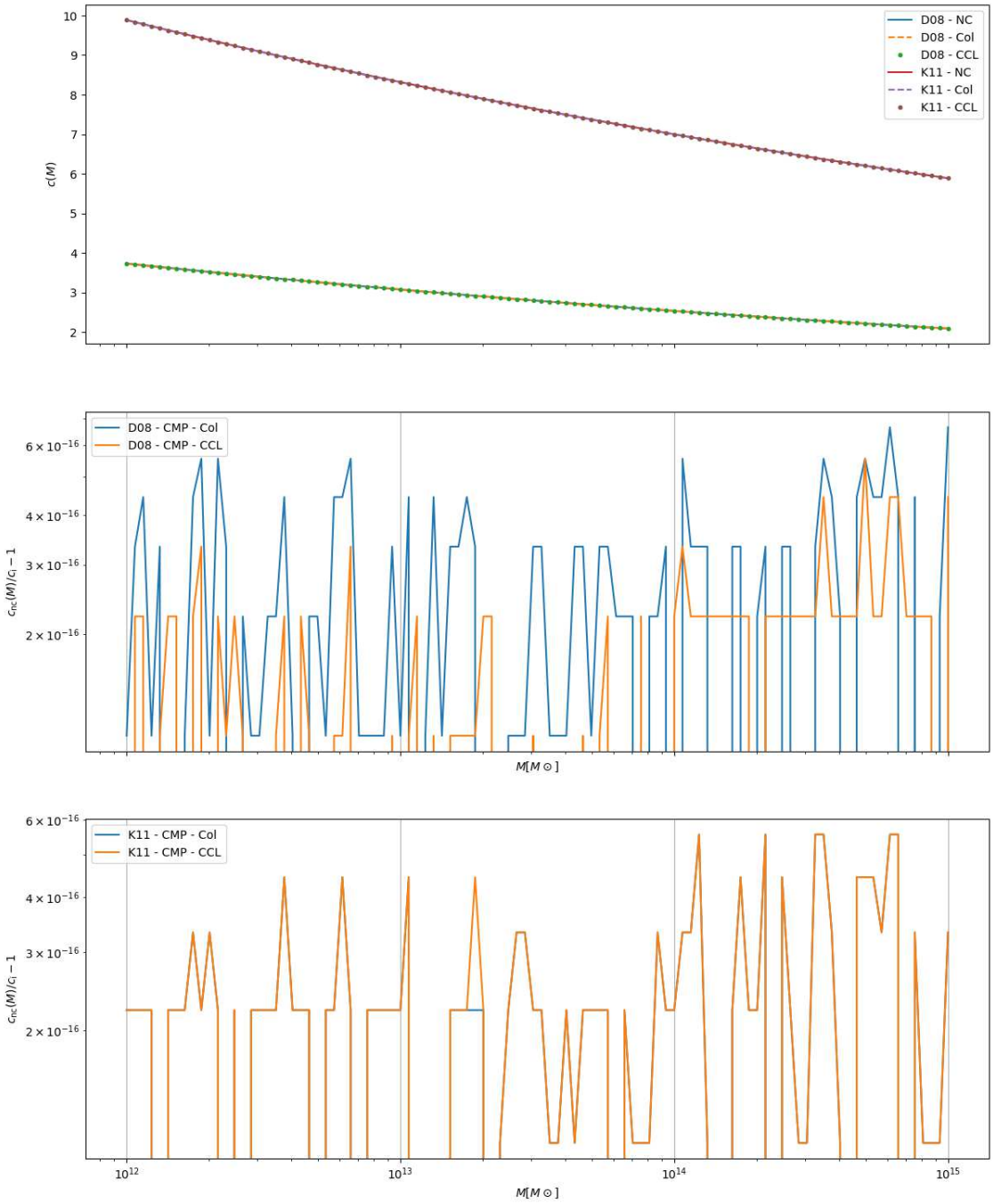

Figura 5.3: Modelos de relação de concentração-massa implementadas diretamente na NumCosmo e o comparativo entre a biblioteca Colossus e CCl. Os resultados foram obtidos para halos em *redshift* $z = 2.0$ para D08 e $z = 0$ para K11. Massas variando de $M = 10^{12} M_\odot$ a $M = 10^{15} M_\odot$ na definição de massa vir para K11 e $200c$ para D08.

Com as concentrações definidas, validadas e implementadas, passamos à análise da densidade superficial de massa para os três perfis de densidade (NFW, Einasto e Hernquist), considerando cada modelo de c - M, com o objetivo de avaliar a consistência dos modelos para essa utilização. Os resultados estão disponíveis em <https://github.com/thaisornellas/nc_concentration/blob/main/ccl_colossus_sigma.ipynb> no formato de Jupyter Notebook.

Para quantificar as diferenças entre os modelos, definimos a diferença relativa, permitindo iden-

Tabela 5.5: Comparação de valores de densidade superfícial $\Sigma(R)$ entre NumCosmo, Colossus e CCL para NFW, EIN e HER para a concentração D08.

Modelo	**NC**	**COL**	**CMP**
NFW	3.49788351547185e10	3.49788351532808e10	4.11e-11
EIN	2.40999705120322e8	2.40999692773926e8	5.12e-08
HER	2.6134297603276e8	2.6134297466008e8	5.25e-09
	NC	**CCL**	**CMP**
NFW	3.49788351547185e10	3.49788351547184e10	3.55e-15
EIN	2.40999705120322e8	2.40999701459686e8	1.52e-08
HER	2.6134297603276e8	2.6134297603268e8	3.05e-13
	COL	**CCL**	**CMP**
NFW	3.49788351532808e10	3.49788351547184e10	4.11e-11
EIN	2.40999692773926e8	2.40999701459686e8	3.60e-08
HER	2.6134297466008e8	2.6134297603268e8	5.25e-09

Tabela 5.6: Comparação de valores de densidade superfícial $\Sigma(R)$ entre NumCosmo, Colossus e CCL para NFW, EIN e HER para a concentração K11.

