



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

WILLYAN HENRIQUE PONTIM BERTOLINO

COSMOLOGIA NEMÁTICA:
A EQUAÇÃO DE EINSTEIN NAS TEXTURAS NEMÁTICAS

Londrina
2014

WILLYAN HENRIQUE PONTIM BERTOLINO

COSMOLOGIA NEMÁTICA:
A EQUAÇÃO DE EINSTEIN NAS TEXTURAS NEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B546c Bertolino, Willyan Henrique Pontim.
Cosmologia nemática : a equação de Einstein nas texturas
nemáticas / Willyan Henrique Pontim Bertolino. – Londrina, 2014.
44 f. : il.

Orientador: Manuel Simões Filho.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de
Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em
Física, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Cristais líquidos nemáticos – Teses. 2. Relatividade geral
(Física) – Teses. 3. Energia livre – Teses. 4. Einstein, Equações de –
Teses. 5. Cosmologia – Teses. I. Simões Filho, Manuel. II. Universidade
Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-
Graduação em Física. III. Título.

CDU 532.783

WILLYAN HENRIQUE PONTIM BERTOLINO

**COSMOLOGIA NEMÁTICA: A EQUAÇÃO DE EINSTEIN NAS
TEXTURAS NEMÁTICAS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação, em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho.
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato
Universidade Federal do Triângulo Mineiro –
UFTM

Prof. Dr. David da Silva Simeão
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –
UTFPR

Londrina, 22 de dezembro de 2014

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a CAPES pela ajuda financeira.

Ao Prof. Dr. Manuel Simões Filho pela orientação e oportunidade.

Ao Prof. Dr. David da Silva Simeão, ao Prof. Dr. Fernando da Silva Alves e a Profa. Dra. Adriana de Campos Inforzato pela imensa ajuda com as correções.

A minha esposa Karoline pela grande ajuda em todos os momentos.

Aos professores e colegas de Curso.

E a todos que colaboraram diretamente ou indiretamente.

BERTOLINO, Willyan H. P. **Cosmologia Nemática**: A Equação de Einstein nas Texturas Nemáticas. 2014, 44 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

RESUMO

O propósito deste trabalho é analisar as semelhanças entre as teorias da cosmologia e dos cristais líquidos nemáticos, através de um estudo da energia elástica dos cristais líquidos nemáticos e da teoria da relatividade geral. Primeiramente, serão apresentadas as bases da teoria da relatividade geral, culminando com a equação de Einstein. Em seguida, apresentaremos as principais características da fase cristal líquido nemático bem como a teoria da curvatura elástica. Finalmente apresentaremos duas formas de obter uma métrica para os cristais líquidos nemáticos uniaxiais, considerando que as moléculas podem ser aproximadas a elipsóides de revolução em conjunto com a aproximação de Hess. Uma vez definida a métrica, é possível calcular a curvatura nemática e, usando a teoria da curvatura elástica, chegaremos a uma equação idêntica à equação de Einstein com exceção a variável tempo. Concluiremos com algumas analogias e implicações entre as duas teorias.

Palavras-chave: Relatividade geral. Métrica. Conexão afim. Equação de Einstein. Cristais líquidos nemáticos. Diretor. Energia elástica livre. Curvatura nemática.

BERTOLINO, Willyan H. P. **Nematic Cosmology:** The Einstein's Equation on Nematic Textures. 2014, 44 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ABSTRACT

The aim of this work is to analyze the similarities between the theories of cosmology and nematic liquid crystals through a study of the elastic energy of nematic liquid crystals and the theory of general relativity. First, we will present the foundation of the theory of general relativity, culminating in the Einstein equation. Then present the main characteristics of nematic liquid crystal phase and the theory of elastic curvature. Finally, we will present two ways to obtain a metric for the uniaxial nematic liquid crystals, whereas molecules can be approximated to ellipsoids of revolution together with the Hess's approach. Once defined the metric, we can calculate the nematic curvature and using the theory of elastic curvature, we will reach a similar equation to the Einstein equation except the time variable. We conclude with some implications and analogies between the two theories.

Key-words: General relativity. Metric. Afim Connection. Einstein equation. Nematic liquid crystals. Director. Free elastic energy. Nematic curvature.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Transporte paralelo	19
Figura 3.1 – Estados da matéria	23
Figura 3.2 – Fase nemática uniaxial	25
Figura 4.1 – Esquema para encontrar os eixos principais de um elipsóide	32

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	8
2.	COSMOLOGIA	9
2.1 .	RELATIVIDADE RESTRITA	9
2.2.	RELATIVIDADE GERAL	11
2.2.1.	Princípio da Equivalência	11
2.2.2 .	Tensor Métrico, Conexão Afim e Derivada Covariante	13
2.2.3.	Transporte Paralelo e Tensor de Curvatura.....	18
2.2.4 .	Tensor de Energia-Momento e Tensor de Einstein	20
2.2.5 .	Equações de Campo de Einstein	21
3.	CRISTAIS LÍQUIDOS	23
3.1.	NEMÁTICOS UNIAXIAIS	24
3.2.	PARÂMETRO DE ORDEM	25
3.3.	TEORIA DE CURVATURA ELÁSTICA	26
4.	COSMOLOGIA NEMÁTICA	30
4.1.	TENSOR MÉTRICO DE UM CRISTAL LÍQUIDO NEMÁTICO UNIAXIAL.....	30
4.2.	EQUAÇÃO DE EINSTEIN NEMÁTICA	39
5.	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS	43

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, tem se tornado comum o uso de amostras de materiais da matéria condensada como laboratório para o estudo experimental de características cosmológicas inacessíveis, como singularidades ou transições de fase [1]. O objetivo deste trabalho é estudar o uso de cristais líquidos nemáticos nesta comparação, e mostrar que as similaridades podem ser surpreendentemente profundas. No capítulo 4 mostraremos que a dependência da temperatura das texturas de uma configuração não alinhada do diretor de uma amostra de um cristal líquido nemático pode ser descritos por uma equação idêntica a forma espacial da equação de Einstein, em que o tensor de energia momento é substituído pelos componentes do tensor de stress elástico que produz uma curvatura não nula [1].

No Capítulo 2 veremos as bases da teoria da relatividade geral. Inicialmente, apresentamos os princípios da relatividade restrita bem como a estrutura do espaço de Minkowski. Posteriormente, trataremos dos principais problemas com a mecânica newtoniana e as ideias que levaram Einstein a criar o princípio da equivalência que é o ponto de partida para a construção da teoria da relatividade geral. O objetivo deste capítulo é apresentar como a equação de campo de Einstein é construída.

No Capítulo 3 tratamos dos Cristais Líquidos dando ênfase à fase nemática e a teoria da curvatura elástica. Finalmente, no Capítulo 4 apresentaremos duas formas de obter uma métrica para os cristais líquidos nemáticos utilizando a hipótese de Hess. Uma vez definida a métrica é possível obter uma equação para os cristais líquidos nemáticos que é idêntica à equação de campo de Einstein, exceto pela variável tempo. Concluiremos com as principais analogias e limitações entre as duas teorias.

2. COSMOLOGIA

2.1. RELATIVIDADE RESTRITA

Em 1905, Einstein postulou em seu famoso “*princípio da relatividade*” que todos os referenciais inerciais são equivalentes para a realização de todos os experimentos físicos. Em suas próprias palavras, postulou:

Se, em relação a K, K' é um sistema de coordenadas em movimento uniforme e destituído de rotação, então os fenômenos naturais seguem seu curso com relação à K' exatamente de acordo com as mesmas leis gerais com relação à K. [2]

Deste ponto de vista, fica clara a inexistência do *éter* (possível material que preencheria todo o espaço sendo o responsável pela propagação da luz). Para Einstein, não existe um espaço absoluto nem tempo absoluto, como afirmado por Newton [3]. Um segundo postulado diz: “*no vácuo, a luz viaja em linha reta com velocidade c em todas as direções em cada referencial inercial*”.

Estes dois postulados formam a base para a relatividade restrita e, para que eles sejam obedecidos, é necessário substituir as transformações de Galileu pelas transformações de Lorentz [3].

As transformações de Lorentz são dadas pelo conjunto de equações,

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad 2.1$$

onde (t', x', y', z') são as coordenadas temporal e espacial de um evento visto por um observador em um referencial K', movendo-se com velocidade v com relação ao referencial K, cujas coordenadas são (t, x, y, z) . Quando a velocidade v é baixa

comparada à velocidade c da luz, o conjunto de equações 2.1 reduz-se as equações de transformação de Galileu.

