Universidade Estadual de Londrina

HENRIQUE RIZEK ELIAS

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA O ENSINO DO CORPO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Londrina
2017

HENRIQUE RIZEK ELIAS

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA O ENSINO DO CORPO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Coorientador: Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro

Londrina
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

E42f Elias, Henrique Rizek.
Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática / Henrique Rizek Elias. – Londrina, 2017.
325 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Coorientador: Alessando Jacques Ribeiro
Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática – Teses. 2. Professores de Matemática - Formação – Teses. 3. Números racionais – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Ribeiro, Alessandro Jacques. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. IV. Título.

CDU: 51:37.02

HENRIQUE RIZEK ELIAS

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA O ENSINO DO CORPO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Coorientador: Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC - UFABC

Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Carlos Miguel Ribeiro
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp

Prof. Dra. Márcia Cristina de C. T. Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Londrina, 12 de junho de 2017.

Aos meus pais, Regina Lúcia e Júlio César,
com todo amor!

AGRADECIMENTOS

O início da minha trajetória no doutorado foi marcado pelo momento mais difícil da minha vida. Entre a primeira e a segunda fases da seleção para o doutorado, perdi a minha mãe. Por coincidências da vida, inicio a escrita desses agradecimentos justamente no dia das mães de 2017, um dia bastante significativo para mim e para minha família. À minha mãe, toda gratidão que um filho pode ter. Carrego você e minha irmã, Ana Luiza, diariamente em meus bons pensamentos!

No dia da segunda fase da seleção para o doutorado, a entrevista, o abraço apertado de uma das professoras do Programa de Pós-Graduação da UEL, Regina Buriasco, exalando seus sentimentos com relação à minha recente perda, me mostrou que eu teria apoios diversos ao longo de todo o doutorado e que esses apoios seriam fundamentais. E foram! Por isso, estou aqui para agradecer. Ninguém escreve uma tese sozinho. Por mais que tenha sido eu quem apertou cada tecla do computador que originou esse texto, cada palavra escrita carrega consigo inúmeras conversas, trocas de ideias, estudos e experiências vividas e compartilhadas com outras pessoas. Foram essas pessoas que, junto comigo, construíram essa pesquisa.

Começo agradecendo à minha família. Obrigado, pai, por ser meu exemplo de honestidade, de bondade, de simplicidade e de força. Obrigado por ser a pessoa que você é, isso me faz ser uma pessoa melhor. Ao lado do meu pai, meu irmão é minha referência. Obrigado, Eduardo, por ser, desde pequeno, um herói para mim. Sempre foi e assim continuará sendo. Recentemente, nossa família cresceu! Obrigado, Gláucia, por, junto com meu irmão, nos presentearem com nosso querido Júlio César Neto, meu sobrinho e afilhado, dando-nos um novo sentido à vida. Considero-me um cara de sorte, por ter uma família muito presente e amorosa que me apoiou e me apoia em todos os momentos. Agradeço a todos, especialmente, às minhas avós Wanda e Lena e à minha querida Bisa, por serem inspirações para a vida!

Agradeço muito à minha orientadora, Angela Marta! Saiba que você mudou minha vida, dando-me a oportunidade de crescer pessoalmente e profissionalmente. Obrigado pelas orientações, pelas conversas e pela confiança que teve em mim, ao permitir que eu realizasse uma pesquisa de meu interesse. Agradeço, também, a todos do nosso grupo de estudo e pesquisa, o GEPPMat, recheado de pessoas incríveis e que muito me ajudaram nessa caminhada. Agradeço, em especial, à Laís, à Dani, à Alessandra e ao Christian.

Em maio de 2015, a tese ainda caminhava a passos lentos quando, andando pelas ruas de Tuxtla Gutiérrez, no México, onde fomos participar de um evento da nossa área, resolvo puxar assunto com aquele que seria meu futuro coorientador e que mudaria os rumos do trabalho. Alessandro, sou muito grato por você ter me aceitado e me acolhido tão bem no seu grupo de pesquisa na UFABC, o FORMATE. Obrigado pelas orientações e pelo carinho de sempre. Nesse grupo, tive a oportunidade de conhecer e conviver com pessoas espetaculares, às quais agradeço imensamente, em especial, ao Vinícius, à Etienne, à Karina e à Bruna. Foram momentos de intenso aprendizado. Agradeço, também, ao CNPq, pelo auxílio financeiro que me permitiu realizar o Doutorado Sanduíche no País, na UFABC, por 6 meses.

O apoio recebido pelos meus colegas de trabalho do Departamento de Matemática da UTFPR de Londrina, concordando com meu afastamento por um período de dois anos e meio, foi essencial para minha dedicação integral à tese, possibilitando, inclusive, a realização do Doutorado Sanduíche. Obrigado, UTFPR e, em particular, DAMAT - Londrina! Certamente, se não fosse o afastamento e a confiança de vocês, o caminho seria muito mais árduo.

Agradeço muito aos professores que aceitaram participar da pesquisa, cedendo-me as entrevistas tão necessárias para a compreensão do problema investigado. Aos quatro professores da Educação Básica e aos três professores formadores, minha sincera gratidão! Não só por contribuírem para a construção desta tese, mas, principalmente, por compartilharem seus conhecimentos conosco.

Certamente, uma das etapas mais importantes do trabalho foi o exame de qualificação. As contribuições foram diversas e, por isso, sou grato aos professores da banca Victor Giraldo, Bruno Teixeira, Márcia Cyrino e Alessandro Ribeiro (que, naquele momento, ainda não era, formalmente, coorientador do trabalho). Obrigado a cada um de vocês pelo trabalho e pela atenção dada à tese. Do mesmo modo, a defesa também foi muito rica e cheia de contribuições. Pela defesa, além dos professores presentes na qualificação, agradeço ao novo integrante da banca, o professor Miguel Ribeiro, e às suplentes, professoras Márcia Aguiar e Tânia Marli. Obrigado a todos por aceitarem o convite e por dedicarem uma parte do seu tempo para a leitura e avaliação da tese.

Agradeço muito aos meus amigos, essenciais para suportar a pressão que é desenvolver uma pesquisa de doutorado. Dudu, Vinícius, Circe, Lute, Fógas, Osmar, Linona, Corega, Linimar, Luga, Zaca, 95, Bulivar e tantos outros. Esses nomes são bons representantes de todos aqueles que quero agradecer. Meus amigos, sou muito grato a todos vocês! Agradeço, também, à galera do sagrado futebol de segunda-feira, o Segunda FC, pela distração e diversão semanal.

Finalizo agradecendo àquela pessoa que está diariamente ao meu lado, me aconselhando, me confortando, me ensinando e, inclusive, me orientando. *Aqui, meu irmão, ela é coisa rara de* *ver* [...]. Obrigado, Li, por me incentivar do início ao fim, por debater quase que diariamente comigo, por ser a interlocutora mais constante desse trabalho! Obrigado pelas correções e sugestões! Você sabe que se não fosse sua presença em cada momento dessa trajetória essas muitas páginas não sairiam.

não fosse isso e era menos
não fosse tanto e era quase
(Paulo Leminski)

ELIAS, Henrique Rizek. **Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática**. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Esta tese, de natureza qualitativa, está inserida no contexto da formação inicial de professores de matemática, mais especificamente na formação matemática desses professores. Pautados em pesquisas que discutem e evidenciam o distanciamento entre a matemática veiculada na Licenciatura em Matemática e a matemática da prática docente na Educação Básica, realizamos uma investigação que procura debater possibilidades de aproximações entre essas matemáticas, com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento profissional docente. Para tanto, focamos nossa atenção nos números racionais, um conceito primordial para o trabalho do professor na escola e que, em geral, nos cursos de Licenciatura em Matemática recebe um tratamento que se mostra pouco conectado com a prática do professor, sendo visto como um corpo, o corpo dos números racionais. Diante disso, a presente tese tem como objetivo investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática. Tomamos como base teórica para esta pesquisa a diferenciação entre *Matemática Acadêmica* e *Matemática Escolar*, tal como proposta por Plínio Moreira e Maria Manuela David, a abordagem dos *Perfis Conceituais*, de Eduardo Mortimer e colaboradores, e a noção de *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte*, no sentido de Arne Jakobsen, Mark Thames e Miguel Ribeiro. Em um primeiro momento, por meio de um exercício teórico que buscou relacionar os referenciais que nos fundamentam, construímos uma caracterização para a matemática na formação do professor, dando-nos uma sustentação necessária para prosseguir com nossa investigação. Em um segundo momento, realizamos a produção e análise de dados oriundos de diferentes fontes: livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental e outros ao Ensino Superior, entrevistas com professores da Educação Básica e com professores formadores, análises de pesquisas no âmbito da Educação Matemática que discutissem os números racionais, tanto na perspectiva da Matemática Escolar, como da Matemática Acadêmica e, por fim, análises de documentos curriculares oficiais que orientam o ensino de matemática nas escolas e nos cursos de formação de professores. Dessas análises, produzimos *31 Reflexões*, que são produtos de nossas interpretações dos dados e que nos possibilitaram maior entendimento sobre o objeto de pesquisa. Essas *Reflexões*, junto a um estudo conceitual dos números racionais baseado nos subconstrutos de Thomas Kieren e um estudo sobre o desenvolvimento histórico desses números, baseado em fontes secundárias da história da matemática, convergiram para o terceiro momento da pesquisa, a organização de diferentes temas a partir dos quais os números racionais podem ser significados. Tal organização deu-se por uma ferramenta metodológica da abordagem dos perfis conceituais, chamada Matriz Epistemológica. Um quarto momento refere-se ao aspecto propositivo da pesquisa. Após os entendimentos proporcionados pelos três momentos anteriores, construímos uma sequência de três tarefas que indica possibilidades para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática. Por fim, apresentamos uma compreensão para os fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores, propondo que os números racionais sejam tomados como foco de ensino, não como um exemplo da estrutura algébrica corpo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação inicial de professores de matemática. Formação matemática dos professores. Números racionais. O corpo dos números racionais.

ELIAS, Henrique Rizek. **Theoretical-methodological framework for the teaching of the field of rational numbers in mathematics teacher education**. 2017. 325 f. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematical Education) – States University of Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

This thesis, of a qualitative nature, belongs to the context of the mathematics teacher education, more specifically in the mathematical formation of these teachers. Based on research that discusses and evidence the distance between mathematics in Mathematics degrees and the mathematics that is taught in practice during elementary, middle, and secondary school, we carry out an investigation that seeks to discuss possibilities for an approximation between these two mathematics, in order to improve the development of mathematical knowledge for teaching. For this, we focus our attention on rational numbers, a primordial concept for the teacher´s work at school and that, in general, receives a treatment at Mathematics Degree courses that shows little connection with the teacher´s practice, being seen as a field, the field of rational numbers. Therefore, the present thesis aims to investigate and propose a theoretical-methodological framework for the teaching of the field of rational numbers in undergraduate courses in Mathematics Education. We take as a theoretical basis for this research the differentiation between *Academic Mathematics* and *School Mathematics*, as proposed by Plínio Moreira and Maria Manuela David, the *Conceptual Profiles* approach, from Eduardo Mortimer and collaborators, and the notion of *Horizon Content Knowledge*, in the sense of Arne Jakobsen, Mark Thamese and Miguel Ribeiro. At first, through a theoretical exercise that sought to recognize the referentials that fundament us we constructed a characterization of the mathematics in teacher education, giving us the necessary theoretical support to proceed with our investigation. In a second moment, we produced and analyzed data from different sources: textbooks of elementary/middle school and undurgraduate levels, interviews with teachers of elementary/middle/secondary school levels and with teacher trainer of teachers of mathematics, analisis of research in Mathematics Education that discusses the rational numbers, both from the perspective of School Mathematics and Academic Mathematics, and, finally, analisis of official curricular documents that guide the teaching of mathematics in schools and pedagogic training courses. From these analisis, we produced *31 Reflections*, which are product of our interpretations of the data and that enabled us to better understand the object of this research. These *Reflections*, together with a conceptual study of rational numbers based on the subconstructs of Thomas Kieren and, a study on the historical development of these numbers, based on secondary sources in the history of mathematics, converged to the third moment of this research, the organization of different subjects from which rational numbers can be understood. Such organization was given by a methodological tool for the approach of the conceptual profiles, called Epistemological Matrix. A fourth moment refers to the propositional aspect of the research. After the learnings provided by the three previous moments, we constructed a sequence of three tasks that indicates possibilities for the teaching of the field of the rational numbers in Mathmatics degrees. Finally, we present an aknowledgement for the theoretical-methodological foundations for the teaching of the field of rational numbers in mathematics teacher education, proposing that rational numbers be taken as the focus of teaching, not as an example of the algebraic structure of field.

Keywords: Mathematics Education. Mathematics teacher education. Mathematical Preparation of Teacher. Rational numbers. The field of rational numbers.

SUMÁRIO

Introdução

Nesse primeiro momento, em que apresento as ideias iniciais do trabalho e os motivos que me levaram a preferir um e não outro caminho a seguir, decidi escrever em primeira pessoa do singular, pois explicitarei trajetórias pessoais e escolhas que tiveram que ser feitas por mim, enquanto pesquisador em formação, mesmo que sempre acompanhado de meus orientadores. Após esse momento pessoal, "chamo" as demais pessoas que fizeram parte da construção deste texto por meio da primeira pessoa do plural.

Quando terminei o mestrado (ELIAS, 2012), um trecho da fala de uma (na época) estudante do curso de Licenciatura em Matemática que entrevistei para a dissertação ficou marcado para mim. Os projetos (sejam projetos para ingressar no doutorado ou para solicitar bolsa) que escrevi após a dissertação traziam logo na primeira página esse trecho:

> [...] eu faço Matemática porque quero dar aula em escola, então não me sentia muito motivada a estudar aquilo [Álgebra], porque eu acho que nunca vou usar. [...] Eu não me esforcei para aprender, porque não me sentia muito motivada, porque pra mim não fazia muito sentido. [...] eu estudei para passar de ano, não para aprender, porque não me vejo nesse contexto, sabe? (ELIAS, 2012, p. 135).

A estudante referia-se à disciplina de Álgebra Abstrata (ou Estruturas Algébricas) e eu não podia começar essa tese sem trazer esse trecho, pois ele me incomodou bastante. Para essa estudante, aquela álgebra ensinada na Licenciatura nunca seria utilizada em sua prática docente na Educação Básica. Acredito que os motivos que levam esta e outros estudantes a pensarem dessa maneira podem ser diversos, mas entendo que um deles é a desconexão de cursos de formação do professor com a prática docente, que deixa para o licenciado, quando for iniciar sua atividade profissional, a complicada tarefa de estabelecer relação entre a matemática acadêmica e a matemática ensinada na escola.

Do término do mestrado aos primeiros anos do doutorado, meus questionamentos eram: qual o papel da disciplina de Álgebra Abstrata na Licenciatura? Ela contribui em que para a formação do professor? Será que o professor da Educação Básica traz consigo elementos das estruturas algébricas quando está lecionando? Ele (o professor da

Educação Básica) precisa dessas noções? Caso a resposta a essa última pergunta seja positiva, de que modo a disciplina Álgebra Abstrata poderia ser trabalhada em cursos de formação de professores de maneira relacionada com a futura prática do professor na escola?

Foi então que me dediquei a estudar pesquisas dentro da Educação Matemática que tratam da matemática na formação do professor, tais como Moreira e David (2010), Fiorentini e Oliveira (2013), Fiorentini (2005) e Lins (2005).

A partir dos questionamentos levantados e decidido que a tese seguiria na linha da formação matemática do professor e, em particular, da álgebra na formação do professor, percebi que a pesquisa poderia seguir por três caminhos distintos: (i) defender a tese de que as estruturas algébricas grupo, anel e corpo são necessárias à formação do professor de Matemática e que independentemente da forma que elas sejam trabalhadas, sua importância está no fato de que fornecem uma base sólida do conhecimento matemático do professor; (ii) argumentar que o ensino das estruturas algébricas não é necessário à formação docente, pois o professor não faz uso desses conhecimentos em sua prática e a matemática escolar, por ser distinta da matemática acadêmica, não exige esse tipo de conhecimento do professor; (iii) assumir que o ensino das estruturas algébricas na formação do professor pode contribuir para a construção dos saberes profissionais docentes, mas que seria necessário investigar formas de fazê-lo.

Não vou me alongar em todos esses três caminhos que sugeri, pois cada um deles merece um estudo cuidadoso e, por isso, assumi apenas um para pesquisar. Vou apenas me posicionar, brevemente, quanto a cada um deles. Sou contrário a defender o primeiro caminho. Acredito que o ensino das estruturas algébricas sem qualquer relação com os conteúdos da Educação Básica gera discursos como aquele da estudante que apresentei anteriormente. Além disso, penso que uma base sólida de conhecimentos matemáticos não significa saber *mais*[1] matemática, mas sim conhecer “numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico” (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 935).

Com relação ao segundo caminho, durante algum tempo, foi por ele que eu gostaria de seguir, pois acredito na diferente natureza da matemática escolar e da matemática acadêmica. Minha compreensão dessas duas é tal como as definem Moreira e David (2010): a Matemática Científica ou Acadêmica é entendida como “[...] um corpo científico de

---

[1] *Mais*, aqui, está indicando quantidade.

conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais" (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20), enquanto a Matemática Escolar[2] refere-se ao conjunto de saberes

> [...] "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20).

Considerando essa diferenciação, entendo que o professor da Educação Básica, muitas vezes, convive, em sua prática, sem os conhecimentos da Matemática Acadêmica.

Contudo, preferi pensar de uma maneira diferente da que vinha fazendo. Ao invés de problematizar a presença da disciplina de Álgebra na formação do professor, eu poderia levar em consideração que ela está presente na maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática e buscar estabelecer uma relação entre seu ensino e a futura prática do professor para, ao final desta pesquisa, poder ter mais clareza a respeito de sua pertinência em cursos de formação. Meu questionamento mudou de "por que abordar a Matemática Acadêmica no curso de Licenciatura?" para "como abordar a Matemática Acadêmica no curso de Licenciatura?". Por isso, mesmo considerando a natureza distinta dessas matemáticas, escolhi seguir pelo terceiro caminho e buscar formas de relacionar um tópico específico da Álgebra Abstrata – a estrutura de corpo – e um conteúdo bastante comum na Educação Básica – os números racionais.

Essa mudança em minha forma de pensar está diretamente relacionada ao estágio de Doutorado Sanduíche no País (SWP) que realizei sob a supervisão do professor Alessandro Jacques Ribeiro, na Universidade Federal do ABC (UFABC). As pesquisas realizadas por ele e seu grupo caminham nessa direção de buscar articulações entre as estruturas algébricas mais comuns (grupo, anel e corpo) com temas da Educação Básica (simetria, polinômios e números).

Mas, por que pesquisar esse tema é relevante? Felix Klein, no início do século XX, já alertava para o que chamou de "dupla descontinuidade", um problema evidenciado nos cursos de formação de professores de sua época. Havia, segundo Klein (2009), uma ruptura entre a matemática escolar e a matemática superior, uma vez que a maneira como os cursos estavam organizados fazia com que os graduandos se ocupassem exclusivamente com esta, sem

---

[2] Utilizaremos Matemática Acadêmica e Matemática Escolar, com letra maiúscula, quando estivermos nos referindo à caracterização proposta por Moreira e David (2010).

se preocupar em estabelecer conexões com aquela. A "dupla descontinuidade" fica explícita quando Klein afirma:

> Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores, são confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e, como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma conexão entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando seus estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p. 1).

A primeira descontinuidade se configura na formação do professor, pois a matemática lá trabalhada não se desenvolveu a partir daquela conhecida pelos graduandos na escola básica. A segunda descontinuidade se dá na prática docente, quando o professor, já formado, retorna à escola e percebe que a matemática da universidade parece não ter conexões com aquela que está ensinando.

Essa percepção da "dupla descontinuidade" permanece nos dias atuais e pode ser notada não apenas na fala da estudante citada, mas em pesquisas da área de Educação Matemática. Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015) perceberam, por meio de entrevistas com professores da Educação Básica, que, muitas vezes, as referências de conhecimento matemático em que os participantes sustentavam sua prática pareciam estar mais voltadas ao que haviam aprendido quando eram estudantes da Educação Básica do que no curso de graduação, como se a Licenciatura não tivesse desempenhado papel algum em sua formação matemática.

Moreira, Cury e Vianna (2005) apontam que, segundo pesquisas, o conhecimento matemático em sua sistematização lógico-formal-dedutiva e suas formulações conceituais com base nas "estruturas", como é o caso da Álgebra na formação do professor, "[...] está longe de ser suficiente para dar conta das questões que se colocam para o professor em sua prática pedagógica" (p. 38).

No mesmo sentido, a pesquisa de Damico (2007) chama a atenção para a necessidade de se refletir sobre os "conteúdos de Matemática Pura e Aplicada de nível superior versus conteúdos da Matemática 'elementar' ensinada na Educação Básica" (DAMICO, 2007, p. 260). Em sua conclusão, o autor considera que o modelo atual de formação mostrou-se ineficaz aos participantes da sua pesquisa, uma vez que reiteradas vezes ficou explícito o despreparo dos futuros professores para o ensino de conteúdos relacionados aos números racionais (seu tema de pesquisa) que futuramente terão que ensinar.

Moreira e David (2004), por sua vez, apresentam uma análise do conhecimento matemático veiculado no processo de formação inicial do professor, confrontando-o com as questões que se colocam na prática docente na escola básica. Os autores afirmam que o conjunto dos números racionais é visto, ao longo de toda a formação matemática na Licenciatura, como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática Escolar. Ao analisar disciplinas[3] ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais e livros[4] usados como referência nessas disciplinas, Moreira e David (2004) detalham aspectos fundamentais que distinguem as construções formais de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ – a partir de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, respectivamente – das sucessivas extensões dos conjuntos numéricos que se desenvolvem no processo de escolarização básica. Para eles, as construções da Matemática Acadêmica visam produzir uma "abstração que expresse formalmente as características 'essenciais' de um objeto que, a menos da construção formal, já é, de certo modo, conhecido" (p. 6), enquanto que, na escola, as extensões numéricas têm natureza totalmente diferente, já que o conjunto numérico e a estrutura que resultam do processo de extensão são um universo genuinamente novo para o estudante, exigindo um tratamento didático-pedagógico específico das várias etapas desse processo (MOREIRA; DAVID, 2004).

Essas pesquisas (RANGEL; GIRALDO; MACULAN FILHO, 2015; MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005; DAMICO, 2007; MOREIRA; DAVID, 2004) são exemplos que tornam evidente a atualidade da "dupla descontinuidade" percebida e denunciada por Klein há tempos. São elas que me permitem responder àquela pergunta (por que pesquisar esse tema é relevante?) da seguinte forma: pesquisar esse tema é relevante, porque se trata de um problema antigo, mas que permanece nos dias atuais, comprometendo a função da Licenciatura em Matemática enquanto curso para formar profissionais para atuarem como professores da Educação Básica.

Também é relevante para evitar interpretações equivocadas para a solução do problema da "dupla descontinuidade". É o caso de Vieira (2015), um livro cujo título é *Álgebra Abstrata para Licenciatura*, teoricamente voltado para a formação de professores, mas que logo nas primeiras páginas, quando descreve os objetivos do livro, já indica sua perspectiva que, ao nosso ver, é equivocada:

---

[3] Fundamentos de Análise e Iniciação à Matemática

[4] *Análise Real, V.1*, de Elon Lages de Lima; *Análise I*, de Djairo G. Figueiredo; *Números: Racionais e Irracionais*, autor Ivan Niven.

> Espera-se que a maneira com a qual os conteúdos teóricos aqui explorados seja diferente da forma de como eles são apresentados no Bacharelado. Nessa perspectiva, faz-se necessário destacar ao menos dois critérios essenciais: o primeiro é que os exemplos sejam considerados com mais detalhes e com grau de dificuldade crescente; e o segundo é que expressões como "fácil ver" e "é imediato", tão comuns em textos matemáticos, não sejam usadas com desprezo para com o estudante, mas que tenham a finalidade de sinalizá-lo de que alguns detalhes superficiais de um determinado resultado foram compactados. (VIEIRA, 2015, p. 8).

Espero que, ao longo desta tese, o leitor perceba que a perspectiva adotada aqui é completamente diferente dessa apontada por Vieira (2015), pois acredito que o problema esteja na relação da Álgebra Abstrata com a prática docente e, por isso, não pode ser resolvido facilitando a escrita de um texto matemático, como se a diferença entre o Bacharelado e a Licenciatura em Matemática fosse uma mera questão de simplificar o conteúdo. Eu combato essa perspectiva.

Enfim, esse é um tema extremamente complexo, pois abrange: questões políticas, uma vez que envolve discussões sobre currículo; questões conceituais, pois envolve compreender possíveis relações matemáticas; e questões sociais, visto que se relaciona com o que é relevante para o professor exercer seu papel social de educador matemático. Por ser complexo, são necessárias várias pesquisas a fim de encarar o tema por todos os ângulos. Apresentamos apenas uma delas.

A partir daqui e durante todo o restante deste texto, falaremos no plural, pois os incômodos e escolhas deixaram de ser pessoais e passaram a ser coletivos, a começar pela escolha dos objetos matemáticos corpo e números racionais e das bases teórico-metodológicas.

Em um dos capítulos posteriores, apresentaremos um levantamento bibliográfico que realizamos sobre a estrutura algébrica corpo e os números racionais ou deste conteúdo na formação do professor de Matemática. Veremos que muitas pesquisas abordam o fato de o número racional ser um conceito polissêmico (ou, como outras pesquisas preferem, os números racionais têm diferentes significados ou personalidades) e um dos significados socialmente construídos é o de número racional como elemento de um conjunto quociente, levando à ideia de corpo dos números racionais, que é o nosso foco. Um dos referenciais teóricos que nos fundamenta nesta tese trata exatamente das diferentes maneiras de ver e conceitualizar[5] o mundo. Estamos falando da abordagem dos perfis conceituais, de Eduardo Mortimer e colaboradores. A teoria dos perfis conceituais parte do pressuposto que as pessoas apresentam diferentes modos de conceber e representar o mundo, expondo diferentes modos de

---

[5] O termo *conceitualizar* será melhor explicado na fundamentação teórica.

pensar, usados em diferentes contextos. Assim, um conceito científico que é polissêmico, admite a construção de um perfil conceitual, um modelo da heterogeneidade dos modos de pensar esse conceito. Trataremos dessa abordagem mais adiante, mas cabe ressaltar um ponto que é um pressuposto deste trabalho. Segundo Mortimer, Scott e El-Hani (2009), considerando que a experiência social de todo indivíduo é diversa e multifacetada, segue que

> [...] temos à disposição uma diversidade de significados estabilizados em diferentes linguagens sociais, sendo que o peso que damos a cada um deles depende da extensão a que tivemos oportunidades, ao longo de nossa formação, para empregá-los de modo fértil para dar conta dos desafios colocados por nossas experiências. (p. 5).

Acreditamos que entender os números racionais como elementos de um corpo seja um desses diferentes significados estabilizados e o contexto no qual isso ocorra seja no âmbito da Matemática Acadêmica. Porém, tomamos como pressuposto que, geralmente, o peso que os licenciandos dão a esse significado em particular (o da Matemática Acadêmica) seja pequeno (em comparação com outros, como o significado parte-todo) porque, durante a formação inicial, o futuro professor não tem oportunidades para empregá-lo de modo fértil, de modo que perceba *se* e *como* esse modo de pensar os números racionais pode se mostrar relevante para a construção de seus conhecimentos profissionais docentes.

Isso fica evidente quando a estudante citada no início dessa introdução diz "[...] não me sentia muito motivada a estudar aquilo [Álgebra], porque eu acho que nunca vou usar". Fazendo um paralelo entre essa fala e nossa pesquisa, o peso que a estudante atribuía àquele significado era baixo, para não dizer zero, pois ela não via, por exemplo, como aquele modo de conceitualizar os números racionais poderia ser útil em sua futura atividade docente.

Assim, temos a intenção nesta pesquisa de, ao escolhermos o terceiro caminho, verificar se ele leva a terras férteis que possibilitem aos estudantes uma formação em uma disciplina de conteúdo matemático conectada com sua futura atividade profissional, minimizando aquela percepção da "dupla descontinuidade" de Klein, e discutindo articulações plausíveis entre a estrutura algébrica corpo com questões que se colocam para o professor em sua prática no ensino dos números racionais.

Nessa linha, outro referencial teórico em que nos apoiamos é o do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (*Horizon Content Knowlege – HCK*), na perspectiva de Jakobsen et al. (2012) e de Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013). O HCK é um subdomínio do quadro teórico do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching – MKT*), de Deborah Ball e colaboradores. O MKT envolve os conhecimentos matemáticos necessários para que o professor possa exercer seu papel de ensinar matemática

(BALL; THOMAS; PHELPS, 2008). Construída sobre a noção do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*), de Shulman (1986), o MKT é uma teoria baseada na prática, a partir das demandas matemáticas para o ensino, e explora os subdomínios do conhecimento matemático necessários para a prática docente.

Diante do que foi exposto até aqui – as motivações pessoais, o distanciamento entre a matemática que os cursos de formação oferecem e a da prática docente e os embasamentos teóricos assumidos – questionamo-nos sobre a possibilidade de se promover um ensino da estrutura algébrica corpo na formação inicial que favoreça o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Esse questionamento tornou-se, então, a pergunta que norteia a presente pesquisa: *de que maneira o corpo dos números racionais pode ser abordado em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais?* Temos como hipótese que os números racionais devem ser tomados como motivadores do ensino da estrutura algébrica corpo em cursos de Licenciatura em Matemática e não como um exemplo da estrutura, permitindo, com isso, que essa estrutura se mostre, de uma maneira mais explícita e articulada, útil ao conhecimento matemático do professor.

Não excluímos a possibilidade de a resposta para nossa pergunta ser: *nenhuma*. Contudo, uma resposta como essa só seria possível após o estudo e, portanto, o processo de busca por fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais é tão relevante quanto a resposta final. É claro que esse processo a que nos referimos não é único, é apenas um dos vários possíveis. A nossa busca por fundamentos é feita a partir dos referenciais teóricos por nós assumidos e dos dados aqui produzidos. Outros pesquisadores, fundamentados por outros referenciais e com outros dados, certamente chegariam a outras respostas. Isso é característica de uma pesquisa qualitativa, como a nossa.

Para responder à pergunta de investigação, traçamos um objetivo principal de nossa pesquisa, a saber: *investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática*. Formulamos objetivos específicos que nos permitiram pensar um passo de cada vez, na direção de se contemplar o objetivo principal de nosso estudo. São eles:

1) *caracterizar* que matemática entendemos ser adequada à formação inicial do professor;
2) *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados aspectos dos números racionais na Matemática Escolar e na Matemática Acadêmica;

3) *organizar*, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar o conceito de número racional;
4) *elaborar* uma sequência de tarefas para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática.

Cada um desses objetivos específicos será melhor apresentado na seção 1.4, quando apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa. Por ora, vamos expor ao leitor a maneira como a tese está estruturada, para que comece a ter clareza do trajeto que percorremos e possa nos acompanhar nessa caminhada sem grandes dificuldades. No capítulo 1, *Pressupostos teórico-metodológicos da pesquisa*, onde abordamos nossos referenciais teórico-metodológicos, dedicamos uma seção para a discussão acerca da formação inicial de professores (seção 1.1), que se desmembra em duas subseções fundamentais para a pesquisa: uma sobre o Conhecimento Profissional Docente, com destaque para o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (subseção 1.1.1), e outra que melhor discute a diferenciação entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica (seção 1.1.2). Em uma seção separada daquela que trata da formação inicial de professores, trazemos a abordagem dos perfis conceituais (seção 1.2). Fechando o capítulo 1, temos nossa caracterização para a matemática na formação do professor (seção 1.3), além dos aspectos metodológicos adotados nesta pesquisa (seção 1.4).

O capítulo 2, *Aprofundamento teórico para o ensino do corpo dos números racionais*, contempla discussões diversas sobre os números racionais, com vistas a levantar aspectos sobre *o que* e *por que* trabalhar o corpo dos números racionais na formação do professor. Iniciamos o capítulo com uma abordagem para os números racionais que é bastante difundida na Educação Matemática, os subconstrutos de Kieren (seção 2.1). Trata-se de uma categorização de diferentes significados dos números racionais. Na sequência, trazemos aspectos históricos dos números racionais, por meio de diferentes fontes secundárias da história da Matemática (seção 2.2) e apresentamos duas seções (seção 2.3 e seção 2.4) que debatem os números racionais na Matemática Acadêmica e os números racionais na Matemática Escolar, nessa ordem de apresentação. É uma discussão central na tese, pois "faz dialogar", em um primeiro momento (seção 2.3), três professores formadores que entrevistamos, livros didáticos voltados para o Ensino Superior e pesquisas do campo da Educação Matemática que envolvem os números racionais do ponto de vista da Matemática Acadêmica; em um segundo momento (seção 2.4), quatro professores da Educação Básica que entrevistamos, uma coleção de livros didáticos destinada para o Ensino Fundamental e pesquisas do campo da Educação Matemática que envolvem diversos aspectos dos números racionais na Matemática Escolar. Essas 4 seções (2.1, 2.2, 2.3 e 2.4) confluem para a produção de nossa matriz epistemológica (SEPULVEDA,

2010) do número racional, uma ferramenta metodológica importante do perfil conceitual para organizar a polissemia em torno do conceito de número racional.

O capítulo 3, *Aprofundamento metodológico para o ensino do corpo dos números racionais*, visa refletir sobre possibilidades de *como* tratar o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores, propondo um caminho que consideramos plausível. Para tanto, examinamos documentos oficiais voltados para o currículo de matemática na Educação Básica e outros voltados para o currículo dos cursos de formação de professores (seção 3.1). Apresentamos caracterizações para os diferentes tipos de tarefas (seção 3.2), como propõe Ponte (2005, 2014), sugerindo um ensino pautado em tarefas, que valoriza o papel ativo do estudante na aprendizagem, tendo elas como “o elemento organizador da atividade de quem aprende” (PONTE, 2014, p. 14).

Fundamentados nas investigações realizadas nos capítulos 2 e 3, construímos uma sequência de tarefas para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática, apresentada no capítulo 4.

Por fim, apontamos nossas considerações finais e conclusões, em que destacamos resultados importantes trazidos por nossa pesquisa e respondemos à questão investigativa que guiou o trabalho.

Antes de seguir para os referenciais apresentados no capítulo 1, tecemos uma ressalva. Se por um lado escolhemos percorrer o terceiro caminho, pois a pesquisa indicava este como uma opção mais plausível para o momento, não o fizemos deixando de lado todas as vontades pessoais de explorar o segundo caminho, aquele que questiona a necessidade do ensino das estruturas algébricas na formação docente. Por isso, é possível que haja, nas páginas que seguem, momentos de crítica a essa necessidade ou relevância e momentos em favor dela, uma vez que a maneira que encontramos para investigar o modo como o ensino das estruturas algébricas, em particular a de corpo, na formação do professor pode (se é que pode, não estamos tomando como pressuposto) contribuir para a formação docente foi problematizando-o e questionando-o a todo momento. Acreditamos, porém, que essas divergências favorecem a discussão, pois estabelecem um conflito entre as duas perspectivas (segundo e terceiro caminhos), que é justamente a forma como pretendemos propor a presença da Matemática Acadêmica para a formação de professores: em conflito com a Matemática Escolar.

A metáfora dos caminhos permeia todo este trabalho, pois é exatamente disso que se trata essa tese: um caminhar, uma procura, uma busca por fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais, que, certamente, poderia ter tomado outros rumos, ter seguido por outras estradas, mas nossas escolhas nos conduziram ao percurso que apresentamos nos próximos capítulos.

1. Pressupostos teórico-metodológicos da pesquisa

A presente pesquisa, inserida no contexto maior da formação inicial de professores de matemática, tem como foco a matemática na formação do professor. De maneira mais específica, estamos interessados na disciplina de Álgebra (Estruturas Algébricas) nos cursos de Licenciatura em Matemática. Contudo, falar da Álgebra na formação do professor é, ainda, muito amplo. Por este motivo, afunilamos nosso tema para o ensino da estrutura algébrica corpo em cursos de formação inicial. É dentro desses contextos amplos e específicos que explicitamos os pressupostos teóricos que embasam nossas compreensões sobre matemática (Acadêmica e Escolar), conhecimento matemático do professor, ensino e aprendizagem dos números racionais de modo que, a partir deles, possamos constituir bases para os fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática. Tratamos disso neste capítulo.

Organizamos o capítulo em três seções, com vistas a tornar mais explícitas nossas escolhas teóricas ao leitor. Na primeira, apresentamos aspectos da formação inicial de professores de um modo geral para, em seguida, enfocar dois aspectos: (i) o Conhecimento Profissional Docente, dando ênfase à teoria assumida como referencial, o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte; (ii) uma discussão sobre as matemáticas na formação do professor. Na segunda, discutimos o Perfil Conceitual, referencial teórico que transpassa toda a pesquisa, pois se caracteriza como a base epistemológica assumida e que conduz nossa compreensão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Na última seção, explicitamos uma caracterização da matemática na formação do professor que almejamos, construída a partir do entrelaçamento entre os referenciais teóricos utilizados.

1.1 Formação inicial de professores

A formação inicial de professores de matemática, segundo Ponte e Chapman (2008), é um processo complexo em que muitos fatores interagem entre si. Por exemplo, os tipos de conhecimentos, competências, atitudes e valores que os futuros professores devem adquirir ou desenvolver; o local em que a aprendizagem acontece (universidade, escola e outros contextos); e os papéis, interesses e características dos participantes do processo (professores em formação, professores universitários, professores supervisores e estudantes). Além disso, os autores incluem opções e condições do programa de formação, tais como as abordagens pedagógicas, formas de trabalho enfatizadas, relação entre futuros professores e formadores, acesso a recursos e uso de tecnologias de informação e comunicação. Há conflitos entre o que é considerado importante para os futuros professores aprenderem e o que eles realmente aprendem, e entre as perspectivas dos diferentes participantes do processo de formação de professores e outras partes interessadas, tais como o Ministérios da Educação, escola, pais, mídia e do público (PONTE; CHAPMAN, 2008).

A complexidade acima apontada ganha novos elementos quando acrescentamos as pesquisas em formação de professores nesse processo. Como afirma Lerman (2001), o professor é o elemento chave no aprendizado da matemática pelos estudantes e reconhecer tal fato fez com que o número de pesquisas interessadas em investigar a formação do professor de matemática aumentasse consideravelmente a partir dos anos 1980, aumentando, também, a quantidade de perspectivas teóricas para se realizar tais investigações. Algumas delas serão discutidas ainda nessa seção.

Sobre o número de pesquisas, os dados trazidos por Fiorentini et al. (2002) nos dão uma dimensão do aumento no Brasil. Em um balanço de 25 anos (de 1978 a 2002) da pesquisa brasileira em formação de professores que ensinam matemática, os autores destacam que, entre dissertações e teses defendidas até fevereiro de 2002, temos 112 estudos, sendo: 7 na década de 1970; 22 na década de 1980; 62 na década de 1990 e 21 somente nos anos 2001 e 2002. Em concordância com Lerman (2001), os autores afirmam que, embora esse crescimento tenha relação com o aumento do número de programas de pós-graduação em Educação Matemática, “parece também refletir uma tendência mundial que reconhece o professor como elemento fundamental no processo de mudança educacional e curricular [...]” (FIORENTINI et al., 2002, p. 139).

Recentemente, um novo mapeamento foi realizado. Com uma equipe nacional composta por 32 pesquisadores, Fiorentini et al. (2016) apresentam o mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática (PEM) referente ao período de 2001 a 2012. Juntamente com os demais pesquisadores participantes do projeto que realizou o mapeamento, Fiorentini et al. (2016) chegaram a um conjunto de 858 trabalhos que abordaram o tema PEM, sendo 96 dissertações de mestrado profissional, 584 dissertações de mestrado em programas de mestrado acadêmico e 178 teses de doutorado, produzidos em 85 diferentes instituições brasileiras. Desses 858 trabalhos, 303 focam a formação inicial de professores, 246 a formação continuada e 34 a formação continuada e inicial. O restante foca outros contextos. Os resultados trazidos por Fiorentini et al. (2016) deixam evidente o expressivo aumento do número de trabalhos sobre o PEM no período de 2001 a 2012 em relação ao período de 1978 a 2002, levantado por Fiorentini et al. (2002).

Para além dos números, podemos, também, perceber mudanças nas perspectivas das pesquisas sobre o professor que ensina matemática. Fiorentini, Souza Junior e Melo (2003) destacam a tendência crescente das pesquisas em valorizar os saberes docentes na formação de professores. Em um período anterior aos anos 1970, a formação e a seleção de professores centravam-se quase que exclusivamente no conhecimento da disciplina, desvalorizando questões de ordem pedagógica ou relativas à prática docente. Apesar disso, esses autores afirmam que o domínio da disciplina não era totalmente explorado, pois, embora conceitos e ideias fossem valorizadas sob determinado enfoque epistemológico, diferentes perspectivas histórico-epistemológicas de organização e sistematização desses conceitos e ideias não eram problematizadas.

De uma valorização quase que exclusiva do conhecimento da matéria a ser ensinada, posteriormente, os programas de formação e as seleções de professores passaram a considerar aspectos didático-metodológicos na década de 1970, deixando para segundo plano o domínio dos conteúdos. Foi o "período áureo do tecnicismo no Brasil" (FIORENTINI; SOUZA JUNIOR; MELO, 2003, p. 313). Como veremos adiante, foi justamente este período em que Shulman (1986) identificou como "paradigma perdido".

Nos anos 1980, de acordo com Fiorentini, Souza Junior e Melo (2003), prevaleceram as relações/determinações sócio-políticas e ideológicas da prática pedagógica. Nesse período:

> Os saberes escolares, os saberes docentes tácitos ou implícitos e as crenças epistemológicas, como destaca Llinhares (1996), seriam pouco valorizados e raramente problematizados ou investigados tanto pela pesquisa acadêmica educacional como pelos programas de formação de professores. Embora a prática pedagógica de sala de aula e os saberes docentes tenham começado, nesse período, a ser investigados, as pesquisas não tinham o intuito de explicitá-los e/ou valorizá-los como formas válidas ou legítimas de saber. [...] procuravam analisar a prática pedagógica e os saberes docentes pelas suas carências ou confirmações em relação a um modelo teórico que os idealizava. (FIORENTINI; SOUZA JUNIOR; MELO, 2003, p. 314).

Nos anos 1990, o reconhecimento da complexidade da prática docente proporcionou novos enfoques, por parte das pesquisas e dos programas de formação de professores, no sentido de se compreender os saberes pedagógicos e epistemológicos relativos ao conteúdo escolar a ser ensinado (FIORENTINI; SOUZA JUNIOR; MELO, 2003).

No levantamento mais atual (aquele referente ao período de 2001 a 2012), Nacarato et al. (2016) concluem que, daqueles 303 trabalhos cujo foco está na formação inicial de professores, a maior parte (90) tem como foco de análise a "Formação, aprendizagem e desenvolvimento profissional". O segundo foco de análise mais abordado é "Cursos/licenciatura/programas/projetos de formação inicial", com 80 trabalhos e o terceiro é "Saberes e competências", com 34 trabalhos ao longo do período investigado[6].

Foi em meio a essas mudanças históricas brevemente destacadas que diversas perspectivas teóricas se desenvolveram, passando a embasar pesquisas sobre/com professores e sua formação. Trabalhos de Schön (1992), com a noção de Professor Reflexivo, de Shulman (1986, 1987), sobre Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, de Tardif (1999, 2002) e de Gauthier (1998), sobre os saberes docentes, e os trabalhos abrangendo as perspectivas socioculturais das comunidades profissionais, como as Comunidades de Prática, de Lave e Wenger (1991), são exemplos dessa diversidade de modos de olhar para o professor, sua prática e sua formação.

Assim, a complexidade do processo de formação de professores, tal como apontado por Ponte e Chapman (2008), aliada ao crescente interesse pela pesquisa nesse campo, como evidenciado por Fiorentini et al. (2002) e Fiorentini et al. (2016), resulta em uma diversidade de perspectivas teóricas, como as citadas anteriormente.

Cientes disso, destacamos que, dentre as "lentes" possíveis para olharmos e investigarmos esse terreno complexo que é a formação de professores, a nossa é bifocal, se é que podemos fazer uma distinção clara entre os dois focos assumidos por nós. Estamos olhando para o chamado conhecimento profissional docente, mas sem perder de vista (e por isso o outro foco, que embora distintos estão reunidos na mesma lente) a discussão sobre o papel das disciplinas de conteúdo matemático em cursos de Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, o debate que estamos propondo refere-se à Matemática Acadêmica, no sentido de Moreira e David (2010), veiculada em cursos de Licenciatura e sua contribuição para o conhecimento necessário à prática docente.

---

[6] Os demais focos de análise abordados nas pesquisas levantadas são: Atitudes, crenças, concepções e representações; Identidade e profissionalidade docente do PEM; Características e condições do trabalho docente, inclusive saúde ou estresse do docente, do PEM; Performance ou desempenho docente do PEM; História de professores que ensinam Matemática; História da formação do professor que ensina Matemática; Atuação, pensamento ou saberes do formador; Outros.

Nas duas próximas subseções apresentamos nossa “lente bifocal” para a formação de professores: i) na primeira subseção, abordamos o conhecimento profissional docente de uma maneira mais geral, para depois especificarmos aqueles aspectos que embasam esta pesquisa; ii) na segunda, discutimos o papel das disciplinas de conteúdo matemático na formação do professor e possíveis relações com a prática do professor da Educação Básica.

1.1.1 Conhecimento profissional docente

Segundo Fiorentini e Oliveira (2013), para pensar a formação necessária ou fundamental para o professor, é importante, antes, “analisar e discutir a prática social do educador matemático, pondo em evidência os saberes mobilizados e requeridos por essa prática” (p. 920). Isto é, a compreensão da prática social do educador matemático, enquanto uma prática que considera os contextos e as interações entre os sujeitos ali envolvidos, deve preceder a formulação de qualquer programa de formação de professores.

Dentre as diferentes formas de conceber a prática docente, Fiorentini e Oliveira (2013) apresentam, brevemente, três delas e comentam alguns de seus impactos no modo de organizar o processo de formação de professores.

A primeira concepção sobre a prática do professor de matemática apresentada pelos autores a toma como essencialmente prática, bastando ao professor apenas o domínio do conteúdo, que é o objeto de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, as demais demandas para o ensino se aprendem ensinando, “não havendo necessidade de uma formação formal ou teórica acerca das relações entre matemática, aluno e professor” (p. 920). A matemática (acadêmica) tem lugar central nesse tipo de formação.

A segunda concepção encara a prática do educador matemático como campo de aplicação de conhecimentos produzidos pela pesquisa acadêmica. Nessa, o professor não é tido como um produtor de conhecimento e o saber carrega os valores da academia e ignora a complexidade da atividade profissional. O futuro professor precisa, então, “de uma sólida imersão teórica tanto em termos de conhecimentos matemáticos quanto das ciências educativas e dos processos metodológicos de ensino da matemática (enfatizando mais a dimensão didática do que a pedagógica)” (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921). Tal perspectiva, que segue os pressupostos da Racionalidade Técnica, produz o famoso modelo 3+1 dos cursos de

Licenciatura (3 anos de disciplinas de conteúdo específico mais 1 ano de disciplinas didático-pedagógicas[7]).

A terceira e última concepção apresentada pelos autores considera a prática do professor como prática social, "sendo constituída de saberes e relações complexas que necessitam ser estudadas, analisadas, problematizadas, compreendidas e continuamente transformadas" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921). Reconhece e valoriza as diversas atividades profissionais do educador matemático e, desse modo, "a matemática em ação do educador matemático está, sempre, situada em uma prática social concreta, na qual ganha sentido e forma/conteúdo próprios, sendo reconhecida e validada no/pelo trabalho" (p. 921). Nessa perspectiva, fala-se em *matemáticas*, no plural, ao invés de *Matemática* (no singular e com letra maiúscula), pois as matemáticas são diversas e variam de acordo com o contexto em que a prática social acontece.

Essa diferenciação entre as concepções sobre a prática docente feitas por Fiorentini e Oliveira (2013) é essencial, pois ela explicita uma disputa entre matemáticos e educadores matemáticos (mas não somente) acerca do que é relevante para a formação de professores. Enquanto nas duas primeiras concepções o conhecimento do conteúdo – leia Matemática Acadêmica – é priorizado, na terceira outros aspectos do conhecimento profissional ganham valor.

Em uma direção parecida com essa terceira concepção proposta por Fiorentini e Oliveira (2013), Ponte e Oliveira (2002) consideram que o conhecimento profissional dos professores

> [...] envolve o conhecimento relativo à prática lectiva na sala de aula e a outros papéis profissionais, tais como a tutoria de alunos, a participação em actividades e projectos da escola, a interacção com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais. O conhecimento profissional inclui ainda, num outro plano, a visão do professor sobre o seu próprio desenvolvimento profissional. (p. 148).

Posto de outra forma, os autores afirmam que o conhecimento profissional do professor de Matemática envolve conhecimento na ação relativo à prática letiva, à prática não letiva e à profissão e ao desenvolvimento profissional. A parte do conhecimento profissional

---

[7] Os autores utilizam a expressão composta "didático-pedagógica" no sentido de Fiorentini (2005, p. 108), em que a "Didática busca explorar as relações professor-aluno-conteúdo (como enfatiza a didática francesa) e centra foco no processo de ensinar e aprender um conteúdo e, também, no que antecede essa prática (planejamento) e a sucede (avaliação). A Pedagogia, por sua vez, se preocupa com o sentido formativo ou educativo do que ensinamos e aprendemos; com as consequências da ação didática, em termos de formação e desenvolvimento humano do sujeito. A Pedagogia, portanto, governa e vetoriza a ação didática, pois dá sentido a essa ação, preocupando-se com questões tais como: por que, para que e para quem ensinamos?"

que age diretamente na prática letiva – chamado *conhecimento didático* pelos autores – possui quatro grandes vertentes: o conhecimento da matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento do processo instrucional[8]. Ou seja, o conhecimento da matemática é apenas um dos diferentes aspectos que envolvem o conhecimento profissional docente, sendo, portanto, insuficiente uma formação que valorize somente a Matemática Acadêmica.

Fiorentini (2000) aponta que diversos estudos (ELLIOTT, 1993; FIORENTINI; NACARATO; PINTO, 1999; SCHÖN, 1992; TARDIF, 1999; ZEICHNER, 1998) mostram a existência de "uma enorme distância entre os saberes profissionais – os saberes da prática ou experienciais – e os conhecimentos universitários – os saberes dos especialistas" (p. 189). Segundo esse autor, para se estudar os saberes da atividade profissional docente, deve-se tomar como ponto de partida a própria prática profissional do professor, seus saberes da experiência, seus problemas, suas ideias e representações acerca da atividade docente, e não as teorias ou o conjunto das produções dos especialistas. Isso não significa, porém, um abandono da teoria em detrimento da prática, mas, sim, uma relação dialética e complementar entre a perspectiva teórica e a perspectiva prática de conhecimento profissional do professor, tal como aponta Llinhares (1998):

> A reflexão e a análise de situações de ensino e aprendizagem não são suficientes para a aquisição do conhecimento necessário para ensinar Matemática. A informação teórica procedente da Didática da Matemática deveria ser considerada como um instrumento conceitual que pode permitir ao licenciando, como aprendiz, integrar e produzir seu conhecimento prático pessoal. Neste sentido, a ideia subjacente a esta abordagem é que a integração do conhecimento teórico nos processos de análise deste tipo de tarefas pode produzir propostas práticas por parte do professor que lhe permitam dar maior conta da complexidade da prática. (LLINHARES, 1998, p. 121, tradução nossa).

Essas pesquisas – Ponte e Oliveira (2002), Fiorentini (2000) e Llinhares (1998) – são algumas das diversas perspectivas teóricas que tomam o conhecimento profissional não mais como exclusivamente teórico, com foco no conteúdo, mas, sim, como um conhecimento da prática e teorizado a partir dela, englobando uma variedade de situações que envolvem a atividade profissional docente.

Outro autor que contribuiu fortemente para as discussões acerca do conhecimento profissional do professor foi Lee Shulman. Shulman (1986) difundiu o termo

---

[8] Em Ponte et al. (1998), os autores apresentam um quadro em que detalham essas quatro categorias do conhecimento didático do professor relativo à sua prática letiva.

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK[9]), definido como uma forma particular de conhecimento do conteúdo que engloba os aspectos do conteúdo mais pertinentes ao seu processo de ensino. De acordo com Fernandez (2011), a expressão Conhecimento Pedagógico do Conteúdo foi utilizada por Shulman pela primeira vez em uma conferência na Universidade do Texas, em 1983, cujo título era: "O paradigma perdido na pesquisa sobre ensino". O paradigma perdido, para Shulman, referia-se à pouca atenção que vinha sendo dada ao conteúdo específico, sendo as questões didático-pedagógicas o foco das pesquisas em ensino. Shulman buscou, então, recuperar o "paradigma perdido" trazendo o conteúdo específico atrelado à sua dimensão didática para o interior do conhecimento base para o ensino naquela época. "Essa transformação do conteúdo em formas didaticamente poderosas é o que Shulman denomina de conhecimento pedagógico do conteúdo" (FERNANDEZ, 2011, p. 3).

O PCK é apenas uma das categorias propostas por Shulman para o conhecimento base para o ensino. Shulman (1987) apresenta sete categorias, a saber:

- Conhecimento Específico do Conteúdo;
- Conhecimento Pedagógico Geral, com especial referência aos princípios e estratégias gerais de gestão da sala de aula que parecem transcender o específico de cada disciplina;
- Conhecimento Curricular, programas das disciplinas e materiais que servem como ferramentas para o trabalho do professor;
- Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, uma espécie de amálgama entre conteúdo e pedagogia que é exclusivo ao professor, sua forma específica de conhecer a disciplina;
- Conhecimento das características cognitivas dos seus alunos;
- Conhecimento do contexto educacional, abrange desde conhecer o grupo de alunos, a gestão e o financiamento das unidades escolares, até características das comunidades e das culturas;
- Conhecimento dos fins gerais da educação escolar, seus propósitos, valores e seus fundamentos filosóficos e históricos.