Modelo	**NC**	**COL**	**CMP**
NFW	1.47630296034209e10	1.47630296033014e10	8.10e-12
EIN	3.09472641422685e6	3.09472621110377e6	6.56e-08
HER	6.15875611773049e7	6.15875610973311e7	1.30e-09
	NC	**CCL**	**CMP**
NFW	1.47630296034209e10	1.47630296034208e10	3.77e-15
EIN	3.09472641422685e6	3.09472639484616e6	6.26e-09
HER	6.15875611773049e7	6.15875611772883e7	2.71e-13
	COL	**CCL**	**CMP**
NFW	1.47630296033014e10	1.47630296034208e10	8.09e-12
EIN	3.09472621110377e6	3.09472639484616e6	5.94e-08
HER	6.15875610973311e7	6.15875611772883e7	1.30e-09

tificar os regimes em que os modelos apresentam maior concordância ou discrepância. O cálculo de diferença relativa foi feito da forma

$$\delta_{rel} = \frac{\Sigma_i - \Sigma_j}{\Sigma_j} \tag{5.1}$$

em que i, j representam as bibliotecas. Nas Tabelas 5.5 e 5.6, foi mantido constante os valores do $redshift$ e do raio R. Ao comparar os resultados entre as bibliotecas, observa-se um erro da ordem de 10^{-8} para o perfil de Einasto e valores ligeiramente menores para os demais perfis.

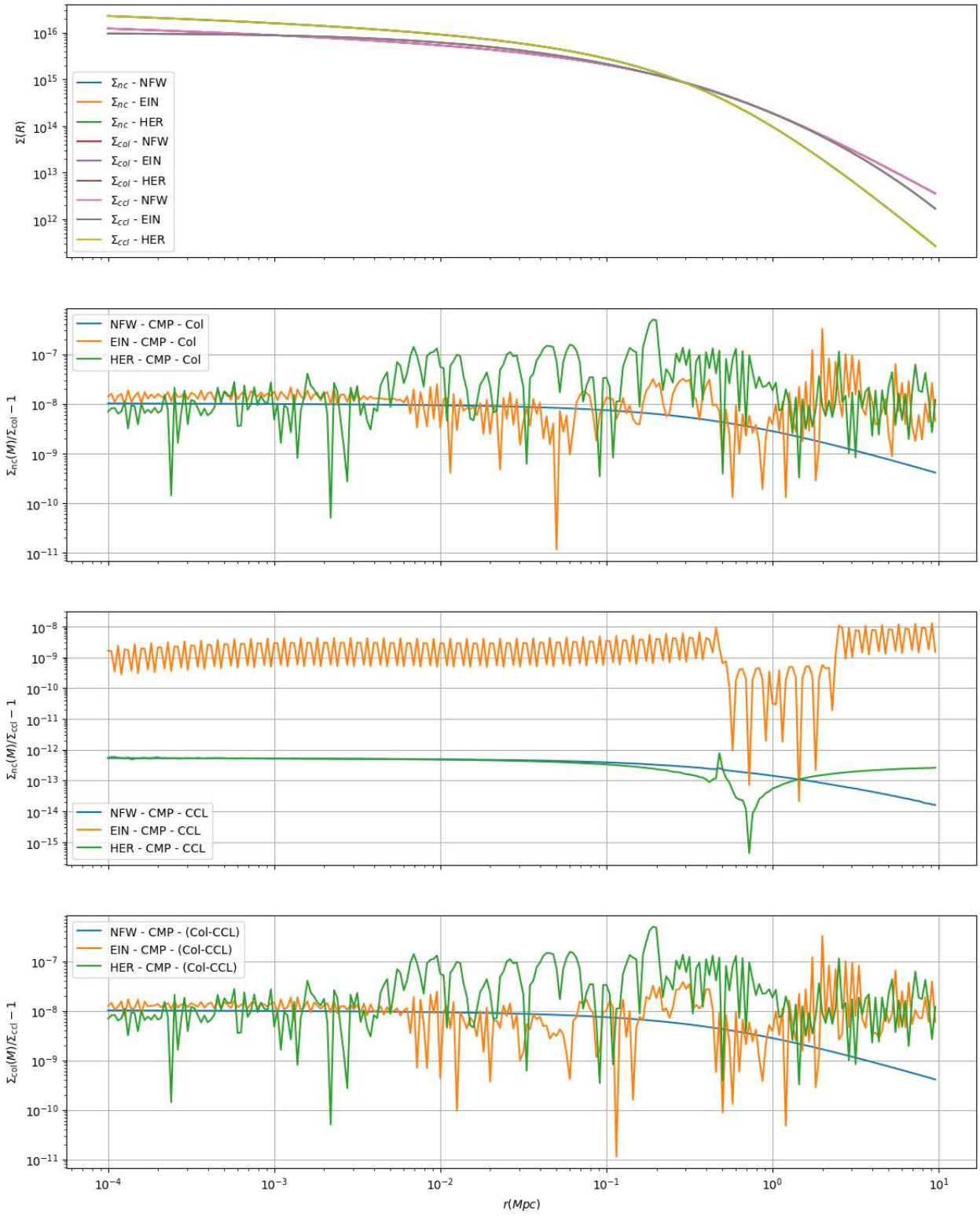

Figura 5.4: Densidade superficial $\Sigma(R)$ para os perfis de NFW, Einasto e Hernquist utilizando a relação de $c - M$ de D08.

