Universidade Estadual de Londrina

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UM OLHAR PARA OS PROCESSOS DE APRENDIZAGEM E DE ENSINO POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Londrina
2018

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UM OLHAR PARA OS PROCESSOS DE APRENDIZAGEM E DE ENSINO POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Tese apresentada ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Silva, Gabriel dos Santos e.
Um olhar para os processos de aprendizagem e ensino por meio de uma trajetória de avaliação / Gabriel dos Santos e Silva. – Londrina, 2018.
166 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática –Tese. 2. Avaliação da Aprendizagem Escolar – Tese. 3. Educação Matemática Realística – Tese. 4. Trajetória de Avaliação – Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

GABRIEL DOS SANTOS E SILVA

UM OLHAR PARA OS PROCESSOS DE APRENDIZAGEM E DE ENSINO POR MEIO DE UMA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

R Buriasco

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS

Lourdes Maria Werle

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Marcele Tavares Mendes

Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR/Londrina

Pamela

Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 19 de março de 2018.

Dedico este trabalho aos alunos da disciplina de Geometria e Desenho do curso de Licenciatura em Matemática matriculados no ano de 2016.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuíram para a elaboração desta pesquisa de doutorado e, sobretudo, para os que fizeram esses anos de estudo tornarem-se mais prazeirosos. Em especial, agradeço:

a Deus, por me amparar durante toda minha vida, por ser um refúgio seguro e uma fonte inesgotável de bênçãos; à Nossa Senhora por sua incessante intercessão;

à minha família, Lucy, Maria Hortência e Tsuneo, por serem pessoas tão maravilhosas e compreensivas, por persistirem na minha educação e por tanto me amarem;

aos meus amigos Juliana, Jaqueline, Paulo, Paula e Iara, por viverem comigo momentos de alegria e dificuldade ao longo dos anos; agradeço por cada conversa, festa e apoio que me deram e por sempre torcerem por mim;

aos alunos da disciplina de Geometria e Desenho matriculados em 2016, por aceitarem participar desta pesquisa e contribuírem com suas produções;

à minha orientadora, Regina Luzia Corio de Buriasco, pelas orientações, conselhos, puxões de orelha e cafés; agradeço, sobretudo, pela confiança depositada em mim ao longo desses anos;

aos membros do GEPEMA, pelas discussões e amizades e por tudo que fizeram por mim e por este trabalho; em especial, agradeço à Hallynnee, ao Diego (irmãozinho), à Pamela e à Magna;

à Pamela Ferreira, pelas conversas, conselhos, por acreditar no meu potencial e me incentivar a sempre ser melhor, desde o período de graduação;

à Magna Pires, chefe e amiga, por todas as oportunidades no departamento de Matemática, por todos os bons momentos partilhados, por sua solidariedade comigo e por ser, para mim, um grande exemplo;

aos membros da banca, Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos, Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes e Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira pela leitura cuidadosa e respeitosa que fizeram deste trabalho;

e aos alunos do Design Gráfico, Julio Sanchez, Victor Czernisz, Aline Sato, Lauren Sales, Júnior Morimoto e Giovana Casagrande, por cederem, gentilmente, suas composições para figurar os capítulos desta tese.

Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar.
Paulo Freire

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Esta tese de doutorado tem como objetivo apresentar um estudo dos processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino em uma disciplina de Geometria e Desenho a partir do desenvolvimento (concepção, elaboração, implementação e avaliação) de uma trajetória de avaliação, na perspectiva do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação). Para tanto, apresento uma discussão de aspectos teóricos abordados pelos autores da Educação Matemática Realística (RME) e de avaliação para apresentar as ideias que fomentaram as práticas docentes e as análises deste trabalho. Em seguida, abordo aspectos metodológicos da pesquisa realizada com 39 estudantes, no ano de 2016. Utilizei 9 instrumentos de avaliação para recolha de informações: Anotações dos Estudantes, Caderno de Desenho, Prova Elaborada Pelos Estudantes, Prova em Fases, Prova em Grupo, Prova Escrita com Cola, Seminário, Trabalho Escrito e Vaivém. Apresento as análises e discussões em dois capítulos distintos: no primeiro, analiso trechos da trajetória de avaliação e duas de suas modificações, recorrendo às produções escritas dos estudantes nos instrumentos de avaliação, buscando inferir aspectos teóricos dos autores discutidos que estivessem subjacentes à prática adotada;; no segundo, retomo as análises feitas para discutir os princípios da Educação Matemática Realística que se revelaram na dinâmica da aula. De maneira geral, as análises mostraram que os processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino estão amalgamados, sendo que o processo de avaliação pode ser tomado como mote para condução das aulas em diferentes dinâmicas. Assim, a avaliação toma um caráter longitudinal, estando relacionada aos instrumentos de avaliação, aos estudos dos alunos (para as provas, ao fazer trabalhos), às observações, atitudes, relações (do professor e dos estudantes), aos *feedbacks* e, sobretudo, à comunicação (oral, escrita, não verbal).

Palavras-chave: Educação Matemática. Avaliação da Aprendizagem Escolar. Educação Matemática Realística. Trajetória de Avaliação.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **A look to the processes of learning and teaching by an assessment trajectory**. 2018. 166 p. Thesis (Doctoral degree in Science Teaching and Mathematical Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

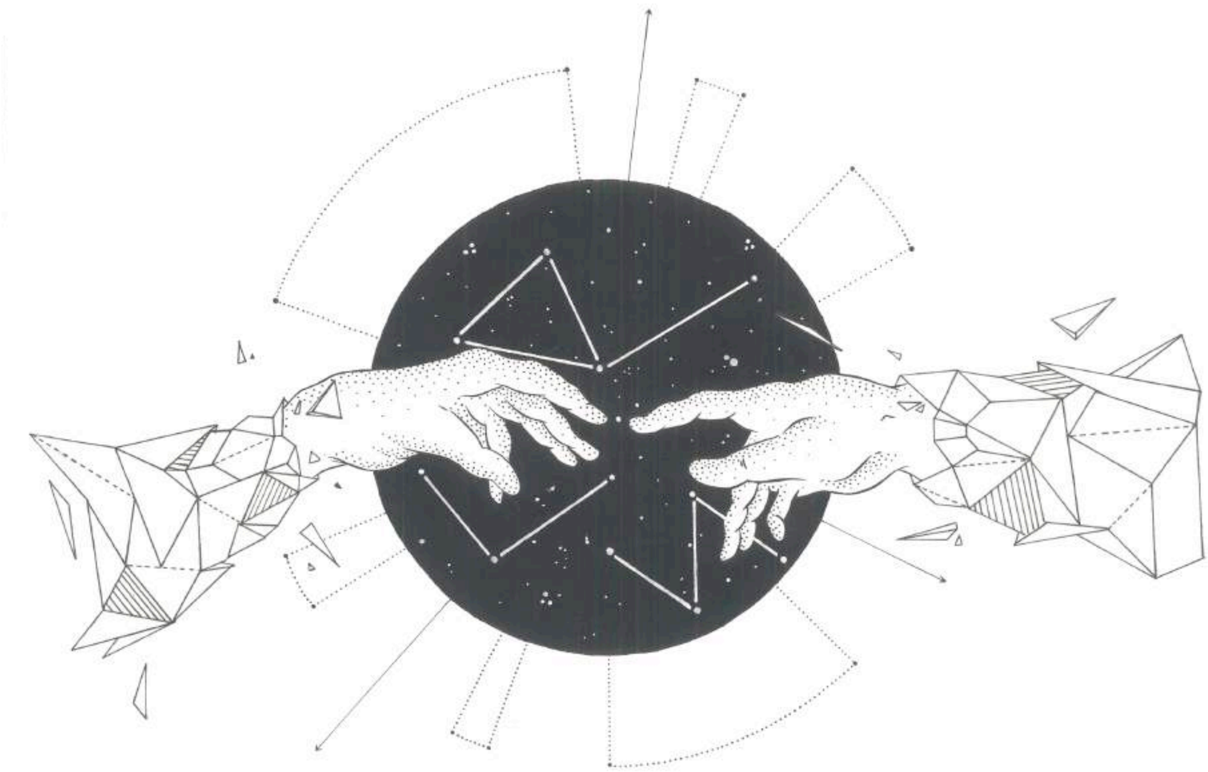
ABSTRACT

This thesis aims to present a study of the assessment, learning and teaching processes in a discipline of Geometry and Geometric Drawing from the development (conception, elaboration, implementation and evaluation) of an assessment trajectory, based on the GEPEMA's perspective (Gruop of Study and Research in Mathematics Education and Assessment). For that, I present a discussion of theoretical aspects approached by authors of Realistic Mathematical Education (RME) and of assessment to present the ideas that fostered the teaching practices and the analyzes of this work. Then, I present methodological aspects of the research, carried out with 39 students, in the year of 2016. I used 9 assessment instruments to collect information: Drawing Notebook, Group Test, Seminar, Stage Test, Student Notes, Vaivém, Written Paper, Written Test with Cola. I present the analyzes and discussions in two distinct chapters: in the first one, I analyze excerpts of the assessment trajectory and two of its modifications, using the written productions of the students in the assessment instruments, seeking to infer theoretical aspects of the authors discussed that were underlying the adopted practice;; in the second, I return to the analyzes made to discuss the principles of Realistic Mathematical Education that were revealed in the dynamics of the class. In general, the analysis showed that the assessment, learning and teaching processes are amalgamated, and the evaluation process can be taken as a motto for conducting the classes in different dynamics. Thus, the evaluation takes a longitudinal character, being related to the instruments of evaluation, the studies of the students (for the tests, doing the works), the observations, attitudes, relations (of the teacher and the students), the feedbacks and, communication (oral, written, non--verbal).

Keywords: Mathematics Education. Assessment of School Learning. Realistic Mathematics Education. Assessment Trajectory.

LISTA DE COMPOSIÇÕES

SUMÁRIO



“**Ciência**”
297x420mm
Guache e nanquim
Julio Cezar Sanchez Francisco

INTRODUÇÃO

Ao departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) está vinculado o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA[1]), coordenado pela Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, constituído por estudantes de graduação em Matemática, professores da Educação Básica e do Ensino Superior (da UEL e de outras instituições), estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da especialização em Educação Matemática da UEL. Dentre as discussões desse grupo, destacam-se, atualmente, as relacionadas à avaliação da aprendizagem e à Educação Matemática Realística (RME[2]).

Ao longo dos anos, esse grupo tem trilhado um caminho de pesquisa que mostra uma preocupação com aspectos referentes à sala de aula, em discussões de natureza teórica e prática. Problematizações a respeito do ensino tradicionalmente realizado em sala de aula e, principalmente, da visão de avaliação de professores e autores de textos de Educação e Educação Matemática estão presentes no cenário de pesquisa do GEPEMA.

Tais discussões têm início com a análise da produção escrita como estratégia de avaliação em aulas de Matemática. Dividindo-se em dois principais momentos, os trabalhos de dissertação e tese referem-se, em um primeiro momento, a questões rotineiras[3] de matemática e, em um segundo momento, a questões não-rotineiras de Matemática, que proporcionaram ao grupo um espaço de reflexão a respeito das maneiras como estudantes lidam com questões de matemática, quais as estratégias e os procedimentos utilizados, o que uma produção escrita pode revelar a respeito do que o estudante sabe (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO S., 2005; SEGURA, 2005; ALVES, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; PEREGO F., 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007; CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010). A partir do ano de 2010, as pesquisas do GEPEMA em relação à avaliação da aprendizagem escolar têm abordado práticas relacionadas à sala de aula, como a elaboração de

---

[1] Mais informações: http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema. Será referido como “grupo”.
[2] Sigla do termo em inglês *Realistic Mathematics Education.*
[3] Considera-se como questão rotineira aquela que aparece com frequência em aulas de matemática e em livros didáticos. Já as questões não rotineiras são aquelas que não aparecem com frequência em aulas de matemática e livros didáticos.

trajetórias de ensino e aprendizagem (CIANI, 2012; ROSSETTO, 2016), a ressignificação da prova escrita e discussão de outros instrumentos de avaliação (PIRES, 2013; TREVISAN, 2013; MENDES, 2014; PRESTES, 2015; FORSTER, 2016; PAIXÃO, 2016), a análise de enunciados de tarefas de matemática (FERREIRA, 2013; PEREIRA JUNIOR, 2014), os critérios de correção de provas escritas (MORAES, 2013). Além disso, algumas discussões teóricas a respeito de avaliação e análise da produção escrita (PEDROCHI JUNIOR, 2012; SANTOS, 2014) e sobre a Educação Matemática Realística (OLIVEIRA, 2014; PASSOS, 2015; SILVA, 2015) também estão presentes nas pesquisas do GEPEMA.

É nesse contexto que me insiro como estudante, pesquisador. Minha participação no GEPEMA como estudante de mestrado se iniciou no ano de 2013 quando terminei a graduação e decidi continuar meus estudos, discutindo aspectos concernentes à Educação Matemática.

Na dissertação de mestrado (SILVA, 2015), busquei configurar um dos aspectos discutidos por autores da Educação Matemática Realística: a reinvenção guiada. Em linhas gerais, pode-se dizer que a reinvenção guiada é um método de ensino em que os estudantes são orientados, guiados pelo professor à reinvenção de conteúdos de matemática, com vistas a serem autores de seu próprio conhecimento. Nesse processo de reinvenção, discussões sobre noção de matemática, realidade, aprendizagem, papel do professor, do estudante, dinâmica de aula, avaliação foram sendo feitas a fim de configurar a reinvenção guiada.

As ideias da RME são apresentadas pelos autores e, em especial, pelo seu precursor, Hans Freudenthal, contrapondo-se ao ensino tradicional centrado nas estruturas da Matemática, ou até mesmo na mecanização, provenientes de movimentos, como o Movimento da Matemática Moderna. Como uma abordagem de resistência a esse movimento, a Educação Matemática Realística se propõe a discutir um ensino em que a matemática esteja próxima aos estudantes, seja relevante e esteja fortemente integrada a problemas de contexto.

O grupo holandês que discute as ideias de Freudenthal (autores de textos da Educação Matemática Realística) tem como foco principal a sala de aula da Educação Básica e, em particular, alguns autores preocupam-se com as séries iniciais. Ao estudar essa abordagem, o GEPEMA tem buscado mostrar que as ideias de Freudenthal e da RME podem ser utilizadas em contextos de sala de aula em outros níveis de escolaridade, como o Ensino Superior. Esse tipo de trabalho já pode ser observado em Mendes (2014), que, em sua tese de doutorado, utilizou um instrumento de avaliação (Prova em Fases) em uma disciplina de Cálculo no Ensino Superior, trabalhando na perspectiva da RME.

Em 2015, fui aprovado em um processo seletivo para trabalhar na Universidade Estadual de Londrina como Professor Assistente M1. Uma das disciplinas pelas quais fui responsável foi "2MAT055 – Geometria e Desenho", para estudantes do 1º ano do curso de Matemática[4]. Na ocasião, tive contato com o Ensino Superior pela primeira vez na minha trajetória profissional e, novamente, com o ensino de Geometria, que já tinha trabalhado na Educação Básica[5].

No segundo semestre de 2015, participei de um evento denominado Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). No grupo de discussão de avaliação desse evento, houve uma discussão em que se buscava pensar alternativas para trabalhar avaliação com futuros professores de Matemática. Nessa discussão, relatei algumas práticas da professora Regina Buriasco (orientadora deste trabalho de tese), que, em suas aulas na graduação e na pós-graduação, discute avaliação ao praticar avaliação na perspectiva em que acredita. Ao defender, por exemplo, a utilização de diferentes instrumentos de avaliação para que se obtenha uma maior quantidade de informações a respeito do que os estudantes mostram saber, a professora Regina Buriasco faz juz ao que defende e lança mão de diferentes instrumentos. Uma das consequências de tal atitude é que os (futuros) professores, que cursam tais disciplinas, aprendem sobre avaliação sendo sujeitos desse processo; aprendem fazendo.

De alguma maneira, essa discussão me incomodou, uma vez que eu, enquanto membro do GEPEMA, acabava por praticar avaliação em algumas disciplinas da maneira que eu criticava. Cabe ressaltar que, dadas as ementas de algumas disciplinas que ministrei e outros motivos institucionais, políticos, parecia ser impossível (para mim) praticar avaliação como eu acreditava que deveria, enquanto, em outras disciplinas, parecia uma alternativa interessante. Entretanto, no curso de Licenciatura em Matemática, minha prática avaliativa era centrada em poucos instrumentos de avaliação, a emissão de *feedback* não era tão frequente, a

[4] Na Universidade Estadual de Londrina, o curso de Matemática tem três habilitações: Licenciatura, Bacharelado e Empresarial. Trabalhei com a disciplina de Geometria e Desenho nas três habilitações em 2015 e somente com a Licenciatura em 2016.

[5] Em anos anteriores, trabalhei nas séries finais do Ensino Fundamental em um colégio da rede privada de Londrina que tinha uma disciplina de Geometria do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

nota era supervalorizada por mim, pelos estudantes, pelo formato da disciplina.

Saí do EPREM com vontade de mudar esse cenário. Esbocei algumas ideias em relação a como fazer uma disciplina de Geometria e Desenho em que a perspectiva de avaliação do GEPEMA estivesse presente, com vistas a que eu praticasse avaliação como acredito e para que os estudantes tivessem a oportunidade de, desde o primeiro ano, discutir avaliação, repensar as práticas avaliativas das quais já estavam acostumados. E, por que não aproveitar essa oportunidade para ser o tema de investigação da tese?

Nesse sentido, a proposta de trabalho para esta tese é elaborar uma trajetória de avaliação visando levar para a sala de aula do Ensino Superior a perspectiva de avaliação do GEPEMA, conduzir a disciplina a partir da trajetória elaborada e analisar à luz da Educação Matemática Realística e dos autores de avaliação os aspectos subjacentes a essa prática. Para tanto, o objetivo geral desta pesquisa é **apresentar um estudo das relações dos processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino[6] em uma disciplina de Geometria e Desenho a partir do desenvolvimento (concepção, elaboração, implementação e avaliação) de uma trajetória de avaliação, na perspectiva do GEPEMA**. São objetivos específicos da tese:

- apresentar uma trajetória de avaliação para a disciplina de Geometria e Desenho da Universidade Estadual de Londrina, com base na abordagem da Educação Matemática Realística e de autores da avaliação da aprendizagem escolar;
- apresentar, analisar e discutir trechos da trajetória de avaliação e de algumas modificações feitas, a fim de evidenciar aspectos teóricos subjacentes;
- apresentar, analisar e discutir produções escritas de estudantes da disciplina de Geometria e Desenho a fim de evidenciar a participação dos alunos no processo, tomado como oportunidade de aprendizagem e prática de investigação;
- investigar princípios da Educação Matemática Realística subjacentes à implementação da trajetória de avaliação.

Com esses objetivos, esta pesquisa vai ao encontro do que o

[6] Nesta tese, os nomes dos processos são usados em ordem alfabética, uma vez que os processos são tomados como igualmente importantes.

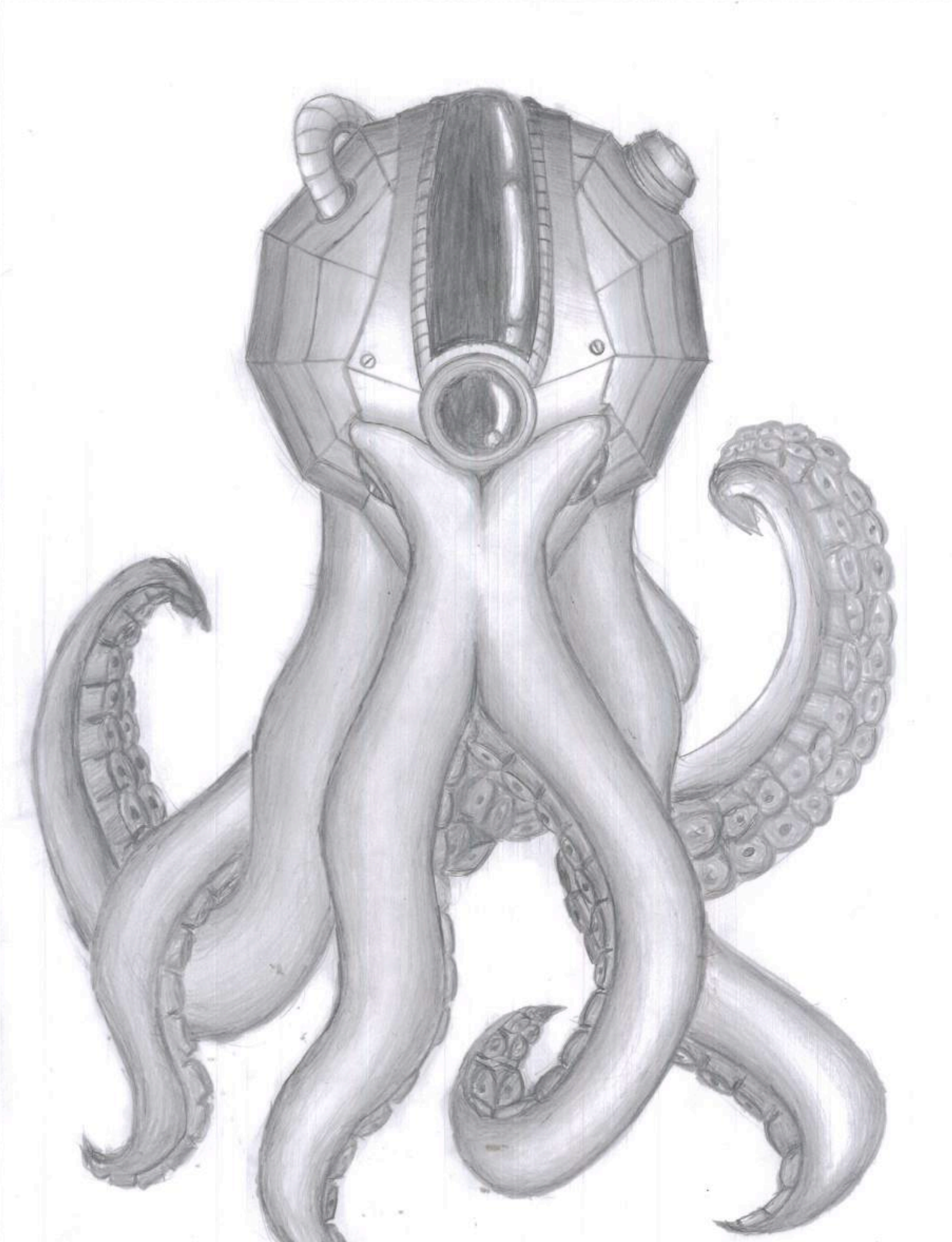
GEPEMA tem adotado, levar suas ideias para a sala de aula. Além de colocar-se como um elemento importante para o grupo, revela-se como uma discussão relevante ao contexto de pesquisa da Educação Matemática, que vem buscando alternativas às práticas pedagógicas e, consequentemente, à avaliação em sala de aula.

Esta tese tem seu caráter de originalidade centrado em dois aspectos: primeiro, investigar aspectos referentes à trajetória de avaliação em um contexto de sala de aula do Ensino Superior no Brasil, o que se configura como um trabalho original; segundo, discutir a perspectiva de avaliação do GEPEMA do ponto de vista de tomar avaliação como processo, ao longo de uma disciplina anual, investigando os diferentes momentos, instrumentos, agentes do processo, o que se configura como um primeiro trabalho dessa natureza no grupo.

Esta tese divide-se em seis capítulos:

1. **Educação Matemática Realística**: apresenta ideias da Educação Matemática Realística; o objetivo do capítulo é configurar um referencial analítico para o trabalho e situar o leitor quanto a abordagem de ensino adotada.
2. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**: contém aspectos referentes à avaliação da aprendizagem escolar a partir de textos de autores do GEPEMA; visa-se, com esse capítulo, situar o leitor na perspectiva de avaliação adotada pelo grupo.
3. **Procedimentos Metodológicos**: descreve a turma e o contexto em que as informações foram coletadas, as estratégias de descrição e análise dos dados.
4. **Uma Análise**: contém a análise da trajetória de avaliação utilizada nos planejamentos das aulas e das produções de alguns estudantes.
5. **Outra Análise**: contém a análise da dinâmica de aula evidenciada pelo capítulo 4.
6. **Algumas Considerações**: considerações a respeito do trabalho feito e indicações de possíveis pesquisas futuras.

No início de cada capítulo, há uma imagem escolhida para expressar ideias contidas nele. Tais imagens são composições de estudantes do curso de Design Gráfico matriculados na disciplina Desenho Geométrico no ano de 2017. Cada composição foi feita de acordo com algum tema (retas, ângulos, polígonos e simetria).



"**Radioactive Octopus**"
297x420mm
Grafite sobre Canson
Victor da Silva Czernisz

1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Durante a década de 1950, os Estados Unidos da América tinham a intenção de elaborar um novo currículo para o ensino de matemática, porque, de acordo com Kline (1976), as notas dos estudantes nessa disciplina eram mais baixas que em outras, observava-se um desinteresse dos alunos por matemática e os professores consideravam antiquada a matemática ensinada nas escolas. O interesse pela elaboração de um novo currículo nos EUA se intensificou com o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, Sputnik, pela União Soviética, na segunda metade da década de 1950.

Em busca de uma "matemática não antiquada", os professores estadunidenses começaram a fazer propostas de que o ensino de matemática fosse baseado em "matemática moderna", como chamada por eles. Isso significava que estavam propondo o ensino de álgebra abstrata, topologia, lógica simbólica, álgebra de Boole, em diferentes níveis de escolaridade desde o *kindergarten* (Educação Infantil) até o fim da escola secundária (KLINE, 1976, p. 35-36).

Sob influência do grupo Bourbaki[7] e de outros grupos estadunidenses que discutiam o currículo com ênfase na "matemática moderna", surge o "Movimento da Matemática Moderna", uma abordagem "estruturalista" que considera a matemática como centrada em estruturas básicas, dando ênfase ao estudo da matemática por si, sem uma preocupação com aplicações.

Além da abordagem estruturalista, outras abordagens (mecanicista e empirista) estavam presentes nos livros didáticos, nas ações de professores de diferentes países. O Quadro 1 apresenta algumas características de tais abordagens.

Quadro 1 – Algumas características das abordagens mecanicista, estruturalista e empirista

Abordagem	Algumas características
Mecanicista	– foco em cálculos em problemas com números "nus"[8], dando-se uma pequena atenção às aplicações (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4); – a matemática é ensinada de forma fragmentada (VAN DEN

[7] Bourbaki é um pseudônimo usado por matemáticos, em sua maioria franceses, que escreviam textos a respeito da matemática a partir das "leis básicas da álgebra" (comutativa, associativa, distributiva e outras) que constroem as diversas estruturas algébricas (EVES, 2011).
[8] Van den Heuvel-Panhuizen (2010), ao falar de "problemas com números 'nus'", refere-se a questões que, no geral, contêm somente números e operações no enunciado.

	HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4); – problemas de contexto são utilizados para concluir o processo de aprendizagem; funcionam apenas como campo de aplicação (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 4); – o conteúdo é dividido em pequenas partes, sem sentido, em que os estudantes dispõem de procedimentos de resolução fixos, sendo treinados, individualmente, por meio de exercícios (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 4); – o problema não é tomado como ponto de partida (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99).
Estruturalista	– abordagem derivada do Movimento da Matemática Moderna (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4); – o problema é apresentado enquanto se estuda o conteúdo utilizado para resolvê-lo (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – após o trabalho com um problema, os estudantes precisam mostrar que compreenderam por meio de outro problema (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99).
Empirista	– os estudantes são estimulados a realizar investigações, ficando muitas vezes livres, por si (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 4); – é dada grande atenção à esquematização preliminar dos estudantes ao resolver um problema, esperando-se que comecem formulando hipóteses; essas hipóteses são discutidas e testadas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – não é dada tanta atenção ao fechamento matemático após a resolução dos problemas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 99); – buscam-se os pontos de partida dos estudos na esfera dos interesses dos estudantes (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 101).

Fonte: Silva (2015).

Com vistas a repensar o ensino de matemática em uma direção diferente da adotada pelas abordagens anteriormente citadas, o matemático alemão Hans Freudenthal sugere uma abordagem para o ensino de matemática, denominada Educação Matemática Realística (RME), cujo princípio fundamental é de que a “matemática é uma atividade humana” (FREUDENTHAL, 1973).

Em *Mathematics as an Educational Task* (Matemática como uma Tarefa Educacional), Freudenthal (1973) apresenta matemática como uma construção humana. O autor narra a necessidade do homem de contar, de medir áreas, tratando cada um desses fenômenos como motes para o ser humano pensar matematicamente (matematizar). Além desses fenômenos, Freudenthal trata de outros, como a astronomia, os estudos de geometria algébrica, de teoria dos números, ressaltando que o homem faz matemática (matematiza) a partir de necessidades sociais, culturais, científicas, da própria matemática.

"Matematizar é fazer matemática". A partir desse princípio, entende-se que a Educação Matemática Realística dá valor à produção (matematização) de cada indivíduo. Matemática, então, é fruto de atividades mentais (que se efetivam socialmente) de cada indivíduo. Essas atividades, nas quais se reconhece matematização, podem ser tais quais:

> • identificar as especificidades matemáticas em um contexto geral;
> • esquematizar;
> • formular e visualizar um problema;
> • descobrir relações e regularidades;
> • reconhecer similaridades em diferentes problemas;
> • representar uma relação em uma fórmula;
> • provar regularidades;
> • refinar e ajustar modelos;
> • combinar e integrar modelos;
> • generalizar (DE LANGE, 1999, p. 18, tradução nossa);

e atividades cujas estratégias têm características de:

> • **generalidade**: generalizar (procurando analogias, classificação, estruturação);
> • **certeza**: refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);
> • **exatidão**: modelar, simbolizar, definir (limitar interpretações e validar); e
> • **brevidade**: simbolizar e esquematizar (desenvolver procedimentos padrão e notações) (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução nossa, grifos do autor).

Isso não quer dizer que o conjunto de conhecimentos acumulados historicamente pela humanidade não tenha valor para Freudenthal. Para esse autor, ao conjunto de conhecimentos historicamente acumulados, validados é dado o nome "conhecimento matemático" (SILVA, 2015).

Drijvers (2003) considera que existem normas comuns na comunidade matemática, e cabe ao professor orientar os estudantes para que suas produções convirjam para tais normas. Desse modo, o conhecimento matemático tem um importante papel na RME, uma vez que o professor tem como base esse conhecimento acumulado e validado ao longo da história da humanidade para guiar/auxiliar os estudantes a matematizarem na direção do conhecimento matemático. Não significa, porém, que os estudantes devam refazer *pari passu* os caminhos percorridos pela humanidade na elaboração do conhecimento matemático, sem dispor de algumas ferramentas (como ocorreu historicamente), mas, ao contrário, podem contar com a orientação do professor para que, respeitando o processo histórico de elaboração do conhecimento, produzam de modo próprio seu conhecimento matemático (matemática) (STREEFLAND, 1991; AMERON, 2002).

Essa concepção de matemática, que é entendida como atividade humana, carrega consigo uma concepção de realidade atrelada. Se a matemática emerge das necessidades humanas, das experiências do homem com os fenômenos, não são essas necessidades e experiências componentes da realidade?

A Educação Matemática Realística entende que real é tudo aquilo que pode ser interpretado ou experienciado pelo homem (GRAVEMEIJER; COBB, 2006). O termo realístico é uma tradução para o termo holandês *zich realise-ren*, que se refere àquilo que pode se tornar real para as pessoas. Como Freudenthal (1973) havia salientado, realidade (a qual pode ser organizada pelo homem por meio de matemática) pode estar associada a fenômenos sociais (como o comércio, o cálculo de áreas de terrenos), culturais (como a contagem), científicos (como a astronomia, a física), a fenômenos da própria matemática (como a geometria algébrica, teoria dos números). De maneira geral, dizemos que é real (para a RME) tudo aquilo com que um sujeito pode lidar (fisicamente, mentalmente).

Sendo assim, é papel do professor trabalhar com situações próximas à realidade dos estudantes. Isso não significa, necessariamente, que o professor só deva trabalhar com elementos do "cotidiano" dos alunos. Significa que o professor também tem o papel de, de alguma maneira, auxiliar os estudantes a "estarem próximos" de contextos que lhes possam ser importantes, afinal, "o objetivo da Educação Matemática Realística é apoiar os alunos na criação de uma nova realidade matemática" (GRAVEMEIJER; COBB, 2006, p. 64, tradução nossa).