São inegáveis as contribuições dos trabalhos de Shulman, em especial a noção do PCK, para as pesquisas em formação de professores. Como afirmam Graeber e Tirosh (2008), o PCK tem dominado a literatura há quase vinte anos. Desde os artigos de 1986 e de 1987 de Shulman, as pesquisas que envolvem o PCK vão na direção tanto de expandir e detalhar

[9] Utilizaremos a sigla PCK em referência ao original *Pedagogical Content Knowledge*.

esta noção como no sentido de criticá-la. Graeber e Tirosh (2008) nos apontam um pouco desses desdobramentos. Os autores relatam que há críticas, por exemplo, pelo fato de o PCK ignorar o papel das crenças e valores de professores; ou pelo fato de, para alguns pesquisadores, as fronteiras entre o PCK, o conhecimento de conteúdo e o conhecimento pedagógico não serem muito claras; e, ainda, que aspectos do conhecimento do conteúdo ou do conhecimento pedagógico deveriam ser incluídos no PCK.

Outra crítica pode ser encontrada em Moreira e David (2010), quando afirmam que o PCK "não vai muito além de uma forma de cumprir bem as prescrições, ou seja, ensinar 'competentemente' ou 'eficientemente' aquilo que se encontra prescrito nos currículos escolares" (p. 39). Contudo, Moreira e Ferreira (2013) destacam que é preciso considerar o contexto em que Shulman e colaboradores trabalharam nesses estudos para que se possa apreciar melhor suas contribuições e reavaliar os pontos que se mostraram inconsistentes, limitados ou excessivamente datados em suas análises. Shulman e colegas estavam inseridos em um contexto em que valia o aforismo: quem sabe faz, quem não sabe ensina. Shulman, ao final de seu artigo de 1986, responde a essa maneira de desvalorizar o saber profissional do professor afirmando: quem sabe faz; quem compreende ensina.

Para além das críticas, os trabalhos de Shulman desencadearam uma série de pesquisas e modelos teóricos cujo foco é investigar esse conhecimento que é exclusivo do professor em situações de ensino. Graeber e Tirosh (2008) nos apresentam algumas dessas abordagens teóricas decorrentes do PCK (FENNEMA; FRANKE, 1992; EVEN; TIROSH, 1995; AN; KULM; WU, 2004; BALL; BASS, 2003). Um desses modelos teóricos que foi bastante difundido (no Brasil, inclusive) é o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT[10]), de Deborah Ball e colaboradores. O MKT envolve os conhecimentos matemáticos necessários para que o professor possa exercer seu papel de ensinar matemática, tratando-se de uma teoria baseada na prática docente, a partir das demandas matemáticas para o ensino.

Ball, Thames e Phelps (2008), após projetos desenvolvidos com professores de matemática da Educação Básica, observaram relevantes demandas matemáticas da prática dos professores que lhes permitiram determinar os subdomínios e uma estruturação para o MKT. Os subdomínios determinados por Ball, Thames e Phelps (2008) são:

(i) Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK[11]), que é o conhecimento do conteúdo necessário, mas não exclusivo ao ensino. Reconhecer uma resposta incorreta é uma

[10] Utilizaremos a sigla MKT em referência ao original *Mathematical Knowledge for Teaching*.
[11] Utilizaremos a sigla CCK em referência ao original *Common Content Knowledge*.

tarefa do professor, mas um engenheiro, por exemplo, também é capaz de reconhecer quando o resultado de uma multiplicação de frações está incorreto;

(ii) Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK[12]), que é o conhecimento matemático não tipicamente necessário para outros fins além do ensino. Avaliar rapidamente a natureza de um erro, especialmente um erro não familiar, é um exemplo do Conhecimento Especializado do Conteúdo;

(iii) Conhecimento de Conteúdo e dos Estudantes (KCS[13]), que é o conhecimento que combina saber sobre os estudantes e saber sobre matemática. Os professores devem antecipar a forma como seus alunos podem pensar e as dificuldades que eles podem encontrar. Ter familiaridade com os erros comuns e saber a razão disso fazem parte desse tipo de conhecimento;

(iv) Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT[14]), que é o conhecimento que combina saber sobre o ensino e saber sobre matemática. Professores precisam estabelecer uma sequência específica do conteúdo para o ensino, escolher que exemplos são mais pertinentes para introduzir um conceito e que exemplos levam os alunos a se aprofundarem no conteúdo.

Esses subdomínios descritos por Ball, Thames e Phelps (2008) relacionam-se com a teoria de Shulman da seguinte maneira: o Conhecimento Específico do Conteúdo, de Shulman (1986), foi subdividido em dois: o Conhecimento Comum do Conteúdo e o Conhecimento Especializado do Conteúdo; o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, de Shulman (1986), também foi subdividido em dois: o Conhecimento de Conteúdo e dos Estudantes e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Além disso, Ball, Thames e Phelps (2008) consideram ainda dois outros subdomínios cuja "alocação" foi considerada provisória dentro da estrutura apresentada, pois demandam estudos mais aprofundados. São eles:

(v) Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC[15]), inicialmente um subdomínio do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Trata-se do conhecimento sobre a maneira como a matemática está organizada ao longo do currículo;

(vi) Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK[16]), um dos subdomínios que compõem o Conhecimento Específico do Conteúdo. Para Ball, Thames e Phelps (2008),

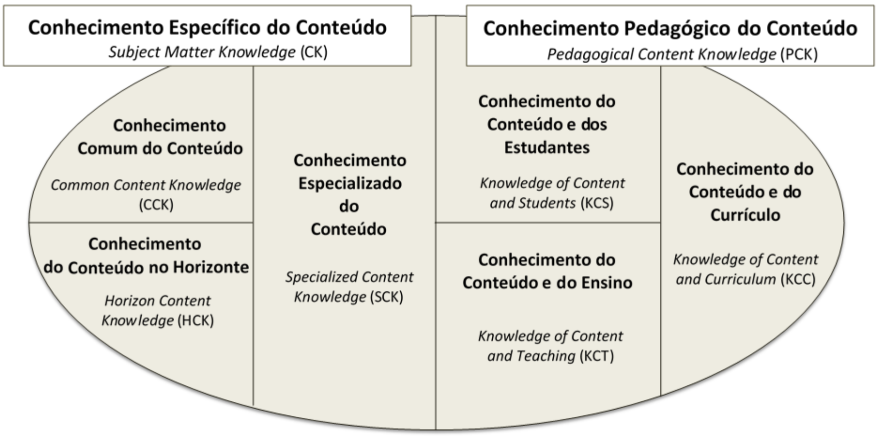
---

[12] Utilizaremos a sigla SCK em referência ao original *Specialized Content Knowledge*.
[13] Utilizaremos a sigla KCS em referência ao original *Knowledge of Content and Students*.
[14] Utilizaremos a sigla KCT em referência ao original *Knowledge of Content and Teaching*.
[15] Utilizaremos a sigla KCC em referência ao original *Knowledge of Content and Curriculum*.
[16] Utilizaremos a sigla HCK em referência ao original *Horizon Content Knowledge*.

este é um conhecimento matemático que permite ao professor ter uma consciência de como temas matemáticos estão relacionados ao longo da matemática incluída no currículo. Por exemplo, professores de séries iniciais precisam saber como a matemática que ensinam está relacionada com o que os alunos irão aprender em anos posteriores. Por isso o termo horizonte, uma compreensão longitudinal do conteúdo que está trabalhando.

Na Figura 1, apresentamos os subdomínios do MKT propostos pelos autores:

Figura 1: Subdomínios do Conhecimento Matemático para o Ensino



Fonte: adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008)

Com relação às críticas feitas aos trabalhos de Shulman, consideramos que as pesquisas de Ball e colaboradores sobre o MKT avançaram em alguns aspectos. Os subdomínios propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), por exemplo, esmiúçam as categorias do Conhecimento Específico do Conteúdo e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, de Shulman, o que permite caracterizá-las com mais detalhes, mesmo que não haja, também, uma delimitação tão clara entre essas categorias. Outro aspecto que destacamos refere-se ao fato do MKT ser uma teoria baseada na prática e, portanto, menos prescritiva e mais voltada para aquilo que o professor efetivamente faz em sua prática.

Entendemos que os subdomínios propostos por Ball não visam identificar a que conhecimento o professor recorre para lidar em uma situação específica, como se tivesse um quadro mental em que "selecionasse" um item desse quadro para solucionar tal situação. A nossa compreensão sobre o MKT é que essa abordagem busca olhar para a ação e retirar dela que conhecimentos foram demandados na prática e que permitem ao professor exercer seu papel de ensinar. A ação docente é complexa e envolve diversos aspectos agindo simultaneamente e, por isso, não há como distinguir tão claramente as fronteiras de cada subdomínio. Para nós, o quadro teórico do MKT é muito mais uma referência para compreender e pesquisar sobre a ação docente e pensar num modelo mais próximo do que consideramos adequado para a formação de professores, do que uma prescrição do que o professor precisa saber para ensinar.

Retomando aspectos do MKT, dentre os subdomínios de Ball e colaboradores, neste trabalho, focaremos o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), pois entendemos que este seja o conhecimento que melhor caracteriza o papel do ensino das estruturas algébricas em cursos de formação de professores. Vamos justificar essa afirmação nos próximos parágrafos, nos quais apresentamos a forma como estamos entendendo o HCK, tal como definido por Jakobsen et al. (2012) e Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013).

Do que foi proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), alguns autores têm se debruçado a estudar o HCK mais profundamente. Jakobsen et al. (2012) e Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) propuseram, a partir de um conjunto de investigações sobre a prática, a seguinte definição:

> Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) é uma orientação para e uma familiaridade com a disciplina (ou disciplinas) que contribuem para o ensino da disciplina escolar à disposição, proporcionando aos professores um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo. HCK inclui conhecimento explícito de formas de e ferramentas para aprender na disciplina, os tipos de conhecimento e suas justificativas, e de onde as ideias vêm e como a “verdade” ou validade é estabelecida. HCK também inclui a consciência de orientações e valores do núcleo disciplinar e das principais estruturas da disciplina. HCK permite aos professores “ouvir” os alunos, para fazer julgamentos sobre a importância das ideias ou perguntas específicas, e para tratar a disciplina com integridade, todos os recursos para equilibrar a tarefa fundamental de conectar os alunos a um campo vasto e altamente desenvolvido. (JAKOBSEN et al., 2012, p. 4642, tradução nossa).

Com relação à expressão “familiaridade com”, os autores afirmam que ter familiaridade com conteúdo matemático avançado parece ser uma forma adequada para caracterizar como o conhecimento pode ser compreendido pelo estudante.

Com a expressão “orientação para”, alertam para a possibilidade de se pensar que a formação matemática avançada proporcionaria ao professor uma orientação valiosa para pensar sobre o conteúdo a ser ensinado e aprendido nas escolas, mas eles querem afirmar o inverso disso. Para Jakobsen et al. (2012), a orientação é para envolver o próprio conteúdo avançado em termos de sua relevância para o ensino e a aprendizagem. Quer dizer, a matemática avançada para docentes, segundo os autores, tem de ser demonstrativamente relacionada com o trabalho de ensino na escola.

Sobre o trecho “situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo”, os autores querem destacar as conexões entre a matemática da escola e a matemática acadêmica e não sobre como o conteúdo a ser ensinado está situado dentro do currículo escolar.

Nesse ponto, os autores explicitam a diferença entre o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, uma vez que este, sim, trata muito mais sobre uma compreensão da matemática escolar e abordagens específicas para a organização do currículo escolar (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013). Para os autores, a forma como Ball e colaboradores descreveram o HCK como sendo “uma consciência de como temas matemáticos estão relacionados ao longo da matemática incluída no currículo" (BALL, THAMES, PHELS, 2008, p. 403, tradução nossa) causa confusão e uma má interpretação para o HCK. Para Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), o HCK não se refere ao conteúdo a ser ensinado e nem ao desenvolvimento curricular desse conteúdo, mas, sim, de um conhecimento de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e ligado ao território disciplinar mais amplo.

Por exemplo, no currículo de matemática para a Educação Básica, não consta o ensino da estrutura algébrica corpo. Contudo, se o professor tem noção dessa estrutura e consegue olhar para os números racionais como elementos de um corpo ordenado, algumas questões que frequentemente surgem no ensino desses números na forma fracionária podem ser justificadas, tais como: “a soma de frações é uma fração?”, “como justificar o algoritmo da adição de frações?”, “por que não podemos dividir por zero?”. Quer dizer, a estrutura de corpo não é o conteúdo a ser ensinado naquele momento e nem está presente no currículo, mas ter familiaridade com esta, pode proporcionar aos professores um sentido de como o conteúdo que está sendo trabalhado está situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo. Não estamos afirmando, com isso, que sem o conhecimento da estrutura de corpo o professor não conseguiria justificar tais questões. Estamos sugerindo que esta possa ser uma alternativa ao trabalho do professor.

Desse modo, entendemos que a caracterização do HCK feita por Jakobsen et al. (2012) e Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) vão ao encontro de nossas intenções nessa tese, uma vez que pretendemos envolver a estrutura algébrica corpo em termos de sua relevância para o ensino dos números racionais na Educação Básica, e não contribuir para que se cristalize uma compreensão de que a formação disciplinar avançada proporcionaria ao professor uma orientação valiosa para pensar sobre o conteúdo a ser ensinado e aprendido nas escolas.

Passamos agora examinar questões a respeito das diferentes matemáticas (em particular, a Acadêmica e a Escolar) e seus papéis na formação dos professores. Tal discussão é central em nossa pesquisa.

1.1.2 As matemáticas na formação do professor

Concordamos com Fiorentini e Lorenzato (2009) quando estabelecem uma diferença entre a atividade do matemático e do educador matemático. Para esses autores,

> [...] o *matemático*, por exemplo, tende a conceber a matemática como um fim em si mesma, e, quando requerido a atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação *para* a matemática, priorizando os conteúdos formais e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em matemática. (p. 3, grifo dos autores).

Enquanto

> [...] o *educador matemático*, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social das crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação *pela* matemática. Ou seja, o educador matemático, na relação entre educação e matemática, tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas. (p. 3-4, grifo dos autores).

Essa distinção é relevante, pois justifica, de certo modo, a presente pesquisa e explicita a necessidade de outras pesquisas neste sentido. Nós, enquanto educadores matemáticos, estamos interessados em uma formação matemática que permita ao licenciando exercer sua futura atividade profissional como professor da Educação Básica, que é o objetivo primeiro dos cursos de Licenciatura. Como afirmam Fiorentini e Oliveira (2013), a Licenciatura, assim como a odontologia, a engenharia etc., também é um curso profissionalizante. Portanto, antes de pensarmos em formação matemática *sólida,* que prioriza uma educação *para* a matemática e que busca formar novos pesquisadores em matemática, pretendemos, nesta tese, pôr em debate uma formação matemática que ofereça maneiras de lidar com as demandas da prática docente e que priorize os valores da Matemática Escolar em suas múltiplas possibilidades.

Como já afirmamos na introdução deste trabalho, assumimos a diferenciação feita por Moreira e David (2010) entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. A Matemática Acadêmica é tida como aquele sistema lógico-formal-dedutivo que os matemáticos profissionais produzem. A Matemática Escolar é entendida aqui nem como uma matemática científica didatizada, nem como uma construção autônoma da escola, mas sim como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2010). A Matemática Escolar pensada dessa maneira valoriza os significados produzidos e mobilizados pelos professores naquele contexto da sala de aula da Educação Básica, considerando toda a heterogeneidade dos modos de pensar dos estudantes. Porém, essa

Matemática Escolar não é advinda somente da prática, é, também, produto de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Essa concepção de Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2003, 2005, 2010) desenvolve-se em contraposição a duas ideias: a de transposição didática, de Chevallard (1991) e a de matemática escolar como uma construção fundamentalmente endógena à escola, de Chervel (1990).

Segundo Chevallard (1991),

> um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado *transposição didática*. (p. 45, grifos do autor. Tradução nossa).

Não vamos nos aprofundar na noção de transposição didática de Chevallard, pois esse não é nosso objetivo. Contudo, faz-se necessário apontar em que medida a abordagem proposta por Moreira e David se distancia da de Chevallard. Segundo Moreira e David (2003), o problema é que Chevallard toma o saber científico "como a referência última que permitiria à comunidade dos matemáticos desautorizar o objeto de ensino que não seja considerado 'suficientemente próximo ao saber sábio'" (p. 61). Saber sábio significa, nesse contexto, saber científico. Desse modo, esse processo de adaptação, segundo Moreira e David (2010), estaria sujeito a "uma 'vigilância epistemológica' que não permitiria 'desvios' em relação ao conhecimento matemático científico" (p. 18-19).

Já Chervel assume a posição contrária àquela que considera as disciplinas escolares como mera vulgarização das ciências de referência e que toma a Pedagogia como um "lubrificante" do processo de vulgarização (MOREIRA, DAVID, 2003, 2010). Para Chervel (1990), as disciplinas escolares são "independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer, à sua própria história" (CHERVEL, 1990, p.180).

Ao mesmo tempo em que a perspectiva de Chervel abre a possibilidade para a concepção da Matemática Escolar como uma construção própria da escola, parece, por outro lado, fechar as portas a uma multiplicidade de elementos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do ambiente escolar (MOREIRA; DAVID, 2003, 2010).

Posto desse modo, para a caracterização de Matemática Escolar proposta por Moreira e David, nenhuma das duas concepções – de Chevallard e de Chervel – é satisfatória. Os autores assumem, portanto, a ideia de Matemática Escolar como aquela que não se refere tão somente às práticas efetivas que ocorrem no interior da escola e nem se reduza a uma adaptação da Matemática Acadêmica. Relembrando a citação da introdução, a Matemática Escolar refere-se ao conjunto de saberes:

> [...] "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20-21).

Tal concepção alinha-se com as noções do PCK, de Shulman, e do MKT, de Ball e colaboradores, no sentido em que a Matemática Escolar, mesmo que constituída a partir de disputas no plano das prescrições curriculares, é resultado do processo pelo qual a prática escolar, por meio de sua lógica e seus condicionantes, opera sobre tais prescrições. "Esse processo envolve elementos de produção, retradução, seleção, adaptação e também de *carência* de saberes" (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 52, grifo dos autores).

Moreira e David (2010) nos dão exemplos dessa diferenciação entre as duas matemáticas – apresentamos essas duas, mas os autores também consideram outras matemáticas, como a do cotidiano (DAVID; MOREIRA; TOMAZ, 2013). Um desses exemplos refere-se ao papel da demonstração. Na Matemática Acadêmica, segundo Moreira e David (2010), o papel central das demonstrações "refere-se à inscrição de um determinado resultado entre os conceitos aceitos como verdadeiros pela comunidade científica" (p. 28), enquanto que, na Matemática Escolar, esse papel é essencialmente pedagógico, pois visa contribuir para a construção de uma compreensão da disciplina em que os resultados não são dados arbitrariamente, mas, sim, como significados construídos e legitimados socialmente. Outro propósito é desenvolver a capacidade de argumentação, que busca refinar não apenas os próprios argumentos, mas, também, a linguagem a ser submetida a críticas de outros alunos.

No decorrer deste trabalho, discutiremos outros exemplos dessa diferenciação apresentada por Moreira e David (2010) e assumida por nós. Contudo, cabe ressaltar que a distinção entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar reside, essencialmente, em seus diferentes propósitos, nos rigores exigidos e, também, nos valores específicos de cada uma.

Viola dos Santos e Lins (2016) propõem uma discussão acerca de cinco modos de pensar a(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática. Para tanto, os autores levaram em conta trabalhos que: i) argumentam em favor da existência de uma única matemática; ii) argumentam que existem diferentes matemáticas. Os cinco modos apresentados por Viola dos Santos e Lins (2016) foram nomeados como: 1) A Matemática e seus níveis de sofisticação; 2) Estrutura Cognitiva da Matemática; 3) Matemática Acadêmica e Matemática Escolar; 4) Matemática Escolar como um tipo Especial da Matemática Acadêmica; 5) Matemática do Matemático e Matemática do Professor de Matemática.

No artigo, os autores evidenciam que há pesquisas que se alinham com a visão de Moreira e David quando diferenciam as matemáticas; contudo, há, também, aquelas que não compartilham da mesma compreensão e veem a matemática como única. Nossa compreensão é que estabelecer essa distinção entre as matemáticas seja essencial, pois nos permite um novo olhar sobre o debate e traz para o cerne da discussão questões como: que matemática deve ser priorizada nos cursos de Licenciatura? É relevante ao professor em formação inicial ter contato com disciplinas que contemplem aspectos da Matemática Acadêmica? As discussões acerca da Matemática Escolar, de maneira mais detalhada, são mais urgentes para se abordar em cursos de formação de professores?

Como afirmam Viola dos Santos e Lins (2016), é preciso mais pesquisas a respeito da formação matemática de professores de matemática e, nelas, "é crucial que haja uma discussão mais conceitual e menos política/corporativista envolvendo educadores matemáticos e matemáticos, discutindo em conjunto as disciplinas da Licenciatura e construindo outras possibilidades" (p. 369-370). Para além das posições políticas que se instauram nas escolhas curriculares dos cursos de formação de professores, é necessário desenvolver pesquisas que nos permitam tirar conclusões sobre a pertinência, ou não, de se olhar para aspectos de um conceito específico (no nosso caso, os números racionais) da matemática trabalhada na escola do ponto de vista da Matemática Acadêmica na formação do professor. É nesse contexto que a presente pesquisa se situa.

Sobre o papel da Matemática Acadêmica nos cursos de formação de professores, vamos apontar, agora, algumas concepções a esse respeito. Foram essas concepções que, como dissemos na introdução deste trabalho, nos inspiraram nos primeiros estudos sobre esse tema de pesquisa.

Primeiramente, vamos discutir as perspectivas de Romulo Lins e de Dario Fiorentini, pois são pesquisadores brasileiros reconhecidos e que discutem amplamente esse tema em seus trabalhos e orientações. O primeiro, mais crítico no sentido de ser desfavorável em relação à presença dessas disciplinas (Matemática Acadêmica) na formação do professor; o segundo, mais no sentido de rever o modo como são trabalhadas, não negando sua importância. Em seguida, apresentamos uma terceira abordagem, a de Wasserman (2014, 2016), que argumenta em favor da presença de tais disciplinas na Licenciatura em Matemática e busca articulá-las com o ensino da matemática na escola. Deixamos para apresentar a visão de Moreira e David (2010) na seção 1.3, quando esclareceremos a posição assumida para esta tese.

Lins e Fiorentini compuseram uma mesa redonda no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, em 2004, para discutir as disciplinas de conteúdo matemático nos cursos de Licenciatura em Matemática. A partir dessa mesa redonda, foram produzidos os artigos Lins (2005) e Fiorentini (2005).

Lins (2005) rebate um argumento bastante difundido, inclusive na Educação Matemática, de que as disciplinas de conteúdo matemático – leia Matemática Acadêmica – servem para "prover os *verdadeiros* fundamentos daquilo que se vai ensinar" (p. 119, grifo do autor). Para sustentar sua resposta, Lins (2005) considera o exemplo do matemático suíço Euler (1707-1783), que resolveu difíceis problemas matemáticos de diversas áreas. Contudo,

> Euler não sabia nada de análise, não sabia nada de estruturas, nem algébricas nem outras (grupo, anel, corpo, ordem, topologia…), não sabia nada de representação geométrica ou como pares ordenados de números complexos, nem de cortes nem de nada disso, inclusive geometrias não-euclidianas, simplesmente porque estas coisas não existiam em sua época. Não sabia praticamente nada do que o matemático de hoje diz que é Matemática mesmo, com exceção de coisas da Teoria Não-Analítica dos Números. Mas, como ele resolvia problemas que interessariam ao matemático de hoje, e como fazia afirmações que o matemático de hoje faria, diz-se que ele tratava de Matemática. Mais importante, eu penso que é difícil imaginar alguém que conhece um pouco da história e trabalho de Euler, que diria que ele não seria um bom professor dos ensinos fundamental (5a a 8a) e médio – embora possivelmente, já que em sua época não existiam teorias cognitivas como as de hoje, nem teorias didáticas como as de hoje, ele fosse um professor bastante "tradicional". (p. 5).

O ponto levantado por Lins (2005) é o de que muitos matemáticos, não apenas Euler, tinham vasto conhecimento matemático e criaram muitas coisas (dentro e fora da matemática) sem ter contato com essa estrutura lógico-formal da matemática (acadêmica) contemporânea. Portanto, afirmar que os futuros professores devem ter as estruturas algébricas em sua formação inicial porque elas provêm os verdadeiros fundamentos seria o mesmo que afirmar que matemáticos como Euler e Newton não os tinham.

No que se refere à presença de disciplinas da Matemática Acadêmica nos cursos de Licenciatura, Lins, em entrevista concedida para a tese de Viola dos Santos (2012), afirma que, certamente, não são necessárias nem suficientes. Não as considerar suficientes parece indicar que haja outros elementos envolvidos na prática docente para além do conhecimento do conteúdo. Não as considerar necessárias sugere que não haja relações entre essas disciplinas e a prática docente.

Para Lins, o professor precisa saber *mais* matemática, mas que esse *mais* não significa conteúdo e sim uma maior *lucidez* sobre a matemática e isso inclui compreender que produzimos significados diferentes para o que *parece ser* a mesma coisa, mesmo dentro da Matemática Acadêmica (LINS, 2005).

Segundo Fiorentini (2005), não interessa à formação do professor uma abordagem enciclopédica ou técnico-formal da Matemática, mas sim uma abordagem compreensiva, que abarca suas múltiplas dimensões. Fiorentini e Oliveira (2013) deixam mais claras as características dessa abordagem compreensiva. Segundo eles, a matemática do professor difere epistemologicamente e metodologicamente da matemática do matemático acadêmico, apesar de haver aspectos e elementos em comum. O professor de matemática, de acordo com Fiorentini e Oliveira (2013), precisa conhecer a matemática com *profundidade* e *diversidade*: com *profundidade*, os autores querem dizer que não é suficiente ao professor dominar procedimentos matemáticos que os permitam realizar uma demonstração ou resolver um exercício. Para a docência, o professor precisa, além de dominar, saber justificá-los e conhecer outros procedimentos histórico-culturalmente produzidos, além de conhecer os conceitos e ideias atuais e sua evolução histórica (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013); por *diversidade*, os autores entendem que a compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, vai além de aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. Compreender a matemática "implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana" (p. 925).

Com relação à presença da Matemática Acadêmica nos cursos de Licenciatura, os autores afirmam que os conteúdos da matemática superior presentes em disciplinas de formação matemática da Licenciatura são importantes, pois fornecem aos futuros professores uma visão mais ampla acerca da matemática como campo de conhecimento. Contudo, afirmam, "é preciso adotarmos posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico" (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 935).

Já Wasserman (2016) pondera que a presença de disciplinas como Álgebra Abstrata ou Análise Real nos programas de formação de professores não é sem fundamento lógico, uma vez que grande parte desse conteúdo parece estar ligado e ser potencialmente relevante ao ensino da matemática escolar. Nesse sentido, o autor investiga como a Álgebra Abstrata pode impactar positivamente nesse ensino. Para Wasserman (2016), embora tópicos em Álgebra Abstrata sejam facilmente relacionados a muitos aspectos da matemática da escola (por exemplo, os números reais com as operações de adição e multiplicação formam um corpo), seu trabalho visa investigar não apenas conexões matemáticas possíveis, mas, especialmente, as conexões plausíveis e favoráveis ao ensino da álgebra.

O autor define "horizonte da matemática" como sendo a matemática que não está localizada no momento atual do que está sendo ensinado, mas dentro de uma paisagem maior da matemática (no sentido de Felix Klein) que inclui ideias matemáticas que estão "por trás" e "além" do conteúdo a ser ensinado. Nesse sentido, a Álgebra Abstrata faz parte do "horizonte da matemática" como um subconjunto do horizonte que está "além" do âmbito da matemática escolar.

Contudo, Wasserman (2016) alerta que cursar a disciplina de Álgebra Abstrata pode aumentar o conhecimento de matemática avançada do professor, mas isso não implica, necessariamente, em aumentar seu HCK. Por esse motivo, o objetivo em seus trabalhos (WASSERMAN, 2014, 2016) é o de discutir, por exemplo, aspectos das estruturas de grupo e de corpo, de maneira que possam, segundo ele, transformar a percepção que os professores têm de conteúdos que ensinam.

O autor reitera que o conhecimento de conteúdo mais avançado não significa que, de alguma forma, os professores irão ensinar aos estudantes essa matemática mais avançada. Esse conhecimento avançado tem, para Wasserman (2016), um efeito potencialmente transformador no entendimento da matemática escolar que, embora não seja explicitamente discutido com os estudantes, pode alterar a abordagem instrucional para o ensino de ideias mais elementares. Alguns exemplos desse efeito transformador proposto por Wasserman serão debatidos no capítulo 2.

Todas as perspectivas trazidas aqui enriquecem a discussão, justamente pelas suas diferenças. Acreditamos que sejam essas diferenças que nos permitem avançar, do ponto de vista teórico, na direção de ampliar o debate acerca da formação matemática do professor. Como afirmamos na introdução, a dúvida por escolher um caminho – o de negar a necessidade das estruturas algébricas na formação docente – ou outro – o de assumir que o ensino das estruturas algébricas na formação do professor pode contribuir para a formação docente – parece nos colocar em uma relação dialética, mas que tem em comum o fato de que não aceitamos o primeiro caminho, isto é, ambos os caminhos nos levam a crer que o ensino das estruturas algébricas da forma como tradicionalmente é feito em cursos de formação de professores de Matemática precisa ser problematizado.

Continuando nossa metáfora dos caminhos e da "lente bifocal" escolhida, para sustentar as lentes em nossas faces precisamos de uma armação, uma sustentação que, juntamente com as lentes, compõe os óculos e nos permite enxergar o caminho escolhido com mais clareza. Em nossa tese, podemos dizer que a teoria dos perfis conceituais tem, também, esse papel de sustentação, pois é a nossa base epistemológica. Na seção que segue, apresentamos esse referencial teórico.

1.2 Perfil conceitual

Inicialmente, destacamos que estamos assumindo, nesta pesquisa, uma perspectiva vygotskyana de que a formação do indivíduo acontece nas relações sociais. O desenvolvimento intelectual do indivíduo se dá na internalização de significados produzidos socialmente, a partir de suas

> [...] relações com outros, através da linguagem, e de transformações do funcionamento psicológico constituídas pelas interações face-a-face e por relações sociais mais amplas (que configuram lugares sociais, formas de inserção em esferas da cultura, papéis a serem assumidos etc.). (GOES, 2000a, p. 121).

Nessa perspectiva sócio-interacionista, em que homem e ambiente se modificam, a construção do conhecimento, de acordo com Vygotsky, nunca é realizada apenas com recursos individuais, "ela sempre depende da mediação social, da apropriação de significados num sistema simbólico" (MORTIMER, 2000, p.170).

Podemos assumir, nesse sentido, que escola e universidade (entre outros) são lugares sociais fortemente relacionados com o desenvolvimento do sujeito. Nas salas de aula, professor e estudantes interagem constantemente, constituindo um ambiente heterogêneo, rico em modos de pensar e em trocas de experiências, onde um (o professor) tem uma intenção de que os outros (estudantes) internalizem significados socialmente produzidos, para além daqueles já internalizados em interações sociais anteriores.

A fim de nos aprofundarmos nessa discussão, apresentamos outra perspectiva teórica que fundamentará esta tese: os perfis conceituais. Vamos, inicialmente, apresentar a origem e alguns termos fundamentais da abordagem dos perfis conceituais (*conceito* e *conceitualização*, *sentido* e *significado*, *internalização*)[17] para, em seguida, discutir a abordagem propriamente dita.

Nos anos 1990, Mortimer (1994, 1995, 1996) introduziu os perfis conceituais como uma maneira de modelar a heterogeneidade de formas de falar e modos pensar presentes

[17] Enquanto estivermos detalhando o que entendemos, segundo o referencial teórico, por cada um desses termos, daremos destaque a eles utilizando o recurso itálico. Após este momento de definições, deixaremos de utilizar tal recurso.

em salas de aula de ciências. Tal abordagem teve inspirações no Perfil Epistemológico de Bachelard, mas, a fim de investigar o ensino e a aprendizagem em ciências, outros elementos foram adicionados às ideias de Bachelard, tais como a caracterização dos perfis conceituais considerando, de modo equilibrado, aspectos ontológicos e epistemológicos, e não apenas epistemológicos, como na ideia original. Contudo, nos anos posteriores, as bases filosóficas da teoria dos perfis conceituais afastaram-se ainda mais das de Bachelard (MORTIMER et al., 2014a). Pode-se dizer que o que resta de semelhança entre os perfis conceituais e o Perfil Epistemológico são as ideias de "perfil" e de "zonas", que vão aparecer com mais detalhes nesse texto.

Dentro da abordagem dos perfis conceituais, é essencial apresentarmos o que é um *conceito*. Mortimer et al. (2014a) destacam dois pontos de vista sobre um *conceito*: 1) em uma abordagem tradicional, os *conceitos* são vistos como modelos mentais dos aprendizes de objetos ou eventos. Nesses termos, *conceitos* são tomados, muitas vezes, como estruturas mentais estáveis que são possuídos por indivíduos e que são lidas em voz alta quando estes os utilizam. Nesse caso, a mudança ou evolução conceitual é entendida como um processo por meio do qual esses esquemas individuais sofrem algum tipo de transformação. Abordagens cognitivistas baseadas em Piaget enquadram-se nesse ponto de vista, tal como a teoria APOS[18] de Ed Dubinsky; 2) na outra abordagem, oposta à primeira, os *conceitos* existem apenas como parte de uma linguagem natural ou de sistemas de conhecimento, como a ciência. Assim, *conceitos* são entidades ou estruturas linguísticas externas e existem em textos e línguas, como construções sociais. Esta é a perspectiva assumida por Mortimer et al. (2014a).

Na teoria dos perfis conceituais, os *conceitos* são relativamente estáveis e existem no mundo do conhecimento objetivo socialmente construído. Por exemplo, os números racionais são um *conceito* socialmente construído que admite diferentes modos de pensá-lo em contextos variados.

Apesar de se distanciarem da ideia de que os *conceitos* são entidades mentais estáveis (primeiro ponto de vista supracitado), Mortimer et al. (2014a) consideram que na mente de um indivíduo se dá um processo dinâmico chamando *conceitualização*. Qual a diferença de *conceito* e *conceitualização*?

Enquanto os *conceitos* são relativamente estáveis e existem no mundo do conhecimento objetivo, construído socialmente e organizado na forma de textos e linguagens

[18] A teoria APOS (*Action – Process – Objects – Schemas*) é uma teoria cognitivista que busca compreender como se dá a construção de conceitos matemáticos por um indivíduo que está começando a entendê-los.

sociais da ciência e da ciência escolar, a *conceitualização* é um processo emergente, sempre produzido na interação socialmente situada entre um indivíduo e alguma experiência externa, sendo mais dinâmica e existente no mundo do conhecimento subjetivo (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009). *Conceitualização* para esses autores é o que Vygotsky chamou de pensamento conceitual. Trata-se, portanto, de um processo que surge em cada interação com a experiência e que nos permite pensar por meio de conceitos e nos comunicar uns com os outros efetivamente utilizando os signos da linguagem (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009).

Para os autores, a impressão de que "possuímos" *conceitos* em nossa mente vem da tendência do pensamento conceitual, quando plenamente desenvolvido, operar de maneira similar diante de experiências que percebemos ser semelhantes. Tal fato é um indício de quão poderosos são os processos de socialização (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al., 2014a).

A base dessa argumentação dos autores é lei genética geral do desenvolvimento cultural de Vygotsky, segundo a qual

> Qualquer função no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos. Primeiro, ela aparece no plano social e, depois, no plano psicológico. Primeiro, aparece entre as pessoas como uma categoria interpsicológica, e depois dentro da criança como uma categoria intrapsicológica. (...) Não é necessário dizer que a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. (VYGOTSKY, 1981 apud CAMPOS; FRANCISCHINI, 2003, p. 120).

Ainda sobre a permanência no processo de *conceitualização*, outra ideia de Vygotsky que embasa esse aspecto é a distinção entre *sentido* e *significado*. Como afirmam Mortimer et al. (2014a), para Vygotsky, o *sentido* de uma palavra é tido como o agregado de todos os fatos psicológicos que surgem em nossa consciência em consequência da palavra. *Sentido* foi tratado por ele como uma formação dinâmica, fluida e complexa, com zonas que variam em sua estabilidade. Enquanto *sentido* é, para Vygotsky, dependente do contexto, o *significado* é muito mais estável e repetível. *Significado* oferece, assim, a possibilidade de intersubjetividade, ou seja, uma situação em que duas ou mais pessoas podem compartilhar o significado de uma palavra, embora possam variar nos *sentidos* atribuídos a ele.

Assim, "aprender um conceito é aprender seu significado, generalizar, passar de sentidos pessoais para significados socialmente aceitos" (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009, p. 4). Já a produção de *sentido* é um processo inteiramente pessoal, em que cada indivíduo produz *sentidos* diferentes para uma mesma palavra e o mesmo indivíduo pode também variar nos *sentidos* produzidos em contexto distintos. Contudo, afirmam os autores, "quando o pensamento conceitual está plenamente formado, a produção de sentido é restringida pelos significados socialmente aceitos" (p. 4).

Há, portanto, uma relação dialética entre *significado* (próprio dos conceitos) e *sentido* (produzido pela conceitualização), assim como entre *conceito* e *conceitualização*. A restrição da produção de *sentidos* pelos *significados* socialmente estabilizados permite-nos pensar conceitualmente de modo tão repetível que faz com que vejamos os *conceitos* como entidades mentais estáveis.

A abordagem dos perfis conceituais também se apropria da noção de *internalização* apresentada por Vygotsky. Segundo Vygotsky (2007, p. 56), *internalização* é a reconstrução interna de uma operação externa. Wertsch e Stone (1985) apontam duas premissas para a ideia de *internalização* de Vygotsky: (i) a *internalização* é relacionada a um processo social; e (ii) baseia-se na análise de mecanismos semióticos, especialmente a linguagem, que medeia o funcionamento individual e social. Dessa maneira, continuam os autores, o esquema geral de desenvolvimento começa com a atividade social externa e termina com a atividade individual interna (WERTSCH; STONE, 1985, p. 164). Nesse processo de *internalização*, é preciso destacar que nunca um *significado* socialmente produzido é inteiramente *internalizado* pelo sujeito e, do mesmo modo, nunca é inteiramente *externalizado* pelo sujeito.

Por fim, a *internalização* não deve ser entendida, simplesmente, como uma produção de alguma estrutura interna, localizada no interior do cérebro do indivíduo, que reproduz ou representa alguma estrutura externa, tal como sugere a *interiorização* de Piaget. As estruturas cerebrais não são tidas como condições suficientes, mas apenas necessárias para o surgimento de funções mentais, como a *conceitualização* (MORTIMER et al., 2014a).

Após apresentarmos esses termos essenciais para compreendermos a abordagem dos perfis conceituais, assumimos, na presente pesquisa, que: i) aprender é *internalizar* significados produzidos dentro de uma certa prática social; ii) as pessoas têm diferentes maneiras de *conceitualizar* o mundo. Como fora dito, a abordagem dos perfis conceituais visa modelar essa heterogeneidade de modos de pensar em lugares sociais complexos, como a sala de aula (seja de uma escola ou de uma universidade). Segundo Mortimer et al. (2014a):

> A abordagem dos perfis conceituais é fundamentada, precisamente, na ideia de que as pessoas apresentam diferentes formas de ver e conceitualizar o mundo e, portanto, diferentes modos de pensar são usados em diferentes contextos. A heterogeneidade do pensamento significa que, em qualquer cultura e em qualquer indivíduo, existem diferentes tipos de pensamento verbal, não só uma forma única, homogênea de pensamento (Tulviste, 1991). Perfis conceituais podem ser vistos como modelos da heterogeneidade dos

> modos de pensar acessíveis a pessoas com um *backgroud* cultural para usar em uma variedade de contextos ou domínios (Mortimer 1995, 2000). Modos de pensar são formas estáveis de conceitualizar um determinado tipo de experiência, relacionados a significados socialmente construídos que podem ser atribuídos a um determinado conceito. (MORTIMER et al., 2014a, p. 14-15, tradução nossa).

A variedade de significados atribuídos a um determinado conceito constitui o que chamamos de conceito polissêmico. Para Mortimer (1994), conceitos polissêmicos, como os de átomo e de massa, permitem a elaboração de perfis conceituais. Os perfis são compostos de diferentes *zonas*, "que correspondem a diferentes maneiras de ver, representar e significar o mundo" (COUTINHO; MORTIMER; EL-HANI, 2007, p. 116). As diferentes zonas de um perfil conceitual podem conviver simultaneamente num mesmo indivíduo e cada zona se mostra mais ou menos poderosa em diferentes contextos. Assim, tal indivíduo, inserido em uma dada cultura, tem à sua disposição uma diversidade de significados estabilizados socialmente e o peso que atribuirá para cada um deles vai depender das oportunidades tidas, durante sua formação, para empregá-los de modo fértil para dar conta dos desafios enfrentados ao longo de suas experiências. Como destaca Ribeiro (2013): i) um perfil conceitual é sempre individual, ou seja, pessoas diferentes podem exibir perfis distintos. Isso pode ser identificado pelas zonas que constituem esse perfil e pelo peso relativo de cada zona, que é atribuído pelo valor pragmático desse modo de pensar; ii) dentro de uma dada cultura, as zonas que constituem determinado perfil conceitual são sempre semelhantes, uma vez que aqueles modos de pensar são um produto daquela cultura. Dessa maneira, "embora os perfis conceituais sejam individuais, tais perfis, em mesma cultura, são sempre os mesmos" (RIBEIRO, 2013, p. 59).

Para esclarecer a questão das zonas e de seu valor pragmático, vamos apresentar o exemplo do conceito de calor, trazido por Mortimer, Scott e El-Hani (2009) e que nos é bastante elucidativo. Suponhamos um estudante que aprende o conceito científico de calor como um processo de transferência de energia entre sistemas a diferentes temperaturas. Porém, em sua vida cotidiana existem várias situações que reforçam outra zona do perfil conceitual de calor, como a visão comum de que calor é uma substância e de que é proporcional à temperatura, em que pode haver "calor quente" e "calor frio" (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009). Nesse caso, afirmam os autores, é muito provável que o estudante peça em uma loja, por exemplo, um "casaco quente de lã", uma vez que esse modo de falar é mais apropriado nesse contexto do que solicitar "um casaco feito com um bom isolante térmico que evite a transferência de energia térmica do corpo para o ambiente". Como o uso da linguagem tem estreita relação com o pensamento, cada vez que o estudante usa esse modo cotidiano de falar sobre o calor, "o valor pragmático da linguagem cotidiana preserva significados que estão em desacordo com a visão científica. Parece impossível, assim, que estes significados sejam substituídos por aqueles cientificamente aceitos” (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009).

Aqui, temos um ponto relevante da abordagem dos perfis conceituais: o fato de considerar a coexistência de modos de pensar em um mesmo indivíduo. Trata-se de uma distinção central entre os perfis conceituais e a ideia de mudança conceitual proposta por Posner et al. (1982). Segundo Mortimer (2000), alguns pressupostos psicológicos e filosóficos que embasam a ideia de mudança conceitual indicam, implícita ou explicitamente, que as ideias prévias dos estudantes “deverão ser abandonadas e/ou subsumidas no processo de ensino” (p. 65). Os perfis conceituais vão na contramão dessa visão de que os estudantes devem romper com suas concepções prévias ao aprender ciências, propondo a coexistência de diferentes modos de pensar como resultado da aprendizagem de ciências. Isso traz implicações relevantes para os processos de ensino e de aprendizagem, segundo a perspectiva dos perfis conceituais.

De acordo com Mortimer, Scott e El-Hani (2009), além da aquisição de novas zonas de um perfil conceitual é “objetivo crucial do ensino e da aprendizagem a promoção de uma visão clara, entre os estudantes, da demarcação entre os modos de pensar e significados, bem como entre seus contextos e aplicação” (p. 7). O ensino deve, então, promover aos estudantes uma tomada de consciência de que há conceitos com diferentes significados socialmente estabelecidos e que cada um desses significados é mais ou menos poderoso para resolver determinado problema, em determinados contextos. Do ponto de vista da aprendizagem, essa tomada de consciência de demarcação das zonas de um perfil conceitual de determinado conceito

> implica ser capaz de aplicar uma idéia científica nos contextos em que ela é apropriada, inclusive na vida cotidiana, e, ao mesmo tempo, preservar modos de pensar e falar distintos do científico nas situações em que se mostrem pragmaticamente apropriados. (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009, p. 8).

Retomando a situação hipotética do estudante comprando uma blusa de lã e supondo que seu professor, por coincidência, entrasse na mesma loja e o questionasse sobre a possível propriedade do casaco ser quente, se o estudante respondesse que, na verdade, o fato de a lã ser um isolante térmico que dificulta a transferência de calor do nosso corpo para o ambiente, poderíamos dizer que ele evidenciou uma consciência dos diferentes modos de pensar o conceito de calor e, ainda, uma consciência da demarcação desses modos de pensar. Este é o objetivo central do ensino, segundo a abordagem do perfil conceitual.

É exatamente nesse sentido que, para nós, os perfis conceituais se caracterizam como uma abordagem de ensino que pode contribuir para a formação de professores de Matemática, instrumentalizando os futuros professores para compreender a diversidade de significados que podem compor os conhecimentos de seus alunos (RIBEIRO, 2013) e, também, conscientizando-os de que aquela matemática acadêmica ensinada na Licenciatura é portadora de alguns modos de significar os conceitos que possivelmente serão trabalhados na Educação Básica, mas esses modos de significar não se encerram ali.

O fato de uma abordagem de ensino fundamentada nos perfis conceituais objetivar uma tomada de consciência dos diferentes significados de um conceito e da demarcação das diferentes zonas (isto é, da percepção de situações em que um significado é mais poderoso que outro para resolver um problema) nos permite clarear uma situação um tanto nebulosa quanto à forma que o ensino da Matemática Acadêmica muitas vezes é tratado na formação de professores, bem como nos dá inspiração sobre como ele poderia ser pensado de forma diferente.

Para falar sobre o ensino da Matemática Acadêmica nos cursos de formação de professores, vamos tomar o caso da estrutura algébrica corpo. O ensino dessa estrutura algébrica é, quase sempre, atrelado a conjuntos numéricos. Porém, nós entendemos que esse ensino não contempla muitos aspectos ligados ao tratamento escolar dos números. Moreira e David (2010) evidenciam diversos exemplos concretos de questões que se colocam para o professor em sua prática escolar sobre os conjuntos dos números naturais, dos racionais e dos reais que são ignorados no processo de formação. Segundo esses autores,

> [...] o traço comum e persistente é o abandono sistemático, no processo de formação, das questões que se referem à prática docente escolar, em favor de uma centralização do foco sobre questões que, muitas vezes, são relevantes apenas do ponto de vista da Matemática Acadêmica. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 100).

Entendemos que a valorização do ponto de vista da Matemática Acadêmica nos cursos de formação, tal como citam os autores, não favorece aos futuros professores a compreensão de que o significado de número racional como elemento de um corpo é apenas um dos significados possíveis. Pelo contrário, entendemos que essa valorização da Matemática Acadêmica pode levar os estudantes a tomarem a ideia de corpo dos números racionais como a "versão" mais avançada e resumida de números racionais, isto é, pensamos que os estudantes podem enxergar esse significado de números racionais como sendo uma evolução daquele significado construído na Educação Básica (como, por exemplo, o significado parte-todo). Estamos chamando a atenção aqui para o fato de que esse ensino pautado na Matemática Acadêmica, que valoriza aspectos formais, pode levar os estudantes a acreditarem na necessidade de romper com suas concepções prévias para aprender aquela "versão" científica.

Moreira e David (2010) explicitam essa ideia de como a Matemática Acadêmica junta diferentes significados em um único e, na contramão, como a Matemática Escolar exige o contrário. Para os autores, enquanto a Matemática Acadêmica

> [...] funde numa única expressão – a que sintetiza a essência abstrata do conceito, ou seja, aquilo que lhe dá *identidade* como objeto matemático científico – as várias formas de se pensar concretamente a ideia de número racional, a Matemática Escolar faz quase o caminho inverso. [...] para o ensino escolar é fundamental "decompor" a ideia de razão entre inteiros nas suas diversas formas de manifestação e explicitar suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que o processo de construção escolar da noção de número racional se desenvolve a partir da integração progressiva dos vários subconstrutos. (p. 67, grifo dos autores).

Neste trabalho, buscamos ir, justamente, no sentido oposto dessa intenção de fundir os diferentes significados já aprendidos pelos estudantes em um único significado formal. Assumimos a posição de Mortimer (2000) de que o processo de ensino não deve propor uma substituição de ideias prévias de estudantes por ideias científicas e entendemos que a construção de uma nova ideia possa, em algumas situações, "ocorrer independentemente das ideias prévias e não necessariamente como uma acomodação de estruturas conceituais já existentes" (MORTIMER, 2000, p. 68). Nesse mesmo sentido, Moreira e David (2010) afirmam que a introdução de um novo significado "aprofunda o processo de construção do conceito de número racional e, também, pode desencadear um processo paralelo de reelaboração e ampliação das ideias já estabelecidas no trabalho com outros subconstrutos" (p. 68).

Assumimos que as disciplinas de conteúdos matemáticos em um curso de formação de professores devem valorizar não apenas os significados da Matemática Acadêmica, mas também, e principalmente, os significados produzidos e validados no âmbito escolar, buscando sempre a tomada de consciência da demarcação desses significados. Por isso, a nossa proposta nesta tese é a de assumir os números racionais como o foco e não como um motivo para se ensinar a estrutura algébrica corpo, como muitas vezes é apresentado em livros de Álgebra. Em Domingues e Iezzi (2003), por exemplo, na seção 3.5 Corpos, logo após apresentar a definição da estrutura de corpo, é dado o "Exemplo 19: Os anéis numéricos, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, são corpos" (p. 223). Nesse e em outros trechos do livro, está explícito que o foco é o corpo e que os números racionais aparecem como exemplo. Acreditamos, conforme afirma Kluth (2007), que

> [...] não dá mais para colocar-se numa situação de construção do conhecimento tão vazia e sem chão, como o é quando as estruturas são tomadas como hipóteses, perdendo suas relações ôntico/ontológicas. Isto é levado a tal ponto no ensino, que a única pergunta que resta ao aprendiz é: *para que a Álgebra Abstrata? Onde eu uso isto?* E nós, professores de Matemática, sempre prontos a tornar nossa disciplina mais aceitável,

> recorremos à resposta direta: a aplicabilidade das estruturas. (p. 110, grifos do autor).

Tomar os números racionais como foco do ensino significa assumi-los como o conceito matemático a ser trabalhado na formação do professor e a estrutura algébrica corpo como *uma* zona do seu perfil conceitual. Com isso, acreditamos que estamos ampliando (e não substituindo) as ideias que os estudantes já têm desses números e articulando esse conhecimento da Álgebra Abstrata com a prática docente na escola, propiciando, assim, um desenvolvimento do HCK dos números racionais.

Tendo em vista essa intenção de tirar o foco da estrutura de corpo e colocar no conceito de número racional é que traçamos o objetivo específico de *organizar*, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar os números racionais. Dizemos organizar e não construir um perfil conceitual, pois não vamos nos comprometer a perfilar o conceito de número racional nesta pesquisa. Vamos explicar.

Para a construção de um perfil conceitual, segundo Mortimer, Scott e El-Hani (2009), devemos considerar uma diversidade de ideias e de contextos de produção de significados, abarcando, pelo menos, três dos quatro domínios genéticos apontados por Vygotsky em suas investigações sobre a relação entre pensamento, linguagem e formação de conceitos, a saber: os domínios sociocultural, ontogenético e microgenético. Esse é *um primeiro princípio metodológico* para perfilar um conceito: contemplar uma variedade de ideias e de contextos de produção de significados.

De modo sucinto, podemos dizer que o domínio sociocultural evolve examinar a "influência exercida pela história da cultura em que o sujeito está inserido, mais especificamente, pelas atividades de comunicação simbólica através das quais os humanos produzem coletivamente novos significados para o seu comportamento" (SEPULVEDA, MORTIMER, EL-HANI, 2013, p. 442). O domínio ontogenético "se refere à história do desenvolvimento cognitivo de um membro individual da espécie humana, envolvendo a operação simultânea e inter-relacionada de forças naturais e sociais de desenvolvimento das funções mentais" (SEPULVEDA, MORTIMER, EL-HANI, 2013, p. 442). Enquanto que, o domínio microgenético envolve a formação de um processo psicológico, nas ações dos sujeitos e nas relações interpessoais, dentro de um curto intervalo de tempo (GOES, 2000b).

Sepulveda, Mortimer, El-Hani (2013) apresentam-nos o percurso metodológico que os levou à construção de um perfil conceitual do conceito biológico de adaptação. Segundo esses autores, na metodologia de construção de perfis conceituais, a gênese de um conceito no domínio sociocultural tem sido investigada com base em ideias relacionadas ao conceito em questão encontradas na história das ciências, em revisões epistemológicas do conceito e, no contexto da produção do conhecimento escolar, na forma como esse conceito é abordado em livros didáticos.

Com relação ao domínio ontogenético, Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2013) afirmam que há uma diversidade de pesquisas a respeito de como conceitos centrais de diferentes campos das ciências naturais são aprendidos por estudantes de diferentes idades e de como essas ideias evoluem ao longo da história de sujeitos individuais. Essas pesquisas têm sido consideradas uma rica fonte de dados para o estudo da gênese do conceito nesse domínio genético. Já os dados empíricos produzidos em estudos originais sobre a construção de significados para o conceito num contexto escolar, por meio de entrevistas, questionários ou filmagens de interações discursivas em sala de aula, têm permitido, segundo os mesmos autores, estudar a gênese de conceitos em curtos períodos de tempo, abarcando o domínio microgenético.