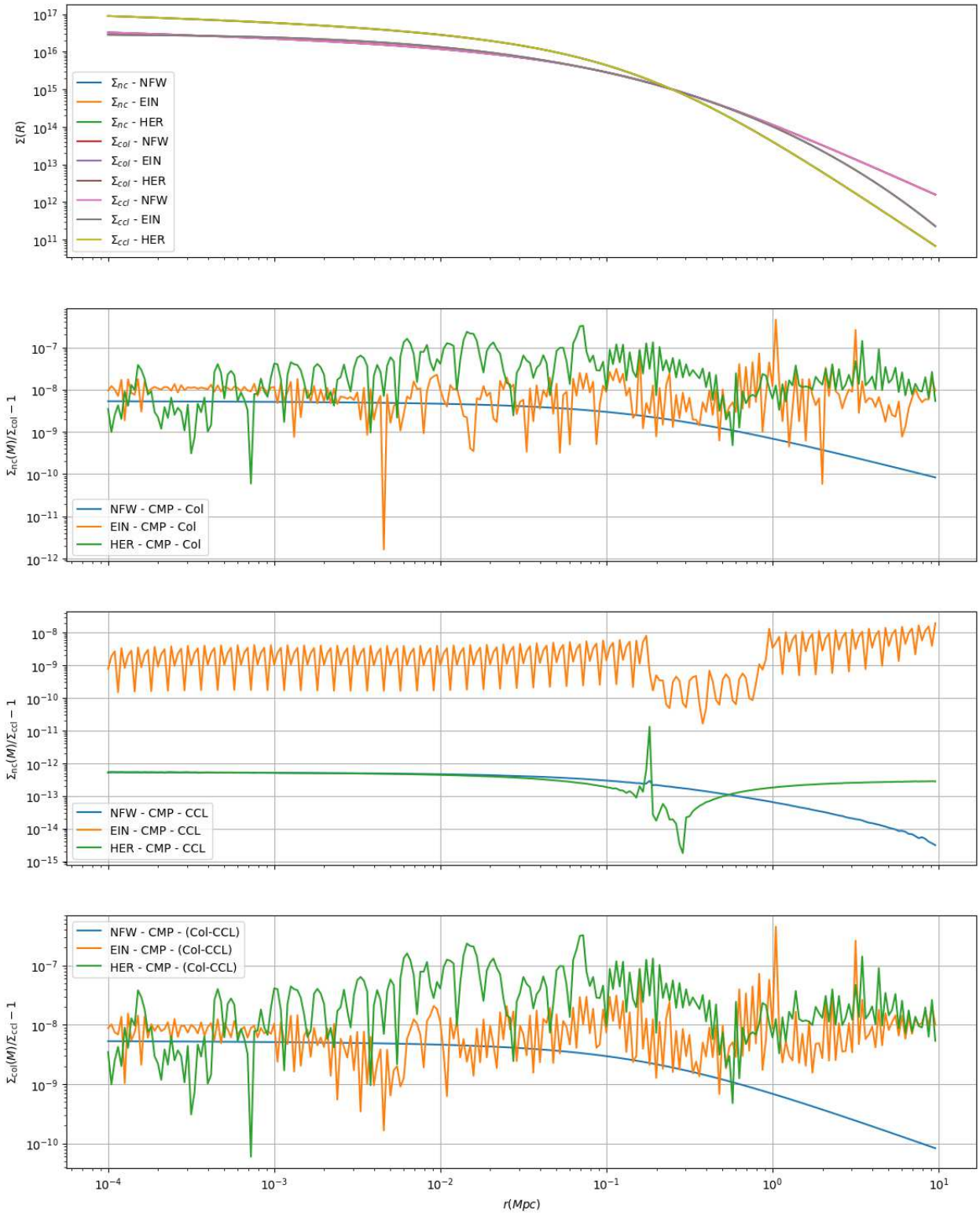

Figura 5.5: Densidade superficial $\Sigma(R)$ para os perfis de NFW, Einasto e Hernquist utilizando a relação de $c - M$ de K11.

Para uma análise mais ampla, foi plotada a diferença relativa no intervalo de raios de 10^{-4} a 10^{1} 5.4 e 5.5. De forma mais geral do que foi apresentado nas Tabelas 5.5 e 5.6, é possível observar que, em média, as comparações de NC-COL e COL-CCL apresentaram diferenças da ordem de 10^{-8}. Na comparação de NC-CCL, os perfis de NFW e Hernquist apresentaram resultados ainda menores,

chegando à ordem de 10^{-12}. Ao comparar a diferença relativa das duas concentrações, nota-se um comportamento semelhante. Entretanto, o modelo D08 apresenta uma concordância ligeiramente maior do que K11 com a CCL para o perfil de Einasto na faixa de raio de $r = 0.1$ e $r = 1$. De modo geral, tais desvios podem ser atribuídos a erros numéricos associados aos métodos de integração e interpolação das bibliotecas.

Para uma comparação direta entre a densidade superficial obtida nos modelos D08 e K11, foram plotados em um mesmo gráfico ambos os resultados (Figura 5.6), bem como a diferença relativa entre eles (Figura 5.7).

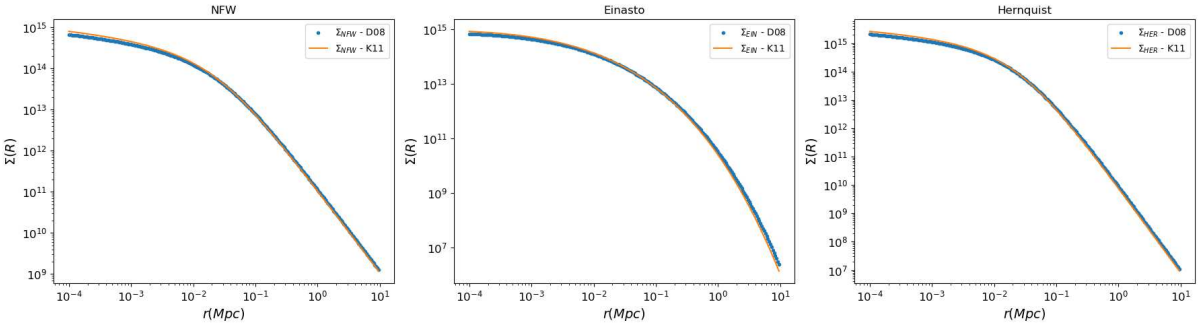

Figura 5.6: Plot da densidade superficial de NFW, Einasto e Hernquist com os modelos de concentrações de D08 e K11.

