



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

MARCOS ANTÔNIO JARABA RODRIGUEZ

**DINÂMICA DO MODELO ESCALAR CONFORME EM  $AdS_n$   
USANDO O FORMALISMO DAS EXTENSÕES AUTO-  
ADJUNTAS COM APLICAÇÃO À TERMODINÂMICA**

---

Londrina  
2020

MARCOS ANTÔNIO JARABA RODRIGUEZ

**DINÂMICA DO MODELO ESCALAR CONFORME EM  $AdS_n$   
USANDO O FORMALISMO DAS EXTENSÕES AUTO-  
ADJUNTAS COM APLICAÇÃO À TERMODINÂMICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. Mario César Baldiotti.

Londrina  
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Jaraba Rodriguez, Marcos Antonio.

DINÂMICA DO MODELO ESCALAR CONFORME EM AdS n USANDO O FORMALISMO DAS EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS COM APLICAÇÃO À TERMODINÂMICA / Marcos Antonio Jaraba Rodriguez. - Londrina, 2020.  
70 f.

Orientador: MARIO CÉSAR BALDIOTTI.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.  
Inclui bibliografia.

1. Anti de Sitter Space - Tese. 2. Extensões Autoadjuntas - Tese. 3. Modelo Escalar Conforme - Tese. 4. Termodinâmica - Tese. I. BALDIOTTI, MARIO CÉSAR . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 50

MARCOS ANTÔNIO JARABA RODRIGUEZ

**DINÂMICA DO MODELO ESCALAR CONFORME EM  $AdS_n$   
USANDO O FORMALISMO DAS EXTENSÕES AUTO-  
ADJUNTAS COM APLICAÇÃO À TERMODINÂMICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Mario César Baldiotti  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes  
Universidade de São Paulo – USP

---

Prof. Dr. Thiago S. Pereira  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 10 de agosto de 2020.



*À minha mãe Esther Rodriguez e meus queridos irmãos.*



# Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Eu agradeço:

- Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina.
- À minha família pelo apoio constante em todo esse processo.
- Ao professor Mario César Baldiotti, por aceitar ser meu orientador no meu mestrado.
- Aos meus colegas de estudo: Victor, Daina, Issaeli, Daniel pelo apoio durante o meu mestrado.



*"A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro."*  
*Albert Einstein.*



JARABA, Marcos Antônio. **Dinâmica do modelo escalar conforme em  $AdS_n$  usando o formalismo das extensões auto-adjuntas com aplicação à termodinâmica.** 2020. 70fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestre em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## Resumo

Estudamos a dinâmica do modelo escalar conforme em  $AdS_n$  com o formalismo das extensões auto-adjuntas e como o processo de segunda quantização do campo escalar pode ser implementado nesse formalismo. Determinamos sistematicamente quantas dinâmicas podem existir e como elas podem ser descritas a partir de condições de contorno na fronteira de  $AdS_n$ . Seu espectro nos permitiu classificá-las em três grupos, onde a classificação depende de alguns parâmetros geométricos e do espectro das extensões de Neumann e Dirichlet. Com base no conhecimento do espectro dessas extensões, e no fato de podermos compactar o espaço  $AdS$  no Espaço Estático de Einstein, considerando-o como uma “caixa” dentro desse espaço, foi realizado um estudo termodinâmico do campo escalar, considerando-o como um gás de partículas bosônicas.

**Palavras-chave:** Modelo escalar conforme. Espaço anti de-Sitter. Extensões auto-adjuntas. Termodinâmica.



JARABA, Marcos Antônio. **Dynamics of the conformal scalar model in  $AdS_n$  using the formalism of self-adjoints extensions with application to thermodynamics.** 2020. 70p. Senior Thesis (Master of Science in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

## Abstract

We study the dynamics of the scalar model in  $AdS_n$  with the formalism of the self-adjoint extensions and how the process of second quantization of the scalar field can be implemented in this formalism. We systematically determine how many dynamics can exist and how they can be described by boundary conditions at the  $AdS_n$  boundary. Their spectrum allowed us to classify them in three groups, where the classification depends on some geometric parameters and the spectrum of Neumann and Dirichlet extensions. Based on the knowledge of the spectrum of these extensions, and the fact that we can compactify the AdS space in another space, considering it as a “box” within that other space, a thermodynamic study of the scalar field was realized, considering it as a bosonic particle gas.

**Keywords:** Conformal field theory. Self-adjoint extensions. Anti-de Sitter space. Thermodynamic.



# Lista de ilustrações

Figura 1	– Função $\theta(k)$ para $p = 1$ . . . . .	47
Figura 2	– Distribuição do espectro para algumas extensões para $p = 1$ . . . . .	50
Figura 3	– Comportamento da função de partição das extensões para baixas temperaturas em $n = 4$ . . . . .	56
Figura 4	– Comportamento da função de partição $\ln Z$ para altas temperaturas em dimensões $n = 4, 5, 6$ . . . . .	60



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Classificação das extensões de acordo com seu espectro . . . . .	50
Tabela 2 – Comportamento das funções da partição e número de partículas das extensões em altas temperaturas. . . . .	61



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA CLÁSSICA DO CAMPO ESCALAR NO FORMALISMO DAS EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1	Prescrição de Wald . . . . .	25
2.2	Modelo escalar com acoplamento conforme à curvatura . . . . .	26
2.3	Extensões auto-adjuntas . . . . .	29
<b>2.3.1</b>	<b>Construção das extensões através das condições de contorno</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>UMA PROPOSTA PARA A SEGUNDA QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR NO MODELO CONFORME EM <math>AdS_n</math></b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Segunda quantização em espaço-tempos estáticos globalmente hiper- bólicos . . . . .	37
<b>3.1.1</b>	<b>Quantização canônica via extensões auto-adjuntas</b> . . . . .	<b>41</b>
3.2	AdS como uma “caixa” em ESU . . . . .	43
<b>4</b>	<b>ANÁLISE ESPECTRAL DAS EXTENSÕES</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>5</b>	<b>ANÁLISE TERMODINÂMICA DO MODELO</b> . . . . .	<b>51</b>
5.1	Espectro e degenerescência . . . . .	52
5.2	Termodinâmica e extensões auto-adjuntas . . . . .	54
<b>5.2.1</b>	<b>Regime de baixa temperatura</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>5.2.2</b>	<b>Regime de altas temperaturas</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE A – TEOREMAS SOBRE EXTENSÕES AUTO-ADJUNTAS</b>	<b>69</b>



# 1 Introdução

Desde o descobrimento da correspondência AdS/CFT, proposta por J. Maldacena [1], e seus desenvolvimentos subsequentes [2, 3], a geometria AdS assumiu uma relevância especial na busca de uma teoria quântica da gravidade. A correspondência AdS/CFT estabelece uma dualidade entre as teorias da gravidade no “*bulk*” (volume do AdS), com algumas teorias de campos conformes na fronteira do AdS, como a teoria  $\mathcal{N} = 4$  supersimétrica de Yang-Mills. Com isso, o estudo da dinâmica dos campos no bulk tornou-se relevante nesse cenário.

Modelos com campos escalares que satisfazem equações hiperbólicas de movimento, como a equação de Klein-Gordon, foram amplamente estudados [4, 5, 6, 7, 8, 9]. O primeiro inconveniente que surge ao tentar se estabelecer uma dinâmica satisfatória com campos escalares no AdS, é o fato desse não ser um espaço-tempo globalmente hiperbólico. A inexistência de uma superfície de Cauchy para esse espaço significa que o problema do valor inicial não está bem definido, o que é bastante inconveniente do ponto de vista determinístico. Alguns trabalhos [5, 6] atacaram esse problema sob diferentes perspectivas, obtendo que, sob certas condições de contorno impostas no infinito espacial, podemos ter uma dinâmica satisfatória. A partir de um trabalho anterior de Wald [10], onde uma prescrição é construída para estabelecer dinâmicas sensíveis em espaços tempos globalmente não-hiperbólicos, Wald e Ishibashi [7] tentaram “sistematizar” todas as condições de contorno que podem ser estabelecidas no AdS e que levam a dinâmicas bem definidas.

Uma vez que a dinâmica clássica do campo esteja bem estabelecida, o próximo passo é a quantização. O problema é que, dado o caráter não hiperbólico global do AdS, coisas exóticas podem acontecer, como: partículas como fótons atingindo o infinito espacial em um tempo finito. Nos primeiros trabalho [8, 9] sobre quantização do campo escalar no AdS, foi feita uma tentativa de construir um esquema de quantização, compactando o AdS em outro espaço-tempo globalmente hiperbólico. Dessa forma, o AdS pode ser considerado como uma “caixa” dentro desse espaço e o campo pode ser expandido em modos de frequência positiva, que satisfazem certas condições de contorno, de modo que quantidades como a energia e momento total sejam conservadas. Verificou-se que apenas dois tipos de condições de contorno podem atender a esse requisito, as do tipo transparente (modos irregulares) e as do tipo refletivo (modos regulares), onde o fluxo total é nulo na fronteira. Exemplos de condições transparente são as condições periódicas e exemplos do tipo refletivo são Dirichlet e Neumann. Trabalhos recentes [11, 12] mostraram que essas condições de contorno dão origem a esquemas de quantização re-normalizáveis para certos valores de constantes de acoplamento de massa e curvatura.

Neste trabalho, o objetivo é estudar a dinâmica clássica do modelo escalar conforme em  $AdS_n$  para campos não-massivos, a partir do formalismo das extensões auto-adjuntas, e como o processo de segunda quantização pode ser implementado nesse formalismo. Feito isso, uma análise termodinâmica será feita a partir de um tratamento estatístico prévio, considerando o campo como um gás de partículas bosônicas. Partindo do conhecimento do espectro das extensões, queremos estudar a dependência da termodinâmica com a escolha das condições de contorno do campo no infinito espacial.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, estudamos a dinâmica clássica, encontrando todas as extensões auto-adjuntas do operador que descreve a dinâmica do campo em nosso modelo. No segundo capítulo, delinearemos uma proposta para implementar o processo de segunda quantização do campo. Essa ideia é apoiada no fato de que o AdS pode ser compactado na metade do espaço estático de Einstein, como é sugerido em [8]. No terceiro capítulo, o espectro das extensões será analisado, estudando sua estrutura e distribuição, o que nos levará a classificar as extensões em três grupos. Finalmente, para o quarto capítulo, será realizado um estudo termodinâmico, encontrando as funções da partição e o número de partículas para cada extensão auto-adjunta. Será feita uma análise do que acontece para os regimes de baixa e alta temperatura, descrevendo como a termodinâmica depende da escolha das condições de contorno para o campo em cada um desses regimes.

Como convenção, ao longo deste trabalho utilizaremos unidades naturais:  $\hbar = c = k_B = 1$ , além disso, usaremos a assinatura para a métrica  $n$ -dimensional:  $\text{diag}(-, +, +, \dots, +)$ .

## 2 Dinâmica clássica do campo escalar no formalismo das extensões auto-adjuntas

Os modelos com campos escalares reais mais estudados num espaço tempo curvo  $n$ -dimensional são: **acoplamento mínimo** e **acoplamento conforme**, ambos descritos pela seguinte ação [13]:

$$S_M[\Phi] = \int d^n x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{2} (m^2 + \zeta R) \Phi^2 \right], \quad (2.1)$$

onde  $\zeta = 0$  reproduz o acoplamento mínimo e,

$$\zeta = \frac{n-2}{4(n-1)}, \quad (2.2)$$

reproduz o acoplamento conforme. Quando o modelo com acoplamento mínimo é estudado no AdS, descobre-se que a dinâmica é única [4, 7, 8], não temos liberdade para escolher condições de contorno no infinito espacial. O estudo das soluções para a equação de Klein-Gordon sugere que, para ter dinâmicas diferentes, é necessário  $m^2 < 0$  [9], o que resulta impossível desde nosso entendimento atual da física, pois a massa é uma quantidade real. Esse fato torna pouco atraente, no cenário de correspondência AdS/CFT, uma teoria escalar baseada no acoplamento mínimo. Por outro lado, o modelo com acoplamento conforme em AdS foi estudado em [7, 8, 9], onde diferentes dinâmicas bem definidas foram encontradas. Cada uma destas dinâmicas está associada à condições de contorno no infinito espacial, que podem ser classificadas como sendo do tipo transparente ou refletivo [8], dependendo de como a energia e o momento “fluem” no AdS.

### 2.1 Prescrição de Wald

Em geral, é bem sabido [14] que, para espaços-tempo globalmente hiperbólicos, o problema de Cauchy está bem definido para dinâmicas com campos escalares masivos, que satisfazem a equação de Klein-Gordon,

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi - \mu^2 \Phi = 0. \quad (2.3)$$

Ou seja, se  $\Sigma$  é uma superfície de Cauchy de um espaço-tempo  $M$ , então, para a informação de Cauchy dada por  $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma)$ , existe apenas um

$\Phi \in C^\infty(M)$  que satisfaz a equação (2.3). Além disso,  $\Phi|_\Sigma = \phi_0$  e  $t^\mu \nabla_\mu \Phi|_\Sigma = \dot{\phi}_0$ , onde  $t^\mu$  é o vetor de Killing associado ao tempo.

No entanto, para espaços-tempo globalmente não hiperbólicos, o problema de Cauchy não está bem definido e, portanto, a existência e unicidade do campo não são garantidas pela informação de Cauchy especificada numa superfície. Assim, a dinâmica nesses casos não está bem estabelecida.

Em um artigo publicado em 1980 [10], R. Wald esboçou uma prescrição para construir uma dinâmica sensível para campos escalares em espaços-tempo estáticos globalmente não hiperbólicos. Com a intenção de encontrar soluções de quadrado integrável para (2.3) e aproveitando o fato que num espaço-tempo estático, descrito pela métrica geral

$$ds^2 = g_{00}(\mathbf{x})dt^2 + \gamma_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j, \quad (2.4)$$

a equação (2.3) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - V \tilde{\nabla}^k (V \tilde{\nabla}_k \Phi) + \mu^2 V^2 \Phi = 0, \quad (2.5)$$

onde  $V = \sqrt{-g_{00}}$  e  $\tilde{\nabla}_k$  é o operador derivada covariante associado à métrica induzida  $\gamma_{ij}$  em  $\Sigma$ , Wald observou que a equação (2.5) poderia ser “vista” como uma equação vetorial num espaço de Hilbert  $L^2[\Sigma, V^{-1}d\Sigma]$ , na forma

$$\frac{d^2 \phi_t}{dt^2} + A \phi_t = 0. \quad (2.6)$$

Onde  $\phi_t$  representa um vetor nesse espaço, que está relacionado univocamente à  $\Phi$ , e  $A$  é um operador linear dado por

$$A = -V \tilde{\nabla}^k (V \tilde{\nabla}_k) + \mu^2 V^2. \quad (2.7)$$

Quando  $A$  é definido em um subconjunto denso desse espaço de Hilbert, como  $C_0^\infty(\Sigma)$  (quer dizer, o conjunto de funções suaves de suporte compacto em  $\Sigma$ ), o operador acaba sendo positivo e simétrico. Portanto, é possível mostrar, usando argumentos de análise funcional, que este operador possui extensões auto-adjuntas positivas.