A maneira de abarcar esses domínios pode variar entre as pesquisas. Por exemplo, para a constituição das zonas de um perfil conceitual de adaptação, Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007) se basearam em: dados extraídos de fontes secundárias sobre a história da biologia e de tratamentos epistemológicos do conceito; dados obtidos na literatura sobre concepções de alunos acerca dos conceitos de adaptação e seleção natural; dados empíricos coletados através de entrevistas e questionários com alunos dos ensinos médio e superior; e dados de sala de aula. Já Coutinho (2005), para construir o perfil do conceito de vida, além de dados extraídos de estudos epistemológicos e históricos e da literatura em concepções alternativas, realizou análise de livros didáticos.

Do ponto de vista das análises, como afirmam Mortimer et al. (2014a) e Mortimer, Scott e El-Hani (2009), o que se busca nesse conjunto de dados são os chamados compromissos epistemológicos e ontológicos. São esses compromissos que estabilizam formas de pensar e modos de falar sobre os conceitos e possibilitam individuar zonas de um perfil e perfilar um conceito.

O compromisso epistemológico refere-se à natureza do conceito, à sua gênese e à sua estabilização enquanto tal, seja na academia, seja na escola ou em outros contextos. O compromisso ontológico remete-se ao indivíduo membro de uma cultura e à maneira como este se apropria dos significados socialmente construídos. Mais recentemente, tem-se incluído[19] o compromisso axiológico entre os que envolvem a individuação das zonas. Esse compromisso

[19] Essa inclusão é melhor discutida em Mattos (2014).

está associado aos valores e fins atribuídos aos conceitos, trazendo para a construção de um perfil conceitual características valorativas-afetiva das relações entre o sujeito e o mundo como representado por ele mesmo (MATTOS, 2014).

O processo de individuar as zonas de um perfil conceitual não é uma mera categorização dos significados, apesar de incluir esse procedimento. Para Mortimer, Scott e El-Hani (2009), a necessidade de ir além da categorização fica evidente quando se considera que individuar as zonas se faz por meio dos compromissos epistemológicos e ontológicos (e, mais recentemente, os axiológicos) que estruturam diferentes modos de pensar e formas de falar sobre um conceito, e esses compromissos não são dados explicitamente em declarações. Nas palavras dos autores, "é preciso cavar mais fundo nas afirmações dos sujeitos de modo a interpretá-las em termos de um repertório de compromissos ontológicos e epistemológicos elaborados como hipóteses e constantemente reformulados pelo investigador, à luz de suas fontes de dados" (p. 6). Assim, individuar as zonas de um perfil conceitual é resultado de uma interpretação ativa do pesquisador, com base em hipóteses formuladas a partir do diálogo entre suas fontes de dados, de modo que lhe permita trabalhar tais compromissos. Aqui se encontra *um segundo princípio metodológico* importante para a construção de um perfil conceitual: o conjunto de dados deve ser examinado de maneira dialógica, e não sequencial, sugerindo que os conteúdos obtidos em cada domínio são, a todo tempo, articulados entre si (SEPULVEDA, 2010).

Sepulveda (2010) explicita essa característica dialógica. Enquanto as fontes referentes à história do desenvolvimento do conceito, as revisões epistemológicas a seu respeito e os dados da literatura sobre concepções alternativas dos estudantes fornecem um grande suporte para a formulação de hipóteses pelo pesquisador a respeito dos compromissos epistemológicos e ontológicos que estabilizam e estruturam as diferentes formas de pensar o conceito, tais hipóteses precisam ser constantemente reformuladas, à medida que são considerados os dados empíricos referentes a entrevistas, questionários e registros de interações discursivas em sala de aula (SEPULVEDA, 2010). Nesse sentido, o diálogo entre os dados permite testar o quanto as categorias formuladas a partir da literatura (seja ela referente à história e filosofia das ciências ou às concepções alternativas de estudantes) são, de fato, encontradas nos enunciados produzidos por pessoas de diferentes universos culturais, em situações reais de comunicação e interação social (SEPULVEDA, 2010).

Assim como as escolhas das fontes, o processo de construção de um perfil conceitual também depende diretamente do pesquisador. Como bem apontou Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007), o processo de constituição das zonas de perfis conceituais a partir dos conjuntos de dados escolhido tem seguido caminhos um pouco diferenciados em trabalhos distintos. Os autores percebem essa diferença quando comparam o trabalho de Amaral (2004), que se ocupou dos conceitos de entropia e espontaneidade, e o de Coutinho (2005), voltado para o conceito de vida. Para Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007), entre outras características apontadas, Amaral (2004) deu maior ênfase a aspectos epistemológicos do que a aspectos ontológicos na caracterização das zonas do perfil conceitual de espontaneidade e entropia, enquanto que Coutinho (2005) buscou considerar de modo equilibrado aspectos epistemológicos e ontológicos em sua constituição.

Discutimos essas diferenças (seja da escolha das fontes de dados, seja do processo de constituição das zonas) apenas para explicitar o papel ativo do pesquisador na construção de um determinado perfil conceitual.

Um terceiro princípio metodológico, segundo Sepulveda (2010), considera que, ao examinar dados relativos ao desenvolvimento do conceito em foco nos diferentes domínios genéticos, não se deve traçar paralelos entre os conteúdos característicos de cada um deles. Não se deve, por exemplo, traçar paralelos entre as ideias dos estudantes e aquelas encontradas na história da ciência, mas, sim, articulá-las, de modo a ter uma visão mais ampla da gênese dos conceitos.

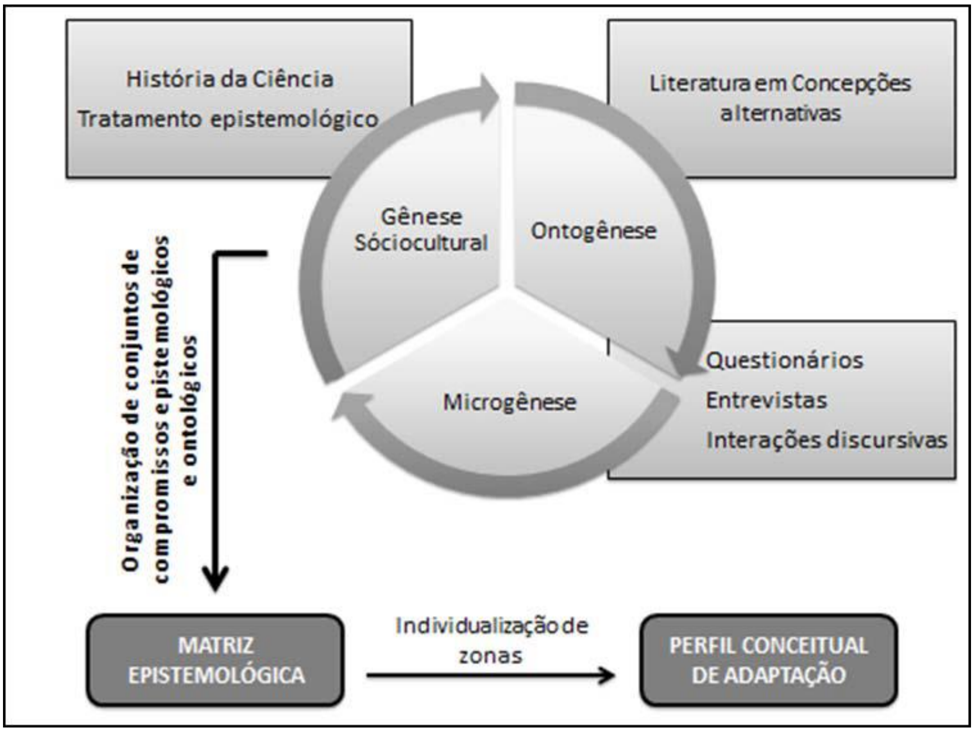
Reconhecemos que os contextos nos quais vamos investigar o conceito de número racional não contemplam todos os domínios esperados (por exemplo, não abarca o domínio microgenético) e, também, que em nossas análises ainda não executamos os movimentos de reformulação esperados para individuar as zonas de um perfil conceitual. Por isso, preferimos não nos comprometer a propor um perfil conceitual de número racional, mas sim, vamos iniciar esse trabalho ao organizarmos uma ferramenta chamada matriz epistemológica[20] (SEPULVEDA; MORTIMER; EL-HANI, 2013).

Sepulveda (2010) propõe a "construção de uma matriz epistemológica como passo metodológico importante para organizar a polissemia em torno do conceito investigado, de modo a gerar categorias que serão derivadas as zonas de um perfil" (p. 387). Nesse sentido, a matriz epistemológica é uma etapa que antecede a individualização das zonas de um perfil conceitual. A Figura 2 ilustra esse processo, explicitando (por meio das setas em círculo) a característica dialógica entre as diferentes fontes relacionadas aos domínios genéticos

[20] A possibilidade de se trabalhar com a matriz epistemológica surgiu no seminário *"Contribuições Contemporâneas para a Pesquisa em Perfis Conceituais"*, realizado na Faculdade de Educação, da Universidade Federal de Minas Gerais, em junho de 2016. Por ser demorado o processo de construção de um perfil conceitual, um "atalho" seria trabalhar com a matriz epistemológica.

apontados por Vygotsky e cujas análises permitem organizar diferentes temas epistemológicos a partir dos quais o conceito em foco pode ser significado.

Figura 2: Representação esquemática da metodologia de construção de um perfil conceitual de adaptação



Fonte: Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2013, p. 444)

Estamos entendendo tema epistemológico como um tema que pode dar origem ao conceito, isto é, um tema a partir do qual o conceito pode ser significado. Por exemplo, como veremos no estudo histórico sobre os números racionais e, também, no estudo dos subconstrutos de Kieren (1976, 1980), a relação entre grandezas é um tema epistemológico, pois dele temos uma gênese para o conceito de número racional.

Dentro cada tema epistemológico, é possível, por meio de análises dialógicas dos dados obtidos, identificar um conjunto de compromissos ontológicos e epistemológicos que estruturam a interpretação desse conceito. É da combinação de diferentes compromissos ontológicos e epistemológicos, referentes a cada um dos temas epistemológicos identificados, que derivam as zonas do modelo de perfil (SEPULVEDA, 2010).

O processo de individuação das zonas, isto é, de combinação de diferentes compromissos ontológicos e epistemológicos para constituir as zonas de um perfil conceitual de número racional não será realizado nesta pesquisa. Entendemos que para realizar tal processo seria necessário, como já dissemos, realizar investigações abarcando o domínio microgenético, o que não fizemos.

Adiantamos, aqui, boa parte da metodologia empregada na construção de um perfil conceitual. Antecipamos essa discussão, pois a abordagem dos perfis conceituais se configura, em diversos momentos, como nossa fundamentação teórico-metodológica e, portanto, discutir esse referencial envolve, também, trazer seus aspectos metodológicos. Na seção 1.4, *Aspectos metodológicos*, discutiremos outros pormenores dessa etapa da pesquisa, mais especificamente sobre as fontes de dados.

Antes de finalizarmos esta seção que trata da abordagem dos perfis conceituais, vamos apontar o alcance dessa fundamentação teórica em outras pesquisas. Apesar de ser um modelo teórico recente (1994), a abordagem dos perfis conceituais vem sendo bastante difundida na área de Ensino de Ciências[21]. Na Biologia, por exemplo, os conceitos de vida, morte e respiração já foram perfilados; na Física, os conceitos de massa e força; e, na Química, os conceitos de calor e substância. Esses são alguns exemplos.

Na Educação Matemática, essa perspectiva teórica ainda é pouco explorada, mas há pesquisas que discutem conceitos matemáticos polissêmicos a partir dela. É o caso de Ribeiro (2013), que se baseia em um conjunto de pesquisas anteriormente realizadas e em Mortimer (1994), para produzir um ensaio teórico cujo objetivo é identificar e categorizar algumas zonas que poderão compor um perfil conceitual de equação. Ribeiro (2013) apresentou 5 zonas preliminares do perfil conceitual de equação, a saber: pragmática; geométrica; estrutural; processual; e aplicacional. Para tanto, Ribeiro (2013) valeu-se dos domínios epistemológico e ontogenético do conceito. No que se refere ao domínio epistemológico, Ribeiro pautou-se em um estudo teórico realizado em 2007, quando, observou, por meio de estudo epistemológico e didático, “como diferentes povos em diferentes épocas históricas, compreendiam e utilizavam o conceito de equação” (RIBEIRO, 2013). Com relação ao domínio ontogenético, baseou-se nas pesquisas de Barbosa (2009) e de Dorigo (2010), que investigaram se e como os significados identificados na pesquisa de Ribeiro (2007) estão presentes nas concepções de professores e de alunos, respectivamente.

Ribeiro (2013) apresenta, também, possíveis implicações para o ensino de matemática e, em suas reflexões finais, aponta possibilidades de se incorporar uma abordagem baseada no modelo dos perfis conceituais nas aulas de Matemática. Ele afirma que, se por um

---

[21] Algumas pesquisas podem ser encontradas em Neto e Amaral (2013). Esses autores identificaram e analisaram as tendências na produção brasileira sobre o perfil conceitual em periódicos e anais de eventos, no período entre 1995 e 2013.

lado “parece ser possível, com tal abordagem, instrumentalizar os professores para que possam compreender a diversidade de significados – aqui chamados de zonas – que podem compor os conhecimentos de seus alunos” (p. 69), por outro, há a urgente necessidade de “compreender se e como uma abordagem de ensino fundamentada no modelo dos perfis conceituais contribui para uma melhor aprendizagem de Matemática em salas de aula da Educação Básica e da formação de professores” (p. 69).

Outro trabalho que se apoiou na abordagem dos perfis conceituais no âmbito da Educação Matemática foi o de Machado (1998), que delimitou as zonas do perfil conceitual de função, com base em dados obtidos por meio de testes realizados com alunos do 1º ano do Ensino Médio, no desenvolvimento histórico do conceito, na análise de um livro didático e na bibliografia referente à epistemologia do conceito de função. Esse trabalho resultou em um perfil conceitual de função constituído por cinco zonas: 1) Conceito primitivo de função: relação de ordem; 2) Instinto de funcionalidade; 3) Variação funcional: funções bem comportadas; 4) Lei Algébrica; e 5) Conceito Formal.

Passamos agora a um resultado primordial para o desenvolvimento da presente pesquisa: a forma como compreendemos a matemática na formação do professor, emergente de nossas interpretações dos referenciais teóricos discutidos até então.

1.3 Uma caracterização para a matemática na formação do professor

Para alcançar o objetivo principal desta tese, que é *investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática*, nos pautamos nos referenciais teóricos do Perfil Conceitual (MORTIMER, 2000; MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al., 2014a; MORTIMER et al., 2014b), do Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (JAKOBSEN et al., 2012; JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013) e da diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2010).

Entendemos que esses três referenciais permitem-nos olhar para a questão da formação matemática do professor de uma maneira ampla. Moreira e David (2010), ao realizarem a referida diferenciação, afirmam que deve haver um “redimensionamento da formação matemática na Licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da Matemática Científica e da Matemática Escolar nesse processo” (p. 103). Nesse “equacionar melhor”, entendemos que as formas de conhecimento matemático abordados em sua caracterização para Matemática Escolar devem prevalecer (em relação à Matemática Acadêmica) ao longo da

Licenciatura e que o papel da Matemática Acadêmica no curso precisa ser revisto. Nesse sentido, entendemos que o HCK seria o subdomínio do MKT que nos permite redefinir esse papel, uma vez que um estudo aprofundado sobre o HCK nos possibilita ter clareza de um horizonte matemático plausível e que contribua para o conhecimento do professor. Quer dizer, aqueles valores e perspectivas da Matemática Acadêmica que, explicitamente, favorecem o desenvolvimento do HCK para o ensino, comporiam as disciplinas de conteúdo matemático na Licenciatura, incorporando-se, quem sabe, à Matemática Escolar.

Mas, como estabelecer que conteúdos ou valores da Matemática Acadêmica podem compor as disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática? A nossa resposta a essa pergunta parece estar fundamentada no pressuposto de que a abordagem dos perfis conceituais possa ser uma alternativa que possibilita essa compreensão. Ao perfilar determinado conceito, investigando diferentes fontes (textos sobre a História da Matemática, trabalho com concepções alternativas de estudantes, entrevistas com professores, filmagens de interações discursivas) explicitando seus diferentes significados, podemos avaliar e propor discussões sobre quais contextos em que esses significados da Matemática Acadêmica podem ser mais ou menos poderosos.

Assim, a partir desses referenciais e utilizando seus termos, nós caracterizamos a matemática que almejamos à formação do professor como: *uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar, que permita ao professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pensar os conceitos matemáticos em contextos variados da Educação Básica, e que possibilite ao professor, ao mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo escolar e possíveis relações com a Matemática Acadêmica*.

Essa caracterização leva-nos às seguintes considerações: 1) a matemática a ser trabalhada na Licenciatura deve ter como ponto de partida e de chegada a Matemática Escolar. Enquanto ponto de partida, a Matemática Escolar se coloca como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo. Enquanto ponto de chegada, a Matemática Escolar deve estar impregnada de novas reflexões do licenciando como futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica; 2) a formação matemática do professor, nesse sentido, tem o papel de alterar qualitativamente o conhecimento do futuro professor sobre a Matemática Escolar. Notemos, portanto, que não se trata de uma alteração quantitativa, de “saber mais matemática” sem conexão com aquela a ser tratada na Educação Básica; pelo contrário, trata-se de passar por processos de questionamento, reflexão e aprofundamento aqueles saberes associados ao exercício da profissão docente; 3) a Matemática Acadêmica faria parte desses processos, na medida em que se coloca em discussão as tensões entre ela e a Matemática Escolar, questionando até que ponto seus valores e seus métodos contribuem para o desenvolvimento do MKT, ampliando, assim, a visão de matemática enquanto campo de conhecimento do estudante/futuro professor, como sugerido por Fiorentini e Oliveira (2013).

Pode ser que nossa caracterização para a matemática na formação do professor não esteja totalmente alinhada com a maneira como Moreira e David (2003) compreendem a formação matemática do professor. Esses autores afirmam que

> [...] uma formação matemática profunda para o professor da escola básica deverá, antes de mais nada, reconhecer criticamente a matemática escolar, entendendo-a como produto da prática da educação escolar em matemática, incorporando, assim, tanto os saberes da experiência docente como também uma carência de saberes, dada a ver através dessa mesma experiência. (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 77).

Levantamos a hipótese de que podemos não estar totalmente alinhados com Moreira e David (2003), pois os autores parecem "fincar os pés" na prática docente, enquanto nós estamos sugerindo trazer para a formação matemática aspectos da Matemática Acadêmica que se mostrem, em nossa pesquisa, potencialmente enriquecedores à prática docente.

Contudo, essa diferença pode não haver. A Matemática Escolar tal como definida por Moreira e David (2010) não se configura, apenas, como aqueles conteúdos que o estudante da Educação Básica aprende (apesar de contê-los), mas envolve o conhecimento profissional docente necessário para a tarefa de ensiná-los. Posto desse modo, nossa caracterização não se distancia tanto da concepção de Moreira e David (2003, 2010) na medida em que se certos aspectos da Matemática Acadêmica se mostrem favoráveis a esse conhecimento profissional docente, tais aspectos são incluídos no domínio da Matemática Escolar. É exatamente essa a nossa pretensão nesta tese, quando propomos uma formação matemática *a partir da* e *para a* Matemática Escolar e que busca incorporar questões da Matemática Acadêmica, não no sentido de acrescentar conteúdos, mas na procura de colocar em discussão a lógica interna e os valores da Matemática Acadêmica a partir de conceitos da Matemática Escolar, com vistas a explicitar a diferença entre elas (Escolar e Acadêmica) e, principalmente, favorecer o conhecimento do conteúdo no horizonte.

Acreditamos que trazer essa discussão para a formação de professores seja relevante e fundamental no sentido em que permite ao futuro professor ter uma compreensão ampliada da matemática enquanto prática social, tendo consciência da Matemática Escolar "como produto da prática da educação escolar em matemática" (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 77) e da Matemática Acadêmica como prática do matemático, sem, com isso, estabelecer uma hierarquia entre elas.

Almejando contemplar essas características de uma formação matemática para o professor, desenvolvemos nossa pesquisa por meio das escolhas metodológicas que estão descritas na próxima seção.

1.4 Aspectos metodológicos

A investigação que aqui desenvolvemos se iniciou, como fora discutido anteriormente, com uma inquietação pessoal acerca do tema "formação matemática do professor". Essa inquietação deixou de ser apenas pessoal e passou a se tornar, também, objeto de pesquisa a partir do momento em que encontramos, na literatura científica, questionamentos que iam ao encontro daqueles que já nos incomodavam. Perceber que nossas inquietações, enquanto pesquisadores em formação, são, também, inquietações da academia nos encorajam a seguir em frente, tendo clareza do problema a ser investigado.

Ao mesmo tempo que o resgate da literatura nos animou do ponto de vista da possibilidade de uma pesquisa, também nos proporcionou a percepção de que há diferentes pontos de vista sobre o tema (alguns deles apresentados na seção 1.1.2). O que não é estranho, uma vez que

> A pesquisa em educação carrega diversas peculiaridades, pois trabalha com um objeto de estudo multidimensional, mutante, complexo, em que o caráter sócio-histórico de suas práticas faz com que cada situação educativa seja sempre única, irrepetível, com imensas variações no tempo, no espaço, nas formas organizativas de sua dinâmica e no caráter de sua intencionalidade. (FRANCO, 2003, p. 190).

Considerando essa complexidade da pesquisa em educação, e assumindo o objeto de estudo (formação matemática do professor) com variações no tempo, no espaço e nas formas organizativas, optamos por uma pesquisa que trouxesse novos elementos para a discussão acerca da formação matemática do professor para além daqueles já postos na literatura, agregando algumas das diferentes perspectivas percebidas a respeito do assunto e, a partir delas, buscando contribuir para a produção de conhecimento sobre a formação de professores de Matemática.

Para tanto, foram necessárias diversas escolhas, a começar pela delimitação do problema de pesquisa. A escolha pelas estruturas algébricas se deu, basicamente, pelos estudos anteriores que realizamos acerca da estrutura algébrica de grupo. A pesquisa de mestrado que realizamos (ELIAS, 2012) visou compreender dificuldades que licenciandos em Matemática apresentam ao lidarem com o conceito de grupo. Desse estudo, surgiu nosso interesse em investigar sobre o papel das estruturas algébricas na formação do professor. A decisão por focar agora a estrutura algébrica de corpo e os números racionais veio, como já observado na introdução, durante o período de estágio de doutorado[22] na UFABC.

Já a delimitação da questão de investigação e dos objetivos (geral e específicos) veio da nossa percepção, também oriunda da literatura acadêmica, da necessidade de caracterizar o conhecimento matemático do professor, realizando discussões mais conceituais sobre uma formação matemática que ofereça modos de lidar com as demandas matemáticas de sua prática profissional (VIOLA DOS SANTOS; LINS, 2016). As diferenças, presentes dentre pesquisadores da Educação Matemática, acerca de modos de pensar a presença de disciplinas de conteúdo matemático, como a Álgebra Abstrata, na formação dos professores nos levaram a refletir sobre aqueles caminhos (os caminhos 2 e 3) apresentados na introdução. Retomando-os: se podemos pensar que as disciplinas de conteúdo matemático (Álgebra Abstrata e outras) são relevantes para a formação do professor, como elas podem ser abordadas nesses cursos? Por outro lado, se podemos considerar que não, essas disciplinas não são relevantes para a formação do professor, como podemos argumentar em favor disso? O conflito gerado por essas diferentes ideias é o que move esta tese e, por isso, buscamos trazer essas duas visões (uma em favor e outra contrária à presença dessas disciplinas) como forma de promover o debate.

Foi diante desses questionamentos que formulamos nosso problema de investigação: *de que maneira o corpo dos números racionais pode ser abordado em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais?* Essa pergunta é feita em uma tentativa de construir possibilidades para o ensino da estrutura algébrica corpo na Licenciatura em Matemática.

Todas as escolhas aqui feitas, algumas já descritas e outras que ainda o serão nos próximos parágrafos, fazem parte de nossas crenças e de nossas posturas diante da pesquisa e do conhecimento produzido ao longo dela, compondo o que Franco (2003) chama de metodologia da pesquisa. Para ela,

> a metodologia da pesquisa não é um rol de procedimentos a seguir, não será um manual de ações do pesquisador, nem mesmo um caminho engessador da necessária criatividade do pesquisador. A metodologia organiza-se em torno de um quadro de referências, quadro este decorrente de posturas, crenças, valores, que se configuram sob forma de concepções de mundo, de vida, de conhecimento. (FRANCO, 2003, p. 193).

[22] Durante um período de 6 meses foi realizado um estágio de doutorado sanduiche no país, financiado pelo CNPq, na Universidade Federal do ABC (UFABC), como já mencionado anteriormente.

Nesse sentido, vamos tornar mais explícitas algumas dessas escolhas, crenças e posturas que constituem nosso quadro de referências segundo o qual a metodologia desta pesquisa se organiza. Fizemos isso embasados em Lessard-Hébart, Goyette e Boutin (1994), quando nos apresentam um modelo que representa a base de uma investigação científica, a qual se articula em torno de quatro polos: epistemológico, teórico, morfológico e técnico. Para os autores, a interação entre esses polos "constitui o aspecto dinâmico da investigação" (p. 16).

Antes de apresentarmos e discutirmos os quatro polos da pesquisa, destacamos as características de uma pesquisa qualitativa interpretativa, no sentido de Creswell (2010), presentes em nossa investigação. As expressões destacadas em itálico no parágrafo seguinte são, justamente, características apontadas por Creswell (2010).

Como primeira característica, temos *o pesquisador como um instrumento fundamental*, pois produzimos pessoalmente os dados, seja por meio de entrevistas com participantes, ou exame de documentos, como livros e pesquisas. Quanto às entrevistas, fomos ao encontro dos professores, para uma conversa direta com eles, buscando o *ambiente natural* e evitando uma situação artificial de envio de instrumentos para que eles preenchessem. Como será melhor evidenciado nas seções 1.4.1 e 1.4.2, procuramos *múltiplas fontes de dados* em vez de nos pautarmos em uma única fonte. A intenção de realizarmos entrevistas com professores foi de compreender e valorizar *os significados dos participantes* e não impor aqueles trazidos pelo referencial teórico adotado. O mesmo pode ser dito para as demais fontes de dados. Sobre os referenciais, nossas *lentes teóricas* foram utilizadas para enxergar os aspectos da Matemática Escolar e Acadêmica, do HCK e dos diferentes modos de pensar os números racionais. Em todo o trajeto de pesquisa, nossas impressões, enquanto pesquisadores, estão presentes. Todo conhecimento produzido aqui carrega nossas interpretações sobre o que vemos, ouvimos ou entendemos, dando à pesquisa uma característica *interpretativa*.

1.4.1 Polos epistemológico e teórico

Lessard-Hébart, Goyette e Boutin (1994) afirmam que o polo epistemológico é o motor da pesquisa, pois é nele que se processam a construção do objeto científico e a delimitação do problema a ser investigado. Segundo Esteban (2010), a perspectiva epistemológica nos permite compreender e explicar questões como: que tipo de conhecimento obteremos ao final da pesquisa? Que valor podemos dar aos resultados obtidos?

Ao formularmos nossa questão de investigação, não esperávamos por uma resposta a ser descoberta, como se ela já existisse independente de quem realiza a pesquisa, como suporia a perspectiva epistemológica objetivista. Do mesmo modo, não assumimos uma supremacia da subjetividade do pesquisador em relação ao objeto do conhecimento, como considera a perspectiva epistemológica subjetivista. Assumimos que os significados atribuídos à realidade são oriundos da nossa relação com a mesma, o que nos aproxima da epistemologia construcionista[23] que, segundo Esteban (2010), "rejeita a ideia de que existe uma verdade objetiva esperando ser descoberta. A verdade, o significado, emerge a partir de nossa interação com a realidade" (p. 51). Ainda segundo essa autora, o construcionismo "dirige sua atenção para o mundo da intersubjetividade compartilhada, e a construção social do significado e o conhecimento, para a geração coletiva do significado, como se perfila pelas convenções de linguagem e outros processos sociais" (p. 51).

A abordagem dos perfis conceituais, nossa fundamentação teórico-metodológica, se alinha a essa visão de uma construção social do significado, em que a cultura tem papel na validação dessa construção, tornando conhecimento como produto de um contexto sócio-histórico, não como uma realidade pré-existente aos sujeitos.

O polo teórico, para Crotty (1998), representa a postura filosófica que está por trás da metodologia adotada, fornecendo um contexto para o processo e fundamentando sua lógica e seus critérios. Dentre as perspectivas teóricas utilizadas para fundamentar a cientificidade da pesquisa socioeducativa, o autor aponta: positivismo, interpretativismo, pós-modernismo, teoria crítica, entre outras.

Alinhamo-nos aos pressupostos do interpretativismo, a começar por aquele que destaca o fato de que "existem notáveis diferenças ontológicas entre os processos naturais e práticas humanas" (ESTEBAN, 2010, p. 60) e uma dessas diferenças está no uso da linguagem, característica das práticas humanas. Outro pressuposto do interpretativismo que dialoga com nossa perspectiva é o foco na ação humana, não no seu comportamento. Comportamentos "idênticos de um ponto de vista físico podem corresponder a significados diferentes e mutantes de uma perspectiva social" (LESSARD-HÉBART; GOYETTE; BOUTIN, 1994, p. 39).

> Os seres humanos, pela sua *cultura*, apreendem sistemas de atribuição de significado e, face a situações particulares de acções humanas, parecem muitas vezes ter criado interpretações similares. Mas estas semelhanças superficiais escondem uma diversidade subjacente. (ERICKSON, 1986 apud LESSARD-HÉBART; GOYETTE; BOUTIN, 1994, p. 40, grifo do autor).

---

[23] Esteban (2010) diferencia construcionismo de construtivismo. Apoiada em Crotty (1998), Esteban (2010) considera que o termo construtivismo é utilizado para as epistemologias exclusivamente centradas na mente do sujeito para gerar significado, enquanto que o construcionismo visa enfatizar a produção coletiva de significado.

Assim, completam Lessard-Hébart, Goyette e Boutin (1994), os seres humanos constroem um conhecimento da natureza e de outros seres humanos devido a esse processo de interpretação e essas interpretações conduzem os seres humanos a realizarem determinadas ações. Dos diferentes tipos de interpretativismo apontados por Crotty (1998) – interacionismo simbólico, fenomenologia e hermenêutica –, nossa pesquisa se assemelha ao interacionismo simbólico. Segundo Crotty (1998),

> Devemos ser capazes de tomar o lugar de outros. Essa tomada de papel é uma *interação*. É uma interação *simbólica* porque só é possível para os "símbolos significativos", isto é, a linguagem e outras ferramentas simbólicas, que os seres humanos compartilham e por meio dos quais nos comunicamos. Só através do diálogo podemos ser conscientes das percepções, dos sentimentos e das atitudes de outros e interpretar seus significados. Vem daí o termo interacionismo simbólico. (CROTTY, 1998 apud ESTEBAN, 2010 p. 67).

Ao buscarmos uma resposta à questão de investigação formulada, tentamos dar voz a diferentes personagens (professores da Educação Básica, professores formadores, livros didáticos, pesquisas, documentos oficiais) que, de algum modo, estão envolvidos no processo de compreensão da formação matemática do professor, colocando-nos em seus lugares e promovendo nossas intepretações sobre os dados produzidos. Desse modo, "o conhecimento obtido pela pesquisa é um conhecimento situado, vinculado a critérios de escolha e interpretação de dados, qualquer que seja a natureza destes dados" (GATTI, 2002, p. 11-12).

Ainda referente aos polos epistemológico e teórico, é importante ressaltar um ponto central em nossa pesquisa: a prática docente. Os três referenciais teóricos aqui articulados (Perfil Conceitual, HCK e Matemática Acadêmica e Matemática Escolar) têm em comum a valorização da prática enquanto critério de validação do conhecimento. O perfil conceitual, uma abordagem pragmatista objetivista[24], assume que "o conhecimento deve ser julgado, ao menos em parte, em termos de sua utilidade" (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009, p. 10), não apenas uma utilidade prática, mas também enquanto um instrumento do pensamento, para produzir novos significados. O HCK, sendo um dos domínios do MKT, tem a prática em sua essência, uma vez que o MKT é uma teoria baseada na prática docente. A concepção de Matemática Escolar, de Moreira e David (2010), por sua vez, inclui os saberes produzidos e mobilizados pelos professores em sua ação docente, isto é, na prática.

Dessa maneira, nossa pesquisa valoriza a prática docente enquanto produtora de conhecimento e, por isso, pretende sempre estabelecer relações com esta prática, trazendo alguns de seus elementos para o interior da pesquisa (essa é uma justificativa para algumas das

[24] Mortimer, Scott e El-Hani (2009) identificam as bases epistemológicas da abordagem dos perfis conceituais como pragmatismo objetivo, tal como proposto por Charles Peirce.

escolhas metodológica que serão apresentadas na sequência), teorizando-os e propondo um retorno à prática como possibilidade de validar o conhecimento aqui produzido.

1.4.2 Polos morfológico e técnico

Enquanto o polo epistemológico nos remete à construção do objeto científico, destacando a natureza do conhecimento científico, e o polo teórico à análise e interpretação dos dados, o polo morfológico, de acordo com Lessard-Hébart, Goyette e Boutin (1994), está relacionado à estruturação do objeto científico e diz "respeito não somente à configuração do próprio objecto científico mas também à exposição do conjunto de processos que permitiu a sua construção" (p. 23). O polo morfológico, portanto, refere-se à organização e representação dos dados.

Diante da nossa questão de investigação, nos propusemos a pensar sobre como poderíamos estruturar uma abordagem para o ensino da estrutura algébrica corpo de modo que favorecesse o conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. O objetivo principal da pesquisa, então, se configurou em: *investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática*.

Mas, como estruturar essa busca por fundamentos? Como afirmamos, nossos referenciais apontam para uma valorização da prática docente da Educação Básica e esta não poderia estar de fora do nosso estudo. Contudo, nosso foco está na formação inicial de professores, um processo complexo (PONTE; CHAPMAN, 2008) que visa preparar profissionais para a prática docente. Isto significa que, se por um lado não poderíamos desconsiderar algumas "vozes" da Educação Básica, por outro, precisaríamos ouvir também o que alguns personagens vinculados à formação de professores teriam a dizer. Isto é, precisaríamos conhecer saberes da prática docente e, também, saberes sobre a prática, mais teóricos.

Com base nisso, o desenvolvimento da pesquisa ficou assim estabelecido: colocar lado a lado os números racionais na escola e os números racionais (e a estrutura de corpo) na formação inicial de professores. Para toda fonte de dados prevista para pensar os números racionais na escola era, imediatamente, considerado seu equivalente para a formação inicial de professores. Por isso, nossa busca por fundamentos passa por: conhecer aspectos do tratamento dos números racionais na Matemática Escolar[25]; conhecer aspectos do tratamento dos números racionais na Matemática Acadêmica, particularmente em cursos de formação inicial de professores; e, por fim, procurar estabelecer relações entre os números racionais na Matemática Escolar e na Matemática Acadêmica. Esse é o princípio da pesquisa, a maneira como está organizada.

Entretanto, ao assumirmos a diferenciação entre Matemática Acadêmica e Matemática Escolar, como estabelecida por Moreira e David (2010), trazemos, junto a essa diferenciação, o fato de que elas são epistemologicamente distintas. Como poderíamos reconhecer tal distinção e, ainda assim, discutir sua relevância em termos da formação inicial do professor? Novamente, a abordagem dos perfis conceituais tem um papel fundamental, quando considera possível discutir uma zona do perfil de um conceito sem fazer referência a outra, uma vez que são epistemologicamente e ontologicamente diferentes, o que faz com que uma zona não dependa, necessariamente, de outras já conhecidas, podendo ser aplicada a outros novos contextos (MORTIMER, 2011). Por isso, organizar diferentes significados que possam constituir um perfil conceitual de número racional também se constituiu como uma pretensão deste trabalho, pois isso nos permitiria propor o ensino do conceito de número racional na formação inicial do professor em termos de suas zonas, destacando a demarcação dos diferentes significados.

Após a discussão entre os números racionais na Matemática Acadêmica e na Matemática Escolar e após uma organização dos diferentes significados que possam constituir um perfil conceitual de número racional, entendemos que uma consequência imediata desses estudos seria propor uma tarefa para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática que exemplificasse nossa maneira de enxergar esse ensino a partir do que fora discutido ao longo da pesquisa.

O resultado final de nossa pesquisa, isto é, a resposta à nossa busca por fundamentos teórico-metodológicos, está completa com uma caracterização para o conhecimento matemático específico para o ensino dos números racionais.

---

[25] A expressão *números racionais na Matemática Escolar* está sendo usada aqui para indicar os significados dos números racionais atribuídos no contexto da Educação Básica, seja do ponto de vista do conhecimento do professor, das pesquisas sobre ensino e aprendizagem ou dos livros didáticos. Do mesmo modo, a expressão *números racionais na Matemática Acadêmica* está sendo entendida como os significados atribuídos em disciplinas de conteúdo matemático do Ensino Superior e em livros destinados a esse nível de ensino, além de ser o modo como os matemáticos usualmente compreendem esses números. Não estamos usando *números racionais "da" Matemática Escolar* ou *"da" Matemática Acadêmica*, pois entendemos que o conceito de número racional não pertence a um ou a outro contexto, mas tem diferentes significados atribuídos em cada um deles.

Assim, diante do que expusemos nos parágrafos anteriores referente à forma como a pesquisa está estruturada (polo morfológico), destacamos que cada etapa, cada "coisas a fazer" para alcançar nosso objetivo principal, foi desmembrada em objetivos específicos, que relembramos:

1) *caracterizar* que matemática entendemos ser adequada à formação inicial do professor;
2) *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados aspectos dos números racionais na Matemática Escolar e na Matemática Acadêmica;
3) *organizar*, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar o conceito de número racional;
4) *elaborar* uma sequência de tarefas para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática.

O último polo, o polo técnico, segundo Lessard-Hébart, Goyette e Boutin (1994), "estabelece a relação entre a construção do objeto científico e o mundo dos acontecimentos" (p. 25). Trata-se da produção dos dados, momento em que as informações recolhidas são convertidas em dados pertinentes ao problema de investigação. Nesse sentido, para cada objetivo específico, realizamos novas escolhas que resultaram nos dados produzidos e que vamos explicitar a partir de agora.

O primeiro objetivo específico, apresentado logo acima, refere-se a um exercício teórico, que começamos na seção 1.3, que é o de caracterizar a matemática na formação do professor a partir dos referenciais teóricos que embasam a pesquisa. Não seria possível, ao nosso ver, discutir questões da formação matemática do professor sem, de início, explicitarmos nossa perspectiva sobre o assunto.

Com o segundo objetivo específico, *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados, estamos nos referindo à parte prática da pesquisa, na qual buscamos traços dos números racionais na Matemática Escolar que indicam conexões possíveis de serem feitas com os números racionais na Matemática Acadêmica e, também, o inverso disso, isto é, discutimos aspectos dos números racionais na Matemática Acadêmica com potencial para serem discutidos na formação de professores, com vistas à prática docente na escola. Nessa etapa da pesquisa *discutimos*:

- *com* quatro professores da Educação Básica, por meio de entrevistas abertas; *a partir de* uma coleção de livros didáticos voltada para os anos finais do Ensino Fundamental; *a partir de* resultados de pesquisas acadêmicas que envolvam diferentes aspectos dos números racionais na Educação Básica; e *a partir da* Base Nacional Comum Curricular;

- *com* três professores formadores que atuam ou atuaram na disciplina de Álgebra para a Licenciatura, por meio de entrevistas semiestruturadas; *a partir de* livros destinados a esse curso; *a partir de* resultados de pesquisas que sugerem articulações da Álgebra Abstrata com a matemática trabalhada na escola; e *a partir das* Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura e *dos* Projetos Pedagógicos de 15 cursos de Licenciatura em Matemática.

O terceiro objetivo específico, *organizar*, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar os números racionais, visa examinar um conjunto de dados sobre os números racionais e, a partir de um processo dialógico entre eles, organizar temas na matriz epistemológica (SEPULVEDA; MORTIMER; EL-HANI, 2013).

Alguns dos princípios metodológicos da abordagem dos perfis conceituais já foram apresentados na seção 1.2. Do ponto de vista do tratamento dos dados, Mortimer et al. (2014b) afirmam que, para o tratamento dos dados primários, há duas estratégias diferentes[26] (ambas com pontos negativos e positivos).

Na primeira, a análise dos dados é feita, inicialmente, de forma parcialmente indutiva, derivando de suas categorias de análise com um contato relativamente menor com a literatura histórica, epistemológica e de concepções alternativas. Isso evita fundamentar as análises nas categorias desta literatura, isto é, evita que as zonas construídas sejam influenciadas pelas categorias já presentes na literatura. Por exemplo, a influência dos subconstrutos de Kieren nas possíveis zonas de um perfil conceitual de número racional. No entanto, o risco óbvio desse tipo de estratégia é chegar a uma categorização de dados empíricos pobre, o que tornará muito difícil o diálogo posterior com fontes históricas, filosóficas e de concepções alternativas. Afinal, não se pode parar nesse ponto da análise, uma vez que as zonas de um perfil não correspondem às categorias obtidas nesse primeiro momento, além de não ser desejável ficar na superfície do discurso para identificar os compromissos ontológicos e epistemológicos (e, recentemente, axiológicos). Para extrair tais compromissos dos dados primários, o diálogo com fontes históricas, filosóficas e de concepções alternativas é essencial, principalmente quando nos fornecem análises dos significados atribuídos a um determinado conceito, bem como sobre formas alternativas de fazer sentido a esse respeito. Portanto, nesta primeira estratégia, essas fontes se tornam proeminentes numa segunda etapa da construção de um perfil, permitindo identificar as zonas que compõem o modelo (MORTIMER et al., 2014b).

[26] Segundo Mortimer et al. (2014b), as duas estratégias não se excluem mutuamente e, portanto, podem ser usadas para construir o mesmo perfil conceitual.

O segundo tipo de estratégia utilizada para construir perfis conceituais apontada pelos autores começa com as fontes históricas, filosóficas e de concepções alternativas, inferindo, assim, as zonas e, mais tarde, as categorias de respostas que as caracterizam e que serão buscadas nos dados empíricos. Nessa estratégia, existe o risco de elaborar um quadro teórico bem articulado, mas que não tenha em conta os dados empíricos, e estes podem ser muito mais ricos do que a articulação alcançada nesse quadro. Outro problema é a possibilidade de um viés excessivo na interpretação dos dados primários (MORTIMER et al., 2014b).

Diante dessas duas estratégias possíveis apontadas por Mortimer et al. (2014b), optamos pela segunda, uma vez que nossas análises foram feitas a partir de: (1) dados extraídos de fontes secundárias sobre a história dos números racionais; (2) análises matemáticas dos subconstrutos, propostos por Kieren (1976, 1980); (3) dados obtidos na literatura sobre concepções alternativas de alunos acerca do conceito de número racional; (4) análise dos livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Superior; (5) entrevistas com os professores formadores e os professores da Educação Básica acerca dos números racionais.

Ainda de acordo com Mortimer et al. (2014b), não há uma hierarquia entre os domínios investigados, mas há uma ordem puramente metodológica na segunda estratégia que é: os domínios sociocultural e ontogenético devem preceder o microgenético, uma vez que as investigações daqueles são utilizadas para construir e analisar questionários, entrevistas e aulas vídeo-gravadas voltadas para este último domínio.

Nesse sentido, uma vez que a presente tese centra-se nos domínios sociocultural e ontogenético, entendemos que o próximo passo, posterior a esta investigação, seja investigar o domínio microgenético a partir do que fora obtido por nós neste momento. Por ora, nossa interpretação ativa nos permitirá elencar temas epistemológicos e as categorias que compõem a matriz epistemológica.

Por fim, o quarto e último objetivo específico, *propor* uma sequência de tarefas para o ensino de corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática, refere-se ao aspecto propositivo da pesquisa. Para finalizar nosso estudo, fundamentados nos resultados obtidos a partir dos três objetivos específicos anteriores encaminhados, desenvolvemos uma sequência de tarefas com base nas discussões proporcionadas pela pesquisa. Queremos, com isso, propor alternativas que possam servir aos cursos de formação inicial de professores de Matemática não apenas como um produto educacional específico para o ensino do corpo dos números racionais, mas, também, como um modelo que tomou como ponto de partida questões da prática para sugerir como a matemática pode ser veiculada nesses cursos.

Algumas de nossas escolhas metodológicas precisam e vão ser explicadas e justificadas neste momento. Outras escolhas serão retomadas posteriormente, em um contexto mais adequado, quando forem efetivamente consideradas e discutidas.

Sobre as entrevistas com os professores

As entrevistas com os professores (tanto da Educação Básica como do Ensino Superior) têm papeis relevantes em todos os objetivos específicos, mas contemplam mais diretamente os três últimos. Detalharemos isso a seguir, quando da apresentação do Quadro 1, mas, por ora, vamos contar um pouco mais sobre a realização das entrevistas e os professores participantes.

Com os professores da Educação Básica, buscamos fazer o primeiro contato pessoalmente, na escola em que eles trabalham. Esse foi o procedimento com três dos quatro entrevistados. Apenas com um deles o primeiro contato foi por e-mail. A esses professores, demos nomes fictícios: Márcia, Carla, Paulo e Roberto.

Todos eles já tiveram contato com um dos orientadores dessa pesquisa, seja por meio do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) ou por algum curso de Pós-Graduação oferecido pela Universidade Estadual de Londrina, o que facilitou nossa primeira aproximação. Os critérios que tomamos em consideração eram que fosse um professor experiente, com alguns anos de prática docente, e que ainda estivesse exercendo sua atividade docente no momento da entrevista. Márcia trabalhava como professora da Educação Básica há 32 anos; Carla há 25 anos; Paulo há 21 anos e Roberto há 20 anos. Todos eles já trabalharam tanto nos anos finais do Ensino Fundamental como no Ensino Médio, o que lhes permitiu adquirir experiências com os números racionais em diversas formas e contextos.

No primeiro contato, seja pessoalmente ou por e-mail, fizemos o convite para participar da pesquisa, explicitando nosso objetivo de buscar uma articulação entre os números racionais trabalhados na Educação Básica e a forma como são tratados em cursos de formação inicial de professores. Deixamos claro aos convidados que, para buscarmos tal articulação, era imprescindível o conhecimento matemático para o ensino que eles desenvolveram ao longo de tantos anos de prática. Queríamos valorizar o conhecimento matemático que eles produziram em situações de ensino. Contudo, não fizemos menção à estrutura algébrica corpo, pois queríamos saber se esta apareceria em suas falas. Feito o primeiro contato, agendamos uma data e um local de preferência dos professores para realizarmos a entrevista, a qual foi caracterizada como uma entrevista aberta. Todas elas aconteceram nas escolas em que os professores trabalhavam.

As entrevistas duraram, em média, 1,5 hora. Pelo fato de os professores Carla e Paulo trabalharem na mesma escola, a entrevista de ambos ficou agendada para o mesmo momento e, então, fizemos uma conversa a três: Carla, Paulo e o pesquisador. Após as entrevistas com Márcia, em 01 de outubro de 2015, e com Carla e Paulo, em 30 de outubro de 2015, refletimos sobre a necessidade de entrevistar mais um professor da Educação Básica, completando três conversas distintas, já que as entrevistas com Carla e Paulo aconteceram em um mesmo momento. Por esse motivo, realizamos a entrevista com o quarto professor, o Roberto, realizada em 21 de setembro de 2016.

As entrevistas foram gravadas com aparelho de áudio e os professores assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE - Apêndice D), que previa o anonimato dos participantes. Naquela circunstância, entendemos que o anonimato seria melhor aceito pelos professores.

Já com os três professores formadores, tiveram algumas diferenças na maneira como o contato foi realizado, em relação ao que ocorreu com os professores da Educação Básica. O primeiro contato foi sempre por e-mail, principalmente pelo fato de dois deles não serem da região de Londrina. Nesse e-mail lhes foi informada a nossa intenção de articular o ensino da estrutura algébrica corpo em cursos de Licenciatura em Matemática ao ensino dos números racionais, objeto de estudo na Educação Básica. Enviamos, junto ao convite, um arquivo contendo, além do objetivo da pesquisa, cinco perguntas (Apêndice B) que guiariam a entrevista, caso o convidado aceitasse participar. Nesse sentido, caracterizamos tais conversas como entrevistas semiestruturadas, já que tínhamos questões norteadoras. Essas questões tinham o papel de indicar ao entrevistado qual era o rumo pretendido para a conversa, mas sem enrijecê-la. Isso fica evidente pelo fato de que enviamos as questões com antecedência para que o participante pudesse refletir sobre os temas e tratasse deles com as ponderações que considerassem necessárias durante a conversa. Por diversos momentos, as questões pré-definidas nem eram enunciadas durante a conversa, pois o entrevistado já as havia abordado em suas falas.

Outra diferença metodológica foi que, para estes professores, deixamos uma opção no termo de consentimento livre e esclarecido de permitir ou não que utilizássemos seus nomes na pesquisa. Como todos permitiram, seus nomes reais são mencionados: Victor Giraldo, Tiago Reis e Plínio Moreira. A entrevista com Victor foi realizada em 17 de março de 2016, na cidade de Santo André/SP; com Tiago, em 12 de julho de 2016, na cidade de Londrina/PR; e com Plínio, em 18 de julho de 2016, na cidade de Belo Horizonte/MG. As entrevistas com os professores formadores também foram áudio-gravadas e, posteriormente, todas as entrevistas (dos professores da Educação Básica e dos professores formadores) foram transcritas para posterior análise.

A escolha por uma entrevista aberta com os professores da Educação Básica e uma semiestruturada com os professores formadores pode ser justificada. Apesar de ambas estarem relacionadas aos mesmos objetivos específicos, elas tinham papeis diferentes dentro do que buscávamos. No caso dos professores da Educação Básica, nosso interesse estava em tomar consciência do conhecimento matemático para o ensino que o professor produziu ao longo de anos de prática na escola. Por isso preferimos uma entrevista aberta, sem um roteiro com perguntas previamente estabelecidas. Os números racionais foram o tema disparador para a entrevista, mas os rumos das conversas foram escolhidos pelos próprios entrevistados. Deixamos, portanto, que o professor ficasse à vontade para falar o que quisesse sobre os diversos aspectos dos números racionais na Educação Básica, tendo a oportunidade de "compreender como os próprios sujeitos estruturam o tópico em questão" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 135). A professora Márcia, por exemplo, levou para o dia da entrevista um livro didático e uma agenda com anotações que havia feito em casa e que considerava relevante de serem abordadas. Trazer suas práticas (ou o que pensam delas) para a tese era nosso objetivo.

No caso dos professores formadores, realizamos entrevistas semiestruturadas, pois tínhamos questões mais diretas, como: i) explicitar a maneira como os formadores percebem o papel da estrutura algébrica corpo nos cursos de Licenciatura em Matemática e ii) se fazem uso de (ou sugerem) alguma estratégia específica para relacioná-la com os números racionais que futuramente será objeto de trabalho na Educação Básica dos egressos desses cursos. Se fizéssemos entrevistas abertas, como fora feito com os professores da Educação Básica, correríamos o risco de não trazer para a pesquisa modos de pensar os temas abordados nas questões supracitadas. Lembrando que nosso foco está na formação de inicial de professores e, por isso, a relevância de se ouvir, de forma mais direta, professores que atuam nessa formação.

Enquanto na conversa com os professores da Educação Básica estávamos atentos para perceber se o tema "estrutura algébrica corpo" apareceria em suas falas enquanto falávamos sobre os números racionais – coisa que não aconteceu – na conversa com os professores formadores esse mesmo tema era o centro da conversa e não poderia ficar de fora. Por isso, as perguntas tinham que ser mais diretas.

A escolha dos professores também pode ser melhor explicada. Como já dissemos, a pesquisa foi pensada sempre na tentativa de estabelecer um paralelo entre os números racionais na escola e os números racionais na formação inicial de professores. Para toda fonte de dados prevista para os números racionais na escola era, também, considerada uma na formação inicial de professores. Com esse princípio, acreditamos que três conversas com professores da Educação Básica e três com professores formadores seria um número adequado, pois, se levarmos em conta que temos outros dados (oriundos dos livros, pesquisas e documentos oficiais), as seis conversas agregam diferentes visões e, ao mesmo termo, seria viável para uma análise mais cuidadosa e aprofundada.

Como afirmamos, o principal critério para escolha dos professores da Educação Básica foi o tempo de atuação e, obviamente, sua disponibilidade em participar. Nem todos os professores que foram convidados aceitaram participar da pesquisa. Alguns nem responderam aos nossos e-mails e um outro respondeu, mas não estava disposto a participar.

No caso dos professores formadores, em princípio, tínhamos o desejo de que todos tivessem uma relação mais estreita com a Educação Matemática, pois acreditávamos que esse critério nos poria em contato com professores com uma sensibilidade maior aos objetivos pretendidos para nossa tese. Os professores Plínio e Victor são esses casos. Conhecíamos as pesquisas de ambos, assim como um pouco de suas perspectivas a respeito do papel da matemática na formação do professor. Por isso, os convidamos e o aceite de ambos foi imediato. Entretanto, nem todos os professores consultados (com as características que procurávamos inicialmente) se dispuseram a participar. Revisamos essa avaliação de que o professor deveria ter alguma relação com a Educação Matemática, por entender que um professor com formação em matemática pura/aplicada também poderia contribuir com a pesquisa, desde que atuasse em um curso de formação inicial de professores. Este foi o caso do professor Tiago Reis, que é mestre em Matemática Aplicada, na linha de Anéis de Grupos. Com um mestrado voltado às estruturas algébricas e por já ter atuado nas disciplinas de Álgebra e de Fundamentos de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Tiago seria uma “voz a ser ouvida” sobre o corpo dos números racionais na formação inicial de professores. Dessa maneira, despreocupados com a formação (Matemática Pura/Aplicada ou Educação Matemática), nosso critério de escolha foi a atuação (no momento ou anterior) em cursos de Licenciatura em Matemática, mais precisamente no ensino das estruturas algébricas.