Uma das críticas de Freudenthal ao ensino de matemática é o caminho contrário ao "natural" para o ensino de matemática: o professor começar trabalhando aspectos da matemática formal para, depois, apresentar aplicações. Por se tratar de uma inversão ao processo de elaboração de conhecimentos por parte da humanidade e por considerar tal inversão como inadequada para o ensino, Freudenthal denomina esse caminho adotado pelas abordagens mecanicista e estruturalista como uma inversão antididática. Sua proposta, então, é a de um método de ensino que respeite tal caminho e, além disso, respeite o processo de elaboração de conhecimento de cada indivíduo: reinvenção guiada (FREUDENTHAL, 1991).

Entende-se, na RME, que o conhecimento matemático já foi inventado pela humanidade. Nas aulas na perspectiva realística, objetiva-se a matematização (organizar situações e lidar com elas por meio de matemática); em alguns casos, o objetivo do professor pode ser que os estudantes aprendam alguma matemática já inventada pela humanidade, mas que ainda é nova para eles. Progressivamente, o professor pode guiar os estudantes por meio de interpretações e análises da matemática presente em situações de interpretações e análises da própria matemática (FREUDENTHAL, 1973). Nesse processo de matematização progressiva, o estudante pode reinventar alguma matemática.

O professor pode orientar os estudantes de diferentes maneiras, por meio de tarefas, situações, problemas. Entretanto, cabe a ele o planejamento de situações que favoreçam o processo de reinvenção guiada. Isso pode se dar por meio da História da Matemática, que contém problemas que suscitaram a invenção de determinadas ferramentas matemáticas e dificuldades de aprendizagem que foram enfrentadas pela humanidade e que podem ser enfrentadas pelos estudantes (AMERON, 2002; KWON, 2002). O professor também pode pensar em como ele, se fosse um estudante daquele ano, lidaria com aquela situação para que, a partir dos procedimentos informais que pensou, organizar intervenções para auxiliar os estudantes no processo de reinvenção (DRIJVERS, 2003).

Dos estudantes, espera-se que

> desempenhem um papel ativo em construir seu próprio conhecimento matemático [...]. A educação é projetada para se encaixar o máximo possível no conhecimento informal dos estudantes, e por isso ajudá-los a alcançarem um nível mais alto de entendimento através da reinvenção guiada (VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, 1996, p. 89, tradução nossa).

Em relação ao papel ativo, Ameron (2002) e Van den Boer (2004) consideram que são atribuídas aos estudantes algumas atividades, como: justificar suas estratégias de resolução e escutar os outros estudantes, tentar entender diferentes estratégias, pedir esclarecimentos nas resoluções, participar de discussões, refletir, interessar-se por novas estratégias de resolução.

Nesse sentido, a RME entende que a aprendizagem é, também, uma atividade social, dando-se, sobretudo, pela interação entre alunos (entre si) e alunos com professor (em situações de sala de aula).

O professor, ao promover discussões, ao confrontar diferentes estratégias de resolução e ao pedir que os estudantes comuniquem suas atividades matemáticas, está criando um ambiente profícuo à matematização e, especialmente, à reinvenção de conteúdos de matemática (AMERON, 2002).

Além da interatividade, Gravemeijer (2008) afirma que há um aspecto individual na aprendizagem. Para o autor, conhecimentos informais podem tornar-se mais formais por meio da mediação do professor. Nesse sentido, aprender está relacionado com o refinamento das estratégias adotadas para lidar com situações.

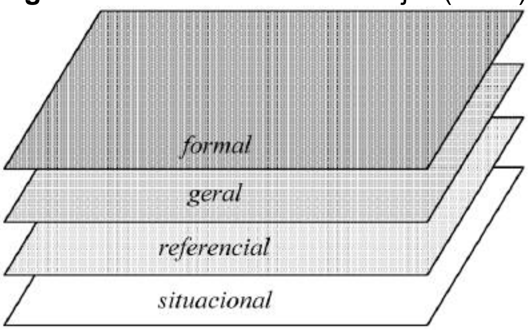
Van Reewijk (2001) considera que é importante que os estudantes comecem lidando com as situações de acordo com suas estratégias informais. Esse é o ponto de partida para a reinvenção guiada. Trabalhar com o que os estudantes já sabem é o primeiro passo para que, por meio de intervenções e orientações do professor, o estudante aprenda.

Ao matematizar, os estudantes podem utilizar procedimentos (modelos) que resolvem aquela situação específica (chamados pela RME de **modelo de**); as intervenções do professor e a busca por formalização nas produções podem auxiliar o estudante a reconhecer que alguns modelos resolvem um conjunto de situações (esses modelos se tornam, com a formalização, **modelo para**).

Em Pires (2013), encontramos a discussão de intervenções realizadas a partir da produção escrita de uma professora da Educação Básica em uma questão que envolve sistemas de equações. Informalmente, a professora utilizou alguns cálculos aritméticos para determinar o valor das duas incógnitas; a pesquisadora foi fazendo intervenções que pediam para a professora explicar de “onde” vinham alguns números, que realizasse o mesmo procedimento com outros números, que generalizasse algumas ideias. Por fim, a professora foi reinventando o conteúdo de sistemas de equações com duas equações e duas incógnitas e o método da substituição. No início, informalmente, a professora tinha resolvido dois sistemas, mas por meio de cálculos aritméticos (**modelo de**) e, com as intervenções, pôde, algebricamente, formalizar a ideia de método da substituição para quaisquer sistemas de duas equações e duas incógnitas (**modelo para**).

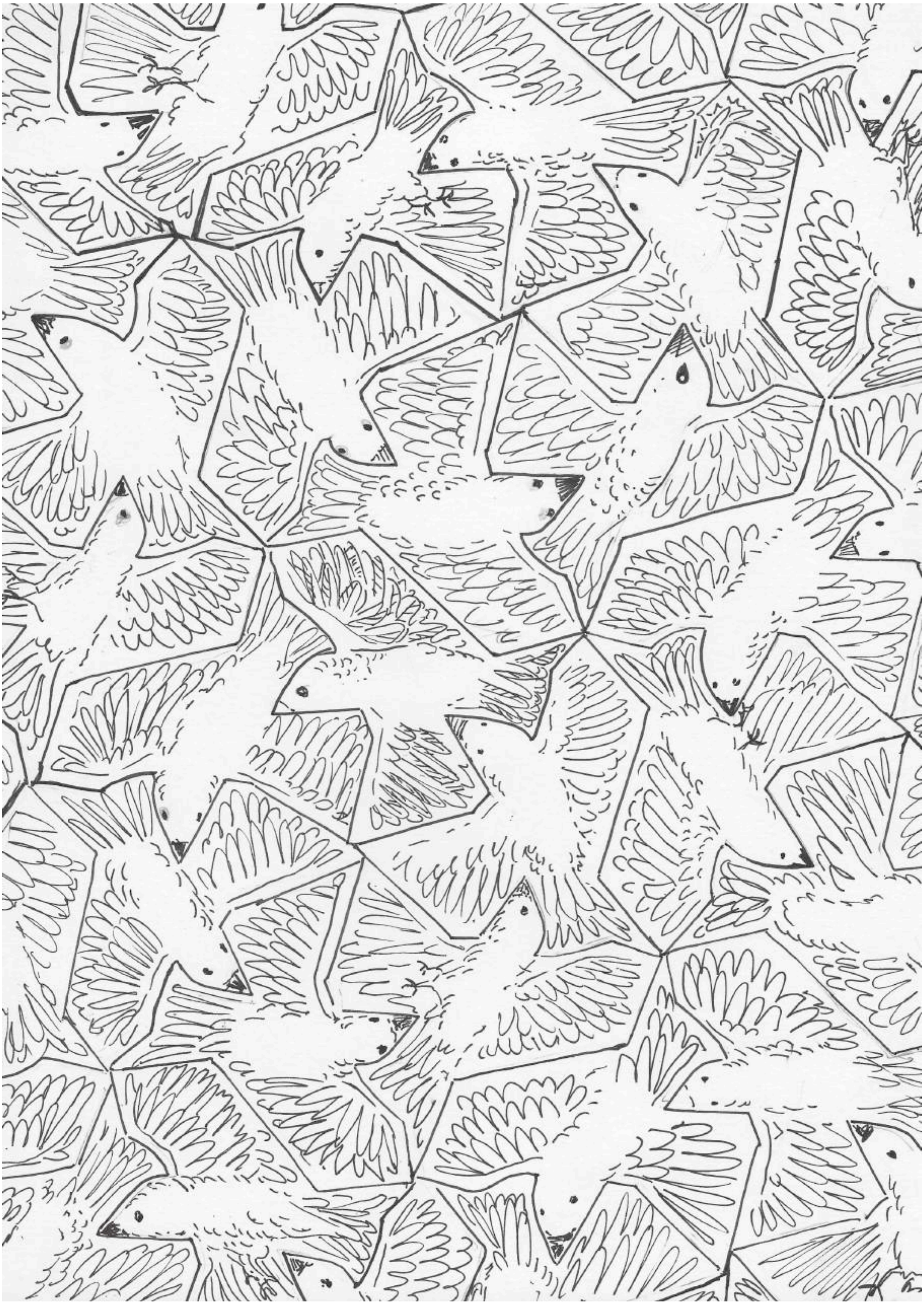
Gravemeijer (2008) considera que existem níveis de matematização. Para o autor, pode-se lidar com situações a partir de modelos particulares de resolução que, ainda que resolvam aquela situação, podem ser refinados a fim de que emerja um modelo mais geral (ou mais formal) que resolve aquela e outras situações. Por exemplo, suponha que, em um problema, seja apresentada uma sequência de triângulos, em que, na primeira figura, há 1 triângulo, na segunda, 3, na terceira, 6 e na quarta, 10 e, então, seja perguntado quantos triângulos comporão a quinta figura se ela seguir um padrão observável nas quatro primeiras. Uma das estratégias que pode resolver o problema é reconhecer o padrão, desenhar a quinta figura e contar a quantidade de triângulos ali existentes. Tal estratégia resolve aquele problema em um âmbito situacional, local. Outros problemas do mesmo tipo podem ser resolvidos a partir da mesma estratégia se for possível desenhar a figura solicitada. Entretanto, para casos em que não é possível desenhar a figura, a estratégia não resolve o problema. É possível que, por meio de um refinamento matemático (ou de um tratamento de formalização), essa estratégia se torne mais geral e, então, mais formal. Por meio do desenho, pode-se reconhecer uma regularidade expressa, inicialmente em números e, em seguida, algebricamente para que, por meio da expressão matemática adotada, seja possível calcular a quantidade de triângulos em qualquer figura sem necessariamente desenhá-la. Gravemeijer (2008) afirma que a matematização passa por diferentes níveis, como os apresentados na Figura 1.

Figura 1 – Níveis de Gravemeijer (2008)



Fonte: Gravemeijer (2008, p. 14).

A partir das ideias da RME apresentadas neste capítulo, no capítulo seguinte serão apresentadas algumas considerações a respeito da avaliação da aprendizagem escolar.



“**Tecelagem**”
210x297mm
Nanquim
Aline Yuri Sato

2 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR

Tanto as mudanças curriculares feitas pelos professores estadunidenses, que contribuíram para o início do Movimento da Matemática Moderna, quanto as discussões a respeito do ensino de matemática propostas pela Educação Matemática Realística, acabam por suscitar outras modificações em âmbito pedagógico, como mudanças na concepção de avaliação. De acordo com De Lange (1995), mudanças curriculares levam, consequentemente, a repensar avaliação.

Em 1983, no livro “Manual de Avaliação Formativa e Somativa do Aprendizado Escolar”, Bloom, Hastings e Madaus afirmam que o acesso à escola era, ainda, restrito por condições de investimentos governamentais, mas que, em breve (da data que escreveu), o acesso a escola aumentaria em muitos países. Nesse sentido, avaliar os estudantes com o objetivo de selecionar, classificar se tornaria desnecessário.

Mesmo assim, ainda hoje, a avaliação tem sido discutida na tentativa de repensar o papel somente de seleção, classificação, predição, atribuição de notas, que tem sido feito em muitas escolas e que, segundo De Lange (1995), não condiz com abordagens de ensino (como a RME) que pensam em um ensino que visa formar cidadãos capazes de lidar matematicamente com situações reais (DE LANGE, 1995).

Buriasco (2000) distingue avaliação de rendimento de avaliação da aprendizagem. Para ela, avaliação de rendimento refere-se ao produto final; é feita de maneira pontual, usualmente no final de um período de tempo (mês, bimestre, semestre, ano), cujo resultado não tem grandes possibilidades de mudança; é conhecida, também, por avaliação somativa. Já a avaliação da aprendizagem é aquela que se refere ao processo; é contínua, ao longo de todo o período da disciplina e possibilita a retomada da aprendizagem; é conhecida, também, por avaliação formativa (BURIASCO, 2000) ou avaliação didática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

A avaliação proposta pelos autores da Educação Matemática Realística é a da aprendizagem. De Lange (1995; 1999) apresenta nove princípios[9] para a avaliação nessa perspectiva. São eles:

> 1. O primeiro, e principal, propósito da avaliação é auxiliar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem.
> 2. Métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem.
> 3. Avaliação deve operacionalizar todos os objetivos da Educação Matemática.
> 4. A qualidade da avaliação em matemática não é dada primariamente pela acessibilidade à pontuação.
> 5. Matemática está imbuída em problemas úteis (atraentes, educativos, autênticos) que são parte do mundo real dos estudantes.
> 6. Critérios de avaliação devem ser públicos e consistentemente aplicados.
> 7. O processo de avaliação, incluindo pontuação, deve ser aberto aos estudantes.
> 8. Estudantes devem ter a oportunidade de receber *feedback* genuíno de seus trabalhos.
> 9. Um planejamento de avaliação balanceado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades (formatos) para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações (DE LANGE, 1999, tradução nossa).

De acordo com o autor, os princípios não eram novos (em 1995), mas continham elementos importantes para pensar a avaliação em sala de aula (DE LANGE, 1995). Este capítulo apresenta informações de autores que configuram a perspectiva de avaliação do GEPEMA a partir dos nove princípios de De Lange, buscando discutir cada princípio.

2.1 O PRIMEIRO, E PRINCIPAL, PROPÓSITO DA AVALIAÇÃO É AUXILIAR O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM

Em oposição à concepção de avaliação somente para fins de seriação, classificação, centrada no produto de atividades dos estudantes e, sobretudo, com fins de exclusão social (ESTEBAN, 1999; 2002), está uma concepção de avaliação cujo foco está na promoção do desenvolvimento dos indivíduos (BLOOM; HASTINGS; MADAUS, 1983). O GEPEMA entende que esse foco é visado ao passo que a avaliação é tomada como **oportunidade de**

[9] Em 1995, De Lange apresenta cinco princípios e em 1999 apresenta 9. Neste texto de tese, apresento os nove princípios a partir de discussões advindas dos dois textos.

aprendizagem, que é definida como “ocasião conveniente ao ato de aprender” (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 44).

Tomar a avaliação como oportunidade de aprendizagem implica, entre outras coisas, entender que avaliação, ensino e aprendizagem são processos amalgamados e, nesse sentido, a avaliação está a serviço dos demais processos. Esteban (2002) considera que a prática avaliativa

> traz ao mesmo tempo os saberes e os não-saberes de quem ensina e de quem aprende, mostrando que não é só a professora quem ensina, nem é só o/a aluno/a quem aprende. Avaliando as crianças, as professoras também se avaliam; indagando sobre o processo de aprendizagem, também indagam sobre o processo de ensino (ESTEBAN, 2002, p. 137).

A afirmação de Esteban (2002) e os estudos de Pedrochi Junior (2012) sugerem que avaliação é um processo que suscita, e requer, reflexão nos/dos processos (de ensino, de aprendizagem, de avaliação). Alves (2006) considera que reflexões do professor o levam a

> autoavaliar-se, questionando-se sobre seu trabalho, identificando as possíveis falhas nos diversos aspectos: se as estratégias utilizadas foram adequadas para provocar o aluno; [...] se o conteúdo foi significativo; se as atividades foram diversificadas e proporcionaram, de fato, ao aluno, a construção do conhecimento; se alunos foram bem orientados; se a avaliação foi adequada, valorizando sua produção e se priorizou o quantitativo ou o qualitativo (ALVES, 2006, p. 34).

Para os estudantes, a avaliação pode servir como um meio para refletirem, aprenderem, repensarem suas práticas/estratégias de estudo (PIRES, 2013; FERREIRA, 2013).

2.2 MÉTODOS DE AVALIAÇÃO DEVEM POSSIBILITAR AOS ESTUDANTES MOSTRAREM O QUE SABEM, NÃO O QUE NÃO SABEM

Como uma crítica às provas utilizadas com fins de descontar notas dos estudantes, Buriasco (2000) afirma que “uma prova dessas apenas penaliza os erros cometidos, sem que o professor busque meios para compreendê-los e para trabalhar com eles, transformando-os em estratégias para a aprendizagem” (BURIASCO, 2000, p. 175). Nessa direção, busca-se pensar em uma concepção de avaliação que não se fixe nos erros e, sobretudo, na penalização àquele que erra. Tal concepção envolve deixar de lado a ideia de “avaliar para saber se o estudante ‘de fato’ aprendeu” e adotar a ideia de que avaliação (por meio de seus instrumentos, suas estratégias e ações) pode fornecer ao professor uma quantidade importante de informações a respeito da aprendizagem dos estudantes, como as estratégias que escolhem para resolver problemas, como lidam com seus procedimentos de resolução.

Dessa maneira, as produções dos estudantes se tornam fontes ricas de informações para o professor (e o estudante) “interrogar o que é diretamente observável, percorrer caminhos, compreender processos, seguir vestígios e, com isso, inferir sobre o que não o é, ou seja – investigar” (FERREIRA, 2009, p. 20).

Ferreira (2009) define avaliação como prática de investigação como

> um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrinhar, seguir a pista do que é observável, conhecido (FERREIRA, 2009, p. 21).

De acordo com autores do GEPEMA, tomar a avaliação como prática de investigação possibilita:

- valorizar o que o estudante sabe (PEREGO S., 2005);
- repensar o significado atribuído ao “erro” (ALVES, 2006);
- ter informações a respeito do trabalho que vem sendo desenvolvido com os estudantes (PEREGO F., 2006);
- investigar como alunos organizam o pensamento ao resolver problemas (PEREGO F., 2006);
- obter informações a respeito de conteúdos que os estudantes já sabem (PEREGO F., 2006);
- conhecer estratégias e procedimentos utilizados pelos estudantes para resolver problemas (SANTOS, 2008);
- tornar a avaliação uma oportunidade de aprendizagem (PEDROCHI JUNIOR, 2012);
- buscar indícios a respeito das dificuldades dos estudantes (FERREIRA, 2013).

Em relação ao segundo item citado, “erro” passa a ser assumido “não como a mera ausência de conhecimento ou como reflexo da incapacidade, mas como aspecto que indica a complexidade do processo ensino/aprendizagem”

(ESTEBAN, 2002). A autora, após investigar, em um contexto escolar, procedimentos avaliativos de uma professora e fomentar discussões a respeito de sua concepção de erro, afirma:

> Investigando as respostas erradas de seus alunos e alunas, a professora ia identificando **seus conhecimentos, seus saberes, as relações que estabeleciam**, ia tendo novas informações, ia se configurando uma nova percepção do contexto. Iluminando o erro, no cotidiano sempre igual, iam se revelando as diferenças. As respostas erradas, anteriormente tratadas homogeneamente como indícios da não-aprendizagem, passavam a ser analisadas em suas particularidades, de tal modo que as diferenças iam sendo percebidas, evidenciando **a presença de conhecimentos diferentes** (ESTEBAN, 2002, p. 134, grifos nossos).

Dessa situação, destacam-se dois aspectos evidenciados por uma nova maneira de pensar o “erro”: a existência de conhecimentos diferentes e a possibilidade de o professor identificar informações a respeito de sua prática.

Admitir a existência de conhecimentos diferentes implicou, para o GEPEMA, deixar de focar nos erros/acertos e pensar nas maneiras de lidar dos estudantes (VIOLA DOS SANTOS, 2007). Nesse sentido, valoriza-se como o estudante lida com situações, tarefas, problemas de matemática e, sobretudo, o que essas maneiras de lidar podem revelar a respeito de seus conhecimentos. Repensar o erro não significa que “tudo é permitido”, mas significa que se passa a ter uma visão de que as maneiras como estudantes lidam com as situações contêm os indícios importantes para o professor, como se fossem um ponto de partida para o trabalho pedagógico.

Além disso, analisar as maneiras de lidar revela informações a respeito da prática do professor e fornecem orientações em relação às suas práticas futuras. Certas maneiras de lidar podem representar, por exemplo, más interpretações na comunicação entre professor e aluno e outras informações importantes sobre essa interação. Podem, também, dar indícios ao professor de quais estratégias ele deve priorizar para que os estudantes possam refletir a respeito de suas produções.

2.3 AVALIAÇÃO DEVE OPERACIONALIZAR TODOS OS OBJETIVOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De Lange (1995) afirma que avaliação deve operacionalizar não somente alguns objetivos da Educação Matemática, como também aqueles relacionados à reprodução, memorização, mas sobretudo objetivos relacionados à matematização, reflexão, discussão, comunicação, criatividade, generalização. Portanto, o autor assume que há a necessidade de que o professor utilize diversos instrumentos de avaliação ao longo do seu trabalho (DE LANGE, 1995).

Para Pedrochi Junior (2012), a variedade de instrumentos permite ao professor tirar conclusões acerca da aprendizagem dos estudantes a fim de auxiliá-lo a fazer intervenções, levando em conta que diferentes instrumentos permitem trabalhar com diferentes informações e possuem diferentes limitações.

Hadji (1994) distingue os instrumentos de avaliação em três tipos:

> 1. Os **instrumentos que servem para recolher observações** são, pois, os que concorrem mais diretamente para a produção de informações para a avaliação. [...]
> 2. Podem ser considerados como **instrumentos de ajuda ao trabalho do aprendente**, por um lado, todos os instrumentos “de avaliação” susceptíveis de ajudarem os alunos a ver melhor o que se espera deles, e de contribuírem deste modo para a sua progressão, assim como todas as provas que, como já deixámos expresso mais acima, podem servir simultaneamente para a aprendizagem e para a sua avaliação. [...]
> 3. Uma das hipóteses nas quais se fundamenta a ideia da avaliação formadora é a de que o aluno aprende tanto melhor quanto mais se tornar autónomo. A representação dos fins e a apropriação dos critérios são, simultaneamente, os instrumentos e a marca de uma conquista da autonomia. Não seria também necessário encararmos sob o mesmo ponto de vista os **instrumentos cuja função é a de exprimir e de transcrever os resultados da avaliação**? Trata-se, ainda, de dar ao aluno informações de que ele possa apropriar-se para as utilizar na auto-regulação de suas aprendizagens. [...]” (HADJI, 1994, p. 170-172, grifos do autor).

E, ainda, segundo o mesmo autor, qualquer instrumento pode pertencer à avaliação formativa, uma vez que o caráter formativo não está no instrumento, mas no uso que se faz dele e das informações que ele possibilita ao professor ter acesso. “O que é formativo é a decisão de pôr a avaliação ao serviço de uma progressão do aluno e de procurar todos os meios susceptíveis de agir nesse sentido” (HADJI, 1994, p. 165).

2.4 A QUALIDADE DA AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA NÃO É DADA PRIMEIRAMENTE PELA ACESSIBILIDADE À PONTUAÇÃO

Diferente de avaliações estandardizadas, a avaliação na Educação Matemática Realística não tem como objetivo que a correção (e pontuação) respeite o paradigma da docimologia: “correções devem ser feitas como se uma máquina as tivesse feito” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1999).

Assim como os critérios de correção são subjetivos (tratarei disso ao discutir o sexto princípio), a pontuação (atribuição de notas) também é subjetiva. Hadji (1994) considera que

> as notas podem variar consoante o humor, a disponibilidade ou o estado de fadiga daquele que as atribui. Mas as notas são também a expressão daquilo a que cada um será mais sensível para além da impressão imediata produzida. Assim, determinado corretor dará uma grande importância ao domínio da língua, mesmo num exercício de Matemática; outro, à apresentação, etc. (HADJI, 1994, p. 98).

Ainda que se entenda que há a necessidade da atribuição de notas ou conceitos por fins institucionais e políticos em diversas situações de ensino (na Educação Básica, no Ensino Superior), deve-se ter clareza de que as notas pouco podem ser utilizadas em termos de *feedback* para os estudantes ou para revelar o que sabem.

Bloom, Hastings e Madaus (1983) consideram que informações como “esforce-se mais”, “C”, “76” não fazem sentido em relação à função da avaliação de informar aos estudantes sobre suas aprendizagens. Hadji (1994) diz que a utilização de notas e conceitos como forma de comunicação pode causar diversos tipos de compreensões e, consequentemente, mal-entendidos.

Entretanto, a nota “é útil se os parceiros do diálogo, de que ela é instrumento, possuírem o mesmo léxico que define os domínios de referência em que ganharão significações que ela condensa” (HADJI, 1994, p. 96).

2.5 Matemática está imbuída em problemas úteis (atraentes, educativos, autênticos) que são parte do mundo real dos estudantes

Para a perspectiva de avaliação adotada pelo GEPEMA, as tarefas (problemas, situações) desempenham um importante papel. Por meio delas, quando bem escolhidas pelo professor, pode-se ter informações a respeito das aprendizagens dos estudantes, bem como possibilitar intervenções que constituam oportunidade de aprendizagem aos alunos.

Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) afirmam que as tarefas devem levar os estudantes a “pensar, refletir, criticar, levantar hipóteses, compreender e correlacionar conteúdos” (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 76). Para isso, a RME considera que o professor deve trabalhar com bons problemas. Van den Heuvel-Panhuizen (1996) apresenta algumas características dos bons problemas sintetizadas por Pereira Junior (2014) (Quadro 2).

Quadro 2 – Características dos bons problemas para a RME

Informativos	Ao envolver o que o professor pretende avaliar, devem • expressar o máximo de informações possíveis a respeito do conhecimento dos alunos e de como aplicam esse conhecimento em situações novas; • revelar algo do processo subjacente às escolhas das estratégias e procedimentos feitos pelo aluno.
Significativos	Devem • ser atraentes, convidativos, desafiadores; • ser matematicamente interessantes e cativantes; • envolver conteúdos interessantes em situações realísticas; • conter características não-rotineiras; • poder ser abordados de diferentes maneiras e em diferentes níveis de compreensão; • ser acessíveis aos alunos; • ter motivo para serem resolvidos.
Transparentes	Devem • permitir ao aluno mostrar o nível em que se encontra; • possibilitar informações para que todos pelo menos tentem solucioná-los.
Elásticos/ Flexíveis	São os que • exigem mais do que apenas lembrar de um fato ou reproduzir um procedimento conhecido; • não exigem uma única estratégia padrão, podem ser resolvidos por diferentes estratégias, em diferentes níveis de aprendizagem; • possibilitam aos alunos mostrarem seu potencial matemático; • demonstram seu componente educativo (o professor e o aluno poderão aprender a partir da resolução e da resposta à tarefa). Oportunizam aos alunos: • a utilização de suas experiências pessoais na elaboração de suas próprias respostas; • apresentarem suas resoluções e respostas com suas próprias palavras.
Acessíveis	O enunciado deve • ser tão claro quanto possível; • evidenciar se o conhecimento envolvido é insuficiente para a solução; • proporcionar oportunidades para aprofundamento.

Fonte: Pereira Junior (2014).

Além disso, entende-se que as tarefas de avaliação e as tarefas de aprendizagem não são distintas. Perego F. (2006) considera que o professor deve utilizar as tarefas de sala de aula para avaliar os estudantes enquanto ensina; já Viola dos Santos (2007) acrescenta que as tarefas de avaliação devem ser tomadas como tarefas que suscitem a aprendizagem. Idealmente, não há distinção entre esses dois tipos de tarefas. Cabe ao professor conhecer diferentes tipos de tarefas e escolhê-las para que sejam oportunidades de aprendizagem ao mesmo tempo que ferramentas para obter informações a respeito do que os estudantes sabem.

2.6 Critérios de avaliação devem ser públicos e consistentemente aplicados

Para Hadji (1994), a avaliação é um ato “de ‘leitura’ de uma realidade observável, que [...] se realiza com uma grelha predeterminada, e leva a procurar, no seio dessa realidade, os sinais que dão o testemunho da presença dos traços desejados” (HADJI, 1994, p. 31). Ao se referir a “grelha predeterminada” (ou “grelha de leitura”), Hadji (1994) aponta a necessidade da elaboração de critérios para que o professor possa “formular juízos” em relação à realidade observável e a grelha de leitura.

Para a Educação Matemática Realística, pode parecer estranho pensar em um ideal ao qual os estudantes são comparados. Entretanto, a RME entende que o professor deve auxiliar os estudantes a que suas produções e resoluções convirjam para as normas adotadas pela comunidade matemática. Esse é um exemplo de como utilizar uma grelha de leitura à serviço dessa perspectiva de ensino.

Os critérios de avaliação presentes na grelha de leitura utilizada pelo professor devem ser explícitos para os estudantes. Moraes (2013) afirma que “em uma avaliação da aprendizagem, todo aluno tem o direito de saber em função de quais critérios e a qual comparação ele foi submetido” (MORAES, 2013, p. 22). Isso porque a avaliação é, por si, subjetiva.

Hadji (1994) considera que a subjetividade reside no avaliador que, quando substituído implica em mudança no discurso avaliativo. É importante, então, que o professor tenha critérios bem definidos, mesmo que contestáveis, e que eles sejam conhecidos pelos estudantes, para que, pelo menos, exista um apoio em aspectos que permitam orientar e organizar o trabalho.

Por fim,

> poder-se-ia aqui objectar que a não-comunicação dos critérios de avaliação manifesta apenas uma negligência, sem dúvida censurável [...] e que conviria mais lastimar uma insuficiência que deveria ser fácil de remediar, do que condenar um autoritarismo que não é evidente (HADJI, 1994, p. 111).

2.7 O PROCESSO DE AVALIAÇÃO, INCLUINDO PONTUAÇÃO, DEVE SER ABERTO AOS ESTUDANTES

Avaliação e os demais processos pedagógicos (incluindo ensino e aprendizagem) são indissociáveis, embora possamos falar de cada um deles. Entretanto, não é possível pensar que o estudante seja responsável pela sua aprendizagem sem pensar que ele também deva ter papel ativo no seu processo de avaliação.

Hadji (1994) afirma que participar da avaliação é um direito dos estudantes e apresenta três maneiras de o estudante exercer esse direito: como um simples fornecedor de informações, como um produtor de informações que auxilia na construção de instrumentos de avaliação e de avaliador propriamente dito (HADJI, 1994).

Desse modo, "a função de avaliar não precisa ser apenas de responsabilidade do professor. É importante, também, que os alunos se sintam responsáveis e tenham autonomia para avaliar suas tarefas e desenvolver um espírito autocrítico" (FERREIRA, 2013, p. 18). E tal autonomia pode ser desenvolvida por meio, por exemplo, da autoavaliação.

Autoavaliação é entendida como o processo em que o estudante se avalia por meio de instrumentos fornecidos pelo professor ou não. A autoavaliação pode ocorrer de diferentes maneiras: o estudante pode utilizar informações oferecidas pelos instrumentos de avaliação ou por intervenções do professor para refletir a respeito de suas aprendizagens, já que "o maior mérito da avaliação formativa está na ajuda que ela pode dar ao aluno em relação à aprendizagem" (BLOOM; HASTINGS; MADAUS, 1983, p. 142); também pode, por meio de instrumentos fornecidos pelo professor (como fichas de autoavaliação) refletir a respeito de si (e sua aprendizagem); pode, também, usar de um referente (adotado por si mesmo) contendo critérios que considere legítimos (HADJI, 1994) criados por ele mesmo para auto avaliar-se.

Independente da maneira como o estudante se autoavalia, é importante que o professor fomente e incentive a participação do estudante no processo de avaliação não apenas como um fornecedor de informações, mas como participante autônomo desse processo.

2.8 ESTUDANTES DEVEM TER A OPORTUNIDADE DE RECEBER *FEEDBACK* GENUÍNO DE SEUS TRABALHOS

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) dedica parte do seu trabalho à discussão a respeito das características de bons problemas de matemática na perspectiva da RME. Algumas características foram apresentadas no Quadro 2. Além daquelas, a autora afirma que bons problemas de matemática devem oferecer ao estudante a oportunidade de mostrar o que sabem para que possam receber *feedback* a respeito de suas produções a fim de revisá-las (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Para Bloom, Hastings e Madaus (1983), a emissão de *feedbacks* é a própria essência da avaliação formativa e eles consideram a necessidade de que essa emissão seja a mais rápida possível.