A prescrição de Wald consiste basicamente em que, se escolhermos uma dessas extensões auto-adjuntas,  $A_E$ , o problema de Cauchy estaria bem definido apenas se, as informações de Cauchy forem suaves e compactamente suportadas. Isto é,  $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$  e a evolução do campo seria dada pela seguinte equação:

$$\phi_t = \cos(A_E^{1/2} t) \phi_0 + A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2} t) \dot{\phi}_0. \quad (2.8)$$

## 2.2 Modelo escalar com acoplamento conforme à curvatura

A liberdade na escolha das condições de contorno no modelo conforme motiva um estudo sistemático e rigoroso de todas as dinâmicas possíveis que o modelo possa

apresentar. Esse estudo é facilitado usando o formalismo das extensões auto-adjuntas [7, 10], descrito na prescrição de Wald.

Sabe-se que as equações de movimento no modelo conforme são invariantes sob uma transformação conforme para o caso de campos não massivos [13]. Esta invariância é relevante em nosso trabalho, dado que no próximo capítulo uma proposta de segunda quantização do campo escalar será construída, baseada na ideia de compactação do  $AdS_n$  [8] em outro espaço-tempo através de uma transformação conforme. Por esse motivo, aqui consideraremos apenas o caso não massivo. A equação de movimento que descreve a dinâmica de um campo escalar não massivo neste modelo é dada por

$$\left( \nabla_\mu \nabla^\mu - \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi = 0. \quad (2.9)$$

A métrica que descreve o espaço  $AdS_n$  pode ser escrita em coordenadas globais como

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + \frac{dr^2}{a(r)} + r^2 d\Omega^{n-2}, \quad r \in [0, \infty), \quad (2.10)$$

onde  $d\Omega^{n-2}$  é o elemento de linha na  $(n-2)$ -esfera  $S^{n-2}$  e  $a(r) = 1 + r^2/L^2$ .  $L$  é conhecido como o “raio  $AdS$ ” e está relacionado à constante cosmológica  $\Lambda$ ,

$$L^2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{2\Lambda}. \quad (2.11)$$

O escalar de Ricci, calculado a partir da métrica (2.10), é constante e tem o valor

$$R = -\frac{n(n-1)}{L^2}. \quad (2.12)$$

Portanto, a equação (2.9) fica reduzida em

$$\left( \nabla_\mu \nabla^\mu + \frac{n(n-2)}{4L^2} \right) \Phi = 0. \quad (2.13)$$

Esta equação pode ser considerada como uma equação de Klein-Gordon com massa efetiva  $m_{\text{eff}}^2 = -n(n-2)/4L^2$ . Abaixo, vamos encontrar as soluções para essa equação, primeiro para o caso particular  $n = 4$  e depois para o caso geral com dimensões maiores.

### Soluções para o caso $n = 4$

Para o caso  $n = 4$ , a métrica  $AdS_n$  (2.10) é reduzida à

$$ds^2 = -a(r)dt^2 + \frac{dr^2}{a(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.14)$$

Introduzindo essa métrica na equação (2.13), encontramos que  $\Phi$  deve satisfazer

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( ar^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{2}{L^2} \Phi \right\} = 0. \quad (2.15)$$

No momento, é conveniente usar uma coordenada adimensional  $\rho$ , relacionada à  $r$  por

$$r \rightarrow \rho = \tan^{-1} \left( \frac{r}{L} \right), \quad (2.16)$$

com  $\rho \in [0, \pi/2)$ . Note que, nestas coordenadas,

$$a = \sec^2 \rho = \frac{1}{L} \frac{dr}{d\rho}. \quad (2.17)$$

Assim, nas novas coordenadas, a equação (2.15) é reduzida à

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{L^2} \left\{ \frac{1}{\tan^2 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \tan^2 \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{2}{\cos^2 \rho} \Phi \right\} \\ = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{L^2} \left\{ \frac{1}{\tan \rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\tan \rho \Phi) + \frac{1}{\sin^2 \rho} \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] \right\} = 0. \quad (2.19)$$

Aproveitando a simetria esférica do  $AdS$ , podemos expandir as soluções desta equação em harmônicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ ,

$$\Phi(t, \rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{L^{3/2} \tan \rho} \sum_{l,m} \phi_{lm}(t, \rho) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19), e usando o fato de que

$$\left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (2.21)$$

obtemos uma equação dinâmica para  $\phi_{lm}(t, \rho)$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi_{lm}(t, \rho)}{\partial t^2} + \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{l(l+1)}{\sin^2 \rho} \right] \phi_{lm}(t, \rho) = 0; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

### Generalização para dimensões maiores

Para dimensões maiores ( $n > 4$ ), temos que a equação (2.13), nas coordenadas da métrica  $AdS_n$  (2.10), pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a \left\{ \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( ar^{n-2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{n-2} \Phi + \frac{n(n-2)}{4L^2} \Phi \right\} = 0, \quad (2.23)$$

onde  $\Delta_{n-2}$  é o operador de Laplace-Beltrami em  $S^{n-2}$ . Este operador possui auto-funções, que são os harmônicos esféricos em  $S^{n-2}$ , os quais satisfazem

$$\Delta_{n-2} Y_j(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = -l(l+n-3) Y_j(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}); \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

O número de harmônicos associados a cada valor de  $l$  ( $\gamma_l$ ) é calculado com a seguinte fórmula [4]:

$$\gamma_l = (2l + n - 3) \frac{(l + n - 4)!}{l!(n - 3)!}. \quad (2.25)$$

Observe que, para o caso  $n = 4$ , este número é  $2l + 1$ , que são os valores que  $m$  pode tomar em  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Como no caso  $n = 4$ , podemos fazer a mudança de coordenadas dada na equação (2.16) e obter

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{L^2} \left\{ \frac{1}{\tan^{n-2} \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \tan^{n-2} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin^2 \rho} \Delta_{n-2} \Phi + \frac{n(n-2)}{4 \cos^2 \rho} \Phi \right\} = 0. \quad (2.26)$$

Usando a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^{n-2} \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \tan^{n-2} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{n(n-2)}{4 \cos^2 \rho} \Phi &= \frac{1}{\tan^{(n-2)/2} \rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \tan^{(n-2)/2} \rho \Phi \right) - \\ &\frac{1}{\sin^2 \rho} \frac{(n-2)(n-4)}{4}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

podemos reescrever a equação (2.26) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{L^2} \left\{ \frac{1}{\tan^{(n-2)/2} \rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \tan^{(n-2)/2} \rho \Phi \right) + \frac{1}{\sin^2 \rho} \left[ \Delta_{n-2} - \frac{(n-2)(n-4)}{4} \right] \Phi \right\} \\ = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como no caso anterior ( $n = 4$ ), podemos expandir o campo nos harmônicos esféricos em  $S^{n-2}$  na forma

$$\Phi(t, \rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \frac{1}{L^{(n-1)/2} \tan^{n/2-1} \rho} \sum_i \phi_i(t, \rho) Y_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}). \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) em (2.28), e usando a equação (2.24), obtemos a equação dinâmica para  $\phi_i(t, \rho)$ ,

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} + \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{l(l+n-3) + \frac{(n-2)(n-4)}{4}}{\sin^2 \rho} \right] \phi_i = 0; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Observe que, se tomarmos  $n = 4$ , obteremos (2.22).

## 2.3 Extensões auto-adjuntas

Podemos considerar a equação (2.30) como uma equação vetorial no espaço de Hilbert  $L^2[0, \pi/2]$  dada por

$$\frac{d^2 \phi_t}{dt^2} + A \phi_t = 0, \quad (2.31)$$

onde

$$\phi_i(t, \rho) \rightarrow \phi_t \in L^2[0, \pi/2]; \quad A = \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \right], \quad (2.32)$$

com  $K_{nl} = l(l+n-3) + (n-2)(n-4)/4$ . A solução da equação (2.31) é facilitada se encontrarmos uma base  $\{\xi_j\}$  de  $L^2[0, \pi/2]$  cujos vetores sejam autofunções de  $A$ , com os respectivos autovalores  $\lambda_j$ . Desta forma, uma expansão nesta base

$$\phi_t = \sum_j \left( a_j e^{i\sqrt{\lambda_j}t} + b_j e^{-i\sqrt{\lambda_j}t} \right) \xi_j \quad (2.33)$$

é a solução geral da equação (2.31). Portanto, todo o problema é reduzido a encontrar a base  $\{\xi_j\}$ . Sabe-se que o teorema espectral da análise funcional garante uma base de autofunções do operador  $A$  para o espaço Hilbert, somente se este operador for auto-adjunto. Ocorre que, quando temos operadores ilimitados, como no nosso caso, podem haver domínios diferentes em que o operador é auto-adjunto, resultando em uma dinâmica diferente em cada caso. Chamamos cada um desses domínios de **extensão auto – adjunta** do operador.

Para o estudo dessas extensões, começamos definindo o domínio do operador  $A$  num subconjunto denso do espaço de Hilbert  $L^2[0, \pi/2]$ , formado pelo conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $[0, \pi/2]$ ,

$$\text{Dom}(A) = \left\{ \phi(x) \in L^2[0, \pi/2] : \phi \in C_0^\infty \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (2.34)$$

Estamos interessados em encontrar todas as possíveis extensões auto-adjuntas de  $A$ . Para isso, primeiro mostraremos que o operador  $A$ , definido no domínio (2.34), é simétrico e, além disso, que é um operador positivo definido. Portanto, pelo teorema (A.1) da teoria de extensões auto-adjuntas, é garantida a existência de pelo menos uma extensão positiva. A simetria e a positividade podem ser testadas usando a integração por partes e o fato de  $K_{nl}$  ser um número real positivo. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \phi, A\psi \rangle &= \frac{1}{L^2} \int_0^{\pi/2} \bar{\phi} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \psi \right] d\rho = \frac{1}{L^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \rho} \psi - \phi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \rho} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \\ &\int_0^{\pi/2} \frac{1}{L^2} \overline{\left[ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \phi \right]} \psi d\rho. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Como  $\phi, \psi$  e suas derivadas são nulas nos extremos (pelo fato de pertencerem à  $C_0^\infty[0, \pi/2]$ ), obtemos

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle. \quad (2.36)$$

Portanto, o operador  $A$  é simétrico. A positividade do operador é testada analogamente

$$\langle \phi, A\phi \rangle = \frac{1}{L^2} \int_0^{\pi/2} \bar{\phi} \left[ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \phi \right] d\rho = -\frac{1}{L^2} \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \Big|_0^{\pi/2} +$$

$$\frac{1}{L^2} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right|^2 d\rho + \frac{K_{nl}}{L^2} \int_0^{\pi/2} \csc^2 \rho |\phi|^2 d\rho. \quad (2.37)$$

A expressão acima se reduz à

$$\langle \phi, A\phi \rangle = \frac{1}{L^2} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right|^2 d\rho + \frac{K_{nl}}{L^2} \int_0^{\pi/2} \csc^2 \rho |\phi|^2 d\rho \geq 0. \quad (2.38)$$

Depois de garantir a existência de possíveis extensões, o próximo passo é descobrir quantas existem e como elas podem ser descritas. Para isso, vamos usar o teorema (A.2) (teorema de Neumann), para encontrar o subespaço de deficiência do operador. No nosso caso, precisamos resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} A^+ \phi^{(\pm)} &= \pm i\kappa \phi^{(\pm)} \\ \Rightarrow \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \right] \phi^{(\pm)} &= \pm i\kappa \phi^{(\pm)}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\phi^{(\pm)} \in \mathcal{K}^{(\pm)}$  (subespaço de deficiência) e  $\kappa \in \mathbb{R}_+$ . Obviamente, a equação (2.39) é uma equação de autovalores <sup>1</sup>, portanto, torna-se necessário estudar a solução geral de

$$\frac{1}{L^2} \left[ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \phi \right] = \epsilon^2 \phi. \quad (2.40)$$

É conveniente usar um parâmetro adimensional,  $k = L\epsilon$ , e reescrever (2.40) como

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \phi = k^2 \phi. \quad (2.41)$$

Dependendo dos valores que  $n$  e  $l$  podem assumir, temos dois casos possíveis.

### Caso I ( $l > 0$ )

Este caso ocorre quando  $l > 0$  para qualquer dimensão. Começamos propondo uma solução para (2.41) da forma

$$\phi_I(\rho) = \sin^p \rho h(\rho); \quad p = \frac{1 + \sqrt{1 + 4K_{nl}}}{2}. \quad (2.42)$$

Substituindo esta solução em (2.41), encontramos uma equação diferencial para  $h(\rho)$

$$\sin \rho \frac{d^2 h}{d\rho^2} + 2p \cos \rho \frac{dh}{d\rho} + (k^2 - p^2) \sin \rho h = 0. \quad (2.43)$$

Façamos uma mudança na variável independente  $\rho$ ,

$$\rho \rightarrow z = \sin^2 \rho. \quad (2.44)$$

<sup>1</sup> No capítulo a seguir, interpretamos esses autovalores como a energia dos modos no processo de segunda quantização do campo.

Nesta nova variável a equação (2.43) se torna

$$z(1-z) \frac{d^2 h}{dz^2} + \left[ \left( p + \frac{1}{2} \right) - (p+1)z \right] \frac{dh}{dz} - \left( \frac{p+k}{2} \right) \left( \frac{p-k}{2} \right) h = 0. \quad (2.45)$$

Esta equação tem a forma da equação diferencial que satisfaz a função hipergeométrica  $F_1(a, b, c; z)$  com

$$a = \frac{p+k}{2}; \quad b = \frac{p-k}{2}; \quad c = p + \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

Com isso, sabemos que a solução geral desta equação é

$$h(z) = c_1 F_1(a, b, c; z) + c_2 z^{1-c} F_1(1+a-c, 1+b-c, 2-c; z). \quad (2.47)$$

Pode-se mostrar que esta solução não é de quadrado integrável (como  $c > 1$ , o fator  $z^{1-c}$  possui um polo em  $z = 0$ ). Portanto, a solução encontrada para a equação (2.41) é

$$\phi_I(\rho) = \sin^p \rho F_1 \left( \frac{p+k}{2}, \frac{p-k}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right). \quad (2.48)$$

Com esta solução, podemos resolver a equação (2.39) para encontrar o subespaço de deficiência do operador. Tomando  $k = 1 \pm i$  na solução (2.48) obtemos

$$\phi_I^{(\pm)}(\rho) = \sin^p \rho F_1 \left( \frac{p+1 \pm i}{2}, \frac{p-1 \mp i}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right), \quad (2.49)$$

onde temos claramente que as funções  $\{\phi^{(+)}, \phi^{(-)}\} \in L^2[0, \pi/2]$ . Consequentemente,

$$\dim(\mathcal{K}^+) = \dim(\mathcal{K}^-) = 1. \quad (2.50)$$

Concluimos pelo teorema (A.2) que todas as extensões são parametrizadas pelo grupo unitário  $U(1)$ .

### Caso II ( $l = 0, n = 4$ )

Quando  $n = 4$  e  $l = 0$ ,  $K_{nl} = 0$ , portanto a equação (2.41) se torna

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = k^2 \phi, \quad (2.51)$$

cuja solução geral é

$$\phi_{II}(\rho) = c \sin(k\rho) + d \cos(k\rho). \quad (2.52)$$

Como no caso anterior, esta solução nos permite encontrar o subespaço de deficiência do operador. Tomando  $k = 1 \pm i$  na solução (2.52) obtemos

$$\phi_{II}^{(\pm)}(\rho) = c \sin[(1 \pm i)\rho] + d \cos[(1 \pm i)\rho]. \quad (2.53)$$

É evidente que  $\{\sin[(1 \pm i)\rho], \cos[(1 \pm i)\rho]\} \in L^2[0, \pi/2]$ . Portanto, temos

$$\dim(\mathcal{K}^+) = \dim(\mathcal{K}^-) = 2. \quad (2.54)$$

Concluimos, pelo teorema (A.2), que todas as extensões são parametrizadas pelo grupo unitário  $U(2)$ .