Com formações distintas e atuando em diferentes instituições (Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, e UTFPR), os três professores formadores trazem consigo experiências – teóricas e práticas – próprias, o que enriquece e amplia a variedade de modos de pensar o corpo dos números racionais na formação de professores.

Por fim, fechamos a descrição dessa primeira etapa da produção dos dados com uma citação de Bogdan e Biklen (1994), que caracteriza nosso objetivo com as entrevistas, tanto com professores da Educação Básica como com os formadores: “a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigado desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p. 134). Essa foi nossa intenção o tempo todo.

Sobre os livros didáticos[27]

O livro didático é, sem dúvida, uma componente a ser considerada nos processos de ensino e de aprendizagem. Não vamos entrar no mérito do uso que se faz ou se poderia fazer do livro didático. Fato é que, dada sua relevância, esse recurso é frequentemente objeto de estudo e pesquisas. Catto (2000) e Lucena, Araújo e Santos (2013) são exemplos de pesquisas que investigam especificamente o conceito de número racional em livros didáticos.

Assim, além de entrevistar professores, entendemos que seria produtivo à pesquisa trazer a maneira como livros didáticos abordam os números racionais em diferentes contextos, pois, imaginamos que os livros nos forneceriam novos elementos a serem incorporados na discussão que estamos propondo. É preciso deixar claro que não fizemos uma análise desses livros, com um método específico para tal. Esse não é nosso objetivo. Usamos os livros como um outro recurso para nos dar subsídios na busca por articulações entre os números racionais na Educação Básica e o corpo dos números racionais no Ensino Superior.

Para dialogar com os números racionais ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental, escolhemos os livros *Matemática* (6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano), da Coleção Convergências, do autor Eduardo Rodrigues Chavante, por ser um livro aprovado no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2017 e cujo livro digital (manual do professor) pode ser encontrado na internet[28]. Os livros aprovados no PNLD são aqueles cujas resenhas são incluídas no Guia do Livro Didático que fica à disposição para que as escolas públicas façam suas escolhas e os utilizem de acordo com seu planejamento pedagógico. Isso significa que a partir do ano de 2017 e durante três anos, quando haverá nova avaliação, os livros *Matemática*,

---

[27] Aqui estamos chamando de livros didáticos aqueles voltados ao ensino da Matemática na Educação Básica e, também, aqueles destinados e utilizados em cursos de formação de professores.

[28] Disponível em: http://pnld.edicoessm.com.br/convergencias-matematica . Último acesso em 16 de fevereiro de 2017.

da Coleção Convergências, podem ser adotados pelos professores de Matemática das escolas públicas brasileiras.

Cabe ressaltar que não fizemos uma avaliação prévia do conteúdo do livro. Seu conteúdo só foi conhecido por nós após tomá-lo como objeto de investigação. Para a escolha da coleção, foi decisivo para nós somente os dois critérios anunciados: sua aprovação no PNLD e sua disponibilidade na internet (ainda que seja apenas a versão manual do professor), pois nos garantiu o acesso necessário. Também destacamos que não nos debruçamos a estudar uma coleção de livros didáticos para o Ensino Médio, já que nesse contexto os números racionais aparecem de forma mais sintetizada e, por isso, preferimos aprofundar na discussão a partir, apenas, da coleção para os anos finais do Ensino Fundamental.

Quanto aos livros voltados ao Ensino Superior, nosso critério inicial foi de selecionar aqueles que aparecessem com frequência em planos de ensino de disciplinas de diferentes universidades. São os casos dos livros de Domingues e Iezzi (2003) e Gonçalves (2001), que, com frequência, aparecem como bibliografia básica das disciplinas de Álgebra ou Estruturas Algébricas[29]; ou o livro de Milies e Coelho (2006), muito utilizado em disciplinas como Introdução à Álgebra ou Fundamentos de Álgebra[30]. Porém, nem todos os livros que analisamos possuem tal característica, já que alguns deles surgiram ao longo de nossos estudos, por outros meios, e acabaram por trazer elementos que consideramos relevantes para a nossa discussão. São eles: Domingues (1991, 2009), Niven (1984), Carvalho, Lopes e Souza (1984), Evaristo e Perdigão (2013) e Caraça (1951).

Utilizamos diversos livros, pois as diferenças aparentes entre eles, seja na linguagem ou nas abordagens, nos permitem criar uma série de reflexões que precisam ser discutidas no âmbito da formação inicial de professores. Aliás, se em algum momento de nossas análises questionamos a abordagem de algum livro, o fazemos somente com o propósito de gerar discussões pertinentes à formação do professor. Não se trata, necessariamente, de uma crítica ao livro, já que nem sempre fora escrito especificamente para um curso de Licenciatura em Matemática.

Sobre as pesquisas na área de Educação Matemática

[29] Por exemplo, nos cursos de Licenciatura em Matemática da UFOP, UTFPR – Cornélio Procópio e UFAM.
[30] Por exemplo, nos cursos de Licenciatura em Matemática da UFOP, UTFPR – Cornélio Procópio e UFMT.

Em nossa investigação, as pesquisas na área de Educação Matemática aqui utilizadas têm dois papeis mais centrais. O primeiro deles está relacionado ao segundo objetivo específico e, portanto, visa contribuir com as discussões a respeito dos números racionais tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior (em particular, na Licenciatura em Matemática). Essa discussão tem como propósito o conhecimento matemático do professor e, dessa maneira, permeia o debate sobre os números racionais na formação do professor. Assim, as pesquisas que nos interessam para este primeiro papel central são aquelas que discutem questões sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais na Educação Básica, bem como o conhecimento matemático para seu ensino e os números racionais e a estrutura de corpo na formação do professor.

O segundo papel central está relacionado mais diretamente ao terceiro objetivo específico e visa buscar diferentes modos de pensar os números racionais em diferentes contextos. As pesquisas selecionadas com vistas ao primeiro papel, citadas no parágrafo anterior, também servem a este propósito. Contudo, há um outro tipo de pesquisa que tem uma função específica na construção da matriz epistemológica, que são as pesquisas acerca das concepções alternativas. Vamos explicar melhor as características dessas pesquisas antes de continuarmos o detalhamento dessa etapa da investigação.

Segundo Coutinho (2005), a investigação sobre concepções alternativas no ensino de ciências tem sido foco de pesquisa desde a década 1970 e ganhou força nos anos de 1980. Tais estudos revelam que crianças, adolescentes e mesmo professores possuem diversas ideias que são diferentes e às vezes inconsistentes com o conhecimento científico. Conforme destaca o autor, essas ideias têm sido denotadas, na literatura, de diferentes maneiras, tais como "concepções equivocadas", "concepções alternativas", "estruturas alternativas", "pré-concepções" e "concepções pré-cientíticas". Não há um consenso sobre o termo a ser utilizado para descrever as ideias informais das pessoas. Tanto para Coutinho (2005) como os demais autores que se fundamentam na abordagem dos perfis conceituais o termo "concepções alternativas" tem sido adotado para denotar qualquer ideia que seja diferente daquelas geralmente aceitas pela ciência.

Com relação à origem dessas concepções alternativas, Coutinho (2005) apresenta três possibilidades: 1) as ideias informais que são adquiridas pelos estudantes na experiência cotidiana e são trazidas para o espaço da sala de aula; 2) as visões incompletas ou impróprias são desenvolvidas pelos estudantes durante o processo de ensino; 3) conceitos errôneos são propagados por professores e por livros textos.

Não estamos interessados em saber a origem dessas concepções alternativas, mas sim em conhecer algumas possíveis, uma vez que o programa de pesquisa sobre perfis conceituais, ao se comprometer com a aprendizagem de conceitos na educação científica, o faz reconhecendo de igual modo, a importância da cultura, da linguagem e do contexto neste processo (SEPULVEDA, 2010). Para Mortimer (2000), mesmo as concepções individuais detectadas na revisão da literatura de concepções alternativas revelam um padrão de cultura do cotidiano, numa relação muito estreita com a linguagem do senso comum, sendo, em muitos casos, algo coletivo.

Dito isso, retornemos às escolhas das pesquisas no presente estudo. No capítulo 2, apresentaremos um levantamento bibliográfico que realizamos, no qual encontramos 37 pesquisas sobre os números racionais. Esse levantamento nos permitiu ter contato com diversas pesquisas sobre os números racionais, contudo, não foi e nem visou ser um levantamento exaustivo das pesquisas sobre o tema, como se fora um estado da arte. Dessas pesquisas levantadas, selecionamos algumas. Porém, outras surgiram por meio de outros estudos.

Delimitar o número de pesquisas foi necessário, uma vez que essas são apenas uma das fontes de dados de nossa pesquisa e seria inviável trazer um grande número delas para serem discutidas. Assim, tivemos que fazer escolhas, que foram feitas com base em nossas percepções acerca de qual era mais relevante para o momento da pesquisa, desde que elas tivessem relação com os dois papéis centrais supracitados.

As pesquisas aqui discutidas são: Damico (2007), sobre os números racionais na formação do professor; Zakaryan e Ribeiro (2016), quando tratam do que chamam de "conhecimento do ensino de números racionais"; Pinto (2011), que realizou um trabalho acerca dos números racionais, mais especificamente sobre o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais de alunos do 6º ano de escolaridade (em Portugal); Wasserman (2014, 2016), ambas sobre as estruturas algébricas na formação do professor; Moreira e David (2011), que discutem as dissonâncias e conflitos entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar utilizando, para isso, os conjuntos numéricos; e Pinto e Tall (1996) que, juntamente com o trabalho de Damico (2007), nos fornece um debate sobre as concepções alternativas acerca dos números racionais. Discutir esses trabalhos significa dialogar com seus dados e suas análises, bem como com suas conclusões.

Sobre os documentos oficiais

Outra etapa da pesquisa é a análise de documentos oficiais de ambos os níveis de ensino. Da Educação Básica, analisamos a última versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento ainda em fase de construção[31], mas que em breve será o documento de caráter normativo tido como referência "para que as escolas e os sistemas de ensino elaborem seus currículos, constituindo-se instrumento de gestão pedagógica das redes" (BRASIL, 2016, p. 25). Como nossa pesquisa visa propor um repensar a formação inicial matemática para o futuro, escolhemos, assim como o livro didático, um documento normativo atual e que estará em vigência durante os próximos anos.

Para o Ensino Superior, nos debruçamos sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, e os Projetos Pedagógicos de 15 Cursos de Licenciatura em Matemática. As Diretrizes servem como orientação para a melhoria e a transformação do licenciado em Matemática, bem como se preocupa que os egressos estejam preparados para sua futura prática profissional (BRASIL, 2002).

As orientações dadas pelas Diretrizes recaem sobre o Projeto Pedagógico dos Cursos (PPC), que é a identidade de um curso, o documento que o define. Por meio do PPC, podemos ter uma noção da perspectiva do curso, quais seus objetivos, quais disciplinas compõem a matriz curricular, o que se espera dos egressos etc. Na seção 3.1, dedicada a analisar PPC, esclarecemos nossos critérios de escolha dos 15 cursos investigados. Em alguns casos, como o PPC não estava disponível no site da universidade, nossa análise ficou restrita à Matriz Curricular e Ementas.

Finalizamos a explicação de nossas escolhas metodológicas afirmando que todas elas (professores, livros, pesquisas e documentos oficiais) poderiam ter sido diferentes. Tivemos nossas justificativas para cada uma, mas poderiam ser outras. Caso fossem, certamente o desenrolar dessa pesquisa também seria outro. O que apresentamos aqui é o nosso desenrolar, fruto de nossas escolhas e nossas análises.

Buscamos uma diversidade de dados que contemplasse uma multiplicidade de vozes que nos permitissem construir uma ideia mais ampla do problema a ser investigado. Ao agregarmos essa multiplicidade de vozes, procuramos uma complementaridade de significados, ou seja, não almejamos, em momento algum, uma convergência desses

[31] Em junho de 2015, foi instituída uma comissão para elaboração da BNCC. Atualmente, o documento encontra-se em sua segunda versão e é esta que estamos considerando nesse estudo. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf, acessado em 21 de janeiro de 2017.

significados, num sentido de validar ou dar maior confiabilidade aos resultados obtidos. A complementariedade de significados foi a base para nossas análises e isso será melhor explicado e aprofundados nos capítulos 2 e 3.

Ainda com o objetivo de tornar claras e evidentes nossas opções metodológicas e suas relações com os objetivos específicos, produzimos o Quadro 1, um quadro síntese do que explicamos nessa seção.

Quadro 1: síntese das escolhas metodológicas

Objetivo geral da pesquisa *investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática*	**Objetivos Específicos**	**Produção dos dados e a forma como estão relacionados com cada objetivo específico**	**Análise dos dados**
	<u>Objetivo Específico 1</u>: *caracterizar* que matemática entendemos ser adequada à formação inicial do professor.	- Primeiro momento: Referenciais teóricos (Perfil Conceitual, HCK e Matemática Acadêmica e Matemática Escolar); - Segundo momento: refinar nossa caracterização a partir dos objetivos específicos 2, 3 e 4.	No primeiro momento, realizamos um exercício teórico de compreensão e interpretação dos referenciais teóricos assumidos, articulando-os e construindo nossa caracterização para a matemática na formação do professor, apresentada na seção 1.3. No segundo momento, reformulamos a caracterização preliminar a partir das demais análises decorrentes das outras etapas da pesquisa, finalizando com uma caracterização mais específica para o corpo dos números racionais.
	<u>Objetivo Específico 2</u>: *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados aspectos dos números racionais na Matemática Escolar e na Matemática Acadêmica	<u>*Números racionais na Matemática Acadêmica*</u>: - Entrevistas semiestruturadas com os professores do Ensino Superior, com vistas a: i) conhecer suas perspectivas sobre o tratamento dos números racionais na formação de professores; ii) conhecer suas posições quanto à relevância ou não da estrutura algébrica corpo no desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais na Educação Básica; iii) conhecer possíveis conexões entre a estrutura algébrica corpo e o ensino dos números racionais na Educação Básica; - Livros didáticos para o Ensino Superior, com o objetivo de: conhecer abordagens dadas aos números racionais na Matemática Acadêmica e abordagens dadas à estrutura algébrica corpo; compreender o tratamento das relações entre a estrutura algébrica corpo e os números racionais; e conhecer possibilidades de articulações com a Matemática Escolar; - Pesquisas sobre as estruturas algébricas em geral, ou sobre a estrutura de corpo em particular, buscando resultados já obtidos sobre possíveis relações (ou não) das estruturas e a prática docente na Educação Básica;	Buscamos articulações entre os dados produzidos no contexto *Números racionais na Matemática Acadêmica* com os dados obtidos no contexto *Números racionais na Matemática Escolar*. Dentro de cada um desses dois contextos, os dados foram descritos e interpretados, procurando sempre uma complementariedade, isto é, por serem de naturezas distintas, cada dado nos permitiu interpretações em direções diferentes, ampliando nossos modos de pensar os números racionais. Nossa intenção ao analisar esses dados foi “dar voz” a diferentes personagens (professores, livros, pesquisas, documentos oficiais), conhecer diversos pontos de vista para podermos construir um posicionamento nosso a partir deles. Por isso, a análise não foi feita no sentido de julgar ou de atribuir juízo de valor aos dados e, sim, de reconhecer e valorizar cada personagem como um constituinte relevante no processo de elaboração e proposição de alternativas para a formação de professores e de, por meio deles, levantar questionamentos que julgamos pertinentes para a discussão em questão. Assim, os dados são as fontes inspiradoras de interpretações, indagações e proposições que moveram a pesquisa. A essas interpretações chamamos ao longo do trabalho de *Reflexões*.

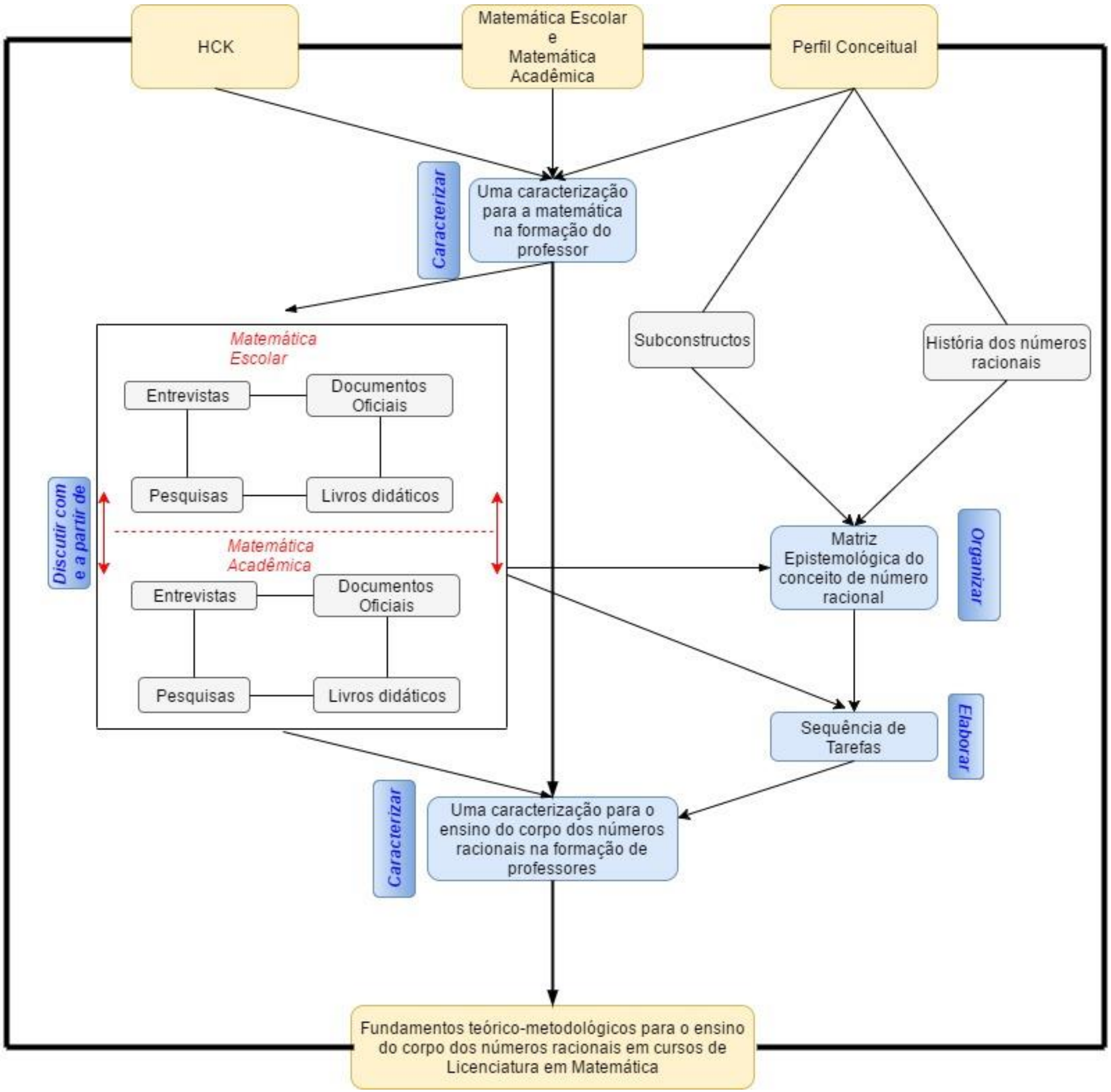
		- As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura e os Projetos Pedagógicos dos Cursos de formação de professores de 14 instituições brasileiras, buscando compreender como interpretam a disciplina Fundamentos de Álgebra, qual o espaço dado e o papel atribuído às estruturas algébricas nos cursos e qual o espaço dado aos números racionais em suas disciplinas. *<u>Números racionais na Matemática Escolar</u>*: - Entrevistas abertas com os professores da Educação Básica, com vistas a compreender aspectos do conhecimento matemático sobre os números racionais produzido ao longo de suas experiências em sala de aula; - Livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental, com o objetivo de conhecer o tratamento dos números racionais ao longo desse nível de ensino: sua forma de apresentação, definição, significados, propriedades, operações, relações com outros conteúdos etc.; - Pesquisas sobre os números racionais na Educação Básica, visando encontrar resultados sobre ensino e aprendizagem dos números racionais, concepções de estudantes, conhecimento de professores etc., que nos forneçam subsídios para produzir significados acerca dos conhecimentos associados à prática docente; - A última versão disponível da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo mais atual que temos como referência para orientar a elaboração do currículo escolar, buscando conhecer o espaço dado e o tratamento sugerido aos números racionais ao longo de toda a escolarização básica.	Cada *Reflexão* é o produto de um movimento de análise oriunda de leituras iniciais dos dados, seleção de trechos que compuseram as unidades a serem analisadas, novas leituras sob o olhar dos referenciais teóricos por meio de questionamentos, como: “esse aspecto da Matemática Acadêmica pode favorecer o conhecimento matemático do professor?” ou “Até que ponto isso pode ser trazido para a Matemática Escolar”. Nos capítulos de análises dos dados (capítulos 2 e 3), apresentamos trechos dos dados acompanhados das *Reflexões* feitas.

	<u>Objetivo Específico 3</u>: *organizar,* na matriz epistemológica, diferentes formas de significar o conceito de número racional	- *Domínio sociocultural*: informações extraídas de fontes secundárias sobre a história dos números racionais; análises matemáticas dos subconstrutos propostos por Kieren (1976, 1980); análise dos livros didáticos para o Ensino Fundamental e Ensino Superior; - *Domínio ontogenético*: informações obtidas na literatura, principalmente aquela sobre concepções alternativas de alunos acerca do conceito de número racional; entrevistas com os professores formadores e os professores da Educação Básica acerca dos números racionais.	Em um primeiro momento, os dados de cada um dos dois domínios genéticos são apresentados e interpretados, sendo dedicada uma seção específica para cada um deles (seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4). Em um segundo momento, uma análise dialógica é efetuada, isto é, realizamos idas e vindas em cada intepretação realizada no primeiro momento, permitindo uma "conversa" entre os dados produzidos. Esse movimento nos permitiu identificar alguns temas epistemológicos e caracterizar compromissos epistemológicos e ontológicos, que estão dispostos na matriz epistemológica apresentada na seção 2.5.
	<u>Objetivo Específico 4</u>: *elaborar* uma sequência de tarefas para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática	- Todos os dados produzidos ao longo da tese e que relacionados com os objetivos 2 e 3 estão relacionados com o objetivo 4, permitindo-nos *propor* uma sequência de tarefas segundo nossos pressupostos teóricos, e as *Reflexões* produzidas e os *temas epistemológicos* identificados. - Vale destacar que as entrevistas com os professores, tanto da Educação Básica como do Ensino Superior, também tiveram esse objetivo de conhecer possibilidades para propormos alguma alternativa para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores. Aos professores da Educação Básica, esse objetivo não foi explicitado, mas buscávamos trazer alguns de seus conhecimentos produzidos ao longe de anos de experiência para comporem o aspecto propositivo da tese. Já aos professores formadores, essa intenção de propor uma sequência de tarefas ficou evidente pela pergunta 5 do roteiro para as entrevistas (Apêndice B).	Essa etapa da pesquisa tem um caráter propositivo, com base nos dados analisados anteriormente. Para fundamentar nossa concepção sobre o delineamento de tarefas, apresentamos, na seção 3.2, a abordagem que Barbosa e Oliveira (2015) dão para o que chamam de Pesquisa de Desenvolvimento, enquanto uma possibilidade para o desenvolvimento do produto educacional, e o referencial de Ponte (2005, 2014) para a tipologia de tarefas e a diferenciação entre tarefa e atividade.

Fonte: elaborado pelo autor

Na Figura 3, tentamos sintetizar a estrutura da pesquisa, o caminho percorrido.

Figura 3: Síntese do caminho percorrido durante a pesquisa.



Fonte: o próprio autor.

Em um primeiro momento, na parte superior da Figura 3, temos os referenciais teóricos da pesquisa, que se articulam para resultar em nossa *caracterização* para a matemática na formação do professor. Com base nessa caracterização, seguimos para a etapa da pesquisa que *discute com* e *a partir de* diferentes fontes de dados. Na Figura 3, as setas vermelhas de duplo sentido indicam a tentativa de estabelecer um diálogo entre as fontes da Matemática Acadêmica e da Matemática Escolar. Paralelo a isso, realizamos os estudos sobre os subconstrutos de Kieren e sobre o desenvolvimento histórico dos números racionais, que, junto ao objetivo de *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados, convergem para a *organização* da matriz epistemológica e, na sequência, para a *elaboração* da sequência de tarefas. Por fim, com os quatro objetivos específicos bem encaminhados, temos condições de especificar a caracterização da formação matemática para o professor para o caso do corpo dos números racionais, culminando na resposta à nossa pergunta investigativa, a ser construída nas considerações finais da tese. Vale notar que a linha preta que contorna a Figura 3 está indicando que os referenciais teóricos sustentam e permeiam toda a pesquisa, possibilitando-nos propor uma forma plausível para os fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores.

Antes de prosseguirmos para fechar a seção sobre os aspectos metodológicos, precisamos fazer duas observações que consideramos importantes.

Primeiro, gostaríamos de destacar que as fontes de dados (entrevistas com professores, livros didáticos, pesquisas e documentos oficiais) estão alinhadas com os três referenciais teóricos assumidos em nossa tese. Como já dissemos, a abordagem dos perfis conceituais considera como ricas fontes de dados os livros didáticos, as pesquisas e as entrevistas. A caracterização de Matemática Escolar, proposta por Moreira e David (2010), inclui, além dos saberes docentes, pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Stylianides e Ball (2004) apresentam um *framework* para estudar o conhecimento matemático necessário para o ensino. Nesse *framework*, os autores sugerem seis abordagens para desenvolver um estudo desse tipo, dentre elas destacamos três, que se referem a análises de: currículos de matemática dos professores (incluindo documentos curriculares e livros didáticos); currículos de matemática de estudantes (incluindo documentos curriculares e livros didáticos); e conhecimento matemático dos professores (que pode incluir entrevistas e pesquisas sobre aspectos desse conhecimento).

As abordagens sugeridas por Stylianides e Ball (2004) reforçam o que vamos argumentar na segunda observação que fazemos agora. Nossa pesquisa procura pensar uma matemática para a formação a partir do conhecimento matemático utilizado na prática docente na Educação Básica. No entanto, como investigar essa prática? Entendemos que, para compreender melhor a epistemologia dos saberes ‘da ação’, é preciso investigar a atuação real do docente, como sugere Fiorentini (2000) quando aborda a investigação *com* professores.

Contudo, na descrição das fontes dos dados da nossa pesquisa, ficou evidente que não observamos a atuação do professor em sala de aula. Nossas escolhas metodológicas foram outras e nos levaram a investigar por outros meios as questões que se colocam na prática docente e as demandas matemáticas para o ensino. O livro didático, muitas vezes tomado como referência para o trabalho do professor, nos guiou na compreensão de como os números racionais estão apresentados, não apenas no 7º ano quando, estes são definidos, mas ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, o livro didático nos indicou possíveis estratégias de ensino, com tarefas organizadas em uma ordem intencional, com vistas à aprendizagem daquele conteúdo. As entrevistas nos trouxeram relevantes características do conhecimento matemático para o ensino dos professores investigados, principalmente do HCK, construído ao longo de anos de experiência. Como as entrevistas com os professores da Educação Básica foram abertas, eles ficaram desprendidos para abordar os números racionais da forma como preferissem e isso permitiu que transitassem por diversos aspectos do conceito ao longo do currículo, além de explicitarem aspectos referentes à sua atuação. A professora Márcia, por exemplo, por ter feito Magistério, Licenciatura em Matemática e, posteriormente, Pedagogia, e por já ter atuado em todos os níveis da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio) evidenciou diversas características do conhecimento do horizonte dos números racionais. Já as pesquisas nos permitiram olhar para os números racionais no contexto escolar por meio de análise e reflexões realizadas em outras investigações. Assim, quando falamos de nossa investigação sobre a prática docente, estamos nos referindo à articulação entre essas fontes.

No capítulo seguinte, iniciamos nossas análises com o que chamamos de aprofundamento teórico para o ensino do corpo dos números racionais.

2. Aprofundamento teórico para o ensino do corpo dos números racionais

Na introdução deste trabalho, afirmamos que o professor precisa de uma base sólida de conhecimentos matemáticos para realizar seu papel de ensinar, porém isso não significa, necessariamente, saber *mais* matemática, mas sim conhecer os conteúdos específicos sob diferentes perspectivas (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013). Nesse sentido, o presente capítulo é dedicado a abordar os números racionais e seu ensino por meio de algumas dessas perspectivas, de modo a nos apontar possibilidades de se trabalhar o corpo dos números racionais na formação inicial de professores.

Antes de dissertar sobre qualquer tema, uma etapa necessária a toda pesquisa de doutorado é o levantamento de pesquisas já realizadas sobre o que se pretender investigar. Esse levantamento, apresentado no Apêndice A, permitiu-nos, não apenas justificar a pesquisa, como fizemos na introdução, mas também nos indicou o que já tem e o que ainda pode ser produzido a respeito daquele tema.

Por isso, realizamos um levantamento de dissertações e teses defendidas, de trabalhos publicados em eventos e em periódicos da área de Educação Matemática com dois objetivos: (i) encontrar trabalhos publicados que se aproximassem das nossas intenções de pesquisa, isto é, trabalhos que buscassem estabelecer relações entre o ensino da estrutura algébrica corpo na formação de professores e o ensino de números racionais na Educação Básica, para termos ciência do que já havia sido produzido sobre o tema em questão; (ii) encontrar pesquisas que tratassem dos processos de ensino e de aprendizagem dos números racionais e da estrutura algébrica corpo (não necessariamente relacionando-os) que nos ampliassem a compreensão desses processos e, também, nos indicassem possibilidades de tarefas para o ensino da estrutura corpo na formação de professores.

Esse levantamento nos foi fundamental, pois, como veremos agora, tomar conhecimento das pesquisas já produzidas foi como descobrir pedras colocadas (por outros pesquisadores) propositalmente ao longo do caminho percorrido, evitando que ficássemos "atolados" e parados em trechos já explorados. Isto é, as pesquisas levantadas nos guiaram e nos permitiram caminhar na direção que pretendíamos. Vamos apresentar, brevemente, o nosso levantamento bibliográfico e alguns dados que dele retiramos.

Sobre as dissertações e teses, como, na época da realização do levantamento[32], o Banco de Teses da CAPES disponibilizava apenas as produções dos anos de 2011 e 2012, fizemos, também, uma busca em programas de mestrado (acadêmico e profissional) e doutorado que apareciam na relação de cursos recomendados e reconhecidos pela CAPES da grande área *Multidisciplinar* e área *Ensino* (dos 123 programas, pesquisamos em 82)[33]. Contudo, nem todas as instituições lá listadas disponibilizam, em seus sites, as dissertações e teses defendidas.

Além desses, procuramos em outros três programas da área *Educação* que têm uma linha de pesquisa em Educação Matemática. São eles os programas da Universidade de São Paulo (USP), da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e o da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Para realizar o levantamento em cada programa que disponibilizava suas produções em seus sites, assumimos o pressuposto de que uma pesquisa cujo foco principal seja o estudo dos números racionais e/ou o estudo da estrutura algébrica corpo traria, em seu título, as palavras "racional(is)" e/ou "corpo". Por isso, utilizamos essas palavras como disparador de busca para selecionar, pelos títulos, os trabalhos sobre o tema.

Não encontramos pesquisas que traziam a palavra "corpo" no título e, das que traziam o termo "racionais" encontradas, apenas uma, Damico (2007), apresenta uma breve discussão sobre o corpo dos racionais, mesmo que essse não seja seu objeto de estudo. Além desse trabalho, não encontramos outras dissertações ou teses que, em seu texto, explicitassem alguma relação possível entre o ensino dos números racionais e da estrutura algébrica corpo (nosso objetivo (i) desse levantamento). Porém, encontramos 20 pesquisas (principalmente dissertações) que tratam de diversos aspectos dos números racionais na Educação Básica (nosso objetivo (ii) desse levantamento).

Com relação ao levantamento realizado em periódicos, o fizemos utilizando os mesmos termos (racionais e corpo) em todas as edições disponíveis nos sites dos seguintes periódicos: Bolema, Zétetiké, Educação Matemática Pesquisa, Educação Matemática em

---

[32] O levantamento bibliográfico foi realizado em agosto de 2015.

[33] Excluímos aqueles programas que, pelo nome, se distanciavam do Ensino de Matemática, tais como: Formação Interdisciplinar em Saúde, Ensino em Saúde, Ensino em Saúde na Amazônia, Ensino Tecnológico, Ensino na Saúde, Ensino de Física, Ensino de Ciências (modalidades Física, Química e Biologia) etc.

Revista, Boletim GEPEM, Educação e Pesquisa, Perspectivas da Educação Matemática, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, REVEMAT e Revista Brasileira de História da Matemática, tendo encontrado 17 trabalhos a partir desse filtro.

A busca em anais de eventos foi realizada nos anais do III, IV e V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), sempre concentrando os seguintes Grupos de Trabalhos (GTs): GT4 – Educação Matemática no Ensino Superior; e GT7 – Formação de Professores que Ensinam Matemática. Nesse levantamento, não encontramos trabalhos que traziam no título pelo menos uma das palavras que consideramos.

Não queríamos realizar um estado da arte. Queríamos, sim, obter um amplo panorama daquilo que poderia auxiliar-nos no caminhar desta pesquisa. Entendemos que todas as pesquisas que encontramos são, elas próprias, ricas fontes de referências e nos permitiram conhecer e levantar outras pesquisas, nacionais e internacionais, que não apareceram em nossa investigação inicial. Além disso, pesquisas como Rodrigues (2005), Damico (2007) e Fávero e Neves (2012) já realizaram revisões bibliográficas sobre o tema "números racionais", das quais nos apropriamos para prosseguir.

Dos trabalhos selecionados, pudemos obter dados a partir do título, do objetivo e dos referenciais teóricos utilizados. Observamos que, em alguns casos, há uma relação entre teses/dissertações encontradas e os artigos publicados em periódicos. Isto é, trabalhos oriundos de pesquisas de mestrado e de doutorado tornaram-se artigos em periódicos, como os casos de Rosa (2007), Romanatto (1997) e Silva (2013), que resultaram, respectivamente, nos artigos Rosa e Viali (2008), Romanatto (1999) e Silva, Santiago e Santos (2014).

Também foi possível perceber a predominância de alguns referenciais teóricos em grande parte dos trabalhos encontrados. As pesquisas de Kieren, principalmente Kieren (1976, 1980, 1988), foram amplamente citadas ou utilizadas como referenciais teóricos em trabalhos que tratam dos números racionais. Muitos trabalhos utilizam a ideia dos *subconstrutos dos números racionais*, de Kieren (1980), como meio de interpretar os números racionais. Os subconstrutos (ou significados para os números racionais) geralmente considerados são: razão, quociente, medida e operador.

Outros estudos que apareceram com certa recorrência em nossa busca foram aqueles realizados pelo *Rational Number Project*[34] (RNP). Moreira e Ferreira (2008) resumem a relação entre os trabalhos do RNP e de Kieren e suas repercussões em pesquisas mais recentes:

> Naquele que talvez seja (paralelamente aos trabalhos de Kieren) o conjunto de estudos de maior repercussão na literatura especializada sobre os racionais nos últimos 35 anos, o Rational Number Project (RNP) apresenta uma série de resultados de pesquisas empíricas e de reflexões teóricas sobre o ensino e a aprendizagem dos racionais. A partir do início da década de 1980, esses pesquisadores modificam a lista de subconstrutos proposta por Kieren (1976), redefinindo alguns deles e subdividindo outros. A lista do RNP em 1983 é a seguinte: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado, corpo quociente e operador (BEHR et al., 1983), mas eles afirmam que o nível de sofisticação associado ao subconstruto corpo quociente demanda estruturas intelectuais que estariam fora do alcance de alunos do Ensino Fundamental. Nota-se, assim, certa dinâmica na determinação dos subconstrutos mais relevantes. Enfim, na segunda metade da década 1990-2000, a literatura parece se estabilizar na consideração de cinco deles como principais: relação parte-todo, medida, razão, quociente indicado e operador. (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 106).

Também verificamos muitas referências às abordagens teóricas dos registros de representações semióticas, de Duval, e da Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud. Fato esse que também fora evidenciado por Fávero e Neves (2012), em sua revisão da literatura.

Quanto aos objetivos das pesquisas levantadas, notamos o amplo interesse pelas diferentes formas de dar sentido aos números racionais e diferentes denominações para isso. Nos objetivos, surgem expressões como: os processos de ensinar e de aprender os números racionais na perspectiva de *uma rede ou teia de relações ou significados* (ROMANATTO, 1997); investigar *significados e as representações dos números racionais* (SILVA; SANTIAGO; SANTOS, 2014); abordar as *diferentes "personalidades" do número racional* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). Isso parece indicar o fato do número racional ser um conceito polissêmico, o que reforça nosso entendimento a respeito da possibilidade de construção de um perfil conceitual.

Na tentativa de organizar as pesquisas levantadas, as agrupamos pelos seguintes temas: formação de professores; conhecimento do professor; ensino e aprendizagem dos números racionais (concepções de alunos, abordagens de ensino, contribuições do uso de *softwares* nos processos de ensino e aprendizagem); análise de livros didáticos; estudo teórico; números racionais no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio); levantamento bibliográfico; e História da Educação Matemática. Formamos, assim, o Quadro 2:

[34] Os trabalhos do RNP podem sem acessados em: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/default.html

Quadro 2: Agrupamento das pesquisas levantadas

Agrupamento	**Pesquisas**
Formação de professores	Damico (2007); Moreira e David (2004)
Conhecimento do professor	Souza (2015), Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015); Campos e Silva (2009), Rojas, Flores, Carrillo (2015)
Ensino e aprendizagem dos números racionais	Pereira (2007); Silva (2008); Souza (2006); Lage (2006); Rodrigues (2005); Lima (2010); Severo (2009); Rosa (2007); Alves (2012); Kichow (2009); Patrono (2011); Santos (2011); Gil (2012); Romanatto (1997, 1999); Onuchic e Allevato (2008); Silva e Almouloud (2008); Rosa e Viali (2008); Campos e Rodrigues (2007); Fávero e Neves (2008); Ponte e Quaresma (2014); Freire (2011); Ceragioli (2011).
Análise de livros didáticos	Catto (2000); Lucena, Araújo e Santos (2013)
Estudo teórico	Zanella (2014)
Números racionais no ENEM	Silva, Santiago e Santos (2013); Silva, Santiago e Santos (2014)
Levantamento bibliográfico	Moreira e Ferreira (2008); Fávero e Neves (2012)
História da Educação Matemática	Gomes (2006)

Fonte: o próprio autor

O Quadro 2 nos indica que poucas são as pesquisas sobre os números racionais na formação de professores e, também, poucas são as que investigam o conhecimento matemático do professor para o ensino desses números. A maior parte delas se debruça a investigar questões sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Essa constatação nos é relevante: se o baixo número de pesquisas sobre os números racionais na formação do professor ou sobre o conhecimento matemático para seu ensino indicam a necessidade de pesquisas nessa linha, o alto número de trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem desses números nos auxiliam no desenvolvimento da presente pesquisa.

Munidos dessas pesquisas, seguimos adiante com nossos propósitos e vamos, nesse momento, explorar os números racionais por quatro eixos distintos, realizando:

i) uma discussão das pesquisas de Kieren sobre os subconstrutos dos números racionais, uma vez que eles se mostraram referenciais teóricos amplamente utilizados no levantamento realizado e por discutirem os diferentes significados dos números racionais, o que traz relevantes implicações para o presente trabalho;

ii) uma abordagem do desenvolvimento histórico dos números racionais, elucidando como esse conceito foi interpretado ao longo da história e como se deu a construção da noção de corpo dos números racionais;

iii) um estudo sobre os números racionais na Matemática Acadêmica, a partir de livros, pesquisas e de entrevistas com professores que atuam ou aturam em cursos de Licenciatura em Matemática, lecionando alguma disciplina que envolva esse tema;

iv) um estudo sobre os números racionais na Matemática Escolar, a partir de livros didáticos, pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse conteúdo matemático e de entrevistas com professores da Educação Básica com experiência no ensino dos números racionais.

Esses quatro eixos estão organizados em seções. Uma quinta seção, a 2.5, é dedicada a construir a Matriz Epistemológica do número racional. Juntas, essas cinco seções constituem o que estamos entendendo por aprofundamento teórico para o ensino do corpo dos números racionais.

2.1 Os subconstrutos dos números racionais

O levantamento bibliográfico que realizamos apontou uma ampla aceitação, pelas pesquisas brasileiras, do referencial teórico de Kieren (1976, 1980) para tratar dos diferentes significados dos números racionais. Isso significa que as análises matemáticas de Kieren, que resultam nos chamados subconstrutos dos números racionais, têm se estabilizado perante a comunidade acadêmica enquanto caracterização dos diferentes significados dos números racionais. Por esse motivo, os subconstrutos propostos por esse autor compõem uma de nossas etapas de estudos sobre os números racionais, referente ao domínio sociocultural da construção do perfil conceitual de número racional.

Sabemos que há outros estudos teóricos que influenciaram (e influenciam) diversas pesquisas. O próprio RNP, com trabalhos como o de Behr et al. (1983), nos fornece resultados e propostas de ensino dos números racionais; a proposta curricular da Educação Matemática Realística (EMR), com as ideias de Freudenthal e colaboradores, também traz consideráveis contribuições sobre o ensino desses números[35]. Entretanto, para este momento, focaremos nos trabalhos de Kieren.

Ressaltamos que nossa perspectiva para a construção de um perfil conceitual de número racional se difere da abordagem dos subconstrutos de Kieren. Se a utilizamos aqui como contraponto ou, em alguns momentos, como complemento, é porque, como dissemos, a

---

[35] Para um maior detalhamento sobre essas duas propostas curriculares para o ensino e a aprendizagem de números racionais, ver o trabalho de Pinto (2011).

teoria dos subconstrutos tem sido legitimada pelas pesquisas que a utilizam como referencial e, portanto, seus significados têm sido aceitos. Entretanto, por consideramos a abordagem de Kieren estritamente conceitual, ignorando outros aspectos, nos diferenciamos dela, e isso ficará mais evidente ao final desta seção, quando apontamos algumas dessas diferenças.

Kieren (1980) apresenta um histórico do ensino dos números racionais ao longo dos (na época) últimos 150 anos. Muito se discutia acerca do adiamento do ensino dos números racionais até que os estudantes tivessem atingido o estágio das operações formais[36] (KIEREN, 1980). No período que chamou de "*The 'Old' Mathematics Constructs*", Kieren (1980) aponta as ideias de De Morgan, para quem a fração era tida como uma extensão dos números inteiros, sua construção era feita por um conjunto de algoritmos computacionais e seu desenvolvimento centrado nesses algoritmos, como era o caso da adição de frações.

No período chamado de "*The New Mathematics Constructs*", Kieren (1980) apresenta as ideias do Movimento da Matemática Moderna, uma tentativa de aliviar a superficialidade do ensino dos números racionais dos anos anteriores, aprofundando as noções sobre esses números, fazendo com que as crianças interagissem com as estruturas da matemática e, em particular, a estrutura de corpo (KIEREN, 1980).

Do ponto de vista do ensino e da construção dos números racionais, esses dois períodos se mostraram frágeis, segundo o autor. Por isso, como alternativa, Kieren (1980) sugere: uma análise matemática sobre os números racionais conduz a numerosas interpretações que formam um "todo conceitual" para a construção de estruturas cognitivas e instrucionais. Isto é, o movimento traçado por Kieren é: "o 'matemático' definindo o 'cognitivo' e este sugerindo o 'didático'" (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 118). Tal movimento para a caracterização dos números racionais é explicitamente criticado por Moreira e Ferreira (2008). Apontaremos essas críticas mais adiante, quando apresentarmos o subconstruto *operador*, já que a crítica feita por Moreira e Ferreira (2008) é construída em cima desse subconstruto.

Em um trabalho inicial, Kieren (1976) apresentou sete interpretações (ainda não as chamava de subconstrutos) para os números racionais: frações; frações decimais; pares ordenados (classes de equivalência); elemento de um corpo quociente; medidas; operadores; e razão. Já no trabalho de 1980, Kieren reduziu para cinco as principais ideias que emergem como base para construção dos números racionais: parte-todo; razão; quociente; medida; e operador. Para o autor, esses cinco subconstrutos (nesse trabalho o autor já usa o termo subconstruto) não são matematicamente nem psicologicamente independentes, mas representam cinco padrões

[36] Com estágio de operações formais, Kieren (1980) refere-se aos estágios de Piaget.

separados de pensar os números racionais. O termo subconstruto utilizado por Kieren (1980) parece ter origem em Margenau (1961), que atribui o conhecimento à construção humana, e em Wagner (1976), quando sugere que, para uma pessoa, os números racionais devem ser entendidos como um mega-conceito que envolve muitos "fios" entrelaçados. Por mais que estabelecer relações (conexões) entre esses diferentes "fios" possa remeter ao mesmo construto do número racional, para os estudantes elas representam subconstrutos diferentes, levando a diferentes compreensões e usos desses números.

Pesquisas posteriores às de Kieren, tanto no Brasil como no exterior, tomaram os subconstrutos de formas diferentes, mostrando a sutileza de se estabelecer quaisquer diferenças entre os significados. Behr et al. (1983) redefiniram alguns subconstrutos de Kieren (1980) e subdividiram outros, considerando sete: medida; razão; taxa; quociente; coordenada linear; decimal; e operador. Lamon (2012) também inclui o subconstruto taxa como uma extensão do subconstruto razão em sua categorização. Onuchic e Allevato (2008) apresentam as seguintes "personalidades" dos números racionais: ponto racional; quociente; fração; razão; e operador. Romanatto (1997) assume as "personalidades" quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número.

Como colocado por Moreira e Ferreira (2008), em determinado momento, a literatura parece, de um modo geral, assumir cinco subconstrutos como principais, que são aqueles apontados por Kieren no trabalho de 1980: relação parte-todo; medida; razão; quociente; e operador. Para maior detalhamento, vamos tomar esses cinco subconstrutos e abordá-los rapidamente.

Relação Parte-todo: segundo Kieren (1980), juntamente com o subconstruto razão, a relação parte-todo é a base tradicional e moderna para o desenvolvimento do significado[37] de fração e fundamental para todas as demais interpretações posteriores. A interpretação[38] parte-todo de número racional depende diretamente da capacidade de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em subpartes ou conjuntos de tamanhos iguais (BEHR et al., 1983).

Nesse sentido, particionando um todo em n ($n \in \mathbb{N}$) partes iguais, cada parte pode ser representada por $\frac{1}{n}$. Se tomarmos um número x de partes, teremos $\frac{x}{n}$ do todo. Por isso,

---

[37] Kieren (1980) faz uso do termo *significado* para indicar o processo de construção ou de desenvolvimento do construto.

[38] Behr et al. (1983) fala em *intepretação* no mesmo sentido de *subconstruto*.

podemos dizer que se trata de um processo de dupla contagem: das partes do todo (n) e das partes tomadas (x).

Quantas vezes já usamos, ouvimos ou lemos problemas do tipo:

João comeu $1/4$ *de uma pizza no jantar e, no dia seguinte, comeu mais* $1/4$ *dela no café da manhã. Quanto sobrou da pizza?*

seguidos de sua representação geométrica? As representações visuais são frequentemente utilizadas para se trabalhar frações como parte-todo. Regiões geométricas (retangulares, circulares), conjuntos de objetos discretos e reta numérica são os modelos mais usados. Tradicionalmente, são utilizados desenhos de pizzas ou barras de chocolate para tratar de ideia de parte-todo de quantidades contínuas ou bolas e balas para quantidades discretas. Para Behr et al. (1983), a interpretação de regiões geométricas envolve, aparentemente, um entendimento da noção de área e citam o estudo de Owens (1980), que examina a relação entre o conceito de área de uma criança e sua habilidade de aprender fração, encontrando uma relação positiva entre o sucesso em tarefas envolvendo área e sucesso em uma unidade de ensino de frações baseada em regiões geométricas.

Apesar de Kieren (1980) ressaltar a importância desse subconstruto para o desenvolvimento do significado de frações, inclusive para o desenvolvimento da linguagem, outros cuidados devem ser tomados ao trabalhar com a interpretação parte-todo. Por exemplo, como uma criança pode representar geometricamente a divisão de uma pizza em sete pedaços iguais? E no trabalho de frações impróprias, o significado parte-todo é suficiente? Damico (2007) afirma que “este modelo isoladamente se mostra insuficiente para abarcar a completa compreensão deste conjunto numérico [racionais], uma vez que a compreensão das frações impróprias não pode ser adquirida por intermédio deste tipo de abordagem” (p. 70), mas há contextos em que essa abordagem se mostra adequada.

Razão: para descrever a forma como Kieren apresenta o subconstruto razão, é necessário ressaltar que o termo utilizado que Kieren (1976, 1980) é *ratio* e não *rate*. Há diferenças entre tais termos. Enquanto *rate* indicar uma comparação entre duas quantidades de unidades diferentes (por exemplo, 70 km/h), o termo *ratio* indica uma relação entre números, tamanhos ou quantidades de coisas semelhantes (por exemplo, em um time de futebol com 3 meninas e 5 meninos significa que a proporção é 3 para 5, ou $3:5$). *Rate* indica taxa e *Ratio* é a proporção de uma coisa para a outra[39].

No trabalho de 1976, Kieren afirma: "números racionais são números na forma p/q, onde p, q são inteiros e $q \neq 0$. Nessa forma, números racionais são *'ratio' numbers*" (p. 103). Para o autor, o desenvolvimento da noção de razão baseia-se fortemente na notação de par ordenado ($\frac{a}{b}$ pode ser escrito como um par ordenado de números inteiros (a, b)). Sua explicação para a adição de razões utilizando a notação de par ordenado nos indica que, para Kieren (1976, 1980), sua compreensão para razão é no sentido de uma relação entre números ou quantidades de coisas semelhantes. Antes de apresentar a adição de razão, vamos recorrer a um trecho do trabalho de 1980, pois esse explicita sua compreensão para razão:

> A notação de par ordenado ganha um novo significado [se comparado com parte-todo] para a relação *ratio* – uma comparação quantitativa de duas qualidades. Três décimos ($3/10$) de uma superfície de chão tem um significado muito diferente que $3/10$ que compara o número de garotas e garotos em um time de futebol. (KIEREN, 1980, p. 135, tradução nossa).

No exemplo dado, a razão indica uma comparação entre quantidades semelhantes: o número de garotos e o número de garotas; não uma relação uma comparação entre duas quantidades de unidades diferentes (como são os casos dos conceitos físicos de velocidade, densidade etc.).

Retomamos os casos da notação e na adição entre razões. Enquanto, para nós, a notação de par ordenado é comumente utilizada na construção formal do conjunto dos números racionais por meio de classes de equivalência, Kieren (1980) acredita que essa linguagem é central para o desenvolvimento de vários subconstrutos e, por isso, a utiliza, também, no contexto das razões.

Kieren (1976) exemplifica seu uso no caso da adição entre razões, no qual fica evidente uma concepção de razão como comparação entre números (*ratio*). Para o autor, responder à pergunta:

Em uma comparação, em que 1 é combinado com 8, 2 com 16, 3 com 24 etc., que número é combinado com 1?

simbolicamente, isso significa: $(x, 1) \sim (1{,}8) \sim (2{,}16) \sim (3{,}24)$. Nesse caso, $x = (1{,}8)$ ou, escrito de outra forma, $x = \frac{1}{8}$. Agora, se pensarmos em $(y, 2) \sim (1{,}8)$, nos pareceria óbvio que $y = 2x$, isto é, $y = 2.\frac{1}{8}$. A partir disso, se pensarmos essa multiplicação

[39] Para melhor compreensão da diferença entre esses termos, acesse: http://www.differencebetween.net/science/mathematics-statistics/difference-between-rate-and-ratio/. Acessado em 05/04/2017.

como adições repetidas, teremos $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$. Disso, continua Kieren (1976), caímos na clássica questão: $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$? Usando o conhecimento de proporção e de equivalência, temos

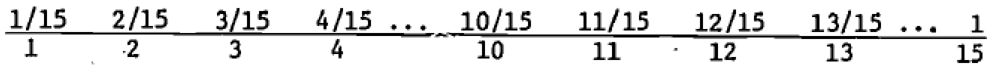
$$(y,2) \sim (1{,}8) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{1}{8}$$
$$(y,2) \sim (1{,}8) \Leftrightarrow 8y = 2$$
$$(y,2) \sim (1{,}8) \Leftrightarrow y = \frac{2}{8}$$

Isto é, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ deve ser igual a $\frac{2}{8}$ e não $\frac{2}{16}$ para ser consistente com a ideia de equivalência.

Outro modo de pensar seria utilizando a reta numérica. Por exemplo, para somar $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$, podemos olhar para as classes de equivalência de $\frac{2}{3}$ e de $\frac{1}{5}$.

Tomando $\frac{10}{15}$ e $\frac{3}{15}$, equivalentes a $\frac{2}{3}$ e a $\frac{1}{5}$ respectivamente, e observando a reta numerada na Figura 4, podemos notar que, segundo Kieren (1976), somar $\frac{10}{15} + \frac{3}{15}$ se resume em somar os numeradores $(10 + 3)$, ou seja, $\frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$.