Algumas definições de *feedback*[10] utilizam o termo "*gap*" (ou ainda apontam para a existência de um *gap*), que pode ser traduzido como lacuna, falha. De Lange (1999) afirma que na Educação Matemática Realística não é possível pensar em *gap* em relação à aprendizagem, uma vez que se entende que as produções dos estudantes podem até ser informais, mas não possuem lacunas.

Entretanto, a ideia de *feedback* para a RME faz sentido quando há produção de informações (em formato de intervenção oral, escrita) nas produções dos estudantes em busca de que suas produções se tornem mais formais ou que os ajudem a seguir caminhos que escolheram para resolver problemas. Entende-se que

> não existe um único *feedback* para cada situação, e é importante que os *feedbacks* forneçam informações úteis aos alunos, ou seja, informações sobre seus erros e acertos, sobre suas estratégias para

---

[10] De Lange (1999) apresenta algumas, como a de Ramaprasad (1983): "*Feedback is information about the gap between the actual level and the reference level of a system parameter, which is used to alter the gap in some way. In order for feedback to exist, the information about the gap must be used in altering the gap*" (DE LANGE, 1999, p. 46).

> resolver um problema, sobre uma possível melhora em algum aspecto. (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 48).

De Lange (1999) diz que o *feedback* pode ser dado de duas maneiras: por meio de informações explícitas a respeito das maneiras de lidar ou sugestões a respeito dos procedimentos dos estudantes (*feedback* direto); ou por meio de perguntas que suscitem reflexão ou pedidos de explicação (*feedback* indireto[11]).

Independente de como for feito (direta ou indiretamente, individual ou coletivamente, afirmativa ou interrogativamente), o *feedback* é um elemento essencial para a prática de avaliação formativa, e a avaliação como oportunidade de aprendizagem pode ser prejudicada pela sua ausência (DE LANGE, 1999).

2.9 UM PLANEJAMENTO DE AVALIAÇÃO BALANCEADO DEVE INCLUIR MÚLTIPLAS E VARIADAS OPORTUNIDADES (FORMATOS) PARA OS ESTUDANTES MOSTRAREM E DOCUMENTAREM SUAS REALIZAÇÕES

Em relação ao planejamento, a Educação Matemática Realística trabalha com Trajetórias de Ensino e Aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010; SILVA, 2015; ROSSETTO, 2016), que são, em linhas gerais, descrições feitas pelo professor de possíveis caminhos adotados pelos estudantes nas aulas e possíveis estratégias as quais o professor pode utilizar para intervir nas diferentes maneiras de lidar dos estudantes.

De Lange (1999) propõe o trabalho com Trajetórias de Avaliação, que podem ser entendidas como descrições feitas pelo professor das diferentes estratégias de avaliação, do uso dos instrumentos e dos encaminhamentos possíveis em relação às informações coletadas por meio de cada instrumento.

Para isso, é necessário que o professor tenha clareza dos seus objetivos de ensino, das intenções que tem ao trabalhar naquela turma. Para Hadji (1994), há uma relação direta entre os objetivos e o que se espera da avaliação e uma das funções da avaliação é fazer emergir o objeto que se quer avaliar, ou seja, possibilitar o aluno mostrar-se em relação ao que se espera.

Ainda sobre o planejamento, Hadji (1994) apresenta algumas perguntas que o professor pode fazer para se planejar: “Avaliar: o quê? Por quem?

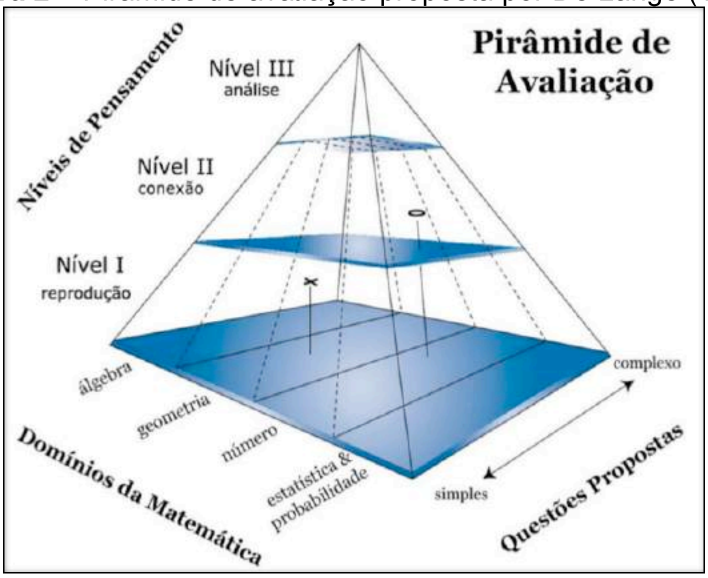
---

[11] Van den Heuvel-Panhuizen (1996) chama de *feedback* inerente.

Quando? Como? Para quem? Para quê?". Responder perguntas como essas (e definir os objetivos) pode auxiliar o professor a escolher seus "materiais, procedimentos e estratégias de ensino" (BLOOM; HASTINGS; MADAUS, 1983, p. 10). Tais escolhas podem ser feitas com base em diversas informações. Bloom, Hastings e Madaus (1983) sugerem que o professor utilize de alguns elementos para seu planejamento: usar a experiência que tem, consultar especialistas ou outros professores, buscar informações na literatura a respeito de aprendizagem, psicologia, diferenças culturais entre estudantes, ensino. Além disso, é fundamental ao professor "colocar-se no lugar" dos estudantes (LOPEZ, 2010), com vistas a criar hipóteses que auxiliem a planejar o encaminhamento das aulas e das atividades avaliativas.

Para auxiliar o professor na elaboração de provas escritas (em diferentes formatos), De Lange (1999) apresenta uma proposta de "pirâmide de avaliação" (Figura 2). Nela, estão presentes três níveis de demanda cognitiva (reprodução, conexão e reflexão/análise), "graus" de complexidade (de simples a complexo) e domínios da Matemática enquanto disciplina escolar (álgebra, geometria, número e estatística & probabilidade).

Figura 2 – Pirâmide de avaliação proposta por De Lange (1999)



Fonte: Ferreira (2013).

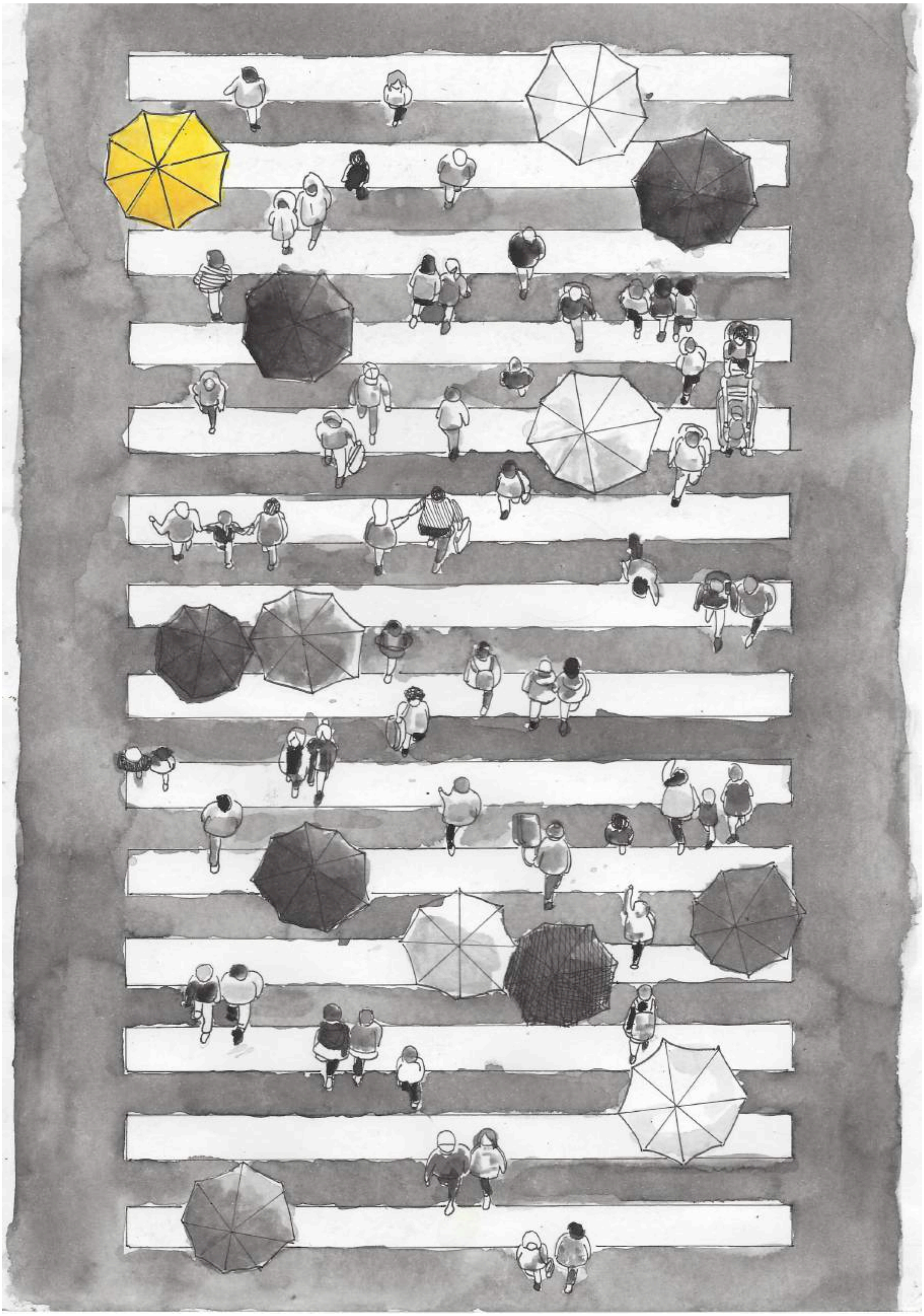
No Nível 1 (reprodução), os estudantes lidam com tarefas de reconhecimento, sendo necessário memorização de objetos, propriedades, características, termos, definições, a fim de realizar procedimentos rotineiros, como a aplicação de algoritmos. No Nível 2 (conexão), os estudantes realizam conexões entre domínios da matemática, integrando informações para resolver os problemas propostos; a exigência de matematização é menor que no terceiro nível, sendo necessário o uso de diferentes representações em algumas tarefas. No Nível 3 (análise), os estudantes matematizam, reconhecendo e “extraindo” a matemática que está presente na situação. Nesse tipo de tarefa, o estudante pode desenvolver seus próprios modelos e estratégias, utilizando argumentos matemáticos, como provas e generalizações. Dentre as atividades presentes na matematização necessárias para resolver tarefas do Nível 3, destacam-se análise, interpretação, reflexão, generalização, *insight*, elaboração de problemas (DE LANGE, 1999).

Para Hadji, um planejamento em relação à avaliação (como as trajetórias de avaliação) deve ser tal que:

> - descreve e articula determinadas modalidades de recolha de informação;
> - prevê os níveis e os tipos de confrontação referente/referido a realizar.
>
> Construir um dispositivo é, pois, organizar os meios (instrumentos, atores) de acordo com um plano, que será estruturado em função:
>
> a) da natureza do projeto de avaliação. Em particular:
>   - do modelo de avaliação privilegiado;
>   - do modelo de funcionamento que domina a realidade avaliada;
>
> b) da natureza do projeto de formação:
>   - finalidades gerais;
>   - intenções dominantes de mudança;
>   - modelo de formação privilegiado;
>
> c) particularidades concretas do sistema de formação no seio do qual o objeto de observação será recortado (HADJI, 1994, p. 153-154).

Deve-se ter clareza de que um planejamento desse tipo “não implica em construir uma sequência de passos que serão rigidamente seguidos pelo professor ou pelo estudante” (SILVA, 2015), mas que o professor poderá, “à medida que trabalha com determinados grupos de alunos, [...] adaptar o plano à realidade (BLOOM; HASTINGS; MADAUS, 1983, p. 10).

Por fim, como todas as ações de ensino e aprendizagem demandam regras sociais (compiladas em, por exemplo, um contrato de trabalho – contrato didático), as ações de avaliação também suscitam a criação de um contrato. Quando professor e alunos estabelecem um acordo em relação à avaliação, em que o professor deixa claro suas intenções, método de trabalho, maneira como pontua as questões, o que considera importante ou não, está estabelecendo uma espécie de contrato de trabalho a que Ciani (2012) denomina contrato de avaliação.



Sem título
297x420mm
Aquarela e nanquim
Aline Yuri Sato

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este terceiro capítulo apresenta uma discussão acerca dos aspectos metodológicos desta pesquisa.

Esta é uma pesquisa qualitativa, cujos objetos de análise são produções minhas (trajetória de avaliação, instrumentos de avaliação) e dos estudantes envolvidos no contexto da pesquisa (resoluções, produções escritas em provas). Portanto, destaca-se o caráter interpretativo e, consequentemente, a subjetividade no tratamento das informações, na análise dos dados e nas discussões. Para que essa subjetividade não dificulte a leitura do trabalho e para auxiliar na interpretação das análises, descreverei, a seguir, os procedimentos desta pesquisa.

3.1 ELABORAÇÃO DE UMA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Em novembro de 2015, iniciei a escrita da trajetória de avaliação (Apêndice A) da disciplina de Geometria e Desenho do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, cuja ementa encontra-se na Figura 3.

Figura 3 – Ementa da disciplina Geometria e Desenho da Universidade Estadual de Londrina

2MAT055 Geometria e Desenho
Geometria euclidiana plana. Axiomas. Congruências. Semelhança. Axioma das paralelas. Elementos de Geometria não-euclidiana. Geometria espacial. Construções fundamentais no plano. Construções de polígonos no plano. Equivalências de área. Transformações geométricas. Escala. Tangência, concordância e aplicações.

Fonte: <http://uel.br/prograd/docs_prograd/deliberacoes/deliberacao_13_13.pdf>. Acesso em: 25 maio 2017.

A princípio, busquei vislumbrar a maior quantidade de instrumentos de avaliação possível. Listei alguns instrumentos a partir da minha prática com a disciplina no ano de 2015, das discussões que o GEPEMA vinham fazendo e das minhas experiências como estudante de disciplinas conduzidas pela professora Regina Buriasco: Prova em Fases, Prova Escrita com Cola, Seminários, Ficha de Autoavaliação, Avaliação dos Colegas, Avaliação da Disciplina, Portfólio, Prova em

Grupo, Prova Elaborada pelos Estudantes, Vaivém[12]. Tais instrumentos eram previstos para serem trabalhados no ano letivo de 2016.

A partir dessas informações, organizei os conteúdos da ementa em unidades (Quadro 3). Recebe o nome unidade, cada conjunto de conteúdos agrupados para serem trabalhados.

Quadro 3 – Conteúdos da disciplina de Geometria e Desenho agrupados em unidades

Unidades	**Conteúdos**
Geometria Euclidiana Plana	→ Axiomas → Noções primitivas (ponto, reta e plano) → Segmentos de reta → Posições relativas entre retas → Construção: retas → Construção: divisão de segmentos em partes iguais e proporcionais → Ângulos e medições → Par de retas paralelas cortadas por transversal → Operações com medidas de ângulos → Construção: transporte de ângulos → Construção: operações com ângulos → Construção: bissetriz
Polígonos	→ Elementos de um polígono → Construção: polígonos regulares inscritos em circunferências → Construção: polígonos estrelados → Triângulos → Congruência de triângulos → Semelhança de triângulos → Cevianas → Pontos notáveis → Construção: cevianas e pontos notáveis → Quadriláteros notáveis
Circunferência e Círculo	→ Circunferência → Círculo → Ângulos na circunferência → Construção: tangente à circunferência → Construção: arco capaz → Concordância → Construção: ovais e espirais
Elementos de Geometria Não Euclidiana	→ Elementos de Geometria Hiperbólica → Elementos de Geometria Esférica → Elementos de Geometria Topológica → Elementos de Geometria Fractal

[12] Apresentarei informações a respeito de cada um desses instrumentos a partir da seção 3.2.1.

Áreas	→ Cálculo de áreas de regiões planas → Cálculo de áreas em Geometrias Não-Euclidianas
Transformações Geométricas	→ Escalas → Translações → Reflexões → Rotações → Homotetias
Geometria Espacial	→ Paralelismo e perpendicularidade no espaço → Diedros e triedros → Poliedros: poliedros convexos, prismas e pirâmides → Corpos redondos: cilindros, cones e esferas → Área e volume → Planificação

Fonte: o autor.

Para cada unidade, elenquei um instrumento de avaliação, além da Prova em Fases, o Portfólio, o Vaivém e a Ficha de Autoavaliação, que buscavam contemplar mais de uma unidade. De maneira geral, apresento no Quadro 4 os instrumentos de avaliação elencados para cada unidade.

Quadro 4 – Instrumentos de avaliação previstos para cada unidade

Unidades	Instrumentos de avaliação previstos
Geometria Euclidiana Plana	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Portfólio Vaivém
Polígonos	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Portfólio Vaivém
Circunferência e Círculo	Prova Elaborada Pelos Estudantes Prova em Fases Portfólio Vaivém
Elementos de Geometria Não-Euclidiana	Prova em Grupo Prova em Fases Portfólio Vaivém
Áreas	Trabalho Escrito Prova em Fases Vaivém
Transformações Geométricas	Portfólio Prova em Fases Vaivém

Geometria Espacial	Seminário Avaliação dos colegas Prova em Fases Portfólio Vaivém

Fonte: o autor.

Em seguida à distribuição de instrumentos de avaliação por unidade, escrevi o contrato de avaliação[13], buscando listar combinados a serem feitos com os estudantes para o bom andamento da disciplina. Em especial, por trabalhar em uma perspectiva não tradicional de avaliação, alguns combinados em relação à avaliação também foram listados. Por fim, listei alguns critérios de correção, pensando não somente na atribuição de notas, mas na possibilidade de informar os estudantes de suas produções. Alguns desses critérios eram expressos em códigos, não notas.

3.2 Aplicação da trajetória de avaliação e recolha de informações

No ano de 2016, foram atribuídas a mim duas turmas de licenciatura em Matemática cadastradas na disciplina 2MAT055 (Geometria e Desenho): uma turma de calouros (Turma 1000) e uma de estudantes que estavam cursando a disciplina novamente (Turma 3000). Ambas as turmas tiveram aulas no mesmo horário e na mesma sala: às terças e quartas-feiras, das 21h10 às 22h50 na Universidade Estadual de Londrina.

No início do ano, 34 alunos da turma 1000 e 5 da turma 3000 frequentavam a disciplina. Para o texto da tese, cada estudante recebeu aleatoriamente[14] um nome fictício, a fim de preservar suas identidades.

Escrevi uma carta ao Colegiado do curso de Matemática da UEL (Anexo A) solicitando autorização para a realização da pesquisa. Com a autorização dada, distribuí um termo de consentimento livre e esclarecido para cada estudante (Anexo B e Anexo C)[15] pedindo autorização para uso de suas produções nesta tese e, eventualmente, em outras produções científicas. O Quadro 5 contém informações

---

[13] O contrato de avaliação e os critérios de correção podem ser lidos na trajetória de avaliação (Apêndice A).
[14] Escolhi 39 nomes e sorteei, por meio do site http://random.org, um nome para cada estudante.
[15] No Anexo B, está o termo assinado pelos responsáveis dos estudantes menores de idade e, no Anexo C o termo assinado pelos estudantes maiores de idade.

a respeito da quantidade de termos assinados por estudantes maiores de idade e por responsáveis por estudantes menores de idade.

Quadro 5 – Quantidade de termos assinados por turma

Turma 1000	Maiores de idade	25
	Menores de idade	9
Turma 3000	Maiores de idade	5
	Menores de idade	0

Fonte: o autor.

No Quadro 4, apresentei os instrumentos de avaliação previstos para cada unidade. No Quadro 6, apresento os instrumentos utilizados, dadas as mudanças feitas ao longo do ano no planejamento e as necessidades que emergiram a partir da efetivação da trajetória de avaliação.

Quadro 6 – Instrumentos de avaliação previstos e utilizados

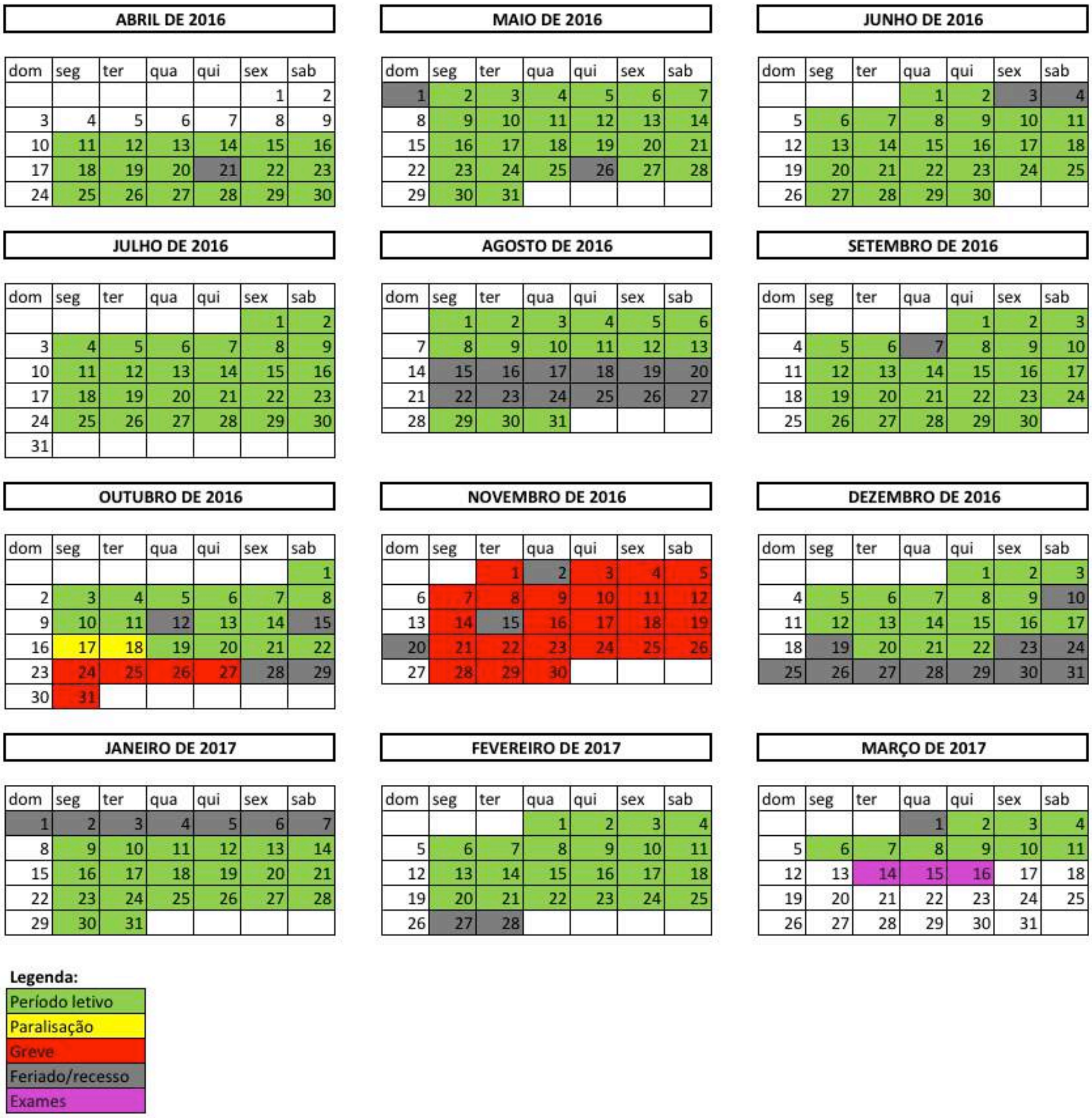
Unidades	**Instrumentos de avaliação previstos**	**Instrumentos de avaliação utilizados**
Geometria Euclidiana Plana	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Portfólio Vaivém	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Trabalho Escrito Caderno de Desenho Vaivém
Polígonos	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Portfólio Vaivém	Prova Escrita com Cola Prova em Fases Caderno de Desenho Seminário Trabalho Escrito Anotações dos Estudantes Vaivém
Circunferência e Círculo	Prova Elaborada Pelos Estudantes Prova em Fases Portfólio Vaivém	Prova Elaborada Pelos Estudantes Prova em Fases Caderno de Desenho Vaivém
Elementos de Geometria Não Euclidiana	Prova em Grupo Prova em Fases Portfólio Vaivém	Prova em Grupo Prova em Fases Vaivém
Áreas	Trabalho Escrito Prova em Fases Vaivém	Trabalho Escrito Prova em Fases Vaivém
Transformações Geométricas	Portfólio Prova em Fases Vaivém	Prova em Fases Vaivém

Geometria Espacial	Seminário Avaliação dos colegas Prova em Fases Portfólio Vaivém	Seminário Prova em Fases Caderno de Desenho Vaivém

Fonte: o autor.

Na Figura 4 apresento um calendário com informações a respeito do período letivo: datas de aulas, férias, paralisação e greve.

Figura 4 – Calendário referente ao ano letivo de 2016



Fonte: o autor.

A seguir, descreverei os procedimentos de coleta de informações referentes a cada instrumento de avaliação.

3.2.1 Prova Escrita com Cola

Prova Escrita com Cola é um instrumento de avaliação em que, para resolver uma prova escrita, os estudantes podem utilizar uma cola de papel feita de acordo com uma série de combinados. Nessa disciplina, combinei com os estudantes que a cola seria feita seguindo um padrão: um quarto de folha A4 frente e verso, podendo ser escrita frente e verso, à mão (não podendo ser fotocópia ou impressão). Cada estudante só poderia fazer prova se estivesse com uma cola.

Além disso, a correção da prova seria feita de tal maneira que valorizasse a cola. Assim, uma questão receberia código 2, caso a resposta estivesse correta com indício na cola; código 1, caso a resposta estivesse correta, mas sem indício na cola; código 0, caso a resposta estivesse incorreta e código 9, caso não houvesse resolução. Esse tipo de código é utilizado pelos membros do GEPEMA em seus trabalhos.

Forster (2016) investigou o uso de uma Prova Escrita com Cola em uma disciplina de um curso de pós-graduação. Em sua investigação, fez entrevistas com os estudantes da disciplina e afirmou que alguns deles, ao refletirem a respeito da cola, disseram que tomariam outras decisões em relação ao conteúdo selecionado para a cola, à organização das informações escritas, ao uso desse recurso. Optei, então, por utilizar o instrumento “Prova Escrita com Cola” em duas unidades, para que os estudantes tivessem a oportunidade de repensar suas colas e elaborar, em um segundo momento, novas colas a partir do que refletiram.

Descrevo as ações de recolha de informação das Provas Escritas com Cola nas seções que seguem.

3.2.1.1 Prova Escrita com Cola de Geometria Euclidiana Plana

A Prova Escrita com Cola de Geometria Euclidiana Plana (Apêndice B) foi aplicada no dia 25/05/2016. Os estudantes foram avisados no dia 11/05/2016 a respeito da elaboração das colas.

No dia da prova, não estavam presentes os alunos Diego, Otávio, Paulo e Vitor.

Na aula seguinte à prova (dia 31/05/2016), entreguei aos alunos uma folha com perguntas referentes à elaboração e à utilização da cola (Apêndice C). O objetivo era suscitar alguma reflexão sobre o instrumento de avaliação e sobre a maneira como organizaram seus estudos. Dos estudantes que fizeram a prova, Alexandre, Ana, Omar, Patrick, Reinaldo e Roberto não responderam essas perguntas.

Além disso, no dia 14/06/2016, trabalhei com a correção da prova em sala de aula. Dividi os estudantes em 9 grupos e distribuí uma questão para cada grupo elaborar o gabarito. Levei à sala fotocópias das provas e pedi para que cada grupo corrigisse a questão a ele designada em todas as provas, atribuindo código 2 para resolução correta, 1 para resolução parcialmente correta, 0 para resoluções incorretas e 9 para questões sem resolução. Não trabalhei com as colas na correção porque o meu objetivo era discutir aspectos de correção, não da elaboração das colas.

Cada grupo corrigiu suas questões e as provas foram devolvidas aos estudantes. Pedi para que, em casa, analisassem a correção e refizessem as questões que não estavam corretas ou escrevessem alguma frase contestando a correção que havia sido feita pelos colegas.

3.2.1.2 Prova Escrita com Cola de Polígonos

A Prova Escrita com Cola de Polígonos (Apêndice D) foi feita na última aula do primeiro semestre (10/08/2016). Como o semestre estava terminando e eu ainda não havia trabalhado quadriláteros, optei por fazer a Prova Escrita com Cola sem esse conteúdo, uma vez que eu precisava de um instrumento de avaliação escrito para obter algumas informações em relação a aprendizagem dos estudantes. Além disso, a quantidade de conteúdos já estava grande.

Não estavam presentes nessa Prova Escrita com Cola os estudantes Ana, Antonio, Beatriz, Diego, Felipe, Igor, Omar, Otavio, Paulo, Reinaldo, Vitor e Willian.

3.2.2 Anotações dos Estudantes

Para o conteúdo de quadriláteros, escolhi o instrumento “Anotações dos Estudantes”. A cada aula (31/08/2016, 06/09/2016, 13/09/2016, 14/09/2016, 20/09/2016, 21/09/2016), levei folhas de papel sulfite e pedi para os estudantes registrarem suas anotações nas folhas. Após cada aula, digitalizei suas produções e devolvi na aula seguinte. O objetivo era analisar as informações que os estudantes consideravam que deveriam ser anotadas. No Quadro 7, apresento informações a respeito da frequência dos estudantes nas aulas de quadriláteros a partir das chamadas e das folhas que me entregaram ao final de cada aula. O “X” indica presença do estudante em determinada aula.

Quadro 7 – Frequência dos estudantes nas aulas de quadriláteros

Estudante	31/08	06/09	13/09	14/09	20/09	21/09
Alexandre	X	X	X	X	X	X
Amanda	X	X	X	X	X	X
Ana						
Antonio						
Arthur	X	X	X	X	X	X
Beatriz						
Caio	X	X	X	X	X	X
Cássio	X	X	X	X		
Christian	X	X		X		
Daniel		X	X	X		X
Diego						
Douglas		X				X
Eduardo	X	X	X	X	X	X
Felipe						
Giovane	X	X	X	X	X	X
Igor						
Isabella	X	X	X		X	X
Jaqueline					X	X
João Pedro	X	X	X	X	X	X
Jonatas			X	X		X
Jorge	X	X		X	X	X
Karen	X	X	X	X	X	X
Kelly	X	X	X	X	X	X
Larissa	X	X	X	X	X	X
Luana	X	X	X		X	X
Lucca	X	X	X	X	X	X
Manuel	X			X	X	X
Marcos	X	X	X	X	X	X
Mariana	X	X	X	X	X	X

Estudante	31/08	06/09	13/09	14/09	20/09	21/09
Nicolas	X		X	X	X	X
Omar						
Otavio						
Patrick	X	X	X	X	X	X
Paulo						
Rafael	X	X	X	X	X	X
Reinaldo						
Roberto	X					
Vitor						
Willian						

Fonte: o autor.

3.2.3 Prova Elaborada Pelos Estudantes

Para os conteúdos referentes a Circunferência e Círculo, pedi para os estudantes elaborarem, em grupos, uma prova escrita destinada a estudantes de graduação em Matemática que cursam a disciplina de Geometria e Desenho, com valor de 10 pontos. A quantidade e a disposição das questões ficariam a critério dos estudantes. Fiz a proposta no dia 27/09/2016 e, por motivos de paralisação e greves, os estudantes me entregaram as provas no dia 20/12/2016. Ao total, me entregaram 9 provas.

No dia 21/12/2016, os estudantes resolveram as provas de seus colegas, que distribuí arbitrariamente.

Em razão da greve, o retorno às aulas demandou tempo em relação à unidade Circunferência e Círculo, uma vez que retomei alguns conceitos, discuti algumas construções que haviam sido feitas antes da greve. Portanto, toda a sequência de aulas precisou ter seu tempo reduzido e, consequentemente, precisei deixar de lado algumas dinâmicas que havia planejado. Uma delas foi a de que os próprios estudantes corrigiriam as provas resolvidas pelos colegas.