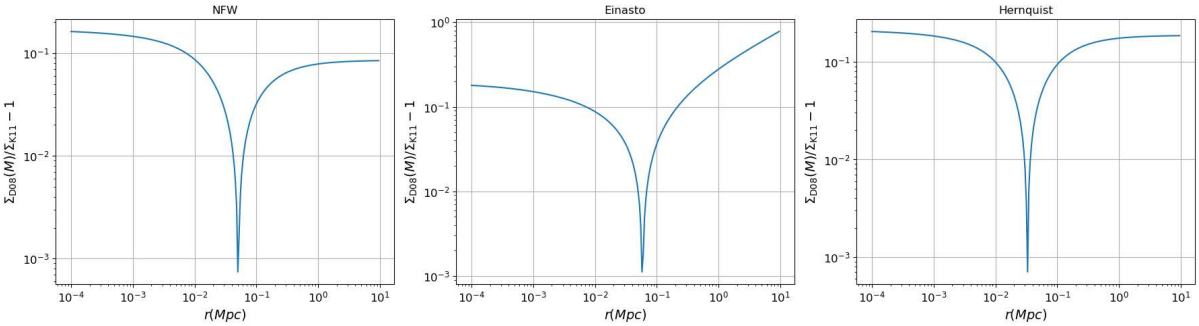

Figura 5.7: Diferença relativa entre a densidade superficial de NFW, Einasto e Hernquist entre as concentrações D08 e K11.

Pela primeira figura, observa-se que os valores da densidade superficial Σ apresentam o mesmo formato para concentrações distintas. No entanto, ao analisar o gráfico da diferença relativa, nota-se uma diferença da ordem de 10^{-1}, exceto no ponto em que as curvas se cruzam, onde ocorre um mínimo. Esse resultado está em conformidade com a análise, uma vez que, apesar de ser adotada a mesma definição de massa e o mesmo *redshift*, os valores de concentração diferem entre os modelos, pois foram calibrados e obtidos por métodos distintos.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, investigamos temas discutidos na literatura nos últimos anos, com foco na relação concentração-massa ($c - M$) no contexto da cosmologia ΛCDM. Analisamos modelos obtidos a partir de simulações numéricas, abordando tanto o estudo teórico quanto a implementação e validação desses modelos. Utilizamos a biblioteca NumCosmo para realizar análises comparativas com as bibliotecas Colossus e CCL, contribuindo para o desenvolvimento de ferramentas computacionais voltadas para a modelagem da relação c-M.

De maneira geral, as validações dos modelos de concentração mostraram-se consistentes. Para os modelos de $c - M$, os erros foram mínimos, enquanto nos modelos de $c - \sigma$ os erros observados podem ser explicados pelas diferenças no cálculo de σ entre as bibliotecas. Em seguida, realizamos a análise da densidade superficial para três perfis de densidade - NFW, Einasto e Hernquist - incorporando os modelos de $c - M$ implementados e comparando-os com as demais bibliotecas novamente. A densidade superficial apresentou boa concordância entre as bibliotecas para as duas concentrações e três perfis de densidade. Além disso, ao comparar o Σ obtido com as concentrações de D08 e K11, encontramos uma diferença da ordem de 10^{-1}, resultado esperado, uma vez que, apesar da mesma definição de massa e redshift, os modelos de concentração são diferentes.

Com a chegada do *Legacy Survey of Space and Time* (LSST), um volume de dados observacionais estará disponível, exigindo uma preparação teórica e computacional. O trabalho desenvolvido aqui se insere nesse contexto, fornecendo ferramentas que poderão auxiliar na interpretação desses dados e na validação de modelos de concentração.

Em resumo, este trabalho contribui tanto para a compreensão teórica da relação c-M quanto para o desenvolvimento de métodos numéricos que poderão ser aplicados em dados cosmológicos observacionais, fortalecendo a ponte entre resultados numéricos e dados reais.

A ANÁLISE DE σ

Vários modelos de relação concentração-massa fazem uso da relação de σ. Com o objetivo de compreender os erros observados nas comparações entre as bibliotecas Colossus e CCL, analisamos diretamente a diferença no cálculo de σ entre as três bibliotecas, dado que essa grandeza seria a principal causa de divergências devido às integrais e a forma do espectro de potência.

Com exceção do modelo de [45], todos os demais modelos utilizam a mesma função de transferência. Para essa análise, foi adotada a expressão exata de σ implementada em cada biblioteca.

Listing A.1: Função de sigma utilizada nas bibliotecas NumCosmo Colossus e CCL.

```
# NumCosmo
sigma_nc = psf.eval_sigma(z, R)

# Colossus
nu = peaks.peakHeight(M_col, z)
sigma_col = constants.DELTA_COLLAPSE / nu

# CCL
sigma_ccl = ccl_cosmo.sigmaM(M, a)
```

Foram consideradas duas variações: massa fixa com *redshift* variável e *redshift* fixo com massa variável. O Jupyter Notebook contendo a análise pode ser encontrado em <https://github.com/thaisornellas/nc_concentration/blob/main/appendix.ipynb>.