Figura 4: Reta numerada



Fonte: Kieren (1976)

Por isso, Kieren (1976) afirma que as operações entre razões procedem da noção de equivalência e classe de equivalência. Unindo as duas ideias sobre adição de razões supracitadas, tem-se uma estratégia: estudar as classes de equivalência e adicionar pares ordenados com o mesmo segundo elemento. Para Kieren (1976), a natureza arbitrária da adição entre razões pode, gradativamente, se tornar evidente pela abordagem apresentada.

O autor considera que, do ponto de vista da criança, as razões são uma entidade sofisticada. A base para seu desenvolvimento está no controle simbólico do esquema de proporcionalidade, mas considera que este controle não se desenvolve totalmente até a adolescência. Embora algoritmicamente pareçam simples, as operações sobre os racionais desenvolvidas nesse subconstruto são sofisticadas em seu conceito, pois exige da criança a habilidade de lidar com a equivalência simbolicamente e "transferir" conceitos da reta numérica para as razões.

Temos algumas ressalvas à abordagem de Kieren (1976, 1980) sobre o subconstruto razão. De fato, esse subconstruto envolve algumas nuances que dificultam sua compreensão, como a diferença entre *ratio* e *rate* citada. Para Behr et al. (1983), razão é uma relação que carrega a noção de grandeza relativa, por isso é mais corretamente considerada como um indicador comparativo entre duas quantidades do que um número. Como veremos na próxima seção sobre a história dos números racionais, a relação entre número e quantidade teve diferentes compreensões em diferentes contextos e momentos da história. Por exemplo, como coloca Katz (2010), não podemos comparar uma razão $a\colon b$ de Euclides a uma fração que corresponde a um ponto particular na reta numérica e as quais podem ser aplicadas as operações aritméticas padrão. Isso significa que, naquele contexto de Euclides, a proposta de uma construção das operações entre razões, tal como faz Kieren (1976), não seria viável, pois uma razão não corresponde a um ponto na reta numérica.

Sobre a adição de razões, aparentemente, para nós, a estratégia de Kieren (1976) não favorece sua compreensão. A notação de par ordenado para representar a razão agrega um formalismo inadequado e a relação com a reta numérica feita na Figura 4 não é de fácil entendimento. Reconhecemos que a adição de razões demanda um cuidado específico, já que é diferente da adição na relação parte-todo. Onuchic e Allevato (2008) reiteram essa diferença:

> *razão* é uma *comparação multiplicativa entre duas grandezas*, denotada por $a\colon b = \frac{a}{b}$ (a está para b), em que a é denominado *antecedente* e b é denominado *conseqüente*. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração. (p. 96-97, grifos das autoras).

Para as autoras, a adição de razões não é realizada como adição de frações, quando normalmente se utiliza o mínimo múltiplo comum.

As diferenças envolvendo a razão vão além da aditividade. Como afirma Kieren (1980), enquanto a noção formal de equivalência é a mesma para as relações parte-todo e razão, psicologicamente é diferente. Portanto, por mais que essas duas relações (parte-todo e razão) compartilhem muitas características sobre o construto do número racional, para o aprendiz, elas são diferentes se tratadas como subconstrutos distintos e levam a conceitos e funcionamentos também diferentes.

<u>*Quociente*</u>: a interpretação de número racional como um quociente está intimamente ligada com a relação parte-todo (KIEREN, 1980). Contudo, enquanto na interpretação parte-todo de números racionais, o símbolo $\frac{a}{b}$, geralmente, se refere a uma parte

fracionária de uma única quantidade e, na interpretação de razão para os números racionais, o símbolo $\frac{a}{b}$ é uma relação entre duas quantidades, como quociente, o símbolo $\frac{a}{b}$ pode também ser usado para representar uma operação, isto é, $\frac{a}{b}$ é usado como forma de escrever $a \div b$ (BEHR et al., 1983). Nessa interpretação, o numerador a não representa as partes tomadas, mas sim como algo que está sendo divido por b partes. Por exemplo, dividir uma unidade em quatro partes e tomar três delas (o que representa $\frac{3}{4}$) leva à mesma quantidade que dividir três unidades em quatro partes (3/4). Contudo, para o estudante, esses são problemas distintos.

Kieren (1980) considera que o subconstruto quociente está relacionado, em última instância, à álgebra de equações lineares e representa um ponto de conexão com a estrutura de corpo. O autor não detalha essa relação e a conexão com a estrutura algébrica.

Por isso, recorremos a Behr et al. (1983), quando afirmam que há pelo menos dois níveis de sofisticação envolvidos nessa interpretação de números racionais como quocientes. Primeiro, o de ver as frações $\frac{6}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ interpretadas como divisão indicada, estabelecendo uma equivalência de $\frac{6}{3}$ e 2 ou de $\frac{1}{3}$ e $0,333 \ldots$. Segundo, considerar os números racionais como os elementos de um corpo quociente que podem ser vistos como números da forma $\frac{a}{b}$ que são solução da equação linear $bx = a$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Parece-nos que a relação entre o subconstruto quociente e a resolução de equações lineares está no seguinte aspecto: se, por um lado, $\frac{6}{3}$ pode ser interpretado como a divisão indicada de 6 por 3, por outro, é possível (em última instância, como afirma Kieren (1980)) levantar o seguinte questionamento "qual o número que devemos multiplicar por 3 para obter 6?", o que pode ser escrito na forma "$3. x = 6$".

Para Kieren (1976), enxergar os números racionais desse modo (como elemento de um corpo quociente) permite definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva; todas as regras são deriváveis a partir de equações por meio das propriedades do corpo.

Vamos verificar, por exemplo, que $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac}$ a partir dessa perspectiva.

Se $ax = b$ e $cy = d$, então $x = \frac{b}{a}$ e $y = \frac{d}{c}$.

Multiplicando ambos os membros de $ax = b$ por c e ambos os membros de $cy = d$ por a, temos:

$c(ax) = c(b)$ e $a(cy) = a(d)$ *(equivalência)*

Adicionando membro a membro das duas equações, temos:

$$c(ax) + a(cy) = cb + ad$$

$$(ca)x + (ac)y = cb + ad\ (associatividade)$$

$(ac)x + (ac)y = bc + ad$ *(comutatividade)*

$ac(x + y) = (bc + ad)$ *(distributividade)*

$\left(\frac{1}{ac}\right) ac(x + y) = \left(\frac{1}{ac}\right)(bc + ad)(elemento\ inverso)$

$1.(x + y) = \frac{bc+ad}{ac}$ *(elemento neutro)*

Assim, $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac}$.

A interpretação de elementos de um corpo quociente para os números racionais associa os racionais a sistemas algébricos abstratos e pode proporcionar um desenvolvimento da estrutura lógico-dedutiva da Matemática Acadêmica. Kieren (1976) considera que, aparentemente, essa interpretação parece ser a mais distante da matemática escolar, contudo Freudenthal (1973 apud KIEREN, 1976) toma a interpretação de número racional como elemento de um corpo quociente como o cenário mais significativo para o estudo do número racional. Com relação às operações, Freudenthal (1973 apud KIEREN, 1976) afirma que os métodos para as operações de números racionais seguem um padrão e, ao mesmo tempo, são processos significativos. Kieren (1976) parece estar defendendo que abordar as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) entre frações do modo como fora apresentada a adição nos parágrafos anteriores segue um padrão e permite uma compreensão do processo de construção do algoritmo. Tal modo de lidar com as operações não exige, por exemplo, qualquer questão de saber se denominadores devem ser iguais (nos casos da adição e subtração entre frações), ou se frações devem ser ou não invertidas (nos casos da divisão e da multiplicação entre frações). No entanto, conclui, por esse modo de pensar, que se possa lamentar que a ideia intuitiva das frações seja perdida, embora seja duvidoso que em algum momento ela tenha existido (FREUDENTHAL, 1973 apud KIEREN, 1976).

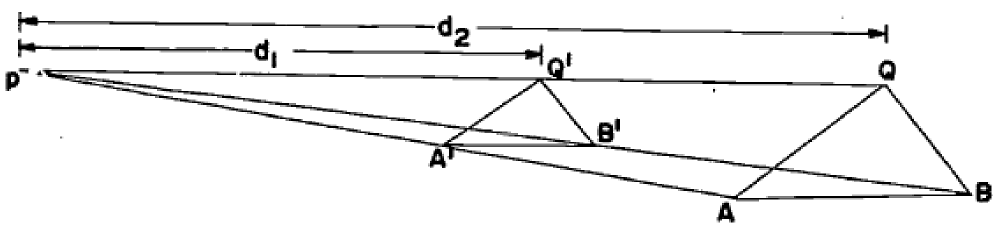
Para Kieren (1976), a interpretação de corpo quociente não está intimamente relacionada com o pensamento natural da criança, uma vez que as operações e propriedades são desenvolvidas de uma forma dedutiva. Contudo, lidar com essa forma dedutiva e apreciar esse modo particular de enxergar os racionais pode ser um precursor da capacidade dedutiva mais formal. Se pensarmos que $x = \frac{5}{6}$ é $6x = 5$ e que o significado disso é “x é o número que atribuímos a cada parte que resulta quando dividimos 5 chocolates em 6 partes iguais”, podemos esclarecer, tal como faz Kieren (1976), que a estrutura cognitiva importante subjacente à noção de quociente é a de particionar e, com isso, desenvolver o pensamento pré-dedutivo ou dedução concreta na criança (KIEREN, 1976).

Em resumo, segundo o autor, a interpretação de elemento de um corpo quociente para os números racionais leva a noções da Álgebra Abstrata. Os pré-requisitos fundamentais para a compreensão desse modo de pensar residem na álgebra de resolução de equações e na experiência de chegar a uma definição para uma operação a partir de um conjunto de axiomas. São com as operações entre números racionais que as crianças têm suas primeiras experiências com uma operação abstrata, isto é, algo que não decorre da intuição, mas de uma definição (KIEREN, 1976).

Em nossa análise, a aproximação que Kieren (1980) parece indicar entre o subconstruto quociente enquanto uma divisão indicada e enquanto elemento de um corpo quociente não nos parece adequada. É preciso destacar que no trabalho de 1980, Kieren reorganizou os subconstrutos apresentados (ainda chamados de interpretações e não de subconstrutos) no trabalho de 1976. Por considerar algumas dessas interpretações isomorfas, Kieren (1980) reduziu o número de subconstrutos para cinco. Nessa nova organização, pautada em análises matemáticas, Kieren (1980) parece ter incluído, em um mesmo subconstruto, uma abordagem que carrega consigo um aspecto intuitivo (divisão indicada) e outra abordagem com características extremamente formais (elemento de um corpo quociente). Entendemos que distinguir ambas as abordagens seja necessário para se discutir os números racionais na formação de professores, para não ficar a impressão de que uma leva a outra.

<u>Operador</u>: de acordo com Kieren (1976), essa interpretação pode ser vista como uma transformação[40], tanto no caso de um conjunto finito sobre outro conjunto finito, como também no caso do plano euclidiano sobre si mesmo.

Figura 5: Números racionais como operador



Fonte: Kieren (1976)

[40] No original, *mapping*. Estamos usando a mesma tradução de Moreira e Ferreira (2008) para este termo.

Com a Figura 5, Kieren (1976) exemplifica essa interpretação para os números racionais. O ponto Q do plano é projetado em Q', colinear com P, de tal modo que $\frac{PQ'}{PQ} = k$. Na Figura 5, $k = \frac{d_1}{d_2}$. Tomando $k = \frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{3}$, o número racional $\frac{2}{3}$ pode ser associado à transformação que levou um segmento de reta (PQ) a outro (PQ') com $\frac{2}{3}$ de seu comprimento original. Segundo Behr et al. (1983), operando em objeto contínuo (tal como o comprimento do segmento de reta), pensamos $\frac{p}{q}$ como uma combinação esticador-diminuidor[41]. Qualquer segmento de reta de comprimento L operado por $\frac{p}{q}$ tem seu comprimento esticado p vezes, em seguida, diminuído por um fator de q.

No caso de $\frac{p}{q}$ operar sobre um conjunto discreto, Behr et al. (1983) consideram a interpretação multiplicador-divisor[42], em que o número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com n elementos em um conjunto com np elementos e, em seguida, esse número é reduzido para $\frac{np}{q}$ elementos. Por exemplo, as porcentagens podem ser encaradas como operador se pensarmos que 30% de 90 é representado por $\frac{30}{100}.90$ e que vamos transformar o conjunto com 90 elementos em um conjunto com $30.90 = 2700$ e, em seguida, esse número será reduzido para $\frac{2700}{100} = 27$ elementos.

Segundo Behr et al. (1983), esse subconstruto pode ser incorporado em uma máquina de função, em que $\frac{p}{q}$ é pensado como uma máquina "p para q". Assim, $\frac{3}{4}$ é pensado como uma máquina “3 para 4”: uma entrada de comprimento ou cardinalidade 4 produz uma saída de comprimento ou cardinalidade 3. Quer dizer, se dermos uma entrada 4 em máquina “3 para 4”, ela nos fornecerá uma saída 3, uma vez que $\frac{3}{4}.4 = 3$. Ainda de acordo com esses autores, a interpretação de número racional como operador é particularmente útil no estudo de equivalência das frações e da operação de multiplicação. O problema de encontrar frações equivalentes a uma dada fração é o de encontrar máquinas de função que realizem as mesmas transformações de entrada-saída. Por exemplo, a entrada 15 em uma máquina “2 para 3” dá como saída o 10; a máquina “4 para 6”, para a mesma entrada 15, dá como saída o número 10. Para Kieren (1976), por fazerem a mesma coisa, os operadores “2 para 3” e “4 para 6” são equivalentes.

[41] *Stretcher-shrinker combination.*
[42] *Multiplier-divider interpretation.*

No caso da operação de multiplicação, Kieren (1976) questiona: o que acontece quando um operador é seguido de outro? Para responder, ele utiliza o exemplo de um segmento de reta de 24 unidades de comprimento. É realizada uma transformação com um operador $\frac{2}{3}$, obtendo um segmento de 16 unidades de comprimento. Se esse novo segmento passar por uma nova transformação com um novo operador $\frac{1}{4}$, o novo segmento é de 4 unidades de comprimento. Comparando o segmento inicial, 24 unidades, com o final, 4 unidades, podemos dizer que a composição entre os operadores $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ resultou em uma transformação equivalente à de um operador $\frac{2}{12}$ ou de um operador $\frac{4}{24}$. Com isso, Kieren (1976) conclui que a composição entre os operadores $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ equivale ao operador $\frac{ac}{bd}$, que é o produto entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, o que nos leva à ideia de multiplicação de números racionais.

Por meio do mesmo modo de pensar, é possível chegar que o operador inverso de $\frac{a}{b}$ é o operador $\frac{b}{a}$. Tomando o mesmo exemplo do segmento de 24 unidades de comprimento e realizando uma transformação com um operador $\frac{2}{3}$, obtemos um segmento de 16 unidades de comprimento. Se este novo segmento passar por uma nova transformação com um novo operador $\frac{3}{2}$, o novo segmento é de 24 unidades de comprimento. Percebe-se, então, que a composição entre os operadores $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$ resultou em uma transformação equivalente à de um operador $\frac{1}{1}$, conduzindo à ideia de operador inverso e de identidade.

Por fim, esse subconstruto, segundo Kieren (1976), também esclarece a divisão de números racionais. Para ele, para dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{7}{8}$, podemos fazer a seguinte pergunta: "Que operador k leva $\frac{7}{8}$ para $\frac{2}{3}$?" e ele responde com a seguinte ideia: o operador $\frac{2}{3}$ leva o 1 em $\frac{2}{3}$, o operador $\frac{8}{7}$ leva o $\frac{7}{8}$ em 1, portanto, compondo esses dois operadores, temos que o operador $\frac{2}{3} . \frac{8}{7}$ leva o $\frac{7}{8}$ em $\frac{2}{3}$. Com isso, podemos concluir que $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7}$ ou, de uma forma geral, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Para Kieren (1976), a base para o subconstruto operador está nas razões e, por isso, não tem um vínculo natural com a adição. Segundo o autor, a operação de adição está mais vinculada ao subconstruto medida, enquanto que o subconstruto operador é essencialmente multiplicativo e, por isso, tem uma potencialidade para levar às propriedades de grupo multiplicativo dos racionais ($(\mathbb{Q}, .)$ não é um grupo, mas $(\mathbb{Q}^*, .)$ sim). Assim, justamente por não possuir esse um vínculo natural com a adição em $\mathbb{Q}$, o subconstruto operador não pode, sozinho, levar aos axiomas de corpo (KIEREN, 1976).

Muito dessa abordagem de Kieren para o subconstruto operador é questionada por Moreira e Ferreira (2008). A crítica é no sentido de refletir sobre essa ênfase na percepção de $\mathbb{Q}$ como uma estrutura fundamentalmente algébrica em que as operações funcionam como funcionam, por razões essencialmente axiomáticas (MOREIRA; FERREIRA, 2008) e a maneira como isso se relaciona com o aprendizado da Matemática Escolar.

O subconstruto operador de Kieren surge, basicamente, de uma análise matemática subjacente ao conjunto dos números racionais (em especial, uma análise da estrutura de grupo multiplicativo), "funcionando como um instrumento didático para promover o desenvolvimento das estruturas cognitivas associadas" (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 118), evidenciado aquele já citado movimento: "o 'matemático' definindo o 'cognitivo' e este sugerindo o 'didático'" (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 118). Para os autores, essa lógica pode servir como um meio para atribuir um papel ao conhecimento matemático acadêmico no desenvolvimento do currículo escolar, sem transparecer o argumento superficial e simplista de que "para ensinar matemática o professor tem que saber matemática" ou o de que "o professor tem que saber mais do que vai ensinar".

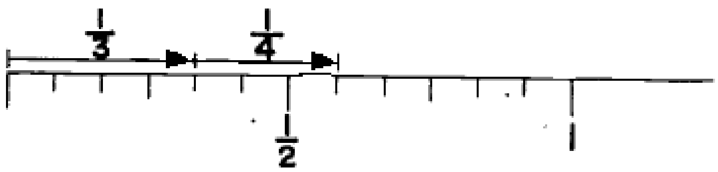
Concordamos com as críticas de Moreira e Ferreira (2008) à abordagem de Kieren (1976) para o subconstruto operador. Assim como faz com o subconstruto quociente, quando defende uma relação entre este e a estrutura de corpo quociente, Kieren (1976) anseia fortemente por estabelecer relações entre o subconstruto operador e a estruturas de grupo multiplicativo dos racionais. Com isso, o autor acaba dando um peso grande às estruturas algébricas, deixando em segundo plano aspectos mais intuitivos e menos formais dos números racionais.

<u>*Medida*</u>: o subconstruto medida, assim como os subconstrutos razão e quociente, está intimamente ligado com a ideia de parte-todo. Para Kieren (1980), a tarefa de medir significa a atribuição de um número a uma região (a palavra região está tomada no sentido geral, podendo ser uni, bi ou tridimensional ou ter alguma outra característica). Essa tarefa é feita por meio de uma repetição dos processos de contagem do número de unidades inteiras utilizadas na "cobertura" da região e, em seguida, da subdivisão de uma unidade para proporcionar a cobertura completa. O foco nesse subconstruto está na unidade arbitrária e na

sua subdivisão em vez da relação parte-todo. Por exemplo, se considerarmos o comprimento de uma sala como a unidade e que nesse comprimento "cabem" b pés, a fração $\frac{a}{b}$ pode ser associada a um ponto situado nessa sala que foi dividida em b partes congruentes (pés) em que a ocorrência da divisão $\frac{1}{b}$ da unidade ocorreu a vezes, isto é, $a \times \frac{1}{b}$.

Pensando na reta numérica, de acordo com Kieren (1976), o fundamental para esta interpretação é a noção de que, uma vez escolhida a unidade para a reta numérica, esta pode ser dividida em um número qualquer de partes congruentes. O número racional $\frac{a}{b} < 1$, então, pode ser visto como uma medida a de b partes congruentes. Uma vez que a unidade pode ser dividida em qualquer número de partes, a adição significa colocar dois vetores em sequência, ponta final com ponta inicial, e ler o resultado (KIEREN, 1976), como pode ser visto na Figura 6.

Figura 6: subconstruto medida



Fonte: Kieren (1976)

Os dois vetores juntos compreendem 7 de $\frac{1}{12}$ partes congruentes, o que nos leva a perceber que $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. O autor ressalta a escolha da divisão da unidade, pois o final do segundo vetor deve ser uma divisão exata da unidade.

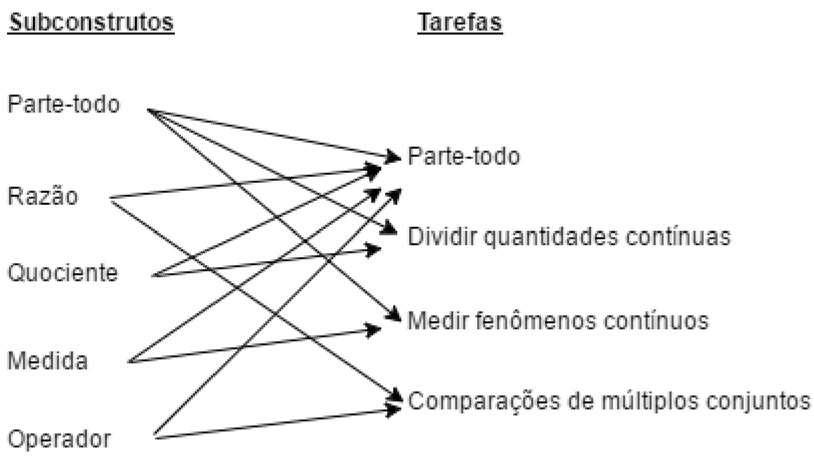
Conforme Kieren (1976), essa interpretação dos números racionais, pela noção de flexibilidade da partição da unidade, permite que as ideias de adição como a união de duas medidas e de equivalência emerjam e que também favorece a noção de relação de ordem dos números racionais, apesar de que as propriedades de ordem (tricotomia, antissimetria e transitividade) surgem fora desse contexto de medida. Kieren (1980) também ressalta que utilizar o metro como uma unidade favorece uma relação natural para a notação decimal, com decímetro, centímetro e milímetro servindo como modelos físicos para décimos, centésimos e milésimos.

Retomaremos essa questão da notação decimal na sequência, quando apresentarmos a maneira como Kieren (1980) relaciona os subconstrutos com os decimais.

Agora, vamos destacar dois pontos relevantes para o autor quanto à coletividade dos subconstrutos e à conectividade deles com outros construtos.

O primeiro deles refere-se ao fato de que os subconstrutos, juntos, formam uma base suficiente que proporciona a uma pessoa certa maturidade para se trabalhar com os números racionais, enquanto que cada subconstruto, individualmente, não. Kieren (1980) considera que tarefas que envolvem as relações parte-todo, medição e comparação entre grandezas, representam um núcleo razoável que a pessoa deve dominar como resultado do ensino do construto número racional. A Figura 7 ilustra essa característica coletiva dos subconstrutos proposta por Kieren (1980) a partir de tarefas essenciais:

Figura 7: Relações entres os subconstrutos e tarefas que demandam conhecimento dos números racionais



Fonte: traduzido de Kieren (1980)

O segundo ponto relevante refere-se à conexão entre os subconstrutos e outras ideias matemáticas (outros construtos). Já comentamos a relação entre o subconstruto operador e o construto função; o subconstruto medida se conecta à ideia mais geral do construto reta real; o subconstruto quociente relaciona-se à resolução de equação linear e representa um vínculo com a álgebra das equações, bem como a estrutura de corpo; o subconstruto razão está fortemente ligado ao construto proporção e à probabilidade; o subconstruto parte-todo está ligado internamente na medida em que serve como fonte de linguagem e simbologia para outros construtos.

Kieren (1980) também discute os efeitos de uma abordagem decimal no desenvolvimento dos cinco subconstrutos dos números racionais. A representação decimal não implica em um novo subconstruto, mas uma abordagem pautada nessa representação pode ter um efeito mais ou menos forte em cada um dos subconstrutos apresentados.

O autor propõe "uma digressão aos decimais" com o objetivo de testar seu modelo dos subconstrutos contra a suposição de que números racionais sejam desenvolvidos usando a notação decimal, sem utilizar ou pelo menos adiar consideravelmente o uso da notação de pares ordenados. Destacamos, novamente, que Kieren (1980) valoriza a linguagem de pares ordenados no desenvolvimento de vários subconstrutos (razão e quociente principalmente) e ela é central em sua abordagem.

Assim, por meio de análises matemáticas, mas sem dados empíricos, Kieren (1980) indica algumas fragilidades de se abandonar uma para enfocar a outra abordagem, as quais apontaremos agora.

Como fora afirmando, Kieren (1980) sugere que o uso do metro como unidade forneceria um mecanismo natural em que o subconstruto medida poderia ser desenvolvido pela abordagem decimal. A operação de adição nesse contexto pode, claramente, ser tomada como uma extensão do algoritmo da soma de números inteiros. A extensão de algoritmos dos números inteiros também favorece o subconstruto quociente, no sentido da divisão indicada. Por outro lado, a abordagem decimal não destaca a noção de reciprocidade do inverso multiplicativo, uma contribuição tão útil quando se pensa nesse subconstruto. Como veremos na seção seguinte, na história dos números racionais, para os babilônios, dividir por um número era o mesmo que multiplicar pelo seu *recíproco* (inverso de um número inteiro). É nesse sentido que Kieren (1980) indica um ponto negativo da abordagem decimal.

Do mesmo modo, o autor considera que há desvantagens em se utilizar a abordagem decimal para os subconstrutos parte-todo e razão. Mesmo que alguns argumentem que as frações mais comuns, como meios, quartos e terços, possam ser ensinadas, complementando a abordagem decimal e sendo apresentadas como casos particulares, Kieren (1980) afirma que dificilmente permitirá o desenvolvimento do construto número racional de modo que o indivíduo possa dominar as noções de parte-todo e comparações multiplicativas entre conjuntos. Neste caso, o subconstruto razão ficaria "subdesenvolvido", para Kieren (1980).

Concordamos com essa posição de Kieren (1980), pois uma abordagem decimal pode impedir a percepção do processo de dupla contagem (parte-todo) e a comparação entre grandezas (razão). Por exemplo, quando dizemos que duas pessoas de um total de cinco têm determinada característica, a representação $\frac{2}{5}$ explicita uma relação entre as grandezas que a representação 0,4 não. Desse modo, acreditamos que os subconstrutos razão e parte-todo ficam "subdesenvolvidos" quando abordados somente pela representação decimal. Além disso, como considera Kieren (1980), uma importante aplicação do subconstruto razão também é comprometida: probabilidade. O exemplo dado ilustra isso, pois, se 40%, no contexto fictício, significar a probabilidade de se selecionar uma pessoa com aquela característica específica, a fração $\frac{2}{5}$, de maneira mais clara, significa qual é a proporção.

Kieren (1980) também levanta a possibilidade de que as expressões racionais, ensinadas posteriormente, possam ficar comprometidas com o desenvolvimento da notação decimal, mas sugere que a noção de pares ordenados seja um pré-requisito a esse estudo, que poderia ser antes ou junto a qualquer estudo sobre corpo quociente. É nítida, novamente, a valorização que o autor atribui à linguagem de par ordenado.

Na medida em que o operador racional pode ser conceitualizado pelo sentido paramétrico, por exemplo, $2y = 0{,}25x$ para indicar o operador "1 para 4", a abordagem decimal não parece, segundo Kieren (1980), prejudicial ao subconstruto operador. Isto é, tanto faz, no exemplo dado, representar o número racional como $0{,}25$ ou $\frac{1}{4}$. Contudo, o autor considera que essa abordagem paramétrica utilizando a representação $0{,}25$ parece estar em um nível sofisticado (além de não favorecer o uso do mecanismo de particionamento), o que "empurraria" o subconstruto operador para o final do currículo (podendo, inclusive, ser abandonado), comprometendo o que Kieren (1980) considera a maior contribuição do subconstruto: a multiplicação como composição de função.

De modo sintetizado, Kieren (1980) apresenta uma tentativa de quantificar (em comparação com a representação fracionária) o quão mais ou menos forte a abordagem decimal se relaciona com cada subconstruto e com alguns mecanismos (particionamento, inverso, unidade, proporção) que envolvem o conceito de número racional. Vejamos a Figura 8:

Figura 8: Hipóteses de efeito da abordagem decimal para os números racionais

	Código
Parte-todo ----------- E	$E +$: desenvolvimento um pouco mais forte
Razão ---------------- W	E: desenvolvimento igual
Quociente ------------E	$E -$: desenvolvimento um pouco mais fraco
Medida -------------- $E +$	W: desenvolvimento substancialmente mais fraco
Operador ------------ $E -$	
Particionamento---- W	
Inverso --------------- $E -$	

Unidade ------------- E Proporção ----------- $E-$ (por ser mais abstrato)

Fonte: traduzido de Kieren (1980, p. 144)

Assim, para Kieren (1980), a representação decimal beneficia fortemente a noção de adição no subconstruto medida, mas se mostra ligeiramente mais fraco em relação à construção da noção de inverso e de aspectos multiplicativos e proporcionais dos subconstrutos. Do ponto de vista do mecanismo de particionamento, sua compreensão fica bastante limitada se pensada a partir da representação decimal.

Já apontamos por mais de uma vez a característica dos trabalhos de Kieren: a análise matemática define o 'cognitivo' e este sugere o 'didático' (MOREIRA; FERREIRA, 2008). Isso pode ser claramente observado em Kieren (1988), quando o autor baseia-se em seus estudos anteriores sobre os subconstrutos para propor o que chama de cinco faces da construção do conhecimento matemático de número racional e analisa algumas implicações curriculares.

Trouxemos a discussão acerca dos subconstrutos propostos por Kieren devido a sua reconhecida adesão entre as pesquisas sobre os números racionais. Acreditamos que nos aprofundarmos nessa abordagem nos permitiu problematizá-la, questionando, inclusive, essa grande adesão. Já afirmamos que as pesquisas de Kieren (1976, 1980, 1988) são aqui utilizadas no sentido de compor nossos estudos sobre a origem do conceito no domínio sociocultural, com base em revisões epistemológicas do conceito. Distanciamo-nos da perspectiva adotada por Kieren para lidar com os diferentes significados dos números racionais, e vamos discorrer sobre isso ainda nessa seção.

Antes, vamos apresentar, de forma breve, o "*Modelo intuitivo da Construção do Conhecimento Matemático com especial referência para os números racionais*" de Kieren (1988). Apresentamos esse modelo aqui justamente por entendermos que pode servir como um objeto de discussão junto ao referencial teórico que adotamos (perfil conceitual) e até mesmo para explicitarmos nossas diferenças com a perspectiva de Kieren, definindo em que medida nosso trabalho se distancia do dele.

O modelo de construção do conhecimento matemático dos números racionais, proposto por Kieren (1988), é chamado de "anelar" pois é representado por quatro anéis concêntricos. O autor sugere que esse modelo anelar de construção pessoal do conhecimento matemático é propositalmente orgânico na natureza. O menor anel, representado por E, é chamado pelo autor de conhecimento etnomatemático, no sentido proposto Ubiratan

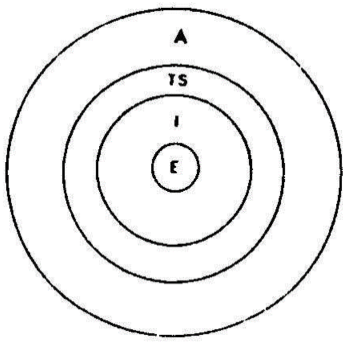
D´Ambrosio. É um conhecimento orientado na natureza e não é um conhecimento "escolarizado", nem identificado como matemática pela pessoa que o utiliza. Consiste no "conhecimento básico adquirido como resultado de viver em um ambiente particular" (DAMICO, 2007, p. 66). Em relação aos números racionais, pode ou não envolver linguagem fracionária, mas se o fizerem, as pessoas usariam a linguagem de uma maneira limitada, remetendo-se à realidade. Por exemplo, usualmente somente metade, quarto e terço são conhecidos.

O segundo anel, que contém o primeiro, é chamado de nível intuitivo, representado por I, e, segundo Kieren (1988), geralmente é um conhecimento escolarizado ou ensinado. Tal conhecimento pode ser construído a partir da experiência cotidiana e se relacionar com ela. A experiência cotidiana fornece oportunidades sociais para dividir uma quantidade contínua, como dividir uma pizza com amigos. Esse nível representa processos de abstrações das experiências ou proveniente delas.

O terceiro anel de dentro para fora representa o conhecimento técnico simbólico, representado por TS, que é construído por meio do uso da linguagem padrão, notações e algoritmos. Para que esse conhecimento seja estável e útil, Kieren (1988) afirma que ele deveria ser verificado contra alguma forma de "realidade" ou representar uma sequência lógica local que pode ser avaliada em termos dos axiomas para números racionais.

O último nível e aquele que engloba todos os demais, conforme a Figura 9, é o conhecimento axiomático dos números racionais, denominado por A (KIEREN, 1988). Obviamente, este implica no conhecimento formal dos números racionais, visto como a estrutura algébrica corpo. Diferente dos dois anéis anteriores (I e TS), que têm uma ligação mais direta com a escola (o que chamamos de Matemática Escolar), o anel A parece estar mais relacionado à matemática formal da universidade (o que chamamos de Matemática Acadêmica).

Figura 9: O modelo intuitivo para a construção do conhecimento



Fonte: Kieren (1988)

Kieren (1988) considera que esses níveis formam um todo crescente e orgânico para uma pessoa que está lidando de forma madura com os números racionais, isto é, que atingiu seu completo desenvolvimento. Assim, uma pessoa que tenha uma compreensão madura dos números racionais pode provar teoremas sobre corpo quociente infinito ou justificar o algoritmo da adição dos racionais baseado nos axiomas de corpo e, ao mesmo tempo, usar os números racionais de forma intuitiva no dia a dia e como base para suas atividades. Um conhecedor maduro dos números racionais pode se engajar em toda a extensão do pensamento/ação.

Resumindo essa perspectiva: o que significa "conhecer" números racionais? Como afirma Kieren (1980), a definição de número racional como "um número x que pode ser escrito na forma a/b com a e b inteiros e $b \neq 0$" não diz muito sobre a noção de número racional, especialmente os diferentes modos de pensá-la. Para o autor, os números racionais estão envolvidos na representação e no controle de situações e relações de parte-todo. São fundamentais para medir quantidades contínuas. Se quantidades, particularmente aquelas contínuas, são divididas, os números racionais estão envolvidos. Aparecem, também, em quaisquer comparações quantitativas de duas qualidades (razões). Assim, "conhecer" o construto número racional significa saber lidar com tais situações (KIEREN, 1980).

Em níveis de construção, Kieren (1980) afirma que conhecer os números racionais implica controlá-los sob diferentes representações (frações, decimais). As operações com os racionais, em um nível menos sofisticado, envolvem o conhecimento de algoritmos convencionais, porém, de uma maneira mais geral, implica em trabalhar com formas primitivas de adição de vetores e de composição de função. Também requer capacidade de lidar com classes de equivalência e corpo quociente. Além de estabelecer conexões com as noções anteriores de número natural e uma construção mais geral de número, que inclui também os números reais.

Apesar de trazer relevantes contribuições à nossa pesquisa, a abordagem de Kieren distancia-se da maneira como entendemos tanto um possível agrupamento[43] dos modos de pensar o conceito de número racional como suas implicações para o ensino.

Por serem pautados em uma análise matemática, os subconstrutos ganham, muitas vezes, uma linguagem com certa formalidade desnecessária. A abordagem dos perfis

[43] Constituir as zonas de um perfil conceitual vai muito além de agrupar diferentes significados, pois envolve, também, estabelecer relações entre as zonas e os contextos. Contudo, utilizamos esse termo – agrupamento – apenas para facilitar a comparação entre ambos: as zonas de um perfil conceitual e os subconstrutos.

conceituais, por outro lado, ao considerar os compromissos epistemológicos, ontológicos e axiológicos necessários para a construção de um perfil conceitual, como já afirmamos, envolvem outros aspectos, como o valor social atribuído ao conceito, o que não se observa nas análises de Kieren. Segundo Mortimer, Scott e El-Hani (2009) é

> estritamente necessário considerar uma grande diversidade de significados atribuídos a um conceito e uma variedade de contextos e significados, incluindo pelo menos três dos quatro domínios genéticos considerados por Vigotski em seus estudos sobre as relações entre pensamento, linguagem e formação de conceitos, a saber, os domínios sócio-cultural, ontogenético e microgenético. (p. 5).

Individuar zonas de um perfil conceitual de número racional envolve identificar modos particulares de pensar esse conceito (incluindo concepções alternativas de estudantes), considerando que cada modo de pensar pode ser relacionado a um modo particular de falar. Ou seja, uma linguagem matemática formal (por exemplo, a de par ordenado) não é dominante em todas as zonas do perfil conceitual de número racional, mas pode ser característica de uma zona específica (por exemplo, número racional como classe de equivalência).

Do ponto de vista das implicações para o ensino, a nossa perspectiva indica que a construção do perfil conceitual envolve a própria prática social do professor e, portanto, não está fora dela, como sugere a abordagem de Kieren. Para nós, não faz sentido pensar o ensino a partir de uma análise meramente matemática, já que o conceito, por ser socialmente construído, também se configura no interior da sala de aula.

Justamente por ser uma análise essencialmente matemática, os trabalhos de Kieren indicam certa "naturalidade" na percepção de que as estruturas algébricas de grupo e de corpo se relacionam com a construção do conhecimento dos números racionais, o que, de certo modo, vem justificando a presença dessas estruturas nos cursos de formação de professores. Como já citamos, tal percepção fortalece o argumento superficial e simplista de que "para ensinar matemática, o professor tem que saber matemática" ou o de que "o professor tem que saber mais do que vai ensinar", bem colocados por Moreira e Ferreira (2008).

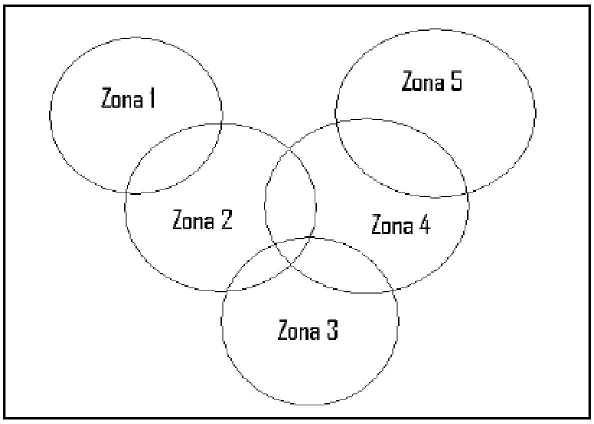
É evidente que tópicos da Álgebra Abstrata se relacionam com a matemática trabalhada na escola, uma vez que a Matemática Acadêmica busca, em sua essência, justificar todo o conhecimento matemático produzido. Contudo, se partirmos desse pressuposto – de que a Álgebra Abstrata, por natureza, se relaciona com a Matemática Escolar –, estaremos desconsiderando o ambiente escolar enquanto local de produção de conhecimento matemático e colocando, como nos alertam Moreira e David (2010), a Matemática Escolar sob a "vigilância epistemológica" da Matemática Acadêmica.

O que propomos, então, é que, antes de assumirmos tal pressuposto, discuta-se em que medida os conhecimentos da Álgebra Abstrata podem favorecer a prática docente do professor da Educação Básica, levando em conta as diferenças entre as atividades do matemático e do educador matemático.

Outra distinção que precisamos estabelecer em relação ao modelo de Kieren e a abordagem dos perfis conceituais diz respeito à hierarquização dos diferentes significados. A noção de perfil conceitual busca romper com o compromisso de hierarquização epistemológica das zonas de um perfil para adotar a noção de heterogeneidade verbal, fundamentando a organização do perfil segundo o princípio de complementariedade (SEPULVEDA, 2010). Por complementariedade, explica Sepulveda (2010), entende-se que diferentes interpretações sobre determinados fenômenos fornecem informações da realidade que não são excludentes, mas, ao contrário, se complementam. Já o modelo de construção do conhecimento de Kieren estabelece uma hierarquia diferente daquela considerada por Mortimer. O modelo anelar de Kieren para os números racionais sugere que níveis mais “avançados” contêm outros e, portanto, aquele indivíduo que lida com um conceito no seu sentido acadêmico parece necessariamente dominar os outros níveis.

Essa diferença em relação à hierarquização fica evidente nas maneiras utilizadas para representar um perfil conceitual. À semelhança do perfil epistemológico de massa, proposto por Bachelard (1984), uma representação seria por histogramas. Outro modo é sugerido por Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007), quando constroem o perfil conceitual de adaptação evolutiva e o representam por meio de círculos que se interceptam, indicando que alguns dos compromissos são compartilhados entre as zonas, como pode ser visto na Figura 10. Em ambas as possibilidades de representação (histograma ou círculos que se interceptam), percebemos que as zonas de um perfil conceitual não contêm umas às outras.

Figura 10: Um modo de representar perfis conceituais



Fonte: Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007, p. 9)

Nesse caso, o perfil de um conceito difere para cada pessoa pelo peso atribuído a cada zona e a forma de representar isso se dá pelo diâmetro de cada círculo (ou, se for utilizado um histograma, a altura de cada retângulo corresponde ao peso que o indivíduo dá a essa determinada maneira de ver o conceito). O peso de cada zona é definido pelo "backgroud cultural e pelas oportunidades que o indivíduo tem para cada divisão do perfil na sua vida. Quanto maior é uma determinada zona do perfil, mais forte é essa característica do conceito no perfil como um todo" (MORTIMER, 2000, p. 77).

Além disso, o modelo de Kieren admite que um conhecedor com pleno desenvolvimento dos números racionais transite facilmente entre os subconstrutos. Entretanto, esse domínio parece ser estático, pois, uma vez que ele é crescente, se a pessoa alcançou o nível mais alto, ela atingiu o pleno desenvolvimento. Por outro lado, a ideia do perfil conceitual parece mais dinâmica no sentido de que é modificado pelas experiências sociais da pessoa. A partir de suas relações com o meio, o indivíduo pode alterar o peso que atribui a uma determinada zona.

Feita essa discussão, podemos dar sequência em nosso estudo sobre os números racionais, agora por meio de seu desenvolvimento histórico.

2.2 Números racionais ao longo da história

Mortimer et al. (2014a) afirmam que fontes secundárias sobre a história da ciência e análises epistemológicas sobre o conceito em estudo são instrumentos para a compreensão da produção de significados no domínio sociocultural e no estabelecimento de compromissos ontológicos e epistemológicos que norteiam os processos de significação de um conceito. Notemos que, para Mortimer et al. (2014a), não se trata de realizar uma pesquisa histórica, portanto não vamos pesquisar a evolução do conceito em documentos primários. Nossa atenção estará, principalmente, em fontes secundárias sobre a história da matemática, uma vez que essas já estão imbuídas de interpretações sobre fatos históricos que nos interessam nesse momento.

Seguindo as orientações de Mortimer et al. (2014a), realizamos um estudo sobre a história dos números racionais com vistas a dialogar com as análises (matemáticas) de Kieren, bem como com os livros didáticos, as entrevistas com os professores e as pesquisas acadêmicas sobre os números racionais que encontramos.

Ao longo desse estudo, percebemos que a história dos números racionais, em suas diferentes representações, aparece de forma fragmentada em muitos livros "tradicionais" de História da Matemática a que tivemos acesso (KATZ, 2010; BOYER, 1974; EVES, 1997). A organização desses livros apresenta a história, geralmente, dividida por períodos, por regiões ou por matemáticos célebres, o que não favorece a compreensão global do desenvolvimento histórico dos números racionais. Por exemplo, o livro de Boyer (1974) mescla capítulos sobre regiões, como Egito, Mesopotâmia, China e Índia, com capítulos dedicados aos trabalhos de matemáticos, como Newton e Leibniz, além de destacar períodos marcantes para a matemática, como a aritmetização da Análise e o surgimento da Álgebra Abstrata. De modo parecido, o livro de Katz (2010) é organizado em quatro partes: parte 1 – A Matemática Antes do Século Sexto; parte 2 – Matemática Medieval: 500 – 1400; parte 3 – Os Primórdios da Matemática Moderna: 1400 – 1700; e parte 4 – Matemática Moderna: 1700 – 2000. Nessas seções, a história é apresentada a partir de personagens, localidades e épocas "áureas" do desenvolvimento da matemática.

Fugindo da narrativa tradicional, Roque (2012) aborda a história da matemática por meio de uma visão crítica, buscando, como o título do livro[44] sugere, desfazer mitos e lendas. Apesar de abordar fatos históricos já tratados na literatura tradicional, Roque não visa simplesmente reproduzi-los, mas, sim, questionar mitos e anedotas que foram se constituindo ao longo do tempo e que caíram no senso comum. Nesse contexto, aspectos dos números racionais são, também, abordados pela autora.

Ifrah (1996), em um livro cujo foco está na invenção e no desenvolvimento dos números, nos traz uma longa história que culmina no nosso sistema de numeração decimal de posição. Para tanto, Ifrah (1996) inicia sua trajetória na pré-história e caminha pelas terras

[44] História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.

dos povos que, de certo modo, contribuíram para o desenvolvimento desse sistema de numeração: egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, maias, chineses, hindus e árabes. Obviamente, percorrer toda essa história passa, necessariamente, pelos números racionais.

Esses livros (KATZ, 2010; BOYER, 1974, EVES, 1997; ROQUE, 2012; IFRAH, 1996) são, basicamente, nossas fontes de estudos sobre a história dos números racionais. Outras fontes, como Silva (2009) e Caraça (1951), também nos inspiraram em certos momentos, mas de maneira menos direta. Buscamos nesses referenciais suas perspectivas acerca do desenvolvimento dos números racionais e estamos cientes de que a abordagem de cada livro pode ser contestada, pois há diferentes modos de se tratar a história das ciências. Por exemplo, como veremos neste texto, algumas abordagens mais recentes da história da ciência (como é o caso de Roque (2012)) contestam a de Katz (2010) quando se refere à crise filosófica grega, “causada” pelo problema da incomensurabilidade, alegando que a matemática pitagórica era fundamentada em outras práticas e, portanto, não faz sentido falar em crise quando suas preocupações eram outras. Nesse caso, a crítica refere-se ao fato de que a crise parece ser uma criação nossa sobre as práticas matemáticas daqueles povos. Trata-se de um anacronismo muitas vezes presente em abordagens sobre a história das ciências.

Contudo, não é nossa intenção aqui discutir as diferentes abordagens para a história dos números racionais, apesar de em alguns momentos apresentar diferentes versões para um mesmo acontecimento. A teoria dos perfis conceituais sustenta, portanto, essa nossa decisão, pois sugere utilizar fontes secundárias da história das ciências justamente por considerar os pontos de vista de mais de um historiador (SEPULVEDA; MORTIMER; EL-HANI, 2007).

Além disso, achamos necessário destacar que não temos a pretensão de fazer um completo estudo histórico dos números racionais, pois entendemos que isso demandaria uma pesquisa voltada para esse fim específico. Apresentamos e fazemos nossas interpretações dos livros citados de modo a perceber como seus autores entendem algumas das diferentes práticas matemáticas – situadas em diferentes contextos culturais – que podem ser associadas ao objeto matemático que, atualmente, identificamos como número racional. De algum modo, um momento nos desperta interesse específico: compreender como se deu sua formalização enquanto classes de equivalência e elementos de um corpo.

Essa breve discussão histórica faz parte do trajeto que nos leva na direção de alcançar tanto o objetivo específico de iniciar a construção de um perfil conceitual de número racional, como o objetivo maior de buscar fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática. Vamos, então, à nossa interpretação da história apresentada nesses livros.

A origem das frações, enquanto uma representação dos números racionais, parece estar ligada a atividades práticas, como a medição e a distribuição. Para Silva (2009), tomada uma unidade para se comparar com um objeto a ser medido, o número fracionário surge da necessidade de se dividir essa unidade escolhida para se efetivar uma medição desejada. Tal modo de compreender os racionais é, por exemplo, explorado em Caraça (1951), que se baseia no problema da medida para a construção do que ele chama de *Campo Racional*. Para esse autor, as relações entre operações com medição, propriedades privadas e Estado impulsionaram o desenvolvimento da geometria desde os egípcios.

> Heródoto – o pai da História – historiador grego que viveu no século V antes de Cristo, ao fazer a história dos Egípcios no livro II (Euterpe) das suas *Histórias*, refere-se deste modo às origens da Geometria:
> *Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos.*
> Como se vê, as relações do indivíduo para com o Estado, com base na propriedade, impuseram cedo (Sesóstris viveu provavelmente há perto de 4.000 anos) a necessidade da expressão numérica da medição. (CARAÇA, 1951, p. 32, grifos do autor).

Por mais que o uso das frações pareça estar ligado a essa necessidade da medição, Boyer (1974) afirma que nem sempre foi assim. Os homens da Idade da Pedra não faziam uso das frações para esse fim e a ideia de fração racional surgiu relativamente tarde, uma vez que

> Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de se usar frações. Para as necessidades quantitativas o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo. (BOYER, 1976, p. 4).

Ao longo desse estudo histórico, elucidaremos essa afirmação de Boyer. O desenvolvimento das frações não seguiu, evidentemente, uma sequência espontânea, sem grandes dificuldades. Pelo contrário, veremos que alguns “avanços” na compreensão das frações nem sempre foram prontamente aceitos, tornando o desenvolvimento conceitual dos números racionais gradativo e cheio de nuances. A própria interpretação de que o problema da medição de terra levou à necessidade da subdivisão da unidade e, consequentemente, à ideia de fração precisa ser questionada para não transmitir uma naturalidade inexistente no desenvolvimento das frações, pois, como veremos, entre a necessidade e a criação, muitos fatos ocorreram e muito tempo foi preciso. Fatores como a distinção entre número e grandeza, o tipo de notação e os sistemas de numeração utilizados foram preponderantes nesse desenvolvimento. Por exemplo, as frações decimais (frações cujo denominador é uma potência de dez) demoraram a ser utilizadas, como afirma Boyer (1974). Sua compreensão e uma notação adequada abriram novos caminhos para a matemática moderna, como veremos nos próximos parágrafos.

Para compreender a história dos números racionais, é importante, antes de tudo, ter em mente que nem sempre as frações[45] foram entendidas como números e olhar para elas como tal é recente na matemática.

Como foi apontado, grupos ancestrais não sentiram necessidade do uso das frações; ou, pelo menos, não há registros disso. Foi com a cultura egípcia que, de acordo com os registros, a necessidade do conceito e de uma notação para frações surgiu. Os egípcios utilizavam frações unitárias (frações com numerador 1), com a única exceção de $2/3$, talvez por elas serem as frações mais "naturais", como considera Katz (2010). Boyer (1974) afirma que a fração $2/3$ tinha um papel especial nos processos aritméticos dos egípcios, pois, para encontrar o terço de um número, primeiro encontravam os dois terços para depois tomar a metade disso.

Katz (2010) afirma que, pelo fato de a divisão ser a operação inversa da multiplicação, problemas como $156 \div 12$ era enunciado "multiplicar 12 de modo a obter 156". Contudo, nem sempre essa divisão era exata e, nesses casos, eram utilizadas as frações. Segundo Roque (2012), os registros egípcios indicam que havia dois tipos de fração para esse povo: as frações comuns, representadas por símbolos próprios, escritos em hierático e hieróglifo, como as frações (em notação atual) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$; e as outras frações, escritas colocando-se um marcador oval em cima, como se fosse o que hoje chamamos de numerador. Por exemplo, a fração $\frac{1}{7}$ seria escrita colocando-se o marcador oval sobre sete barras verticais, como vemos na Figura 11:

Figura 11: Representação egípcia para a fração $\frac{1}{7}$

[45] Nesse contexto, estamos chamando de frações as práticas matemáticas que podem ser associadas ao que hoje chamamos de fração.

Fonte: Roque (2012, p. 74)

Roque (2012) chama atenção para o fato de que esse marcador oval não tem, para os egípcios, o mesmo sentido que hoje chamamos de numerador. Para a autora, enquanto nosso numerador indica quantas partes tomamos de uma subdivisão em um dado número de partes, para os egípcios o símbolo oval não tem esse sentido cardinal, mas, sim, ordinal. Assim, seria "mais adequado dizer que essas frações egípcias representam os inversos dos números" (ROQUE, 2012, p. 75).

Como as frações apareciam como divisões não extas, os egípcios precisavam lidar com frações diferentes das unitárias. Nesse sentido, não se pode dizer que os egípcios não possuíam frações escritas, em notação atual, como $\frac{m}{n}$. O fato é que tais frações "eram criadas selecionando-se e justapondo-se frações que, somadas, perfaziam esse valor" (ROQUE, 2012, p. 77). Por exemplo, a fração $\frac{3}{5}$, que, para nós, atualmente, trata-se de uma fração irredutível, os egípcios a pensavam como uma soma de três frações unitárias: $\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

Muito do que sabemos sobre a matemática dos egípcios veio dos papiros, que resistiram aos desgastes do tempo por mais de três mil anos e são valiosas fontes de informação e de estudo sobre esse povo. O mais famoso deles é o Papiro Rhind (ou Papiro Ahmes), datado por volta de 1650 a.C. De acordo com Eves (1997), o Papiro Rhind é um texto matemático na forma de um manual, que contém 85 problemas em escrita hierática. Nele, encontramos diferentes tipos de problemas (das áreas de Geometria, Aritmética, Estereometria e Diversos[46]) que envolvem, por exemplo,

i) cálculos de divisões parciais, nas quais se efetuam as partilhas de 1, 3, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 pessoas;
ii) cálculos chamados de *seqem*, que pode ser traduzido como cálculos complementares de fração. São cálculos que envolvem adição ou multiplicação de frações até atingir um número inteiro ou outra fração; e

[46] Divisão feita por Raja Gabaglia (1899 apud MARTINS, 2015).

iii) problemas para a determinação de quantidades desconhecidas, chamados de Cálculo do *hau*. O *hau* ensina a resolver questões que, atualmente, constituem equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita.