Nosso desenvolvimento não contempla todas as soluções acima. Neste trabalho estamos interessados em extensões que possuam apenas um parâmetro livre. Com isso, do grupo de soluções acima, vamos selecionar uma família que, assim como as extensões do Caso I, possam ser parametrizadas pelo grupo  $U(1)$ . Para isso, observe que, se tomarmos o limite  $l \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow 4$  da solução (2.48) para o caso I, encontramos

$$\lim_{(n,l) \rightarrow (4,0)} \phi_I(\rho) = \frac{\sin(k\rho)}{k}, \quad (2.55)$$

que é uma solução do tipo  $\phi_{II}$ , com  $c = 1/k$  e  $d = 0$ . Este é o subconjunto de soluções do caso II que vamos tratar. Assim, a dinâmica em qualquer dimensão  $n$ , será descrita por extensões auto-adjuntas do tipo  $U(1)$ , com uma solução geral para a equação (2.41) dada por

$$\phi(\rho) = \sin^p \rho F_1 \left( \frac{p+k}{2}, \frac{p-k}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right); \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

### 2.3.1 Construção das extensões através das condições de contorno

O teorema (A.2) afirma que cada extensão está em correspondência unívoca com as isometrias parciais dos subespaços de deficiência, ou seja, qualquer aplicação  $\Xi : \mathcal{K}^{(+)} \rightarrow \mathcal{K}^{(-)}$ , de modo que

$$\langle \Xi \phi^{(+)}, \Xi \phi^{(+)} \rangle = \langle \phi^{(-)}, \phi^{(-)} \rangle. \quad (2.57)$$

No nosso caso, o domínio do fecho de  $A$  são as funções que decaem rapidamente nos extremos do intervalo  $[0, \pi/2]$  e as isometrias parciais para o caso de extensões parametrizadas pelo grupo  $U(1)$  satisfazem [7]

$$\Xi \phi^{(+)} = e^{i\alpha} \phi^{(-)}, \quad (2.58)$$

com  $\alpha \in (0, 2\pi]$ . Portanto, o domínio de qualquer extensão auto-adjunta no nosso caso será dado por

$$\text{Dom}(A_\Xi) = \left\{ \phi_0 + \phi^{(+)} + e^{i\alpha} \phi^{(-)} \mid \phi_0 \in \text{Dom}(\bar{A}), \phi^{(+)} \in \mathcal{K}^{(+)}, \phi^{(-)} \in \mathcal{K}^{(-)} \right\}. \quad (2.59)$$

Queremos relacionar o domínio das extensões com as condições de contorno. Para isso, suponha que  $(\phi, \psi) \in C^2[0, \pi/2]$ , então, definimos a seguinte quantidade:

$$\begin{aligned} W(\psi, \phi) &\equiv \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \bar{\phi} \right] \psi d\rho - \int_0^{\pi/2} \bar{\phi} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{K_{nl}}{\sin^2 \rho} \psi \right] d\rho \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} \bar{\phi} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \rho^2} \psi \right) d\rho. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Integrando obtemos

$$W(\psi, \phi) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \bar{\phi} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \rho} \psi \right)_0^{\pi/2}. \quad (2.61)$$

Agora vamos considerar o conjunto  $\mathfrak{E}$  que inclui todos os domínios de todas as extensões auto-adjuntas, quer dizer

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{x \in \Xi} \text{Dom}(A_x). \quad (2.62)$$

Da definição do domínio das extensões (2.59) e da diferenciabilidade das soluções  $\phi^{(\pm)}$  (2.49), pode ser deduzido que  $\mathfrak{E} \subseteq C^2[0, \pi/2]$ . Portanto, a quantidade  $W$  está definida para qualquer par de elementos  $\mathfrak{E}$ . É claro que, se  $(\phi, \psi)$  pertence ao domínio de alguma extensão  $A_\Xi$ , então  $W(\psi, \phi) = 0$ , a prova disso é imediata, dado que

$$\langle A_\Xi \phi, \psi \rangle - \langle \phi, A_\Xi \psi \rangle = W(\psi, \phi). \quad (2.63)$$

Esta equação, junto com a equação (2.61) são muito úteis, pois nos ajudam a definir uma extensão com base nas condições de contorno.

**Definição 2.1.** Uma condição de contorno  $P$  definirá uma extensão no conjunto  $\mathfrak{E}$ , se a seguinte relação é satisfeita,

$$\forall \phi, \psi \in \mathfrak{E} | W(\psi, \phi) = 0 : \text{se } \phi \text{ satisfazer } P \implies \psi \text{ satisfaz } P \quad (2.64)$$

e o domínio da extensão pode ser expresso da seguinte forma:

$$\text{Dom}(A_\Xi) = \{ \phi \in \mathfrak{E} | \phi \text{ satisfaz } P \}. \quad (2.65)$$

Para aplicar a definição (2.1) em nosso caso, primeiro observe da equação (2.49) que  $\phi^{(\pm)}(0) = 0$ , além disso temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi^{(\pm)}}{d\rho} \right|_{\rho=0} &= p \cos \rho \sin^{p-1} \rho F_1 \left( \frac{p+1 \pm i}{2}, \frac{p-1 \mp i}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right) + \\ &2 \cos \rho \sin^{p+1} \rho \left( \frac{p^2 \mp 2i}{4p+2} \right) F_1 \left( \frac{p+3 \pm i}{2}, \frac{p+1 \mp i}{2}, p + \frac{3}{2}; \sin^2 \rho \right) \Big|_{\rho=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Com estes resultados, e do fato de que o domínio das extensões é determinado por (2.59), podemos deduzir que o conjunto  $\mathfrak{E}$  é formado por funções que se anulam em  $\rho = 0$ , juntamente com suas derivadas. Não temos liberdade para impor condições de contorno em  $\rho = 0$ . Assim, a quantidade  $W(\psi, \phi)$  é reduzida à

$$W(\psi, \phi) = \psi'(\pi/2) \bar{\phi}(\pi/2) - \bar{\phi}'(\pi/2) \psi(\pi/2), \quad (2.67)$$

onde  $\phi' = d\phi/d\rho$ . Para ver como isto funciona, primeiro vamos começar com uma condição de Dirichlet,  $\phi(\pi/2) = 0$ . Calculando  $W$  temos

$$W = -\bar{\phi}'(\pi/2)\psi(\pi/2). \quad (2.68)$$

A única maneira de obter  $W = 0$ , é que  $\psi(\pi/2) = 0$  (uma vez que  $\phi'(\pi/2)$  é arbitrário). Desta maneira, a condição para  $\phi$  implica a mesma condição para  $\psi$ . Portanto, de acordo com a definição (2.1), a extensão de Dirichlet estaria definida por

$$\text{Dom}(A_D) = \{\phi \in \mathfrak{E} \mid \phi(\pi/2) = 0\}. \quad (2.69)$$

Analogamente ao caso de Dirichlet, podemos construir a extensão de Neumann, definida por

$$\text{Dom}(A_N) = \{\phi \in \mathfrak{E} \mid \phi'(\pi/2) = 0\}. \quad (2.70)$$

No entanto, para uma condição de contorno do tipo

$$P : \phi(\pi/2) = 0, \phi'(\pi/2) = 1, \quad (2.71)$$

$W$  será

$$W = \psi'(\pi/2)(0) - (1)\psi(\pi/2). \quad (2.72)$$

Observe que, mesmo fazendo  $\psi(\pi/2) = 0$ , qualquer valor de  $\psi'(\pi/2)$  fará com que  $W$  seja nulo. A mesma condição  $P$  não é obtida para  $\psi$  e, portanto, essa condição de contorno não pode definir uma extensão. Por outro lado, uma condição de contorno da forma (Robin)

$$P : \phi'(\pi/2) + a\phi(\pi/2) = 0 \quad (2.73)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ , define uma extensão para cada valor de  $a$ . A prova disso é imediata, se calculamos  $W$  com a condição  $P$  acima,

$$W = \psi'(\pi/2)\bar{\phi}(\pi/2) + a\bar{\phi}(\pi/2)\psi(\pi/2) = [\psi'(\pi/2) + a\psi(\pi/2)]\bar{\phi}(\pi/2). \quad (2.74)$$

Para que  $W$  seja nula, obrigatoriamente  $\psi'(\pi/2) + a\psi(\pi/2) = 0$ , que acaba sendo a mesma condição de contorno  $P$  para  $\psi$ . Outra maneira de escrever a condição (2.73) é fazer  $a = -\tan \theta$ , com isso,

$$\phi'(\pi/2) \cos \theta = \phi(\pi/2) \sin \theta. \quad (2.75)$$

Observe que  $\theta = 0$  gera a extensão tipo Neumann e  $\theta = \pm\pi/2$  tipo Dirichlet. Dessa forma, todas as extensões auto-adjuntas são parametrizadas por  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .



### 3 Uma proposta para a segunda quantização do campo escalar no modelo conforme em $AdS_n$

Em geral é sabido que um dos requisitos para aplicar os métodos usuais da Teoria Quântica de Campos (QFT) para quantizar campos em espaços curvos é que o espaço-tempo, onde a quantização é feita, seja globalmente hiperbólico. Isso garante que o propagador de Feynman não tenha problemas de causalidade. No entanto, em [8] foi mostrado que podemos ter uma boa quantização para o modelo escalar conforme em  $AdS_4$ , se considerarmos  $AdS_4$  como uma “caixa” compactada no espaço-tempo estático de Einstein. A quantização depende das condições de contorno que impomos no infinito espacial do  $AdS_4$  (“paredes da caixa”). Com os resultados do capítulo anterior, mostraremos que esse esquema pode ser generalizado para dimensões maiores, onde o processo usual de segunda quantização para o campo escalar pode ser realizado usando o formalismo das extensões auto-adjuntas. Para fazer isso, primeiro precisamos construir uma abordagem <sup>1</sup> que nos permita fazer uma segunda quantização em espaços estáticos globalmente hiperbólicos, a partir do conhecimento das extensões auto-adjuntas que o sistema possa apresentar.

#### 3.1 Segunda quantização em espaço-tempos estáticos globalmente hiperbólicos

Já vimos que a dinâmica de um campo escalar real massivo de massa  $m$  é descrita pela equação (2.1), que em um espaço-tempo estático pode ser levada para a forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + A\Phi = 0, \quad (3.1)$$

onde  $A$  é um operador que pode depender da primeira e da segunda derivada em relação às coordenadas espaciais. Por exemplo, no caso de Minkowsky,  $A = -\nabla^2 + m^2$ . Além disso, podemos garantir que  $A$  é um operador positivo em relação ao produto interno definido por [7]

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{\Sigma} \Psi^* \Phi \sqrt{-g^{00}} d\Sigma, \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Vale esclarecer que essa abordagem ainda está em desenvolvimento, mas é uma possível via para realizar uma segunda quantização do campo escalar em espaços tempos estáticos usando as extensões auto-adjuntas do operador que governa a dinâmica clássica.

onde  $\Sigma$  representa uma superfície de Cauchy gerada por uma foliação a tempo constante. Este produto interno define um espaço de Hilbert que denotamos por  $L^2[\Sigma, \sqrt{-g^{00}}d\Sigma]$ , que é o espaço formado por todas as funções de quadrado integrável definidas em  $\Sigma$  com medida  $d\mu = \sqrt{-g^{00}}d\Sigma$ . Pode acontecer o caso em que a dinâmica do campo é definida em um subconjunto  $U$  de  $\Sigma$  (por exemplo, uma caixa em Minkowsky), o que leva a fixar condições de contorno na borda deste subconjunto  $U$ .

Como é sabido, no processo usual de segunda quantização, primeiro começamos expandindo o campo  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ , e seu momento canônico associado  $\Pi(\mathbf{x}, t)$ , em qualquer base completa do espaço de Hilbert  $L^2[\Sigma]$ . O momento canônico é obtido a partir da densidade lagrangiana [13, 15]

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_t \Phi)}, \quad (3.3)$$

que em nosso modelo escalar, descrito pela ação (2.1), será

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{-g} \nabla_t \Phi. \quad (3.4)$$

A energia total do campo é obtida através da integração da componente  $T^{00}$  do tensor de energia-momento em todo o espaço em que o campo está definido. Essa abordagem não será usada aqui. É mais conveniente, para nossos propósitos, usar funcionais para calcular a energia e o momento canônico. O lagrangiano de um campo escalar pode ser definido como um funcional da forma [16]

$$L[\Phi(\mathbf{x}, t), \dot{\Phi}(\mathbf{x}, t)] = \int_U \mathcal{L}(\Phi, \nabla_x \Phi, \dot{\Phi}) d\mu, \quad (3.5)$$

onde  $\mu$  pode ser qualquer medida no espaço em que o campo está definido e  $U \subseteq \Sigma^2$ . É fácil ver que o lagrangiano (3.5) satisfaz a seguinte identidade:

$$\int_U \dot{\Phi} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \Phi} \right] d\mu = \frac{d}{dt} \left( \int_U \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}} \dot{\Phi} d\mu - L \right), \quad (3.6)$$

onde o momento canônico e a energia total são definidos como [16]

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}}, \quad E = \int_U \Pi(\mathbf{x}, t) \dot{\Phi} d\mu - L, \quad (3.7)$$

e a equação de movimento para o campo assume a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \Phi} = 0. \quad (3.8)$$

A utilidade da equação (3.6) está no fato de que ela pode ser usada para encontrar a energia e o momento canônico a partir do conhecimento da equação do

<sup>2</sup> É sabido dos métodos variacionais, que o domínio de um funcional definido desse jeito deve satisfazer condições de contorno em  $U$ .

movimento que governa o campo, assumindo como hipótese inicial a existência de um  $L$ , de modo que a equação do movimento tenha a forma dada em (3.8). Escolhendo uma medida  $\mu$  e condições de contorno adequadas, de modo que o membro esquerdo da equação (3.6) possa ser expresso como a derivada temporal de alguma quantidade escalar  $E$ , então,  $E$  deve ser a energia associada ao sistema <sup>3</sup>. A energia estará fortemente ligada às condições de contorno do sistema.