As informações foram coletadas por meio da recolha, via *e-mail*, das provas e gabaritos construídos pelos estudantes e das produções escritas das provas resolvidas.

3.2.4 Prova em Grupo

Para a unidade Geometrias Não Euclidianas, optei pelo instrumento "Prova em Grupo". No final de janeiro de 2017 e início de fevereiro de 2017, as aulas foram voltadas a uma introdução às geometrias Esférica, Hiperbólica, Fractal e Topológica. No dia 08/02/2017, os estudantes resolveram uma Prova em Grupos (sorteados em sala), com a intenção de apresentarem no dia 14/02/2017. A proposta era que haveria um sorteio do grupo que apresentaria cada questão e, em seguida, um sorteio do aluno que apresentaria em nome do grupo.

No dia da aplicação da prova escrita, entreguei duas cópias da prova para que pudessem levar uma cópia para casa e estudar para a apresentação. O Apêndice E contém a prova entregue aos estudantes, com 7 itens (em 5 questões). Na primeira questão, peço o cálculo da área e perímetro de um fractal. Considero que, nessa questão, estão presentes 2 itens. Dessa forma, era possível que cada grupo resolvesse um item na lousa.

Além de ter recolhido as provas escritas resolvidas pelos estudantes, ainda fiz anotações a respeito das apresentações e fotografias das resoluções que fizeram no quadro.

3.2.5 Trabalho Escrito

O Trabalho Escrito foi utilizado como instrumento de avaliação para a unidade Áreas. Para cada estudante, entreguei um mapa do Brasil (Anexo D) e uma figura de uma engrenagem (Anexo E). Pedi para que, ao longo dos estudos de área, os estudantes calculassem, individualmente, a área de uma região do Brasil e da figura da engrenagem distribuída (que distribuí arbitrariamente). A data de entrega dos trabalhos escritos dessa unidade foi no dia 31/01/2017. Recolhi os trabalhos escritos e os digitalizei.

3.2.6 Seminários

No último bimestre, distribuí temas de Geometria Espacial (Paralelepípedo, Prisma, Pirâmide, Cone, Cilindro e Esfera) para os estudantes apresentarem Seminários em grupos que eu escolhi. Pedi para que cada apresentação contivesse: definição do sólido geométrico, dedução da fórmula de cálculo da área, dedução da fórmula de cálculo do volume, planificação e resolução de um exercício. Além disso, cada estudante deveria levar para o seu Seminário um sólido geométrico feito à mão.

A cada dia de apresentação, eu fiz uma exposição de 10 a 15 minutos a respeito de algum tema de Geometria Espacial não contemplado nos Seminários, que tinham 40 minutos de duração cada um.

No dia 21/02/2017, falei sobre diedros, triedros e sobre a definição de poliedros, e os estudantes apresentaram Seminários sobre paralelepípedo e prisma. No dia 22/02/2017, discuti o princípio de Cavalieri e os estudantes apresentaram Seminário sobre pirâmide e cone. No dia 07/02/2017, o tema da aula foi Poliedros de Platão e os estudantes apresentaram Seminário sobre cilindro e esfera.

Avaliei os Seminários por meio de anotações no meu caderno, a respeito do conteúdo e da forma dos Seminários. Ao final de cada apresentação, fiz considerações em relação à forma, assim como alguns comentários acerca do conteúdo, especialmente quando os estudantes apresentavam algum conceito incorreto (do ponto de vista do conhecimento matemático) ou quando eu pensava que outras informações poderiam ser importantes.

3.2.7 Caderno de Desenho

O Caderno de Desenho, nessa disciplina, foi utilizado como instrumento de avaliação. Combinei com os estudantes que as construções geométricas seriam feitas nesse caderno (e não no caderno de linhas, que alguns usavam para os estudos de axiomas, teoremas, propriedades de figuras geométricas).

Eu havia previsto, na trajetória de avaliação, que os estudantes me entregariam os cadernos de desenho em quatro datas (uma no final de cada bimestre). Entretanto, como eles não estavam acostumados com a quantidade de instrumentos de avaliação que utilizamos na disciplina, constatei uma sobrecarga de informações e de coisas para os estudantes fazerem no final do bimestre. Desse modo, optei por recolher os cadernos de desenho em duas datas: uma ao final do primeiro semestre e outra ao final do segundo. Ainda assim, observava os cadernos a cada aula em que fazíamos construções.

3.2.8 Prova em Fases

A Prova em Fases é um instrumento de avaliação cuja dinâmica, como o nome já informa, é composta de várias fases. Na primeira fase os estudantes resolvem as questões (quais e quantas julgarem que devam fazer); nas fases seguintes eles retomam a prova com a oportunidade de resolver questões não resolvidas ou, refazer, alterar, refinar, questões já resolvidas.

Elaborei a Prova em Fases (Apêndice F) em abril de 2016, com base nos conteúdos das unidades que organizei. A prova continha 25 questões cada uma impressa em uma folha de sulfite, dispostas de maneira arbitrária. De maneira geral, todas as unidades continham ao menos uma questão na prova. A Prova em Fases deveria ser resolvida em 8 fases.

No primeiro dia de aula, mostrei aos estudantes as provas e pedi que escrevessem o nome no cabeçalho de cada folha. Combinamos que os estudantes poderiam ler o conteúdo da prova, mas não poderiam anotar informações, nem as registrar de alguma maneira. Nesse mesmo dia, marquei data para as quatro primeiras fases com os estudantes: 10/05/2016, 07/06/2016, 05/07/2016 e 02/08/2016. No início do segundo semestre e no retorno das aulas após a greve, mais quatro datas para as últimas fases: 28/09/2016, 11/01/2017, 08/02/2017 e 08/03/2017.

Combinei com os estudantes que, a cada fase, assinalariam no cabeçalho (Figura 5) da página de cada uma das questões que começaram a resolver, alteraram, apagaram ou fizeram alguma espécie de modificação na resolução que já havia sido feita, a fim de auxiliá-los em sua organização e me auxiliar na correção.

Figura 5 – Cabeçalho da Prova em Fases

Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

Fonte: o autor.

No Quadro 8, apresento a frequência dos estudantes nas fases[16].

[16] Alguns estudantes não têm frequência em fase alguma. Isso se justifica pelo fato de que assinaram o termo de consentimento, resolveram a primeira Prova Escrita com Cola e logo desistiram do curso ou desistiram sem antes fazer alguma prova da minha disciplina.

Quadro 8 – Frequência dos estudantes na Prova em Fases[17]

Estudante	Fase							
	1ª	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**7ª**	**8ª**
Alexandre	X	X	X	X		X	X	X
Amanda	X	X		X	X	X	X	X
Ana	X							
Antonio	X	X						
Arthur	X	X	X	X	X	X	X	X
Beatriz	X	X						
Caio	X	X	X	X	X	X	X	X
Cássio	X		X	X			X	X
Christian	X	X	X	X	X	X	X	
Daniel	X	X	X	X	X	X	X	X
Diego	X							
Douglas	X		X	X	X	X	X	X
Eduardo	X	X	X	X	X	X	X	X
Felipe		X	X					
Giovane	X	X		X	X	X	X	X
Igor	X	X						
Isabella	X	X	X	X		X	X	X
Jaqueline	X	X	X	X	X	X	X	X
João Pedro	X	X	X	X	X	X	X	X
Jonatas	X	X	X		X			
Jorge	X	X	X	X	X	X	X	X
Karen	X	X	X	X		X	X	X
Kelly	X	X	X	X	X	X	X	X
Larissa	X	X	X	X	X	X	X	X
Luana	X	X	X	X		X	X	X
Lucca	X	X	X	X	X	X	X	X
Manuel	X	X	X	X	X	X		
Marcos	X	X	X	X	X	X	X	X
Mariana	X	X	X	X		X	X	X
Nicolas	X	X	X	X	X	X	X	X
Omar	X	X	X	X				
Otavio								
Patrick	X	X	X	X	X	X	X	X
Paulo								
Rafael	X	X	X	X	X	X	X	X
Reinaldo								
Roberto	X	X		X		X	X	
Vitor								
Willian	X	X						

Fonte: o autor.

Ao final de cada fase, as provas foram digitalizadas.

[17] O “X” no quadro representa que o estudante estava presente na fase indicada.

3.2.9 Vaivém

Vaivém é um instrumento de avaliação criado e utilizado pela professora Regina Buriasco em aulas de graduação e pós-graduação desde 1978. O instrumento consiste no estabelecimento de um espaço de comunicação (por escrito) entre professor e estudantes (individualmente). De maneira geral, pode-se dizer que, no Vaivém, o professor faz uma pergunta para toda a classe e cada estudante responde em uma folha de papel. A partir da resposta individual de cada estudante, o professor faz outras perguntas, comentários ao estudante.

Combinei com os estudantes que cada um deveria providenciar um saco plástico, como os que são utilizados em pastas de guardar folhas de papel, e, em seu interior, colocar uma folha de rosto contendo nome e número de matrícula do estudante e o título "Vaivém", uma folha com a primeira pergunta e a resposta e uma folha em branco atrás para cobrir possíveis escritas no verso da segunda folha.

A primeira pergunta feita foi: "Para você, como deve ser uma boa aula de geometria?". Essa pergunta foi feita na primeira quarta-feira que dei aula (20/04/2016). A proposta era que os estudantes respondessem e devolvessem o Vaivém na quarta-feira seguinte. Eu teria uma semana para responder, entregando a eles seus vaivéns na próxima quarta-feira e, assim, semanalmente, às quartas-feiras, o Vaivém era entregue, ora para os estudantes, ora para o professor.

Por motivo de greve, feriados e outras atividades que aconteceram em dias letivos (palestras para os estudantes, por exemplo), a dinâmica foi, algumas vezes, interrompida. Entretanto, sempre que possível, às quartas-feiras, o Vaivém era dinamizado.

Nem todos os estudantes continuaram com o Vaivém. Uns responderam algumas vezes, mas não entregaram mais. Optei por continuar o diálogo com aqueles que se interessaram em participar da dinâmica.

Os estudantes que continuaram trabalhando com o Vaivém ao longo do ano foram: Alexandre, Arthur, Caio, Cássio, Christian, Daniel, Douglas, Eduardo, Isabella, Jaqueline, João Pedro, Jorge, Karen, Kelly, Larissa, Luana, Lucca, Marcos, Nicolas, Patrick e Rafael.

3.2.10 Ficha de Autoavaliação

Um dos instrumentos para autoavaliação foi a Ficha de Autoavaliação (Apêndice G e Apêndice H), que contém alguns tópicos para que os estudantes reflitam e respondam na ficha. Ao final de cada semestre, pedi para os estudantes preencherem as fichas: no final do primeiro semestre, pedi para os estudantes levarem para casa a ficha 1 (10/08/2016) e me entregarem no retorno das aulas (30/08/2016) e no final do segundo semestre, entreguei a ficha dia 07/03/2017 para me devolverem no dia 08/03/2017. As fichas foram digitalizadas.

A ficha 1 foi preenchida pelos estudantes Alexandre, Arthur, Caio, Cássio, Christian, Daniel, Douglas, Eduardo, Giovane, Isabella, Jaqueline, João Pedro, Jorge, Karen, Kelly, Larissa, Luana, Lucca, Marcos, Mariana, Patrick e Rafael e a ficha 2, pelos estudantes Alexandre, Amanda, Arthur, Caio, Cássio, Daniel, Douglas, Eduardo, Giovane, Isabella, Jaqueline, João Pedro, Jorge, Karen, Kelly, Luana, Lucca, Marcos, Mariana, Nicolas, Patrick e Rafael.

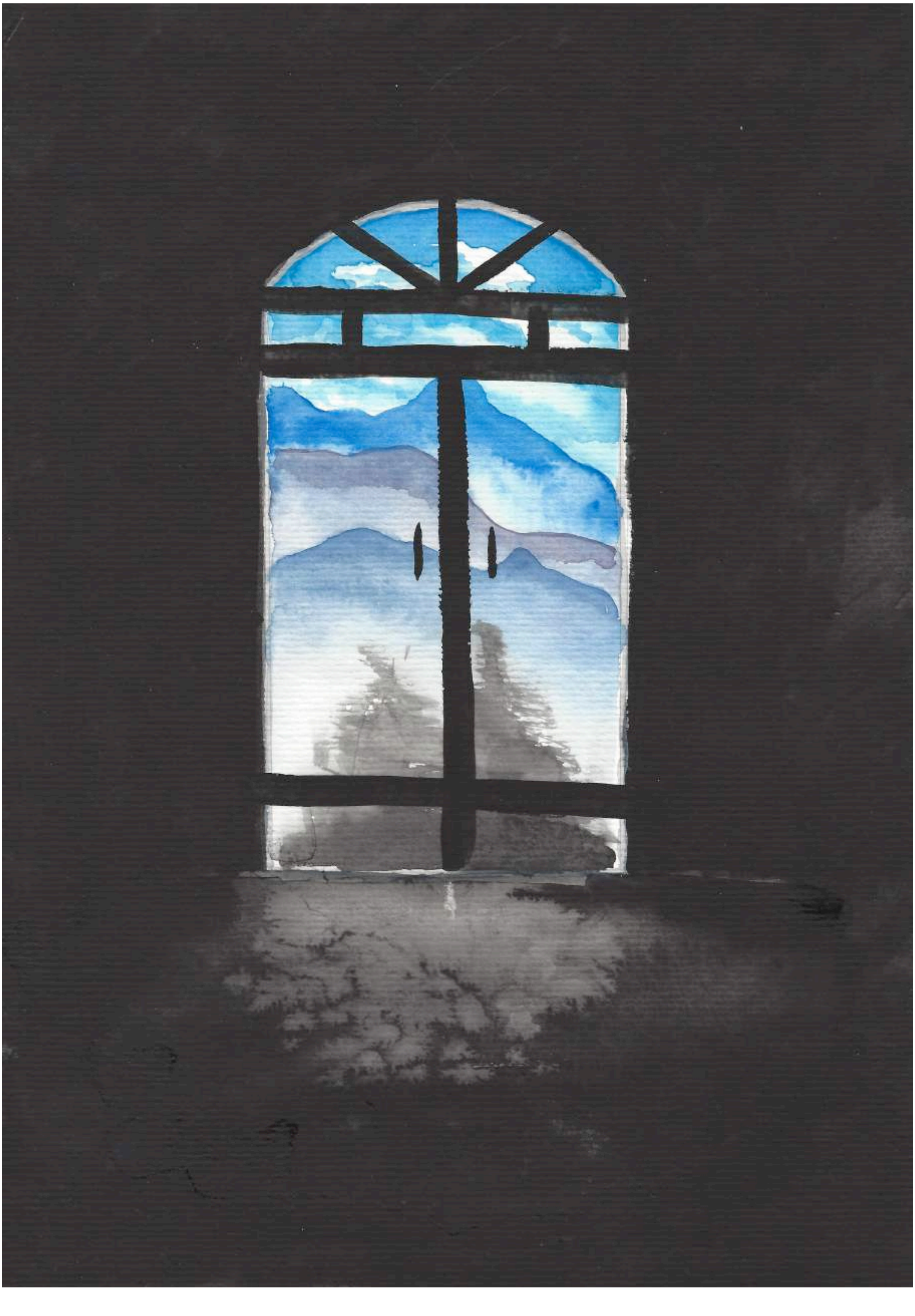
3.3 ESTRATÉGIAS DE ANÁLISE

A análise deste trabalho está dividida em duas partes: na primeira, analiso trechos da trajetória de avaliação e de suas modificações, assim como produções dos estudantes, com vistas a discutir a perspectiva de avaliação do GEPEMA evidenciada pelo desenvolvimento da trajetória; na segunda, utilizo a análise dos trechos e das produções para evidenciar aspectos da RME subjacentes à implementação da trajetória de avaliação.

No primeiro momento, selecionei trechos da trajetória de avaliação (Apêndice A) que pudessem ser discutidos à luz da perspectiva de avaliação adotada neste trabalho. Recortei os trechos, apresentei-os, analisei-os e discuti suas informações no capítulo 4. Em alguns casos, a análise suscitava recorrer a instrumentos de avaliação. Nesses casos, recorri às produções escritas que recolhi ao longo do ano. Para cada discussão, as produções faziam emergir as ideias que eu queria apresentar para discutir.

No segundo momento, imprimi o Capítulo 4 já escrito e fiz algumas leituras. Na primeira leitura, busquei ter uma ideia geral da dinâmica avaliativa que o capítulo evidenciou. Nessa leitura, fiz algumas primeiras anotações em um caderno de campo. Em seguida, em uma segunda leitura, escrevi o nome do princípio da RME (atividade, realidade, níveis, entrelaçamento, interatividade, orientação) que eu reconhecia em alguns parágrafos. Não reconheci os princípios em todos os parágrafos, nem em todos os trechos da trajetória, mas pude associar pelo menos um parágrafo a cada princípio da RME.

A partir disso, construí um quadro contendo os princípios da Educação Matemática Realística e aspectos que efetivam cada princípio na implementação de trajetórias de avaliação. Por fim, discuto algumas informações relevantes que foram suscitadas pela construção do quadro.



Sem título
210x297mm
Aquarela
Lauren Caroline Sampaio de Sales

4 UMA ANÁLISE

Nesta seção, apresento uma discussão a respeito de trechos da trajetória de avaliação e suas modificações, bem como produções dos estudantes em instrumentos de avaliação utilizados na disciplina. Em um primeiro momento, apresento a análise da trajetória inicial; em um segundo, de algumas modificações feitas.

Na apresentação dos trechos da trajetória, utilizarei o recurso de citação direta, com a referência "(TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016)" ao final de cada trecho apresentado.

4.1 UMA ANÁLISE DA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO INICIAL

A elaboração da primeira versão da trajetória de avaliação foi feita antes do início das aulas. Essa primeira versão contém os itens "informações iniciais", "ementa", "objetivos da disciplina", "instrumentos de avaliação previstos", "contrato de avaliação", "descrição das ações", "da correção das provas", "cronograma previsto" e "apêndices".

No contrato de avaliação, apresento algumas regras/combinados que eu pretendia fazer com os estudantes. O objetivo, como já discutido na fundamentação teórica, era elaborar um conjunto de combinados que tratassem, sobretudo, do método de avaliação que seria utilizado na disciplina. Um dos parágrafos do contrato informa:

> a dinâmica principal da aula se dá por meio de discussões em pequenos grupos. Dessa forma, os estudantes farão a escolha dos seus grupos em alguns momentos; em outros, o professor fará a distribuição dos grupos a fim de, intencionalmente, organizar as tarefas para que a discussão possa ocorrer entre diferentes estudantes em diferentes momentos. Pode ser que, em alguns momentos, os grupos sejam constituídos por meio de sorteio (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

O objetivo era evidenciar, no planejamento da trajetória, a importância da interação entre os estudantes (AMERON, 2002). Aprender com o outro, segundo a Educação Matemática Realística, se dá, por exemplo, ao passo que os estudantes explicam suas estratégias, justificam seus procedimentos, questionam as produções dos colegas. O trabalho em grupos fomenta tais atividades. Desse modo, trabalhar com diferentes pessoas permite que os estudantes conheçam diferentes maneiras de lidar com as situações e tarefas propostas. Portanto, considero importante que a comunicação entre os estudantes não se dê sempre entre as mesmas pessoas, proporcionando-lhes uma fuga de suas “zonas de conforto” em relação à interação. Assim, planejei deixar claro para os alunos que, embora algumas vezes eles pudessem escolher os grupos, em outros momentos eu escolheria ou sortearia.

Ainda no contrato de avaliação:

> As tarefas de sala de aula poderão ser também tarefas de avaliação. Conduzirão o andamento da aula e fornecerão informações para professor e estudantes a respeito de suas aprendizagens. Entretanto, alguns instrumentos de avaliação serão destacados. [...] Tais instrumentos culminarão na nota dos estudantes (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Dizer que tarefas de sala de aula também podem ser tarefas de avaliação condiz com a perspectiva de avaliação do GEPEMA (PEREGO F., 2006; VIOLA DOS SANTOS, 2007). No trecho citado, pretendi evidenciar que os estudantes seriam avaliados também por meio das tarefas de sala de aula, mas que alguns instrumentos (os que analisarei na Seção 4.2) seriam destacados (no sentido de serem chamados especificamente de instrumentos de avaliação, de culminarem em nota). Da mesma forma, as tarefas que fizessem em sala também serviriam à avaliação. Destaca-se, aqui, um elemento que caracteriza que a avaliação, como planejada, seria praticada como processo. Em todas as aulas, os estudantes tinham tarefas; consequentemente, em todas as aulas, os estudantes seriam avaliados, ainda que essa avaliação não culminasse em nota; tem-se, então, um caráter contínuo e sequencial da avaliação.

A respeito da nota, o contrato de avaliação dispõe:

> Na perspectiva adotada (avaliação formativa) a nota tem um caráter subjetivo ao expressar mais o desenvolvimento dos estudantes ao longo da disciplina do que uma medida dele. Nesse caso, a nota é um elemento dispensável, no sentido de que seu caráter somativo não se relaciona com esse tipo de avaliação e ela é substituída por *feedbacks* que fornecem informações aos estudantes. Entretanto, por motivos burocráticos, será atribuída, ao final do ano, uma nota para cada bimestre, a partir do desenvolvimento dos estudantes, por meio dos instrumentos descritos (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Esse trecho ressalta a distinção que existe entre “avaliar” e “atribuir notas”. Avaliar, nessa perspectiva, é investigar, buscar evidências do que o estudante sabe; é fornecer aos estudantes oportunidade de matematizar, refletir a respeito de suas produções; é emitir *feedback* sobre suas atividades matemáticas. As notas emergem de um juízo de valor atribuído sobre determinadas produções e são representadas numericamente.

Tal atitude, diferenciar “avaliar” de “atribuir notas”, era a que mais me gerava receio, tanto porque as minhas práticas seriam modificadas, quanto porque eu precisaria apresentar essa ideia aos estudantes de maneira compreensível para que eles pudessem participar das aulas desempenhando um papel ativo em seu processo de avaliação.

Ao descrever as ações que eu previa para o ano letivo de 2016, escrevi a respeito dos instrumentos de avaliação. Em relação à Prova em Fases:

> Nas 8 fases, os estudantes terão o direito de resolver as questões que quiserem, modificar questões já resolvidas anteriormente, corrigir erros, dar sequência a resoluções que ficaram incompletas, acrescentar ou retirar informações de resoluções.
> As questões foram escolhidas de modo a contemplar:
> • os três níveis de demanda cognitiva propostos pela RME (reprodução, conexão e reflexão),
> • os diferentes níveis de complexidade e
> • conteúdos de toda a ementa (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Quando apresento a dinâmica da prova afirmando que os estudantes “não farão a prova apenas uma vez”, quero evidenciar o caráter formativo e, acima de tudo, contínuo da avaliação. A prova escrita, no seu formato tradicional, fornece ao professor informações pontuais, momentâneas e geralmente não valoriza o que os estudantes vão aprendendo (mas o que já aprenderam). A Prova em Fases, por outro lado, valoriza a aprendizagem ao longo de todo o período de formação.

Como os outros instrumentos de avaliação ocorrem em momentos estanques do processo de formação, busquei contemplar todos os conteúdos da ementa para que, nos casos em que eu não conseguisse uma informação a respeito de um conteúdo por meio de um instrumento, poderia obter por meio da Prova em Fases.

Por exemplo, na unidade “Geometria Espacial”, propus Seminário como instrumento de avaliação. Como cada estudante se responsabilizaria por um tema (junto com seu grupo), dei bastante destaque a essa unidade na Prova em Fases, a fim de que os estudantes pudessem estudar os conteúdos dos Seminários dos colegas também.

Essa atitude de valorizar conteúdos dos Seminários na Prova em Fases evidencia que os instrumentos de avaliação estão entrelaçados, que não são desconexos. Esse é, então, mais um elemento que caracteriza que a avaliação praticada nessa disciplina foi planejada para acontecer como processo, não em momentos pontuais.

Ainda em relação à Prova em Fases, apresentarei, a seguir, três questões, uma de cada nível de De Lange (1999). Não classificarei, aqui, todas as questões, uma vez que isso não é objetivo deste trabalho.

Figura 6 – Questão 14 da Prova em Fases

14) Com régua e compasso, construa um ângulo de medida 3º45'.

Fonte: o autor.

A questão 14 (Figura 6) pode ser considerada uma questão de reprodução. Usualmente, durante as aulas, trabalhamos com a construção de ângulos notáveis e ângulos que podem ser obtidos por meio da bissetriz de ângulos notáveis. Assim como a questão 14, outras também são de reprodução. A Educação Matemática Realística não afirma que esse tipo de tarefa deva ser desvalorizado pelo professor. Ao contrário, na pirâmide de avaliação de De Lange (1999), esse nível de demanda cognitiva aparece em maior quantidade.

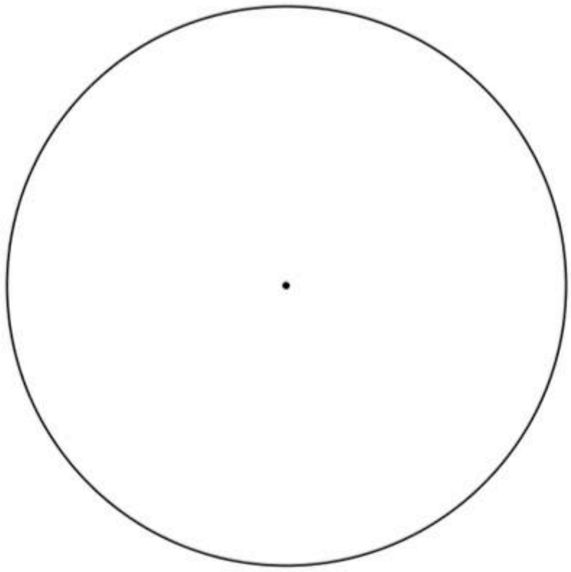
Para resolver a questão 14, cabe ao estudante conhecer a técnica de construção e reproduzi-la, construindo um ângulo de 60^{o} e, por meio de bissetrizes, 30^{o}, 15^{o}, $7^{o}30'$ e $3^{o}45'$.

Em uma Prova em Fases, esse tipo de tarefa dá aos estudantes a oportunidade de buscar técnicas de resolução nos momentos entre as fases. Sendo assim, o professor pode utilizar questões que suscitem técnicas que o estudante deva pesquisar por conta própria e que, não necessariamente, o professor trabalhe em sala de aula. Esse tipo de atitude revela a oportunidade de aprendizagem oferecida pelo instrumento.

A questão 9 (Figura 7) da Prova em Fases pede a construção geométrica de um polígono estrelado e o cálculo de sua área. A construção com régua e compasso de um polígono estrelado refere-se aos estudos da unidade “Polígonos”, enquanto o cálculo da área, à unidade “Áreas”. Para resolver a questão, além disso, o estudante deve lidar com atividades distintas: construção geométrica, cálculo de medidas de superfícies (áreas), reflexão e matematização.

Figura 7 – Questão 9 da Prova em Fases

9) Construa, na circunferência abaixo, um polígono estrelado de 8 pontas e calcule sua área.



Fonte: o autor.

Usualmente, nas aulas de Geometria e nos livros didáticos, não se calcula a medida da superfície de figuras não convexas, como o polígono estrelado. Ao observar esse tipo de polígono, pode-se entender que cada uma das “pontas” é um triângulo congruente aos triângulos formados pelas diagonais do “polígono sem as pontas”. Observar que esses triângulos são congruentes, provar tal congruência, calcular a área do polígono são atividades que podem revelar a matematização suscitada pela questão. Desse modo, pela relação existente entre duas unidades, entre diferentes atividades e a matematização suscitada pela tarefa, considero que a questão 9 é de nível de conexão.

Na Figura 8, apresento a questão 5 da Prova em Fases que considero ser de nível de reflexão/análise.

Figura 8 – Questão 5 da Prova em Fases

5) Martin mora a 3km da escola e Alice a 5km. Qual a distância entre a casa de Martin e Alice?

Fonte: o autor.

Tradicionalmente, questões de matemática devem conter informações suficientes para resolvê-las e o resultado deve ser único. Diferente dessa concepção, a questão 5 pode ser vista de várias maneiras. Ao perguntar "qual a distância", pressupõe-se que a resposta seja um valor numérico (acompanhado de uma unidade de medida) único que expressa essa distância. Seguindo essa aparência, o enunciado não fornece dados suficientes para que a resposta seja única. Entretanto, quando se analisa o enunciado e as possibilidades e modela-se a situação utilizando circunferências concêntricas, observa-se que as diferentes respostas estão contidas em um intervalo de valores. Para essa conclusão, necessita-se de reflexão e análise da situação.

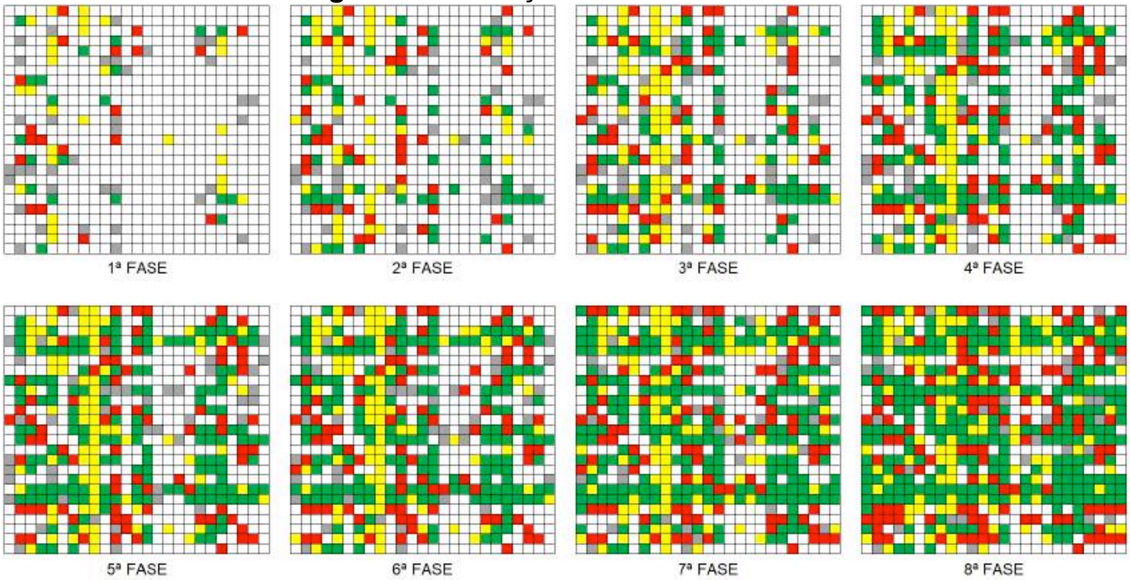
Para a apresentar a correção da Prova em Fases nesta tese, utilizei um código de cores para cada fase. Na Figura 9, apresento a correção da Prova em Fases e, no Quadro 9, o critério utilizado para a atribuição de cores. Em cada fase, as linhas representam os estudantes e as colunas, as questões.

Quadro 9 – Códigos para a correção da Prova em Fases

Cor	Critérios
Verde	Resolução correta com resposta.
Amarelo	Resolução parcialmente correta. Resolução correta sem resposta.
Vermelho	Resolução incorreta.
Branco	Questão em branco.
Cinza	Sem resolução, mas com anotações na questão.

Fonte: o autor.

Figura 9 – Correção da Prova em Fases



Fonte: o autor.

Além de a Figura 9 permitir observar as modificações na distribuição das cores ao longo das fases, também permite fazer outros estudos, como os que apresentarei a seguir.

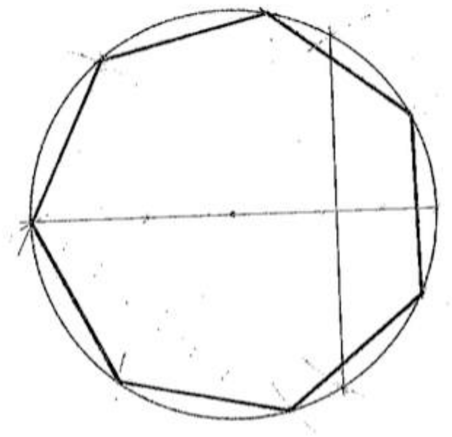
A questão 14, apresentada na Figura 6, é uma questão de reprodução referente ao conteúdo de ângulos. A construção com régua e compasso de ângulos foi feita ao longo da primeira unidade, até o dia 25/05/2016, entre a primeira e a segunda fases, o que pode justificar o fato de que na segunda fase a questão tenha sido resolvida[18] por 10 estudantes e, na terceira fase, por 16 estudantes. Entretanto, alguns estudantes optaram por resolver a questão em fases posteriores, como, por exemplo, Jorge, que deixou a questão em branco até a 7ª fase (dia 08/02/2017). Essa possibilidade de escolher fazer a questão em qualquer uma das fases é um direito dos alunos. Ainda assim, a atitude de escolher fazer na 7ª fase uma questão que poderia ter sido feita na 2ª revela que a Prova em Fases é um instrumento que tem potencial para efetivar a característica longitudinal da trajetória (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000) e, consequentemente, da avaliação. Por meio de suas próprias particularidades, a Prova em Fases permitiu retomada dos conteúdos, continuidade na aprendizagem dos estudantes.