Existem certas grandezas na Física, chamados *invariantes*, que são de fundamental importância para a Física Teórica. Os invariantes são grandezas que permanecem imutáveis sobre transformações. Por exemplo, se considerarmos o espaço tridimensional de Euclides e fixarmos uma origem, as coordenadas de certo ponto com relação àquela origem não é invariante porque se mudarmos a origem, as coordenadas daquele mesmo ponto será diferente. A distância entre dois pontos definida por,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \quad 2.2$$

onde (x_1, y_1, z_1) e (x_0, y_0, z_0) , que são as coordenadas de dois pontos com relação a mesma origem, é um invariante no espaço Euclidiano pois a grandeza descrita pela equação 2.2 é independente de onde se encontra a origem do sistema.

Minkowsky descobriu uma relação muito simples que é invariante sobre transformações de Lorentz [2]. A grandeza definida por,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad 2.3$$

pertencente à dois pontos adjacentes do espaço quadridimensional contínuo, possui sempre o mesmo valor [3]. A magnitude ds é chamada *distância* entre dois eventos ou pontos quadridimensionais [3]. Existe uma forma mais compacta de escrever a equação 2.3 usando tensores,

$$ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad 2.4$$

onde empregamos a convenção de soma de Einstein, isto é, $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ significa $\sum_{\alpha,\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Dos 16 coeficientes de $\eta_{\alpha\beta}$ apenas 4 não são nulos no espaço de Minkowsky, são eles: $\eta_{00} = -1$; $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, como podemos ver na equação 2.3. Outra observação importante ocorre no diferencial dx^0 que significa cdt . Além disso, é conveniente salientar que os índices gregos $(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.})$ possuem os

valores $0,1,2,3$ enquanto os índices romanos $(l,j,k,etc.)$ possuem os valores 1,2,3, pois usaremos tal notação em momento oportuno.

Outro invariante muito importante em relatividade é a grandeza $d\tau$ chamado *tempo próprio* definido por $d\tau^2 = ds^2/c^2$ [4]. Esta grandeza é a medida de tempo feita pelo observador no referencial onde se encontra em repouso. Em outras palavras, é a medida de tempo feita no referencial que se move junto com o observador. Se o observador deseja realizar uma medida de tempo de um objeto, por exemplo, que esteja em outro referencial movendo-se com velocidade v com relação a ele, obterá (da equação 2.3),

$$d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} dt. \quad 2.5$$

A equação 2.5 acima nos diz que se $v \ll c$ as medidas de tempo feitas por relógios no referencial parado e no referencial em movimento são iguais, reduzindo-se à transformação de Galileu $dt' = dt$. Porém, se $v \approx c$, o relógio no referencial parado medirá um intervalo de tempo diferente de um relógio no referencial em movimento. Este fenômeno é conhecido como “*dilatação do tempo*” e é uma consequência da constância da velocidade da luz.

O espaço de Minkowsky descrito acima só descreve referenciais inerciais, ou seja, referenciais que não estão acelerados. Na superfície do planeta Terra, por exemplo, existe a aceleração g da gravidade e, portanto, o espaço de Minkowsky não se aplica de maneira geral. Contudo, como veremos em relatividade geral, localmente, as coordenadas curvilíneas arbitrárias devem sempre se reduzir às coordenadas planas.

2.2. RELATIVIDADE GERAL

2.2.1. Princípio da Equivalência

A segunda lei de Newton, dada pela equação 2.6 abaixo, fornece a relação entre a força atuando em um corpo e a consequente aceleração;

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad 2.6$$

onde m , a massa do corpo, é uma constante de proporcionalidade que expressa a inércia, ou seja, sua capacidade de resistir a ser acelerada [5].

Se tal corpo estiver inserido em um campo gravitacional gerado por N massas, a força gravitacional atuando em m será,

$$\vec{F} = - \sum_{i=1}^N \frac{Gmm_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad 2.7$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, m é a massa gravitacional e \vec{r} é a distância da massa a um certo referencial [4]. Das equações 2.6 e 2.7 obtemos,

$$m\vec{a} = - \sum_{i=1}^N \frac{Gmm_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad 2.8$$

simplificando as massas obtemos que $\vec{a} = -G \sum m_i(\vec{r} - \vec{r}_i)/|\vec{r} - \vec{r}_i|^3$. Podemos concluir que se a massa que governa a resistência de um corpo a certa força (massa inercial) for igual à massa que determina a magnitude da força gravitacional, então a aceleração de uma partícula em qualquer campo gravitacional é independente da massa do corpo que está submetido a tal força [5]. Vários experimentos foram realizados desde Galileu para comprovar a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional [5], dentre eles destacamos o experimento de Schlamminger (2007) [6], que obteve uma precisão de 10^{-13} utilizando o método da balança de torção para a razão entre a massa inercial e massa gravitacional [6]. A teoria gravitacional de Newton não explica esta igualdade entre as massas.

Outro grande problema com a mecânica Newtoniana é que o lado esquerdo da equação 2.6 é invariante porque descreve o efeito de um corpo de prova e de todos os outros corpos do universo enquanto que, do lado direito, a aceleração é relativa a algum referencial especificado e varia de referencial para referencial, ou seja, não é invariante. Além disso, um referencial inercial é um referencial não acelerado e não girante, mas relativo à que? Newton sugeriu que seria relativo ao espaço absoluto, que “em sua própria natureza, sem relação com nada externo,

permanece sempre similar e imóvel” [5]. Existem varias objeções quanto ao espaço absoluto de Newton e, como veremos na teoria da relatividade geral de Einstein, este conceito é abandonado.

Qual referencial inserido em um campo gravitacional seria equivalente a um referencial inercial? Se considerarmos uma força não gravitacional \vec{F} atuando em um corpo inserido em um campo gravitacional, de acordo com a segunda lei de Newton temos: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$. Se fizermos uma mudança de referencial podemos cancelar os efeitos da gravidade. Seja f' um referencial cuja aceleração é $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{g}$ e a segunda lei de Newton fornece,

$$m(\vec{a}' + \vec{g}) = m\vec{g} + \vec{F}. \quad 2.9$$

Como as massas inercial e gravitacional são iguais, obtemos $m\vec{a}' = \vec{F}$. Observe que a força gravitacional desaparece quando consideramos o referencial f' porque é um referencial em queda livre [5]. Einstein obteve a seguinte conclusão deste experimento, conhecido como “o princípio da equivalência”:

Em qualquer ponto do espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas inerciais locais tal que, em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza assumem a mesma forma que em um sistema de coordenadas cartesianas não acelerado na ausência de um campo gravitacional [7].

A região deve ser pequena porque a intensidade da aceleração \vec{g} da gravidade é função da altura e a direção aponta sempre para o centro da Terra. Sendo assim, \vec{g} só é constante localmente [5].

2.2.2. Tensor Métrico, Conexão Afim e Derivada Covariante

Para construir as equações da relatividade geral precisamos primeiramente expressar as leis da Física de maneira que assumam a mesma forma para qualquer sistema de coordenadas escolhido para descrever determinado evento. Tais equações são chamadas *covariantes*. As leis de Newton e a relatividade restrita são válidas em referenciais inerciais apenas, portanto, não são covariantes. Além disso,

temos que escrever uma *linha de mundo* para uma partícula, ou seja, uma especificação covariante da história da partícula em quatro dimensões. Na mecânica Newtoniana descrevemos tal linha simplesmente parametrizando as coordenadas espaciais em relação ao tempo absoluto, porém, em relatividade o tempo não é absoluto, mas sim, outra coordenada. O parâmetro utilizado em relatividade para construir a linha de mundo de uma partícula é o *tempo próprio* τ , que como vimos, é o tempo medido no referencial que se desloca junto com a partícula [5].

A teoria da relatividade geral é descrita na forma tensorial, por isso, vamos descrever algumas propriedades básicas dos tensores ao longo do texto. Na álgebra tensorial são definidos dois tipos de tensores: os tensores contravariantes cuja lei de transformação se assemelha à dos vetores e são representados com índices sobrescritos, por exemplo, V^μ ; e os tensores covariantes onde a lei de transformação se assemelha à dos gradientes e são representados por índices subscritos, por exemplo, V_μ . Para entender melhor a diferença entre estes dois tipos de tensores, vamos considerar um espaço vetorial em que os vetores são definidos pelos operadores de diferenciação associados às tangentes de uma curva [8], isto é,

$$\vec{V} \equiv \frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad 2.10$$

em que $x^\mu(\tau)$ é uma curva no espaço quadridimensional, ou seja, é a linha de mundo de uma partícula. Os operadores de diferenciação atuam numa função escalar teste qualquer $f(x^\mu)$. Pode se entender o conjunto dos quatro vetores $\partial \equiv \partial/\partial x^\mu$ como uma base particular deste espaço vetorial, constituída dos vetores tangentes às linhas coordenadas x^μ em um ponto P , e $dx^\mu/d\tau$ como as componentes do vetor nesta base [8]. Se quisermos utilizar outro sistema de coordenadas, x'^μ , para descrever pontos do espaço curvo, as novas componentes do mesmo vetor $\vec{V} = (dx'^\mu/d\tau)(\partial/\partial x'^\mu)$ na base $(\partial/\partial x'^\mu)$ associadas a estas novas coordenadas serão dadas por,

$$V'^\mu = \frac{dx'^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad 2.11$$

e a base muda como,

$$\hat{g}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \hat{g}_{\nu} \quad 2.12$$

Note que a forma de transformar a componente e a base são diferentes [8].