Nosso objetivo é usar essa ideia, para associar uma energia e um momento canônico ao campo escalar descrito por uma equação de movimento da forma dada em (3.1). Observe que, se escolhermos uma medida  $d\mu = \sqrt{-g^{00}}d\Sigma$ , podemos expressar o membro esquerdo da equação (3.6), em função do produto interno definido em (3.2), na forma

$$\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} + A\Phi \rangle. \quad (3.9)$$

A ideia, então, é expressar esse produto interno como a derivada temporal de algo, impondo alguma condição de contorno. Em geral, a forma de  $A$  pode ser muito complicada e é impraticável desenvolver o produto interno (3.9). É aqui que o formalismo das extensões de auto-adjuntas é muito útil. Porque é mais fácil manipular o bracket (3.9) com operadores no espaço Hilbert. Além do fato das extensões auto-adjuntas carregarem as condições de contorno do sistema. É fácil mostrar que  $A$  é um operador positivo e simétrico em  $C_0^\infty(U)$ , portanto, a teoria nos diz que ele terá extensões auto-adjuntas  $A_\Xi$  [17, 18], que satisfazem

$$A_\Xi h_j(\mathbf{x}) = \omega_j^2 h_j(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

sendo  $\{h_j(\mathbf{x})\}$  uma base para o espaço de Hilbert  $L^2[U, d\mu]$  e  $\{\omega_j^2\}$  o respectivo espectro de  $A_\Xi$ . Portanto, tomando uma dessas extensões,  $A_\Xi$ , o bracket (3.9) fica

$$\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} + A_\Xi \Phi \rangle = \langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \rangle + \langle \dot{\Phi}, A_\Xi \Phi \rangle, \quad (3.11)$$

que pode ser reescrito como

$$\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} + A_\Xi \Phi \rangle = \frac{1}{2} [\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \rangle + \langle \ddot{\Phi}, \dot{\Phi} \rangle + \langle \dot{\Phi}, A_\Xi \Phi \rangle + \langle \ddot{\Phi}, A_\Xi \Phi \rangle]. \quad (3.12)$$

Como  $\Phi$  e suas derivadas temporais representam campos reais, o produto interno  $\langle , \rangle$  é sempre real, portanto, podemos trocar os vetores nos brackets. Observe também que, devido ao fato de  $A_\Xi$  ser auto-adjunto, também podemos trocar o operador  $A_\Xi$  no bracket. Levando tudo isso em consideração, a equação (3.12) fica

$$\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} + A_\Xi \Phi \rangle = \frac{1}{2} [\langle \dot{\Phi}, \ddot{\Phi} \rangle + \langle \ddot{\Phi}, \dot{\Phi} \rangle + \langle \dot{\Phi}, A_\Xi \Phi \rangle + \langle \ddot{\Phi}, A_\Xi \Phi \rangle]$$

<sup>3</sup> É um fato conhecido na teoria lagrangiana de que podem haver muitos outros lagrangianos que podem dar as mesmas equações de movimento com energias e momentos diferentes, no entanto, devido a que estamos considerando sistemas conservativos, pode ser provado que qualquer lagrangiano da forma (3.5), que produz as mesmas equações de movimento, tem a mesma energia associada.

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \langle \dot{\Phi}, \dot{\Phi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi, A_{\Xi} \Phi \rangle \right], \quad (3.13)$$

a partir da qual deduzimos que a energia associada a cada extensão auto-adjunta deve ser

$$E_{\Xi} = \frac{1}{2} \langle \dot{\Phi}, \dot{\Phi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Phi, A_{\Xi} \Phi \rangle. \quad (3.14)$$

Este resultado está de acordo com o obtido em [19], com a única diferença de que ali, a “energia” é definida como  $2E_{\Xi}$ . O momento canônico pode ser deduzido comparando nossa equação de movimento com a forma canônica (3.8). Como o momento é uma variável de calibre, sua forma geral é

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \dot{\Phi} + \frac{\delta \Lambda}{\delta \Phi}, \quad (3.15)$$

onde  $\Lambda$  é qualquer funcional da forma  $\Lambda[\Phi(\mathbf{x}, t)]$ . Usaremos o calibre  $\Lambda = 0$ , para que nossa abordagem esteja de acordo com o momento canônico para espaços planos (Minkowsky).

Até agora, construímos uma abordagem para associar uma energia e um momento ao campo escalar em um espaço-tempo estático globalmente hiperbólico, que satisfaz a equação (3.1). Basta conhecer todas as extensões auto-adjuntas do operador  $A$ , e a energia e o momento são calculados com as equações (3.14) e (3.15). Para ver como nosso método funciona, vamos aplicá-lo ao caso particular de um campo escalar definido em todo o espaço de Minkowsky, onde sabemos que  $A_M = -\nabla^2 + m^2$ . Neste caso, a teoria nos diz que  $A_M$  é essencialmente auto-adjunto [18] e, portanto, possui apenas uma extensão, cujo domínio pode ser definido como

$$\text{Dom}(A_M) = \left\{ \phi(\mathbf{x}) \in L^2 \left[ \mathbb{R}^3 \right] / (\phi, \nabla \phi) \rightarrow 0, \text{ quando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \right\}. \quad (3.16)$$

A base auto-adjunta dessa extensão para o espaço de Hilbert  $L^2 \left[ \mathbb{R}^3 \right]$  é a base contínua de Fourier  $h_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ , com seu respectivo espectro  $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + m^2$ . Se calcularmos a energia associada a esta extensão com a fórmula (3.14) obteremos

$$E_M = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \dot{\Phi}^2 d^3x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( -\Phi \nabla \cdot \nabla \Phi + m^2 \Phi^2 \right) d^3x. \quad (3.17)$$

Ao integrar por partes, e levando em consideração as condições de contorno expressas em (3.16), essa equação pode ser reduzida para

$$E_M = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \dot{\Phi}^2 + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + m^2 \Phi^2 \right) d^3x, \quad (3.18)$$

que é a energia usual para o campo escalar de Minkowsky calculada por outros métodos [16].

### 3.1.1 Quantização canônica via extensões auto-adjuntas

O processo de segunda quantização do campo é realizado expandindo o campo e seu momento canônico numa base completa  $\{h_j(\mathbf{x})\}$  do espaço de Hilbert  $L^2[U, d\mu]$ , uma vez que a expansão é feita, os coeficientes da expansão são promovidos a operadores que agem no espaço Hilbert das “partículas”, chamado espaço de Fock  $\mathcal{F}$ . Essa expansão pode ser convenientemente escrita na forma

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \left[ \hat{a}_j e^{-i\omega_j t} h_j(\mathbf{x}) + \hat{a}_j^\dagger e^{i\omega_j t} h_j(\mathbf{x})^* \right], \quad (3.19)$$

$$\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = -i \sum_j \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \left[ \hat{a}_j e^{-i\omega_j t} h_j(\mathbf{x}) - \hat{a}_j^\dagger e^{i\omega_j t} h_j(\mathbf{x})^* \right], \quad (3.20)$$

onde  $\hat{a}_j^\dagger$  e  $\hat{a}_j$  são interpretados como operadores de criação e aniquilação de “quantas” em cada modo  $j$  do campo. A quantização do campo é realizada impondo as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{x}', t)] = i \delta^{n-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\hat{\Phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Phi}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (3.21)$$

Estas relações de comutação implicam relações de comutação para  $\hat{a}_j^\dagger$  e  $\hat{a}_j$ , dadas por

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [\hat{a}_j, \hat{a}_k] = [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0. \quad (3.22)$$

O operador hamiltoniano é construído a partir da energia (3.14) e do momento canônico (3.15),

$$\hat{H}_\Xi = \frac{1}{2} \langle \hat{\Pi}, \hat{\Pi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{\Phi}, A_\Xi \hat{\Phi} \rangle. \quad (3.23)$$

Não devemos interpretar  $A_\Xi$  como se estivesse agindo sobre  $\hat{\Phi}$ , pois são entidades que vivem em diferentes espaços de Hilbert:  $A_\Xi, \langle, \rangle \in L^2[U, d\mu]$ , e  $\hat{\Phi}, \hat{\Pi} \in \mathcal{F}$ . Na verdade  $A_\Xi \hat{\Phi}$  deve ser interpretado como

$$A_\Xi \hat{\Phi} = \sum_j \frac{1}{\sqrt{2\omega_j}} \left[ \hat{a}_j e^{-i\omega_j t} A_\Xi h_j(\mathbf{x}) + \hat{a}_j^\dagger e^{i\omega_j t} A_\Xi h_j(\mathbf{x})^* \right]. \quad (3.24)$$

Vimos que, no caso de Minkowsky, existe apenas uma extensão auto-adjunta, cuja base é a de Fourier e sabemos, pela quantização usual, que nessa base o hamiltoniano (3.23) pode ser expresso como [20]

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \hat{a}_\mathbf{k}^\dagger \hat{a}_\mathbf{k} + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right] \omega_\mathbf{k}. \quad (3.25)$$

Dessa maneira, sem considerar o problema da energia infinita do vácuo, a quantização do campo escalar em Minkowsky pode ser interpretada como um conjunto infinito de osciladores harmônicos, onde  $\hat{a}_\mathbf{k}$  ( $\hat{a}_\mathbf{k}^\dagger$ ) aniquilam (criam) “quantas”, que são interpretados em QFT como partículas de momento  $\mathbf{k}$ . No entanto, a questão que surge

aqui é: acontece o mesmo para um espaço-tempo estático e curvo? Ou ainda, podemos expressar o hamiltoniano (3.23) como uma soma infinita de osciladores harmônicos, independentemente da natureza de  $A_{\Xi}$ ? A seguir, provaremos que a forma do hamiltoniano (3.23) é independente do tipo de extensão auto-adjunta, quando este é expresso em função de  $\hat{a}_j$  e  $\hat{a}_j^{\dagger}$ . Antes de fazer isso, vejamos alguns fatos importantes para ter em conta:

1. Do fato de  $A_{\Xi}$  ser positivo, pode-se definir  $\sqrt{A_{\Xi}}$  atuando sobre qualquer elemento  $\phi$  no espaço Hilbert  $L^2[U, d\mu]$  como sendo:

$$\sqrt{A_{\Xi}}\phi = \sum_j \sqrt{\lambda_j} c_j \xi_j, \quad \phi = \sum_j c_j \xi_j \in L^2[U, d\mu], \quad (3.26)$$

onde  $\lambda_j$  é o espectro de  $A_{\Xi}$  associado a sua base auto-adjunta  $\xi_j$ . Note então que, para todo  $\phi, \psi \in L^2[U, d\mu]$ ,

$$\langle \psi, A_{\Xi}\phi \rangle = \langle \sqrt{A_{\Xi}}\psi, \sqrt{A_{\Xi}}\phi \rangle. \quad (3.27)$$

2. Como a forma de  $A_{\Xi}$  não depende de quantidades complexas, e também, como seu espectro é real, de (3.10) é imediato que:

$$A_{\Xi}h_j(\mathbf{x})^* = \omega_j^2 h_j(\mathbf{x})^*, \quad (3.28)$$

ou seja,  $\{h_j(\mathbf{x})^*\}$  representa a mesma base auto-adjunta  $\{h_j(\mathbf{x})\}$ . Este resultado é trivial para o caso em que  $h_j(\mathbf{x})$  é real. Para quando  $h_j(\mathbf{x})$  é complexo, um exemplo onde isto pode ser visto, é no caso particular de Minkowsky, onde sabemos que a base auto-adjunta é:  $h_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , mas,  $h_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})^* = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = h_{-\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ .

3. Pelo fato expresso em 2), segue que  $h_j(\mathbf{x})$  e  $h_j(\mathbf{x})^*$  pertencem à mesma base, e satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\langle h_j, h_k \rangle = \langle h_k^*, h_j^* \rangle = \delta_{jk} \quad \text{e} \quad \langle h_j^*, h_k \rangle = \langle h_k^*, h_j \rangle. \quad (3.29)$$

Com esses resultados, podemos expandir o hamiltoniano (3.23) em qualquer base auto-adjunta  $h_j(\mathbf{x})$ , obtendo:

$$H_{\Xi} = \frac{1}{4} \sum_j \sum_k \left[ \left( \sqrt{\omega_j \omega_k} \langle h_j, h_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\omega_j \omega_k}} \langle h_j^*, A_{\Xi} h_k^* \rangle \right) \left( \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_k e^{i(\omega_j - \omega_k)t} + \text{h.c.} \right) - \left( \sqrt{\omega_j \omega_k} \langle h_j^*, h_k \rangle - \frac{1}{\sqrt{\omega_j \omega_k}} \langle h_j, A_{\Xi} h_k^* \rangle \right) \left( \hat{a}_j \hat{a}_k e^{-i(\omega_j + \omega_k)t} + \text{h.c.} \right) \right]. \quad (3.30)$$

Utilizando os 3 fatos expostos anteriormente, e com a ajuda das relações de comutação (3.22), obtemos que este hamiltoniano pode ser reduzido à

$$\hat{H}_{\Xi} = \sum_j \omega_j \left( \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right), \quad (3.31)$$

que é um hamiltoniano do tipo oscilador harmônico.

### 3.2 AdS como uma "caixa" em ESU

Como *AdS* é um espaço globalmente não hiperbólico, não podemos aplicar diretamente a abordagem anterior de segunda quantização para espaços-tempos estáticos. No entanto, sabemos que *AdS* está relacionado a *ESU* (*Einstein-Static-Universe*) por meio de uma transformação conforme, que pode ser expressa na forma

$$ds_{AdS_n}^2 = w(\rho)^{-2} ds_{ESU}^2, \quad (3.32)$$

com  $w(\rho) = \cos \rho$  e o elemento de linha de *ESU* descrito por

$$ds_{ESU}^2 = -dt^2 + L^2 \left( d\rho^2 + \sin^2 \rho d\Omega_{n-2}^2 \right). \quad (3.33)$$

Como o modelo que estudamos é conformemente invariante, a transformação (3.32) não altera a forma das equações do movimento. Portanto, devido ao fato de num espaço-tempo de dimensão  $n$ , o campo escalar possuir unidades  $[\Phi] = L^{1-\frac{n}{2}}$ , as soluções para *ESU<sub>n</sub>* podem ser construídas a partir das soluções obtidas em *AdS<sub>n</sub>* da forma [8]

$$\Phi^{ESU} = w^{1-\frac{n}{2}} \Phi^{AdS}. \quad (3.34)$$

Como  $\Phi^{AdS}$  é dada por (2.29), as soluções para *ESU* podem ser expressas como

$$\Phi^{ESU}(t, \rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \frac{\csc^{n/2-1} \rho}{L^{(n-1)/2}} \sum_i \phi_i^{AdS}(t, \rho) Y_i(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}), \quad (3.35)$$

da qual podemos deduzir

$$\left( \frac{\partial \Phi^{ESU}}{\partial \rho} \cos \theta - \Phi^{ESU} \sin \theta \right) \Big|_{\rho=\pi/2} = \frac{1}{L^{(n-1)/2}} \sum_i \left( \frac{\partial \phi_i^{AdS}}{\partial \rho} \cos \theta - \phi_i^{AdS} \sin \theta \right) \Big|_{\rho=\pi/2} Y_i. \quad (3.36)$$

No capítulo anterior, encontramos que as dinâmicas possíveis para o nosso modelo em *AdS* podem ser descritas por extensões auto-adjuntas positivas  $A_{\Xi}^{(i)}$  com  $\Xi \in U(1)$ , que satisfazem as condições de contorno (2.75). A partir de (2.75) e (3.36) deduzimos então que

$$\left( \frac{\partial \Phi^{ESU}}{\partial \rho} \cos \theta - \Phi^{ESU} \sin \theta \right) \Big|_{\rho=\pi/2} = 0. \quad (3.37)$$

Este resultado está de acordo com o obtido em [8], onde a mesma relação foi obtida para os casos particulares:  $\theta = 0, \pi/2$ , em  $n = 4$ . No entanto, a equação (3.37) mostra que isso é válido para qualquer extensão auto-adjunta e, portanto, a dinâmica do modelo em *ESU* também é descrita pelo mesmo grupo de extensões auto-adjuntas

$U(1)$  de  $AdS$ . Dessa forma, a dinâmica do modelo conforme em  $AdS$  é totalmente equivalente à dinâmica numa “casca esférica” de raio  $\pi L/2$  em  $ESU$ , pelo menos desde um ponto de vista clássico.