Tabela A.1: Comparação de valores de σ entre NumCosmo, Colossus e CCL.

NC: 1.58019246105953	**CCL:** 1.58019302123231	**CMP:** 3.54e-07
NC: 1.58019246105953	**COL:** 1.58021775877452	**CMP:** 1.60e-05
COL: 1.58021775877452	**CCL:** 1.58019302123231	**CMP:** 1.57e-05

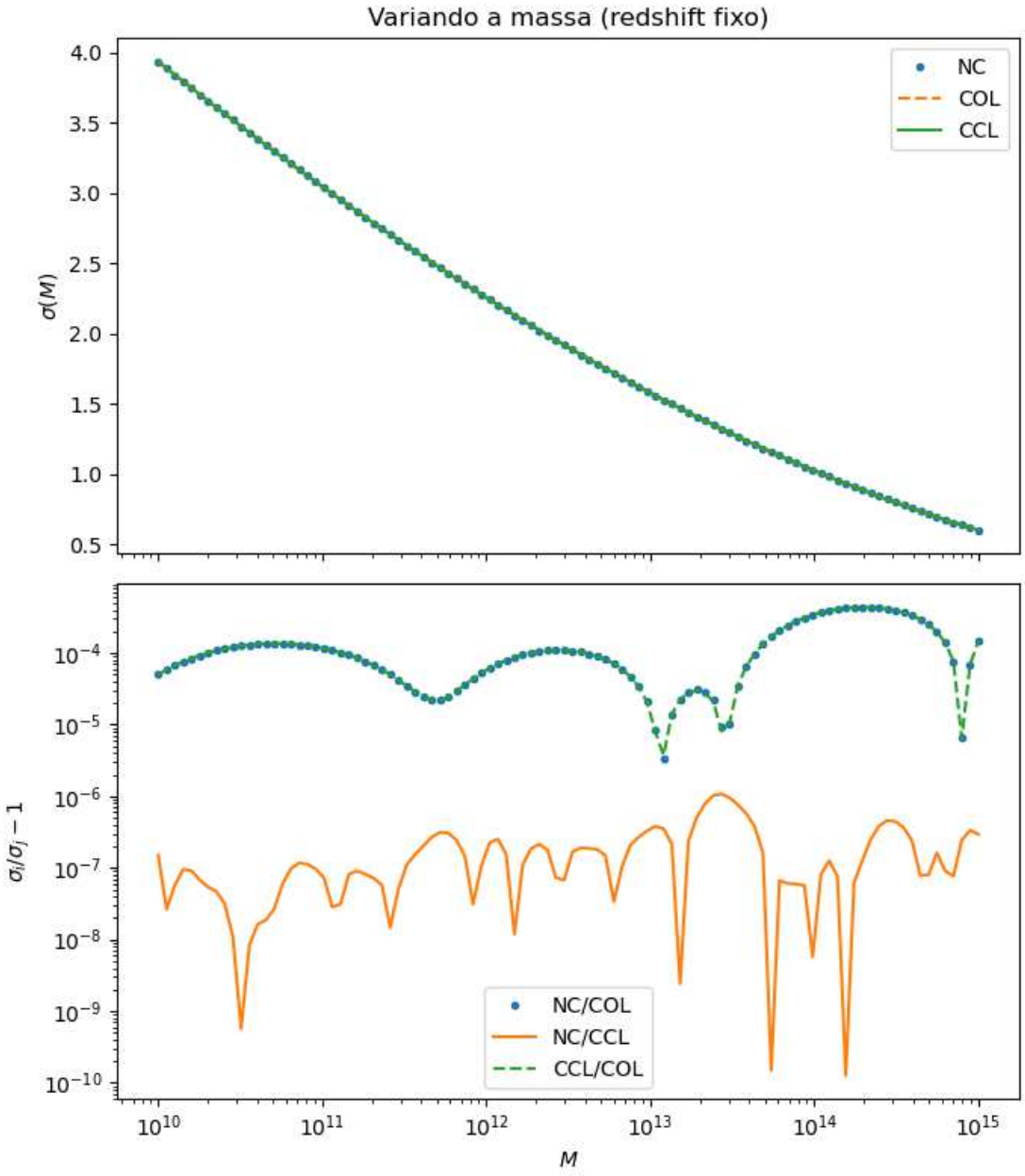

Figura A.1: Variação de σ com a variação de massa.