De acordo com o princípio da equivalência, uma partícula em um campo gravitacional na ausência de forças não gravitacionais pode ser escrita (equação 2.9),

$$\frac{d^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = 0 \quad 2.13$$

visto do referencial em queda livre f^i . Nesta equação, ξ^{α} são coordenadas do sistema de referencial em queda livre e $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ é o tempo próprio. Observe que, na teoria da relatividade geral, a aceleração \vec{a} é a derivada segunda das coordenadas quadridimensionais com relação ao tempo próprio. Para descrever esta partícula em outro sistema de referência digamos, por exemplo, coordenadas curvilíneas x^{μ} arbitrárias, a equação 2.13 fica,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} (\xi^{\alpha}(x^{\mu})) = 0$$

aplicando as regras de derivação usuais,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} (\xi^{\alpha}(x^{\mu})) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \\ \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} &= 0 \end{aligned} \quad 2.14$$

multiplicando por $\partial x^{\mu} / \partial \xi^{\alpha}$, obtemos a equação de movimento da partícula em queda livre visto de um referencial qualquer,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \quad 2.15$$

onde utilizamos a identidade,

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \delta_{\mu}^{\lambda} \quad 2.16$$

em que δ^λ_μ é o delta de Kronecker. Na equação 2.15, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é a *conexão afim* definida por [7],

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad 2.17$$

O tempo próprio também deve ser expresso no novo sistema de coordenadas arbitrário,

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ d\tau^2 &= -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad 2.18$$

onde definimos o *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$ por,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad 2.19$$

Podemos concluir da partícula em queda livre descrita acima que a conexão afim $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ é o campo gravitacional atuando na partícula, enquanto que o intervalo de tempo próprio entre dois eventos com uma separação de coordenadas infinitesimais é determinado pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [7].

Para mostrar que o tensor métrico é o potencial gravitacional, vamos derivar a equação 2.19 com relação à x^λ ,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \quad 2.20$$

utilizando a definição da conexão afim, dada pela equação 2.17, temos,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \quad 2.21$$

utilizando a equação 2.19,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} \quad 2.22$$

resolvendo esta equação para Γ ,

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = g_{\kappa\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + g_{\kappa\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa + g_{\kappa\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\kappa\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^\kappa - g_{\kappa\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^\kappa - g_{\kappa\mu}\Gamma_{\lambda\nu}^\kappa$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\kappa\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \quad 2.23$$

definindo $g^{\nu\sigma}$ a inversa da matriz $g_{\kappa\nu}$, isto é, $g^{\nu\sigma}g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma$, obtemos,

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad 2.24$$

que é o chamado *símbolo de Christoffel* [7]. É importante notar que o símbolo de Christoffel não é um tensor, mas sim, um símbolo já que o que caracteriza o caráter tensorial é a transformação de coordenadas. Por exemplo, considere o vetor contravariante definido na equação 2.11 e sua transformação, $V'^{\mu} = \partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}V^{\nu}$. A derivada deste vetor com relação a x'^{λ} não é um tensor porque,

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}. \quad 2.25$$

O segundo termo do lado direito destrói o caráter tensorial de $\partial V'^{\mu}/\partial x'^{\lambda}$ [8]. Para o símbolo de Christoffel a mudança de coordenadas é,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \quad 2.26$$

portanto, não é um tensor. Embora $\partial V'^{\mu}/\partial x'^{\lambda}$ não seja um tensor, podemos usá-lo para construir um tensor. Vamos multiplicar o vetor pelo símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \right) \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta}} V^{\eta}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma} \quad 2.27$$

#

somando as equação 2.25 e 2.27,

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \right) \quad 2.28$$

onde definimos a *derivada covariante*,

$$V^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}. \quad 2.29$$

Vemos então, da equação 2.28, que a derivada covariante de um vetor contravariante definido pela equação 2.29 é um tensor. De maneira análoga, podemos definir a derivada covariante de um vetor covariante por,

$$V_{\mu\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda}. \quad 2.30$$

que também é um tensor. As derivadas covariantes além de converter tensores em outros tensores reduzem-se a derivadas ordinárias na ausência de gravitação, ou seja, quando $\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} = 0$ a derivada covariante coincide com as derivadas usuais.

2.2.3. Transporte Paralelo e Tensor de Curvatura

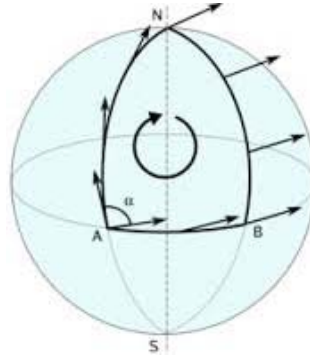
Gauss foi o primeiro a perceber que a curvatura pode ser medida usando propriedades intrínsecas da superfície. Por exemplo, a curvatura de uma esfera pode ser medida considerando um pequeno triângulo onde os lados são grandes círculos da esfera e usando a relação,

$$\text{Soma dos ângulos internos} = \pi + 4\pi \frac{\text{Área do triângulo}}{\text{Área da esfera}}. \quad 2.31$$

Se o triângulo for muito pequeno comparado com a esfera, a soma dos ângulos internos será o mesmo obtido no espaço Euclidiano, porém, se o lado do triângulo for da ordem do raio da esfera, a soma dos ângulos internos será diferente de π . Esta diferença surge devido à curvatura do espaço. Para generalizar este processo, vamos introduzir o conceito de transporte paralelo.

Vamos considerar um vetor sendo transportado ao longo de um triângulo ANB na superfície de uma esfera, como mostra a Figura 2.1. Aplicando o conceito Euclidiano de paralelismo usado no espaço plano, é fácil notar que se o vetor percorrer um loop neste triângulo, sua direção final será diferente da inicial de um ângulo α . Esta é exatamente a assinatura intrínseca da curvatura do espaço [9].

Figura 2.1 – Transporte Paralelo. Um vetor percorre um loop no triângulo ANBA e sua direção final é diferente da inicial.



Portanto, se a geometria do espaço for curva, isto é, se não for possível escolher um referencial onde a conexão afim, definida pela equação 2.16, é nula, então, um vetor qualquer não poderá ser transportado paralelamente como seria em coordenadas Euclidianas. Para que este vetor percorra um circuito fechado sem mudar sua direção final, temos que levar em conta a geometria do espaço. Dizemos então que, qualquer tensor pode ser transportado paralelamente ao longo de uma curva impondo que a derivada covariante ao longo desta curva seja nula, $V^{\mu}_{;\alpha} = 0$. Este tensor estará sujeito a equações diferenciais de primeira ordem,

$$\frac{dV^{\mu}}{d\tau} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} V^{\nu} \quad 2.32$$

e o tensor $V^{\mu}(\tau)$ definido ao longo da curva $x^{\mu}(\tau)$ é dito estar definido por transporte paralelo [7].

As derivadas covariantes não comutam, ou seja,

$$V^{\mu}_{;\alpha\beta} - V^{\mu}_{;\beta\alpha} = R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} V^{\nu} \quad 2.33$$

onde o tensor $R^{\mu}_{\nu\beta\alpha}$ é o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*, definido por,

$$R^{\mu}_{\nu\beta\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \quad 2.34$$

Vale lembrar que as derivadas comuns comutam (desde que a derivada segunda exista e seja contínua no intervalo considerado), ou seja, $\partial^2 V^{\mu} / \partial x^{\alpha} \partial x^{\beta} - \partial^2 V^{\mu} / \partial x^{\beta} \partial x^{\alpha} = 0$ [9].

Outros tensores podem ser construídos a partir do tensor de curvatura (Equação 2.34) através de contrações como é caso do *tensor de Ricci*,

$$R_{\nu\alpha} = R^{\mu}_{\nu\mu\alpha} \quad 2.35$$

e a *curvatura escalar* [9],

$$R = g^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha}. \quad 2.36$$

2.2.4. Tensor de Energia-Momento e Tensor de Einstein.

Nesta seção vamos determinar as equações diferenciais que descrevem os campos gravitacionais. Tais equações diferenciais parciais não são lineares, o que significa que os campos gravitacionais carregam energia e momento e devem contribuir para sua própria fonte [7].