A equivalência entre esses modelos nos permite aplicar a abordagem desenvolvida na seção anterior para implementar o processo de segunda quantização, dado que  $ESU$  é estático e globalmente hiperbólico. A dinâmica do campo nessa “casca esférica” em  $ESU$  será determinada por equações de movimento na forma

$$\ddot{\Phi}^{ESU} + A_{\Xi} \Phi^{ESU} = 0, \quad (3.38)$$

onde  $A_{\Xi}$  é uma extensão auto-adjunta com  $\Xi \in U(1)$ . Observe que a invariância conforme não afeta o espectro das extensões, o espectro para  $ESU$  será o mesmo que foi obtido em  $AdS$ . Aplicando a segunda quantização, obtemos que o hamiltoniano deste sistema é

$$\hat{H}_{\Xi}^{ESU} = \sum_j \omega_j^{AdS} \left( \hat{a}_j^{\dagger} \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right). \quad (3.39)$$

A construção de qualquer estado de Fock  $|\psi\rangle$  pode ser feita a partir do estado de vácuo  $|0\rangle$ , da maneira usual, como é feita na QFT. Note que o estado de vácuo dependerá da escolha da extensão auto-adjunta, o que se traduz fisicamente em impor condições de contorno nas “paredes” da casca esférica. Essa dependência do estado de vácuo com as condições de contorno impostas na fronteira é algo que pode ser interpretado sob a perspectiva da correspondência  $AdS/CFT$ . Por exemplo, vamos considerar o caso particular  $n = 5$ ; é possível mostrar, usando o sistema de coordenadas de Poincaré, que o espaço de Minkowsky 4-dimensional (onde nós moramos) pode ser considerado como a fronteira conforme de  $AdS_5$  (“parede da casca”). Portanto, uma condição de Dirichlet  $\Phi|_{\text{fronteira}} = 0$ , não seria detectada por nós que moramos na borda, já que o campo é nulo. Portanto, dado que esta condição de contorno define uma extensão, todas as partículas criadas no bulk a partir do estado de vácuo associado a essa extensão nunca poderiam atravessar a fronteira para chegar até nós.

## 4 Análise espectral das extensões

No capítulo 2, conseguimos descrever as extensões auto-adjuntas do operador  $A$  por meio de condições de contorno. No entanto, como é sabido, cada extensão auto-adjunta tem autofunções e, portanto, um espectro. Para encontrar o espectro, aplicaremos a condição de contorno geral (2.75) na solução  $\phi(\rho)$  dada na equação (2.56).

Para começar, primeiro observe que a solução  $\phi(\rho)$  pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\phi(\rho) = \cos \rho \sin^p \rho F_1 \left( \frac{p-k+1}{2}, \frac{p+k+1}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right); \quad p = l + \frac{n-2}{2}. \quad (4.1)$$

Observe que  $p \geq 1$ , só pode ser inteiro ou semi-inteiro, dado que  $n$  e  $l$  só podem assumir valores inteiros. O comportamento assintótico de  $\phi(\rho)$  e  $\phi'(\rho)$  em  $\rho = (\pi/2)^-$  é [7]

$$\begin{aligned} \phi(\rho) \sim & \frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left( p + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right)} - \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma \left( p + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{p-k}{2} \right) \Gamma \left( \frac{p+k}{2} \right)} (\cos \rho) - \\ & \frac{(k^2 + p - p^2)\sqrt{\pi} \Gamma \left( p + \frac{1}{2} \right)}{2\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right)} (\cos \rho)^2; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \phi'(\rho) \sim & \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma \left( p + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{p-k}{2} \right) \Gamma \left( \frac{p+k}{2} \right)} + \left[ \frac{\sqrt{\pi}(1 + 3p + k^2 - p^2)\Gamma \left( p + \frac{1}{2} \right)}{2\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right)} + \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{\pi}(k-p-1)(k+p+1)(1-k^2+p+p^2)\Gamma \left( p + \frac{3}{2} \right)}{4(1+2p)\Gamma \left( \frac{3-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{3+k+p}{2} \right)} \right] (\cos \rho). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Com esta informação, teremos que a condição de contorno (2.75) se traduz em

$$\frac{2 \cos \theta}{\Gamma \left( \frac{p-k}{2} \right) \Gamma \left( \frac{p+k}{2} \right)} = \frac{\sin \theta}{\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right)}. \quad (4.4)$$

Esta equação é muito relevante, porque é uma relação funcional  $k(\theta)$  que vincula o espectro com a extensão. Por exemplo, para a extensão Dirichlet ( $\theta = \pm\pi/2$ ), temos

$$\frac{1}{\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right)} = 0. \quad (4.5)$$

Tomando  $k > 0$ ,  $\Gamma \left( \frac{1+k+p}{2} \right) \neq 0$  e, portanto, (4.5) é reduzida à

$$\frac{1}{\Gamma \left( \frac{1-k+p}{2} \right)} = 0. \quad (4.6)$$

Aqui podemos usar a seguinte identidade:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)}{\pi} \sin(\pi z). \quad (4.7)$$

Note que  $1/\Gamma(z)$  é uma função analítica cujos zeros estão em  $z = -m$ , com  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Com isso, deduzimos que os únicos  $k$  que satisfazem (4.6) são

$$\frac{1-k+p}{2} = -m. \quad (4.8)$$

Isolando  $k$  finalmente obtemos o espectro da extensão Dirichlet

$$k_m^{(D)} = 2m + p + 1. \quad (4.9)$$

Com um procedimento análogo, obtemos o espectro da extensão Neumann ( $\theta = 0$ ),

$$k_m^{(N)} = 2m + p. \quad (4.10)$$

Observe que uma característica importante desses dois espectros é que eles são distribuídos linearmente, ou seja:

$$\Delta k_m^{(D,N)} \equiv k_{m+1}^{(D,N)} - k_m^{(D,N)} = 2. \quad (4.11)$$

Infelizmente, não podemos ter uma fórmula explícita para as outras extensões, devido à complexidade para resolver a equação (4.4). No entanto, podemos estudar a estrutura e distribuição do seu espectro. Isso é facilitado se definirmos, de (4.4), a função

$$\theta(k) = \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\left(\frac{1+k+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-k}{2}\right)} \right]. \quad (4.12)$$

Observe que  $\theta(k)$  é uma função cujos zeros são precisamente o espectro de Neumann:  $\theta(k_m^{(N)}) = 0$ . Além disso, possui uma descontinuidade não essencial no espectro Dirichlet, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow k_m^{(D)+}} \theta(k) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow k_m^{(D)-}} \theta(k) = -\frac{\pi}{2}. \quad (4.13)$$

Observe também que, a partir de  $\theta(k)$ , podemos definir:

$$\theta_c \equiv \theta(0) = \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)^2} \right]. \quad (4.14)$$

Chamamos essa extensão de extensão crítica ( $\theta_c$ ). Ela é a única extensão que tem modo fundamental com energia nula.<sup>1</sup> A figura (Fig. 1) mostra um Plot de  $\theta(k)$ , onde todas

<sup>1</sup> O qualificativo de "crítico" ficará mais claro no próximo capítulo, quando estudarmos a termodinâmica.

essas características mencionadas acima podem ser observadas. Podemos identificar o espectro das outras extensões ( $k_m^{(\theta)}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) como a abscissa dos pontos de interseção das linhas horizontais ( $\theta = \text{const.}$ ) com a função  $\theta(k)$ . Para a extensão crítica, temos, por definição,

$$k_0^{(\theta_c)} = 0. \quad (4.15)$$

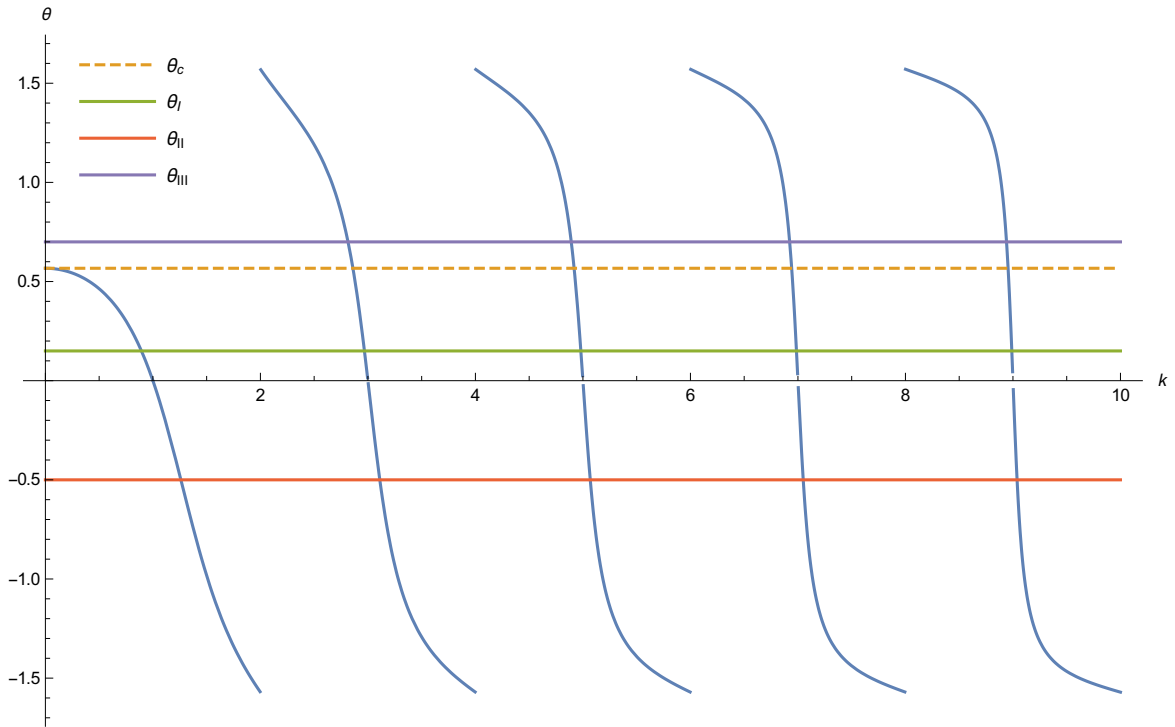


Figura 1 – Função  $\theta(k)$  para  $p = 1$ .

Vamos mostrar dois fatos sobre a função  $\theta(k)$  que definem a estrutura e a distribuição do espectro das outras extensões. Esses fatos são:

1.  $\theta(k)$  é diferenciável e estritamente decrescente nos intervalos abertos:

$$I = \left(k_0^{(\theta_c)}, k_0^{(D)}\right) \text{ e } I_m = \left(k_m^{(D)}, k_{m+1}^{(D)}\right), \quad m \in 0, 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

**Demonstração.** É conveniente fazer a seguinte mudança de variável:

$$k \rightarrow z = \frac{k - p - 1}{2}. \quad (4.17)$$

Assim, a função  $\theta(k)$  se torna

$$\theta(k) \rightarrow \tilde{\theta}(z) = \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma(z + p + 1)}{\Gamma\left(z + p + \frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(-z)}{\Gamma\left(-z - \frac{1}{2}\right)} \right],$$

$$z \in I = \left(-\frac{p+1}{2}, 0\right) \text{ ou } I_m = (m, m+1). \quad (4.18)$$

A diferenciabilidade de  $\tilde{\theta}(z)$  é garantida uma vez que as funções:  $1/\Gamma\left(-z - \frac{1}{2}\right)$  e  $\Gamma(-z)$  são diferenciáveis em  $I$  e  $I_m$ . Para provar que a função é estritamente decrescente em  $I$  ou  $I_m$ , usaremos o critério da derivada. A derivada da função  $\tilde{\theta}(z)$  é dada por:

$$\tilde{\theta}'(z) = \frac{f'(z)}{1 + f(z)^2}; \quad f(z) \equiv \frac{2\Gamma(z+p+1)}{\Gamma\left(z+p+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(-z)}{\Gamma\left(-z-\frac{1}{2}\right)}, \quad (4.19)$$

portanto, pelo critério da derivada, a função é estritamente decrescente no intervalo  $I_m$  se

$$\tilde{\theta}'(z) < 0 \rightarrow f'(z) < 0, \quad \forall z \in I \text{ ou } I_m. \quad (4.20)$$

Temos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \psi(z+p+1) + \psi\left(-z - \frac{1}{2}\right) - \psi\left(z+p+\frac{1}{2}\right) - \psi(-z) \quad (4.21)$$

onde  $\psi(s)$  é a função digamma definida por:  $\psi(s) \equiv \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ , que tem uma representação em serie dada por

$$\psi(s) = -\gamma + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+s} \right); \quad s \neq 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Usando esta representação, podemos expressar a equação (4.21) como sendo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(2i+p+\frac{1}{2}\right) \left(z+\frac{p+1}{2}\right)}{(i-z) \left(i+z+p+\frac{1}{2}\right) \left(i-z-\frac{1}{2}\right) (i+z+p+1)}; \quad z \neq -\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}. \quad (4.23)$$

A partir dessa expressão, é fácil ver que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \begin{cases} < 0; \forall z \in \left(-\frac{p+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(m, m+\frac{1}{2}\right) \\ > 0; \forall z \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ou } \left(m+\frac{1}{2}, m+1\right) \end{cases}. \quad (4.24)$$

Examinemos a função  $f(z)$ , que é composta por duas funções: uma que é positiva e se comporta bem nos intervalos  $I$  e  $I_m$  e, por outro lado, temos a outra função  $\Gamma(-z)/\Gamma\left(-z - \frac{1}{2}\right)$ , que exhibe o seguinte comportamento:

$$\frac{\Gamma(-z)}{\Gamma\left(-z - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{\Gamma\left(z + \frac{3}{2}\right)}{\pi} \Gamma(-z) \cos(\pi z) =$$

a)

$$\begin{cases} > 0; \forall z \in \left(-\frac{p+1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ou } \left(m, m + \frac{1}{2}\right) \\ 0; z = -\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \\ < 0; \forall z \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ ou } \left(m + \frac{1}{2}, m + 1\right) \end{cases} \quad (4.25)$$

As equações (4.24) e (4.25) implicam necessariamente que

$$f'(z) < 0, \quad \forall z \in I \text{ ou } I_m. \quad (4.26)$$

2. O comportamento assintótico de  $\theta(k)$  para valores  $k$  muito grandes é descrito por:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \theta(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \forall k \in \left(k_m^{(D)}, k_m^{(N)}\right) \\ -\frac{\pi}{2}, & \forall k \in \left(k_m^{(N)}, k_{m+1}^{(D)}\right) \end{cases}. \quad (4.27)$$

**Demonstração.** Usando a mudança de variável proposta em (4.17), o limite anterior é equivalente à

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(z) = \begin{cases} \infty, & \forall z \in \left(m, m + \frac{1}{2}\right) \\ -\infty, & \forall z \in \left(m + \frac{1}{2}, m + 1\right) \end{cases}. \quad (4.28)$$

A parte de  $f(z)$  que é positiva e bem comportada exibe o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2\Gamma(z + p + 1)}{\Gamma\left(z + p + \frac{1}{2}\right)} = \infty. \quad (4.29)$$

Combinando isso com a equação (4.25), obtemos o resultado (4.27).