Vejamos o problema 24 que, assim como os problemas 25 e 26 do Paprio Rhind, pertence ao grupo de "problemas de *hau*":

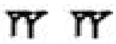
Problema 24: uma quantidade e seu $1/7$ somados fazem 19. Qual a quantidade?

Em notação atual, generalizaríamos tal resolução da forma: $x + \frac{x}{n} = b$.

Por mais que se diga que a matemática egípcia era essencialmente prática, problemas como esse não fazem referência a grandezas como volumes, quantidades de grãos ou áreas (ROQUE, 2012). Parece-nos que os escribas desejavam registrar um procedimento geral para esse tipo problema. Havia, portanto, uma busca por generalidade na matemática egípcia.

Katz (2010) considera que, por ser a matemática um instrumento de poder, o domínio ficava centrado entre os sacerdotes treinados e os escribas, que utilizavam e desenvolviam a matemática para benefício do próprio governo em áreas diversas, entre elas medição de terras, cobrança de impostos e construções. Assim como Roque (2012), Katz (2010) afirma que, embora a origem de muitos conceitos matemáticos provenha de situações práticas, os detentores dos conhecimentos matemáticos estendiam suas ideias para muito além dos limites da necessidade prática. As frações parecem ser um desses casos, em que a curiosidade extrapola as situações práticas, como no problema 24 apresentado.

Resumindo, para os egípcios, "as frações aparecem como resultado de divisões que não são exactas" (KATZ, 2010, p. 14) a partir de necessidades práticas, mas não se limitavam a esses usos. Entretanto, as frações utilizadas por eles eram as frações unitárias e, quando era preciso o uso de frações que não eram unitárias, estas eram representadas em termos de frações unitárias.

Os babilônios, por sua vez, possuíam um sistema de numeração posicional de base 60. Para Boyer (1974), uma diferença da matemática babilônia sobre a egípcia está no fato de que aqueles estenderam o princípio da posição às frações. Por exemplo, a notação  era usada, não apenas para $2(60) + 2$, mas também para $2 + 2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$ e outras tais frações. Silva (2009) chama esse sistema posicional dos babilônios de ambíguo, pelo fato de um mesmo símbolo representar mais de uma fração.

Para Ifrah (1996), por meio do sistema de numeração de posição com base 60, os babilônios foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais (frações com denominador igual a uma potência de 60). A ambiguidade anunciada por Silva (2009) é exemplificada por Ifrah (1996). Para este autor, a maneira como os babilônios exprimiam suas frações era parecida com o modo de se exprimir as frações de horas em minutos e segundos:

$$33 \text{ mim } 45 \text{ s } \left(= \frac{33}{60}\text{h} + \frac{45}{3.600}\text{h}\right)$$

Contudo, afirma Ifrah (1996), por não utilizarem *vírgula* para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade, por exemplo, a expressão $(33\,;45)$ podia significar $33h\ 45min$ ou, também, $0h\ 33\,\text{min}\ 45\ s$. "Era uma notação 'flutuante' que só o contexto podia precisar" (p. 327).

A ambiguidade citada pode, muitas vezes, nos parecer uma limitação da matemática babilônica, se olharmos pela ótica da matemática contemporânea. Contudo, temos que assumir que o tipo de notação utilizada atendia bem às práticas matemáticas do babilônios.

Chama-nos a atenção o tratamento que esse povo dava à divisão. Para eles, dividir por um número era o mesmo que multiplicar pelo seu *recíproco* (inverso multiplicativo de um número inteiro).

Segundo Katz (2010), todas as tabuadas de multiplicação dos babilônios encontradas até o momento são para números sexagesimais normais[47]. "Para os babilónicos, todas as fracções eram tratadas como sexagesimais, análogas às nossas fracções decimais" (KATZ, 2010, p. 19).

Um recurso utilizado pelos babilônios era a *tabela de recíprocos*. Tal tabela é uma lista de pares de números cujo produto é 1, apresentada na Figura 12:

Figura 12: tabela de recíprocos

2	30	16	3,45	48	1,15
3	20	25	2,24	1,04	56,15
10	6	40	1,30	1,21	44,26,40

Fonte: Katz (2010)

A tabela de recíprocos, juntamente com as tabelas de multiplicação, servia, não apenas para fornecer múltiplos desses números, mas também para fazer divisões. Por

[47] Katz (2010) chama de números sexagesimais normais os números cujos recíprocos são frações sexagesimais finitas.

exemplo, como 40 é o recíproco de $1{,}30$ (que significava $\frac{1}{60} + \frac{30}{60^2}$), o problema de efetuar $50 \div 40$ era equivalente a efetuar $50 \times 1{,}30$ (ou, em nossa linguagem, $50 \times \frac{1}{40}$).

Assim, as tabelas de multiplicação e a noção de recíproco eram suficientes para que efetuassem as divisões necessárias. Temos, então, uma importância da fração nesse contexto de multiplicação.

Outro momento marcante da história refere-se aos gregos, mais precisamente aos pitagóricos e a Euclides. Ao abordar a matemática grega, Roque (2012) afirma que, apesar de os pitagóricos serem vistos como os primeiros a lidarem com número numa perspectiva teórica e não apenas prática, não é possível afirmar que o conceito de número, para eles, fosse abstrato. “Os pitagóricos não separavam os números do mundo físico” (ROQUE, 2012, p. 111). Para essa autora, é possível distinguir pelo menos três funções para o conceito de número dos pitagóricos: designavam posição ou ordem; determinavam uma forma espacial (números figurados); e exprimiam razões que permitiam compreender as leis naturais.

Para os pitagóricos, o número era a base do universo e tudo podia ser contado, incluindo os comprimentos (KATZ, 2010). Nesse caso, para contar um comprimento, era necessária uma medida, a qual sempre era possível de ser encontrada. Segundo Katz (2010), encontrada uma medida num problema particular, esta tornava-se a unidade e não podia ser dividida. “A incapacidade pitagórica de reconhecer a distinção fundamental entre número e magnitude, ou entre a divisibilidade da unidade para o número e a infinita divisibilidade das medidas de magnitudes como o comprimento, iria provocar problemas” (KATZ, 2010, p. 65).

Considerando que todos os comprimentos podiam ser contados, os pitagóricos acreditavam que seria possível encontrar uma medida única pela qual tanto o lado como a diagonal de um quadrado podiam ser contados, o que não é verdade. A descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado, por volta de 430 a.C., “obrigou os pitagóricos a desistir da sua filosofia básica de que todas as coisas eram constituídas por números e permitiu aos matemáticos gregos o desenvolvimento de algumas novas teorias” (KATZ, 2010, p. 65).

Para Roque (2012), a ideia de que “tudo é número” para os pitagóricos não significava que “todas as grandezas são comensuráveis”. Sua versão diz que o problema geométrico de comparação de grandezas não parecia fazer parte do pensamento pitagórico e, por isso, contesta a ideia de que o problema da incomensurabilidade tenha produzido uma crise filosófica grega. Abordaremos, brevemente, essa visão em parágrafos posteriores.

Segundo Roque (2012), grande parte do que se conhece sobre a matemática grega vem de estudos sobre os escritos de Platão e de Aristóteles e de *Os Elementos*, de Euclides. Neste último, Euclides apresenta dois tipos de teoria das razões e proporções: i) no livro VII, uma versão que pode ser aplicada somente à razão entre inteiros. Tal versão é atribuída aos pitagóricos. A razão é definida para grandezas comensuráveis; ii) no livro V, uma versão, atribuída a Eudoxo, aplica-se igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Katz (2010) afirma que, ainda no livro V, Euclides explicita o que entende por *rácio*: "Duas magnitudes podem ter um rácio apenas se forem do mesmo *tipo*, isto é, se se tratar de duas linhas ou de duas superfícies ou de dois sólidos" (p. 101, grifo do autor).

Entretanto, pelo fato de que qualquer comparação entre grandezas possa ser encarada como uma teoria sobre razões, há historiadores que contestam a tese de que a primeira das teorias supracitadas seja, de fato, dos pitagóricos. Escritos de Hipócrates de Quios, datados do século 5 a.C., contêm estudos de razões e proporções entre figuras geométricas. A noção de razão usada naquela época não equivalia a uma fração entre números. "Não se tratava de uma diferença de linguagem, pois os métodos empregados eram geométricos e lidavam com as grandezas envolvidas no problema, e não com suas medidas expressas" (ROQUE, 2012, p. 117-118).

Como vemos, a relação entre grandeza e número traz aspectos relevantes para esse momento da história, seja para os estudos de Hipócrates, seja para os pitagóricos. Com Euclides, essa diferença será melhor estabelecida. Vejamos um pouco dessa discussão.

Roque (2012) afirma que não se pode estabelecer qual foi o primeiro exemplo da incomensurabilidade entre duas grandezas. Inclusive, a noção de comensurabilidade parece estar ligada, primeiro, aos números do que às grandezas. Para Proclus,

> A teoria das grandezas comensuráveis foi desenvolvida, primeiramente, pela aritmética e, depois, por imitação, pela geometria. Por essa razão, ambas as ciências definem grandezas comensuráveis como aquelas que estão uma para a outra na razão de um número para outro número, o que implica que a comensurabilidade existiu primeiro entre os números. (PROCLUS apud ROQUE, 2012, p. 121).

Há indícios, portanto, de que a comensurabilidade para números existiu primeiro e, depois, foi estendida para as grandezas. A existência de grandezas incomensuráveis levou os matemáticos da época a desenvolverem uma nova teoria das razões, independente da igualdade entre números (ROQUE, 2012). A técnica da *antifairese*[48], já utilizada para os números, foi uma dessas técnicas estendidas ao trabalho com grandezas.

Por esse motivo que Roque (2012) defende a tese de que não houve uma crise nos fundamentos da matemática grega. Para a autora, a possibilidade da existência de grandezas incomensuráveis seria um contexto positivo para o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razão e proporção. "Na verdade, a descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos – apenas isso" (ROQUE, 2012, p. 126).

Uma consequência desse contexto positivo pode ter sido o "divórcio entre o universo das grandezas e o universo dos números" (ROQUE, 2012, p. 123). Enquanto os pitagóricos não distinguiam número e magnitude, como afirma Katz (2010), Euclides, em *Os Elementos*, separa o tratamento das grandezas do tratamento dos números. Uma característica particular de *Os Elementos* é que as grandezas não são associadas a números. Nos livros que abordam número, Euclides os trata como segmentos de reta. Aliás, número, para Euclides, é a quantidade composta de unidades. E unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma. Isso significa que *um* não é número para Euclides, uma vez que "o número pressupõe multiplicidade" (ROQUE, 2012, p. 189).

Ainda sobre as razões para os gregos, Eves (1997) aponta que os pitagóricos faziam outro uso das razões: a relação entre intervalos musicais e razões numéricas. "Considerando cordas sujeitas à mesma tensão, eles encontraram que para a oitava os comprimentos devem ter a razão 2 para 1, para a quinta 3 para 2 e para a quarta 4 para 3" (EVES, 1997, p. 103). Tal feito fez os pitagóricos iniciarem estudos científicos das escalas musicais.

Alguns livros consideram que o sistema de notação dos gregos era precário, o que trazia consequências para o trabalho com frações. Para Ifrah (1996), os gregos tentaram atribuir uma forma geral às frações ordinárias, mas suas notações não favoreciam, o que os levou a desistir de adotar a notação sexagesimal dos babilônios em seus cálculos – os gregos utilizavam o sistema sexagesimal principalmente em cálculos voltados para a astronomia.

Tanto os gregos dos tempos de Euclides como anteriores não usavam fração de todo no seu trabalho formal, uma vez que a unidade não podia ser dividida (KATZ, 2010). As frações existiam em trabalhos de cálculos (computacionais), contudo os gregos utilizavam

[48] "A palavra *antifairese* vem do grego e significa, literalmente, 'subtração recíproca'. Na álgebra moderna, o procedimento é semelhante ao conhecido como 'algoritmo de Euclides' e sua função é encontrar o maior divisor comum entre dois números" (ROQUE, 2012, p. 119).

as tradicionais frações unitárias egípcias, segundo Katz (2010). Como esse autor apresenta, há numerosas "tábuas de divisão" mostrando como calcular com suas *partes*[49], como, por exemplo, "de 12, a 17ª parte é $\frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{17}\ \frac{1}{34}\ \frac{1}{51}\ \frac{1}{68}$" (KATZ, 2010, p. 102); o que hoje seria mais facilmente escrito como $\frac{12}{17}$.

De um modo geral, nos trabalhos formais, os gregos utilizavam as razões entre duas quantidades, ao invés das frações comuns. Entretanto, uma razão $a{:}\,b$ de Euclides não pode ser interpretada como uma fração que corresponde a um ponto particular na reta numérica e sobre a qual podem ser aplicadas as operações aritméticas padrão (KATZ, 2010).

Obviamente, a matemática grega não se encerra nos pitagóricos e em Euclides, tal como abordamos aqui. Outros matemáticos, pós-Euclides inclusive, foram essenciais para o desenvolvimento de diversas áreas da matemática. Diofanto, por exemplo, por meio de sua obra *Aritmética*, trouxe grandes avanços para a Álgebra, na resolução de equações e na própria simbologia utilizada pelos gregos. Entretanto, como afirmamos no início dessa seção, não é nosso objetivo explorar exaustivamente a história dos números racionais e, certamente, muitos fatos históricos que, por algum motivo, deixamos de apresentar aqui têm relação com o desenvolvimento histórico desses números. Mas, apresentar uma história é, necessariamente, fazer escolhas.

Certamente, como fora apontado no caso dos gregos, a notação tem forte influência no desenvolvimento das frações, dos números decimais e, consequentemente, dos números racionais. Nesse sentido, a criação do nosso sistema de números atual – o sistema de posição decimal, usualmente chamado de sistema hindu-arábico, pois teve, supostamente, sua origem na Índia e coube aos árabes sua transmissão ao Ocidente – proporcionou grandes avanços na matemática.

Foi por volta do século 5 d.C., no norte da Índia, que nasceu o ancestral do nosso sistema de numeração atual e em que foram estabelecidas as bases de cálculo escrito tal como praticamos hoje (IFRAH, 1996). O sistema de numeração hindu-arábico combina três princípios básicos e todos de origem antiga: (1) base decimal; (2) uma notação posicional; e (3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais (BOYER, 1974). Nenhum desses princípios se deveu, originalmente, aos hindus; mas, foi devido a eles que os três foram ligados.

No que se refere às frações, Katz (2010) afirma que não há evidências de que na Índia se usavam frações decimais, diferente dos chineses que já utilizavam. Contudo, foram

[49] *Partes* são frações unitárias ou frações com numerador 1 (KATZ, 2010).

os muçulmanos que introduziram as frações decimais no sistema posicional indiano, como veremos na sequência.

Nesse novo período da história da matemática, que podemos chamar matemática medieval (dos anos 500 a 1400 d.C.), percebemos que a função da matemática na sociedade ganha novas características. Como afirmamos anteriormente, desde os egípcios, a matemática já era um instrumento de poder. Na China, a dinastia de Han (que durou até o início do século 3 d.C.) instituiu o funcionalismo público baseado em exames de admissão e não mais em ligações familiares (KATZ, 2010). Tais exames exigiam competências em certas áreas da matemática, uma vez que os serviços administrativos do império incluíam agrimensura, impostos e elaboração de calendários. Desse modo, o governo incentivava os estudos de matemática aplicada, constituindo, por vezes, um Instituto Imperial de Matemática para treinar os funcionários em matemática prática.

Por mais que esses estudos fossem voltados para situações práticas, os matemáticos chineses alargavam seus métodos para além dessas necessidades. Talvez por este motivo, a matemática da China seja considerada uma das mais criativas do mundo após o declínio da matemática grega clássica (EVES, 1997), tendo influenciado fortemente o sistema de numeração hindu e sendo a precursora no uso das frações decimais, como fora dito.

Para Boyer (1974), nenhuma descrição da numeração chinesa está completa sem fazer referência às frações. Os chineses operavam com frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum (BOYER, 1974). Além disso, faziam "analogias com as diferenças entre os sexos, referindo-se ao numerador como 'filho' e ao denominador como 'mãe'. A ênfase sobre *yin* e *yang* (opostos, especialmente em sexo) tornava mais fácil seguir as regras para manipular frações" (BOYER, 1974, p. 146-147). Um destaque das frações chinesas era a tendência que tinham à decimalização de frações. O uso da ideia decimal em situações de peso e medida gerou o hábito decimal no tratamento das frações. Artifícios decimais nos cálculos eram, por vezes, adotados para facilitar a manipulação de frações.

O sistema posicional hindu espalhou-se da Índia para as terras islâmicas e, gradualmente, passou a tomar conta da matemática árabe. No registro mais antigo do uso das frações decimais fora da China, o texto de al-Uqlidisi escrito em 952, encontramos o cálculo da metade:

> No que é derivado do princípio dos números, a metade de um, em qualquer lugar é 5 antes dele. Segundo isso, se considerarmos a metade de um número ímpar, colocamos a metade como o 5 antes dele, sendo marcado o lugar das unidades com o sinal ′ em cima dele. O lugar das unidades torna-se dezenas para o que vem antes dele. Em seguida, obtemos a metade de cinco, como é de uso quando achamos a metade de números inteiros. O lugar das unidades

> torna-se das centenas da segunda vez em que se acha a metade. E assim sucessivamente. (SAIDAN, 1978 apud KATZ, 2010, p. 302).

Notamos, claramente, a noção de frações decimais no registro de al-Uqlidisi. Um exemplo fornecido por ele e apresentado por Katz (2010) nos mostra uma notação para número decimal bem próxima à atual: ao encontrar a metade de 19, repetidamente, cinco vezes, obtemos, na ordem:

$$9'5, 4'75, 2'375, 1'1875 \text{ e } 0'59375$$

Para achar o décimo de um número, "repetia-se simplesmente o número 'um lugar abaixo'" (KATZ, 2010, p. 302). Por exemplo, um décimo de $148'5$ é $14'85$. Contudo, as únicas divisões de que al-Uqlidisi se ocupa são por dois e por dez, o que parece indicar que não compreendia (ou não interessava) as frações decimais por completo, por mais que as usasse.

Outro texto, datado de 1172, mostrou que al-Samaw´al compreendia perfeitamente as frações decimais no contexto de aproximações (KATZ, 2010). É o *Tratado de Aritmética*, em que o autor realiza a divisão de 210 por 13, por exemplo, e nota que o resto da divisão não resulta em zero, mas que pode ser continuada tanto quanto se queira. Esse autor, como afirma Katz (2010), compreendeu o uso das frações decimais para aproximação de números racionais e irracionais.

Mesmo com essa importante obra de al-Samaw´al, o sistema posicional não estava completo. Foi no princípio do século quinze, com a obra de al-Kashi escrita em 1429, que houve tanto uma ampla compreensão das frações decimais como uma notação conveniente para elas (KATZ, 2010). Para separar a parte inteira de um número da parte fracionária decimal, al-Kashi usava uma linha vertical. Nesse momento, o sistema posicional hindu-arábico estava completo[50], considerando o sistema atual. Segundo Katz (2010), esse sistema chegou à Europa, mas foi somente no século dezesseis que passou a ser usado.

As maiores contribuições dos matemáticos islâmicos encontram-se, entretanto, na álgebra. Com forte influência dos gregos e, também, dos babilônios, a matemática islâmica trouxe grandes avanços nos estudos das equações. Como afirma Roque (2012), alguns problemas de ordem prática exigiam o desenvolvimento da matemática, como o caso das heranças. "Toda a família tinha direito a uma parte da herança, mas não de modo igualitário" (p. 244-245). Para tanto, métodos aritméticos sofisticados eram utilizados, passando, inclusive, por cálculos com frações. Daí, aponta Roque (2012), parecem ter surgido os primeiros problemas envolvendo o que hoje chamamos de equação polinomial do segundo grau.

---

[50] Dizer que *o sistema posicional hindu-arábico estava completo* é um exemplo daquele anacronismo que comentamos, pois o sistema está *completo* do ponto de vista atual.

Façamos um parêntese para destacar que, dentre os tipos de equações considerados por al-Khwarismi, um dos principais matemáticos da chamada hegemonia árabe, como a equação polinomial do primeiro grau $bx = a$, eram aceitas raízes fracionárias, mas os números negativos não. Os matemáticos islâmicos não lidavam com números negativos. Por isso, as raízes tinham que ser positivas para al-Khwarismi.

Na Europa, por mais que o sistema hindu-arábico fosse conhecido, sua principal vantagem da notação posicional não foi aproveitada completamente durante os primeiros mil anos de sua existência (BOYER, 1974). A aplicabilidade desse sistema às frações foi pouco explorada. Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1170 – 1240), por exemplo, fazia uso de três tipos de frações: comuns, sexagesimais e unitárias; mas, não das frações decimais (BOYER, 1974). Em sua famosa obra, *Liber abbaci*, Fibonacci apresenta tabelas de conversão de frações comuns em unitárias; e problemas envolvendo a conversão de moedas.

Com relação à notação, Ifrah (1996) afirma que a notação moderna das frações ordinárias[51] se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, simbolizavam uma fração de modo parecido como o que fazemos atualmente. Por exemplo, a fração $\frac{34}{1265}$ era escrita como:

$$34 \quad (numerador)$$
$$1265 \quad (denominador)$$

Essa notação foi depois adotada pelos árabes, que passaram a utilizar famosa barra horizontal (IFRAH, 1996). O uso da barra horizontal pode ser percebido nos trabalhos do francês Viète, que a utilizava para representar divisão:

$$\frac{A\ in\ B}{C\ quadratum}$$

significa, em notação moderna, $\frac{AB}{C^2}$ (KATZ, 2010).

[51] De acordo com Niven (1984), frações ordinárias é sinônimo de número racional. Um "número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero" (p. 30). Contudo, parece não haver consenso quanto a isso. Por exemplo, encontramos no livro *Programa de Admissão*, Cia Ed. Nacional, 1968, 19ª edição, do autor Oswaldo Sangiorgi, a seguinte definição: "As frações, cujos denominadores são potências de 10, são denominadas *decimais* e as demais, *ordinárias*" (p. 240, grifos do autor). Já Silva (2009) traz uma terceira possibilidade, em que fração ordinária parece ser sinônimo de frações menores que a unidade. Segundo a autora, em uma das obras de Étienne Bézout (1739-1783), o matemático "utiliza o termo *fração* para indicar, o que hoje chamamos de números misto e o termo *números fracionários*, para o que hoje chamamos de frações ordinárias ou frações menores que a unidade" (p. 88, grifos da autora). Portanto, o significado do termo *frações ordinárias* merece uma discussão mais aprofundada, mesmo que, ao que nos parece, não seja um termo ainda bastante utilizado.

Foi um contemporâneo de Viète que trouxe notável contribuição para uma mudança no pensamento matemático do final do século XVII. Simon Stevin criou uma notação para as frações decimais que proporcionou valiosos avanços nos cálculos, uma vez que permitia executar todas as operações exatamente como se estivessem usando números inteiros. Outra contribuição de Stevin refere-se à "alteração dos conceitos básicos de 'número' e na eliminação da distinção aristotélica entre número e quantidade" (KATZ, 2010, p. 473). Vejamos um pouco dessas contribuições de Stevin.

No final da Idade Média ou no Renascimento, as frações decimais não eram utilizadas na Europa. Nos textos aritméticos do século XIII até o século XVI, usavam, basicamente, os inteiros. Caso fosse necessário o uso das frações, eram escritas como frações vulgares ou como frações sexagesimais[52] (KATZ, 2010).

Como já destacamos, al-Samaw'al e al-Kashi já haviam compreendido o conceito de frações decimais e desenvolvido uma notação conveniente para tal uso. Contudo, considera Katz (2010), Stevin provavelmente não recebeu influência islâmica em seus trabalhos.

Em seu trabalho *De Thiende* (O décimo), Stevin afirma que a vantagem básica das frações decimais era, como dissemos, a possibilidade de executar operações em seu novo sistema do mesmo modo como se fazia com os inteiros. *Thiende* significava, para Stevin, a aritmética baseada nas progressões geométricas com razão dez usando os números hindu-arábicos e chamando os números inteiros de *começo* e usando o símbolo ⓪ para indicá-los. Assim, o número 241 é pensado como 241 começos e é escrito como 241 ⓪.

Segundo Katz (2010), a definição mais importante de Stevin foi aquela que diz: "e cada décima parte da unidade do começo chamamos o primo, cujo signo é ① e cada décima parte da unidade do primo chamamos o segundo, cujo signo é ② e, assim, para os outros; cada décima parte da unidade do signo precedente, sempre um lugar logo à frente" (MIDONICK apud KATZ, 2010, p. 475).

52 Frações comuns são também chamadas de frações vulgares. Segundo Smith (1958), a expressão "fração comum" foi usada originalmente para distinguir as frações empregadas no comércio das frações sexagesimais encontradas na astronomia. Em latim, a expressão utilizada era *fractiones vulgares*, por isso as "frações vulgares" dos ingleses (SMITH, 1958, p. 219). Notemos que a interpretação de Katz (2010), ao afirmar que frações decimais não eram utilizadas na Europa, mas que, caso fosse necessário, as frações eram escritas como frações vulgares ou como frações sexagesimais, parece indicar que esse autor assume que as frações vulgares (ou comuns, ordinárias) não eram frações decimais, relembrando a nota de rodapé 51.

Por exemplo, 2①5②6③8④ significa 2 primos, 5 segundos, 6 terceiros e 8 quartos; ou $\frac{2}{10}, \frac{5}{100}, \frac{6}{1000}, \frac{8}{10000}$ e, no total, $\frac{2568}{10000}$. De maneira análoga, $7\frac{237}{1000}$ é escrito como 7⓪2①3②7③. Aos números escritos seguindo essas regras, Stevin chama de *números decimais* (KATZ, 2010).

Na sequência de seu trabalho, Stevin mostra como as operações básicas são executadas com os números decimais.

A ideia das frações decimais no *De Thiende* está ligada à mudança do conceito de número. Por mais que muitos autores, ao longo do tempo, tenham tratado grandezas irracionais como números, lidando com elas com as mesmas regras e conceitos usados com números inteiros, foi Stevin na obra *L'Atithmétique*, de 1585, que desfez explicitamente a distinção euclidiana entre número e quantidade. Katz (2010) nos traz duas definições apresentadas em *L'Atithmétique*:

1. A aritmética é a ciência dos números;
2. Número é o que explica a quantidade de cada coisa.

Assim, número deixa de ser uma coleção de unidades, como em Euclides. Essa unidade é um número para Stevin. Assim, qualquer quantidade, inclusive a unidade, pode ser dividida continuamente. Essa é, em certo sentido, a base da ideia de uma fração decimal. "Podemos continuar os signos até tão longe quanto queiramos para determinar qualquer divisão da unidade, por mais pequena que ela seja" (KATZ, 2010, p. 476). Por mais que fizesse distinção entre pares de números comensuráveis e incomensuráveis, Stevin considerava todas essas quantidades como números e, portanto, podiam ser tratados com as operações aritméticas habituais.

Para Ifrah (1996), graças ao desenvolvimento das frações decimais e ao interesse em prolongar a numeração decimal de posição no outro sentido, isto é, na representação dos números 'depois da vírgula', desenvolveu-se sem grandes dificuldades a notação de todas as frações, permitindo, inclusive, mostrar os inteiros como frações particulares: aquelas cuja representação não comporta nenhum algarismo depois da vírgula.

Sobre o ponto como separatriz decimal, seu uso é atribuído ao matemático italiano Magini (1555 – 1617), mas somente com Napier se tornou mais popular na Europa. O ponto decimal é uma notação mais utilizada nos países anglo-saxões. Já a virgula decimal, mais comum para nós, foi criação de Wilbord Snellius, no século XVII (IFRAH, 1996).

Entramos nos séculos XVII e XVIII, caracterizados pelo início dos processos de formalização e de "rigorização" da matemática ocorridos nos séculos XIX e XX. O século

XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, principalmente pela criação do cálculo infinitesimal, com Isaac Newton e Gottfreid Leibiniz. É claro que as frações decimais e o sistema de numeração decimal tal como apresentamos contribuíram para os avanços da matemática nesses séculos.

Um destaque que fazemos nesse contexto do Cálculo Infinitesimal refere-se ao significado atribuído por Leibniz para as razões e para as frações, pois este revela um modo de pensar o número racional em uma área da matemática distinta da Aritmética e da Álgebra. Roque (2012) aponta que, para Leibniz, uma relação entre duas grandezas pode ser independente dessas quantidades, isto é, "se há uma relação c entre a e b, essa relação c pode não ser uma quantidade e, nesse caso, a relação c não interfere no cálculo quantitativo, que pode ser efetuado com as quantidades a e b" (ROQUE, 2012, p. 361). Havia, na perspectiva de Leibniz, uma autonomia da relação frente aos termos que a constituem. Esse modo de pensar resulta do fato que razões e frações são coisas distintas para Leibniz (ROQUE, 2012). Uma fração significava, para ele, uma divisão de dois números, "logo era uma quantidade obtida pela divisão de duas quantidades" (p. 361). Quer dizer, por mais que duas frações $\frac{+1}{-1}$ e $\frac{-1}{+1}$ representem o mesmo número, não são o mesmo que razões, mesmo que estas sejam expressas por aquelas (ROQUE, 2012). De maneira mais direta: uma razão pode ser expressa por uma fração, mas a razão em si é uma relação independente dos termos que a compõem. Um exemplo apresentado por Roque facilita nossa compreensão: Leibniz afirmava que é possível dizer que o número de olhos dos moradores de uma cidade é o dobro do número de narizes, mesmo sem conhecer o número efetivo de olhos e de narizes dessa cidade.

Para concluir esse destaque sobre Leibniz, apresentamos a afirmação de Roque (2012):

> A igualdade de razões seria, assim, uma relação de analogia entre duas relações, distinta da relação de igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos, que é designada por uma igualdade de frações. Logo, uma razão teria uma natureza qualitativa, ao passo que a fração, uma natureza quantitativa. Quando escrevemos o quociente de duas diferenciais dy/dx designamos uma razão e não uma fração.
> Não se trata, portanto, da divisão infundada de duas quantidades infinitamente pequenas dy e dx, mas de uma relação cujo estatuto é independente do estatuto dos termos que a compõem. (p. 362).

Fração como divisão entre números e razão como relação entre grandezas – essa era a compreensão de Leibniz. Em que momento da história tudo isso se "comprime" em um único conceito, o de número racional? Os próximos parágrafos tentam responder a essa questão.

Uma das realizações mais importantes do século XVIII foi a criação do sistema métrico decimal, "planejado para substituir uma miscelânea caótica de sistemas de pesos e medidas não científico por um apenas, sistemático, científico, preciso e simples" (EVES, 1996, p. 493). Com isso, os usos dos números decimais, obviamente, se expandem.

Os estudos envolvendo o Cálculo Infinitesimal caminharam, contribuindo para que o século XIX fosse conhecido, frequentemente, como "a idade do rigor". No que se refere ao rigor, Roque (2012) aponta que

> A noção de rigor se transformou na virada do século XVIII para o século XIX porque os matemáticos da época se baseavam em crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiram no interior da própria matemática. Ou seja, isso não se deu por preocupações formalistas, nem por um interesse metamatemático de fundamentar essa disciplina. O rigor é um conceito histórico, e a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que, por sua vez, também seria criticado por Weierstrass, baseado em sua própria concepção aritmética. (p. 407).

Nessa perspectiva, o rigor (atual) da matemática deu-se devido a necessidades internas, pela insuficiência dos argumentos da época para responder às questões que se apresentavam aos matemáticos. Um desses problemas internos a demandar uma nova noção de rigor, segundo Roque (2012), surgiu da crítica à concepção de números como quantidades. Associar números a quantidades passou a impedir o desenvolvimento da matemática; por exemplo, a discussão sobre quantidades negativas mostra que somente os números absolutos eram aceitos. Portanto, para avançar, "era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade" (ROQUE, 2012, p. 407).

Além da demanda interna, outro fator foi essencial para esse novo pensar: o momento histórico vivido pela matemática. Os séculos XVIII e XIX foram marcados pelo desenvolvimento da lógica simbólica, fundamental para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, por volta de 1820. Na lógica simbólica, diferentemente da lógica aristotélica, não existem evidências intuitivas e os axiomas, aceitos por conveniência, não tratam da verdade. Se, por um lado, esse contexto gerou uma busca por novos fundamentos da matemática, uma vez que a certeza da geometria euclidiana, há mais de dois mil anos considerada o paradigma do rigor, fora questionada, por outro, permitiu, como veremos, o desenvolvimento de novos conceitos abstratos, como as estruturas algébricas. Como afirma Einstein (2005), "o progresso alcançado pela axiomática consiste em ter separado claramente aquilo que é lógico-formal daquilo que constitui o seu conteúdo objetivo ou intuitivo" (p. 665).

Roque (2012) nos conta que essa abstração e formalização da matemática, impostas pelas reflexões sobre os fundamentos da matemática do século XIX, transformou a relação dessa disciplina com a física, tornando-se independente desta última. Por exemplo, os matemáticos da época sabiam que o progresso da matemática dependia de uma extensão do conceito de número, uma vez que estar associado a quantidades geométricas não os permitia conceber operações abstratas e arbitrárias sobre eles (ROQUE, 2012). Como era o caso dos números irracionais (atualmente chamados assim), que apareciam na resolução de problemas, mas não eram aceitos pela ausência de uma interpretação empírica acessível. Havia, portanto, uma necessidade de se conceitualizar tais números, bem como os negativos e os imaginários.

A ordem da construção formal dos números é bastante distinta da ordem da invenção dos mesmos. Vamos apresentar essa discussão de forma bastante breve[53].

Os números complexos, talvez pela dúvida gerada quanto à sua legitimidade naquele momento da história, foram os primeiros a ter uma fundamentação mais precisa, como par ordenado de números reais, atribuída a Hamilton, em 1833. Isso não significa que outros matemáticos não consideravam os números complexos em seus trabalhos. Gauss, por exemplo, na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, afirmou que toda equação polinomial com coeficientes reais admite pelo menos uma raiz complexa.

Os números complexos estavam bem definidos a partir dos reais. Contudo, o que eram os números reais? Tais números só foram formalmente construídos anos depois, em 1872, com Dedekind. Segundo Roque (2012), em meados do século XIX, algumas questões sobre os números reais começaram a surgir: como esses números se distribuem na reta? Que números podem ser encontrados no meio do caminho? Até esse momento, segue a autora, supunha-se que a reta contivesse todos os números reais, por isso não havia preocupação em definir os números reais. Porém, a intenção de Dedekind de caracterizar a continuidade da reta o levou à proposição dos chamados “cortes de Dedekind”. Os estudos de Dedekind e de Cantor foram essenciais para caracterizar os números reais, estabelecendo a impossibilidade de se realizar uma correspondência biunívoca entre os elementos do novo conjunto dos números reais e os números naturais; isto é, a noção de não enumerabilidade dos números reais.

A construção dos números reais foi feita a partir dos números racionais, que, para Dedekind, eram considerados dados. Segundo Roque (2012), foi Dedekind quem propôs uma caracterização dos números naturais e racionais em termos de conjuntos, dando os

[53] Para mais detalhes sobre a transição entre noção de número relacionado a quantidade e número abstrato, recomendamos o livro de Roque (2012).

próximos passos ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Os números racionais são construídos, então, como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros[54].

Aqui, nos encontramos em um momento central de nosso estudo. Por uma demanda interna da matemática, os números tornam-se abstratos e deixam de estar necessariamente ligados a uma quantidade ou a uma grandeza. O século XIX inventa a matemática "pura" e os números estão na base dessa invenção.

> Esse é o contexto em que o conceito de número, desvinculado da noção de quantidade e de qualquer associação com a realidade externa, tornou-se um dos objetos principais da matemática. As tentativas anteriores de assegurar as bases ontológicas dos conceitos fundamentais da matemática a partir da relação com uma certa realidade, não importa qual fosse, colocavam os alicerces dessa disciplina no mundo externo. No entanto, as dificuldades encontradas na legitimação das operações com números negativos e na conceitualização dos imaginários, juntamente com discussões epistemológicas sobre o cálculo infinitesimal, levaram ao desenvolvimento de uma matemática baseada em conceitos abstratos que passou a ser designada de "pura". (ROQUE, 2012, p. 422).

A teoria dos conjuntos, da forma como passa a ser praticada pelos matemáticos do século XIX, começa a ser cada vez mais conceitual e abstrata, diferente dos conjuntos concretos tradicionalmente utilizados até então. Os estudos das estruturas algébricas, com Dedekind, e as propriedade abstratas de cardinalidade e ordem, com Cantor, são exemplos disso.

Chegamos, então, à outra ponta da nossa história (a primeira foi a origem dos números racionais na forma fracionária): a invenção das estruturas algébricas, em particular, a estrutura de corpo. Para apresentar essa parte da história, acrescentamos outra fonte às já apresentadas: Milies (2004).

Para Milies (2004), o processo que levou à introdução de um ponto de vista verdadeiramente abstrato em álgebra teve início em 1815, quando matemáticos da Universidade de Cambridge, como Charles Babbage (1792-1871), George Peacock (1791-1858) e John Herschel (1792-1878), fundaram a *Analytical Society*, uma sociedade cuja finalidade imediata era reformar o ensino do cálculo, adotando as notações em uso no continente, mas cuja principal contribuição foi a discussão sobre os fundamentos da álgebra. Peacock, em seu *Treatise on Algebra*, publicado em 1830, tenta dar à Álgebra uma estrutura lógica comparada à da geometria em *Os Elementos* de Euclides. Ele e outros matemáticos da mesma época, como

---

[54] A criação do conceito de classe de equivalência e seu uso para a construção dos números inteiros a partir dos naturais, e dos racionais a partir dos inteiros não ficou explícita em nosso estudo histórico. Em Katz (2010), notamos que Hamilton, por volta de 1840, fez uso desse conceito para sua construção de número inteiro e, também, de número racional.

Augustus de Morgan, “tentaram axiomatizar as ideias fundamentais da álgebra e determinar até que ponto as propriedades dos inteiros se podem generalizar a outros tipos de quantidades” (KATZ, 2010, p. 836). Entretanto, os axiomas utilizados são aqueles abstraídos da aritmética e eles não perceberam que a escolha poderia ser feita livremente, tornando a álgebra independente da experiência aritmética, tal como a geometria não euclidiana tinha se tornado independente da experiência sensorial, com a adoção de axiomas que não são “verdades evidentes” (MILIES, 2004).

O século XIX foi favorável ao desenvolvimento das estruturas algébricas. A busca por fundamentos, o conceito abstrato de número, os estudos sobre resolução de equação, enfim, tudo isso convergiu para o desenvolvimento da álgebra abstrata. As noções de grupo, anel e corpo apareciam de certo modo nos trabalhos de diferentes matemáticos. Segundo Katz (2010), os estudos dos números determinados pelas soluções de uma equação algébrica conduziram à definição de corpo de números, por Kronecker e Dedekind. Contudo, nos trabalhos de Galois, por volta de 1830, a noção de corpo como um conjunto fechado para as operações de adição e multiplicação, em que existem oposto e inverso de todo elemento (com exceção do inverso do zero) já era conhecida por Galois (MILIES, 2004). O próprio corpo dos números racionais era conhecido por ele, mas sem sentir a necessidade de nomear esse conceito. Foi Kronecker, na década de 1850, que construiu efetivamente este corpo (KATZ, 2010).

Uma definição para o conceito de corpo aparece em um trabalho de Dedekind: “Um sistema A de números reais ou complexos α é chamado um *corpo* se a soma, diferença, produto e quociente de cada par destes números pertence ao mesmo sistema” (DEDEKIND, 1893 apud KATZ, 2010, p. 873). Segundo Katz (2010), Dedekind observou que 0 não pode ser denominador em nenhum quociente e que um corpo deve conter ao menos um número além do zero. Nesse sentido de Dedekind, o menor desses sistemas é o corpo dos números racionais, que está contido em qualquer corpo, enquanto o maior desses sistemas é o corpo dos complexos, que contém qualquer corpo numérico.

Como apresenta Katz (2010), tanto para Dedekind como para Kronecker, qualquer corpo continha o corpo dos números racionais e nenhum desses dois matemáticos buscou estender a definição de corpo para outros corpos, embora Galois já descrevia corpos finitos em um de seus artigos.

A definição abstrata de corpo veio com Heinrich Weber, que, no mesmo artigo de 1893, em que apresentou uma definição abstrata de grupo, combinou as versões de Dedekind-Kronecker de corpo com os sistemas finitos de Galois (KATZ, 2010). Para Weber, um *corpo*

> era um conjunto com duas formas de composição, adição e multiplicação, que para a primeira era um grupo comutativo e para a segunda o conjunto de elementos não nulos formava um grupo comutativo. Além disso, as duas formas de composição estavam relacionadas pelas seguintes regras: $a(-b) = -ab; a(b+c) = ab + ac; (-a)(-b) = ab;$ e $a.0 = 0$. Weber observou ainda que, num corpo, um produto só pode ser zero quando um dos factores é zero. (KATZ, 2010, p. 874).

A definição apresentada por Dedekind, posteriormente refinada por Weber e, em 1903, melhor estabelecida por Leonard Dickson, caminha para a definição de corpo tal como a conhecemos hoje e que é apresentada em livros destinados ao ensino da Álgebra Abstrata para cursos de Ensino Superior, como Gonçalves (2001), da forma como trazemos no Quadro 3:

Quadro 3: Definição da estrutura algébrica corpo

Seja A um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de *adição* e *multiplicação* em A e denotaremos por $+$ e $\cdot$

Assim,

$$\begin{aligned} +: A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a+b \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \cdot: A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Chamaremos $(A, +, \cdot)$ *um anel* se as seguintes 6 propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in A$.

A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (associatividade da adição)

A2) $\exists\ 0 \in A$ tal que $a+0 = 0+a = a$ (existência de elemento neutro para a adição)

A3) $\forall x \in A$ existe um único $y \in A$, denotado por $y = -x$, tal que $x+y = y+x = 0$ (existência do inverso aditivo)

A4) $a+b = b+a$ (comutatividade da adição)

A5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade da multiplicação)

A6) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c; (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade, à esquerda e à direita, da multiplicação em relação à adição)

Se um anel $(A, +, \cdot)$ satisfizer a propriedade:

A7) $\exists\ 1 \in A$, $0 \neq 1$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in A$, dizemos que $(A, +, \cdot)$ é *um anel com unidade* 1.

Se um anel $(A, +, \cdot)$ satisfizer a propriedade:

A8) $\forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x$, dizemos que $(A, +, \ \cdot)$ é *um anel comutativo*.

Se um anel $(A, +, \ \cdot)$ satisfizer a propriedade:

A9) $x, y \in A, x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, dizemos que $(A, +, \ \cdot)$ é um *anel sem divisores de zero*.

Se um anel $(A, +, \ \cdot)$ é um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero, dizemos que $(A, +, \ \cdot)$ é um *domínio de integridade*.

Se um domínio de integridade $(A, +, \ \cdot)$ satisfizer a propriedade:

A10) $\forall x \in A,\ x \neq 0, \exists y \in A$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = 1$, dizemos que $(A, +, \ \cdot)$ é um *corpo*.

Fonte: adaptado de Gonçalves, 2001, p. 34-35.

Para finalizar esse relato histórico, que não visou contemplar totalmente a história dos números racionais, mas, sim, evidenciar, por meio das interpretações dos historiadores aqui trazidos, algumas práticas matemáticas que podem associar ao que hoje conhecemos por números racionais, não podemos deixar de pontuar o papel do grupo Bourbaki na matemática contemporânea, que também influenciou na educação, como foi o caso do Movimento da Matemática Moderna, nos anos 1960. Como afirma Roque (2012), Bourbaki é o pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses dos anos 1930, que buscava "elaborar livros atualizados sobre todos os ramos da matemática, que pudessem servir de referência para estudantes e para pesquisadores" (p. 473). Esse grupo foi responsável por popularizar a imagem da matemática como um saber axiomatizado baseado nas noções de conjunto e estrutura, com a publicação, em 1939, do livro *Elementos da matemática: as estruturas fundamentais da análise*.

Os trabalhos desse grupo, certamente, influenciaram a visão da matemática acadêmica contemporânea, a qual se preocupa mais com a estrutura e com as leis que a regem do que com a natureza do número. Por exemplo, o número racional é, para o matemático profissional, "qualquer coisa" que satisfaça aquelas propriedades do corpo dos racionais, independentemente se esse número significa um quociente, uma razão ou uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros[55].

[55] Este parágrafo foi inspirado pela conversa informal que tivemos com o professor César Polcino Milies sobre a construção formal dos números racionais, em março de 2016.

Nesse sentido, entender número racional como elemento de um corpo ordenado, passa a ser mais interessante, do ponto de vista da matemática acadêmica, do que se preocupar com a natureza desse elemento, pois isso permite ao matemático produzir novos conhecimentos considerando a estrutura em questão. Por exemplo, reconhecer que o conjunto $\mathbb{Q}$ com as propriedades adição e multiplicação constitui um corpo permite, ao matemático profissional, retirar novas características, como: $(\mathbb{Q}, +, \ .)$ é o menor corpo que contém o anel $(\mathbb{Z}, +, .)$. Assim, $(\mathbb{Q}, +, .)$ é chamado de corpo das frações do domínio de integridade $(\mathbb{Z}, +, .)$. Outros corpos importantes podem ser construídos a partir de uma extensão de um domínio de integridade, por exemplo: seja $(\mathbb{Z}[X], +, .)$ o anel dos polinômios com coeficientes inteiros, $(\mathbb{Q}[X], +, .)$ é seu corpo das frações.

Com isso, chegamos aos números racionais segundo a matemática contemporânea. Na próxima seção, apresentamos nossos estudos e análises acerca dos números racionais na Matemática Acadêmica, a terceira etapa do aprofundamento teórico sobre o ensino do corpo dos números racionais.

2.3 Aspectos dos números racionais na Matemática Acadêmica

Dos estudos conceitual e histórico apresentados nas seções 2.1 e 2.2 respectivamente, evidenciamos dois modos de pensar os números racionais que não são trabalhados na Educação Básica, mas o são em cursos de formação de professores: número racional como classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros e número racional como elemento de um corpo. Diante disso, questionamo-nos: *em que medida acrescentar esses modos de pensar os números racionais ao perfil conceitual do professor em formação inicial favorece seu conhecimento do conteúdo no horizonte e, consequentemente, seu conhecimento matemático para o ensino?*

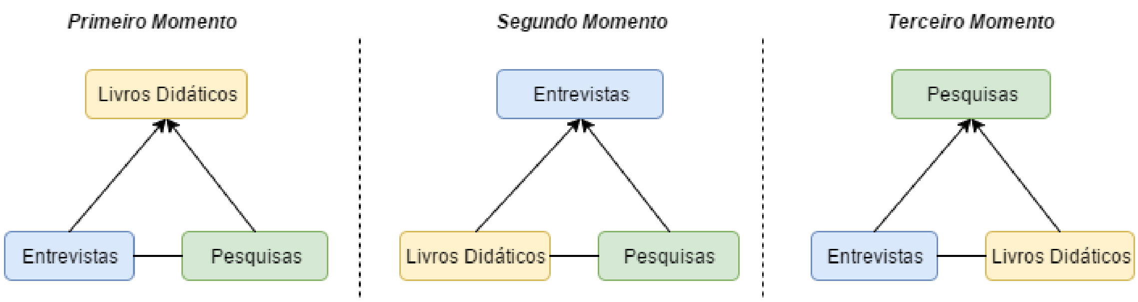
Essa pergunta nos norteia ao longo da análise que realizamos nesse momento e, para respondê-la, vamos abordar os modos de pensar supracitados por meio dos dados obtidos pelas já comentadas fontes: livros didáticos, entrevistas e pesquisas. Nosso objetivo é, portanto, dialogar com esses dados buscando, ao mesmo tempo, problematizar os números racionais enquanto classes de equivalência e enquanto elementos de um corpo, bem como articulá-los a situações da prática docente apontadas na próxima seção. Isso significa que não é nossa intenção fazer uma discussão puramente matemática, como uma reprodução *ipsis litteris* de livros utilizados como referências bibliográficas de disciplinas de Álgebra ou Fundamentos de

Matemática, apesar de usá-los. Do mesmo modo, não buscamos realizar uma discussão matemática "profunda", no sentido de quantidade de exemplos ou de propriedades de corpos. Pretendemos, aqui, problematizar esses modos de pensar e, ao mesmo tempo, examinar mais detalhadamente seus potenciais no desenvolvimento do conhecimento matemático do futuro professor sobre os números racionais.

A escolha por apresentar primeiramente os números racionais na Matemática Acadêmica e, em seguida, os números racionais na Matemática Escolar se deu, apenas, por uma tentativa de dar maior fluidez ao texto, uma vez que alguns conceitos apresentados aqui são importantes para as discussões na próxima seção. Entretanto, essas duas seções (2.3 e 2.4) foram construídas concomitantemente, realizando idas e vindas entre as *discussões com* os números racionais na Matemática Escolar e as *discussões com* os números racionais na Matemática Acadêmica. Essa interdependência entre as seções também se evidencia na semelhança entre as perguntas que norteiam cada seção.

Para nossas análises, seguimos um procedimento dividido em três momentos. No primeiro momento, tomamos os livros didáticos como fonte norteadora dos temas a serem discutidos, uma vez que vemos nos livros uma boa orientação da distribuição e na forma de abordar o conteúdo. Quando possível, estabelecemos relações entre o que está apresentado nos livros, as falas dos professores formadores e as pesquisas. No segundo momento, o foco está nas entrevistas, buscando as reflexões e significados atribuídos pelos professores e complementando com os livros e resultados de pesquisas que eventualmente tratam daquele tema em questão. No terceiro e último momento, as pesquisas passam a ser o centro das discussões, caso algum aspecto apresentado ainda não tenha sido discutido nos momentos anteriores. Esse procedimento está ilustrado na Figura 13.

Figura 13: estrutura das análises



Fonte: o próprio autor

Com isso, buscamos uma complementariedade nas análises: temas não discutidos a partir dos livros puderam ser a partir das entrevistas e, do mesmo modo, temas não discutidos a partir das duas fontes anteriores, puderam ser contemplados com as pesquisas.

Realizamos leituras iniciais dos livros, das entrevistas transcritas e de pesquisas selecionadas para retirarmos os trechos que compuseram as unidades a serem analisadas. Dessas unidades, aprofundamos as análises por meio do que chamamos de *Reflexões*, que são produtos de nossas interpretações sobre os dados e entrelaçamentos com os referenciais teóricos assumidos.

As *Reflexões* têm as funções de, por um lado, dissertar sobre o tema em questão e, por outro, preparar o campo para nossas próximas construções: uma caracterização para o ensino do corpo dos números racionais, a Matriz Epistemológica e, por fim, a sequência de tarefas proposta.

Apresentamos essas *Reflexões* na forma de quadros numerados, pois queremos destacá-las em meio ao restante do texto. Desse modo, pudemos "chamar" as *Reflexões* pelos seus números sempre que achamos necessário, indicando sua relação com aquele momento específico do trabalho. Isso nos permitiu uma maior dinâmica quando confrontamos a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica nesta seção e na próxima. O mesmo foi feito para a tarefa, para a caracterização do ensino do corpo dos números racionais em cursos de formação de professores e para a construção da Matriz Epistemológica: as *Reflexões* estão sempre fundamentando as etapas, sendo indicadas por suas numerações.

Primeiro momento: dos livros didáticos

Do estudo feito nos livros destinados ao Ensino Superior, observamos diferentes formas de definir esses números. Algumas delas favorecem a noção de corpo dos números racionais e nos levam a discussões pertinentes à formação de professores; outras, ao nosso ver, merecem algum tipo de discussão a fim de evitar confusões na compreensão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Apresentamos algumas dessas abordagens a seguir, mas é preciso destacar que nosso foco não está nos livros, mas nas discussões matemáticas que eles nos propiciam.

Algumas definições dos números racionais presentes na literatura

No livro *Números: racionais e irracionais*, Niven (1984) apresenta a seguinte definição: "um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero" (NIVEN, p. 30). O autor destaca que os termos *número racional* e *fração ordinária* são, às vezes, usados como sinônimos. Porém, o termo *fração* sozinho é usado para designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador, como os exemplos:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{15}{x} \; ou \; \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Essa definição de número racional apresentada por Niven (1984) aproxima-se daquela apresentada em livros didáticos para o Ensino Fundamental, como o de Chavante (2015b). Como apontado por Kieren (1980), essa definição "esconde" os diferentes significados dos números racionais e apenas valoriza uma forma de representar esses números, a forma fracionária.

Já Caraça (1951), no livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, apresenta a construção do campo racional (ou o conjunto dos números racionais) a partir do problema da medida. Dessa maneira, a definição trazida pelo autor é a partir de uma perspectiva geométrica:

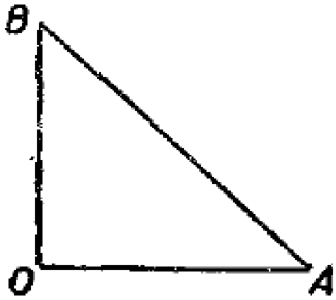
> Sejam os dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u. $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento AB, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se
>
> $$\overline{AB} = \frac{m}{n}.\overline{CD}$$
>
> Quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ diz-se *fracionário*.
>
> O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, *racional* – ao número m chama-se *numerador* e ao número n *denominador*. (CARAÇA, 1951, p. 35-36).

Para completar o conhecimento sobre esse novo conjunto numérico, Caraça (1951) define as propriedades do campo racional, tais como ordenação, igualdade, desigualdade, adição, multiplicação etc.

Pela definição dada pelo autor, há dois "tipos" de números racionais. Por exemplo, a divisão dos inteiros 2 e 5 fornece o quociente $\frac{2}{5}$, que é um número *racional fracionário*. Enquanto que o quociente de 4 por 2 é o *racional inteiro* $\frac{4}{2} = 2$.