De acordo com a gravitação de Newton, um campo gravitacional é determinado pela distribuição de matéria, ou seja, pela densidade de massa ρ que é uma quantidade que se conserva. Isto sugere que o tensor métrico do espaço-tempo (que como vimos, está intimamente relacionado com o campo gravitacional) deve ser calculado quando uma distribuição de matéria é conhecida. Temos então que definir um tensor que descreva esta distribuição de matéria. Além disso, uma consequência da relatividade restrita é que a massa não é conservada, mas está relacionada com a energia e o momento da partícula pela equação $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ além de existirem leis de conservação relacionadas à energia e ao momento. Portanto, massa e energia são idênticas e tal tensor deve levar em conta todas as formas de energia porque contribuem para o campo gravitacional [10,11].

Definimos então o *tensor de energia-momento* $T^{\mu\nu}$ para um fluido ideal:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu} \quad 2.37$$

onde ρ é a densidade de massa, p é a pressão, U^μ é a quadri-velocidade $U^\mu = (c\gamma(v), \gamma(v)v)$ em que $\gamma(v) = \left(\sqrt{1 - v^2/c^2} \right)^{-1}$ e v são as três componentes Euclidianas da velocidade. Existem outras formas do tensor de energia momento,

por exemplo, se em certa região do espaço só existem campos elétrico e magnético o tensor será,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\sum_{\sigma} F_{\sigma}^{\mu} F^{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \sum_{\rho, \sigma} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \quad 2.38$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor campo eletromagnético [11].

Outro tensor muito importante na teoria da relatividade geral é o *tensor de Einstein* definido por,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad 2.39$$

construído a partir do tensor de Ricci $R^{\mu\nu}$ e do escalar de curvatura R .

Vale destacar que os tensores de energia momento e o tensor de Einstein possuem divergência covariante nula [11].

2.2.5. Equações de Campo de Einstein

As principais ideias da teoria da relatividade geral foram complementadas pelo famoso físico John Wheeler que disse: “*A matéria diz ao espaço como se curvar. O espaço diz à matéria como se mover*” [11].

Para descrever uma teoria geométrica da gravitação, Einstein sugeriu que o tensor de energia momento é proporcional ao tensor de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -k T_{\mu\nu} \quad 2.40$$

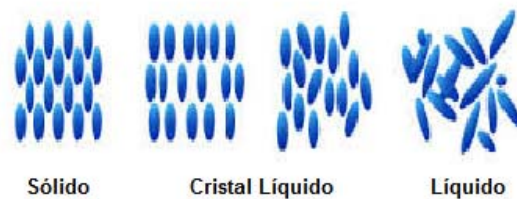
onde k é a *constante de Einstein* que, impondo o limite Newtoniano, determina-se $k = 8\pi G/c^4$. A equação 2.40 é conhecida como *Equações de campo de Einstein* e possui dois índices, μ e ν sendo, portanto, um conjunto de 16 equações diferenciais de segunda ordem das quais apenas 10 são independentes, devido à simetria [11].

As equações de Einstein não são lineares porque os coeficientes de conexão, equações 2.24, envolve o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e seu inverso $g^{\mu\nu}$. Esta é a razão que faz das equações de Einstein particularmente difíceis de resolver. Quando dizemos resolver as equações de Einstein significa que devemos encontrar um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que corresponde ao tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ [11].

3. CRISTAIS LÍQUIDOS

Embora muitos materiais apresentem apenas três estados da matéria (sólido, líquido e gasoso), muitos outros não se enquadrariam nesta classificação. Cristais líquidos são estados que ocorrem entre os estados sólido cristalino e líquido isotrópico, Figura 3.1. Estes estados intermediários também são chamados mesofases. Os cristais líquidos podem escoar como líquidos, possuem viscosidade como fluidos e também possuem características ópticas de cristais, daí o nome cristal líquido. A principal diferença de um cristal líquido para um líquido isotrópico é a sua anisotropia, ou seja, possuem propriedades físicas diferentes para diferentes direções [12].

Figura 3.1 – Estados da matéria.



A descoberta dos cristais líquidos é atribuída ao botânico austríaco Reinitzer que, em 1888, trabalhando com derivados do colesterol da cenoura, observou que a substância benzoato de colesterila apresentava dois pontos de fusão quando aquecida. Na temperatura ambiente esta substância encontrava-se no estado sólido. Quando atingia $145,5^{\circ}\text{C}$ sofria uma transição de fase para um líquido turvo e, quando atingia os $178,5^{\circ}\text{C}$ passava de líquido turvo para líquido transparente. Ele enviou duas amostras acompanhadas de uma carta para o físico alemão Lehmann que em 1890 estabeleceu o termo geral “*cristal líquido*” para designar tais materiais [12].

Moléculas como o benzoato de colesterila que apresentam a fase cristal líquido a partir da variação da temperatura são chamadas *termotrópicas*. O comportamento líquido cristalino também pode ser encontrado em certas soluções coloidais, por exemplo, a solução aquosa do vírus do mosaico do tabaco. Neste caso o parâmetro controlador não é a temperatura, mas sim a concentração [13],

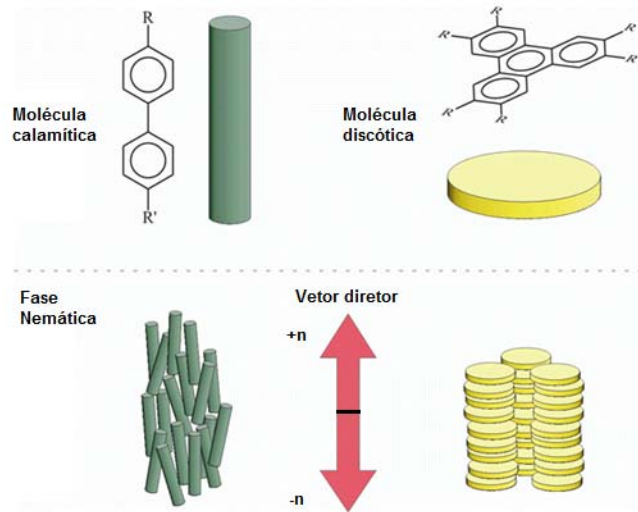
embora a combinação dos dois parâmetros, concentração e temperatura, podem ser usadas para se obter uma série de outras fases [14]. Tais cristais líquidos são chamados *liotrópicos* [13,14]. Além dos termotrópicos e liotrópicos, existem ainda os cristais líquidos *poliméricos*, obtidos a partir de polímeros [14].

Os termotrópicos se subdividem em três classes principais: nemáticos, colestéricos e esméticos. Essas mesofases são definidas e caracterizadas por vários parâmetros físicos como ordenamento de longo e de curto alcance, funções de distribuição orientacional, etc. [13]. Neste trabalho vamos considerar apenas os nemáticos.

3.1. NEMÁTICOS UNIAXIAIS

Em geral, as moléculas que apresentam a fase nemática são moléculas centrossimétricas, isto é, se considerarmos um vetor unitário orientado na direção do eixo principal da molécula, também chamado de diretor \vec{n} , as propriedades físicas nas direções $+\vec{n}$ e $-\vec{n}$ são iguais. Nesta fase, as moléculas não possuem uma organização posicional, ou seja, estão posicionadas de forma randômica [14]. Porém, existe um ordenamento direcional de longo alcance [13]. As moléculas tendem a se alinharem paralelamente, uma com relação às outras, ao longo da mesma direção privilegiada (direção do vetor diretor) como mostra a Figura 3.2 [12]. Nesta figura também vemos dois tipos básicos de moléculas que apresentam a fase nemática. Trata-se de moléculas em forma de bastonetes chamadas *calamíticas* e moléculas em forma de discos chamadas *discóticas* [13].

Figura 3.2 – Fase Nemática Uniaxial. Acima, exemplo de moléculas calamíticas e discóticas. Abaixo, fase nemática com o vetor diretor apontando na direção privilegiada. A posição das moléculas nesta fase é aleatória.



3.2. PARÂMETRO DE ORDEM

Vimos na seção anterior que as moléculas apresentando a fase nemática tendem a se alinharem ao longo de uma direção preferencial, a direção do diretor \vec{n} . Já na fase líquida as moléculas estão completamente desorientadas. Precisamos definir um parâmetro para medir o quão orientadas as moléculas estão.