A partir do primeiro item anterior, deriva-se o fato de haver uma bijeção entre os conjuntos

$$I \longleftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \theta_c\right) \quad \text{e} \quad I_m \longleftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.30)$$

o que nos permite garantir a existência da função inversa:  $\theta^{-1}(k) = k(\theta)$ , nestes intervalos. Além disso, como  $\theta(k)$  é estritamente decrescente nesses intervalos, temos que

$$\frac{d\theta}{dk} < 0 \rightarrow \frac{dk}{d\theta} < 0. \quad (4.31)$$

Esses fatos nos permitem classificar as extensões em três grupos. Por exemplo, definiremos extensões do tipo II como aquelas que estão no intervalo

$$0 > \theta > -\frac{\pi}{2} \rightarrow \text{Tipo II}. \quad (4.32)$$

Observe que as equações (4.31) e (4.32) implicam que essas extensões satisfazem

$$k_m^{(N)} < k_m^{(II)} < k_m^{(D)}. \quad (4.33)$$

Além disso, a partir do segundo item e do fato de o espectro ser determinado pelos pontos de interseção de  $\theta(k)$  com as linhas horizontais, podemos afirmar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k_m^{(II)} = k_m^{(N)}. \quad (4.34)$$

Uma análise análoga para os tipos I e III pode ser realizada. Os resultados podem ser resumidos na tabela (Tab.1).

Outro fato importante a ser observado é que, diferentemente das extensões de Dirichlet e Neumann, as outras extensões não têm uma distribuição linear no espectro, ou seja,

$$\Delta k_m^{(\theta)} = k_{m+1}^{(\theta)} - k_m^{(\theta)} \text{ não é constante.} \quad (4.35)$$

A figura (Fig. 2) mostra esse comportamento para algumas extensões e, além disso, é possível evidenciar o comportamento assintótico estabelecido na tabela (Tab.1).

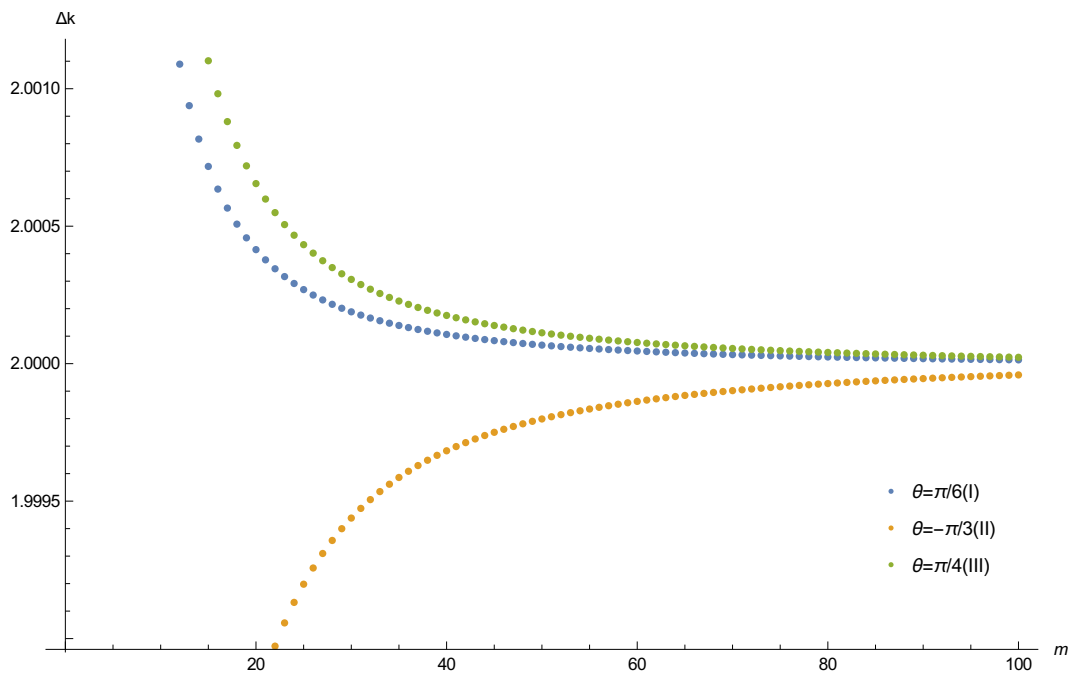


Figura 2 – Distribuição do espectro para algumas extensões para  $p = 1$ .

Tabela 1 – Classificação das extensões de acordo com seu espectro

	Tipo I	Tipo II	Tipo III
Definição	$\theta_c > \theta > 0$	$0 > \theta > -\pi/2$	$\pi/2 > \theta > \theta_c$
Intervalo	$k_m^{(\theta_c)} < k_m < k_m^{(N)}$	$k_m^{(N)} < k_m < k_m^{(D)}$	$k_m^{(D)} < k_m < k_{m+1}^{(\theta_c)}$
Limite assintótico ( $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m$ )	$k_m^{(N)}$	$k_m^{(N)}$	$k_{m+1}^{(N)}$

## 5 Análise termodinâmica do modelo

O fato de AdS poder ser compactado na metade de ESU e o fato da dinâmica do campo escalar acoplado conformemente à curvatura não ser afetada por essa compactação, motiva um estudo termodinâmico do modelo a partir de um tratamento mecânico-estatístico prévio [21]. Como o AdS tem um volume infinito, podemos associar um volume efetivo, derivado a partir da compactação do AdS em ESU. Esse volume vai ser igual ao volume de uma casca esférica de raio  $R = \pi L/2$  em ESU,

$$V_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{2} \times \text{Volume da (n-1)-esfera} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} L^{n-1}. \quad (5.1)$$

O tratamento estatístico é facilitado considerando o sistema como um gás de partículas bosônicas não massivas que, como é conhecido, segue a estatística de Bose-Einstein. Usaremos o ensemble grande-canônico, onde a função de partição é calculada na forma

$$\ln Z = - \sum_j g_j \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}), \quad (5.2)$$

e o número médio de partículas no nível de energia  $j$  é dado por

$$\langle n_j \rangle = \frac{g_j}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1}, \quad (5.3)$$

sendo  $\beta = 1/T$  e  $g_j$  a degenerescência do nível de energia  $j$ . O número total de partículas  $\mathcal{N}$  é obtido somando o número médio de partículas em cada nível de energia:

$$\mathcal{N} = \sum_j \langle n_j \rangle = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} - 1}. \quad (5.4)$$

É sabido que, para gases bosônicos não massivos, o potencial químico deve ser zero ( $\mu = 0$ ), o que é uma consequência direta da não conservação do número de partículas no volume (os bósons interagem com os arredores do volume que os contém, [21, 22]). A não conservação do número de partículas  $\mathcal{N}$  faz que a definição usual do limite termodinâmico:

$$\mathcal{N} \rightarrow \infty, V_{\text{eff}} \rightarrow \infty, \frac{\mathcal{N}}{V_{\text{eff}}} = \text{finito}, \quad (5.5)$$

para esse sistema, seja um pouco confusa. No entanto, seguindo a ideia exposta em [21], podemos considerar o limite quase-termodinâmico, o que definido por:

$$V_{\text{eff}} \text{ muito grande com } T \text{ fixo e } \mu = 0. \quad (5.6)$$

Observe que este limite é naturalmente compatível com a finitude do AdS ( $L$  finito). Feitas estas considerações, todas as variáveis termodinâmicas de interesse podem ser derivadas a partir da função de partição (5.2):

$$U = T^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln Z); \quad S = \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z); \quad P = \frac{\partial}{\partial V} (T \ln Z), \quad (5.7)$$

as quais satisfazem uma equação de estado determinada por [22]:

$$PV = T \ln Z(T, V). \quad (5.8)$$

## 5.1 Espectro e degenerescência

No capítulo anterior, nós determinamos o espectro das extensões auto-adjuntas do operador que governa a dinâmica do campo escalar acoplado conformemente à curvatura no  $AdS_n$ . Como esse operador depende dos harmônicos, seu espectro também dependerá. O espectro nos permite construir os modos do campo, que serão determinados pelos números quânticos  $m, l, s$ , onde  $m$  rótula o espectro e  $l, s$  são determinados pelo harmônico. O número de valores que  $s$  pode assumir dependerá de  $l$ , e é determinado pela equação (2.25). Dessa maneira, cada extensão auto-adjunta  $(\theta)$  terá modos associados  $\Phi_{m,l,s}^{(\theta)}$ , que são expressos por:

$$\Phi_{m,l,s}^{(\theta)} = \frac{\sin^p \rho}{L^{(n-1)/2} \tan^{n/2-1} \rho} F_1 \left( \frac{p + k_{m,l}^{(\theta)}}{2}, \frac{p - k_{m,l}^{(\theta)}}{2}, p + \frac{1}{2}; \sin^2 \rho \right) Y_l^s. \quad (5.9)$$

Do ponto de vista mecânico-estatístico, cada um desses modos  $\Phi_{m,l,s}^{(\theta)}$  determina um micro-estado do sistema com energia

$$\epsilon_{m,l}^{(\theta)} = \frac{k_{m,l}^{(\theta)}}{L}. \quad (5.10)$$

Infelizmente os valores  $k_{m,l}^{(\theta)}$  podem ser conhecidos analiticamente apenas para as extensões Dirichlet ( $\theta = \pm\pi/2$ ) e Neumann ( $\theta = 0$ ),

$$\begin{cases} \epsilon_{m,l}^{(D)} = \frac{1}{L} (2m + l + \frac{n}{2}) \\ \epsilon_{m,l}^{(N)} = \frac{1}{L} (2m + l + \frac{n-2}{2}) \end{cases} ; \quad m = 0, 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Porém, sabemos que o número de harmônicos associados ao número quântico  $l$  vem dado pela equação (2.25), isso faz que existam diferentes modos  $\Phi_{m,l,s}^{(\theta)}$  com a mesma energia; ou seja, existe degenerescência. Observe além que, pelo fato do espectro depender somente do  $l$ , a degenerescência é independente da escolha da

extensão  $\theta$ . Usando a equação (2.25), temos então que, para um nível de energia  $\epsilon_{m,l}^{(\theta)}$ , a degenerescência  $g_{m,l}$  será:

$$g_{m,l} = \frac{(2l+n-3)(l+n-4)!}{(n-3)!l!}. \quad (5.12)$$

Assim, a função de partição e o número de partículas para qualquer extensão serão dados por:

$$\ln Z^{(\theta)}(LT) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{m,l} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{\epsilon_{m,l}^{(\theta)}}{LT}} \right], \quad (5.13)$$

$$\mathcal{N}^{(\theta)}(LT) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{m,l}}{e^{\frac{\epsilon_{m,l}^{(\theta)}}{LT}} - 1}. \quad (5.14)$$

No caso das extensões Dirichlet e Neumann, essas expressões podem ser reduzidas a um único somatório. Isso pode ser feito definindo um número quântico  $j$  da forma

$$j \equiv 2m + l; \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.15)$$

Observe que, com esta definição, o espectro de Dirichlet e Neumann pode ser expresso por

$$\begin{cases} \epsilon_j^{(D)} = \frac{1}{L} \left( j + \frac{n}{2} \right) \\ \epsilon_j^{(N)} = \frac{1}{L} \left( j + \frac{n-2}{2} \right) \end{cases}; \quad j = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.16)$$

A degenerescência para o nível de energia  $\epsilon_j$ , pode ser calculada aproveitando o fato de  $j$  ser par ou ímpar é determinado apenas pelo valor de  $l$  (se  $l$  for par (ímpar),  $j$  é par (ímpar)). A degenerescência  $g_j$  do nível  $j$  é calculada fazendo a soma da degenerescência (5.12) sob  $l$ , desde  $l = 0$  até  $l = j$ , com  $l$  percorrendo valores ímpares ou pares. Em ambos os casos, a soma fornece o mesmo valor [4, 21]

$$g_j = \sum_{l \in \{\text{par}/\text{ímpar}\}}^j g_{m,l} = \frac{(j+n-2)!}{(n-2)!j!}. \quad (5.17)$$

Note que esta função de degenerescência tem a forma de um polinômio em  $j$  de grau  $n-2$ ,

$$g_j = \sum_{k=0}^{n-2} a_k j^k, \quad (5.18)$$

onde os  $a_k$  podem ser calculados a partir de

$$\sum_{k=0}^{n-2} a_k j^k = \frac{1}{(n-2)!} \prod_{k=1}^{n-2} (j+k). \quad (5.19)$$

Alguns coeficientes notáveis desse polinômio são

$$a_0 = 1, a_{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}, a_{n-3} = \frac{n-1}{2(n-3)!}. \quad (5.20)$$

Com isso, podemos expressar nossa função de partição e o número de partículas para o caso de Dirichlet e Neumann da seguinte maneira:

$$\ln Z^{(N/D)}(LT) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \left[ - \sum_{j=0}^{\infty} j^k \ln(1 - e^{-\frac{k_j^{(N/D)}}{LT}}) \right], \quad (5.21)$$

$$\mathcal{N}^{(N/D)}(LT) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{e^{\frac{k_j^{(N/D)}}{LT}} - 1} \right]. \quad (5.22)$$

## 5.2 Termodinâmica e extensões auto-adjuntas

Nosso objetivo central é estudar a dependência da termodinâmica nas condições de contorno do sistema, o que resulta na escolha de uma extensão auto-adjunta para o operador  $A$ . A distribuição e a estrutura do espectro das extensões foram estudadas no capítulo anterior, cujos resultados são mostrados na tabela (Tab.1). Os resultados mostram que podemos dividir todas as extensões em 3 grupos, determinadas pelas extensões Dirichlet, Neumann e uma extensão crítica ( $\theta_c$ ), para a qual o valor mais baixo de energia de seu espectro é zero (e seu modo associado é diferente de zero). Desde um ponto de vista puramente mecânico-estatístico nenhuma partícula bosônica pode acessar um nível com energia zero, dado que uma condição necessária na estatística de Bose-Einstein é  $\epsilon_j > \mu = 0$ , portanto, este modo não pode ser considerado no cálculo da função de partição <sup>1</sup>. Portanto, a função de partição e o número de partículas para esta extensão crítica serão:

$$\ln Z_c(LT) = \sum_{m \neq 0} \sum_{l=0}^{\infty} g_{m,l} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{k_{m,l}^{(\theta_c)}}{LT}} \right], \quad (5.23)$$

$$\mathcal{N}_c(LT) = \sum_{m \neq 0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{m,l}}{e^{\frac{k_{m,l}^{(\theta_c)}}{LT}} - 1}. \quad (5.24)$$

A partir dos resultados da tabela (Tab.1) e do fato das funções,

$$- \ln(1 - e^{-\frac{k_{m,l}^{(\theta)}}{LT}}) \text{ e } \frac{1}{e^{\frac{k_{m,l}^{(\theta)}}{LT}} - 1}, \quad (5.25)$$

<sup>1</sup> Este é um caso semelhante ao caso que acontece em uma caixa em Minkoswky com condições de contorno periódicas. A segunda quantização do campo fornece que:  $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ ;  $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ . O modo com energia  $\epsilon_{0,0,0} = 0$ , não é levado em conta na função de partição. No entanto, este não é o caso de partículas massivas onde:  $\epsilon_{0,0,0} \neq 0$ .

serem funções monótonas decrescentes em  $k_{m,l}^{(\theta)}$ , podemos deduzir que a extensão crítica representa uma cota mínima para as outras extensões, no sentido de que a função de partição e o número de partículas para os três grupos de extensões satisfazem

$$\ln Z_c < \ln Z_{III} < \ln Z_D < \ln Z_{II} < \ln Z_N < \ln Z_I, \quad (5.26)$$

$$\mathcal{N}_c < \mathcal{N}_{III} < \mathcal{N}_D < \mathcal{N}_{II} < \mathcal{N}_N < \mathcal{N}_I. \quad (5.27)$$