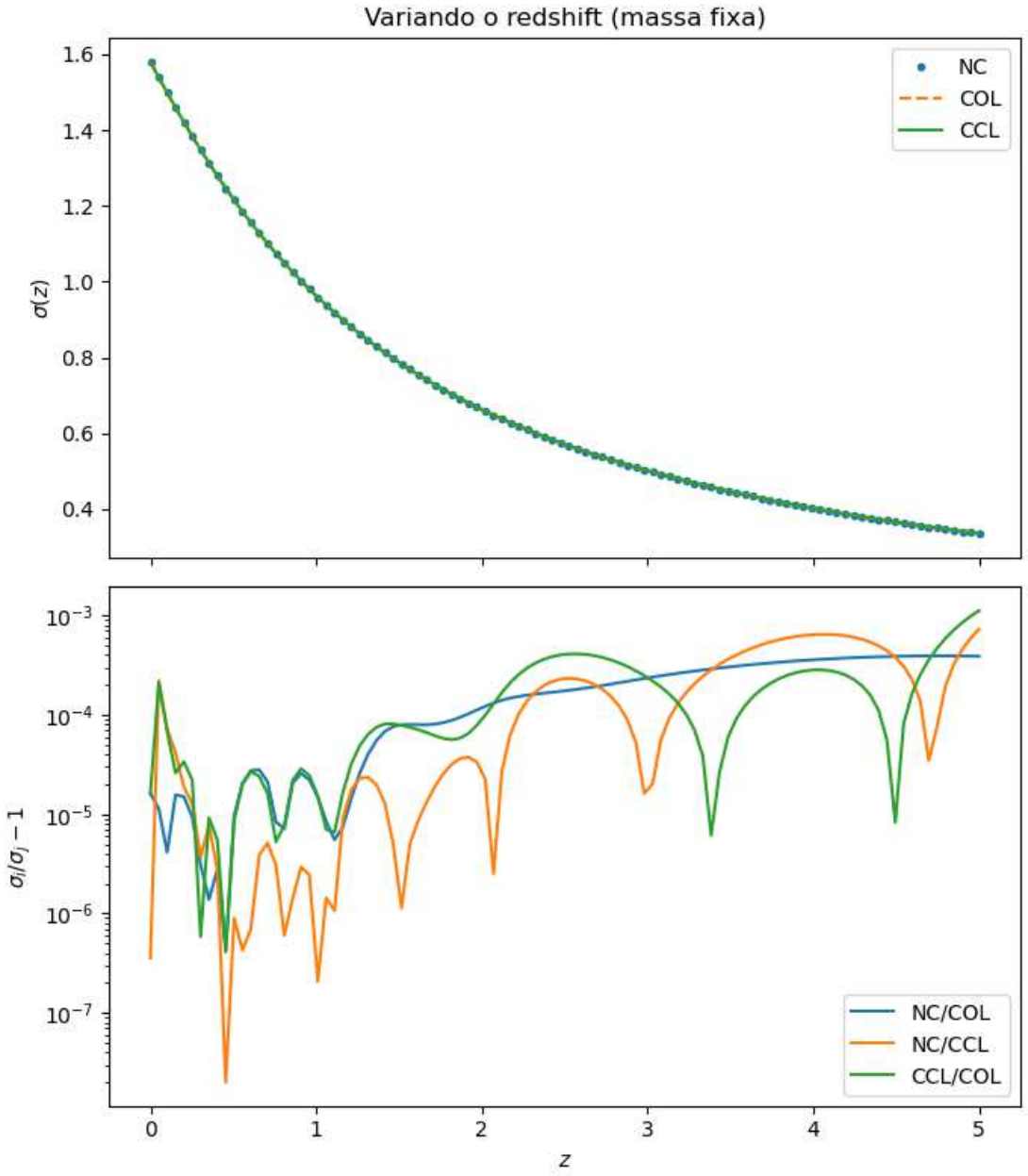

Figura A.2: Variação de σ com a variação do *redshift*

Pela Tabela A.1, mantendo *redshift* e massa fixos, podemos observar uma variação em torno de 10^{-5} a 10^{-7} entre as bibliotecas. Entretanto, ao analisar a Figura A.1, apesar de apresentar o mesmo formato para σ, a diferença relativa entre as bibliotecas mostra uma média de 10^{-4} para NC–Col e CCL–Col, e 10^{-7} para NC–CCL. Analisando a variação do *redshift* na Figura A.2, as diferenças entre as bibliotecas seguem padrão semelhante, sendo menores para $z < 1$ e da ordem de 10^{-4} para $z > 1$.

Essas divergências nos valores de σ podem explicar as diferenças observadas nos modelos de concentração que utilizam a relação c–σ. Visto que o próprio valor de σ apresenta divergência entre as bibliotecas.

REFERENCIAS

Referências Bibliográficas

[1] Asantha Cooray and Ravi Sheth. Halo models of large scale structure. *Physics reports*, 372(1): 1–129, 2002.

[2] Marika Asgari, Alexander J Mead, and Catherine Heymans. The halo model for cosmology: a pedagogical review. *arXiv preprint arXiv:2303.08752*, 2023.

[3] Michele Cappellari and Eric Emsellem. Parametric recovery of line-of-sight velocity distributions from absorption-line spectra of galaxies via penalized likelihood. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 116(816):138, 2004.

[4] E Rasia, M Meneghetti, R Martino, STEFANO Borgani, A Bonafede, Klaus Dolag, S Ettori, D Fabjan, CARLO Giocoli, P Mazzotta, et al. Lensing and x-ray mass estimates of clusters (simulations). *New Journal of Physics*, 14(5):055018, 2012.

[5] Ramesh Narayan and Matthias Bartelmann. Lectures on gravitational lensing. *arXiv preprint astro-ph/9606001*, 1996.

[6] Peter Schneider, Christopher Kochanek, and Joachim Wambsganss. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-30309-1.

[7] Matthias Bartelmann and Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340 (4-5):291–472, 2001.

[8] NASA Science. Galaxy cluster abell 2218's "gravitational lens", 2001. Disponível em: <https://science.nasa.gov/asset/hubble/galaxy-cluster-abell-2218s-gravitational-lens/>. Acesso em: 28 abr. 2025.

[9] Adam S Bolton, Scott Burles, Léon VE Koopmans, Tommaso Treu, and Leonidas A Moustakas. The sloan lens acs survey. i. a large spectroscopically selected sample of massive early-type lens galaxies. *The Astrophysical Journal*, 638(2):703, 2006.

[10] Masamune Oguri and Roger D Blandford. What is the largest einstein radius in the universe? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 392(2):930–944, 2009.

[11] J Merten, MASSIMO Meneghetti, M Postman, K Umetsu, A Zitrin, E Medezinski, M Nonino, A Koekemoer, P Melchior, D Gruen, et al. Clash: the concentration-mass relation of galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 806(1):4, 2015.

[12] Euclid Collaboration, R. Scaramella, and et al. Euclid preparation. i. the euclid wide survey. *Astronomy & Astrophysics*, 662:A112, jun 2022. doi: 10.1051/0004-6361/202141938. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022A&A...662A.112E.