Supondo que as moléculas podem ser aproximadas a pequenos cilindros cujo eixo principal tende a se alinhar com o diretor \vec{n} , definimos o tensor *parâmetro de ordem* por,

$$S_{\alpha\beta} = S \left(n_{\alpha} n_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad 3.1$$

onde n_{α} são as componentes de \vec{n} em um sistema de coordenadas fixo no laboratório [13]. Em particular, se escolhermos $\vec{n} = \hat{k}$ (direção z do sistema de coordenadas), as componentes não nulas da equação 3.1 são: $S_{zz} = 2/3 S$; $S_{xx} = S_{yy} = -1/3 S$. A quantidade S é uma medida do alinhamento das moléculas [13]. Para ver isto, consideremos a fração de moléculas $f(\theta) \sin\theta d\theta$ cujo ângulo do eixo principal da molécula com relação à \vec{n} esteja entre θ e $\theta + d\theta$, a probabilidade

de encontrar moléculas neste pequeno ângulo é calculado pela média (usando quadrupolo, já que a média dos dipolos é nula),

$$S = \frac{1}{2} \langle \cos^2 \theta - 1 \rangle = \int f(\theta) \frac{1}{2} (\cos^2 \theta - 1) d\Omega. \quad 3.2$$

Se $f(\theta)$ for uma delta de Dirac para $\theta = \{0, \pi, \pi/2\}$, então $S = 1$ para alinhamento paralelo ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$), $S = 0$ para alinhamento aleatório e $S = -1/2$ para alinhamento perpendicular ($\theta = \pi/2$). Portanto, S é uma medida do alinhamento [13,15].

3.3. TEORIA DA CURVATURA ELÁSTICA

“Microscopicamente, as moléculas tendem a se alinharem em torno do diretor que por sua vez, pode variar de ponto a ponto devido à ação de forças externas (campo elétricos e magnéticos, por exemplo) e condições de contorno (efeitos das bordas do recipiente que contém o cristal líquido). Definimos a *curvatura de tensão* como sendo as deformações das orientações relativas fora das posições de equilíbrio e a *curvatura de stress* como sendo as forças de restauração que surgem para evitar tais deformações.

Vamos inicialmente definir um diretor $\vec{n}(\vec{r})$ no ponto \vec{r} e assumir que ele varia lentamente de ponto a ponto (campo vetorial contínuo). Introduzindo um sistema de coordenadas Cartesiano com o eixo z paralelo a \vec{n} no ponto \vec{r} , podemos definir as componentes da curvatura de tensão em três formas distintas: “splay”, “twist” e “bend”:

$$\begin{aligned} \text{splay:} \quad s_1 &= \frac{\partial n_x}{\partial x} & s_2 &= \frac{\partial n_y}{\partial y} \\ \text{twist} \quad t_1 &= -\frac{\partial n_y}{\partial x} & t_2 &= \frac{\partial n_x}{\partial y} \\ \text{bend} \quad b_1 &= \frac{\partial n_x}{\partial z} & b_2 &= \frac{\partial n_y}{\partial z} \end{aligned} \quad 3.3$$

Vamos postular que a densidade de energia livre de Gibbs F_g de um cristal líquido (relativo à densidade de energia livre no estado de orientação uniforme) pode ser expandida em termos das seis curvaturas de tensões (equação 3.3),

$$F_g = \sum_{i=1}^6 k_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 k_{ij} a_i a_j \quad 3.4$$

onde k_i e k_{ij} são as constantes de curvatura elástica e $a_1 = s_1$, $a_2 = t_2$, $a_3 = b_1$, $a_4 = -t_1$, $a_5 = s_2$ e $a_6 = b_2$. Devido à simetria da fase uniaxial, rotações ao redor do eixo z são invariantes, portanto, apenas dois dos seis k_i e cinco dos 36 k_{ij} são independentes. A expressão geral da densidade de energia livre escrita em termos de sete constantes independentes foi definida por Frank em 1958 [16],

$$F_g = k_1(s_1 + s_2) + k_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}k_{11}(s_1 + s_2)^2 + \frac{1}{2}k_{22}(t_1 + t_2)^2 + \frac{1}{2}k_{33}(b_1^2 + b_2^2) + k_{12}(s_1 + s_2)(t_1 + t_2) - (k_{22} + k_{24})(s_1 s_2 + t_1 t_2). \quad 3.5$$

O último termo pode ser escrito por,

$$\begin{aligned} s_1 s_2 + t_1 t_2 &= \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial n_y}{\partial y} - \frac{\partial n_y}{\partial x} \frac{\partial n_x}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(n_x \frac{\partial n_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(n_x \frac{\partial n_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad 3.6$$

e conseqüentemente, contribuirá apenas para energia de superfície.

A densidade de energia livre F_g pode ser simplificada ainda mais se considerarmos algumas simetrias.

- (a) Para moléculas apolares, ou molécula com polaridade igualmente distribuída nas duas direções, a escolha do sinal de \vec{n} é arbitrária. Para um sistema de coordenadas orientado de acordo com a mão direita temos a seguinte transformação (giro de π radianos ao redor do eixo x),

$$\vec{n} \rightarrow -\vec{n}, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z \quad 3.7$$

A invariância da energia livre sob a transformação acima implica em $k_1 = k_{12} = 0$ (moléculas apolares).

- (b) A escolha da orientação do sistema de coordenadas (regra da mão direita ou esquerda) pode ser arbitrária se as moléculas forem enantiomórfas, isto é, se não for possível distinguir as moléculas de suas imagens. Desde que as moléculas não forem opticamente ativas, praticamente não ocorrerá enantiomorfismo e g' é invariante por transformações de reflexão,

$$x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z \quad 3.8$$

implicando que $k_2 = k_{12} = 0$ (simetria de espelho).

Resumindo, a equação 3.5 é a mais geral para descrever cristais líquidos uniaxiais. Se e as moléculas forem apolares, $k_1 = 0$ e se forem enantiomórfas, $k_2 = 0$. A constante k_{12} é nula em ambos os casos exceto se o enantiomorfismo e a polaridade ocorrerem juntos” [13].

“Se definirmos as constantes $s_0 = -k_1/k_{11}$ e $t_0 = -k_2/k_{22}$ podemos redefinir a densidade de energia livre de Gibbs por,

$$F_g = F_g + \frac{1}{2}k_{11}s_0^2 + \frac{1}{2}k_{22}t_0^2 \quad 3.9$$

e a equação 3.5 pode ser escrita em uma forma mais conveniente,

$$F_g = \frac{1}{2}k_{11}(s_1 | s_2 | s_0)^2 + \frac{1}{2}k_{22}(t_1 | t_2 | t_0)^2 + \frac{1}{2}k_{33}(b_1^2 | b_2^2) + k_{12}(s_1 + s_2)(l_1 + l_2) - (k_{23} + k_{24})(x_1x_2 + l_1l_2). \quad 3.10$$

Esta versão da energia livre possui um valor mínimo correspondendo à orientação que otimiza o grau de “splay” e “twist” em vez de uma orientação uniforme. Podemos escrever a equação 3.10 em notação vetorial uma vez que,

$$\begin{aligned}
s_1 + s_2 &= \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \\
-(t_1 + t_2) &= \frac{\partial n_y}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial y} = \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{n}) \\
b_1^2 + b_2^2 &= \left(\frac{\partial n_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial n_y}{\partial z}\right)^2 = (\vec{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{n})^2 \\
-(s_1 s_2 + t_1 t_2) &= \frac{\partial n_y}{\partial x} \frac{\partial n_x}{\partial y} - \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial n_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot [(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{n} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\vec{n}] \\
(s_1 + s_2)(t_1 + t_2) &= -(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{n}))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

e a equação 3.10 fica,

$$\begin{aligned}
F_e &= \frac{1}{2} k_{11} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n} - s_0)^2 + \frac{1}{2} k_{22} (\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{n}) + t_0)^2 + \frac{1}{2} k_{33} (\vec{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{n})^2 - \\
&\quad - k_{12} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{n})) + \frac{1}{2} (k_{22} + k_{24}) \vec{\nabla} \cdot [(\vec{n} \cdot \vec{\nabla})\vec{n} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\vec{n}]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $s_0 = t_0 = k_{12} = 0$ para nemáticos uniaxiais compostos por moléculas apolares e enantiomorfas" [12].

4. COSMOLOGIA NEMÁTICA

4.1. TENSOR MÉTRICO DE UM CRISTAL LÍQUIDO NEMÁTICO UNIAXIAL

Na seção 3.1 assumimos que as moléculas que constituem um cristal líquido nemático uniaxial podem ser representados por pequenos cilindros. Por questões de geometria, de agora em diante vamos supor que as moléculas se aproximam de elipsóides de revolução ao invés de cilindros.

Para construir uma métrica que descreva o campo diretor de um cristal líquido nemático, vamos partir da hipótese de Hess, ou seja, vamos supor que um potencial elipsoidal está associado a um potencial esférico e vice-versa. Para isso, precisamos determinar uma métrica para o elipsóide.