Além disso, ao trabalhar Polígonos, estudamos a construção de polígonos regulares inscritos em circunferências de 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12 lados, além

[18] Ao referir-me à Prova em Fases, utilizarei o termo “resolvida” para as questões que não receberam cores branco e cinza.

do Processo Geral de Rinaldini[19]. Na questão 7 da Prova em Fases, os estudantes deveriam construir um heptágono regular inscrito em uma circunferência. Na elaboração do instrumento de avaliação, pensei que os estudantes utilizariam o Processo Geral de Rinaldini para dividir a circunferência em 7 partes iguais e, posteriormente, construir o polígono. Entretanto, na 2ª fase, os estudantes Lucca e Roberto apresentaram uma resolução (Figura 10) alternativa à esperada: uma construção particular do heptágono.

Figura 10 – Resolução de Lucca da questão 7 da Prova em Fases



Fonte: o autor.

Nas fases seguintes, outros estudantes apresentaram a mesma resolução: Caio, Cássio, Jaqueline, João Pedro, Luana, Marcos e Patrick (na 3ª fase), Eduardo e Isabella (na 4ª fase), Arthur (na 7ª fase) e Amanda e Daniel (na 8ª fase). Nenhum estudante que resolveu a questão corretamente utilizou o Processo Geral de Rinaldini como estratégia para a resolução.

O fato de os estudantes terem resolvido com uma estratégia diferente da trabalhada em sala de aula sugere duas coisas: que a prova possibilitou aos alunos buscarem informações por si mesmos para auxiliar suas estratégias de resolução e que os estudantes se comunicaram entre as fases desse instrumento.

Nesse sentido, a perspectiva de avaliação adotada neste trabalho sugere que os estudantes devem ser sujeitos ativos no processo de avaliação (e no seu processo de aprendizagem). A busca por novas estratégias de resolução (seja

[19] Processo Geral de Rinaldini é um processo para a divisão de uma circunferência em partes aproximadamente iguais.

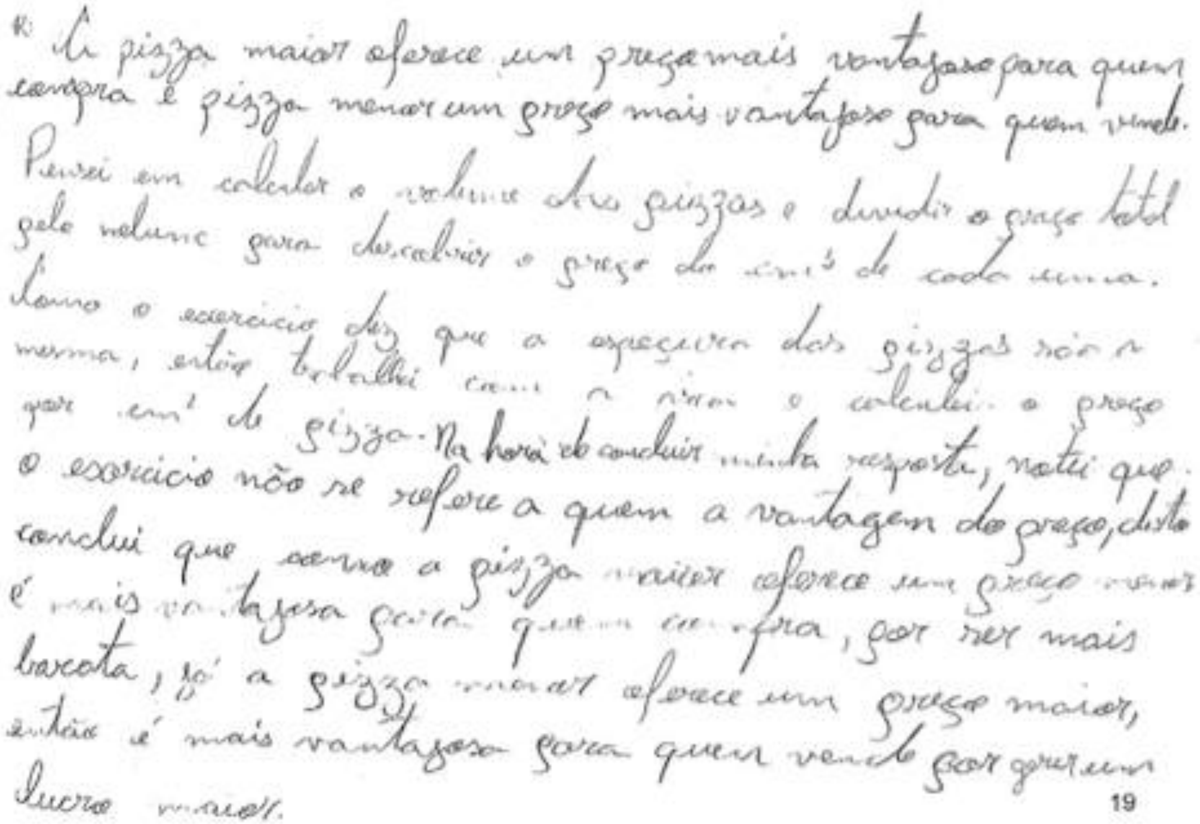
por meio de livros, *internet*, consultando os colegas de sala de aula ou outros professores) é uma das atitudes de um estudante ativo. O Processo Geral de Rinaldini era uma estratégia válida para a resolução da tarefa; ter buscado uma estratégia particular de resolução para o heptágono me permite inferir que os estudantes pensaram que devia existir uma, ou seja, estabeleceram uma hipótese e foram investigá-la.

Além disso, Ameron (2002) afirma que a interação entre os estudantes possibilita a aprendizagem. Em práticas tradicionais de avaliação, conhecer as questões da prova antes de resolvê-las e poder perguntar para outros estudantes a resposta soa como transgressões. Nessa perspectiva de avaliação, soa como oportunidades de aprendizagem.

Não é possível afirmar quem foi o precursor da ideia de estudar um caso particular (Lucca, Roberto ou ambos) e muito menos como a informação foi dada aos demais estudantes (por exemplo, não é possível dizer que Roberto ensinou todos os outros). Entretanto, é possível dizer que, para que os estudantes pudessem resolver da mesma maneira, em diferentes fases, alguma comunicação matemática (oral, escrita) pode ter ocorrido.

Outro exemplo de comunicação entre os estudantes se deu na questão 19, que apresenta duas pizzas de diâmetros distintos e mesma espessura, seus preços e pergunta qual é a mais vantajosa. Ao resolver na 3ª fase, Eduardo calculou a área das duas pizzas e dividiu o preço de cada pizza por sua área. Em seguida, explicou seu procedimento e apresentou sua resposta (Figura 11).

Figura 11 – Resposta de Eduardo da questão 19 da Prova em Fases

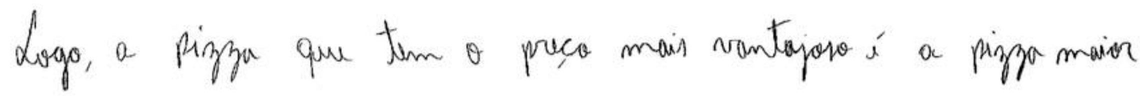


Fonte: o autor.

Eduardo escreveu (Figura 11): “na hora de concluir minha resposta, notei que o exercício não se refere a quem a vantagem do preço, disto concluí que como a pizza maior oferece um preço menor é mais vantajoso para quem compra, por ser mais barata, já a pizza menor oferece um preço maior, então é mais vantajosa para quem vende por gerar um lucro maior”.

Até então, nenhum outro estudante tinha discutido o “sujeito da vantagem”. Em todas as respostas, os estudantes se colocaram na posição de quem compra e trabalharam com a vantagem para si mesmos. Por exemplo, na 4ª fase, o estudante João Pedro, após fazer seus cálculos, apresentou sua resposta com a vantagem para o cliente (Figura 12).

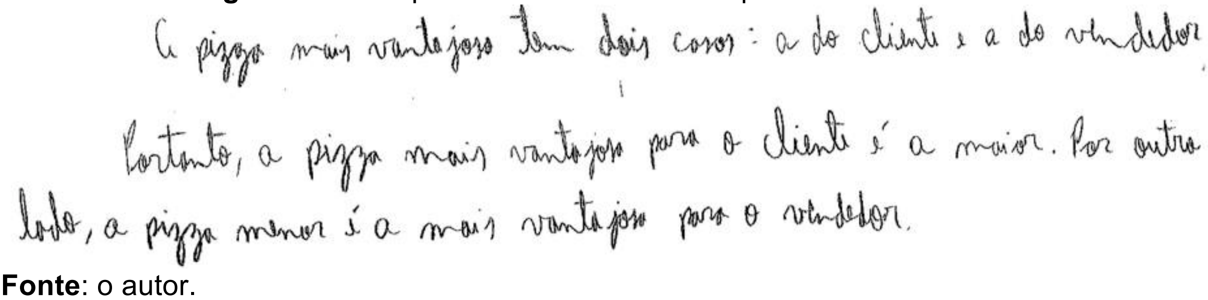
Figura 12 – Resposta de João Pedro da questão 19 na 4ª fase



Fonte: o autor.

Na 5ª fase, João Pedro apresentou uma nova resposta, mas não alterou os cálculos e outros procedimentos de resolução (Figura 13).

Figura 13 – Resposta de João Pedro da questão 19 na 5ª fase


A pizza mais vantajosa tem dois casos: a do cliente e a do vendedor.

Portanto, a pizza mais vantajosa para o cliente é a maior. Por outro lado, a pizza menor é a mais vantajosa para o vendedor.

Fonte: o autor.

Tal alteração feita por João Pedro sugere que ele possivelmente se comunicou com Eduardo. Outras modificações em resoluções e respostas também indicam comunicação entre os estudantes. Tais comunicações permitiram que os alunos resolvessem (como no caso da questão 7), corrigissem, refizessem, repensassem (como no caso da questão 19) suas resoluções. Todas essas atividades estão associadas à comunicação matemática, à reflexão, à aprendizagem.

Já em relação à primeira Prova Escrita com Cola, escrevi:

> Caso os estudantes não se saiam bem na prova (ou na escolha de informações para a cola), será solicitado que elaborem outra cola que pode ser utilizada para resolver a mesma prova ou, ainda, uma prova que possa ser resolvida com a cola que fizeram. Em qualquer uma dessas opções, os estudantes terão, novamente, a oportunidade guiada de estudar os conteúdos solicitados na prova, bem como terão mais uma oportunidade de mostrar o que sabem. Qualquer que seja a estratégia adotada, será feita uma discussão a respeito dos motivos que levaram os estudantes a não se saírem bem na primeira vez. Caso se saiam bem, serão discutidas as estratégias adotadas para a elaboração da cola (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Entendo que o professor deva explorar seus instrumentos de avaliação, de tal modo que possa aproveitar todas as oportunidades que o instrumento lhe oferece, o máximo que consiga. Nesse sentido, além de a cola ser um recurso importante para a avaliação por proporcionar aos estudantes oportunidade de estudar, ela também pode ser reutilizada. Outras estratégias envolvendo outros instrumentos poderiam ser previstas para dar sequência ao trabalho com os conteúdos das Provas Escritas com Cola, entretanto, poder explorar um mesmo instrumento, um mesmo recurso e até mesmo uma mesma produção pode propiciar reflexões longitudinais que, dependendo da condução do professor, pode levar o estudante a passar por diferentes níveis de matematização e reflexão, indo ao encontro do princípio de níveis da Educação Matemática Realística.

Uma das estratégias sugeridas por Lopez (2010) é o professor colocar-se “no lugar do estudante” para planejar suas ações a partir de possíveis acontecimentos. Como não era possível saber de antemão como os estudante lidariam com a prova, planejei diferentes possibilidades.

A possibilidade de trabalhar com colas nas provas escritas dá aos estudantes a chance de reunir informações em um pedaço de papel de acordo com os critérios que adotam. Como o espaço da cola é limitado, os estudantes precisam de algum critério para preparar suas colas, mesmo que seja “escolher as informações sem critério algum” ou “copiar as informações de um colega”. Sendo assim, alguns tipos de cola se tornaram evidentes na realização da primeira Prova Escrita com Cola. Destaco aqui dois tipos, representados pelas colas de Jorge e Marcos.

A cola de Jorge (Figura 14) valorizou elementos trabalhados em sala de aula, elementos de livros-texto e demonstrações de teoremas trabalhados durante a disciplina. No Quadro 10, apresento a correção da prova de Jorge feita por mim e pelos estudantes[20].

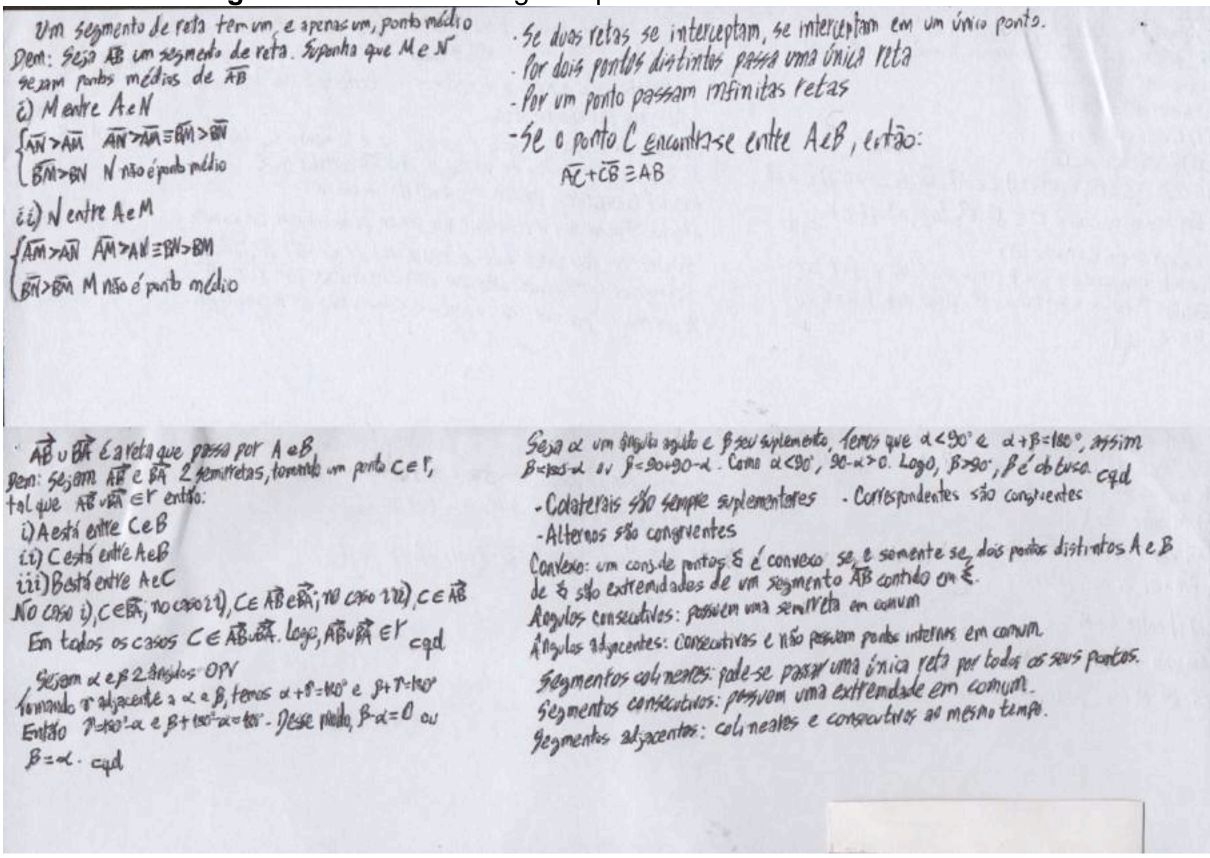
Quadro 10 – Correções da primeira Prova Escrita com Cola do estudante Jorge

Questão	**Minha correção**	**Correção dos estudantes**
1 A	0	1
1 B	0	0
2	0*	1
3	2	2
4	2	2
5	2	2
6	2	2
7	2	2
8	2*	2

Fonte: o autor.

[20] Os estudantes corrigiram as provas de acordo com os códigos 2 (resolução correta), 1 (resolução parcialmente correta), 0 (resolução incorreta) e 9 (em branco). Na minha correção, uso os mesmos códigos, mas acrescento um “*” caso haja indícios na cola.

Figura 14 – Cola de Jorge da primeira Prova Escrita com Cola


Um segmento de reta tem um, e apenas um, ponto médio
Dem: Seja AB um segmento de reta. Suponha que M e N sejam pontos médios de AB
i) M entre A e N
ii) N entre A e M
Se duas retas se interceptam, se interceptam em um único ponto.
Por dois pontos distintos passa uma única reta
Por um ponto passam infinitas retas
Se o ponto C encontra-se entre A e B, então: AC + CB ≡ AB
Dem: sejam AB e BA 2 semirretas, tomando um ponto C ∈ r, tal que AB ∪ BA ∈ r então:
i) A está entre C e B
ii) C está entre A e B
iii) B está entre A e C
Em todos os casos C ∈ AB ∪ BA. Logo, AB ∪ BA ∈ r cqd
Colaterais são sempre suplementares
Correspondentes são congruentes
Alternos são congruentes
Ângulos consecutivos: possuem uma semirreta em comum
Ângulos adjacentes: consecutivos e não possuem pontos internos em comum.
Segmentos colineares: pode-se passar uma única reta por todos os seus pontos.
Segmentos consecutivos: possuem uma extremidade em comum.
Segmentos adjacentes: colineares e consecutivos ao mesmo tempo.

Fonte: o autor.

É possível observar, no Quadro 10, que grande parte das questões do estudante Jorge não continha indícios na cola. Ao responder a ficha a respeito da elaboração da primeira cola, Jorge respondeu que, se pudesse fazer uma nova cola, acrescentaria mais definições e axiomas. Essa estratégia foi utilizada por Marcos.

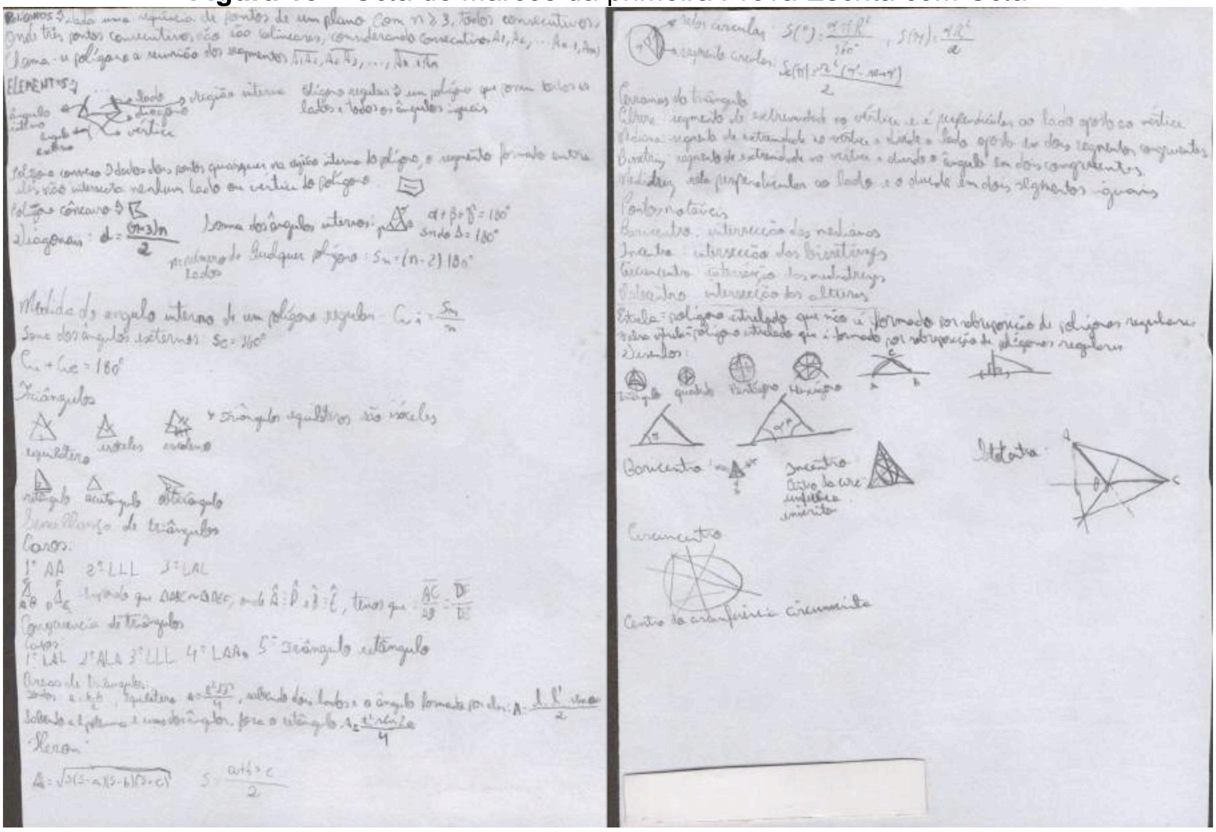
A cola de Marcos (Figura 15) apresentava definições, informações a respeito de construções geométricas, propriedades e exemplos de exercícios resolvidos. No Quadro 11, apresento a correções da prova de Marcos.

Quadro 11 – Correções da Prova com Cola 1 do estudante EG38

Questão	Minha correção	Correção dos estudantes
1 A	0*	0
1 B	0*	0
2	2*	2
3	2*	2
4	2*	2
5	2*	2
6	2*	2
7	2*	2
8	1*	1

Fonte: o autor.

Figura 15 – Cola de Marcos da primeira Prova Escrita com Cola



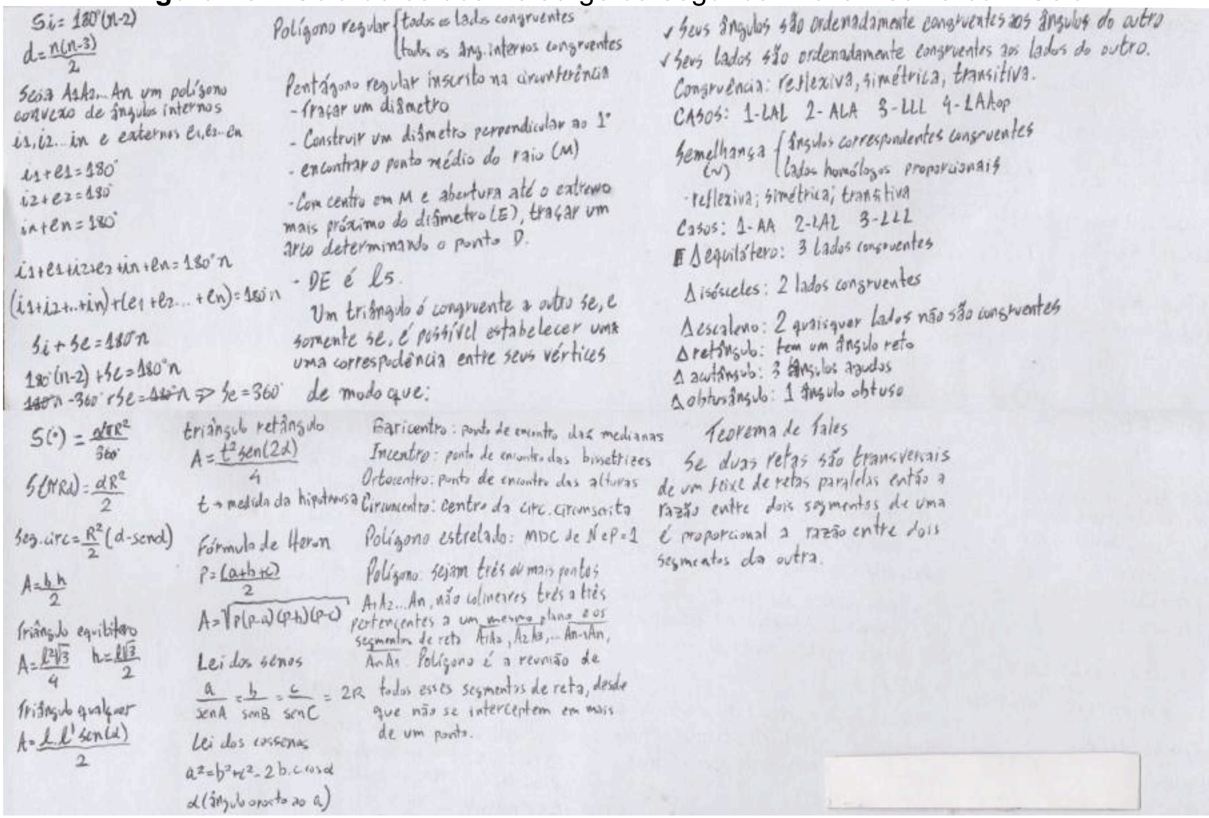
Fonte: o autor.

É possível observar que, na correção da prova de Marcos, a quantidade de questões com indício na cola é maior que na prova de Jorge. Isso não significa que as questões das provas estavam mais relacionadas às definições e axiomas, mas que, como a partir deles a Geometria se constrói, eles são indícios para resolução de quaisquer questões. Com demonstrações na cola também era possível resolver a prova. Por exemplo, na cola de Jorge havia uma demonstração do teorema da unicidade do ponto médio que, se adaptada, poderia auxiliar o estudante a provar a unicidade da bissetriz na questão 2, entretanto o estudante não usou tal demonstração para resolver o problema. Em relação a essa mesma questão, a 2, infiro que o estudante Marcos resolveu-a a partir da demonstração que eu fiz em sala da unicidade do ponto médio, mas não havia tal demonstração na cola. Ainda assim, alguns elementos de sua cola (como a definição de bissetriz) eram indícios para resolver a questão. Desse modo, efetiva-se a relevância de não somente elaborar uma boa cola, mas também de saber utilizá-la.

Nessa prova, a estratégia de Marcos mostrou-se eficiente em relação à resolução da prova escrita, uma vez que ele recorreu aos princípios da Geometria. Resolver a prova, então, seria uma tarefa de reconhecer, nos axiomas, definições, propriedades e informações de construções geométricas, um auxílio para construir as resoluções das questões.

Na segunda Prova Escrita com Cola, ao elaborar a cola, Jorge priorizou informações que sustentassem diferentes tipos de resolução (Figura 16). Tal cola possibilitava ao estudante resolver um maior número de questões, o que permitiu que recebesse código 2* na correção.

Figura 16 – Cola do estudante Jorge da segunda Prova Escrita com Cola



Fonte: o autor.

Entendo que a estratégia de utilizar a Prova Escrita com Cola duas vezes, deu a oportunidade a Jorge, e a outros estudantes, de refletir a respeito de seus critérios de seleção de informações para a cola. Tomando como pressuposto que a ação de elaborar uma cola implica em estudar, posso afirmar que a avaliação, nesse contexto, permitiu ao aluno repensar suas estratégias de estudo.

A respeito da Prova Elaborada Pelos Estudantes,

> na unidade “Circunferência e Círculo”, o instrumento de avaliação previsto é a “Prova Elaborada Pelos Estudantes”. Será proposto aos estudantes que elaborem uma Prova em Grupos e o respectivo gabarito contendo os critérios de correção referentes ao conteúdo estudado, justificando a escolha de cada uma das questões. As provas elaboradas pelos estudantes serão aplicadas aos estudantes

> da disciplina de Geometria e Desenho do Bacharelado em Matemática (ou, por impossibilidades, as provas serão trocadas entre os estudantes da própria licenciatura). Em seguida, os estudantes deverão corrigir as provas a partir de seus gabaritos para uma posterior discussão no grande grupo (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Um dos critérios para a escolha das tarefas na Educação Matemática Realística é que ela esteja embutida em um contexto próximo aos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996) ou, ainda, que o professor possa auxiliar os estudantes a aproximarem-se de tal contexto (GRAVEMEIJER; COBB, 2006).

Van den Heuvel-Panhuizen (2005) afirma que contexto pode ser entendido como uma característica da tarefa,

> referindo-se tanto às palavras e imagens que ajudam os estudantes a compreender a tarefa, ou a respeito da situação ou evento em que a tarefa está situada. A descrição de um contexto, dada por Borasi (1986), aproxima-se da interpretação de um contexto como característica de uma tarefa (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2, tradução nossa).

Por essa afirmação, entende-se que o contexto é suscitado, usualmente, pelo enunciado da tarefa, sendo necessário aos estudantes que se remetam àquelas situações (plausíveis de serem experienciadas) para resolver a tarefa. Entretanto, entendo que “contexto” também pode referir-se a um conjunto de ações atreladas à tarefa para que ela seja resolvida. Para além da ideia de imaginar uma situação, ou buscar informações a respeito dela, a ideia de contexto aqui apresentada refere-se a atitudes que precisam ser adotadas para lidar com a tarefa.

No caso da Prova Elaborada Pelos Estudantes, minha intenção foi aproximar os estudantes da prática profissional do professor de matemática, contexto que está no “fazer”, na ação, e não apenas nos problemas em si.

Para tanto, os estudantes devem inserir-se no contexto proposto e, por meio de conhecimentos a respeito da prática do professor de matemática (em especial em momentos de correção de provas), resolver o problema proposto (corrigir as questões da prova). Desse modo, busco ampliar a ideia de contexto adotada pela Educação Matemática Realística.

Em relação aos critérios de correção, por exemplo,

> A “Prova Elaborada Pelos Estudantes” será avaliada na medida em que o professor e os estudantes discutirem a elaboração da prova, os critérios de correção e a correção dela. Alguns critérios para

> correção serão:
> • a prova elaborada contém questões que contemplam todo o conteúdo de Circunferência e Círculo;
> • a prova elaborada pode ser resolvida no tempo estipulado (máximo de duas aulas de 50 minutos);
> • os critérios de correção possibilitam que qualquer prova seja corrigida;
> • a resolução no gabarito está matematicamente correta;
> • a correção é coerente com os critérios adotados (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

De acordo com Hadji (1994), ainda que os critérios sejam subjetivos, cabe ao professor deixá-los claros e torná-los públicos para que os estudantes tenham pontos de apoio. Quando escrevi os critérios, pensei em uma lista de itens que pudessem auxiliar na correção e auxiliar os estudantes a se prepararem para as provas e para as atividades avaliativas.

Ressalto que os critérios anteriormente citados dificilmente podem ser usados para avaliação somativa, uma vez que, além de subjetivos, têm uma função de orientação para o trabalho dos estudantes e não para a quantificação de notas.

4.2 UMA ANÁLISE DAS MODIFICAÇÕES NA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Ao longo do ano, modificações foram sendo feitas na trajetória de avaliação a partir de necessidades do encaminhamento da disciplina. Apresento, nesta seção, duas modificações na unidade Polígonos.

Durante o trabalho com a unidade Polígonos, observei que as aulas estavam centradas em mim (professor). Muitas vezes, eu estava utilizando as dúvidas dos estudantes para preparar aulas expositivas, o que, depois de alguns dias, pareceu tornar-se repetitivo. Portanto, no dia 17/06/2016, fiz uma modificação (inserção) na trajetória de avaliação:

> os conteúdos de triângulos serão trabalhados por meio de Seminários em grupos. A dinâmica se dará da seguinte forma: os estudantes poderão escolher seus próprios grupos (de duas ou três pessoas) e eu distribuirei livros didáticos de Ensino Fundamental, Médio e Superior para os grupos, a fim de que identifiquem conteúdos relacionados a triângulos presentes nesses livros. Em seguida, cada grupo deve apresentar, por meio de um Seminário, os conteúdos estudados (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Por meio dessa modificação na trajetória, entendo que os estudantes tornaram-se mais ativos em relação ao papel desempenhado em aulas anteriores, objetivo almejado na abordagem adotada, a RME. Tal papel ativo se deu ao passo que os estudantes investigaram livros didáticos, selecionaram os conteúdos relacionados a triângulos, elaboraram e apresentaram os Seminários.