[13] LSST Dark Energy Science Collaboration, A. Abate, and et al. The lsst dark energy science collaboration (desc) science requirements document. *arXiv e-prints*, page arXiv:1809.01669, sep 2018. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv180901669T.

[14] Dark Energy Survey Collaboration, T. Abbott, F. B. Abdalla, A. Alarcon, and et al. The dark energy survey: more than dark energy - an overview. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 460(2):1270–1299, aug 2016. doi: 10.1093/mnras/stw641. URL https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2016MNRAS.460.1270D.

[15] Julio F Navarro, Carlos S Frenk, and Simon DM White. A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490(2):493, 1997.

[16] Jaan Einasto. On the construction of a composite model for the galaxy and on the determination of the system of galactic parameters. *Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata, Vol. 5, p. 87-100, 1965*, 5:87–100, 1965.

[17] Benedikt Diemer and Andrey V Kravtsov. Dependence of the outer density profiles of halos on their mass accretion rate. *The Astrophysical Journal*, 789(1):1, 2014.

[18] Sandro Dias Pinto Vitenti and Mariana Penna-Lima. Numcosmo: Numerical cosmology. *Astrophysics Source Code Library*, pages ascl–1408, 2014.

[19] Benedikt Diemer. Colossus: A python toolkit for cosmology, large-scale structure, and dark matter halos. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 239(2):35, 2018.

[20] Nora Elisa Chisari, David Alonso, Elisabeth Krause, C Danielle Leonard, Philip Bull, Jérémy Neveu, Antonio Villarreal, Sukhdeep Singh, Thomas McClintock, John Ellison, et al. Core cosmology library: Precision cosmological predictions for lsst. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 242(1):2, 2019.

[21] Daniel Baumann. *Cosmology*. Combridge University Press, 2022.

[22] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.

[23] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Application of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[24] Ryan Cooke, Lloyd Knox, and Ethan Nadler. Structure formation. In: Physics 156: A Cosmology Workbook, University of California, Davis. https://phys.libretexts.org/Courses/University_of_California_Davis/Physics_156%3A_A_Cosmology_Workbook/01%3A_Workbook/1.30%3A_Structure_Formation.

[25] Scott Dodelson and Fabian Schmidt. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2 edition, 2020.

[26] Katrin Heitmann, Paul M Ricker, Michael S Warren, and Salman Habib. Robustness of cosmological simulations. i. large-scale structure. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 160 (1):28, 2005.

[27] Mark Vogelsberger, Shy Genel, Volker Springel, Paul Torrey, Debora Sijacki, Dandan Xu, Greg Snyder, Dylan Nelson, and Lars Hernquist. Introducing the illustris project: simulating the coevolution of dark and visible matter in the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 444(2):1518–1547, 2014.

[28] Sven Meyer, Francesco Pace, and Matthias Bartelmann. Relativistic virialization in the spherical collapse model for<? format?> einstein-de sitter and λ cdm cosmologies. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 86(10):103002, 2012.

[29] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.

[30] V. P. G LIMA. *Lenteamento gravitacional fraco e perfis de densidade de matéria de aglomerados de galáxias. Trabalho de Conclusão de Curso.* Universidade de Brasilia (UnB), 2021.

[31] Wikipedia contributors. Virial theorem, 2025. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Virial_theorem>. Acesso em: 22 abr. 2025.

[32] William H Press and Paul Schechter. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *Astrophysical Journal, Vol. 187, pp. 425-438 (1974)*, 187: 425–438, 1974.

[33] Francisco Villaescusa-Navarro, Federico Marulli, Matteo Viel, Enzo Branchini, Emanuele Castorina, Emiliano Sefusatti, and Shun Saito. Cosmology with massive neutrinos i: towards a realistic modeling of the relation between matter, haloes and galaxies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(03):011, 2014.

[34] HJ Mo and Simon DM White. An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 282(2):347–361, 1996.

[35] Simon DM White and Martin J Rees. Core condensation in heavy halos: a two-stage theory for galaxy formation and clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 183(3): 341–358, 1978.

[36] Liang Gao, Julio F Navarro, Shaun Cole, Carlos S Frenk, Simon DM White, Volker Springel, Adrian Jenkins, and Angelo F Neto. The redshift dependence of the structure of massive λ cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(2):536–544, 2008.

[37] Lars Hernquist. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 356, June 20, 1990, p. 359-364.*, 356:359–364, 1990.

[38] Julia M Comerford and Priyamvada Natarajan. The observed concentration–mass relation for galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 379(1):190–200, 2007.

[39] Austen M Groener, David M Goldberg, and Mauro Sereno. The galaxy cluster concentration–mass scaling relation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 455(1):892–919, 2016.

[40] Keiichi Umetsu. Cluster–galaxy weak lensing. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 28(1): 7, 2020.

[41] N. C. OLIVEIRA. *Um estudo de aglomerados de galáxias via lentes gravitacionais: perfil de massa e cosmologia. Tese (Doutorado)*. Universidade de São Paulo (USP), 2017.

[42] ESA/Hubble. Gravitational lensing in action, 2011. Disponível em: <https://esahubble.org/images/heic1106c/>. Acesso em: 29 abr. 2025.

[43] Candace Oaxaca Wright and Tereasa G Brainerd. Gravitational lensing by nfw halos. *The Astrophysical Journal*, 534(1):34, 2000.

[44] Anatoly A Klypin, Sebastian Trujillo-Gomez, and Joel Primack. Dark matter halos in the standard cosmological model: Results from the bolshoi simulation. *The Astrophysical Journal*, 740 (2):102, 2011.

[45] Benedikt Diemer and Andrey V Kravtsov. A universal model for halo concentrations. *The Astrophysical Journal*, 799(1):108, 2015.