A distância entre qualquer ponto pertencente a uma esfera e seu centro possui sempre a mesma medida e em termos matemáticos escrevemos,

$$d^2 = \delta_{ij} s^i s^j \quad 4.1$$

onde s^i e s^j são as coordenadas Euclidianas dos pontos pertencentes à esfera centrada na origem. Os coeficientes δ_{ij} (delta de Kronecker), que também podem ser identificados com os termos da matriz identidade, constituem a métrica que nos diz como medir a distância entre os pontos coordenados e o centro da esfera.

De maneira geral, podemos calcular a distância entre dois pontos definindo uma métrica que está intimamente relacionada com a geometria do espaço. Sendo assim, podemos dizer que a distância entre dois pontos é dada pela equação,

$$d^2 = g_{ij} x^i x^j \quad 4.2$$

onde g_{ij} define a métrica do espaço.

Como passar de uma geometria esférica para uma geometria elipsoidal e vice-versa? Isto porque em um líquido isotrópico, as moléculas se comportam como esferas, pois a esfera não possui direção privilegiada. Quando uma amostra de cristal líquido passa para a fase nemática, as moléculas podem ser comparadas com elipsóides, tendo uma ou duas direções principais. Antes de saber como passar de

uma geometria para outra, inicialmente precisamos estudar a geometria de um elipsóide.

De um estudo de quádricas aprendemos que um elipsóide centrado na origem e não rotacionado é dado pela equação,

$$\frac{x^2}{(r_a)^2} + \frac{y^2}{(r_b)^2} + \frac{z^2}{(r_c)^2} = 1 \quad 4.3$$

onde r_a , r_b e r_c são os semi-eixos do elipsóide. Se o elipsóide estiver rotacionado, isto é, se seus eixos principais x', y' e z' não coincidirem com os eixos x, y e z de certo sistema de coordenadas, poderemos representá-lo em termos de um tensor simétrico E_{ij} ($E_{ij} = E_{ji}$) da seguinte forma,

$$E_{ij}x^i x^j = 1 \quad 4.4$$

que pode ser escrito em termos dos eixos principais,

$$E_1(x')^2 + E_2(y')^2 + E_3(z')^2 = 1 \quad 4.5$$

em que,

$$E_i = \frac{1}{(r_i)^2} \Rightarrow r_i = \frac{1}{\sqrt{E_i}}. \quad 4.6$$

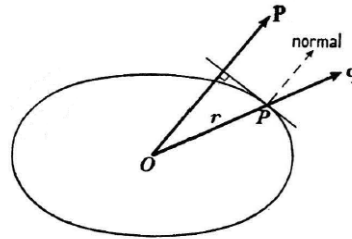
Para encontrar a direção dos vetores paralelos aos eixos principais do elipsóide, vamos construir um vetor \vec{p} , a partir de um vetor \vec{q} da seguinte forma: Primeiro escolhemos um vetor \vec{q} arbitrário, cuja direção seja (m_1, m_2, m_3) , em seguida, construímos o seguimento \overline{OP} paralelo a este (onde P é um ponto no elipsóide e O é a origem) e de comprimento r , ou seja, $\overline{OP} = (rm_1, rm_2, rm_3)$, como ilustra a Figura 4.1. Posteriormente, encontramos o plano tangente ao elipsóide no ponto P ,

$$E_1 r m_1 x' + E_2 r m_2 y' + E_3 r m_3 z' = 2 \quad 4.7$$

cuja direção do vetor normal é $(E_1 m_1, E_2 m_2, E_3 m_3)$. Desejamos que o vetor \vec{p} seja paralelo ao vetor normal ao plano tangente, portanto,

$$\vec{p} = \lambda(E_1 m_1, E_2 m_2, E_3 m_3). \quad 4.8$$

Figura 4.1 – Esquema para encontrar os eixos principais de um elipsóide.



Partindo desta ideia, podemos descobrir os eixos principais encontrando onde o vetor \vec{p} ($E_{ij}X_j$) é paralelos aos vetores \vec{q} (X_i), ou seja,

$$E_{ij}X_j = \lambda X_i \quad 4.9$$

resolver a equação acima equivale a encontrar onde o determinante da matriz,

$$\begin{pmatrix} E_{11} - \lambda & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} - \lambda & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} - \lambda \end{pmatrix} \quad 4.10$$

se anula, isto é,

$$(E_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad 4.11$$

que é a *equação secular*. Cada autovalor λ possui um autovetor associado cuja direção é a mesma do eixo principal do elipsóide. Podemos calcular o comprimento do eixo principal multiplicando a equação 4.9 por X_i e usando a equação 4.4,

$$E_{ij}X_jX_i = \lambda X_iX_i \Rightarrow \sqrt{X_iX_i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad 4.12$$

comparando com a equação 4.6 e identificando λ com E_i , concluímos que os três autovalores são os três coeficientes principais E_i do elipsóide.

As componentes dos autovetores normalizados, digamos \vec{n} , \vec{p} e \vec{q} , formam a matriz de rotação de um conjunto de eixos ortogonais Ox_i para outro Ox'_i .

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}. \quad 4.13$$

Uma vez que cada linha da matriz representa os três cossenos diretores de uma linha reta com relação aos eixos ortogonais Ox_i , temos as seguintes relações de normalização,

$$\begin{aligned} (n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 &= 1 \\ (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 &= 1 \\ (q_1)^2 + (q_2)^2 + (q_3)^2 &= 1 \end{aligned} \quad 4.14$$

E, desde que cada par de linhas representa os cossenos diretores de duas linhas formando um ângulo reto, temos a seguinte relação do produto escalar,

$$\begin{aligned} n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 &= 0 \\ n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3 &= 0 \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 &= 0 \end{aligned} \quad 4.15$$

que são as chamadas *relações de ortogonalidade*. Podemos escrever em termos da função delta por,

$$n_i n_j + p_i p_j + q_i q_j = \delta_{ij} \quad 4.16$$

O elipsóide que caracteriza um cristal líquido uniaxial deve possuir apenas uma direção privilegiada, ou seja, deve possuir dois semi-eixos iguais. Portanto, a matriz E que descreve tal cristal líquido é,

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{(r_a)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(r_b)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(r_b)^2} \end{pmatrix} \quad 4.17$$

e a matriz do elipsóide pode ser escrita na forma tensorial,

$$E_{ij} = \frac{1}{(r_a)^2} n_i n_j + \frac{1}{(r_b)^2} (p_i p_j + q_i q_j). \quad 4.18$$

Usando a relação 4.16, temos,

$$E_{ij} = \frac{1}{(r_a)^2} n_i n_j + \frac{1}{(r_b)^2} (\delta_{ij} - n_i n_j)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{(r_b)^2} \left[\delta_{ij} + \left(\frac{(r_b)^2}{(r_a)^2} - 1 \right) n_i n_j \right]. \quad 4.19$$

Vamos definir a excentricidade do elipsóide por,

$$e = 1 - \frac{(r_b)^2}{(r_a)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{(r_b)^2}{(r_a)^2} = 1 - e \quad 4.20$$

e a equação 4.19 fica,

$$E_{ij} = \frac{1}{(r_b)^2} (\delta_{ij} - e n_i n_j). \quad 4.21$$

Podemos notar que se $r_a = r_b$ a excentricidade é nula e, a matriz E_{ij} , equivale a matriz S_{ij} que descreve a esfera (equação 4.1). Se $r_a \gg r_b$, a excentricidade tende a unidade e o elipsóide representa um grão nemático calamítico, isto é, em forma de bastonete (Figura 3.2(a)). Já para $r_b \gg r_a$, a excentricidade é negativa e o elipsóide representa um grão nemático discótico (Figura 3.2(b)).