Observar essa necessidade de mudança de papel do estudante foi possível graças ao caráter investigativo da avaliação. De acordo com a perspectiva do GEPEMA, avaliação é uma prática de investigação (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009), ou seja, ao avaliar, os sujeitos desempenham papéis investigativos, efetuando leituras da realidade observável, a fim de repensar suas práticas. Nesse sentido, a dinâmica de aula evidenciada por essa modificação na trajetória revela que, por meio de uma leitura das ações dos estudantes nas aulas, foi possível regular a dinâmica de aula proposta.

O segundo princípio de avaliação da Educação Matemática Realística afirma que "métodos de avaliação devem possibilitar aos estudantes mostrarem o que sabem, não o que não sabem" (DE LANGE, 1999), por meio de suas produções (orais, escritas), suas estratégias, procedimentos, escolhas, aspectos relacionados à sua aprendizagem de maneira individual. Além dessa perspectiva, a dinâmica de aula evidenciou que a avaliação possibilitou aos estudantes mostrarem seus papeis em tarefas, aulas, dinâmicas, situações propostas, revelando aspectos relacionados à sua aprendizagem de maneira social, auxiliando reorientações nos processos de aprendizagem, avaliação e ensino.

Desse modo, o segundo princípio de avaliação da Educação Matemática Realística pode ser tomado de maneira mais ampla, incluindo a possibilidade de os estudantes mostrarem suas condutas para além do que sabem. Sendo assim, enuncio o segundo princípio reescrito como: "avaliação deve possibilitar aos estudantes evidenciarem aspectos individuais e sociais de suas aprendizagens".

Além disso, os Seminários possibilitaram interação entre os estudantes. De acordo com a RME, interatividade se dá não somente quando os estudantes conversam ou estão juntos, mas quando precisam comunicar suas ideias matemáticas, justificá-las (AMERON, 2002). Nesse sentido, infiro que as interações ocorreram não somente no momento de preparação (em grupos), mas também durante as apresentações, ao responder as dúvidas dos outros estudantes e ao receber *feedback* das apresentações.

Como os Seminários duraram mais tempo do que a quantidade de aulas previstas para a unidade Polígonos, optei por mais uma modificação (inserção): a segunda Prova Escrita com Cola deixaria de abordar toda essa unidade e passaria a abordar todos os conteúdos até triângulos. Com isso, os conteúdos de quadriláteros careceriam de um novo instrumento de avaliação. Escolhi, para essa unidade, as “Anotações dos Estudantes”:

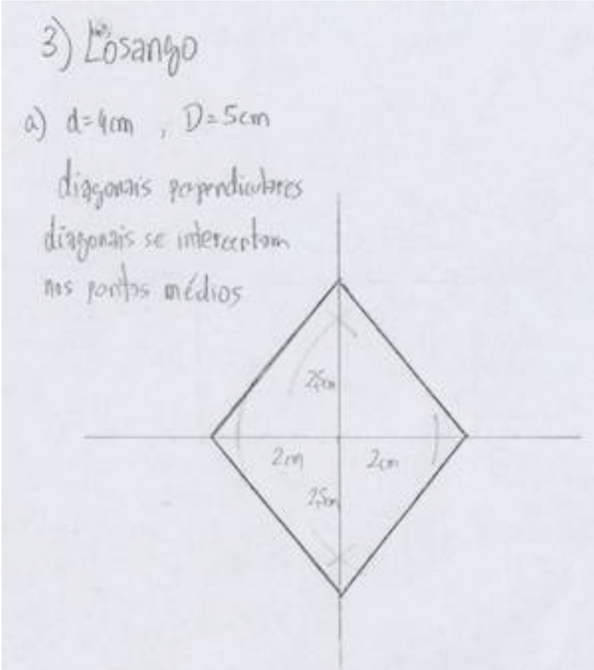
> a fim de obter produções escritas dos estudantes durante as aulas de quadriláteros, vou recolher, ao final de cada aula, as anotações que os estudantes fizerem das aulas. Pedirei que utilizem folhas de sulfite nomeadas para que eu possa escanear e devolver na aula seguinte. Com essas anotações, terei informações a respeito de como os estudantes organizam os conteúdos trabalhados na aula, como resolvem as tarefas propostas e se existem aspectos que preciso retomar em aulas seguintes (TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO, 2016).

Ao planejar as aulas de quadriláteros, além de adotar o instrumento Anotações dos Estudantes, levei em consideração informações que os estudantes me deram por meio da primeira Ficha de Autoavaliação. No dia 30/08/2016, início do segundo semestre e dos estudos de quadriláteros, os estudantes me entragaram suas respostas às questões da primeira Ficha de Autoavaliação. Observei que grande parte dos alunos declarou ter dificuldades com construções geométricas (Alexandre, Caio, Christian, Isabella, Jorge, Larissa, Marcos e Mariana).

Desse modo, planejei as aulas para que os estudantes pudessem desenvolver suas estratégias para o trabalho com construções geométricas. Até então, grande foco tinha sido dado às construções fundamentais (retas paralelas, perpendiculares, mediatriz, construção de ângulos, bissetriz e divisão de segmentos). Aproveitei desse foco já dado para que os alunos pudessem construir quadriláteros notáveis. Para isso, fui discutindo com os estudantes algumas propriedades que podiam auxiliar nas construções.

Na aula do dia 20/09/2016, pedi aos alunos que construíssem quadrados, retângulos e losangos a partir de medidas dadas. O estudante Jorge construiu 8 quadriláteros enunciando ao lado da construção as propriedades que ele escolheu utilizar. Apresento na Figura 17 a construção que Jorge fez de um losango dadas as medidas das diagonais (4 e 5 cm).

Figura 17 – Anotações de Jorge da aula do dia 20/09/2016



Fonte: o autor.

Na Figura 17, é possível observar que o estudante anotou: “diagonais perpendiculares” e “diagonais se interceptam nos pontos médios”, referindo-se a uma propriedade das diagonais de um paralelogramo[21] e a uma propriedade das diagonais de um losango[22]. Com isso, Jorge indica reconhecer que os losangos gozam das mesmas propriedades dos paralelogramos por serem, também, paralelogramos, ainda que tenham suas próprias propriedades.

Então, sabendo que as diagonais do losango são perpendiculares, Jorge fez uma reta horizontal e marcou um ponto central. Abrindo o compasso arbitrariamente, marcou dois pontos na reta auxiliar para a construção da mediatriz do segmento determinado por esses dois pontos. Na mediatriz, mediu 2,5 cm acima do ponto central e 2,5 cm acima; na reta auxiliar, mediu 2 cm à esquerda do ponto central e 2 cm à direita, unindo os pontos, formando o losango solicitado.

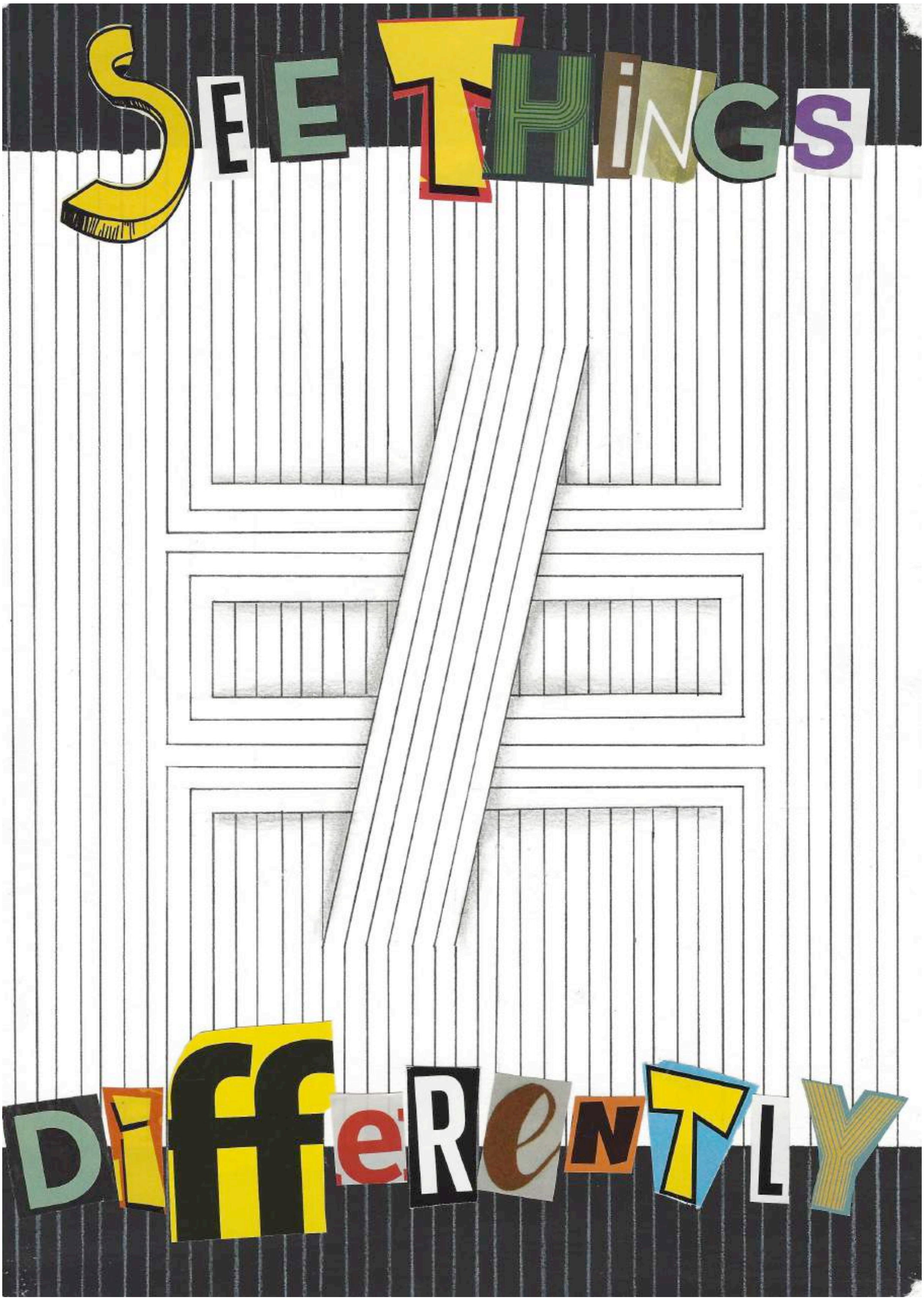
A partir das minhas orientações em relação ao uso das propriedades, o estudante construiu o losango sem conhecer os passos de alguma construção formal; ele o fez utilizando as construções fundamentais aplicadas às propriedades de losangos.

Entendo que a avaliação se efetivou como um meio para a recolha

[21] “Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios” (DOLCE, 1993, p. 105).
[22] “Todo losango tem diagonais perpendiculares” (DOLCE, 1993, p. 109).

de informações a respeito das dificuldades do estudante, tendo a Ficha de Autoavaliação como instrumento gerador dessas informações e como uma oportunidade para o estudante reinventar matemática.

Além disso, por meio das Anotações dos Estudantes e, nesse caso particular, das anotações de Jorge, que afirmou ter dificuldades com as construções geométricas, pude ver como a dinâmica de aula contribuiu para que algumas dificuldades pudessem ser superadas. Esse instrumento de avaliação permite ao professor conhecer as produções dos estudantes aula a aula, possibilitando ter um retorno rápido de como os estudantes estão lidando com os assuntos trabalhados nas aulas.



“**See Things Differently**”
210x297mm
Nanquim e colagem
Júnior Yuki Morimoto

5 OUTRA ANÁLISE

No capítulo anterior, apresentei uma análise da trajetória de avaliação (em sua concepção, elaboração e implementação). Neste capítulo, apresento outro estudo da implementação da trajetória de avaliação, a fim de apresentar características da avaliação efetivada como processo. Para isso, evidenciarei, nas seções 5.1 a 5.6, princípios da Educação Matemática Realística subjacentes à implementação da trajetória de avaliação, com base no capítulo anterior e, na seção 5.7, uma discussão a respeito da relação entre os princípios da RME e os aspectos destacados.

5.1 PRINCÍPIO DA ATIVIDADE SUBJACENTE A ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Reconheço o princípio da atividade em dois aspectos da implementação da trajetória de avaliação: 1) ao resolver as Provas Escritas com Cola, os estudantes tiveram a oportunidade de matematizar; e 2) ao preparar os Seminários de triângulos, buscando informações nos livros didáticos, os estudantes tiveram a oportunidade de matematizar.

Em relação ao primeiro aspecto, entendo que uma das características das atividades reconhecidas no processo de matematização é a de certeza, que envolve refletir, justificar, provar (utilizando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc). Nas colas da primeira Prova Escrita com Cola (como a de Marcos) ou da segunda (como a de Jorge), os estudantes utilizaram axiomas, definições e propriedades como informações para compor a cola. Ao resolver as provas, os estudantes utilizaram as informações na tentativa de provar, justificar e resolver as questões. Reconheço, na atitude de analisar axiomas, definições e propriedades e resolver uma questão, atividade com característica de certeza e, sobretudo, matematização.

Já em relação ao segundo aspecto, a preparação do Seminário de triângulos se deu a partir de livros textos, cujas atividades matemáticas já estavam sistematizadas e, de alguma forma, fragmentadas em capítulos. Em alguns livros, o tema “triângulos” era abordado em diferentes capítulos sem, necessariamente, uma relação entre as informações. Cabia aos estudantes, então, reunir as informações e construir um Seminário a partir disso. Freudenthal (1991) considera que esse tipo de tarefa, pautada em um tema, deve ser fomentada em sala de aula, já que suscita matematização.

5.2 Princípio da realidade subjacente a aspectos da implementação da trajetória de avaliação

No capítulo 4, pude reconhecer o princípio da realidade em dois aspectos que o evidenciaram na implementação da trajetória de avaliação: 1) as tarefas da Prova em Fases continham contextos próximos aos estudantes; e 2) contextos dos quais os estudantes foram se aproximando e contextos das tarefas estavam relacionados à prática profissional do professor de matemática.

A respeito do primeiro aspecto, a RME, ao discutir contextos, afirma que devem ser próximos aos estudantes e que também é tarefa do professor aproximar os estudantes de contextos realísticos, ressaltando que os conteúdos matemáticos podem ser, também, tratados como contextos, uma vez que, a partir deles, a matematização pode ocorrer. Na Prova em Fases, alguns contextos já estavam próximos de alguns estudantes. Analisando a Figura 9, que contém a correção da Prova em Fases, é possível observar que alguns estudantes receberam código verde (resolução correta com resposta) em questões cujos conteúdos ainda não haviam sido trabalhados. Por outro lado, alguns estudantes foram recebendo código verde ao longo do ano nas questões da Prova em Fases. Na segunda Ficha de Autoavaliação de Larissa, a estudante afirma que se sentiu satisfeita por ter resolvido as questões da Prova em Fases, porque quando leu a primeira vez os enunciados, não se imaginou resolvendo-as. Entendo que, ao longo do ano, os estudantes foram se aproximando de contextos (ou seja, tais contextos foram se tornando realísticos para eles), mas também tiveram a oportunidade de lidar com contextos que já lhes eram familiares.

Em relação ao segundo aspecto, ao analisar os contextos das tarefas, observei que, como tarefas do tipo “elaborar uma prova” estavam relacionadas à prática profissional do professor de matemática, então a ideia de contexto estava também atrelada ao tipo de atividade esperada dos estudantes. Em um curso de licenciatura em matemática, entendo que atividades relacionadas à prática do professor de matemática fazem parte da realidade dos estudantes e, portanto, esses contextos são profícuos à aprendizagem matemática. Assim, afirmo que os contextos das tarefas estavam relacionados à prática profissional do professor de matemática.

5.3 Princípio de níveis subjacente a aspectos da implementação da trajetória de avaliação

Em relação ao princípio de níveis, o reconheci subjacente a três aspectos: 1) a Prova em Fases permitia aos estudantes corrigir erros, dar sequência a resoluções que ficaram incompletas, acrescentar ou retirar informações nas resoluções; 2) a elaboração de colas para a resolução de Provas Escritas com Cola em dois momentos possibilitou aos estudantes refletirem a respeito das informações que comporiam as colas; e 3) as construções geométricas de quadriláteros feitas a partir das construções fundamentais possibilitaram aos estudantes que suas produções se tornassem mais formais.

A respeito do primeiro aspecto, a Prova em Fases já foi utilizada em diferentes formatos por membros do GEPEMA. Trevisan (2013) aplicou uma prova em 6 fases com conteúdos de um semestre letivo e, na terceira fase, fez intervenções escritas nas provas. Pires (2013), Prestes (2015) e Paixão (2016) utilizaram a Prova em Fases realizando intervenções a cada fase. Quando o estudante resolvia alguma questão, o pesquisador fazia uma pergunta ou dava alguma tarefa ao estudante para que ele continuasse trabalhando na sua prova. Nesse modelo de prova, espera-se que as questões sejam todas resolvidas na primeira fase. Já Mendes (2014) elaborou uma prova com conteúdos diversos e os estudantes foram resolvendo ao longo das fases, com intervenções escritas a cada fase nas questões que os estudantes já haviam resolvido. No modelo que adotei, os estudantes não tinham intervenções diretas minhas e, portanto, eram responsáveis por refinar suas resoluções e corrigi-las quando necessário. Ao resolver a questão 19, Eduardo discutiu o “sujeito da vantagem” em sua resolução; a resolução de João Pedro, depois de uma possível interação com Eduardo, passou por uma modificação apresentando o mesmo tipo de discussão. Entendo que a primeira resolução de João Pedro estava correta e sua resposta era adequada à pergunta, partindo do pressuposto de que a vantagem era relacionada ao cliente. Entretanto, após escrever “a pizza mais vantajosa tem dois casos: a do cliente e a do vendedor”, sua resposta tornou-se mais precisa. Esse, e outros exemplos, permitem afirmar que algumas resoluções dos estudantes foram, a cada fase, passando por diferentes níveis e tornando-se mais formais.

Em relação ao segundo aspecto, como a Prova Escrita com Cola foi aplicada em dois momentos distintos, houve a possibilidade de os estudantes repensarem suas estratégias de seleção de informações para as colas. Ao resolver a primeira Prova Escrita com Cola, Jorge observou que sua cola não auxiliava na resolução de muitas questões e, ao refletir a respeito disso, concluiu que sua cola poderia conter mais definições, axiomas e propriedades. Em uma segunda cola, o estudante elaborou-a de acordo com suas novas premissas e conseguiu reunir um maior número de indícios para a resolução da prova. Entendo que a primeira cola elaborada por Jorge continha indícios que auxiliariam a resolução de questões específicas. Já a segunda, continha indícios que auxiliariam a resolução de questões mais gerais. Desse modo, entendo que a atividade do estudante de elaborar cola (ou seja, de sistematizar atividade matemática) se tornou mais formal.

Sobre o terceiro aspecto, a construção geométrica do losango feita por Jorge, apresentada nas anotações, revela que o estudante utilizou as propriedades dos quadriláteros e reconheceu conteúdos matemáticos (construções fundamentais) que possibilitaram efetuar o desenho. Além disso, foi necessário reconhecer aspectos das construções fundamentais que possibilitassem resolver esse tipo de tarefa. Por exemplo, até então, o trabalho com mediatrizes tinha como intenção o traçado da mediatriz por si, a construção de alguns casos de retas perpendiculares e o traçado do ponto médio. Entendo que utilizar a mediatriz para a construção das diagonais de um losango implica que essa estratégia agora está em um contexto mais geral. Tal estratégia torna-se, agora, plausível/possível para outros contextos, para outras situações. Está, então, em um nível mais formal.

5.4 PRINCÍPIO DA INTERATIVIDADE SUBJACENTE A ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO DA TRAJETÓRIA DE AVALIAÇÃO

Na implementação da trajetória, reconheci quatro aspectos aos quais o princípio da interatividade está subjacente: 1) a dinâmica da aula privilegiava o trabalho em grupos; 2) a nota não era privilegiada na disciplina; 3) os estudantes se comunicaram entre as fases da Prova em Fases; e 4) a conduta dos estudantes ao longo da disciplina evidenciou que a dinâmica de aula devia ser repensada.

Sobre o primeiro aspecto, para a Educação Matemática Realística, interação é um fator fundamental para a aprendizagem. Os autores dessa abordagem valorizam uma dinâmica de sala de aula em que os estudantes possam discutir entre si, e com o professor, a respeito de suas aprendizagens. Entendo que trabalhar em grupos em grande parte das aulas possibilitou interação entre os estudantes com seus grupos e comigo, uma vez que, com uma quantidade menor de grupos, pude dar atenção a dúvidas, perguntas, comentários que chegavam a mim.

A respeito do segundo aspecto, durante a implementação da trajetória de avaliação, os estudantes não tinham contato direto com notas, e essas não eram usadas para informar seus rendimentos. Ao invés de uma prática avaliativa centrada em notas, essa tinha como elemento importante o feedback. Por meio dele, os estudantes recebiam informações úteis a respeito de suas produções e atitudes aula a aula. Nesse sentido, a ação de comunicação entre professor e os estudantes tornou o princípio da interatividade evidente e essencial na disciplina.

Em relação ao terceiro aspecto, as resoluções das questões 7 e 19 da Prova em Fases evidenciaram comunicação entre os estudantes. Outras questões também contêm indícios de que os estudantes se comunicaram entre si.

Já acerca do quarto aspecto, grande destaque foi dado à comunicação (oral, escrita) nessa disciplina de Geometria e Desenho. Os instrumentos de avaliação e as análises já apresentadas nesta tese buscam evidenciar isso. Em alguns momentos, ao longo da disciplina, a maneira como os estudantes agiam suscitava mudanças de encaminhamento na dinâmica de aula, como quando inseri o Seminário de triângulos. As evidências fornecidas pelos alunos de que a dinâmica de aula devia ser repensada não eram, necessariamente, por meio de comunicação oral ou por escrito, mas por meio de gestos, condutas, atitudes que me levavam à reflexão. Desse modo, entendo que a interação entre professor e estudantes também se dá por meio de comunicação não verbal, imersas em significados do contexto escolar (universitário), em significados próprios de uma turma específica, em uma disciplina específica.

5.5 Princípio do entrelaçamento subjacente a aspectos da implementação da trajetória de avaliação

Em relação ao entrelaçamento, reconheci um aspecto ao qual esse princípio está subjacente: os estudantes resolveram as questões da Prova em Fases em diferentes momentos, inclusive meses após os conteúdos serem “trabalhados” em sala de aula.

Ao preparar a trajetória de avaliação, criei unidades que continham conteúdos a serem trabalhados durante um determinado período de tempo. Para cada unidade, elenquei instrumentos de avaliação específicos (Quadro 4). Entre eles, estava a Prova em Fases, que continha questões de todas as unidades. Como a Prova em Fases foi resolvida ao longo de todo o ano letivo, os estudantes podiam escolher em qual momento resolveriam cada questão. Por exemplo, Jorge resolveu a questão 14 na 7a fase, embora a unidade referente a essa questão tenha sido trabalhada antes da 2a fase. Entendo que o fato de questões de todas as unidades terem sido trabalhadas 2 vezes por bimestre (como as fases foram distribuídas) permitiu aos alunos estudarem todos os conteúdos o tempo todo. Nesse sentido, ainda que a unidade “Geometria Euclidiana Plana” tenha sido destacada nos primeiros meses de aula, ela continuou sendo trabalhada ao longo do ano. Da mesma forma, “Geometria Espacial”, que era a última unidade a ter destaque, estava sendo trabalhada desde o início do ano por meio das questões da Prova em Fases. Assim, os conteúdos da disciplina Geometria e Desenho foram se entrelaçando ao longo do ano.

5.6 Princípio da orientação subjacente a aspectos da implementação da trajetória de avaliação

Na implementação da trajetória de avaliação, reconheci dois aspectos aos quais o princípio da orientação está subjacente: 1) as tarefas de sala de aula também eram tarefas de avaliação; e 2) as Anotações dos Estudantes permitiram compreender que tiveram uma oportunidade guiada de reinventar a construção de quadriláteros notáveis utilizando suas propriedades e as construções fundamentais já conhecidas.

A respeito do primeiro aspecto, a reinvenção guiada, aqui apresentada como princípio da orientação, é o método de trabalho do professor. Não há, na reinvenção guiada, um conjunto bem definido de passos ou estratégias para que os estudantes aprendam, mas um conjunto de atitudes que direcionam o trabalho do professor. Nessa disciplina, da mesma forma que os estudantes eram avaliados por meio das tarefas de sala de aula, as provas e tarefas avaliativas acabaram por tornar-se tarefas de sala de aula. Nesse sentido, entendo que os instrumentos de avaliação foram utilizados para orientar os estudantes em suas aprendizagens.

Em relação ao segundo aspecto, é possível observar, ao estudar construções geométricas, que cada construção está baseada nos significados dos objetos que se quer construir. Por exemplo, a construção da mediatriz se dá ao determinar os pontos de encontro de duas circunferências secantes de mesmo raio e centros nos extremos do segmento, uma vez que mediatriz é a reta que contém todos os pontos equidistantes de dois pontos dados. Nesse sentido, ao estudar as propriedades do losango, Jorge e outros alunos puderam encontrar uma base para elaborar as construções desse quadrilátero por si mesmos. Tal elaboração se deu a partir de suas próprias atividades e das minhas intervenções. Entendo que, ao construir o losango (e outros quadriláteros notáveis), os estudantes reinventaram tais construções. Em uma análise posterior ao final do ano letivo, concluí que uma possível tarefa para prosseguir com o trabalho de reinvenção poderia ser "escreva instruções para que uma pessoa construa um losango, dadas as medidas de suas diagonais". Não trabalhei com essa tarefa, uma vez que pude elaborá-la no decorrer da escrita desta tese.

5.7 Aproximações entre a Educação Matemática Realística e a implementação da trajetória de avaliação

Para apresentar aproximações entre a Educação Matemática Realística e a implementação da trajetória de avaliação, elaborei o Quadro 12, que contém uma síntese dos aspectos discutidos nas seções 5.1 a 5.6 e que fundamenta a discussão desta seção.

Quadro 12 – aspectos da implementação da trajetória de avaliação que evidenciam os princípios da Educação Matemática Realística

Princípios	Aspectos
Princípio da atividade	Ao resolver Provas Escritas com Cola, os estudantes têm a oportunidade de matematizar.
	Ao preparar Seminários, buscando informações nos livros didáticos, os estudantes têm a oportunidade de matematizar.

Princípio da realidade	Tarefas da prova em fases podem conter contextos próximos aos estudantes e contextos para que os estudantes se aproximem.
	Contextos das tarefas podem se relacionar a aspectos da prática dos estudantes.
Princípio de níveis	A Prova em Fases permite aos estudantes corrigir erros, dar sequência a resoluções que ficam incompletas, acrescentar ou retirar informações nas resoluções.
	A elaboração de colas para a resolução de Provas Escritas com Cola em dois momentos possibilita aos estudantes refletirem a respeito das informações que compõe as colas.
	Discussões a respeito do uso de conteúdos de matemática para a reinvenção de outros pode possibilitar aos estudantes que suas produções se tornem mais formais.
Princípio da interatividade	A dinâmica da aula privilegia o trabalho em grupos.
	A nota não é privilegiada.
	Os estudantes se comunicam entre as fases da Prova em Fases.
	A conduta dos estudantes ao longo da disciplina evidencia que/quando a dinâmica de aula deve ser repensada.
Princípio do entrelaçamento	Os estudantes resolvem as questões da Prova em Fases em diferentes momentos, inclusive tempos após os conteúdos serem "trabalhados" em sala de aula.
Princípio da orientação	As tarefas de sala de aula também são tarefas de avaliação.
	As Anotações dos Estudantes evidenciam que os estudantes têm uma oportunidade guiada de reinventar conteúdos de matemática.

Fonte: o autor.

A RME, abordagem adotada pelo GEPEMA para seus trabalhos, está sustentada nos seis princípios apresentados neste trabalho e discutidos nos quadros deste capítulo. Van den Heuvel-Panhuizen (2000) considera que tais princípios são de aprendizagem e de ensino de matemática. As seções anteriores (5.1 a 5.6) mostram que é possível efetivar os princípios da Educação Matemática Realística por meio do desenvolvimento (concepção, elaboração, implementação e avaliação) de uma trajetória de avaliação, ou seja, uma trajetória relacionada ao processo de avaliação. Isso corrobora os estudos do GEPEMA (e dos autores estudados por esse grupo) que afirmam que a avaliação é um processo amalgamado aos processos de aprendizagem e de ensino. Porém, além de reafirmar o que as pesquisas têm mostrado, esta tese, por meio dessas seções (e do Quadro 12), traz à luz a possibilidade de conduzir aulas (e analisá-las) a partir da avaliação como processo.

Na trajetória de avaliação, afirmei que as tarefas de avaliação e as tarefas de aprendizagem e de ensino não seriam distintas. Nas seções 5.1 a 5.6, analisei os instrumentos de avaliação que continham tarefas (de aprendizagem, de avaliação, de ensino) e como tais instrumentos auxiliaram o desenvolvimento dos processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino. Instrumentos utilizados para avaliar, como a Prova Escrita com Cola, auxiliaram os alunos a estudar, me auxiliaram a conduzir as aulas; instrumentos utilizados para aprendizagem e para ensino, como os Seminários de triângulos, permitiram avaliar. Assim, além de as tarefas de avaliação não se distinguirem das tarefas de aprendizagem e de ensino, este trabalho evidenciou que, na perspectiva do GEPEMA, os instrumentos de avaliação também são de aprendizagem e de ensino, bem como os de aprendizagem e de ensino são de avaliação.

Sendo assim, os instrumentos tomam uma perspectiva longitudinal, no sentido de que deixam de ser trabalhados em momentos pontuais e passam a compor o processo contínuo de avaliação. Por exemplo, as Anotações dos Estudantes foram recolhidas em 8 aulas determinadas. É plausível assumir que esse é um instrumento de avaliação que acontece em momentos discretos[23], se desconsiderarmos a relação direta entre os processos de aprendizagem, avaliação e ensino. Entretanto, como esta tese tem evidenciado, a amálgama dos processos sugere que avaliação também está relacionada diretamente aos estudos dos alunos (para as provas, ao fazer trabalhos), às observações, atitudes, relações (do professor e dos estudantes), aos *feedbacks* e, sobretudo, à comunicação (oral, escrita, não verbal).

---

[23] Aqui, “discreto” está sendo utilizado em contraposição à ideia de “contínuo”.

Por fim, o Quadro 12 revela que os instrumentos de aprendizagem, de avaliação, de ensino configuram as dinâmicas das aulas. Na Educação Matemática Realística, não existe um conjunto de procedimentos ou de passos que devam ser seguidos em sala de aula; a essência dessa abordagem reside nas atitudes do professor ao orientar os processos de aprendizagem, de avaliação, de ensino, de tal modo a adaptar, desenvolver, propor, conduzir dinâmicas que suscitem lidar com situações por meio de matemática (matematizar).

Desse modo, é possível pensar em diferentes dinâmicas de aula na perspectiva da RME. Cada instrumento, além de carregar consigo possibilidades de dinâmicas de aulas, carrega, também, a proficuidade de evidenciar como os sujeitos têm agido e se relacionado (consigo mesmos, com os outros, com matemática), formentando tomada de decisões e (re)elaboração de novas dinâmicas e estratégias de aula.

“**Relevo**”
210x297mm
Guache escolar sobre papelão e caixas recicladas
Giovana Martins Casagrande

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Este trabalho de tese tinha como objetivo geral apresentar um estudo dos processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino em uma disciplina de Geometria e Desenho a partir do desenvolvimento (concepção, elaboração, implementação e avaliação) de uma trajetória de avaliação, na perspectiva do GEPEMA, e como objetivos específicos:

- apresentar uma trajetória de avaliação para a disciplina de Geometria e Desenho da Universidade Estadual de Londrina, com base na abordagem da Educação Matemática Realística e de autores da avaliação da aprendizagem escolar;
- apresentar, analisar e discutir trechos da trajetória de avaliação e de algumas modificações feitas, a fim de evidenciar aspectos teóricos subjacentes;
- apresentar, analisar e discutir produções escritas de estudantes da disciplina de Geometria e Desenho a fim de evidenciar a efetiva participação dos alunos no processo, tomado como oportunidade de aprendizagem e prática de investigação;
- investigar princípios da Educação Matemática Realística subjacentes à implementação da trajetória de avaliação.