Podemos analisar o que acontece com a termodinâmica em dois regimes: o regime de baixa temperatura (quântico) e o regime de alta temperatura (clássico). Esses limites serão definidos pelo parâmetro adimensional  $LT$  da seguinte maneira [21]:

$$\begin{cases} 0 < LT \ll 1 & \longrightarrow \text{Limite de baixa temperaturas} \\ LT \gg 1 & \longrightarrow \text{Limite de alta temperaturas} \end{cases}. \quad (5.28)$$

### 5.2.1 Regime de baixa temperatura

No regime de baixa temperatura o modo fundamental domina sobre os outros modos e os efeitos quânticos são mais visíveis. O modo fundamental na função de partição (5.13), será o termo  $m = l = 0$ , que tem degenerescência:  $g_{0,0} = 1$ , para qualquer extensão (exceto o modo crítico onde  $m \neq 0$ ). Desconsiderando os outros modos e tomando a aproximação  $-\ln(1-x) \approx x$ , a função de partição é reduzida a

$$\ln Z^{(\theta)}(LT) = -g_{0,0} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}} \right] = e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}}, \quad 0 < LT \ll 1. \quad (5.29)$$

De um jeito semelhante, desta vez considerando a aproximação:  $x/(1-x) \approx x$ , temos para o número de partículas

$$\mathcal{N}^{(\theta)}(LT) = \frac{g_{0,0}}{e^{\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}} - 1} = e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}}, \quad 0 < LT \ll 1. \quad (5.30)$$

Com a ajuda das equações (5.7), pode-se encontrar as variáveis termodinâmicas, obtendo como resultado

$$U^{(\theta)}(LT) = \frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{L} e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}}, \quad S^{(\theta)}(LT) = \left( 1 + \frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT} \right) e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}}, \quad P^{(\theta)}(L, T) = \frac{T\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} L^{n-1}} e^{-\frac{k_{0,0}^{(\theta)}}{LT}}. \quad (5.31)$$

Observe que toda a termodinâmica dependerá do estado fundamental, que ao mesmo tempo depende do tipo de extensão. Nesse regime de baixa temperatura podemos dizer que a termodinâmica do gás bosônico é suscetível a mudanças nas condições

de contorno do sistema. Na figura (Fig. 3) é mostrado o comportamento de algumas funções de partição para o caso específico  $n = 4$ . Observe que todas elas são maiores que a extensão crítica, tal como indicado pela equação (5.26).

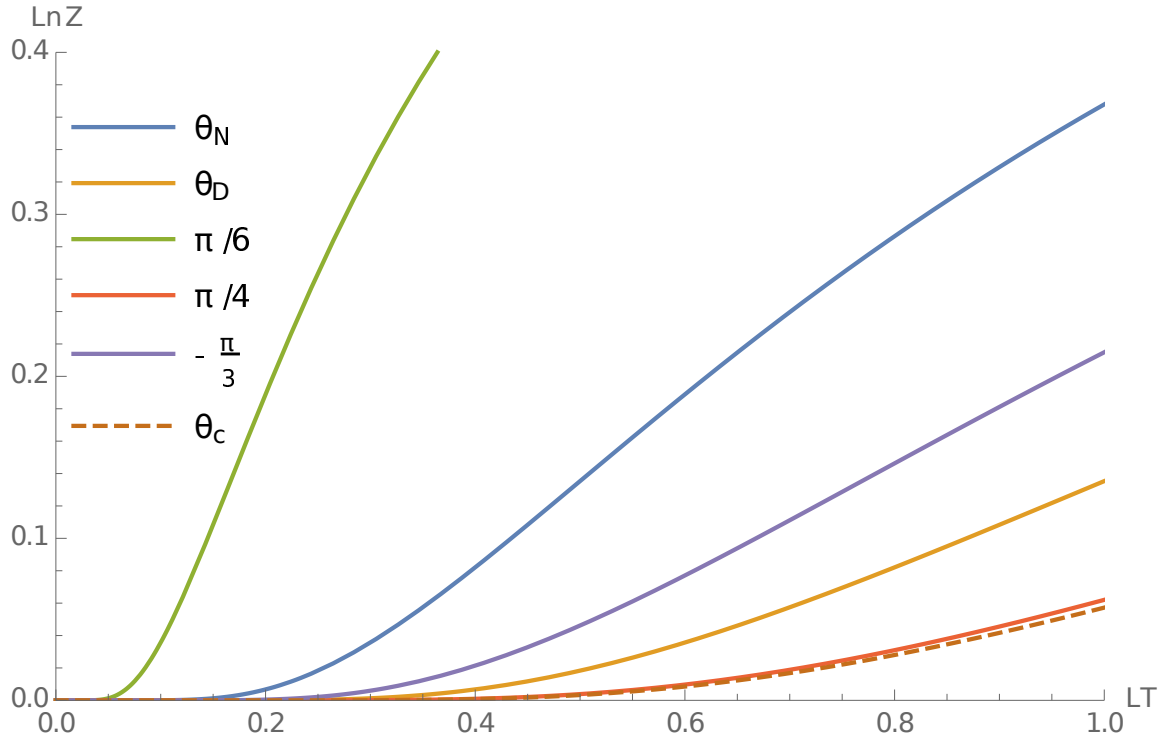


Figura 3 – Comportamento da função de partição das extensões para baixas temperaturas em  $n = 4$ .

### 5.2.2 Regime de altas temperaturas

No regime de alta temperatura ( $LT \gg 1$ ), não podemos desprezar a contribuição dos modos mais energéticos para a função de partição, pois a probabilidade de terem partículas aumenta com a temperatura. Para as extensões de Dirichlet e Neumann, não é difícil calcular as funções da partição e o número de partículas, pois seu espectro é distribuído linearmente ( $\Delta\epsilon_j = 2$ ) e sua função de degenerescência é polinomial. Para as outras extensões, o espectro não é linearmente distribuído ( $\Delta\epsilon_j \neq 2$ ) e nesse caso é difícil calcular uma expressão analítica para suas funções de partição e número de partículas. No entanto, isso não nos impede de construir uma termodinâmica para essas extensões neste regime de temperatura.

Por exemplo, vamos considerar o caso de extensões do tipo II, onde sabemos pela tabela (4) que seu espectro satisfaz

$$k_{m,l}^{(N)} < k_{m,l}^{(II)} < k_{m,l}^{(D)} \implies 0 < \frac{\Delta k_{m,l}^{(II)}}{LT} < \frac{1}{LT}; \quad \Delta k_{m,l}^{(II)} \equiv k_{m,l}^{(II)} - k_{m,l}^{(N)}. \quad (5.32)$$

No regime em questão podemos definir uma primeira aproximação,

$$\frac{1}{LT} \ll 1 \rightarrow \text{Primeira aproximação.} \quad (5.33)$$

Observe, então, que essa primeira aproximação implica na equação (5.32) que

$$\frac{\Delta k_{m,l}^{(II)}}{LT} \simeq 0. \quad (5.34)$$

Além disso, essa aproximação é ainda melhor para os modos de energia mais alta, pois, como mostrado na tabela (Tab.1),

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta k_{m,l}^{(II)} = 0. \quad (5.35)$$

Portanto, nesta primeira aproximação, a função de partição e o número de partículas (5.13) e (5.14), para extensões do tipo II, podem ser perfeitamente aproximadas por

$$\ln Z^{(II)}(LT) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{m,l} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta k_{m,l}^{(II)}}{LT}} e^{-\frac{k_{m,l}^{(N)}}{LT}} \right] \simeq \ln Z^{(N)}(LT), \quad (5.36)$$

$$\mathcal{N}^{(II)}(LT) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{m,l}}{e^{\frac{\Delta k_{m,l}^{(II)}}{LT}} e^{\frac{k_{m,l}^{(N)}}{LT}} - 1} \simeq \mathcal{N}^{(N)}(LT). \quad (5.37)$$

Um raciocínio análogo para as funções da partição e o número de partículas para as extensões do tipo I e III pode ser realizada. Novamente usando os dados fornecidos pela tabela (Tab.1), temos que:

$$k_{m-1,l}^{(D)} < k_{m,l}^{(\theta_c)} < k_{m,l}^{(I)} < k_{m,l}^{(N)} \longrightarrow -\frac{1}{LT} < \frac{\Delta k_{m,l}^{(I)}}{LT} < 0; \quad \Delta k_{m,l}^{(I)} \equiv k_{m,l}^{(I)} - k_{m,l}^{(N)}, \quad (5.38)$$

e

$$k_{m,l}^{(D)} < k_{m,l}^{(III)} < k_{m,l}^{(\theta_c)} < k_{m+1,l}^{(N)} \longrightarrow 0 < \frac{\Delta k_{m,l}^{(III)}}{LT} < \frac{1}{LT}; \quad \Delta k_{m,l}^{(III)} \equiv k_{m,l}^{(III)} - k_{m,l}^{(D)}, \quad (5.39)$$

o que implica, devido a primeira aproximação, que

$$\ln Z^{(I)}(LT) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{m,l} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta k_{m,l}^{(I)}}{LT}} e^{-\frac{k_{m,l}^{(N)}}{LT}} \right] \simeq \ln Z^{(N)}(LT), \quad (5.40)$$

$$\mathcal{N}^{(I)}(LT) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{m,l}}{e^{\frac{\Delta k_{m,l}^{(I)}}{LT}} e^{\frac{k_{m,l}^{(N)}}{LT}} - 1} \simeq \mathcal{N}^{(N)}(LT), \quad (5.41)$$

e

$$\ln Z^{(III)}(LT) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g_{m,l} \ln \left[ 1 - e^{-\frac{\Delta k_{m,l}^{(III)}}{LT}} e^{-\frac{k_{m,l}^{(D)}}{LT}} \right] \simeq \ln Z^{(D)}(LT), \quad (5.42)$$

$$\mathcal{N}^{(III)}(LT) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{m,l}}{e^{\frac{\Delta k_{m,l}^{(III)}}{LT}} e^{\frac{k_{m,l}^{(D)}}{LT}} - 1} \simeq \mathcal{N}^{(D)}(LT). \quad (5.43)$$

Observe que, do jeito como a função da partição e o número de partículas foram definidos para a extensão crítica (5.23), ela pode ser incluída na termodinâmica das extensões do tipo III.

Vimos que, na primeira aproximação (altas temperaturas), as funções da partição e o número de partículas das outras extensões podem ser aproximados pelas de Dirichlet e Neumann. Portanto, precisamos calcular essas duas funções de partição. Para fazer isso, vamos considerar uma segunda aproximação, que vai ser a aproximação contínua de Thomas-Fermi, onde o espaçamento entre os níveis de energia consecutivos,  $\Delta\epsilon_j$ , é pequeno:

$$\Delta\epsilon_j = \frac{1}{L} \ll 1 \quad \rightarrow \text{Segunda aproximação.} \quad (5.44)$$

Note que esta aproximação é compatível com o limite quase-termodinâmico definido em (5.6), portanto essa aproximação só é válida neste limite. Com isso, a função de partição para Dirichlet e Neumann podem ser aproximadas por

$$\ln Z^{(N/D)} = - \sum_j g_j \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_j}) \approx - \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_m} D(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon, \quad (5.45)$$

onde  $D(\epsilon)$  é a densidade de estados e  $\epsilon_0, \epsilon_m$  são a energia do estado fundamental e o valor máximo de energia do espectro respectivamente. A função de degenerescência de Dirichlet e Neumann é dada por (5.18), que pode ser expressa em função dos níveis de energia

$$g(\epsilon_j) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k L^k (\epsilon_j - \epsilon_0)^k. \quad (5.46)$$

A densidade de estados pode ser calculada a partir da degenerescência tomando o limite contínuo,

$$\Delta g_j = \frac{g(\epsilon_{j+1}) - g(\epsilon_j)}{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j} \Delta\epsilon_j \implies dg = g'(\epsilon) d\epsilon = \left[ \sum_{k=1}^{n-2} k L^k a_k (\epsilon - \epsilon_0)^{k-1} \right] d\epsilon, \quad (5.47)$$

onde deduzimos que

$$D(\epsilon) = \sum_{k=1}^{n-2} kL^k a_k (\epsilon - \epsilon_0)^{k-1}. \quad (5.48)$$

Com esses resultados, a função de partição é expressa como

$$\ln Z^{(N/D)} = \sum_{k=1}^{n-2} kL^k a_k \left[ - \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_m} (\epsilon - \epsilon_0)^{k-1} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \right]. \quad (5.49)$$

Podemos fazer a mudança  $\epsilon \rightarrow \epsilon - \epsilon_0$  e, como  $\epsilon_m = \infty$  para ambas as extensões, temos

$$\ln Z^{(N/D)} = \sum_{k=1}^{n-2} ka_k L^k \left[ - \int_0^{\infty} \epsilon^{k-1} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon} e^{\beta\epsilon_0}) d\epsilon \right]. \quad (5.50)$$

Até aqui consideramos apenas a segunda aproximação (5.44) para essas extensões. Se consideramos ademais, a primeira aproximação (5.33) e o fato de que  $\Delta\epsilon_j = 2$  é o mesmo para ambas as extensões, temos

$$\ln Z_D = \ln Z_N = \ln Z = \sum_{k=1}^{n-2} ka_k L^k \left[ - \int_0^{\infty} \epsilon^{k-1} \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \right], \quad (5.51)$$

dado que para ( $LT \gg 1$ ):

$$\begin{cases} e^{\beta\epsilon_0^{(D)}} = e^{\frac{n}{2LT}} \simeq 1 \\ e^{\beta\epsilon_0^{(N)}} = e^{\frac{n-2}{2LT}} \simeq 1 \end{cases}. \quad (5.52)$$

Note-se que essa aproximação é válida apenas na aproximação contínua de Thomas-Fermi (segunda aproximação), onde a contribuição do estado fundamental é ignorada. Se usarmos a aproximação (5.52) diretamente na função de partição (5.21) (sem segunda aproximação), a função diverge.