A abordagem de Caraça (1951), via medição de segmentos, tem um forte potencial para abordar a necessidade da criação dos números irracionais (ou a *insuficiência geral* do campo dos racionais, nos termos do autor), por meio de segmentos incomensuráveis. O autor assim o faz, quando propõe o caso do triângulo retângulo $B\hat{O}A$ isósceles, isto é, $\overline{OA} = \overline{OB}$, como ilustrado na Figura 14.

Figura 14: Triângulo isósceles BÔA



Fonte: Caraça (1951, p. 49)

Tem-se, com isso, o seguinte problema: buscar a medida da hipotenusa $\overline{AB}$, tomando como unidade o cateto $\overline{OA}$. Como é sabido, tal problema leva ao fato de que não existe um número racional $r = \frac{m}{n}$ irredutível, tal que $\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{OA}$, ou, em outras palavras, $\overline{AB}$ e $\overline{OA}$ são segmentos incomensuráveis, "o que quer dizer que *não têm medida comum*" (CARAÇA, 1951, p. 54, grifos do autor).

Assim, em um contexto mais geral, se existir um segmento $\overline{EF}$ e dois números naturais m e n ($n \neq 0$), tais que $\overline{AB} = m\overline{EF}$ e $\overline{CD} = n\overline{EF}$, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos *comensuráveis* e isso significa que a razão entre seus comprimentos é um número racional:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m\overline{EF}}{n\overline{EF}} = \frac{m}{n}$$

Em outros livros, como Carvalho, Lopes e Souza (1984), Evaristo e Perdigão (2013), Milies e Coelho (2006) e em Domingues (1991; 2009), encontramos uma definição que toma o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais como uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Essa é a definição que nos interessa nesse momento, pois será a partir dessa construção formal de $\mathbb{Q}$ que chegaremos ao corpo dos números racionais, objeto de estudo aqui.

Carvalho, Lopes e Souza (1984), no livro *Fundamentação da Matemática Elementar*, apresentam a necessidade de um novo conjunto numérico a partir deficiência do conjunto $\mathbb{Z}$ com relação à operação de divisão. A abordagem tomada é:

A operação $(-12) \div (+3)$ equivale à pergunta "qual o número inteiro que devemos multiplicar por $(+3)$ para se obter (-12)?". Tal pergunta se traduz pela seguinte equação:

$$+3.x = -12$$

Se houver solução em $\mathbb{Z}$ para essa equação, temos a resposta para a pergunta formulada. Uma equação de primeiro grau $b.x = a$ tem solução em $\mathbb{Z}$, quando a for um múltiplo de b, o que nos leva a concluir, no caso da equação $3x = -12$, que $x = -\frac{12}{3}$, em que o símbolo $-\frac{12}{3}$ indica o quociente de -12 por 3, que é -4.

Nesse caso, tal "símbolo, denominado *fração*, não passa de uma maneira convencional de se escrever o par $(-12, 3)$, que responde à pergunta: 'qual o número que devemos multiplicar por 3 para obter -12?'" (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984, p. 136).

Assim, continuam os autores, tanto o par ordenado $(5,7)$, como a fração $\frac{5}{7}$, nos perguntam: qual o número x que multiplicado por 7 fornece como produto 5?

É claro que existem outros pares ordenados de números inteiros cujo mesmo número x seja quociente. Por exemplo, o inteiro -4 é quociente de $-\frac{12}{3}$ e, também, de $-\frac{24}{6}$ ou de $-\frac{28}{7}$. Nesses casos, dizemos que os pares ordenados $(-12, 3)$, $(-24, 6)$, $(-28, 7)$ se equivalem, uma vez que seus quocientes são iguais a -4.

Para expressar essa equivalência entre pares ordenados é usual o símbolo $\sim$ e, segundo o livro, lê-se "equiquociente".

Diante desses termos, uma fração pode ser definida como "um par ordenado de números inteiros (a, b), o segundo elemento b diferente de 0. O 1º elemento do par é denominado *numerador*, e o segundo, *denominador*" (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984, p. 137). Nesse sentido, uma fração é um elemento do produto cartesiano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Assim, se definirmos sobre o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ a relação equiquociente $\sim$ dada por:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a.d = b.c \text{ ou } \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$$

então essa relação $\sim$ entre elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ é uma relação de equivalência, pois goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Tal relação divide o conjunto em *classes de equivalência*[56] e o conjunto das classes de equivalência de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$ é o *conjunto quociente* denotado por $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$. Cada classe de equivalência construída por frações equiquocientes define um *número racional* (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984).

[56]*Definição*: seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto E. Dado a, com $a \in E$, chama-se *classe de equivalência* determinada por a, módulo R, o subconjunto de $\bar{a}$ de E constituído pelos elementos x tais que xRa. Em símbolos: $\bar{a} = \{x \in E |\ xRa\}$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003). No caso do nosso contexto, temos $\left(\frac{a}{b}\right)$ (em vez de $\overline{(a, b)}$) a classe de equivalência: $\left(\frac{a}{b}\right) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid ay = xb\}$.

Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ são equiquocientes e constituem uma classe de equivalência, que podemos representar pela fração $\frac{1}{2}$ (qualquer elemento da classe de equivalência pode ser usado para representá-la). Temos, então, que:

$$\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \dots\right\}$$

Segundo Carvalho, Lopes e Souza (1984), o conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é definido pelo conjunto quociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$, isto é,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$$

Depois de apresentar essa definição, os autores definem as operações (adição e subtração, multiplicação e divisão) e provam (ou deixam como exercício) as propriedades dessas operações, que somente ao final do livro serão relacionadas com a estrutura algébrica corpo.

Reflexão 1: frações equivalentes e o sinal de igualdade

Em nossa concepção, a abordagem inicial feita por Carvalho, Lopes e Souza (1984), trazendo a necessidade da construção dos números racionais a partir da resolução de equações do primeiro grau $a.x = b$, é uma maneira adequada de se apresentar, em cursos de formação de professores, a motivação de se criar um novo conjunto numérico $\mathbb{Q}$ e construí-lo a partir dos já conhecidos números inteiros, uma vez que a noção de equação do primeiro grau é familiar ao licenciando e ele pode associá-la com um tema da Educação Básica. O mesmo é feito por Wasserman (2014), como veremos mais adiante.

Além disso, acreditamos que essa construção favoreça a compreensão do estudante acerca da noção de equivalência de frações. É importante notar, no entanto, que, pela forma como foi apresentada, há, como afirmam Carvalho, Lopes e Souza (1984), um abuso de linguagem de professores e livros didáticos quando escrevem, por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, quando o *correto* (dentro da Matemática Acadêmica) seria $\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{4}\right)$, pois estamos falando da mesma classe de equivalência, só que com representantes diferentes. Ou, outra maneira formalmente *correta* de escrever seria $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$, pois são frações equivalentes, não iguais.

Novamente, chamamos a atenção para a diferença entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica. Enquanto na Matemática Escolar escrever $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ é natural, o formalismo da Matemática Acadêmica não considera o mesmo. Contudo, cabe uma discussão: é relevante ao professor ter consciência dessa diferença? Será que para todos os diferentes significados atribuídos aos números racionais essa igualdade faz sentido? Por exemplo, pensando no significado parte-todo, dividir uma pizza ao meio e pegar 1 dos pedaços, isto é $\frac{1}{2}$, seria "igual" a dividi-la em 4 pedaços e pegar 2 pedaços, isto é $\frac{2}{4}$? Poderíamos dizer, neste caso, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$?

É bastante comum, na Matemática Escolar, falar que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes, mas usar o símbolo de igualdade para representar isso: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Seria essa discussão relevante para o conhecimento matemático do professor?

Nossa posição sobre isso é que, tanto no caso dos pedaços de pizza, como na maneira formalmente *correta*, o professor precisa estar consciente do contexto em que cada um deles acontece e do que é legítimo considerar no momento em que é exigida sua ação. Para tanto, o professor precisa ter clareza e conhecimento para reconhecer as distinções e assumir uma posição frente à determinada situação. O conceito de equivalência é central no trabalho com frações e diferenciar equivalência de igualdade de frações é uma demanda da prática docente.

Nesse sentido, a construção de número racional por classes de equivalência pode ilustrar o papel da noção de equivalência, principalmente quando essa construção é comparada com a construção de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$, possibilitando ao professor ampliar seu repertório de conhecimento matemático.

Alguns livros utilizam notações diferentes dessas apresentadas por Carvalho, Lopes e Souza (1984). Em *Fundamentos de Aritmética*, Domingues (2009, p. 218), por exemplo, escreve:

$$\frac{m}{n} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x,y)\sim(m,n)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid nx = my\}$$

É evidente que o símbolo $\frac{m}{n}$ está sendo usado como um representante de uma classe de equivalência, apesar de não usar uma notação específica para ela (um traço em cima ou parênteses). Para esse autor, e também para Milies e Coelho (2006) no livro *Números: uma introdução à Matemática*, $\frac{m}{n}$ não é uma maneira convencional de se escrever o par (m,n), isto é, (m,n) não é o mesmo que $\frac{m}{n}$ (diferente do que consideram Carvalho, Lopes e Souza (1984)). $\frac{m}{n}$ é um símbolo que representa a classe do par (m,n). Seguindo essa interpretação, faz sentido considerar, por exemplo, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pois $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são representantes de uma mesma classe de equivalência e a igualdade $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ está se referindo à igualdade da classe e não aos pares $(1,2)$ e $(2,4)$. Para representar a equivalência desses usamos o símbolo ~. Neste caso, temos:

$$\frac{m}{n}=\frac{r}{s} \Leftrightarrow (m,n)\sim(r,s)$$

Reflexão 2: o significado de número

Além da discussão acerca da equivalência ou igualdade de frações, podemos fazer outro destaque sobre a influência desse olhar formal para os números racionais: um número racional $\frac{m}{n}$ é uma classe de equivalência? Isto é, um número racional é um conjunto? Do ponto de vista do estudante/futuro professor que está começando a compreender a construção dos números racionais, isso faz sentido? Do ponto de vista do ensino, como podemos abordar o número $\frac{m}{n}$ como uma classe de equivalência considerando a noção anterior que o estudante tem desses números da Educação Básica? Isto é, como associar esse novo significado àqueles que o estudante da Licenciatura traz consigo ao longo de anos de Educação Básica para o símbolo $\frac{m}{n}$?

Moreira e David (2003) nos trazem um exemplo semelhante a esse, só que com os números reais. Esses números

> [...] são cortes de Dedekind? São classes de equivalência de seqüências de Cauchy? São seqüências de intervalos encaixantes? Para o matemático profissional, a distinção entre essas formas de conceber o número real não é relevante. O mesmo objeto matemático — número real — pode ser pelo menos três "coisas" completamente diferentes. (p. 65).

Para o matemático profissional não importa o que significa o número, importa que satisfaça a estrutura que o contém. No contexto da prática do professor de matemática da escola básica, essa forma de compreender os números racionais enquanto classes de equivalência (ou os números reais enquanto cortes de Dedekind) pode não fazer sentido. Como assim um número é um conjunto? O que é um número, então? Acreditamos que a história da matemática apresentada na seção 2.2 esclarece um pouco essa questão, quando mostra, mesmo de forma breve, como se deu a abstração do conceito de número.

Essas discussões precisam ser postas para o futuro professor, pois simplesmente apresentar esse significado formal ao licenciando, sem colocar em debate e sem colocar em conflito os significados da Matemática Escolar e da Matemática Acadêmica, não é suficiente para que ele compreenda e valorize esse modo de pensar os números racionais.

Ainda sobre a abordagem de Carvalho, Lopes e Souza (1984), eles consideram $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$ para depois definir as operações sobre os números racionais e propriedades delas, concluindo, ao final do livro, que $(\mathbb{Q}, +, .)$ é um corpo, o corpo dos números racionais. Porém, nem todos os livros seguem essa mesma linha de pensamento. Os livros de Domingues (1991, 2009), de Gonçalves (2001) e de Evaristo e Perdigão (2013), por exemplo, apontam para compreensões distintas.

Com uma abordagem parecida com a de Carvalho, Lopes e Souza (1984), Domingues (1991) constrói o conjunto quociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$ e utiliza a letra $\mathbb{Q}$ para designá-lo. Assim,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\right\}$$

Contudo, o autor ainda não o chama de conjunto dos números racionais e escreve: "Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados *números racionais* desde que se definam adição, multiplicação e relação de ordem, conforme o faremos nos itens seguintes" (DOMINGUES, 1991, p. 182). A forma como o autor condiciona os elementos de $\mathbb{Q}$ a serem chamados de números racionais *desde que* se definam as operações passa a impressão de que as operações de adição e multiplicação e a relação de ordem estão "embutidas" em $\mathbb{Q}$ e, portanto, faria sentido chamar $\mathbb{Q}$ de corpo (sem expressar a terna $(\mathbb{Q}, +, .)$). Na edição mais atualizada desse livro (DOMINGUES, 2009), o autor retira esse trecho do texto, evitando a interpretação que fizemos. Entretanto, na nova edição, o autor acrescenta outro trecho:

> Nesse contexto, então, o conjunto $\mathbb{Q}$ com a adição e a multiplicação definidas sobre ele é apenas um exemplo, embora particularmente importante, de corpo. Trata-se do *corpo dos números racionais*. Os elementos de $\mathbb{Q}$, nesse contexto, são chamados *números racionais* ou *frações comuns*. (DOMINGUES, 2009, p. 223, grifos do autor).

Entendemos que esse novo trecho dá margem para a mesma interpretação, pois a abordagem nos indica que o conjunto $\mathbb{Q}$ definido como $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$ não é, num primeiro momento, o conjunto dos números racionais, e os elementos de $\mathbb{Q}$ só serão chamados de números racionais a partir da noção de *corpo dos números racionais*, ou seja, depois de serem definidas as operações de adição e de multiplicação sobre o conjunto $\mathbb{Q}$.

O caminho sugerido por Domingues (2009) parece ser diferente daquele sugerido por Carvalho, Lopes e Souza (1984). Enquanto estes constroem o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais para, depois, definir as operações de adição e multiplicação sobre $\mathbb{Q}$, culminando no corpo dos números racionais, aquele constrói um conjunto $\mathbb{Q}$, define as operações de adição e multiplicação sobre esse conjunto, conclui que esse conjunto munido dessas operações constituem o corpo dos números racionais e, somente depois disso, o autor define os *números racionais*. Nesse caso, os números racionais são elementos de um corpo quociente.

Essa forma de enxergar os números racionais como elementos de um corpo quociente é apresentada, também, por Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983). Kieren (1976) considera que, ao assumir os axiomas de corpo, um número racional pode ser interpretado como elemento de um corpo quociente. Assim, elementos "de um corpo quociente são números da forma b/a que representam soluções para equações da forma $a.x = b$, onde a e b são inteiros" e "pode ser estabelecido que em um corpo tais quocientes são possíveis e únicos ($a \neq 0$)" (KIEREN, 1976, p. 118). No trabalho posterior, Kieren (1980) incluiu essa interpretação no subconstruto quociente, tal como apresentamos na seção 2.1.

Reflexão 3: um caminho possível

Entendemos que, do ponto de vista do matemático profissional, entender os números racionais como elementos de um corpo quociente é mais natural, uma vez que, para ele, não importa o que significa o número (se é uma classe de equivalência, se é razão, se é operador); importa que satisfaça a estrutura. A "postura moderna" dos matemáticos considera que um número racional é qualquer coisa que tenha tais propriedades, não importa a natureza do número[57]. Em nossa compreensão, considerar os números racionais apenas como elementos de um corpo quociente esconde a natureza desses números (enquanto classe de equivalência, parte-todo, operador, divisão indicada, medida) e passamos a operá-los sem nos preocupar com essa natureza.

Novamente, as ideias de Moreira e David (2010) nos trazem uma luz para essa situação. A Matemática Acadêmica, ao compactar ideias matemáticas em enunciados formais, esconde uma variedade de maneiras de pensar que o professor fará uso na escola básica. Por isso, ao contrário do que acontece com o matemático profissional, o professor da Educação Básica precisa reconhecer o sentido atribuído ao número racionais no contexto dado, não apenas saber se satisfaz a estrutura de corpo.

Contudo, que contribuições para seu conhecimento matemático pode trazer quando o professor entende os números racionais como elementos de um corpo quociente? Uma resposta possível, ao nosso ver, seria: garante-nos que as propriedades de corpo são válidas quando resolvemos a equação $a.x = b$, com a e b inteiros e $a \neq 0$. A partir disso, podemos estabelecer relações entre os números racionais e um objeto matemático já conhecido

[57] Esse parágrafo traz ideias de uma conversa informal com o professor Cesar Polcino Milies.

pelo estudante, a equação do primeiro grau com coeficientes inteiros (por exemplo, quando estabelecemos o algoritmo da adição de frações a partir da equação $a.x = b$ com a e b inteiros e $a \neq 0$, tal como apresentamos na seção 3.1 ao abordarmos o subconstruto quociente, segundo Kieren (1976)). Na sequência do trabalho, quando trataremos das operações e das propriedades dos números racionais, retomaremos esse aspecto. De todo modo, acreditamos que perceber relações matemáticas entre as operações com números racionais e equações favoreça o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte.

Em uma perspectiva distinta, Wasserman (2014) apresenta uma abordagem para introduzir as estruturas algébricas de grupo e de corpo por meio do contexto da resolução de equações do primeiro grau do tipo $ax + b = 0$ (com $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^*$). Segundo o autor, essa abordagem sustenta e desenvolve novas ideias (as estruturas) por uma construção explícita sobre o conhecimento já estabelecido dos estudantes (equações). Esse autor, apesar de não abordar especificamente o corpo dos números racionais, nos dá indícios da estreita relação entre equações e as estruturas e, mais do que isso, estabelece uma conexão e ressalta a importância das propriedades aritméticas para o raciocínio algébrico, destacando o desenvolvimento do HCK dos professores. Para ele, o processo de resolução de equações simples é usado como um trampolim para refletir sobre a necessidade coletiva e a importância de propriedades aritméticas para o raciocínio algébrico (WASSERMAN, 2014).

O que queremos destacar nesta reflexão é que a relação entre a estrutura algébrica corpo e uma equação do tipo $a.x = b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ pode ser um caminho a ser considerado quando abordarmos o corpo dos números racionais em um curso de formação de professores, sem deixar de explicitar os outros significados para esses números.

Diferente dos já citados Carvalho, Lopes e Souza (1984) e Domingues (1991, 2009), Evaristo e Perdigão (2013), no livro *Introdução à Álgebra Abstrata*, afirmam:

> No ensino fundamental aprendemos que um número racional é todo número que pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$. Naturalmente, esta ‘definição’ não é satisfatória porque não se define anteriormente o que é uma fração nem consegue explicar por que os ‘números racionais’ $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$, por exemplo, são iguais. A definição formal de números racionais é: o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}$. (p. 108-109).

Nesse trecho do livro, os autores expressam uma insatisfação com a maneira como os números racionais são apresentados no Ensino Fundamental e, como alternativa às insuficiências citadas, propõem a definição formal: o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}$. Gonçalves (2001) sugere a mesma ideia quando apresenta a "(...) construção do corpo de frações $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ a partir do domínio $\mathbb{Z}$" (p. 60).

Reflexão 4: a notação para a estrutura algébrica corpo

Para nós, há, nessas definições formais dadas, outro abuso de linguagem. Quando os autores dizem que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo, estão, obviamente, considerando $(\mathbb{Q}, +, .)$ e não somente $\mathbb{Q}$, pois este é um conjunto e não uma estrutura algébrica. É comum livros de Álgebra (DOMINGUES; IEZZI, 2003; GONÇALVES, 2001) denotarem um grupo, um anel ou um corpo somente pelo conjunto – como é o caso de $\mathbb{Q}$ – ao invés de escrever o par $(conjunto\ A, operação\ em\ A)$, no caso de grupo, ou a terna $(conjunto\ A, operação\ 1\ em\ A, operação\ 2\ em\ A)$, no caso de anel e corpo. Porém, nos questionamos: até que ponto esse abuso de linguagem (assim como aquele da igualdade de frações, supracitado) favorece ou dificulta a compreensão do estudante acerca do assunto? Dubinsky et al. (1994) e Elias e Savioli (2013) evidenciam que estudantes, muitas vezes, interpretam a estrutura de grupo como sendo um conjunto, ignorando as operações e as propriedades das quais gozam. Há, para esses autores, uma tendência em associar um novo objeto matemático (no caso, uma estrutura algébrica) a um objeto já conhecido (no caso, conjunto).

Nesse sentido, acreditamos que chamar $\mathbb{Q}$ de corpo pode se constituir em um problema na compreensão tanto da estrutura algébrica corpo como dos números racionais, sendo mais adequado utilizar a terna $(\mathbb{Q}, +, .)$ ao tratar do corpo dos números racionais.

Deixando a questão da linguagem de lado, a noção de $\mathbb{Q}$ como o *corpo das frações* de $\mathbb{Z}$ precisa ser explorada aqui, pois, como apresentado na parte histórica, trata-se de um modo de pensar que nos permite, ao menos do ponto de vista da Matemática Acadêmica, perceber que a estrutura que envolve os racionais é análoga a das expressões algébricas, assim como a dos polinômios é análoga a dos inteiros. Segundo Wasserman (2016), reconhecer que há paralelos entre esses conjuntos no âmbito das quatro operações aritméticas é pertinente aos professores, pois informa, por exemplo, que as estruturas de anel de polinômios e de inteiros têm fatoração em termos irredutíveis.

Para construir $\mathbb{Q}$ como o corpo das frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}$, vamos tomar o livro de Domingues e Iezzi (2003). Primeiro, os autores definem *quociente* em um corpo. Em um corpo K, a equação $ax = b$, com $a \neq 0$ (ou 0_k) tem uma única solução, que é o elemento $a^{-1}b = ba^{-1}$ (sendo a^{-1} é o inverso multiplicativo de a em K). Um elemento de K escrito na forma $a^{-1}b = ba^{-1}$ é chamado de *quociente* de b por a e é denotado por $\frac{b}{a}$. Por outro lado, todo elemento a de K é um quociente, pois, se $b \neq 0$ é um elemento de K, então $a = (ab)b^{-1} = \frac{ab}{b}$.

Antes de prosseguirmos, vale destacar que: i) o corpo K é qualquer, não se trata, necessariamente, de $\mathbb{Q}$; ii) a notação de *quociente* tomada aqui é aquela mesma conhecida e utilizada para representar frações $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ ou expressões algébricas do tipo $\frac{ax+b}{cx^2+d}$. Isto é, a notação de quociente de b por a utilizada aqui para denotar $\frac{b}{a}$ não deve ser confundida com um número racional, pois pode ser ou não.

Dentro desse contexto, sejam a, b, c e d elementos de um corpo K. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, as seguintes proposições podem ser demonstradas:

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$;

ii) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

iii) $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

iv) $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$

v) Se $a \neq 0$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Não vamos demonstrar todas essas propriedades, mas, na sequência, quando formos tratar das *Operações sobre os números racionais*, vamos provar as propriedades ii) e v) apenas como contribuição ao nosso debate.

Após apresentar tais propriedades e operações válidas para qualquer corpo K, Domingues e Iezzi (2003) dedicam-se a construir um corpo K a partir de um anel de integridade A dado de modo que este seja um subanel unitário de K. Tal construção é a mesma em que se obtém o corpo dos números racionais a partir do anel dos inteiros, já apresentada nesta tese. Dado um anel de integridade A, vamos tomar a relação $\sim$ sobre o conjunto $A \times A^*$ definida por: $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $ad = bc$. Como sabemos, tal relação é uma relação de equivalência. Toma-se a notação $\frac{a}{b}$ para representar a classe de equivalência determinada pelo par (a, b) em vez da notação genérica $\overline{(a, b)}$. Assim, os elementos do conjunto quociente $K = (A \times A^*)/\sim$, com a notação adotada, são as *frações* $\frac{a}{b}$ ($a \in A$ e $b \in A^*$). Agora sim cumpre-se a exigência feita por Evaristo e Perdigão (2013): está definido o que é *fração*. Perceba que a *fração* $\frac{a}{b}$ não considera somente $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, mas sim a, b de qualquer anel de integridade A.

Notemos que K não é dito ainda um corpo. É preciso chegar a essa conclusão. Para tanto, define-se "soma" e "produto" de duas frações $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in K$, inspirados no que fora provado nos itens ii) e iii) acima. Logo,

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Feita essa escolha pelas operações (intencionalmente), demonstra-se que $(K, +, .)$ é um corpo, mostrando que são válidas as propriedades necessárias. Nesse caso, $(K, +, .)$ (ou simplesmente K, como os livros preferem) é chamado de *corpo das frações* do domínio de integridade A.

Contudo, pela forma como os elementos de K são construídos, como classes de equivalência, temos que sua natureza é diferente da natureza dos elementos do anel de integridade A. Por exemplo, vamos tomar $\mathbb{Q}$ o corpo das frações de $\mathbb{Z}$. Nesse caso, o elemento $\frac{2}{1}$ de $\mathbb{Q}$ é, na verdade, a classe de equivalência determinada pelo par $(2,1)$, o que é, claramente, diferente do elemento 2 de $\mathbb{Z}$ em sua natureza, uma vez que os elementos de $\mathbb{Z}$ são construídos a partir de uma outra relação de equivalência sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Esse fato nos conduziria a dizer que $\mathbb{Z}$ não está contido em $\mathbb{Q}$, contrariando o que usualmente é feito na Educação Básica. Se $\frac{2}{1} \in \mathbb{Q}$ é diferente de $2 \in \mathbb{Z}$, então não poderíamos afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ou, escrito de uma forma mais geral, não poderíamos considerar A um subanel unitário de K. Entretanto, a própria Matemática Acadêmica tem uma saída para isso. Define-se um subanel L de K da seguinte forma:

$$L = \left\{\frac{a}{1} \mid a \in K\right\}$$

Para completar, define-se uma aplicação $f: A \to L$ que associa a cada elemento $a \in A$ à fração $\frac{a}{1}$. É possível mostrar que f é um isomorfismo de anéis. Assim, identifica-se A com sua cópia L em K por meio do isomorfismo f, permitindo-nos afirmar que $A \subset K$. Ou, no caso mais particular, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Reflexão 5: o corpo das frações na Matemática Acadêmica e as frações na Matemática Escolar

Os matemáticos perceberam que aquela construção do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais por uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros (por meio de uma relação de equivalência) poderia ser estendida para outros casos, levando à noção mais geral de *corpo das frações de um domínio de integridade A*. Desse modo, o fato de $\mathbb{Q}$ ser o *corpo das frações* do domínio de integridade $\mathbb{Z}$ o torna "semelhante" ao conjunto $\mathbb{Q}[x]$, uma vez que este é o *corpo das frações* do domínio de integridade $\mathbb{Z}[x]$. Notemos que o destaque agora está sobre o *corpo das frações* e não mais sobre a natureza dos elementos. Na Matemática Acadêmica, notar essa "semelhança" é importante, pois permite ao matemático lidar com coisas distintas ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[x]$) como se fossem a mesma coisa (corpo de frações). Dessa maneira, os elementos $\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{x+1}{x^2+1}$ têm algo que os aproxima: são elementos de um corpo de frações de um domínio de integridade A.

Isso traz consequências para a matemática trabalhada na escola, se o objetivo for manter o rigor da Matemática Acadêmica. Por exemplo, Silva (2009), cujo trabalho *investiga os saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*, define a forma como entende números fracionários: "utilizaremos *número fracionário* para indicar aquele que pode ser representado por uma classe de frações, $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ e a, b pertencentes a um anel de integridade" (p. 52, grifos da autora). Na sequência, a autora completa: por estar no contexto do Ensino Fundamental, "trataremos por *números fracionários* todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações" (p. 52, grifos da autora). A definição assumida por Silva está de acordo com noção de corpo de frações e, nesse caso, os números racionais são um exemplo de número fracionário.

A autora justifica o uso de tal termo (número fracionário) por ser abrangente a ponto de evitar confusões do tipo "o conjunto dos números racionais é o conjunto das frações ou dos números fracionários" (p. 51), o que leva a conflitos no ensino quando "se fala de números fracionários ou de frações que não sejam racionais" (p. 51). Isto é, para evitar confusões do tipo $\frac{\pi}{2}$ *não é uma fração*, Silva (2009) adota tal definição para número fracionário.

Nossa intepretação para essa questão é que a Matemática Escolar, tal como a definem Moreira e David (2010), não deve se pautar nos valores da Matemática Acadêmica, como se deles fosse proveniente. Acreditamos que a Matemática Escolar tem a autonomia para compreender fração como uma forma de representar números (como é feita por Chavante (2015a) e discutida, posteriormente, na *Reflexão 18*) que independa da definição de corpo das frações. Novamente, estamos questionando a vigilância epistemológica da Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2010) que parece incidir sobre a matemática da escola.

Por isso, em certa medida, discordamos de Silva (2009) quando se pauta na Matemática Acadêmica para trabalhar com frações em um contexto de Ensino Fundamental, mas, por outro lado, buscamos compreender até que ponto certos valores desta matemática podem ser trazidos para a Matemática Escolar, respeitando as diferenças. Neste sentido, a abordagem dos perfis conceituais seria nossa fundamentação, quando afirma que é "objetivo crucial do ensino e da aprendizagem a promoção de uma visão clara, entre os estudantes, da demarcação entre os modos de pensar e significados, bem como entre seus contextos e aplicação" (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009, p. 7).

Reflexão 6: o isomorfismo que permite afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Vimos que podemos identificar uma cópia L de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ por meio do isomorfismo f, o que nos permite afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Essa construção nos remeteu a duas considerações, uma feita pelo professor formador Victor e outra em nossa dissertação de mestrado.

Na pesquisa de mestrado, entrevistamos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, para compreender a maneira como lidavam com os conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos. Um dos estudantes, quando perguntado sobre o conceito de isomorfismo, respondeu:

> Espera aí, é como se um se comportasse como o outro, né? Por exemplo, eu sei de alguns exemplos. Por exemplo, os números inteiros positivos se comportam com os naturais, são iguais... não, os naturais estão dentro dos inteiros positivos, eles são iguais a menos de um isomorfismo, certo? Então este grupo se comporta como outro. Agora, explicar isso... .(ELIAS, 2012, p. 128).

A maneira como o estudante em formação inicial abordou o assunto isomorfismo de grupo foi pela reprodução de um tratamento comum entre os matemáticos que considera duas estruturas algébricas iguais *a menos de isomorfismo*. A fala solta, sem uma explicação mais sólida, nos lembrou o comentário: "*eu acho que os professores têm uma visão, por conta de como é a formação deles, têm uma visão que é muito colcha de retalhos, muita matemática como uma coleção de fatos e esses fatos não se unem*" (Victor).

Reflexão 7: as intencionalidades da Matemática Acadêmica

Outro fato que nos chama a atenção refere-se à intencionalidade das escolhas na Matemática Acadêmica. Vamos destacar dois casos:

i) a relação de equivalência $\sim$ tomada para a definição de $\mathbb{Q}$ como o conjunto quociente de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ por $\sim$;

ii) a "soma" e o "produto" na construção do corpo de frações de um anel de integridade A, segundo Domingues e Iezzi (2003).

No caso i), a relação de equivalência $\sim$ é definida como

$(m,n)\sim(p,q)$ se, e somente se, $mq = np$.

Nosso questionamento, nessa reflexão, é: por que definimos a relação $\sim$ dessa forma? Por que não outra? É óbvio que essa forma de definir nos permite construir os números racionais e lidar com suas operações tal como as conhecemos. Relembrando Moreira e David (2004), as construções da Matemática Acadêmica visam produzir uma "abstração que expresse formalmente as características 'essenciais' de um objeto que, a menos da construção formal, já é, de certo modo, conhecido" (p. 6). Será que a "escolha" por definir a relação de tal forma não seria uma maneira de produzir uma abstração para algo que já era conhecido?

Queremos chamar a atenção para o fato de que conceitos da Matemática Acadêmica são, muitas vezes, formalmente construídos a partir de algo já conhecido, como, por exemplo, o conjunto dos números naturais e sua construção por meio dos Axiomas de Peano. Klein (1974) aborda essa questão quando afirma que "a lógica não dita o conteúdo da matemática; o uso é que determina a estrutura lógica. A organização lógica é posterior e constitui, essencialmente, um ornamento" (KLEIN, 1974 apud MOREIRA; DAVID, 2010, p. 66).

No caso ii), vamos observar a ordem em que as operações são demonstradas/tomadas. Primeiro, Domingues e Iezzi (2003) definem o *quociente* em um corpo, a partir de uma equação $ax = b$ $(a \neq 0)$ em um corpo K. Uma vez que a, b, c, d são elementos de um corpo K, estão sujeitos às propriedades dessa estrutura, obviamente. Assim, utilizando tais propriedades, Domingues e Iezzi (2003) demonstram as operações $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Em seguida, quando estão construindo um novo corpo (o corpo das frações), Domingues e Iezzi (2003) se inspiram nas operações já demonstradas para um corpo, para definirem as operações sobre o novo conjunto quociente $A\times A/\sim$ que, na sequência, se mostrará ser um corpo: $(A\times A/\sim, +, .)$. Ou seja, a regra das operações aqui é definida com uma intencionalidade, pois já se sabia onde queria chegar.

Acreditamos que esses dois casos são exemplos de uma característica da Matemática Acadêmica, que é a de buscar coerência dentro do seu próprio sistema e, para isso, muitas coisas são construídas já sabendo o que se quer. Victor concorda com isso ao afirmar que

[...] a ideia inicial da formalização é essa, você sabe onde quer chegar, porque não é uma coisa tipo caída do céu, é intencional. [...] Eles [os conteúdos em Análise Real] *são dados como se as coisas já tivessem surgido prontas. E normalmente elas surgem na ordem ao contrária, né?*

Nossa reflexão aqui é: será que trazer essa característica da Matemática Acadêmica para discussão em cursos de formação não pode favorecer a compreensão de futuros professores sobre matemática? Entendemos que abordar essa lógica ou esses valores da Matemática Acadêmica seja tão importante para a formação de professores quanto o conteúdo em si.

Operações sobre os números racionais

Os livros que fazem a construção dos números racionais a partir da noção de número inteiro (DOMINGUES, 2009; CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984; MILIES; COELHO, 2006) seguem, geralmente, uma mesma organização para tratar da soma e do produto em $\mathbb{Q}$. Vamos tomar como exemplo Domingues (2009), mas poderia ser qualquer outro. O autor define as operações como segue:

Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos[58] de $\mathbb{Q}$. Chama-se *soma* de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{ns}$$

Devemos reparar que a definição já diz que $a + b$ é elemento de $\mathbb{Q}$, ou seja, já considera a propriedade do fechamento.

Em seguida, mostra que a soma independe dos pares utilizados para definir a e b, isto é:

Se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, então $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$. Multiplicando a primeira igualdade por ss' e a segunda por nn' e somando membro a membro as igualdades resultantes, temos

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n'$$

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

[58] Como $a, b \in \mathbb{Q}$, então, pela construção de $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$, temos que $n \neq 0$ e $s \neq 0$. A mesma restrição vale para n' e s'.

Assim,

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}$$

Notemos que, por $m, r, m', r' \in \mathbb{Z}$ e $n, s, n', s' \in \mathbb{Z}^*$, sabemos que são válidas as propriedades das operações utilizadas, pois se utiliza o fato de que $(\mathbb{Z}, +, .)$ é um anel.

Assegurada a validade da soma independentemente dos pares utilizados, Domingues (2009) define a operação de adição sobre $\mathbb{Q}$ como a correspondência $(a, b) \rightarrow a + +b$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Q}$.

Após, são provadas as propriedades válidas para a operação definida, a saber: associativa, comutativa, existência de elemento neutro e que todo elemento possui simétrico aditivo (ou oposto). Com a propriedade do simétrico aditivo posta, o autor tem condições de definir a *diferença* entre a e b, denotada por $a - b$, como:

$$a - b = a + (-b)$$

Considerando, obviamente, $a, b \in \mathbb{Q}$, tem-se que a *diferença* entre a e b é a *soma* entre a e o *oposto* de b. Como $-b \in \mathbb{Q}$, então fica definida a operação de *subtração* em $\mathbb{Q}$ como sendo a correspondência: $(a, b) \rightarrow a - b$.

Para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, a mesma ordem: definição do *produto* e da operação de *multiplicação* em $\mathbb{Q}$, sua validade independentemente do par escolhido e as propriedades associativa, comutativa, existência de elemento neutro, que todo elemento possui simétrico multiplicativo – ou inverso – e, por fim, a distributiva da multiplicação em relação à adição (propriedade que une a multiplicação e a adição definidas).

Depois de provar essa última propriedade, Domingues (2009) define a estrutura de corpo e, então, afirma que $\mathbb{Q}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas é um corpo, o *corpo dos números racionais*. Aqui reside a já citada e confusa diferença entre Domingues (2009) e os livros de Carvalho, Lopes e Souza (1984) e de Milies e Coelho (2006). Somente após definir o corpo dos números racionais, que Domingues (2009) chama de *números racionais* os elementos de tal corpo, enquanto que, para Carvalho, Lopes e Souza (1984) e para Milies e Coelho (2006), $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$ já é chamado de conjunto dos números racionais.

Toda essa construção formal dos números racionais permite que propriedades usuais na Educação Básica tenham uma prova mais rigorosa nesse contexto da Matemática Acadêmica. Longe de querer aceitá-las e apontá-las como uma necessidade para o conhecimento matemático do professor, vamos demonstrar duas delas a fim de promover maiores reflexões.

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$:

i) $(-a).(-b) = ab$

Prova: Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, em que $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$. Pela propriedade do simétrico aditivo, temos que $(-a) = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$, em que $a + (-a) = 0$. Do mesmo modo, $(-b) = \frac{-r}{s} \in \mathbb{Q}$.

$$(-a).(-b) = \frac{-m}{n}.\frac{-r}{s}$$

Pela multiplicação acima definida,

$$(-a).(-b) = \frac{-m}{n}.\frac{-r}{s} = \frac{(-m).(-r)}{ns}$$

Observe que de uma multiplicação entre racionais que queremos provar, caímos em uma multiplicação entre os inteiros $(-m)$ e $(-r)$, que já é (em teoria) conhecida, uma vez que a construção dos inteiros como classe de equivalência de pares de números naturais é apresentada antes. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é tido como o conjunto quociente de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por $\sim$, em que a relação de equivalência $\sim$ é definida por $(a, b)\sim(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Nesse contexto, o número inteiro $+1$, por exemplo, é $+1 = \overline{(1,0)} = \{(1,0), (2,1), (3,2), \ldots\}$ e o número inteiro $-1 = \overline{(0,1)} = \{(0,1), (1,2), (2,3), \ldots\}$. Já a operação de multiplicação entre os números inteiros $x = \overline{(a, b)}$ e $y = \overline{(c, d)}$ é definida por $x.y = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$, o que nos permite provar que:

Sejam $m = \overline{(p, q)}$ e $r = \overline{(t, u)}$, então $-m = \overline{(q, p)}$ e $-r = \overline{(u, t)}$. Assim, $(-m).(-r) = \overline{(qu + pt, qt + pu)} = \overline{(pt + qu, pu + qt)} = m.r$. Ou seja, prova-se que $(-m).(-r) = mr$.

Desse modo, retornando a nossa questão inicial, temos:

$$(-a).(-b) = \frac{-m}{n}.\frac{-r}{s} = \frac{(-m).(-r)}{ns} = \frac{mr}{ns} = ab$$

Isto é, $(-a).(-b) = ab$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$

ii) Se $a \in \mathbb{Q}^*$, então $ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}.b$

Prova: $(\Rightarrow)$ da hipótese, segue que $a^{-1}(ax) = a^{-1}.b$ e, portanto, $x = a^{-1}b$.

$(\Leftarrow)$ Se $x = a^{-1}.b$, então $ax = a(a^{-1}b) = (a.a^{-1})b = 1.b = b$

Reflexão 8: questionando a Matemática Acadêmica enquanto aquela que fundamenta o trabalho docente

Como vimos, as operações de adição e multiplicação são definidas por uma conveniência da própria Matemática Acadêmica, pois mantêm as regras já conhecidas antes de serem formalmente construídos os conjuntos numéricos e, ainda, dão suporte para toda uma construção posterior de demonstração das propriedades das operações que garantem a estrutura algébrica.

Quanto às demonstrações das duas propriedades acima apresentadas, principalmente a que se refere à multiplicação entre racionais negativos, temos exemplos claros do sistema lógico-formal-dedutivo, característico da Matemática Acadêmica, do qual falavam Moreira e David (2010). A construção formal dos números naturais por meio dos Axiomas de Peano e os conceitos de produto cartesiano, de relação de equivalência e de outros conceitos permitem-nos construir um novo objeto matemático, os números inteiros, completamente produzido a partir dessas definições e que, por sua vez, nos permite definir operações sobre ele e demonstrar propriedades que darão origem a novos objetos, como é o caso dos números racionais, fazendo com que a engrenagem da Matemática Acadêmica gire constantemente e produza novos conhecimentos indefinidamente.

Mas em que medida esse arsenal de conhecimentos matemáticos favorece o conhecimento matemático para o ensino do professor da Educação Básica? As demandas da prática exigem do professor tal conhecimento?

Se utilizarmos novamente a história da matemática e retomando os argumentos de Lins (2005), veremos que Euler, o matemático "mais importante no desenvolvimento da análise no século XVIII" (KATZ, 2010, p. 693), não fazia uso de conhecimentos como aqueles apresentados na demonstração de $(-a).(-b) = ab$, uma vez que a construção formal dos números inteiros e racionais não havia sido feita em sua época. Segundo Glaeser (1985),

> Em seus artigos científicos, ele [Euler] maneja os números relativos e complexos com engenhosidade e arrojo, sem levantar muitas questões a respeito da legitimidade de suas construções. No entanto, em uma obra destinada a principiantes (Euler, 1770), a intenção pedagógica o fez sentir-se obrigado a fornecer explicações, tentando, especificamente, *justificar a regra dos sinais*. (p. 79, grifos do autor)

Para justificar o fato de que $(-a).(-b) = ab$, Euler tinha o seguinte argumento, segundo Glaeser (1985): o valor absoluto de $(-a)$ por $(-b)$ é ab. É preciso, portanto, decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a).b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é de que $(-a).(-b) = +ab$.

O matemático profissional dos tempos atuais não poderia admitir essa justificativa como sendo apropriada, mas isto não impediu que Euler progredisse em seus trabalhos.

Não é nossa intenção desvalorizar a Matemática Acadêmica. Queremos desnaturalizar uma ideia recorrente de que a presença de disciplinas como Álgebra e Análise na formação do professor é necessária, pois fundamentam o trabalho do professor (colocando a Matemática Acadêmica como superior à Matemática Escolar). Acreditamos que a relevância da presença da Matemática Acadêmica na formação do professor possa estar em outra direção, uma que admita e tenha consciência das diferenças entre essas matemáticas, ressaltando que a linguagem e os valores da Matemática Acadêmica não devem dominar a Matemática Escolar, pois essas são práticas matemáticas diferentes, situadas em contextos diferentes e com lógicas internas diferentes.

Nesse sentido, ao desnaturalizar e levantar questionamentos sobre as possíveis relações entre a Matemática Acadêmica e a prática docente, acreditamos que estamos contribuindo para maiores esclarecimentos de seu papel na Licenciatura em Matemática.

A segunda demonstração apresentada ($ax = b \Leftrightarrow x = a^{-1}.b$) foi intencionalmente colocada para dar elementos para a discussão a seguir.

Quando Domingues e Iezzi (2003) definiram *quociente* $\frac{a}{b}$ em um corpo K (*Reflexão 7*), demonstraram as regras da "soma" e do "produto" entre *quocientes*. Vamos apresentar tais demonstrações para, em seguida, articulá-las com Kieren (1976).

Sejam a, b, c, d elementos de um corpo K. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então:

i) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Prova:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = a.b^{-1} \pm cd^{-1} = a(dd^{-1})b^{-1} \pm c(bb^{-1})d^{-1}$$
$$= (ad)(bd)^{-1} \pm (bc)(bd)^{-1} = (ad \pm bc)(bd)^{-1}$$
$$= \frac{ad \pm bc}{bd}$$

ii) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Prova:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = (ab^{-1}).(cd^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

As provas de i) e ii) foram construídas utilizando-se propriedades da adição e multiplicação que já sabemos ser válidas, pois a, b, c, d são elementos de um corpo K. É interessante notar que essa justificativa para as operações pode ser observada em uma outra linguagem, talvez mais comum aos professores e, também, aos estudantes da Educação Básica. Trata-se de uma abordagem utilizando a própria equação do primeiro grau. Kieren (1976) apresenta-nos algumas possibilidades, as quais evidenciaremos aqui. Chamamos a atenção para que o leitor perceba as relações com as provas de i) e ii) acima.

Sejam as equações do primeiro grau $ax = b$ e $cy = d$. Disso, temos que $x = \frac{b}{a}$ e $y = \frac{d}{c}$.

Queremos mostrar que $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac}$.

Multiplicando ambos os membros de $ax = b$ por c e ambos os membros de $cy = d$ por a, temos: $cax = cb$ e $acy = ad$. Adicionando essas duas equações, temos:

$$cax + acy = cb + ad$$

$$acx + acy = bc + ad$$

$$ac(x + y) = (bc + ad)$$

$$x + y = \frac{bc + ad}{ac}$$

Assim,

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac}$$

Nessa explicação, utilizamos, sem estar explícito, o fato de que a, b, c, d são elementos de um corpo, pois lançamos mão de um conjunto de propriedades que nos permitiram concluir que $x + y = \frac{bc+ad}{ac}$. A mesma estratégia pode ser utilizada para, por exemplo, mostrar que $\frac{b}{a} . \frac{d}{c} = \frac{b.d}{a.c}$. Vejamos:

Sejam $ax = b$ e $cy = d$, então $x = \frac{b}{a}$ e $y = \frac{d}{c}$.

Na equação $ax = b$, vamos multiplicar por cy ambos os membros:

$$(ax).(cy) = b.(cy)$$

Mas, $cy = d$. Então,

$$ax.cy = b.d$$

$$x.y = \frac{b.d}{a.c}$$

Como $x = \frac{b}{a}$ e $y = \frac{d}{c}$, temos:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = \frac{b.d}{a.c}$$

Reflexão 9: a resolução de equação do primeiro grau como um caminho fértil

Pensamos que o processo de resolução de equação do primeiro grau seja um caminho fértil para valorizar o significado formal de número racional como elemento de um corpo, pois: 1) conecta dois conteúdos básicos da Matemática Escolar (número racional e equação); 2) possibilita um meio de justificar operações entre racionais, como mostrado anteriormente; e 3) permite ao estudante perceber e refletir sobre a necessidade coletiva e a importância de propriedades aritméticas para o raciocínio algébrico, como afirmado por Wasserman (2014). Esse ponto será melhor debatido posteriormente, quando tratarmos dos trabalhos de Wasserman (2014, 2016).

Segundo momento: das entrevistas

As entrevistas com os professores formadores trouxeram elementos para além daqueles que apareceram nos livros, caracterizando a complementariedade que buscávamos com a diversidade de fontes de dados.

Como as entrevistas com os professores formadores foram semiestruturadas, as questões norteadoras são, elas próprias, nosso guia de análise neste momento. Uma pergunta que proporcionou respostas bastante distintas foi: *Você considera o ensino das estruturas algébricas (grupo, anéis e corpos) no curso de Licenciatura em Matemática relevante para a formação do professor? Por quê?*. Nós percebemos que cada um dos três professores entrevistados tem uma postura diferente: Victor Giraldo é um entusiasta do ensino das estruturas algébricas e busca realizar articulações com conteúdos da Educação Básica; Tiago Reis também é um entusiasta, mas tem dificuldades em perceber as relações com a prática docente da Educação Básica; e Plínio Moreira é desfavorável ao ensino das estruturas algébricas na formação do professor. Vamos detalhar essas visões.

Para Victor, o ensino das estruturas algébricas é relevante na formação do professor e apresenta suas justificativas por meio de suas ações nas disciplinas que leciona:

Victor: *[...] vou fazendo essa construção e tentando chamar atenção em cada passagem, eu penso essa estrutura. Em cada passagem, dos naturais para os inteiros, dos inteiros para os racionais, os racionais para reais, o que que você acrescenta e que estruturas você incorpora com aquilo e que coisas deixam de valer? Por exemplo, dos naturais para os inteiros você acrescenta os inversos aditivos. Dos inteiros para os racionais você acrescenta* *os inversos multiplicativos, para resolver divisões, para resolver frações. E aí, por exemplo, ao incluir os inversos multiplicativos deixa de valer o princípio da boa ordem, que diz que todo o conjunto* [não-vazio] *limitado inferiormente tem mínimo. Então, você passa a ter densidade, então isso é uma consequência de você ter incorporado os inversos multiplicativos e quer preservar a estrutura de anel. Então com isso você tem que acrescentar um monte de outros elementos e acaba tendo um conjunto denso, entendeu? [...] a ideia de estrutura algébrica ela é importante nesse sentido para a formação do professor. Então outro exemplo que quando você acrescenta o inverso aditivo você quer obter uma estrutura de anel, né? Você pode pensar o seguinte, inclusive, que eu acho muito legal: você começa dos naturais aí você inclui os inversos aditivos. Os inteiros, como estrutura algébrica, é o menor anel que contém os naturais, é o mínimo de estrutura que você tem que ter para ter os naturais e os inversos aditivos. A mesma coisa acontece dos inteiros para os racionais. Você inclui os inversos multiplicativos e obtém um corpo, então, na verdade, os racionais é o menor corpo que contém os inteiros, e entre os racionais e os reais tem um monte de corpos intermediários, que são aqueles corpos de adjunção que a gente chama. Mas uma maneira que eu acho legal de pensar nos racionais é que, nas frações, [...] é a estrutura mínima que você tem que ter para você ter os inteiros e ter todos os inversos multiplicativos. Ou seja, tem um corpo, entendeu? E eu acho que essa questão de estrutura algébrica, ela é importante para o professor porque em uma estrutura algébrica você tem... Qual é a ideia de você ter uma estrutura algébrica? Você ter aquela definição das operações e as propriedades e quais são as consequências disso. Então por exemplo, a regra dos sinais, que é ensinada muitas vezes como... menos vezes menos... [...] você pode mostrar sem muita dificuldade que em qualquer anel vale a regra dos sinais. Então isso mostra que, do ponto de vista da matemática, aquilo não é uma convenção, não é uma escolha. Se você quer ter uma estrutura algébrica com as operações de adição multiplicação, com todas propriedades, necessariamente você tem que ter a regra dos sinais, entendeu?*

A fala do professor Victor corrobora alguns pontos que já discutimos com os livros didáticos e complementa outros. O ensino das estruturas algébricas se configura, nesse contexto trazido pelo professor, como um meio para explicar e justificar diferenças entres os conjuntos numéricos (especialmente no caso dos inteiros e racionais) quando se constrói um (os racionais) a partir do outro (os inteiros). O que muda de um para o outro? O que muda quando se inclui os inversos multiplicativos?

Victor faz outras considerações a esse respeito:

Victor: *Então aqui* [nos números racionais] *você tem uma noção de equivalência de frações e aqui* [nos números inteiros] *você tem uma noção de equivalência de* *subtrações. Só que essa noção de equivalência de frações, ela permanece na Educação Básica. E essas equivalências de subtrações não. Ela não permanece, você não pensa em um número inteiro como subtrações equivalentes, e você pensa em um número racional, na Educação Básica, como divisões equivalentes, e tem um motivo matemático para isso, que é o seguinte, que quando você acrescenta, quando você passa de* $\mathbb{N}$ *para* $\mathbb{Z}$*, ao fazer isso, no fundo, o que você está fazendo? Como eu falei, acrescentamos inversos aditivos. E aqui* [nos racionais], *no fundo, o que que você está fazendo? Acrescentando os inversos multiplicativos. Só que quando você acrescenta os inversos aditivos você acrescenta "só" os inversos aditivos. Tipo assim, os inteiros é: os naturais, união, os inversos aditivos naturais. Nos racionais isso não acontece. Quando você acrescenta os inversos multiplicativos dos inteiros, você acrescenta junto, você precisa acrescentar pela consistência da estrutura de corpo, um monte de elementos que não são nem inteiros nem inverso multiplicativos de inteiros. Por exemplo a fração* $\frac{2}{3}$*. Não é nem um inteiro nem um inverso multiplicativo inteiro.*

É aparente sua preocupação em relacionar as ideias da construção formal dos números e das estruturas algébricas com questões da matemática na Educação Básica. Destacamos quatro aspectos matemáticos propostos por Victor:

i) quando se acrescentam os inversos multiplicativos aos números inteiros, perde-se o princípio da boa ordem, mas ganha-se a noção de densidade, que não há no conjunto dos inteiros. Trata-se do fato de que, entre dois números racionais quaisquer (mesmo muito próximos), sempre existe outro número racional entre eles;

ii) o destaque para a ideia da estrutura algébrica mínima, que já apareceu em nossas discussões anteriormente. A interseção de todos os subcorpos do corpo dos reais é o corpo dos números racionais (esse destaque também foi feito pelo professor Plínio). Nesse sentido, os racionais é o menor corpo numérico que contém os inteiros. Ao ampliarmos os números inteiros pela inserção dos inversos multiplicativos, caímos no corpo dos números racionais, o que nos leva à terceira discussão;

iii) para manter a consistência da estrutura de corpo nessa ampliação dos inteiros, não basta acrescentar *só* os inversos multiplicativos dos inteiros, é preciso acrescentar um monte de elementos, como $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ etc.;

iv) o termo "fração equivalente" é comum na Educação Básica e nos remete à noção de número racional enquanto classe de equivalência. Contudo, os números inteiros que, na Matemática Acadêmica, também são construídos por meio do conceito de classe de equivalência, não os pensamos como "diferenças equivalentes" e isso se explica, segundo

Victor, pelo fato de que, quando se passa de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, *só* acrescenta os inversos aditivos, o que não acontece de forma semelhante de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$.

Os argumentos de Victor apontam-nos para aspectos formais da construção dos números racionais e da estrutura de corpo que podem compor a matemática que caracterizamos para a formação do professor, favorecendo o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, relacionando conceitos dentro do próprio currículo escolar (números naturais, inteiros e racionais) e ampliando para a Matemática Acadêmica.