Em relação ao primeiro objetivo específico, elaborei uma trajetória de avaliação para a disciplina de Geometria e Desenho com base na perspectiva do GEPEMA (autores do próprio grupo, da RME e da avaliação da aprendizagem escolar). Como toda trajetória, essa não era uma descrição precisa dos passos que eu seguiria, mas um conjunto de indicativos de possíveis atitudes que eu poderia tomar ao longo do ano letivo para efetivar o processo avaliativo como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

Entendo que, ao elaborar a trajetória de avaliação, levei em consideração diferentes aspectos, que estavam relacionados com o duplo caráter do trabalho que eu realizaria: uma disciplina de um curso de Ensino Superior e um campo de pesquisa para uma tese de doutorado. Portanto, foi preciso tomar o cuidado para que o contexto estabelecido fornecesse informações para a realização da pesquisa sem desconsiderar que os alunos não eram somente sujeitos de pesquisa, mas futuros professores em formação.

Diferente de outros planejamentos que já fiz para essa e outras disciplinas, a trajetória de avaliação contava com uma grande variedade de instrumentos de avaliação que tinham, em relação à pesquisa, a intenção de possibilitar recolher o maior número de informações possível e, em relação à sala de aula, de auxiliar a avaliação a ser uma prática de investigação e uma oportunidade de aprendizagem.

Desse modo, a trajetória de avaliação apresentada nesta tese e os aspectos da dinâmica de sala de aula aqui discutidos podem ser vistos como suportes para o trabalho de professores em sala de aula, bem como aporte metodológico para a coleta de informações em aulas de matemática.

Reconheço que a grande quantidade de instrumentos utilizados na disciplina exigiu uma quantidade exaustiva de trabalho. Entretanto, cada professor pode refletir a respeito de seus objetivos, intenções e escolher utilizar os instrumentos aqui apresentados em suas aulas, adaptá-los ou criar novos, levando em consideração que, acima de qualquer coisa, o trabalho na perspectiva deste trabalho está mais associado às atitudes propostas pela RME e pelo GEPEMA.

Em relação ao segundo e terceiro objetivos específicos, apresentei no Capítulo 4, trechos da trajetória e suas modificações, e produções escritas dos estudantes e discuti aspectos teóricos subjacentes a estes trechos e produções. No geral, cada análise era particular a cada trecho da trajetória de avaliação, o que gerou um capítulo com uma tempestade de ideias motivadas pelas leituras apresentadas nos capítulos de fundamentação teórica.

Destaco, aqui, alguns pontos evidenciados pelas análises do Capítulo 4:

- a avaliação foi praticada como um processo;
- os instrumentos de avaliação permitiram que os estudantes lidassem com os conteúdos ao longo do ano, podendo repensar suas estratégias de estudo e aprendizagem;
- o processo de avaliação fomentou a comunicação entre os estudantes e o professor;
- os contextos das tarefas estavam associados, também, à prática profissional do professor de matemática e, portanto, a ideia de contexto de uma tarefa foi associada às atitudes

relacionadas ao trabalho requerido pela tarefa;

- os instrumentos de avaliação possibilitaram ao professor reconhecer, na conduta dos estudantes, aspectos referentes à sua aprendizagem;
- a autoavaliação dos estudantes suscitou mudanças na dinâmica de aula.

Em relação ao quarto objetivo específico, analisei, no capítulo 5, aspectos da dinâmica de aula evidenciados pelo Capítulo 4. Tal dinâmica revelou indícios de que aprendizagem, avaliação e ensino são processos que, além de amalgamarem-se, conduzem uns aos outros. Dessa forma, um planejamento (trajetória de avaliação) que destaca as ações avaliativas de uma disciplina foi o fio condutor de práticas de aprendizagem e de ensino, bem como foram conduzidas nos processos de aprendizagem e de ensino.

Esse capítulo vai ao encontro das pesquisas que o GEPEMA vem desenvolvendo. Em especial, durante a elaboração desta tese, um dos membros do grupo, Osmar Pedrochi Junior, desenvolveu seu trabalho de tese que visa estudar, de um ponto de vista teórico, avaliação formativa como fio condutor da prática docente. Durante as discussões no grupo, emergiram muitas convergências entre a dinâmica de aula evidenciada por este trabalho e as reflexões teóricas que Pedrochi Junior estava fazendo em sua tese. Assim, espero que esta pesquisa, unida à pesquisa de Pedrochi Junior e de outros membros do grupo, possibilite ao campo de estudo da avaliação um alargamento em relação a olhar para a avaliação como processo.

Além disso, foi evidenciado pela análise presente no Capítulo 5 que:

- ações avaliativas na disciplina possibilitaram matematização;
- a dinâmica de aula possibilitava aos estudantes resolverem tarefas cujos contextos já lhes eram familiares e ter a oportunidade de se aproximar de contextos que ainda não eram;
- a retomada dos conteúdos ao longo do ano possibilitou que as produções dos estudantes fossem se tornando mais formais;
- as estratégias de estudo também tornaram-se mais formais ao longo da disciplina;

- a comunicação, que se deu por linguagem oral, escrita, não verbal, possibilitou aprendizagem;
- a condução da disciplina deu oportunidades aos estudantes de reinventarem conteúdos de matemática por meio da orientação do professor;
- na perspectiva de avaliação adotada pelo GEPEMA, instrumentos de avaliação são também de aprendizagem e de ensino e vice-versa;
- as dinâmicas de aula, na perspectiva da RME, se dão pelas atitudes do professor e podem ser conduzidas pelas práticas avaliativas.

Esta tese, além de contribuir para um alargamento na compreensão do processo de avaliação, também pode gerar futuras pesquisas, estudos e produção de materiais. Em especial, trajetórias de avaliação se revelam como um campo importante de estudo e pesquisa e como um potencial tema para a elaboração de materiais para auxiliar a formação de professores.

Além disso, este trabalho mostrou potencialidades de alguns instrumentos de avaliação sem que esse fosse o foco da pesquisa. Compreender as potencialidades dos instrumentos pode auxiliar na condução de aulas de matemática, quando tomados na perspectiva que esta tese aponta (de que também são instrumentos de aprendizagem e de ensino).

Por fim, a trajetória de avaliação desenvolvida na disciplina de Geometria e Desenho me possibilitou uma mudança de paradigma em relação às minhas práticas de avaliação. Desse modo, este trabalho foi elaborado não somente com um viés de pesquisa, mas, também, como uma oportunidade de formação para mim. Adotar práticas de avaliação como as descritas ao longo desta tese me fez sair de uma perspectiva de avaliação como fim dos processos de apredizagem e de ensino, produtora de informações a respeito do rendimento, para uma perspectiva centrada nos processos amalgamados de aprendizagem, avaliação e ensino, cujas informações a respeito de tais processos eram suscitadas, constantemente, pelas reflexões e comunicações entre os sujeitos e cujos significados possibilitavam novas reflexões e ações. Espero que os relatos, análises e discussões feitos neste trabalho possam suscitar novas práticas, dinâmicas, discussões.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vanessa Lucena Camargo de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALVES, Rose Mary Fernandes. **Uma análise da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões abertas de Matemática**, 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2006

AMERON, Barbara Ann van. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.

BEZERRA, Gisleine Correa. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BLOOM, Benjamin S. HASTINGS, J. Thomas. MADAUS, George F. **Manual de Avaliação Formativa e Somativa do Aprendizado Escolar**. São Paulo: Pioneira Editora, 1983. 307 p.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educaciona**l, São Paulo, n.22, p.155-177, jul/dez. 2000.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, UNESP - Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

CELESTE, Letícia Barcaro. **A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de Matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática.** 2011. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

DALTO, Jader Otavio. **A produção escrita em Matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) -

DE LANGE, Jan. Assessment: No change without problems. In: T. A. Romberg (Ed.), **Reform in School Mathematics and Authentic Assessment**. New York: SUNY Press, 87-172, 1995.

______. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DRIJVERS, Paul. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

ESTEBAN, Maria Tereza. A avaliação no processo ensino/aprendizagem: os desafios postos pelas múltiplas faces do cotidiano. **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro, n. 19, p. 129-137, 2002.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática**. São Paulo: Atual Editora, 1994.

FERREIRA, Pamela Emanueli Alves. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

______. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FORSTER, Cristiano. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2015. 123f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

______. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, Koeno. RME theory and mathematics teacher education. In: **International handbook of mathematics teacher education**, Rotterdam: Sense Publisher, v. 1, p. 238-302, 2008.

GRAVEMEIJER, Koeno; COBB, Paul. Design research from a learning design perspective. In: VAN DEN AKKER, Jan. *et al*. **Educational design research**. London: Routledge, 2006.

GRAVEMEIJER, Koeno; TERWEL, Jan. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

HADJI, Charles. **A Avaliação, Regras do Jogo**. Portugal: Porto Editora, 1994. 190 p.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KWON, Oh Nam. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Hersonissos.** Greece. University of Crete, 2002.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 128 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MORAES, Marco Antonio Gonzalez. **Correção de uma prova escrita de matemática**: algumas considerações. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. **Do observável para o oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PAIXÃO, Anie Caroline Gonçalves. **Uma Prova em Fases de matemática**: da análise da produção escrita ao princípio de orientação. 2016. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA**: algumas aproximações. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. 58 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEREGO, Franciele. **O que a produção escrita pode revelar?:** uma análise de questões de Matemática. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

PEREGO, Sibéle Cristina. **Questões abertas de Matemática**: um Estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **Enunciados de Itens de provas de Matemática**: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística. 2014. 68f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PRESTES, Diego Barboza. **Prova em Fases de Matemática**: uma experiência no 5º ano do Ensino Fundamental. 2015. 122f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do Ensino Médio em Questões discursivas não rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual dc Londrina, Londrina, 2008.

______. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SEGURA, Raquel de Oliveira. Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

STREEFLAND, Leen. **Fractions in Realistic Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1991.

TREFFERS, Adri; GOFFREE, Fred. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (ed.). **Proceedings of the 9th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht, The Netherlands: OW&OC. v. 2, p. 97-123, 1985.

TREVISAN, André Luis. **Prova em Fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN BOER, Corine. If you know what I mean. In: DRIJVERS, Paul. **Classroom-based research in Mathematics Education**. 2004

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

______. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

______. Realistic Mathematics Education in the Netherlands. In: ANGHILERI, Julia (Ed.), **Principles and practice in arithmetic teaching** Buckingham/Philadelphia: Open University Press, p. 49-63, 2001.

______. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010.

VAN REEUWIJK , Maarten. From informal to formal, progressive formalization: an example on "solving systems of equations." In: CHICK, H.; STACEY, K. ; VINCENT, J. (Eds.), **The future of the teaching and learning of algebra**: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, vol. 2, p. 613-620, 2001.

VIOLA DOS SANTOS. João Ricardo. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Trajetória de avaliação

1. INFORMAÇÕES INICIAIS

Professor: Gabriel dos Santos e Silva.
Ano letivo: 2016.
Disciplina: 2MAT055 – Geometria e Desenho.
Curso: Matemática (Licenciatura).
Série: 1^{a}.
Carga horária: 120 horas (144 aulas).

2. EMENTA

Geometria euclidiana plana. Axiomas. Congruências. Semelhança. Axioma das paralelas. Elementos de Geometria Não-Euclidiana. Geometria espacial. Construções fundamentais no plano. Construções de polígonos no plano. Equivalências de área. Transformações geométricas. Escala. Tangência, concordância e aplicações.

3. OBJETIVOS DA DISCIPLINA

- Proporcionar um ambiente em que situações possam suscitar a mobilização de conteúdos de Geometria e Desenho.
- Retomar conteúdos de Geometria Euclidiana Plana da Educação Básica.
- Estudar aspectos da Geometria Euclidiana a partir de axiomas.
- Problematizar o axioma das paralelas e discutir noções das seguintes Geometrias Não Euclidianas: elíptica, hiperbólica e fractal.
- Proporcionar um ambiente que suscite o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e da habilidade e sensibilidade para resolução de problemas geométricos.
- Empregar as construções com régua e compasso (ou softwares geométricos) como instrumento para a aprendizagem de geometria e para a resolução de problemas.

- Realizar construções com régua e compasso (ou softwares geométricos) a partir de interpretações geométricas de objetos algébricos.

4. INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO PREVISTOS

- Prova em Fases.
- Prova Escrita com Cola.
- Seminários.
- Ficha de Autoavaliação.
- Avaliação dos colegas.
- Avaliação da disciplina.
- Portfólio.
- Prova em Grupo.
- Prova Elaborada Pelos Estudantes.
- Vaivém.

5. CONTRATO DE AVALIAÇÃO

Em relação ao contrato de avaliação, será feito um conjunto de combinados com os estudantes a fim de que o andamento das aulas ocorra com a colaboração de todos.

A dinâmica principal da aula se dá por meio de discussões em pequenos grupos. Dessa forma, os estudantes farão a escolha dos seus grupos em alguns momentos; em outros, o professor fará a distribuição dos grupos a fim de, intencionalmente, organizar as tarefas para que a discussão possa ocorrer entre diferentes estudantes em diferentes momentos. Pode ser que, em alguns momentos, os grupos sejam constituídos por meio de sorteio.

O principal objetivo da constituição de grupos é a comunicação e a colaboração. Nesse sentido, o trabalho em sala de aula precisa contar com cooperação, solidariedade e respeito mútuo entre professor e estudantes. Isso inclui a responsabilidade de cada um com seu próprio grupo. A entrega das tarefas é imprescindível e independe da presença dos estudantes, ainda que a frequência seja um elemento importante para a aula. Espera-se que, em casos necessários, a ausência seja previamente informada ao grupo e as tarefas que ficaram a cargo daquele que se ausentará sejam encaminhadas aos membros do grupo.

As aulas estão previstas para terças e quartas-feiras, iniciando às 21h10 e terminando as 22h50. Espera-se que seja cumprido o horário de início para que a aula se encerre ao término das tarefas previstas para cada aula.

Ainda em relação aos grupos, a dinâmica da aula, em alguns momentos, exigirá uma reorganização da disposição dos elementos físicos da sala de aula (carteiras principalmente). É necessário que, ao término da aula, a sala esteja organizada para as aulas do dia seguinte. Portanto, cabe ao professor e aos estudantes, organizar o ambiente de sala de aula.

A avaliação, entendida nessa disciplina como processo, será realizada em todos os momentos. Dessa maneira, reitera-se a importância da frequência dos estudantes, pois esse será um critério para avaliação.

As tarefas de sala de aula poderão ser também tarefas de avaliação. Conduzirão o andamento da aula e fornecerão informações para professor e estudantes a respeito de suas aprendizagens. Entretanto, alguns instrumentos de avaliação serão destacados. São os descritos na próxima seção desta trajetória. Tais instrumentos culminarão na nota dos estudantes.

Na perspectiva adotada (avaliação formativa) a nota tem um caráter subjetivo ao expressar mais o desenvolvimento dos estudantes ao longo da disciplina do que uma medida dele. Nesse caso, a nota é um elemento dispensável, no sentido de que seu caráter somativo não se relaciona com esse tipo de avaliação e ela é substituída por *feedbacks* que fornecem informações aos estudantes. Entretanto, por motivos burocráticos, será atribuída, ao final do ano, uma nota para cada bimestre, a partir do desenvolvimento dos estudantes, por meio dos instrumentos descritos.

6. DESCRIÇÃO DAS AÇÕES

O primeiro instrumento de avaliação a ser apresentado aos estudantes será a Prova em Fases (Apêndice B). Esse instrumento contém 25 questões referentes aos conteúdos que serão trabalhados ao longo do ano dispostas na prova de maneira arbitrária. No primeiro dia, os alunos terão a oportunidade de examinarem a prova por 20min. Em seguida, serão informados que a prova terá 8 fases, o que significa que terão, para resolvê-la, 8 encontros a serem marcados nos primeiros dias de aula de cada semestre.

Nas 8 fases, os estudantes terão o direito de resolver as questões que quiserem, modificar questões já resolvidas anteriormente, corrigir erros, dar sequência a resoluções que ficaram incompletas, acrescentar ou retirar informações de resoluções.

As questões foram escolhidas de modo a contemplar

- os três níveis de demanda cognitiva propostos pela RME (reprodução, conexão e reflexão),
- os diferentes níveis de complexidade e
- conteúdos de toda a ementa.

Assim, conhecendo as questões, cada estudante tem a oportunidade de escolher os conteúdos que estudará para resolvê-las. Essa escolha dá informações confiáveis ao professor a respeito da compreensão que cada um teve do enunciado da questão e aponta a razão da escolha de determinada estratégia. Pelo fato de poder escolher a ordem em que resolverá a questão, também essa escolha indicará tanto a questão que o estudante acredita saber resolver, quanto a relação feita entre o conteúdo trabalhado em sala e o necessário para a resolução.

Ao analisar as resoluções, o professor poderá sentir a necessidade de fazer intervenções na produção dos estudantes a fim de proporcionar oportunidades de aprendizagem.

Outro instrumento de avaliação utilizado durante o ano todo é o Vaivém[24]. Dá-se o nome Vaivém ao instrumento de avaliação constituído de folhas de papel em que professor e estudante dialogam por meio da escrita. As discussões entre professor e estudante serão particulares a respeito de temas diversos, como Geometria, aspectos relacionados ao curso, às estratégias de estudo dos estudantes, à disciplina. Por vezes poderá acontecer de o diálogo ter um cunho mais pessoal. Espera-se que o instrumento oportunize um espaço de comunicação, reflexão e até, quem sabe, autoavaliação, avaliação da disciplina e avaliação do professor.

---

[24] Instrumento de comunicação criado e utilizado pela Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco (Depto. de Matemática da UEL) desde 1978.

A dinâmica do Vaivém será: na quarta-feira da primeira semana, o professor entrega ao estudante a pergunta inicial (para você, como deve ser uma boa aula de Geometria?) que será respondida por cada estudante e entregue ao professor na quarta-feira da segunda semana. Na terceira semana, o professor devolve o Vaivém aos estudantes com intervenções. Na semana seguinte, os estudantes entregam novamente o Vaivém ao professor com suas considerações feitas a partir da intervenção do professor. E assim por diante.

Além desses instrumentos, outros poderão ser utilizados para cada unidade. Chama-se unidade, nesta trajetória, o conjunto de conteúdos que serão trabalhados relacionados a um instrumento de avaliação específico. São unidades na disciplina 2MAT055: Geometria Euclidiana Plana, Polígonos, Circunferência e Círculo, Elementos de Geometria Não Euclidiana, Áreas, Transformações Geométricas e Geometria Espacial.

Em relação às unidades “Geometria Euclidiana Plana” e “Polígonos”, serão utilizadas, como instrumentos de avaliação, duas Provas Escritas com Cola, uma para cada unidade. O instrumento “Prova Escrita com Cola”[25] proporciona aos estudantes momentos de reflexão, com destaque à elaboração da cola, em que decisões precisam ser tomadas a respeito de quais informações se farão presentes no espaço limitado de papel. Nessa prova, os estudantes só conhecerão as questões na hora de resolvê-la. Nas Provas Escritas com Cola, o estudante informará a razão de ter feito a cola que fez.

Será proposto aos estudantes que utilizem ¼ de folha de papel A4 (frente e verso) como espaço permitido para escrever informações que comporão a cola a ser utilizada na prova. Os estudantes só poderão fazer a prova se possuírem cola.

Caso os estudantes não se saiam bem na prova (ou na escolha de informações para a cola), será solicitado que elaborem outra cola que pode ser utilizada para resolver a mesma prova ou, ainda, uma prova que possa ser resolvida com a cola que fizeram. Em qualquer uma dessas opções, os estudantes terão, novamente, a oportunidade guiada de estudar os conteúdos solicitados na prova, bem como terão mais uma oportunidade de mostrar o que sabem. Qualquer que seja a estratégia adotada, será feita uma discussão a respeito dos motivos que levaram

---

[25] FORSTER, Cristiano. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2015. 123f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015

os estudantes a não se saírem bem na primeira vez. Caso se saiam bem, serão discutidas as estratégias adotadas para a elaboração da cola.

Na unidade "Circunferência e Círculo", o instrumento de avaliação previsto é a "Prova Elaborada Pelos Estudantes". Será proposto aos estudantes que elaborem uma Prova em Grupos e o respectivo gabarito contendo os critérios de correção referente ao conteúdo estudado, justificando a escolha de cada uma das questões. As provas elaboradas pelos estudantes serão aplicadas aos estudantes da disciplina de Geometria e Desenho do Bacharelado em Matemática (ou, por impossibilidades, as provas serão trocadas entre os estudantes da própria licenciatura). Em seguida, os estudantes deverão corrigir as provas a partir de seus gabaritos para uma posterior discussão no grande grupo.

Objetiva-se com esse instrumento de avaliação possibilitar aos estudantes o contato com diferentes questões relacionadas à unidade, fomentando a reflexão necessária à escolha das tarefas que serão utilizadas para compor a prova, sua disposição, resolução, correção. Essa reflexão não se relaciona somente à aprendizagem do conteúdo, mas pretende-se proporcionar um ambiente profícuo à utilização da prática do professor de matemática na disciplina de Geometria e Desenho, uma vez que são futuros professores.

Para a unidade "Elementos de Geometria Não Euclidiana", pretende-se usar o instrumento "Prova em Grupo". Esse instrumento de avaliação proporciona a discussão, a reflexão, a justificação, a comunicação, a interatividade. Tais ações serão incentivadas ao longo das aulas e, consequentemente, em todo o processo de avaliação. Após a realização da prova, serão escolhidos membros de cada grupo para apresentar a resolução do grupo no quadro e discutir com os demais estudantes e professor as estratégias e procedimentos utilizados na resolução. A escolha dos membros dos grupos será feita por sorteio, incentivando que todos os membros dos grupos busquem saber resolver as questões.

A unidade "Áreas" contará com a elaboração de um "Trabalho Escrito". A proposta é que os estudantes elaborem um plano de aula a respeito do conteúdo apresentando elementos de uma possível dinâmica de aula que gere discussões (em sala de aula) do conteúdo. Para isso, será discutida a elaboração de planos de aula, de seus elementos, dando a possibilidade de que os estudantes preparem aulas referentes a esse conteúdo, escolhendo eles mesmos as estratégias para a apresentação do conteúdo. Objetiva-se, com essa tarefa, proporcionar aos estudantes um momento de refletir a relação entre conteúdo e seu ensino. Além disso, espera-se observar as escolhas feitas pelos estudantes na condução da aula para analisar se a dinâmica da aula proposta pelos estudantes tem relação com a proposta de aulas de Geometria e Desenho na perspectiva da Educação Matemática Realística.

Após a entrega dos planos de aula, serão dadas algumas aulas abordando o conteúdo com a utilização do geoplano. Nesse momento, outros trabalhos escritos poderão ser solicitados aos estudantes.

Os planos de aula serão analisados pelo professor com apontamentos para que os estudantes tenham a oportunidade de trabalhar em uma versão final. No geral, os apontamentos visarão buscar a coerência dos elementos do plano de aula, a apresentação dos conteúdos matemáticos.

"Geometria Espacial" será trabalhada por meio de "Seminários". Os conteúdos dessa unidade serão divididos entre os estudantes para que trabalhem em uma apresentação do conteúdo, escolhendo informações a serem apresentadas, uma tarefa para ser resolvida pelos demais estudantes. Além da minha avaliação, o Seminário contará com a avaliação das pessoas que estarão presentes no dia de sua realização.

A unidade "Transformações Geométricas" contará com o instrumento "Portfólio". No início do ano, será solicitado que os estudantes providenciem um "Caderno de Desenho" para que registrem as construções geométricas. Tais construções geométricas são da unidade "Transformações Geométricas" e, também, "Geometria Euclidiana Plana", "Polígonos", "Circunferência e Círculo" e "Elementos de Geometria Não-Euclidiana". Os Portfólios serão entregues nas 4 "fases pares" da realização da Prova em Fases.

Além das construções geométricas, o Portfólio conterá uma autoavaliação, sendo que a primeira ficha se encontra como apêndice desta trajetória. Após a primeira entrega do Portfólio, a Ficha de Autoavaliação será analisada, com a intenção de nortear a elaboração das demais.

Ao final do ano, os estudantes farão avaliação da disciplina e do professor, a fim de que reflitam a respeito da condução da aula, dos conteúdos trabalhados, das estratégias adotadas na disciplina, dando assim um *feedback* ao professor.

7. DA CORREÇÃO DAS PROVAS

Tomando a avaliação como prática de investigação, é possível construir um mapeamento das resoluções dos estudantes por meio dos códigos apresentados abaixo. Estes códigos auxiliam a analisar todas as questões resolvidas por um estudante ou a resolução de todos os estudantes em uma questão.

Código	Significado
2	Resolução correta
1	Resolução parcialmente correta
0	Resolução incorreta
9	Não apresenta resolução alguma

Os instrumentos “Prova em Fases”, “Prova Escrita com Cola”, “Prova em Grupo” e “Portfólio” serão corrigidos a partir desses códigos. Cada uma dessas correções permitirá ao professor e aos estudantes conhecer e discutir aspectos das provas resolvidas e suas correções.

Para o rendimento acadêmico dos estudantes, será atribuída uma nota ao mapa final de cada estudante, dando valores aos códigos. No caso da Prova em Fases, será possível obter um mapa a cada fase. Assim, a nota será atribuída ao último mapa (em que cada questão valerá 0.4).

A “Prova Elaborada Pelos Estudantes” será avaliada à medida que o professor e os estudantes discutirem a elaboração da prova, os critérios de correção e a correção dela. Alguns critérios para correção serão:

- a prova elaborada contém questões que contemplam todo o conteúdo de Circunferência e Círculo;
- a prova elaborada pode ser resolvida no tempo estipulado (máximo de duas aulas de 50 minutos);
- os critérios de correção possibilitam que qualquer prova seja corrigida;
- a resolução no gabarito está matematicamente correta;
- a correção é coerente com os critérios adotados.

O “Trabalho Escrito” (plano de aula) será corrigido em duas fases. Na primeira, o professor fará intervenções com questionamentos a respeito do conteúdo e da apresentação deles em formato de aula. Alguns critérios para correção serão:

- o plano de aula contém os elementos discutidos em sala de aula;
- o plano de aula contém as tarefas propostas aos estudantes e possíveis resoluções;
- o conteúdo matemático apresentado está correto;
- o plano de aula contém proposta de avaliação;
- a linguagem é clara e objetiva;
- o texto é compreensível.

Os "Seminários" serão avaliados pelos colegas de turma e pelo professor. A média aritmética das notas dadas pelos estudantes para cada Seminário gerará a nota dos colegas de cada Seminário. A nota final será a média aritmética da nota do professor com a nota dos colegas. Os critérios estão descritos a seguir:

- Seminário foi coerente com a proposta;
- contemplou os itens solicitados;
- comunicação clara;
- boa gestão do tempo;
- apresentação correta dos conceitos matemáticos.

8. CRONOGRAMA PREVISTO

Conteúdos	**Instrumentos de avaliação**	**Aulas previstas**
Geometria Euclidiana Plana → Axiomas → Noções primitivas (ponto, reta e plano) → Segmentos de reta → Posições relativas entre retas → Construção: retas → Construção: divisão de segmentos em partes iguais e proporcionais → Ângulos e medições → Par de retas paralelas cortadas por transversal → Operações com medidas de ângulos → Construção: transporte de ângulos → Construção: operações com ângulos → Construção: bissetriz	Prova em Fases Prova Escrita com Cola Portfólio	18

Polígonos → Elementos de um polígono → Construção: polígonos regulares inscritos em circunferências → Construção: polígonos estrelados → Triângulos → Congruência de triângulos → Semelhança de triângulos → Cevianas → Pontos notáveis → Construção: cevianas e pontos notáveis → Quadriláteros notáveis	Prova em Fases Prova Escrita com Cola Portfólio	22
Circunferência e círculo → Circunferência → Círculo → Ângulos na circunferência → Construção: tangente à circunferência → Construção: arco capaz → Concordância → Construção: ovais e espirais	Prova em Fases Prova Elaborada Pelos Estudantes Portfólio	14
Elementos de Geometria Não-Euclidiana → Elementos de Geometria Hiperbólica → Elementos de Geometria Esférica → Elementos de Geometria Topológica → Elementos de Geometria Fractal	Prova em Fases Prova em Grupo Portfólio	12
Áreas → Cálculo de áreas de regiões planas → Cálculo de áreas em Geometrias Não-Euclidianas	Prova em Fases Trabalho Escrito	12
Transformações geométricas → Escalas → Translações → Reflexões → Rotações → Homotetias	Prova em Fases Portfólio	10
Geometria espacial → Paralelismo e perpendicularidade no espaço → Diedros e triedros → Poliedros: poliedros convexos, prismas e pirâmides → Corpos redondos: cilindros, cones e esferas → Área e volume → Planificação	Prova em Fases Seminários	20

APÊNDICE B

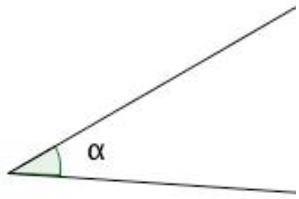
Prova Escrita com Cola de Geometria Euclidiana Plana

Prova com Cola 1 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

1. Seja α o ângulo representado abaixo, construa com régua e compasso:



a) O dobro do complemento de α.

b) O complemento do dobro de α.

2. Prove que a bissetriz de um ângulo é única.

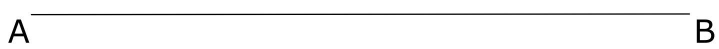
3. Construa, com régua e compasso, um ângulo de medida $22^{o}30'$.

Prova com Cola 1 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

4. Encontre o ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$ abaixo. Em seguida, divida o segmento de reta $\overline{AM}$ em 4 partes iguais e o segmento de reta $\overline{BM}$ em partes proporcionais a 1, 2 e 3.



5. Considere três pontos colineares A, B e C, sendo que B fica entre A e C e $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Se M é ponto médio de $\overline{AB}$ e N ponto médio de $\overline{BC}$, mostre que $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$.

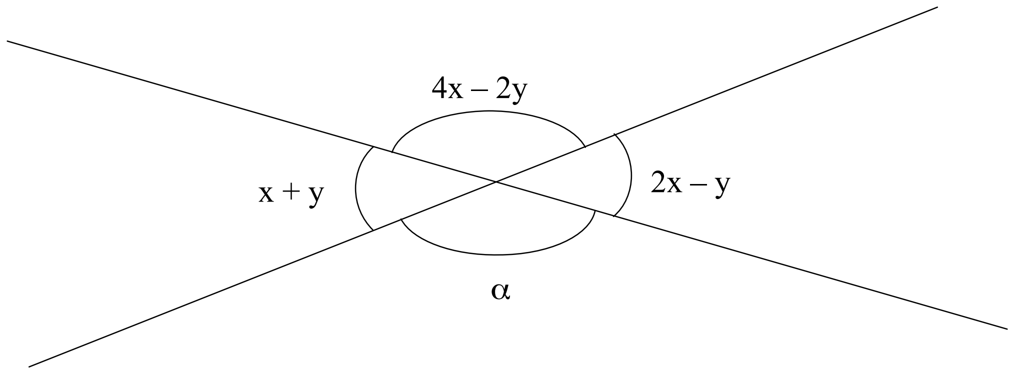
6. Seja M um ponto entre A e B. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{MB}$, sabendo que $\overline{AB}$ é igual ao triplo de $\overline{MB}$ e a medida de $\overline{AM}$ é 32cm.

Prova com Cola 1 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

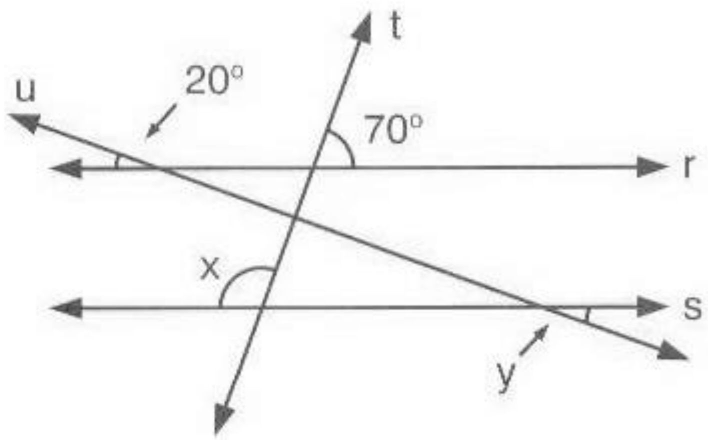
Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

7. Calcule o valor de α:



8. Na figura abaixo, tem-se r//s. Qual é o valor de x + y? Explique.



Boa Prova!