[46] James S Bullock, Tsafrir S Kolatt, Yair Sigad, Rachel S Somerville, Andrey V Kravtsov, Anatoly A Klypin, Joel R Primack, and Avishai Dekel. Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321(3):559–575, 2001.

[47] Andrea V Macciò, Aaron A Dutton, and Frank C Van Den Bosch. Concentration, spin and shape of dark matter haloes as a function of the cosmological model: Wmap 1, wmap 3 and wmap 5 results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391(4):1940–1954, 2008.

[48] David N Spergel, Licia Verde, Hiranya V Peiris, Eiichiro Komatsu, MR Nolta, Charles L Bennett, Mark Halpern, Gary Hinshaw, Norman Jarosik, Alan Kogut, et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: determination of cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1):175, 2003.

[49] David N Spergel, R Bean, O Doré, MR Nolta, CL Bennett, Joanna Dunkley, G Hinshaw, N ea Jarosik, E Komatsu, L Page, et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)

observations: implications for cosmology. *The astrophysical journal supplement series*, 170(2): 377, 2007.

[50] Eiichiro Komatsu, J Dunkley, MR Nolta, Charles L Bennett, Ben Gold, Gary Hinshaw, Norman Jarosik, David Larson, M Limon, LEA Page, et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 180(2):330, 2009.

[51] Alan R Duffy, Joop Schaye, Scott T Kay, and Claudio Dalla Vecchia. Dark matter halo concentrations in the wilkinson microwave anisotropy probe year 5 cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 390(1):L64–L68, 2008.

[52] Volker Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 364(4):1105–1134, 2005.

[53] N Jarosik, CL Bennett, J Dunkley, B Gold, MR Greason, M Halpern, RS Hill, G Hinshaw, A Kogut, Eiichiro Komatsu, et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap*) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2):14, 2011.

[54] Francisco Prada, Anatoly A Klypin, Antonio J Cuesta, Juan E Betancort-Rijo, and Joel Primack. Halo concentrations in the standard λ cold dark matter cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(4):3018–3030, 2012.

[55] Volker Springel, Simon DM White, Adrian Jenkins, Carlos S Frenk, Naoki Yoshida, Liang Gao, Julio Navarro, Robert Thacker, Darren Croton, John Helly, et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *nature*, 435(7042):629–636, 2005.

[56] Michael Boylan-Kolchin, Volker Springel, Simon DM White, Adrian Jenkins, and Gerard Lemson. Resolving cosmic structure formation with the millennium-ii simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398(3):1150–1164, 2009.

[57] Suman Bhattacharya, Salman Habib, Katrin Heitmann, and Alexey Vikhlinin. Dark matter halo profiles of massive clusters: Theory versus observations. *The Astrophysical Journal*, 766(1):32, 2013.

[58] Aaron A Dutton and Andrea V Maccio. Cold dark matter haloes in the planck era: evolution of structural parameters for einasto and nfw profiles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(4):3359–3374, 2014.

[59] Peter AR Ade, Nabila Aghanim, M Arnaud, Mark Ashdown, Jea Aumont, Carlo Baccigalupi, AJ Banday, RB Barreiro, JG Bartlett, Nicola Bartolo, et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.

[60] Benedikt Diemer and Michael Joyce. An accurate physical model for halo concentrations. *The Astrophysical Journal*, 871(2):168, 2019.

[61] Daniel J Eisenstein and Wayne Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605, 1998.

[62] Anatoly Klypin, Gustavo Yepes, Stefan Gottlöber, Francisco Prada, and Steffen Hess. Multidark simulations: the story of dark matter halo concentrations and density profiles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(4):4340–4359, 2016.

[63] Hillary L Child, Salman Habib, Katrin Heitmann, Nicholas Frontiere, Hal Finkel, Adrian Pope, and Vitali Morozov. Halo profiles and the concentration–mass relation for a λcdm universe. *The Astrophysical Journal*, 859(1):55, 2018.

[64] Tomoaki Ishiyama, Francisco Prada, Anatoly A Klypin, Manodeep Sinha, R Benton Metcalf, Eric Jullo, Bruno Altieri, Sofía A Cora, Darren Croton, Sylvain de La Torre, et al. The uchuu simulations: Data release 1 and dark matter halo concentrations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506(3):4210–4231, 2021.

[65] Aaron D Ludlow, Sownak Bose, Raúl E Angulo, Lan Wang, Wojciech A Hellwing, Julio F Navarro, Shaun Cole, and Carlos S Frenk. The mass–concentration–redshift relation of cold and warm dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 460(2):1214–1232, 2016.

[66] Aaron D Ludlow, Julio F Navarro, Michael Boylan-Kolchin, Philip E Bett, Raúl E Angulo, Ming Li, Simon DM White, Carlos Frenk, and Volker Springel. The mass profile and accretion history of cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 432(2): 1103–1113, 2013.

[67] Dong-Hai Zhao, YP Jing, HJ Mo, and G Börner. Mass and redshift dependence of dark halo structure. *The Astrophysical Journal*, 597(1):L9, 2003.

[68] Chiamaka Okoli. Dark matter halo concentrations: a short review. *arXiv preprint arXiv:1711.05277*, 2017.

[69] Antonio Ragagnin, Alexandro Saro, Priyanka Singh, and Klaus Dolag. Cosmology dependence of halo masses and concentrations in hydrodynamic simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 500(4):5056–5071, 2021.

[70] MAGNETICUM Project. Magneticum pathfinder simulations, 2025. Disponível em: <http://www.magneticum.org>. Acesso em: 22 abr. 2025.

[71] Alan R Duffy, Joop Schaye, Scott T Kay, Claudio Dalla Vecchia, Richard A Battye, and CM Booth. Impact of baryon physics on dark matter structures: a detailed simulation study of halo density profiles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405(4):2161–2178, 2010.