Descobrimos então que, usando a segunda e a primeira aproximação para as funções de partição Dirichlet e Neumann, elas são iguais e podem ser calculadas por (5.51), que pode ser reescrita de forma mais compacta usando a representação integral da função Zeta de Riemann  $\zeta(s)$ ,

$$\zeta(s) = -\frac{1}{\Gamma(s-1)} \int_0^{\infty} t^{s-2} \ln(1 - e^{-t}) dt; \quad \text{Re } s > 1 \quad (5.53)$$

encontrando que

$$\ln Z = \sum_{k=1}^{n-2} ka_k (LT)^k \Gamma(k) \zeta(k+1). \quad (5.54)$$

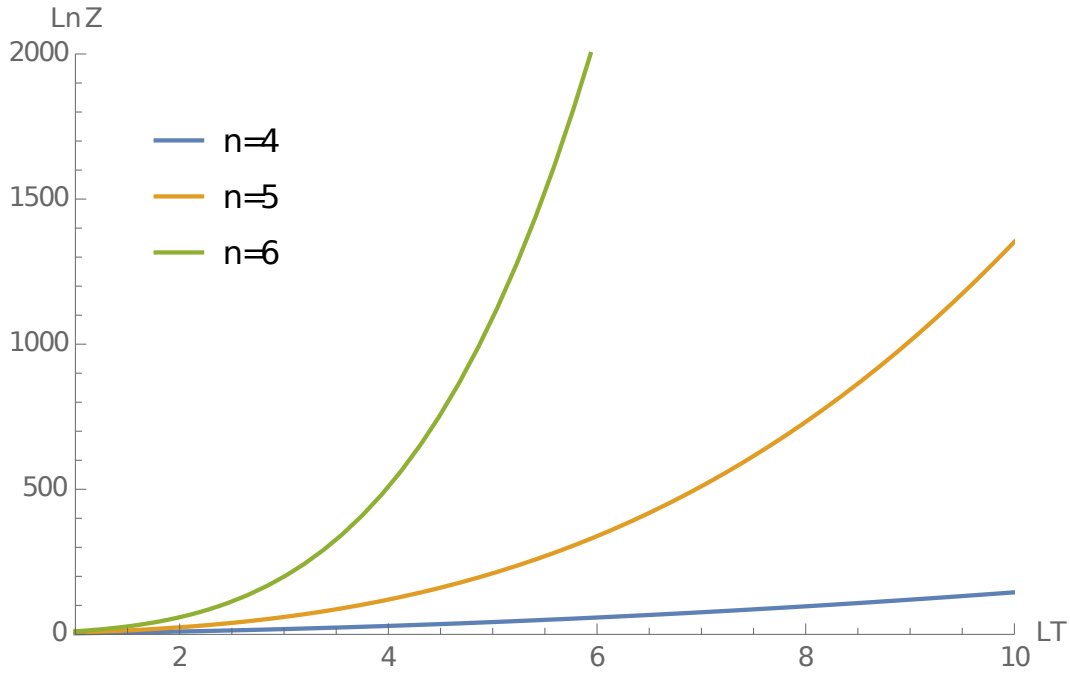


Figura 4 – Comportamento da função de partição  $\ln Z$  para altas temperaturas em dimensões  $n = 4, 5, 6$ .

A figura (Fig. 4) mostra o comportamento de  $\ln Z$  para diferentes dimensões do espaço. Uma análise análoga para o número de partículas  $\mathcal{N}$  produz um resultado semelhante ao da função de partição,

$$\mathcal{N}_D = \mathcal{N}_N = \mathcal{N} = \sum_{k=1}^{n-2} k a_k L^k \left[ \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{k-1}}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \right]. \quad (5.55)$$

Para este caso, usamos outra representação integral da função  $\zeta(s)$  dada por

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt; \quad \text{Re } s > 1, \quad (5.56)$$

para, finalmente, obter

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^{n-2} k a_k (LT)^k \Gamma(k) \zeta(k). \quad (5.57)$$

Tabela 2 – Comportamento das funções da partição e número de partículas das extensões em altas temperaturas.

Extensão	Primeira Aprox. $\left(\frac{1}{LT} \ll 1\right)$	Primeira + Segunda Aprox. $\left(\frac{1}{LT} \ll 1, \frac{1}{L} \ll 1\right)$
Neumann	$\ln Z^{(N)}, \mathcal{N}^{(N)}$	$\ln Z, \mathcal{N}$
Dirichlet	$\ln Z^{(D)}, \mathcal{N}^{(D)}$	$\ln Z, \mathcal{N}$
Tipo I	$\ln Z^{(N)}, \mathcal{N}^{(N)}$	$\ln Z, \mathcal{N}$
Tipo II	$\ln Z^{(N)}, \mathcal{N}^{(N)}$	$\ln Z, \mathcal{N}$
Tipo III	$\ln Z^{(D)}, \mathcal{N}^{(D)}$	$\ln Z, \mathcal{N}$

A tabela (Tab.2) resume os resultados para este regime de alta temperatura. Uma conclusão imediata é que, neste regime e na aproximação de Tomas-Fermi, todas as propriedades termodinâmicas serão idênticas para todas as extensões

$$U = \sum_{k=1}^{n-2} k^2 a_k L^k T^{k+1} \Gamma(k) \zeta(k+1), \quad (5.58)$$

$$S = \sum_{k=1}^{n-2} k(k+1) a_k (LT)^k \Gamma(k) \zeta(k+1), \quad (5.59)$$

$$P = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) L^{1-n}}{\pi^{\frac{n}{2}} (n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} k^2 a_k (LT)^k \Gamma(k) \zeta(k+1), \quad (5.60)$$

com uma equação de estado dada por

$$PL^n \pi^{\frac{n}{2}} (n-1) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=1}^{n-2} k a_k (LT)^{k+1} \Gamma(k) \zeta(k+1). \quad (5.61)$$



## 6 Conclusão

A dinâmica do campo escalar no modelo conforme em AdS foi estudada usando o formalismo das extensões auto-adjuntas. Verificou-se que todas as dinâmicas consideradas possuem uma relação 1-1 com as extensões uniparamétricas (i.e., parametrizadas pelo grupo  $U(1)$ ). Além disso, foi possível descrevê-las a partir de condições de contorno impostas no infinito espacial de  $AdS$ , que resultaram ser condições de tipo Robin. Em seguida, foi desenvolvida uma proposta para implementar o processo de segunda quantização do campo escalar no  $AdS$ , apoiado no fato de que o  $AdS$  pode ser compactado em outro espaço-tempo. Essa proposição nos permitiu estabelecer que cada extensão auto-adjunta gera um esquema de quantização diferente, cada um com um estado diferente de vácuo. No entanto, apesar de os esquemas serem diferentes, a forma do operador hamiltoniano que age no espaço de Fock não depende da extensão auto-adjunta.

Ademais, foi realizada uma análise espectral das extensões. Nesta análise, a estrutura e a distribuição do espectro das extensões foram estudadas. Verificou-se que no caso de Dirichlet e Neumann, podemos obter uma expressão analítica para o espectro, além disso, ele é distribuído linearmente. Ou seja, a separação entre dois elementos consecutivos é constante ( $\Delta k = 2$ ). Infelizmente, para as outras extensões, não é possível obter uma relação analítica para o espectro. No entanto, a análise da função  $\theta(k)$ , nos permitiu descobrir algumas propriedades que definem certos comportamentos do espectro das outras extensões. A partir desta análise, conseguimos classificar estas outras extensões em 3 grupos. Essa classificação dependerá de uma extensão crítica ( $\theta_c$ ), que é a única extensão cujo primeiro elemento de seu espectro é zero. Em relação à distribuição do espectro, ao contrário do que acontece com Dirichlet e Neumann, o espectro das outras extensões não é linearmente distribuído. No entanto, a análise do comportamento assintótico da função  $\theta(k)$  para grandes valores de  $k$ , permitiu estabelecer que  $\Delta k$  sempre tende a 2 para grandes valores do espectro.

Por último, a partir do conhecimento do espectro e do fato de podermos compactar o  $AdS$  em uma "caixa" associando-o um volume efetivo, um estudo termodinâmico para o campo escalar foi realizado no  $AdS$ . A termodinâmica foi deduzida de uma análise mecânica-estatística previa, considerando o campo como um gás de partículas bosônicas não massivas, onde cada modo do campo representa um microestado do sistema. As funções da partição e o número de partículas foram calculados em função da extensão auto-adjunta, onde a extensão crítica representa uma cota mínima para essas funções. O comportamento dessas funções foi analisado para regimes de baixa e alta temperatura. Para o regime de baixa temperatura ( $LT \ll 1$ ), onde os efeitos quânticos são dominantes, verificou-se que as funções dependem apenas do estado

fundamental de cada extensão, o que nos permite afirmar que nesse regime a escolha das condições de contorno afeta diretamente a termodinâmica do campo, mostrando que os efeitos quânticos são suscetíveis a estas mudanças. Por outro lado, no regime de alta temperatura ( $LT \gg 1$ ), foi mostrado que as demais extensões podem ser aproximadas pelas extensões de Dirichlet e Neumann. Além disso, se consideramos a aproximação contínua de Thomas-Fermi ( $\frac{1}{L} \ll 1$ ), a termodinâmica dessas duas extensões pode ser descrita por uma única função de partição e número de partículas, o que permite concluir que, nessa aproximação, todas as propriedades termodinâmicas serão idênticas para todas as extensões auto-adjuntas.

# Referências

- [1] MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 38, p. 1113 – 1133, 1999.
- [2] WITTEN, E. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, v. 2, p. 253–291, 1998.
- [3] GUBSER, S.; KLEBANOV, I.; POLYAKOV, A. Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 428, n. 1-2, p. 105–114, May 1998.
- [4] COTAESCU, I. I. Comment on the quantum modes of the scalar field on AdS(d+1) space-time. 3 1999.
- [5] BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Positive energy in anti-de sitter backgrounds and gauged extended supergravity. *Physics Letters B*, v. 115, n. 3, p. 197–201, 1982.
- [6] BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Stability in gauged extended supergravity. *Annals of Physics*, v. 144, n. 2, p. 249 – 281, 1982.
- [7] ISHIBASHI, A.; WALD, R. M. Dynamics in non-globally-hyperbolic static spacetimes: Iii. anti- de sitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 12, p. 2981–3013, May 2004.
- [8] AVIS, S. J.; ISHAM, C. J.; STOREY, D. Quantum field theory in anti-de sitter space-time. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 18, p. 3565–3576, Nov 1978.
- [9] MEZINCESCU, L.; TOWNSEND, P. Stability at a local maximum in higher dimensional anti-desitter space and applications to supergravity. *Annals of Physics*, v. 160, n. 2, p. 406 – 419, 1985.
- [10] WALD, R. M. Dynamics in nonglobally hyperbolic, static spacetimes. *Journal of Mathematical Physics*, v. 21, n. 12, p. 2802–2805, 1980.
- [11] MINCES, P. On the role of boundary terms in the ads/cft correspondence. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 127, p. 174 – 178, 2004.
- [12] MINCES, P.; RIVELLES, V. O. Energy and the ads/cft correspondence. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2001, n. 12, p. 010–010, Dec 2001.
- [13] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.

- 
- [14] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [15] BIRRELL, N.; DAVIES, P. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [16] GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.: s.n.], 1996.
- [17] REED, M.; SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. 2. Fourier Analysis, Self-adjointness*. [S.l.: s.n.], 1975.
- [18] HALL, B. *Quantum Theory for Mathematicians*. New York: Cambridge Univ. Press, 2013.
- [19] ISHIBASHI, A.; WALD, R. M. Dynamics in nonglobally hyperbolic static spacetimes. 2. General analysis of prescriptions for dynamics. *Class. Quant. Grav.*, v. 20, p. 3815–3826, 2003.
- [20] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [21] ELIAS, W. S.; MOLINA, C.; BALDIOTTI, M. Thermodynamics of bosonic systems in anti de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 99, n. 8, p. 084028, 2019.
- [22] PATHRIA, R. K. Book. *Statistical mechanics, by R. K. Pathria*. [1st ed.]. [S.l.]: Pergamon Press Oxford, New York, 1972. xiii, 527 p. p.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Teoremas sobre extensões auto-adjuntas

Antes de formular os dois teoremas fundamentais do formalismo de extensões auto-adjuntas, é necessário conhecer algumas definições básicas da teoria dos operadores lineares não limitados. Essas definições e teoremas foram extraídos das referências [17, 18], onde as provas dos teoremas podem ser encontradas.

**Definição A.1.** Um **operador ilimitado**  $A$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é uma transformação linear de um subespaço denso  $Dom(A) \subset \mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}$ , de modo que não exista uma constante  $C$  que satisfaça

$$\|A\phi\| \leq C \|\phi\| \quad (\text{A.1})$$

**Definição A.2.** Seja  $A$  um operador definido em um subespaço denso  $Dom(A) \subset \mathcal{H}$ . Seja  $Dom(A^*)$  o conjunto de vetores  $\phi \in \mathcal{H}$ , para o qual existe um  $\chi \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle \quad (\text{A.2})$$

para todo  $\psi \in Dom(A)$ , então para cada  $\phi \in Dom(A^*)$ , definimos  $A^*\phi = \chi$ .  $A^*$  é chamado **adjunto** de  $A$ .

**Definição A.3.** Um operador ilimitado  $A$  em  $\mathcal{H}$  é **simétrico** se

$$\langle \phi, A\psi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle \quad (\text{A.3})$$

para todo  $\psi, \phi \in Dom(A)$ .

**Definição A.4.** Um operador ilimitado  $A$  é uma **extensão** de um operador ilimitado  $B$ , se

$$Dom(A) \supset Dom(B) \text{ e } A = B, \text{ em } Dom(B) \quad (\text{A.4})$$

**Definição A.5.** Um operador ilimitado  $A$  em  $\mathcal{H}$  é **auto-adjunto** se

$$Dom(A^*) = Dom(A) \quad (\text{A.5})$$

e  $A^*\phi = A\phi$ , para todo  $\phi \in Dom(A)$ .

**Definição A.6.** Seja  $A$  um operador ilimitado simétrico e seja  $\bar{A}$  o fecho de  $A$ .  $A$  é chamado **essencialmente auto-adjunto**, se  $\bar{A}$  é auto-adjunto.

**Teorema A.1.** *Seja  $A$  um operador ilimitado simétrico, então  $A^*$  é uma extensão de  $A$  e*

$$\text{Dom}(A) \subset \text{Dom}(\bar{A}) \subset \text{Dom}(A^*). \quad (\text{A.6})$$

*Se  $A$  é auto-adjunto, então*

$$\text{Dom}(A) = \text{Dom}(\bar{A}) = \text{Dom}(A^*). \quad (\text{A.7})$$

**Definição A.7.** *Suponha que  $A$  é um operador ilimitado simétrico. Seja*

$$\mathcal{K}^\pm = \text{Ker}(i \pm A^*) \quad (\text{A.8})$$

$\mathcal{K}^+$  e  $\mathcal{K}^-$  são chamados os **subespaços de deficiência** de  $A$ . O par de números  $n_\pm$ , dados por  $n_\pm = \dim(\mathcal{K}^\pm)$  são chamados os **índices de deficiência** de  $A$ . Para encontrar  $\mathcal{K}^\pm$  é preciso resolver

$$A^* \phi^{(\pm)} = \pm i \phi^{(\pm)}. \quad (\text{A.9})$$

**Teorema A.2.** *Seja  $A$  um operador simétrico. As extensões auto-adjuntas de  $A$  estão em correspondência 1-1 com as isometrias parciais de  $\mathcal{K}^+$  em  $\mathcal{K}^-$ . Se  $\Xi$  é uma isometria parcial, sua correspondente extensão auto-adjunta  $A_\Xi$  tem o domínio*

$$\text{Dom}(A_\Xi) = \left\{ \phi_0 + \phi^{(+)} + \Xi \phi^{(+)} \mid \phi_0 \in \text{Dom}(\bar{A}), \phi^{(+)} \in \mathcal{K}^{(+)} \right\}, \quad (\text{A.10})$$

e

$$A_\Xi \left( \phi_0 + \phi^{(+)} + \Xi \phi^{(+)} \right) = A \phi_0 + i \phi^{(+)} - i \Xi \phi^{(+)}. \quad (\text{A.11})$$

*Seja  $A$  um operador simétrico com índices de deficiência  $n_+$  e  $n_-$ . Então,*

- $A$  é essencialmente auto-adjunto, se e somente se,  $n_+ = n_- = 0$ .
- $A$  tem extensões auto-adjuntas, se e somente se,  $n_+ = n_- = n$ . Existe uma correspondência 1-1 entre as extensões auto-adjuntas e as transformações unitárias  $U(n)$ .
- Se  $n_+ \neq n_-$ , então  $A$  não tem extensões auto-adjuntas.