APÊNDICE C

Questionário a respeito da elaboração da primeira cola

Estudante: ____

A respeito da cola elaborada para a prova do dia 25/05/2016, responda à caneta cada uma das questões abaixo.

1) Descreva como você fez para elaborar a cola.

2) Qual(is) critério(s) você utilizou para selecionar as informações para a cola?

3) A cola foi útil para a resolução da prova? Por quê?

4) Se você pudesse refazer a cola, o que você faria diferente?

APÊNDICE D

Prova Escrita com Cola de Polígonos

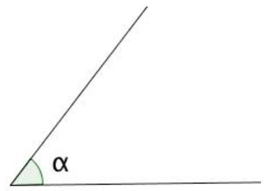
Prova com Cola 2 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

1. Construa um triângulo de lados **a** e **b** e ângulo α entre **a** e **b**.

a **b**



2. Construa um triângulo de lados 5cm, 7cm e 10cm e:

a) Encontre seu baricentro.

b) Calcule sua área.

c) Classifique o triângulo quanto aos lados e quanto aos ângulos.

3. Prove que em qualquer triângulo equilátero as três medianas são congruentes.

Prova com Cola 2 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

4. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

(   ) Todo triângulo isósceles é equilátero.

(   ) Todo triângulo equilátero é isósceles.

(   ) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.

(   ) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.

(   ) Existe triângulo retângulo e isósceles.

(   ) Existe triângulo isósceles obtusângulo.

5. Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metros de altura em relação ao solo.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.

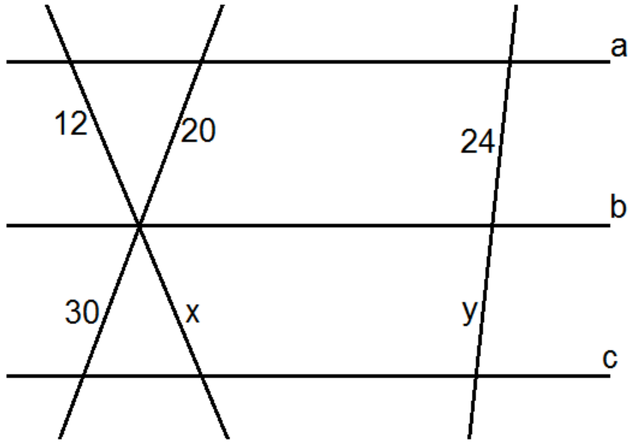
6. Quantas diagonais tem um polígono de cuja soma dos ângulos internos é 1440^{o}?

Prova com Cola 2 – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

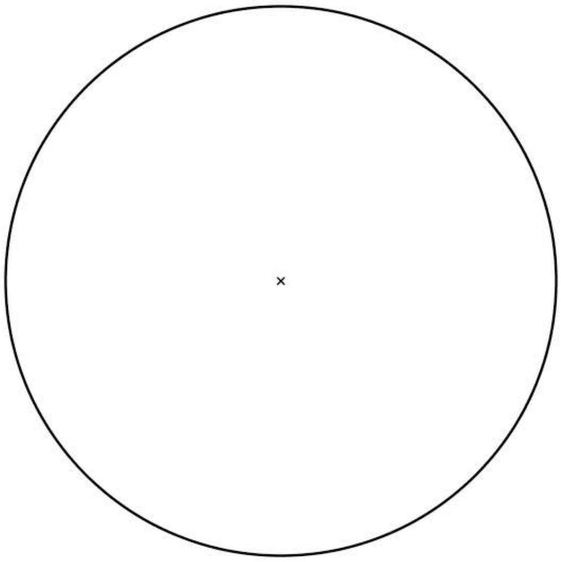
Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

7. Na figura, a//b//c. Então, qual o valor de y − x?



8. Construa um pentágono regular inscrito na circunferência abaixo.



Boa Prova!

APÊNDICE E

Prova em Grupo

Prova em Grupo – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudantes: ____

Formulário:

$$\acute{A}rea\ de\ um\ tri\hat{a}ngulo\ esf\acute{e}rico: \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

$$\acute{A}rea\ da\ superf\acute{i}cie\ esf\acute{e}rica: A = 4\pi R^2$$

1. O fractal abaixo é construído por um processo iterativo.

Calcule a área e o perímetro do fractal.

2. Cite três características topológicas da fita de Möebius. Em seguida, diga se essas características se aplicam à esfera, ao toro e ao bitoro.

Prova em Grupo – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudantes: ____

3. Calcule a área de:

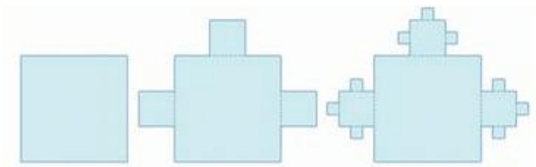
a) Um biângulo da Geometria Esférica sobre uma esfera de raio 4m e medida do ângulo interno 45^o.

b) Um triângulo esférico sobre uma esfera de raio 2m e cujos ângulos internos medem 60^o, 135^o e 150^o.

c) Um triângulo esférico cujas medidas dos ângulos internos são x rad, 2x rad e 3x rad e o raio da esfera é $\frac{x}{2}$ cm.

4. Qual é a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo?

5. Escreva uma fórmula que apresenta a quantidade de quadrados no fractal construído de acordo com a imagem abaixo na iteração **n**.



Boa Prova! ;)

APÊNDICE F

Prova em Fases

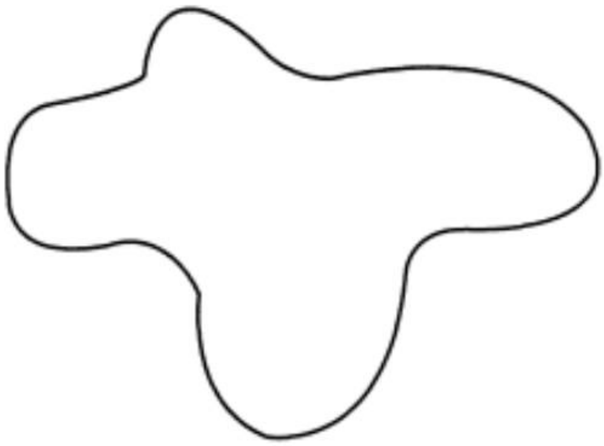
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

1) Qual é a área da figura abaixo? Explique o que você fez para determinar essa área.



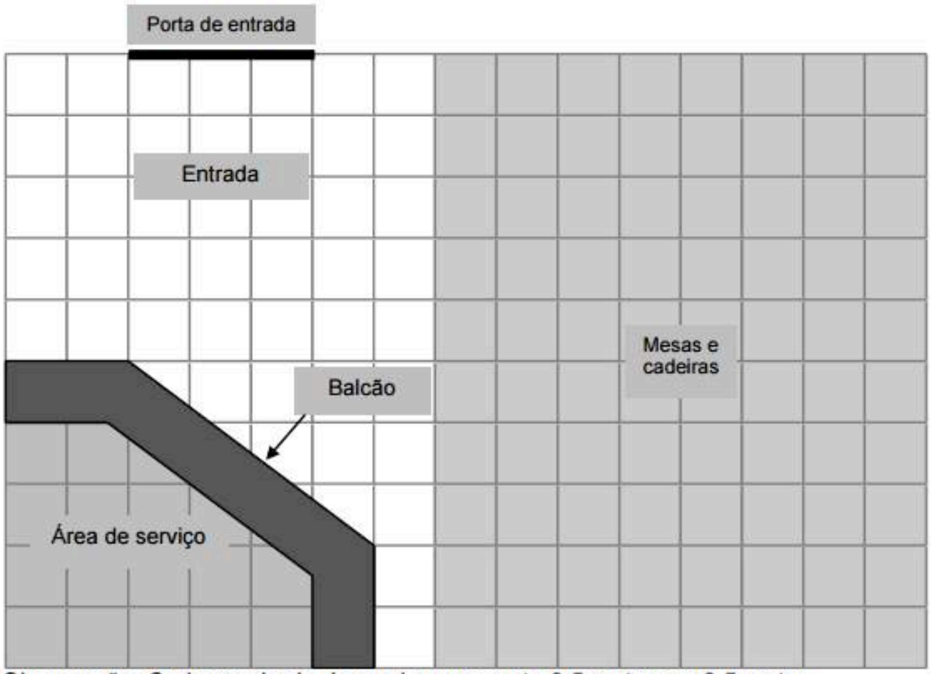
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

Veja abaixo a planta da sorveteria de Maria, que ela está reformando. A área de serviço é rodeada por um balcão. Resolva as questões 2, 3 e 4.



Observação: Cada quadrado da grade representa 0,5 metro por 0,5 metro.

2) Maria deseja instalar uma nova borda ao longo da parede externa do balcão. Qual é o comprimento total da borda de que ela precisa? Demonstre seu raciocínio.

Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

3) Maria também vai trocar o piso de sua loja. Qual é a área total do piso da loja, excluídos a área de serviço e o balcão? Demonstre seu raciocínio.

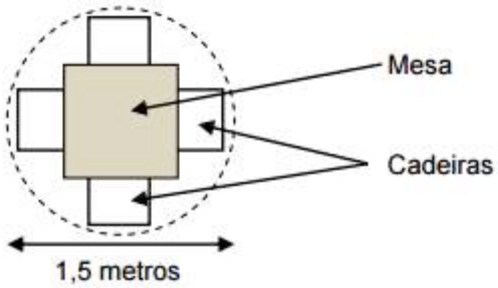
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

4)



Em sua loja, Maria quer instalar conjuntos de mesas com quatro cadeiras, como mostra a ilustração acima. O círculo representa a área do piso necessária a cada conjunto.

Para que os clientes tenham espaço suficiente quando estiverem sentados, cada conjunto, representado pelo círculo, deveria estar instalado em função das seguintes condições:

- Cada conjunto deve estar instalado pelo menos a 0,5 m das paredes.
- Cada conjunto deve estar instalado pelo menos a 0,5 m dos outros conjuntos.

Qual é o número máximo de conjuntos que Maria pode instalar na área cinza da loja destinada às mesas?

Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

5) Martin mora a 3km da escola e Alice a 5km. Qual a distância entre a casa de Martin e Alice?

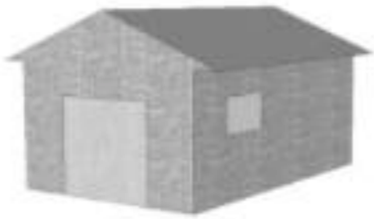
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

6) A série "básica" de um fabricante de garagens inclui modelos com apenas uma janela e uma porta. Jorge escolhe o seguinte modelo da série "básica". As posições da porta e da janela são mostradas aqui.



Com base na ilustração acima, represente as vistas frontal, traseira, inferior, superior, lateral direita e lateral esquerda do modelo da série "básica".

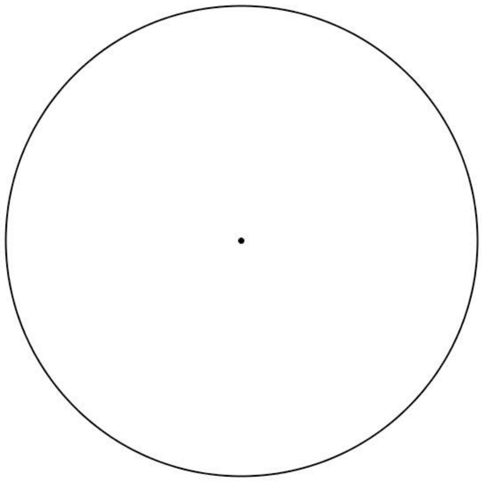
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

7) Construa, com régua e compasso, um polígono regular de 7 lados inscrito na circunferência abaixo.



Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

8) Construa um triângulo equilátero ABC. Em seguida, encontre os pontos médios M, N, P dos segmentos AB, BC e CA. Prove que o triângulo MNP é, também, um triângulo equilátero.

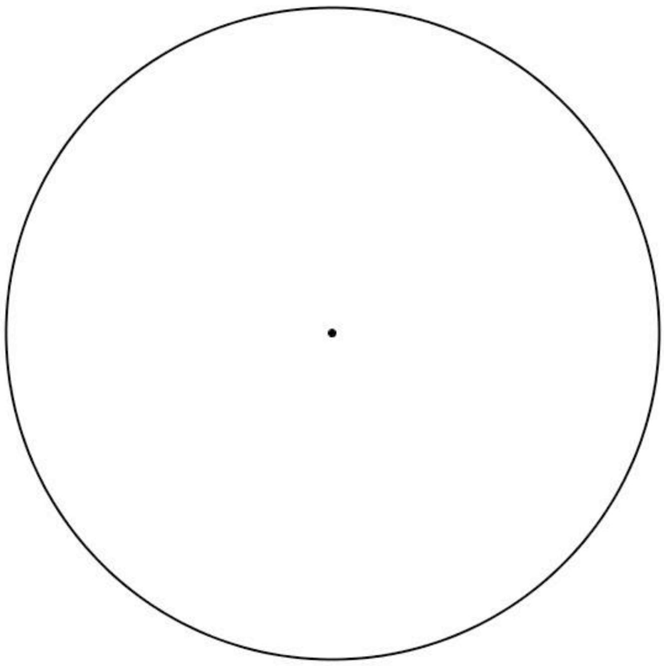
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

9) Construa, na circunferência abaixo, um polígono estrelado de 8 pontas e calcule sua área.



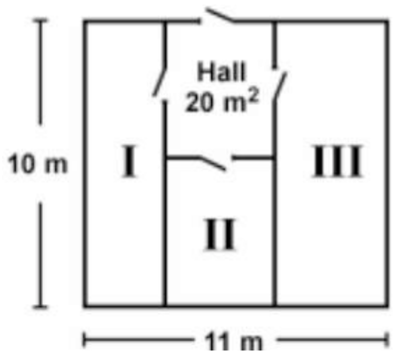
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

10) Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um hall de entrada de 20 m^2, conforme a figura abaixo. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades.



Qual a largura do depósito III em metros?

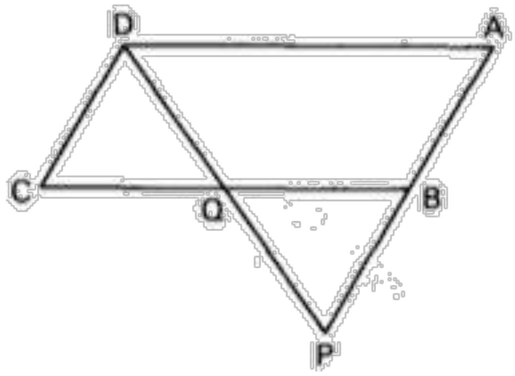
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

11) Se ABCD é um paralelogramo, AD=20cm, BQ=12cm e BP=BQ, determine o perímetro desse paralelogramo.



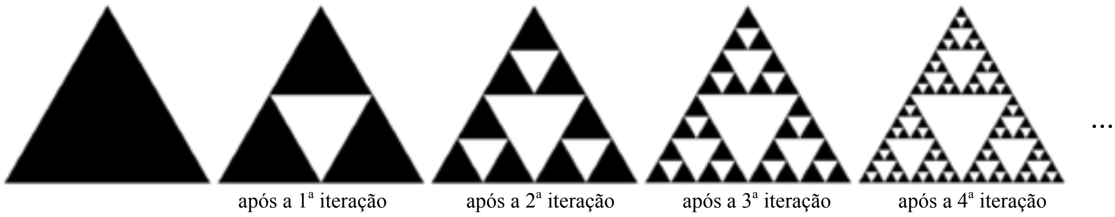
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

12) Um triângulo de Sierpinski é um fractal construído por um processo iterativo como ilustrado na figura abaixo:



Calcule a área do triângulo de Sierpinski após a terceira iteração.

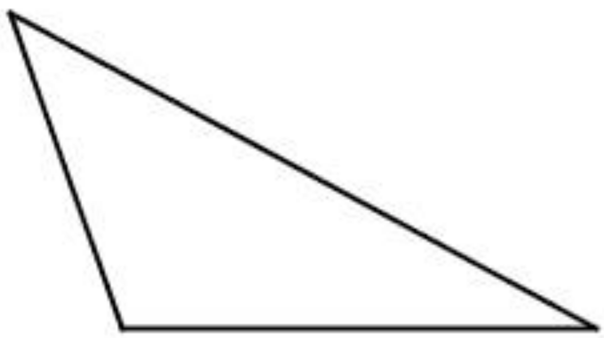
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

13) Construa o ortocentro do triângulo abaixo.



Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

14) Com régua e compasso, construa um ângulo de medida 3º45’.

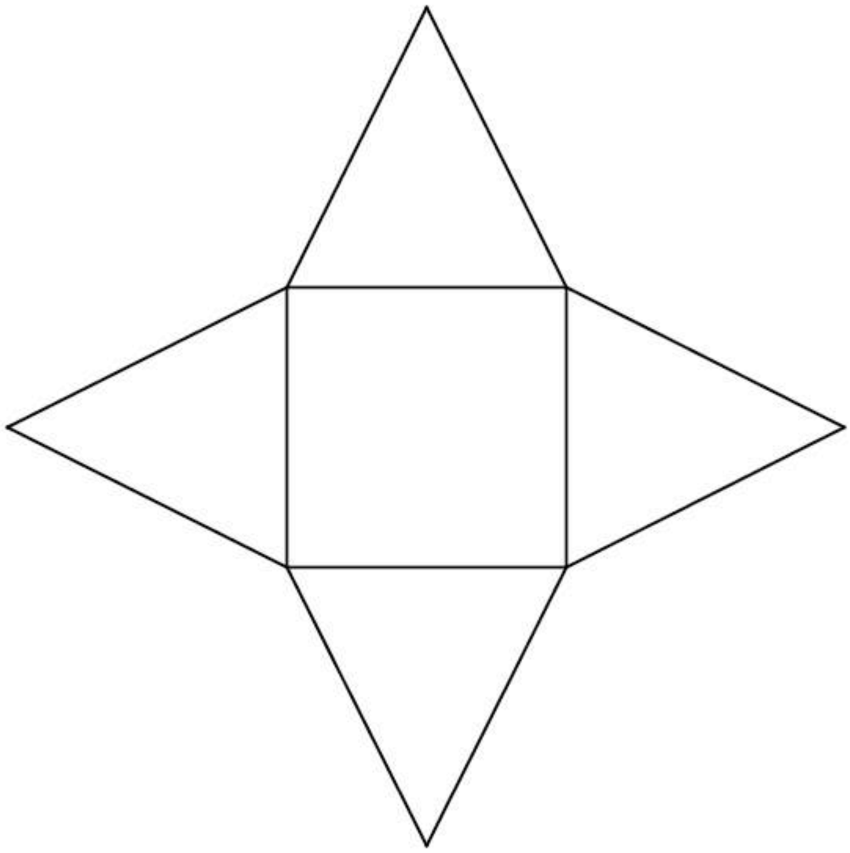
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

15) A figura abaixo é a planificação de um sólido geométrico na escala 1:200. Calcule o seu volume em m³.



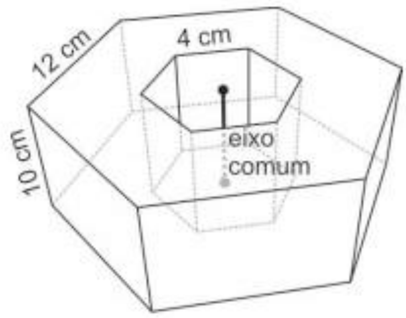
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

16) Uma metalúrgica produz uma peça cujas medidas são especificadas na figura a seguir:



A peça é um prisma reto com cavidade central e com base compreendida entre dois hexágonos regulares, conforme a figura. Considerando que os eixos da peça e da cavidade coincidem, qual o volume da peça?

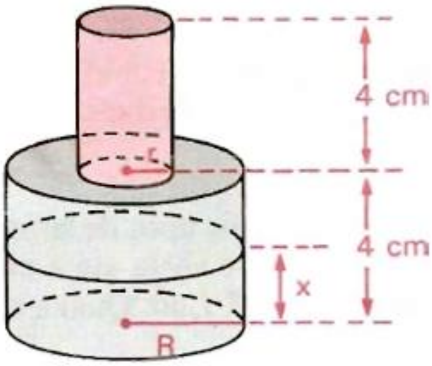
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

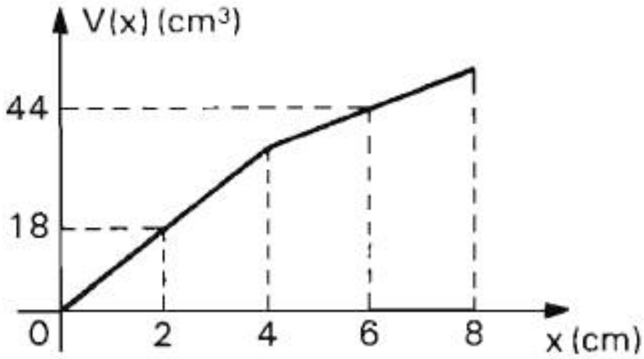
Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

17) Uma garrafa de vidro tem a forma de dois cilindros sobrepostos. Os cilindros têm a mesma altura 4cm e raios R e r, respectivamente.



Se o volume V(x) de um líquido que atinge uma altura x da garrafa se expressa segundo o gráfico abaixo, quais os valores de R e r?



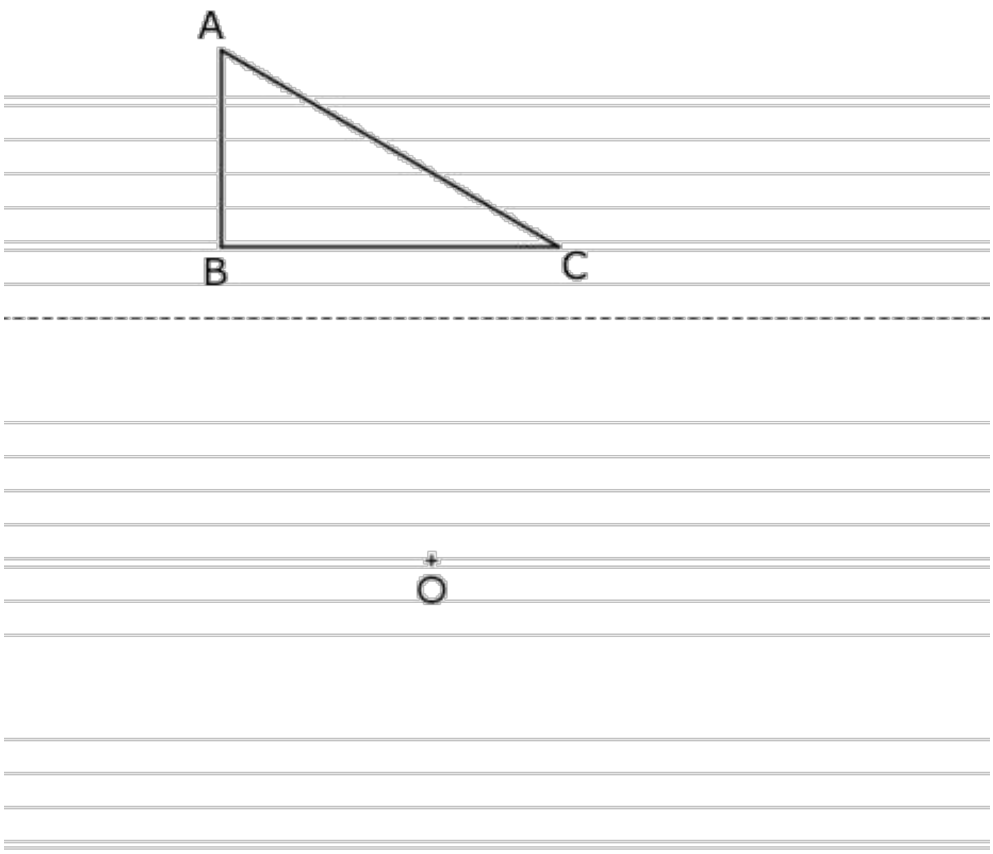
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

18) Na figura abaixo, construa um triângulo DEF simétrico ao triângulo ABC em relação à reta dada. Em seguida, construa um triângulo GHI simétrico ao triângulo DEF em relação ao ponto O.



Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

19) Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, do mesmo recheio e em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso?

Explique o que pensou para resolver e dar a resposta.

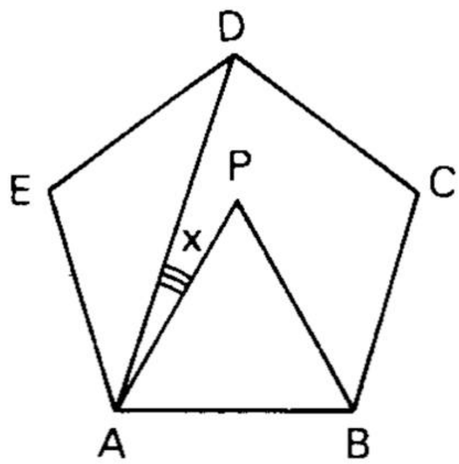
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

20) Se ABP é equilátero e ABCDE é um pentágono regular, determine o valor de x.



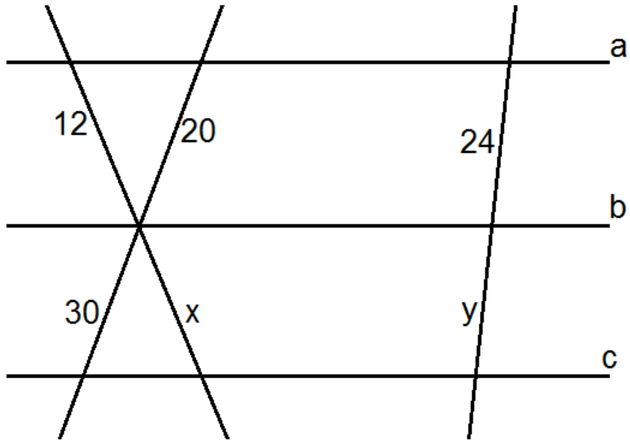
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

21) Na figura, a//b//c. Então, qual o valor de y – x?



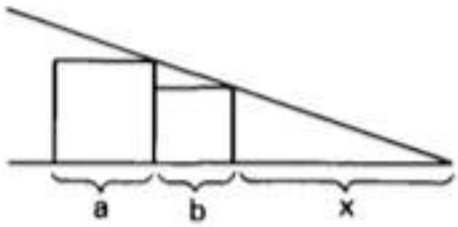
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

22) Na figura abaixo, considere os quadrados de lados a e b (a > b). Calcule o valor de x.



Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

Em um acidente foi isolada uma região retangular. 17m de corda, esticada e sem sobras, foram suficientes para cercar 3 lados da região, a saber, os dois lados menores de medida x e um lado maior de medida y, dados em metros. Com essas informações, resolva as questões 23 e 24.

23) Determine a área da região isolada, em função do lado menor.
Explique o que pensou para resolver e dar a resposta.

Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

24) Determine as medidas dos lados x e y e o perímetro da região retangular, sabendo-se que a área da região era de $36m^2$ e a medida do lado menor era um número inteiro. Explique o que pensou para resolver e dar a resposta.

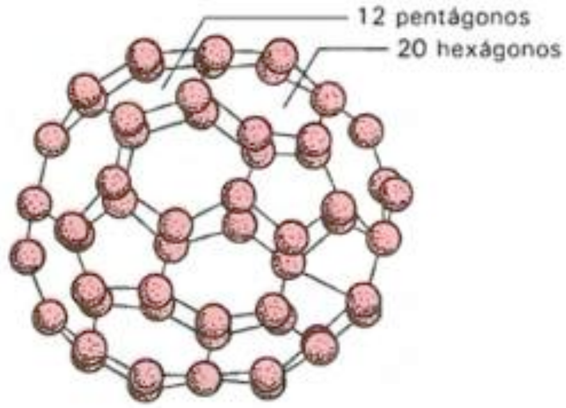
Prova em Fases – 2MAT055 (Geometria e Desenho)

Professor: Gabriel dos Santos e Silva

Estudante: ____

☐ 1ª fase ☐ 2ª fase ☐ 3ª fase ☐ 4ª fase ☐ 5ª fase ☐ 6ª fase ☐ 7ª fase ☐ 8ª fase

25) Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol. Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?



APÊNDICE G

Ficha de Autoavaliação do primeiro semestre

Estudante: ____

Data: ___/___/_____. Ficha de Autoavaliação 01.

<u>Orientações</u>

- Use apenas caneta azul ou preta.
- Escreva uma nota de 0 a 10 ao final da Ficha de Autoavaliação a partir das informações que você escreveu ao longo desta ficha.

O que tenho a dizer a respeito:

1. Da minha participação nas aulas e nas atividades em grupo.

2. Do meu envolvimento com a disciplina.

3. Das minhas maiores dificuldades na disciplina.

4. Do meu empenho na realização das tarefas.

5. Pensando bem, minha nota no primeiro semestre deve ser: __________.

6. Além disso, sobre mim, ainda gostaria de dizer que:

APÊNDICE H

Ficha de Autoavaliação do segundo semestre

Estudante: ____

Data: ___/___/_____.   Ficha de Autoavaliação 02.

Orientações

- Use apenas caneta azul ou preta.
- Escreva uma nota de 0 a 10 ao final da Ficha de Autoavaliação a partir das informações que você escreveu ao longo desta ficha.

O que tenho a dizer a respeito:

1. Da minha participação nas aulas.

2. Do que melhorei ao longo do ano.

3. Das dificuldades que foram superadas ao longo da disciplina.

4. Das dificuldades que ainda tenho em relação à disciplina.

5. Pensando bem, minha nota deve ser: __________.

6. Ainda, sobre mim, gostaria de dizer que:

ANEXOS

ANEXO A

Carta ao colegiado

Universidade
Estadual de Londrina

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
GEPEMA – GRUPO DE ESTUDO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E AVALIAÇÃO

Londrina, 19 de abril de 2016.

SOLICITAÇÃO

O Grupo de Estudo em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA) da Universidade Estadual de Londrina - UEL solicita autorização do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática para coleta de informações na disciplina 2MAT055 (Geometria e Desenho) do 1º ano do referido curso para o desenvolvimento do Projeto de Pesquisa **"Trajetórias de Avaliação em Aulas de Matemática"**.

O referido projeto tem objetivo de analisar a aplicação de uma trajetória de avaliação na perspectiva de avaliação adotada pelo GEPEMA e será submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa da UEL. Para tanto, necessitamos de uma carta de autorização desse colegiado.

Atenciosamente,

....
Gabriel dos Santos e Silva

....
Regina Luzia Corio de Buriasco

ANEXO B

Termo de consentimento livre e esclarecido para menores de idade

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Dados do responsável pelo estudante menor de idade:

Nome:...

RG: ....

CPF: ....

Endereço:...

....

Telefone: ....

E-mail: ....

Tendo em vista a necessidade de coleta de informações para o desenvolvimento do projeto de tese a respeito de trajetórias de avaliação em aulas de Matemática, sob responsabilidade do Prof. Ms. Gabriel dos Santos e Silva, professor lotado no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, responsável pela disciplina 2MAT055 (Geometria e Desenho) do 1º ano de Licenciatura em Matemática sob a orientação da Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco, professora lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que utilizem parcial ou integralmente os registros escritos de meu(minha) filho(a) .... que serão recolhidos ao longo do ano letivo de 2016, para fins de pesquisa, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, com a condição de que ele seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, / / 2016.

Nome:____

Ass:____

ANEXO C

Termo de consentimento livre e esclarecido para maiores de idade

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome:...

RG: ....

CPF: ....

Endereço:...

....

Telefone: ....

E-mail: ....

Tendo em vista a necessidade de coleta de informações para o desenvolvimento do projeto de tese a respeito de trajetórias de avaliação em aulas de Matemática, sob responsabilidade do Prof. Ms. Gabriel dos Santos e Silva, professor lotado no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, responsável pela disciplina 2MAT055 (Geometria e Desenho) do 1º ano de Licenciatura em Matemática sob a orientação da Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco, professora lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que utilizem parcial ou integralmente os meus registros escritos que serão recolhidos ao longo do ano letivo de 2016, para fins de pesquisa, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, com a condição de que eu seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, / / 2016.

Nome:____

Ass:____

ANEXO D

Mapa do Brasil por regiões


BRASIL: REGIÕES
www.mapasparacolorir.com.br
Elaborado a partir de base cartográfica do IBGE
0 250 500 1.000 Km
N