Como queremos relacionar o elipsóide com a esfera, vamos escrever o elipsóide como sendo a soma de uma esfera (S_{ij}) e o quanto o elipsóide difere da esfera (ΔE_{ij}), isto é, a soma de um termo isotrópico e de um anisotrópico,

$$E_{ij} = S_{ij} + \Delta E_{ij}$$

$$\Delta E_{ij} = E_{ij} - S_{ij} \quad 4.22$$

Escrevendo o tensor que caracteriza a esfera em termos do elipsóide da seguinte forma [17,18],

$$S_{ij} = \delta_{ij} \frac{Tr(E)}{3} \quad 4.23$$

onde,

$$\begin{aligned} Tr(E) &= \frac{1}{(r_a)^2} + \frac{2}{(r_b)^2} = \frac{1}{(r_b)^2} \left[\frac{(r_b)^2}{(r_a)^2} + 2 \right] = \frac{1}{(r_b)^2} (1 - e + 2) \\ &= \frac{1}{(r_b)^2} (3 - e) \end{aligned} \quad 4.24$$

obtemos,

$$S_{ij} = \frac{1}{(r_b)^2} \delta_{ij} \frac{3-s}{3} \quad 4.25$$

substituindo as equações 4.21 e 4.25 na equação 4.22,

$$\begin{aligned} \Delta E_{ij} &= \frac{1}{(r_b)^2} (\delta_{ij} - s n_i n_j) - \left(\frac{1}{(r_b)^2} \delta_{ij} \frac{3-s}{3} \right) \\ &= \frac{s}{(r_b)^2} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} - n_i n_j \right) \end{aligned} \quad 4.26$$

multiplicando por $(r_a)^2$ e usando a equação 4.20, obtemos,

$$\begin{aligned} (r_a)^2 \Delta E_{ij} &= \frac{(r_a)^2 s}{(r_b)^2} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} - n_i n_j \right) \\ &= \frac{s}{1-s} \left(\frac{\delta_{ij}}{3} - n_i n_j \right) \end{aligned} \quad 4.27$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $r_a = 1$ visto que a razão r_b/r_a nos dá o quão o elipsóide difere de uma esfera. Além disso, definimos o termo entre parêntesis como sendo o *componente anisotrópico da deformação elipsoidal* Q_{ij}^E . Este termo é idêntico ao tensor parâmetro de ordem $S_{\alpha\beta}$ definido pela equação 3.1, exceto por um sinal de menos. Ele está intimamente relacionado com a anisotropia microscópica intrínseca das moléculas de um cristal líquido. Podemos ver isso supondo que o valor médio do Q_{ij}^E microscópico, tanto em certo período de tempo como em uma determinada vizinhança, é proporcional a medida macroscópica, da mesma forma que o tensor anisotrópico $S_{\alpha\beta}$,

$$\langle Q_{ij}^E \rangle = S Q_{ij}^E \quad 4.28$$

onde S é o parâmetro de ordem escalar que dá a intensidade com que as oscilações aleatórias fazem a anisotropia microscópica ser observada na escala macroscópica. Com estas definições, a equação 4.27 fica,

$$\Delta E_{ij} = \frac{s}{1-s} (Q_{ij}^E). \quad 4.29$$

Substituindo na equação 4.22, com o auxílio da equação 4.25, obtemos,

$$E_{ij} = \frac{1}{1-\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \delta_{ij} + \epsilon Q_{ij}^E \right] \quad 4.30$$

calculando a média e usando equação 4.28, obtemos,

$$\langle E_{ij} \rangle = \frac{1}{1-\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \delta_{ij} + \epsilon S Q_{ij}^E \right]. \quad 4.31$$

A equação 4.31 acima não está normalizada. Como o vetor diretor deve ser unitário, introduziremos uma constante A que satisfaça as seguintes condições: para $S = 0$, correspondendo a um líquido isotrópico, o valor médio do tensor elipsoidal deve corresponder a esfera unitária, $\langle E_{ij} \rangle = \delta_{ij}$; para $S = 1$, $\langle E_{ij} \rangle$ se reduz à equação 4.28, uma vez que $\langle Q_{ij}^E \rangle = Q_{ij}^E$. Introduzindo a constante de normalização,

$$\langle E_{ij} \rangle = \frac{A}{1-\epsilon} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \delta_{ij} + \epsilon S Q_{ij}^E \right] \quad 4.32$$

com as imposições acima, vemos que,

$$\begin{cases} \frac{A}{1-\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) = 1 & S = 0 \\ \frac{A}{1-\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) = \frac{1}{1-\epsilon} \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) & S = 1 \end{cases} \quad 4.33$$

Um cálculo revela o valor da constante A ,

$$A = \frac{3(1-\epsilon)}{3-\epsilon(2S+1)} \quad 4.34$$

portanto, o tensor do elipsóide uniaxial normalizado, é dado por:

$$\langle E_{ij} \rangle = \frac{1}{3-\epsilon(2S+1)} \left[(3-\epsilon) \delta_{ij} + 3\epsilon S Q_{ij}^E \right]. \quad 4.35$$

Aqui chegamos a um importante resultado. O tensor elipsoidal macroscópico dado pela equação 4.35 acima, nos diz como passar de uma geometria esférica para uma geometria elipsoidal em termos da excentricidade ϵ das moléculas e do parâmetro de ordem escalar S . Este é justamente o tensor métrico que descreve um cristal líquido na fase isotrópica e na fase nemática.

Admitindo que as moléculas de um determinado cristal líquido possuam uma anisotropia intrínseca, isto é, $Q_{ij}^E \neq 0$, temos as seguintes possibilidades: Se a excentricidade for constante com relação à temperatura, isto é, se as moléculas não forem deformáveis, cada molécula terá um diretor microscópico. A orientação destes vetores é descrita pelo escalar S que é função da temperatura. Isto quer dizer que se a amostra se encontra na fase isotrópica, a resultante da orientação média destes vetores é nula ($S = 0$). Ao esfriar a amostra e após sofrer uma transição de fase para fase nemática, as moléculas se orientam de forma que a resultante macroscópica dos vetores é diferente de zero ($S = 1$ no caso de uma orientação máxima). Outra descrição seria supor que as moléculas possuam uma orientação média fixa, isto é, $S \neq 0$ e não dependente da temperatura, e que a excentricidade das moléculas seja função da temperatura. Neste caso as moléculas se deformam. Na fase isotrópica as moléculas possuem formas esféricas, isto é, $e = 0$. Diminuindo a temperatura e após a transição de fase para fase nemática, as moléculas se achatam adquirindo a forma de um elipsóide de revolução, onde o diretor aponta na direção do semi-eixo maior. Portanto, convém definirmos a métrica que descreve um cristal líquido nemático uniaxial por [17,18]:

$$g_{ij} = \frac{1}{3 - e(2S + 1)} [(3 - e)\delta_{ij} + 3eSQ_{ij}^E]. \quad 4.36$$

Vamos agora tratar o tensor métrico de maneira semelhante à relatividade geral. No início deste capítulo dissemos que a métrica da esfera é dada pela equação 4.1 que na forma diferencial pode ser escrita como,

$$(ds)^2 = \delta_{ij} ds^i ds^j \quad 4.37$$

onde ds é o incremento de comprimento de arco. Para uma geometria elipsoidal,

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad 4.38$$

Adotando a hipótese de Hess de que o potencial esférico tem que ser igual ao potencial elipsoidal $(ds)_{esf.}^2 = (ds)_{elit.}^2$, obtemos,

$$\delta_{ij} ds^i ds^j = g_{ij} dx^i dx^j. \quad 4.39$$

Supondo que seja possível passar de uma geometria esférica para uma geometria elipsoidal, ou seja, supondo que as coordenadas da esfera seja função das coordenadas da elipse, podemos escrever,

$$\delta_{ij} \frac{\partial s^i}{\partial x^k} \frac{\partial s^j}{\partial x^l} dx^k dx^l = g_{kl} dx^k dx^l$$

$$g_{kl} = \delta_{ij} \frac{\partial s^i}{\partial x^k} \frac{\partial s^j}{\partial x^l} \quad 4.40$$

De maneira inversa, passando da geometria elipsoidal para a geometria esférica,

$$\delta_{ij} ds^i ds^j = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial s^i} \frac{\partial x^l}{\partial s^j} ds^i ds^j$$

$$\delta_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial s^i} \frac{\partial x^l}{\partial s^j} \quad 4.41$$

A pergunta que surge é qual a relação $\partial s^i / \partial x^k$ que fornece a equação 4.36? Este trabalho foi feito por *Simões et.al.* [1] e tal expressão é dada por,

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^k} = \frac{1}{r_b} \delta_{ik} + \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) n_i n_k \quad 4.42$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial s^i} = r_b \delta_{ik} + (r_a - r_b) n_i n_k \quad 4.43$$

onde n_i são as componentes do diretor \vec{n} ($(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$) e a excentricidade é função do parâmetro de ordem definido por,

$$e_s = 1 - \frac{r_b^2}{r_a^2} = \frac{3eS}{(3 + e(S - 1))} \quad 4.44$$

A Física que está por traz da relação 4.40 é que a analogia entre a teoria dos cristais líquidos e a teoria da relatividade geral surge quando assumimos que a amostra nemática não é alinhada homoganeamente, apenas localmente. Então, a transformação 4.40 se torna local assim como na geometria Riemanniana da relatividade geral. Nestas condições, as derivadas parciais do tensor métrico g_{kl} devem ser substituídas por derivadas covariantes porque são válidas apenas localmente, lembrando que tal mudança de derivação é definida por,

$$\partial_i n^j \rightarrow D_i n^j = \partial_i n^j + \Gamma_{ik}^j n^k \quad 4.45$$

onde D_i é a derivada covariante e ∂_i significa " $\partial/\partial x^i$ ", é a derivada parcial usual" [1].

4.2. EQUAÇÃO DE EINSTEIN NEMÁTICA

Uma vez definida a métrica, podemos calcular a conexão afim pela equação 2.22 que em três dimensões fica,

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad 4.46$$

e também, assim como na relatividade geral, podemos determinar o tensor de Riemann-Christoffel R_{imj}^k e suas contrações que são o tensor de Ricci R_{ij} e o escalar de curvatura R .

$$R_{imj}^k = \frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} + \Gamma_{im}^n \Gamma_{jn}^k - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{mn}^k \quad 4.47$$

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad 4.48$$

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad 4.49$$

Com a métrica definida pela equação 4.36, a curvatura escalar é dada por,

$$R = L_1 (\nabla \cdot n)^2 + L_2 (n \cdot \nabla \times n)^2 + L_3 (n \times \nabla \times n)^2 + L_4 \nabla \cdot (n(\nabla \cdot n) + n \times (\nabla \times n)) + L_5 \nabla \cdot (n(\nabla \cdot n)). \quad 4.50$$

onde,

$$\begin{aligned} L_1 &= e_s \frac{2 - e_s}{2q^2} \\ L_2 &= \frac{1}{2} e_s (6 - e_s) \\ L_3 &= 3e_s \\ L_4 &= 2e_s \\ L_5 &= -2e_s \end{aligned} \quad 4.51$$

Aqui, q é a carga da singularidade nemática e e_s é definido pela equação 4.44. Para obtermos a curvatura nemática é necessário primeiro saber a configuração do diretor

para que possamos calcular o divergente, rotacional, etc. Conseguimos isto minimizando a energia elástica livre,

$$F_e = \int \Lambda \sqrt{g} dV \quad 4.52$$

onde g é o determinante da matriz g_{ij} e,

$$\begin{aligned} \Lambda = & K_{11}(\nabla \cdot n)^2 + K_{22}(n \cdot \nabla \times n)^2 + K_{33}(n \times \nabla \times n)^2 \\ & + (K_{22} + K_{24})\nabla \cdot (n(\nabla \cdot n) + n \times (\nabla \times n)) + K_{12}\nabla \cdot (n(\nabla \cdot n)) \end{aligned} \quad 4.53$$

é equivalente a expressão 3.12 cuja minimização produz a configuração do diretor a ser usado na equação 4.50 (K_{11} , K_{22} , K_{33} , K_{24} e K_{12} são as constantes elásticas). O procedimento acima pode ser simplificado introduzindo um multiplicador de Lagrange G da expressão da energia,

$$F_e = \int \sqrt{g} dV \left\{ \Lambda - \frac{R}{G} \right\} \quad 4.54$$

cuja minimização fornece,

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = G \sigma_{ij} \quad 4.55$$

onde,

$$\sigma_j^i = \frac{\partial n_k}{\partial x^i} \frac{\partial (\Lambda \sqrt{g})}{\partial \left(\frac{\partial n_k}{\partial x^j} \right)} - \delta_j^i (\Lambda \sqrt{g}) \quad 4.56$$

é o tensor elástico de stress da energia elástica. O multiplicador de Lagrange pode ser determinado impondo a condição 4.50 na equação 4.56.

A equação 4.55 é muito semelhante à equação de campo de Einstein dada pela equação 2.38. Entretanto, existe uma grande diferença entre as duas equações quanto à dimensão. A teoria dos cristais líquidos nemáticos é tridimensional e não envolve a variável tempo enquanto que a relatividade geral é quadridimensional [1].

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho vimos duas formas de obter uma métrica para descrever os cristais líquidos nemáticos uniaxiais, o que foi conseguido supondo que as moléculas possuem geometria elipsoidal e aplicando, simultaneamente, a aproximação de Hess.

É importante observar que a métrica nemática depende da excentricidade do elipsóide e do parâmetro de ordem escalar, ou seja, da geometria das moléculas e da medida do alinhamento de tais moléculas com relação ao diretor fixo no referencial de laboratório. Desta forma, a transição de fase pode ser entendida, num primeiro momento, como uma deformação das moléculas, considerando que o alinhamento médio é constante e que a excentricidade varia com a temperatura. Logo, as moléculas se deformam de esferas para elipsóides quando passam da fase líquido isotrópico para cristal líquido nemático. Em um segundo momento, ao considerar que as moléculas tem uma anisotropia intrínseca, isto é, que a excentricidade é constante nas duas fases (líquido isotrópico e nemática), e sendo o parâmetro de ordem uma função da temperatura, tem-se que na fase líquida isotrópica o alinhamento médio dos diretores intrínsecos é nulo, enquanto que na fase nemática tende a unidade. Destaca-se que, em uma amostra real, ambos os fenômenos (deformação e alinhamento médio) podem estar presentes.

Uma vez definido o tensor métrico que descreve os cristais líquidos nemáticos, foi possível calcular o tensor de curvatura de Riemann e seus derivados que são: o tensor de Ricci, o escalar de curvatura e o tensor de Einstein. Ainda, empregando a teoria da curvatura elástica obteve-se uma equação muito similar à equação de campo de Einstein da teoria da relatividade geral. Tal equação possui uma diferença marcante quanto à dimensão, uma vez que a teoria dos cristais líquidos é tridimensional em que a variável tempo está ausente, enquanto que a relatividade geral é quadridimensional.

Diante disso se indaga duas questões que são a chave para tal analogia: a) o tensor métrico empregado na relatividade geral, utilizado para mudanças de referenciais, foi aplicado nos cristais líquidos nemáticos quando da análise da mudança do estado líquido isotrópico para o estado cristal líquido nemático. A partir

disso se obteve a semelhança entre as duas áreas em estudo. Sendo assim, é possível entender como estes objetos matemáticos se relacionam? e; b) visto que a equação de Einstein da relatividade geral e a equação nemática são profundamente semelhantes, é possível que a anisotropia encontrada em uma amostra de cristal líquido contenha características comparáveis ou semelhantes com a anisotropia encontrada nos objetos cosmológicos?

Diante disso, a analogia entre estas equações pode permitir que se utilize dos cristais líquidos para estudar cosmologia com a vantagem de tê-los em laboratório, bem como, para estudar os cristais líquidos a partir da cosmologia.

REFERENCIAS

- 1 – SIMÕES M., PAZETTI M. – *Liquid-Crystals Cosmology*, EPL, **92** (2010) 14001.
- 2 – EINSTEIN A. – *Relativity: The Special and General Theory*, Methuen & Co. (1916).
- 3 – RINDLER W. – *Relativity: Special, General and Cosmological*, 2ª ed., Oxford. New York (2006).
- 4 – HOYNG P. – *Relativistic Astrophysics and Cosmology*, Springer, Berlin (2006).
- 5 – BERRY M. – *Principles of Cosmology and Gravitation*, Cambridge, New York (1976).
- 6 - SCHLAMMINGER S., CHOI K. Y., WAGNER T. A., GUNDLACH J. H. e ADELBERGER E. G., 2008 Phys. Rev. Lett. 100 041101.
- 7 – WEINBERG S. – *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity*, Wiley, Ney York (1972).
- 8 – NOVELLO M., PINTO N., BARGLIAFFA S. E. P. - *Programa Mínimo de Cosmologia*, Apêndice B. Jauá Editora, Rio de Janeiro 2010.
- 9 – PEACOCK J. A. - *Cosmological Physics*, Cambridge, New York (1999).
- 10 – IAWDEN D. F. - *Introduction to Tensor Calculos, Relativity and Cosmology*, 3ª ed., Wiley, New York (1982).
- 11 - LAMBOURNE R. J. A. – *Relativity, gravitation and cosmology*, Cambridge, New York, (2010).
- 12 - STEWART I. W., *The Static and Dynamic Continuum Theory of liquid Crystals*, Taylor & Francis, New York (2004).
- 13 - STEPHEN M. J., STRALEY J. P., *Physics of Liquid Crystals*, American Physical Society, New Jersey (1974).
- 14 - KHOO I. C., *Liquid Crystals*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New Jersey (2007).
- 15 - DE GENNES P. G., PROST J., *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).
- 16 – FRANK F.C., Disc. Faraday Soc. **25**, 19 (1958).
- 17 – INFORZATO A. C. – *Aproximação de Conexão Afim para Constantes Elásticas de Cristais Líquidos Nemáticos*, Tese (Doutorado em Física), Universidade Estadual de Londrina (2007).

18 – ALVES F. S. – *Geometria dos Cristais Líquidos Nemáticos Submetidos a Cisalhamento e Conexão entre os Coeficientes de Leslie*, Tese (Doutorado em Física), Universidade Estadual de Londrina (2008).