Ao defender a presença das estruturas algébricas na formação do professor, Victor o faz apresentando relações matemáticas que considera pertinente e critica o ensino das estruturas por elas mesmas. Isso fica claro quando ele questiona sobre o conjunto dos números reais com a adição e multiplicação usuais serem, simplesmente, tomados como "um corpo ordenado completo. E daí? Por que tem que ser um corpo ordenado completo?" (Victor). Mostrando que a ideia de corpo, por si só, não tem significado para o professor, e completa afirmando:

Victor: *[...] pensar na matemática para o ensino ou a matemática na formação do professor em comparação com a matemática do bacharel, essa comparação não é em termos de facilidade, é em termos de ênfase, no sentido de que o licenciando tem que se aprofundar mais em outros aspectos.*

O professor formador Tiago Reis também é a favor do ensino das estruturas algébricas nos cursos de formação de professores, pois acredita na importância de se criar uma cultura matemática, mesmo que o professor não vá utilizar diretamente essas estruturas em seu trabalho na escola, pois, indiretamente, ele vai usar. O professor afirma:

Tiago: *Acho que o professor de matemática tem que saber onde as coisas estão. É difícil pensar em alguém, um licenciado, sem pelo menos ter um curso de álgebra, mesmo que seja um primeiro curso. [...] Criar uma cultura, uma questão que já ouvi na graduação e ouço aqui... os cursos de Análise e de Álgebra, que são cursos pesados e que todo mundo fala "onde a gente vai usar", eu sempre considerei que você precisa... você é um matemático, você tem uma responsabilidade, [...] você tem que conhecer onde as coisas estão, porque só reproduzir... parece que falta criatividade, como você desenvolve uma ideia? É o que eu sempre falo para os alunos, não é que a gente espera que você saiba demonstrar algo depois, a gente espera que você saiba onde achar tudo. O que você leva da graduação são os livros, esses livros têm essa informação. E a capacidade de ler, que eu acho que é... acho que a maior aprendizagem é ler aqueles livros e sem a graduação você não consegue ler um livro daqueles. Então, esse ponto de criar essa cultura mesmo, de saber onde está tudo, mesmo que* *não usa diretamente, e, claro, conseguir responder as perguntas. Porque a ideia de que dar aula é fácil, não sei... [...] eu sempre achei difícil mesmo. [...] já vem um aluno com uma pergunta que é inteligente demais, se você não tiver uma cultura de saber onde as coisas estão. [...] Se você não tiver uma ideia geral daquilo, como você vai conseguir criar uma resposta, adaptar aquilo? Deixar palpável pro aluno? É muito difícil. [...] Não é fácil, você se sente desafiado, não é reproduzir.*

As estruturas algébricas na Licenciatura em Matemática teriam, então, dois papéis centrais, segundo Tiago: criar uma cultura matemática e permitir ao professor ter condições de justificar muita coisa da matemática da escola. Tanto a cultura matemática como a capacidade de justificar de modo apropriado (ou saber encontrar a justificativa em livros) permitem ao professor lidar com situações inesperadas em sala de aula e, para isso, disciplinas como Análise e Álgebra são relevantes.

Reconhecemos que esse seja um modo de pensar bastante presente em cursos de formação de professores. Como já afirmamos, o professor Tiago não tem formação em Educação Matemática e não é um pesquisador da área de formação de professores. Enquanto professor formador, Tiago evidencia suas preocupações com o exercício da docência, mas esse não é seu interesse enquanto pesquisador. Por esse motivo, a resposta dada foi "um pouco por reprodução do que eu já ouvi mesmo, pois não me dediquei muito tempo a pensar" (Tiago) sobre esse tema.

Consideramos importante ouvir professores com esse perfil (com formação em Matemática Pura ou Aplicada e sem serem pesquisadores da área de formação de professores), pois são, também, professores formadores e atuam em disciplinas como Álgebra Abstrata ou Fundamentos de Álgebra, na Licenciatura em Matemática.

Justamente por não ser seu tema de pesquisa, Tiago exterioriza suas dificuldades em estabelecer relações com a prática docente na Educação Básica.

Pesquisador: *Nessa linha de tentar relacionar os racionais com a estrutura de corpo de uma maneira mais articulada com a Educação Básica, como articular...*

Tiago: *Não sei, é difícil. Acho que tem que ser feito, mas... Esse é o problema. Quando você vê na História, como foi construído o conceito, me ilumina tanto. Se eu falar disso, já é legal. [...]. Mas, é muito difícil. O fato de que, para mim pelo menos, é muito difícil pensar em formas de associar corpos, associar os racionais na Educação Básica, é o problema de não ter de onde sair. Por mais que você pare e pense [...] É difícil. É preciso ter uma pesquisa. Aí tem os racionais, grupos, relação, operação, polinômios... tudo isso. [...] Por mais que você pense no problema... acho que talvez seja um pouco de falta de... por exemplo, você* *propor, sua tese, você propor, é isso que falta. Falta eu ter acesso a isso. Eu não estou indo atrás ou isso não vem até mim?*

Tiago indica suas dificuldades em aproximar o ensino das estruturas à prática docente. Um dos problemas apontados é a falta de material disponível. De fato, os materiais que se destinam à Álgebra Abstrata na Licenciatura são, geralmente, idênticos aos do Bacharelado. Ou, quando se dizem específicos para a Licenciatura, têm uma concepção de Álgebra na Licenciatura como uma Álgebra mais “facilitada” do que a do Bacharelado, como é o caso de Vieira (2015).

Tanto Victor como Tiago se alinham quando valorizam o ensino das estruturas algébricas na Licenciatura em Matemática, contudo se diferenciam pelo fato de que o primeiro se dedica a pesquisar sobre a matemática para o ensino e sobre a matemática na formação do professor, o que lhe permite uma maior clareza sobre o assunto.

Reflexão 10: não há hierarquias, mas pode haver contribuições

A matemática que almejamos para a formação do professor não enxerga a Matemática Acadêmica como aquela que justifica a Matemática Escolar, apesar de entendermos que isso sempre seja possível, uma vez que a Matemática Acadêmica tem essa intenção de justificar. Não acreditamos que a Matemática Escolar dependa de uma legitimidade da Matemática Acadêmica para se efetivar enquanto conhecimento produzido.

Buscamos verificar até que ponto os valores e os significados da Matemática Acadêmica podem favorecer o conhecimento matemático do docente, mas de uma maneira que o permita ampliar as zonas de seu perfil conceitual e, principalmente, ter consciência da demarcação dessas zonas e de seus contextos. Isto é, não desejamos apresentar as estruturas algébricas como aquelas (e somente aquelas) que permitem ao professor ensinar seus conteúdos da Educação Básica, mas tentar extrair delas certos modos de pensar que possam se efetivar na prática docente. Se, por um lado, alguns podem dizer “mas, o professor não usa conhecimentos da Álgebra Abstrata em sua prática” (e nós concordamos com tal afirmação, pois cremos que não usa mesmo), por outro, nós também pensamos que, se o professor não usa, pode ser porque nunca teve, em sua formação inicial, oportunidades para enxergar seu uso como sendo fértil para os desafios da prática docente. Como já afirmamos na introdução deste trabalho, tratar as estruturas algébricas como o objeto matemático a ser ensinado na formação e os conceitos da matemática da Educação Básica como exemplos desse objeto não permite ao professor valorizar tal conhecimento.

Nessa tentativa de tentar aproximar a estrutura de corpo com os números racionais, o modo de pensar de Victor vai ao encontro do que buscamos. Além de ser favorável ao ensino das estruturas algébricas, Victor procura, em suas aulas, trazer discussões matemáticas para o ensino e, ao fazê-lo, indica-nos possibilidades para pensar uma abordagem para o corpo dos números racionais na formação de professores. Suas sugestões, sempre direcionadas à prática docente, se enquadram nas características do HCK, proposto por Jakobsen et al. (2012), que assumimos em nossa tese. A tentativa é estabelecer relações matemáticas que favoreçam o conhecimento matemático do professor, mas reconhecendo suas limitações e contextos em que são pertinentes.

Victor: *a matemática escolar não seria hierarquicamente inferior à matemática acadêmica. Porque, na verdade, isso que eu estou falando de estrutura algébrica é uma visão da matemática acadêmica que eu acho relevante ao professor. Mas isso também não é suficiente, né? Não é suficiente para o cara saber como vai ensinar, aí tem que ter uma reflexão que incorpore também a matemática como prática social.*

O terceiro professor formador que entrevistamos foi Plínio Moreira. Diferente dos dois anteriores, Plínio é enfático ao dizer que não é favorável ao ensino das estruturas algébricas na Licenciatura.

Plínio: *[...] grupos, anéis e corpos são relevantes para a formação do professor? Eu acho que não. A resposta primeira é essa: não.*

O professor utiliza dois argumentos centrais para defender sua perspectiva, nomeados como: i) a necessidade de se ter experiência com várias situações para poder extrair a estrutura; ii) o sentido de se juntar os objetos em uma mesma estrutura. Vamos explicitá-los agora e, ao final, tecer nossos comentários.

i) <u>a necessidade de se ter experiência com várias situações para poder extrair a estrutura</u>

A fim de deixarmos bem claro ao leitor a posição do professor, trouxemos um longo trecho de sua entrevista, pois entendemos que de outro modo poderíamos não transmitir adequadamente seu modo de pensar.

Plínio: *Qual é o sentido de você estudar estruturas como anéis, grupos e corpos? No meu ponto de vista, a ideia é a seguinte: você vai desenvolvendo experiências com muitos conjuntos, cada um deles com suas operações. Não precisa chamar de estruturas, mas você lida com o conjunto dos inteiros e as operações com esses números. Com o conjunto dos números racionais, a soma, o produto de números racionais. O conjunto das matrizes* *quadradas nxn, o conjunto dos vetores do* $\mathbb{R}^n$*, por exemplo. Você pode somar, subtrair vetores do* R^n*, multiplicar um vetor por um escalar. No caso das matrizes nxn também você pode somar, subtrair, pode multiplicar duas matrizes. Cada um desses conjuntos citados tem uma estrutura. O conjunto dos reais tem uma estrutura, o conjunto dos complexos tem uma estrutura, o conjunto dos inteiros módulo n tem uma estrutura. O conjunto dos polinômios com coeficientes em* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *tem uma estrutura. Diante desse "mundo" de estruturas, você reconhece algumas delas como próximas, como semelhantes, a partir de certo ponto de vista. Por exemplo, se você abstrair o fato de que um determinado conjunto é de matrizes nxn, que o outro conjunto é de números, que o outro é de vetores etc., você, de repente, percebe que em todos eles é possível somar dois elementos e o resultado é um elemento do conjunto. Que podemos multiplicar duas matrizes nxn produzindo uma terceira matriz nxn, e dois números inteiros (ou racionais) produzindo um terceiro número inteiro (ou racional), dois polinômios com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *e obter um polinômio com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *e assim por diante.*

[...] Os inteiros e os polinômios sobre um corpo, (polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$ *por exemplo) possuem estruturas muito semelhantes. Você pode somar, subtrair, multiplicar e dividir dois polinômios (desde que o divisor não seja nulo) ou dois números inteiros, obtendo resultados que são polinômios ou números inteiros (no caso da divisão, o resultado compõe-se de quociente e resto). As matrizes quadradas nxn e os vetores do* $\mathbb{R}^n$ *também... Podemos somar, subtrair, multiplicar por um número real, obtendo como resultado uma matriz nxn ou um vetor. Bom, então no caso dos inteiros e polinômios por exemplo, temos uma estrutura de anel. No caso das matrizes nxn e dos vetores do* $\mathbb{R}^n$ *temos uma estrutura de espaço vetorial. No caso de matrizes nxn temos também um anel não comutativo (a multiplicação de matrizes não é comutativa). [...] Então, depois de muita experiência com cada uma dessas estruturas em particular, ou seja, depois de operar muito tempo com as matrizes nxn, com os inteiros, com os polinômios com coeficientes em* $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$*, com os vetores do* $\mathbb{R}^n$ *etc., você diz: "bom, algumas dessas estruturas têm coisas em comum". Embora em princípio sejam completamente diferentes (você pensa: um conjunto é de matrizes, o jeito de multiplicar matrizes é específico; o outro é de números, multiplicação de números não tem nada a ver com multiplicação de matrizes etc.), eles têm algo em comum, que vai acabar vindo a ser a estrutura (de anel, no caso dos inteiros e dos polinômios; de espaço vetorial, no caso dos vetores e das matrizes nxn; de corpo no caso dos números racionais, dos números reais e dos complexos). Então, já que existem três ou quatro ou cinquenta conjuntos com a mesma estrutura, vamos estudar essa estrutura por si, quer dizer, em abstrato. Por quê?*

Na matemática, à medida que você vai avançando, uma hora você se depara com um conjunto que parece bem complicado, mas que, naquele conjunto, você pode somar, multiplicar, tem um elemento que é neutro para a soma, tem um elemento que é neutro para a multiplicação, tem isso, tem aquilo. Então você fala: mas esse conjunto aqui, que estou tendo a maior dificuldade de entender (porque os elementos são objetos complicados, com os quais você não tem a mesma familiaridade que tem com as matrizes ou com os números ou com os polinômios, e ainda, você está se deparando com ele, o conjunto, no meio de uma matemática já mais avançada, em dimensões maiores, difícil de visualizar certas relações entre os elementos etc.), mas aí você reconhece nesse conjunto, que você nem conhece direito ainda, você reconhece que ele tem uma dada estrutura: isso é um anel, suponhamos. Então ele tem algumas das mesmas propriedades e relações que esses outros anéis conhecidos têm. Você tem uma referência de comparação para aquilo que você está querendo entender naquele conjunto complicado. Você pode deduzir outras informações sobre os elementos daquele conjunto "esquisito", que já nem é mais tão esquisito assim, porque tem uma proximidade com esses outros conjuntos que você já conhece bem. Até certo ponto, abstraindo a natureza dos objetos, eles podem ser muito parecidos. Então, no fundo, é quase como se eu já conhecesse. Um punhado de coisas, pelo menos já se pode conhecer a partir do reconhecimento da estrutura anel.

A diferença entre aquele lá que eu estou querendo entender e esses outros que já entendo muito bem, pode ainda ser grande em certo sentido, porque esse anel aqui é comutativo e o de lá não é, por exemplo. Esse anel aqui é euclidiano, que tem certas propriedades específicas. Aquele de lá, o "complicado" pode não ser euclidiano. Se for euclidiano, tem propriedades estruturais muito próximas das do conjunto dos inteiros ou dos polinômios, mas se não for euclidiano pode não ter. Então, ainda não quer dizer que se você identificou que é um anel fica tudo resolvido. Você ainda tem que entrar muito mais dentro da estrutura dos anéis, das "modalidades", digamos assim, dessa estrutura e das suas diferenças. A estrutura de anel, por um lado, unifica, mas para unificar efetivamente, de um jeito mais rico, você tem que estudar essas estruturas também nas diferenças que as compõem. Então você vai distinguir um anel que é euclidiano de um que não é euclidiano, porque o euclidiano automaticamente é fatorial, por exemplo. Todo elemento pode ser decomposto de maneira única em fatores primos. E um que não é euclidiano pode não ser fatorial. De repente você tem um anel que é principal, outro que não é. O principal é fatorial também, mas nem todo fatorial é principal. Ou seja, aquele que você está querendo entender, se você simplesmente reconhece como um anel... aí eu estou falando de anel, mas vale para grupo, corpo etc. Estou centrado no anel apenas porque os exemplos são mais simples: inteiros, polinômios, matrizes e tal. Então *essa estrutura que você está querendo entender, só porque é anel não significa que você a tenha entendido completamente. Você ainda tem que ver assim: é um anel, mas esse anel é euclidiano? Não é euclidiano? Ele é fatorial ou não é? Ele é principal ou não é? Etc., etc. Então, cada vez mais você vai identificando com um que você conheça. Aí tem os modelinhos. Quais os anéis euclidianos que conheço? Inteiros, polinômios. Então, bom, praticamente deve sair tudo bem próximo daquele outro complicado que sei que é euclidiano. No que consegui identificar que é um anel euclidiano, já tenho um monte de coisas. Por quê? Porque já estudei os anéis euclidianos, em geral, entendeu? Ou seja: já consegui abstrair a natureza dos elementos, se são números, se são polinômios, se são matrizes (no caso das matrizes, o anel não é euclidiano). Mas vamos pensar no caso dos euclidianos: você tem um modelo, ou vários modelos de anéis euclidianos, que vão servir para você entender aquele anel euclidiano que não conhece direito ainda. Agora, na escola isso tem sentido? Claro que não.*

Do ponto de vista da escola, da aprendizagem e do ensino escolar, números e polinômios são objetos totalmente diferentes, muito mais diferentes, se é possível dizer isso, do que, por exemplo, do ponto de vista de uma matemática acadêmica um pouco mais avançada, porque, nessa matemática acadêmica um pouco mais avançada, a questão de que essa estrutura aqui é a mesma dessa outra e a mesma dessa outra ainda, já é uma coisa que me exige abstrair a natureza dos elementos, ou seja, me exige focar a estrutura e "esquecer", temporariamente, que polinômios e números são objetos totalmente diferentes.

Pesquisador: *Ela é mais importante do que o elemento, a estrutura*.

Plínio: *Exatamente. E não é mais importante porque a matemática diz que é, desde sempre, não. Isso passou a ser mais importante a partir de certo momento da história. Não era, entendeu? Essas estruturas nem existiam, como tais. Os matemáticos trabalharam muito tempo com essas coisas, sem saber o que era uma estrutura abstrata como um anel euclidiano, por exemplo. Ou seja, trabalharam como se trabalha na escola: com cada estrutura particular, até desenvolver a capacidade de ver algumas delas como "a mesma coisa". Enfatizo que isso passou a ter um papel relevante a partir de certo momento da história, e realmente, para a matemática acadêmica, essa visão estrutural dos conjuntos com suas operações tem um papel fundamental, hoje. [...] Isso que falei antes, por exemplo, mas temos que distinguir: o que é bom para a matemática acadêmica não é necessariamente bom para matemática escolar. O aluno da escola ainda não tem a familiaridade (com cada uma dessas estruturas particulares) que permita abstrair a natureza dos elementos e saltar para essa visão estrutural: abstrair que estamos multiplicando matrizes, ou números inteiros ou polinômios etc. e centrar nas propriedades (comutativa, associativa etc.) dessas diferentes multiplicações.*

Esquecer o resto e prestar atenção apenas no seguinte: são elementos que você pode somar, multiplicar, com determinadas propriedades da multiplicação, da adição. [...] Agora não é corpo mais, é anel. Corpo teria que ter as nove: quatro de uma, quatro de outra e a ligação das duas.

A fala do professor leva-nos à seguinte interpretação: na Matemática Acadêmica e, ao longo de sua história, há uma variedade de situações em que é possível "esquecer" a natureza do elemento e focar somente na estrutura. Esse modo de lidar traz consequências positivas para a Matemática Acadêmica, pois permite que a matemática avance enquanto área do conhecimento. Como exemplo disso, Plínio conta um resultado matemático que se baseou na estrutura de corpo, valorizando-a enquanto conhecimento dentro da Matemática Acadêmica. Trata-se da prova da impossibilidade da quadratura do círculo, uma prova indireta baseada completamente na estrutura. Para tal, foi utilizado o fato de que os números construtíveis com régua e compasso são um subcorpo de $\mathbb{R}$. Não nos interessa, nesse momento, a demonstração em si, mas sim chamar a atenção para o uso da estrutura nessa demonstração.

Se, por um lado, o matemático profissional tem a possibilidade de lidar com diversas situações que lhe permitem abstrair o elemento e focar na estrutura, por outro, na Matemática Escolar, nem professores e nem estudantes trabalham com um repertório grande de situações que lhes permitam perceber similaridades a ponto de que seja benéfica a percepção das estruturas. Isso fica mais evidente quando Plínio afirma:

Plínio: *[...] nem os professores nem os alunos (da escola) têm familiaridade com um número abrangente de conjuntos (e suas operações) que permita identificar as proximidades das estruturas particulares que conhece, a ponto de dizer: essas aqui são todas estruturas de grupo, essas tantas aqui são corpos, essas tantas anéis etc. Na escola, você não lida com tantas estruturas assim para poder justificar o trabalho na direção desse processo [...].*

Wasserman (2014), quando propõe situações para se trabalhar com a estrutura algébrica grupo, parece concordar com a necessidade de se ter uma ampla gama de situações, como apontou Plínio. O autor fala em valorizar a importância coletiva das propriedades aritméticas (associatividade, elemento neutro, elemento oposto e fechamento) e, para tanto, utiliza a resolução de uma equação do primeiro grau ($x + 5 = 12$) para se trabalhar a noção do grupo $(\mathbb{R}, +)$. Contudo, para se perceber e valorizar essas propriedades em um contexto mais abstrato, Wasserman (2014) sugere trabalhar com outra equação ($X \circ RX = R2$)[59], em um grupo mais abstrato, o grupo de simetrias do triângulo equilátero ($R, \circ$).

A tentativa de Wasserman (2014) parece se alinhar com Plínio no sentido (e somente nesse sentido) de perceber a necessidade de se ter um amplo repertório de situações para se valorizar a estrutura.

Retornando às colocações de Plínio, o professor levanta outro ponto: na Matemática Escolar, faz sentido tratar elementos tão distintos, como os inteiros e os polinômios, ou os racionais e as expressões racionais, como coisas de natureza semelhante, tal qual acontece quando lidamos com as estruturas?

Plínio: *[...] não dá para você querer transferir esse tipo de valor, que é a abstração da natureza dos elementos de um conjunto, para por o foco na estrutura. Na escola não dá, porque, na escola, número inteiro é número inteiro e polinômio é polinômio. Não tem nada a ver uma coisa com a outra. Do meu ponto de vista, se você quiser unificar, vai complicar a vida dos meninos muito mais do que ajudar.*

Outra questão trazida pelo professor formador Plínio refere-se à necessidade de se trabalhar não apenas as estruturas, em sua definição somente, mas também os seus tipos. Por exemplo, além de abstrair a estrutura de anel de uma gama de conjuntos munidos de operações, pode ser necessário saber se o anel é euclidiano ou não, comutativo ou não, se é um anel de integridade etc. Somente assim, a "facilidade" de se trabalhar com as estruturas pode ser completa. Em que medida esse arsenal de conteúdos favorece o conhecimento matemático do professor?

ii) <u>O sentido de se juntar os objetos em uma mesma estrutura</u>

Se, na Matemática Acadêmica, reconhecer as estruturas permite que se construam novos conhecimentos matemáticos, na escola, porém, não é possível fazer uso dessa "função" das estruturas. Assim, Plínio questiona o sentido de se juntar tudo em uma mesma estrutura na Matemática Escolar.

Plínio: *Na escola, você não lida com tantas estruturas assim para poder justificar esse processo, mas mesmo que lidasse com várias, ainda tem o seguinte: para que você unificar? O que você vai ganhar, em termos de aprendizagem escolar da matemática, com*

[59] Dentre as seis simetrias do triângulo equilátero, RX significa a reflexão sobre uma dada linha X (uma linha que passa por um vértice A e é perpendicular ao lado oposto a A) e $R2$ significa uma rotação de 240°. A incógnita X seria uma das seis simetrias do triângulo retângulo que, combinada com simetria RX, resultaria em $R2$.

essa unificação? Como já disse, um ganho seria a possibilidade de ver uma estrutura mais complicada, que não se conhece etc. e conseguir reconhecer que ela é uma dessas aqui, já estudadas e entendidas muito bem, de modo a poder transferir certas propriedades dessa que já conheço para a outra, ainda desconhecida. Na escola não tem isso, não se transfere nada, nesse sentido de unificação pelas estruturas abstratas, de uma estrutura para outras. Estuda-se cada uma com suas particularidades e, de fato, não há nem tempo suficiente para que se criem experiências consolidadas com muitas estruturas similares de modo a abstrair a natureza dos elementos dos conjuntos que possuem tais estruturas. A meu ver, nem seria muito frutífero, do ponto de vista da aprendizagem escolar, dar esse salto para as estruturas com crianças e adolescentes que lidam com particularidades estruturais que levam anos de escolaridade para serem suficientemente apreendidas (por exemplo, a passagem dos naturais para os racionais, a introdução dos negativos, a extensão do corpo $\mathbb{Q}$ ao corpo $\mathbb{R}$, com a introdução dos irracionais, no Ensino Fundamental; o estudo das matrizes e dos polinômios sobre $\mathbb{R}$ no Ensino Médio etc.). Pegue um currículo da escola básica aí que você vai ver que não acontece essa transferência e nem tem sentido pedagógico ou didático acontecer.

Reflexão 11: diferentes perspectivas que nos permitem caminhar

Nas diferenças aparentes nos discursos de cada um dos professores, podemos produzir nossas interpretações por meio de uma análise mais cuidadosa e caminhar na discussão que nos propusemos.

A perspectiva de Plínio nos traz evidentes contribuições e nos permite produzir reflexões sobre suas falas. Seus argumentos são consistentes e estão coerentes com a abordagem que vem divulgando juntamente com outros pesquisadores acerca da formação matemática do professor. Alguns dos questionamentos trazidos por ele vão ao encontro dos que já fizemos nesta tese, como, por exemplo, quando cita a característica da Matemática Acadêmica de tirar o foco dos elementos, colocando-o nas estruturas (até que ponto isso pode ser trazido para a Matemática Escolar?) e, também, o fato de que a história mostra que nem sempre foi do mesmo modo, isto é, a necessidade interna da matemática em valorizar a estrutura é recente e muitos matemáticos produziram muitos conhecimentos sem esses valores.

Os dois argumentos centrais (separados em i) e ii) anteriormente) apresentados por Plínio são essenciais para uma pesquisa que busca fundamentos para o ensino do corpo dos racionais, pois exigem maiores reflexões e elevam a discussão a outro patamar, saindo do senso comum.

Dentre os três caminhos que descrevemos na introdução, Plínio percorre o segundo, aquele que considera o ensino das estruturas algébricas desnecessário à formação docente, pois o professor não faz uso desses conhecimentos em sua prática.

Assim, o contraste entre os argumentos de Plínio, os de Tiago e Victor e de pesquisas como Wasserman (2014, 2016) configura o conflito de ideias que buscamos em nossa pesquisa. Se, por um lado, aqueles que são favoráveis ao ensino da estrutura algébrica corpo em cursos de Licenciatura buscam, de algum modo, relacioná-la com o conjunto dos números racionais da Educação Básica, por outro, Plínio nos faz questionar até que ponto essa relação se dá.

Já anunciamos, na seção 1.3, a diferença entre nosso ponto de vista e o de Plínio quando caracterizamos o que entendemos por matemática na formação do professor. Por mais que estejamos assumindo a diferenciação entre Matemática Acadêmica e Matemática Escolar proposta pelo próprio Plínio Moreira e colaboradores, os outros referenciais teóricos aqui tomados nos possibilitam essa diferença, pois nos permitem inserir a Matemática Acadêmica como integrante do processo de formação matemática do professor, na medida em que se colocam em discussão as tensões entre ela e a Matemática Escolar, questionando até que ponto seus valores e seus métodos contribuem para o desenvolvimento do MKT.

Outras colocações de Plínio questionam mais diretamente a (não) necessidade dos corpos na prática docente.

Plínio: *[...] vá lá na prática docente escolar em matemática, estude essa prática e me fale que questões são essas [...] que justifiquem, diante das demandas da prática docente da escola básica, a necessidade de o professor conhecer essas estruturas abstratas corpo, anel, grupo, para dar respostas às questões que aparecem em sua sala de aula de matemática. Responder, que eu falo, não é responder apenas a uma pergunta específica do aluno não, é responder também no sentido mais amplo de preparar uma aula sobre números racionais, antecipar dúvidas dos alunos, formular questões relevantes, por exemplo, para o aluno trabalhar sobre elas em sala de aula ou em tarefas para casa, propor atividades de sala de aula que sejam interessantes, do ponto de vista da aprendizagem escolar da matemática. E me diga se achou que é necessário (ou mesmo conveniente) conhecer bem essas estruturas abstratas de corpo, de anel, de grupo, para trabalhar na escola, os corpos particulares, os anéis particulares e os grupos particulares que fazem parte do currículo escolar. Por fim, pode-se alegar que "saber, quanto mais melhor". Mas a questão é que há muita coisa que o professor precisa conhecer muito bem para desempenhar sua prática docente escolar em matemática* *fundada em um compromisso com a aprendizagem de seus alunos. E, para incluir grupos anéis e corpos, na formação de licenciatura, é preciso excluir outras coisas do currículo do curso. Por isso também é que digo que não, o estudo dessas estruturas algébricas abstratas não é relevante para a formação do professor da Educação Básica.*

De certo modo, o que estamos buscando com essa pesquisa são, justamente, essas relações com a prática. Entretanto, como explicitamos no decorrer desse texto, preferimos falar em "de que modo a estrutura de corpo pode favorecer o conhecimento matemático do professor" do que afirmar que "é preciso saber corpo". Não acreditamos que sem o conhecimento da estrutura algébrica de corpo o professor não possa exercer sua tarefa de ensinar matemática. O que estamos buscando é conhecer de que modo as estruturas podem contribuir para a formação dos professores, uma vez que fazem parte do currículo de muitos cursos de Licenciatura em Matemática.

Concluímos nossa *discussão com* os professores formadores para darmos continuidade ao debate proposto, mas agora *a partir das* pesquisas. Perceber o modo como esses professores lidam com e pensam a presença da Álgebra na Licenciatura e, de forma mais particular, a relação entre a estrutura de corpo e os números racionais nos trouxe diversas reflexões. Entendemos que escrever sobre formação de professores, como é o nosso caso, envolve, também, ouvir o que os formadores têm a dizer. Somente assim podemos ter uma melhor compreensão desse complexo fenômeno que é a matemática na formação do professor.

Terceiro momento: das pesquisas

No âmbito das pesquisas, dentre aquelas selecionadas e apresentadas na seção 1.3, algumas têm uma ligação mais direta com o que estamos entendendo por números racionais na Matemática Acadêmica e, por isso, estão apresentadas nessa etapa do trabalho. São os casos de Moreira e David (2011), Damico (2007) e Wasserman (2014, 2016). As demais pesquisas anteriormente anunciadas serão debatidas na seção 2.4, no momento que entendemos ser mais adequado.

As pesquisas aqui trazidas abordam questões distintas sobre um tema em comum: a álgebra para o ensino. Damico (2007) discute os números racionais na formação do professor, Moreira e David (2011) levantam questões a respeito dos conflitos entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar com vistas à matemática na formação do professor, já Wasserman (2014, 2016) discute a Álgebra Abstrata para o ensino de álgebra na escola, tecendo relações entre as estruturas algébricas e alguns conteúdos matemáticos da

Educação Básica. Vamos buscar dialogar com essas pesquisas, levantando novas reflexões possíveis.

Damico (2007) parte da hipótese de que cursos de Licenciatura em Matemática não têm oferecido aos futuros professores uma preparação sobre os números racionais com a abrangência e o cuidado que esse assunto requer. A partir dessa hipótese, Damico desenvolve sua pesquisa a fim de responder à seguinte pergunta norteadora: os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática estão saindo das universidades pesquisadas com uma formação que os capacite para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental?

Para responder a seu questionamento, Damico (2007) faz uso de cinco instrumentos de coleta de dados, cujos sujeitos de pesquisa foram 346 licenciandos em Matemática (189 iniciantes e 157 concluintes) e 41 formadores de professores, de duas universidades do ABC Paulista. Os resultados obtidos foram apresentados em três unidades de análise: o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos licenciandos em relação a cinco subconstrutos (parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear); o conhecimento matemático e o PCK em relação às operações básicas com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão); e os números racionais na formação universitária.

Como Damico (2007) traz elementos não apenas sobre os números racionais na formação do professor, mas também sobre concepções equivocadas dos participantes acerca dos números racionais, seu trabalho nos fornece relevantes dados, inclusive, no que se refere às concepções alternativas, que serão discutidas ao final da seção 2.4.

Quanto à formação do professor, sugere, em suas conclusões, que os futuros professores são carentes no que se refere à parte conceitual dos subconstrutos, prevalecendo apenas os aspectos algébricos envolvidos nos conhecimentos. Damico (2007) considera que o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo dos futuros professores participantes esteja fortemente influenciado pelo processo algorítmico dos números racionais e alerta que essa deficiência seja consequência da formação oferecida aos estudantes. Segundo Damico (2007),

> A maioria dos assuntos que envolvem números racionais que os estudantes têm contato está imersa em um número bastante grande de procedimentos formais, precisamente delimitados e destinados a obter respostas a classes específicas de problemas ou exercícios. Os alunos concluintes estão terminando os cursos com certa habilidade na aplicação de algoritmos envolvendo números racionais; contudo, sem conhecer a gênese, os conceitos e a metodologia de funcionamento das teorias que os originaram. (DAMICO, 2007, p. 258).

O autor explicita que há uma valorização dos aspectos formais da Matemática Acadêmica em detrimento dos aspectos histórico-epistemológicos e dos diferentes significados

dos números racionais, essenciais para a prática docente. Isso fica mais evidente quando Damico (2007) apresenta e discute a entrevista com um professor formador que leciona a disciplina de Álgebra Abstrata. Quando o pesquisador pergunta se o estudo dos números racionais faz parte do programa de Álgebra que leciona, a resposta recebida foi: “Entra em Álgebra, não estudando o conjunto dos números racionais, mas entra como exemplo pra estudar as estruturas algébricas” (DAMICO, 2007, p. 219).

Reflexão 12: os números racionais são tratados como exemplo das estruturas algébricas

As colocações de Damico (2007) e a resposta do professor ilustram um pouco do cenário do ensino dos números racionais dentro da Licenciatura em Matemática e que temos insistido ao longo desta tese, chegando a sermos repetitivos: os números racionais entram como um exemplo das estruturas algébricas e não como o foco de estudo. O mesmo acontece, segundo Damico (2007), na disciplina de Análise Real, em que o conjunto dos números racionais é utilizado para se fazer um contraponto entre as diferenças estruturais existentes entre este conjunto e o dos números reais, possivelmente para introduzir e caracterizar os números irracionais.

Podemos perceber que, em duas disciplinas consideradas essenciais para se “prover os fundamentos da Matemática” (Álgebra e Análise), o conjunto dos números racionais, cujos conceitos associados estão entre as ideias mais complexas da Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2010), não é tomado como central.

Não são poucos os indícios da necessidade de uma alteração no modo como os números racionais vêm sendo abordados na formação do professor, sendo desvalorizado, em detrimento de uma matemática mais avançada e não conectada com aquela veiculada no trabalho docente na escola. Na seção 3.1, quando discutiremos alguns PPC de cursos de Licenciatura em Matemática, essa percepção de desvalorização dos números racionais na formação do professor será materializada pelas ementas dos cursos analisados. Mas, podemos encontrar em outras pesquisas a mesma constatação. Mondini e Bicudo (2010), por exemplo, ao ouvirem alguns professores sobre a organização da disciplina de Álgebra em cursos de Licenciatura em Matemática de universidades do Rio Grande do Sul, evidenciam problemas semelhantes. Quando falam sobre a organização da referida disciplina, os professores afirmam que a Álgebra não tem por meta trabalhar o como ensinar a álgebra na Educação Básica, mas sim, fundamentar matematicamente o professor e que, ao trabalharem com as estruturas algébricas, esperam que seus estudantes consigam visualizar a importância desse estudo para atuar na Educação Básica. Contudo, os próprios professores percebem que os estudantes não reconhecem essa importância, o que se configura como um problema para o ensino de Álgebra na Licenciatura.

Como sugere Damico (2007), há a necessidade de se questionar sobre qual a relação e a dosagem entre os conteúdos da Matemática Pura e da Matemática "Elementar" [60]ensinada na Educação Básica. Na sequência, o autor afirma que esse tema merece um estudo mais específico e assinala a necessidade de um redirecionamento metodológico de como os assuntos da Educação Básica são tratados em um curso de licenciatura. Essa colocação de Damico (2007) justifica e fundamenta nossa *Reflexão 30*, quando propomos uma mudança metodológica no ensino da estrutura algébrica corpo e seu papel no desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Uma mudança que, como veremos, sugerirá uma mudança curricular na formação de professores.

Uma outra discussão que se conecta muito bem com essa feita por Damico (2007) é a que Moreira e David (2011) promovem. Os autores debatem alguns conflitos entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar e o fazem por meio dos números naturais, racionais e reais. Contrastam as duas perspectivas (a abordagem dada pela Matemática Acadêmica e aquela do contexto escolar), a fim de evidenciar conflitos entre elas, sugerindo uma problematização da visão comum, que considera que a aprendizagem da Matemática Acadêmica ajuda o professor da Educação Básica a organizar seu conhecimento profissional (MOREIRA; DAVID, 2011).

Um primeiro conflito apontado pelos autores, com relação à construção formal dos números racionais a partir dos inteiros, refere-se à unificação dos diferentes significados dos números racionais em uma forma puramente formal: $\mathbb{Q}$ é o conjunto das classes de equivalência da relação $\sim$. Para os autores, essa passagem ao quociente "[...] identifica, num lance, todas as interpretações escolares concretas (os chamados 'subconstrutos') do conceito de número racional, unificando-os num construto puramente formal: número racional é uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros" (MOREIRA; DAVID, 2011, p. 209). Na *Reflexão 3*, já comentamos sobre essa característica da Matemática Acadêmica de compactar os diferentes significados de um conceito em um único e formal modo de pensar, enquanto que o trabalho docente na escola exige exatamente o contrário. Descompactar os diferentes

[60] Os termos *Matemática Pura* e *Matemática "Elementar"* são utilizados por Damico (2007). O autor não faz referências aos termos Matemática Acadêmica e Matemática Escolar de Moreira e David (2010), mas acreditamos que os termos usados por Damico (2007) caminhem nessa mesma direção.

significados é uma atividade essencial para que o professor possa orientar seus estudantes para além de regras e algoritmos.

Descompactar também está ligado a outro conflito trazido por Moreira e David (2011), que se refere às operações entre os números racionais. Na concepção formal de número racional, os significados das operações se perdem nos algoritmos que as definem. Segundo os autores, as definições formais das operações não passam de algoritmos para o cálculo dos resultados e as propriedades se deduzem imediatamente daquelas já estabelecidas para os inteiros. Entretanto, nem sempre as conexões entre as operações com os números inteiros e os números racionais se mostram de modo tão evidente.

i) Por que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, enquanto $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$?

ii) Sabendo-se que $3\times(2+5) = 3\times 2 + 3\times 5$, por qual motivo deve-se esperar que $\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{5}+\frac{6}{7}\right)$ seja igual a $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$? Isto é, por que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição deve permanecer válida entre os racionais?

Os questionamentos levantados pelos autores vão na seguinte direção: por que a extensão dos números inteiros para os racionais é feita de um modo e não de outro? Poderíamos estender as operações para os números racionais de modo que algumas dessas propriedades não se mantivessem? Os pertinentes questionamentos levantados pelos autores vão, de certo modo, ao encontro de nossa *Reflexão 7* e, também, nos permitem realizar novas reflexões.

Reflexão 13: a matemática como uma produção social

Concordamos com Moreira e David (2011) que os questionamentos levantados são relevantes para se pensar a formação do professor e para se questionar o papel da construção formal dos números racionais enquanto classes de equivalência nessa formação. Contudo, antes de propormos o abandono deste ou de outros significados característicos da Matemática Acadêmica em cursos de formação, sugerimos que o debate promovido por esse modo de fazer matemática, que é característico da prática do matemático profissional, possa favorecer o conhecimento matemático do professor no sentido de reconhecer que tanto a Matemática Acadêmica como a Matemática Escolar são conjuntos de práticas sociais situadas em contextos específicos e com objetivos e critérios de validação próprios.

Tomar consciência dos diferentes modos de pensar os números racionais e reconhecer seus contextos mais apropriados de uso é o que sugerimos com a abordagem dos perfis conceituais. Do ponto de vista de compactar diferentes significados, como já afirmamos em outros momentos, a abordagem dos perfis conceituais não considera uma substituição de um modo de pensar por outro, pelo contrário, diferentes modos de pensar um mesmo conceito podem conviver simultaneamente num mesmo indivíduo. Nesse sentido, pensar um número racional como uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros não significa compactar os demais significados nesse, abandonando-os. Significa reconhecer esse modo de pensar como aquele que é característico da Matemática Acadêmica, com diferenças epistemológicas e ontológicas, mas que representa um modo de fazer matemática que é distinto daquele comumente realizado na escola.

Reflexão 14: descomprimir é uma tarefa importante no trabalho do professor

Na *Reflexão 24*, comentaremos sobre o mecanicismo no ensino dos números racionais a partir da entrevista com os professores da Educação Básica Carla e Paulo. É evidente que o ensino das operações envolvendo números racionais por meio de algoritmos sem significado algum compromete a aprendizagem desse conteúdo. Se, como afirmam Moreira e David (2011), com a abordagem formal dos números racionais os significados das operações se perdem nos algoritmos que as definem, as outras interpretações para os número racional (ainda não vamos falar em “outras zonas do perfil conceitual de número racional”, apesar de ser este o sentido que estamos propondo) precisam ser valorizadas na formação do professor, pois cabe a este, em sua ação de ensinar, descomprimir regras que, com a desculpa de serem “facilitadoras”, omitem as razões que estão por trás de sua validade.

O termo descomprimir é utilizado no sentido de McCrory et al. (2012). Os autores apresentam categorias de conhecimentos e de práticas de ensino para compreender e avaliar os conhecimentos dos professores para o ensino de álgebra. Uma das três categorias para as práticas de ensino apresentadas por eles é chamada de *decompressing*. Segundo os autores, em suas práticas, os professores precisam, por exemplo, descomprimir os algoritmos utilizados em operações aritméticas, tais como uma divisão longa, encontrar denominadores comuns e dividir por uma fração. Além disso, precisam ser descomprimidos os algoritmos para resolver equações e sistemas de equações, e para transitar entre diferentes representações. Para McCrory et al. (2012), descomprimir envolve dar significado aos símbolos e algoritmos que são normalmente utilizados por quem pratica uma matemática sofisticada de forma automática, inconsciente.

Moreira e David (2011) concluem seu trabalho colocando em questão a contribuição da Matemática Acadêmica na formação do professor. Para eles, muitas vezes essa matemática é vista como um caminho para o desenvolvimento intelectual do estudante e concordam que, nesse sentido, a Matemática Acadêmica pode ser uma referência adequada para esse fim. Contudo, é preciso ter clareza das diferentes naturezas das práticas do professor da escola e do matemático profissional e que a “transferência de valores de uma prática para a outra demanda um grande esforço de recontextualização que precisa ser melhor compreendido” (p. 220).

Já os trabalhos de Wasserman (2014, 2016) buscam explorar aspectos das estruturas algébricas que possam influenciar no trabalho do professor na Educação Básica. Para o autor, as estruturas algébricas são necessárias ao pensamento algébrico tanto de estudantes como de professores da Educação Básica.

Wasserman (2014) questiona, assim como nós, as abordagens tradicionais de ensino das estruturas, que apresentam, inicialmente, a definição axiomática de grupo e de corpo e, então, alguns exemplos comuns dessas estruturas para mostrar o impacto dos axiomas. Como alternativa, sugere uma abordagem por meio das propriedades aritméticas necessárias para a resolução de equações do primeiro grau, pois, desse modo, os estudantes desenvolveriam e sustentariam novas ideias a partir de conhecimentos já estabilizados dos estudantes.

Com base nessa abordagem, foi apresentado a professores da Educação Básica a solução da equação do primeiro grau

$$\begin{aligned} x + 5 &= 12 \\ -5 \quad & -5 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Os professores foram, então, requisitados a identificar todos os pressupostos necessários para essa simples solução. Segundo Wasserman (2014), o que descobriram foi que as propriedades aritméticas familiares estavam no cerne do processo.

$$\begin{array}{cc} x + 5 = 12 & \\ (x+5) + -5 = 12 + -5 & Equivalência \\ x + (5 + -5) = 12 + -5 & Associatividade\ (da\ adição\ em\ \mathbb{R}) \\ x + 0 = 12 + -5 & Elementos\ inversos\ (da\ adição\ em\ \mathbb{R}) \end{array}$$

$$x = 12 + -5 \qquad Elemento\ identidade\ (da\ adição\ em\ \mathbb{R})$$

$$x = 7 \qquad Fechamento\ (da\ adição\ em\ \mathbb{R})$$

Para nós, uma das grandes contribuições do trabalho de Wasserman (2014) é a análise que faz de cada uma dessas propriedades, que apresentamos brevemente aqui.

- Associativa

A adição é uma operação binária que se limita à combinação de apenas dois elementos de cada vez. Assim, como trabalhar a operação com três elementos?

Wasserman (2014) afirma que, se, por um lado, é fácil justificar a associatividade para a adição $(a + b) + c = a + (b + c)$, determinar se outra operação possui essa propriedade pode ser consideravelmente mais difícil. O professor formador Tiago, durante a entrevista, concorda com essa dificuldade e lembra de seu exemplo ao trabalhar com uma operação que não satisfaz a propriedade associativa: a potenciação. No caso dessa operação, temos, por exemplo, $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$.

Para o processo de resolução de equação, a propriedade associativa é necessária para transformar uma operação binária entre um desconhecido e um conhecido $(x + 5)$ em uma operação entre dois conhecidos $(5 + -5)$.

$$(x + 5) + -5 = 12 + -5$$

$$x + (5 + -5) = 12 + -5$$

Se $(x + 5)$ não nos permite avançar em termos da resolução, a associatividade leva-nos em $(5 + -5)$, que sabemos calcular, pois se trata da adição de dois conhecidos.

- Elemento inverso

A operação entre os dois conhecidos $(5 + -5)$ resulta em 0. O número -5 produziu um "casal-zero" com 5. *Todo* elemento deve ter um elemento "casal-zero", isto é, para qualquer número c, um inverso aditivo deve existir: $c + -c = -c + c = 0$. Por isso, a existência de um elemento inverso para todos os elementos é um pressuposto essencial para a resolução de equações.

- Elemento identidade

$$x + 0 = 12 + -5$$

O membro esquerdo $(x + 0)$ é muito parecido com o membro esquerdo da equação original $(x + 5)$, pois ainda temos de combinar um desconhecido com um conhecido. Mas, o resultado de $x + 0$, não importa o número que x representa, é conhecido (ao contrário de $x + 5$), pois 0 é a identidade aditiva e qualquer número real adicionado à identidade aditiva resulta no próprio número.

Sem a suposição de que existe um elemento identidade, o ciclo de solução iria se repetir indefinidamente e seria improdutivo. O elemento inverso, -5, cancelou o 5 só porque produziu 0 ("casal-zero"), que é a identidade aditiva.

- Fechamento

$$x = 12 + -5$$
$$x = 7$$

O membro esquerdo da equação é apenas o número desconhecido, x. Já o membro direito contém uma operação binária entre dois elementos $(12 + -5)$. Para x ser uma solução real da equação original, x deve ser um número. Nesse contexto de resolução de equações, combinar, por meio de uma operação binária, dois ou mais elementos de um conjunto deve resultar em um elemento do próprio conjunto.

É interessante notar que a abordagem proposta por Wasserman (2014) baseia-se no conhecimento que o estudante/professor já tem das propriedades aritméticas para evidenciar a necessidade de cada uma na resolução de uma equação simples, pois, caso não as assumíssemos como pressupostos, não resolveríamos a equação por meios algébricos.

Na sequência de seu trabalho, o autor trata do que chamou de "importância coletiva" das propriedades de grupo (ou de corpo). Nesse caso, Wasserman (2014) lança mão de uma equação mais abstrata do que a anterior, a fim de que o professor participante de sua pesquisa perceba e valorize o coletivo das propriedades, não apenas cada uma separadamente. Perceber o valor coletivo significa identificar a estrutura algébrica envolvida na resolução de ambas as equações $x + 5 = 12$ e $X \circ RX = R2$, a saber: os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(R, \circ)$ respectivamente.

O tratamento de Wasserman (2014) é um exemplo explícito do HCK, uma vez que articula as propriedades aritméticas às estruturas algébricas por meio do trabalho com resolução de equações do primeiro grau.

Os resultados dessa abordagem, realizada em um curso para professores da Educação Básica dos Estados Unidos, sugerem, segundo Wasserman (2014): a) um aumento do conhecimento do conteúdo matemático, tanto sobre as propriedades aritméticas, quanto de álgebra abstrata; e b) indícios de mudanças nas crenças e práticas associadas ao ensino do conteúdo quanto às operações com números e resolução de equações.

Reflexão 15: a Matemática Escolar como ponto de partida e de chegada

Se, como apontou Plínio em sua entrevista, as demandas da prática podem não exigir do professor um conhecimento das estruturas algébricas, a proposta de Wasserman (2014) indica que trazer demandas da prática, como o trabalho com operações aritméticas e equações do primeiro grau, para serem discutidas a partir de valores da Matemática Acadêmica, pode favorecer o olhar dos professores sobre o conteúdo a ser ensinado.

A proposta de Wasserman (2014), que se fundamenta em McCrory et al. (2012) e sua descrição para o conhecimento de álgebra para o ensino, ilustra o *decompressing* comentado anteriormente. O detalhamento de cada uma das propriedades (associatividade, elemento identidade, elemento inverso, fechamento) da forma como fora feito, mostrando suas necessidades para a resolução de uma equação do primeiro grau do tipo $ax + b = 0$ (com $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^*$), descomprime algumas passagens, tornando-as, eventualmente, mais compreensíveis aos estudantes. Do mesmo modo, a introdução das estruturas algébricas nesse contexto leva o professor a refletir sobre uma situação familiar por uma nova perspectiva (WASSERMAN, 2014).

De algum modo, a percepção da importância coletiva das propriedades e a valorização dessa por meio de outros exemplos mais abstratos, propostas por Wasserman (2014), aproximam-se daquela característica da Matemática Acadêmica de juntar objetos semelhantes e focar nas estruturas. Assim, por mais que não tratemos de uma variedade tão grande de conjuntos e operações na Educação Básica de modo que se justifique, como indica Plínio, o uso das estruturas, será que trazer esse modo de olhar para conceitos que são tratados na escola não pode favorecer o conhecimento matemático do professor?

Estamos diante de um exemplo da matemática na formação do professor tal como propusemos: uma matemática cujo como ponto de partida e de chegada é a Matemática Escolar, mas que passa por novas reflexões do licenciando enquanto futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica, de forma que altere qualitativamente seu conhecimento sobre a Matemática Escolar.

Na mesma direção, Wasserman (2016) discute como a matemática avançada pode impactar positivamente o ensino da matemática escolar, em especial, a forma como as ideias em Álgebra Abstrata podem beneficiar o ensino de álgebra. Algumas considerações a respeito desse trabalho de Wasserman já foram feitas na seção 1.1.2. Por isso, nesse momento, vamos nos deter a apresentar alguns desses benefícios comentados pelo autor que se relacionam com nosso tema de pesquisa.

Com base nos documentos curriculares norte-americanos, mais especificamente o *Common Core Mathematics Standards from the United States* (CCSS-M, 2010 apud WASSERMAN, 2016), o autor busca partir da álgebra escolar (percorrendo desde os primeiros anos do Ensino Fundamental até o Ensino Médio) para realizar possíveis discussões de serem feitas com base na Álgebra Abstrata.

Trazemos aqui um dos exemplos abordador pelo autor, o caso das propriedades aritméticas. Para Wasseman (2016), explorar as propriedades aritméticas individualmente está ligado, em parte, à compreensão das operações sobre conjuntos numéricos e explorar tais propriedades coletivamente (como os axiomas das estruturas algébricas) leva a compreensões matemáticas futuras. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, as propriedades aritméticas são mencionadas explicitamente em relação às estratégias de contagem e aritmética mental, tais como somar, subtrair, multiplicar e dividir. De acordo com o documento investigado, uma orientação para esse nível de ensino é

> Compreender um múltiplo de a/b como um múltiplo de $1/b$, e utilizar esse conhecimento para multiplicar uma fração por um número inteiro. Por exemplo, usar um modelo visual de fração para expressar a $3 \times (2/5)$ como $6 \times (1/5)$, reconhecendo esse produto como $6/5$. (De modo geral, $n{\times}(a/b) = (n{\times}a)/b$)”. (CCSS- M, 2010 apud WASSERMAN, 2016, p. 34, tradução nossa).

Segundo Wasserman (2016), o modelo visual baseia-se no uso da propriedade associativa como um axioma que se mantém para a multiplicação com frações. Com base na definição de a/b como um múltiplo de $1/b$, para justificar que $3{\times}(2/5)$ é igual a $6{\times}(1/5)$, a associatividade é assumida: $3 \times (2/5) = 3 \times (2 \times (1/5)) = (3 \times 2) \times (1/5) = 6 \times (1/5) = 6/5$. Nos anos finais do Ensino Fundamental, a ênfase nas propriedades aritméticas continua e se torna particularmente importante para o desenvolvimento de regras de operações sobre os sinais dos números: “Entender que a multiplicação é estendida das frações aos números racionais, *exigindo que as operações continuem a satisfazer as propriedades das operações*, particularmente a propriedade distributiva, levando a produtos como $(-1).(-1) = 1$” (CCSS-M, 2010 apud WASSERMAN, 2016, p. 34, tradução e grifo nossos). Podemos dizer, então, que algumas regras da multiplicação são do modo que são para manter as propriedades aritméticas. Carvalho, Lopes e Souza (1984) nos explicam melhor essa relação da propriedade distributiva e o produto $(-1).(-1) = 1$.

> A opção de se definir desta maneira a multiplicação de -1 por -1 embora pareça estranha à primeira vista, por fugir a qualquer percepção intuitiva,

> atende a razão teóricas convenientes à formação da estrutura algébrica $(\mathbb{Z}, +, .)$. De fato, se definíssemos este produto como tendo resultado -1, cairia por terra, por exemplo, nesta estrutura, a distributividade do produto em relação à adição. Observe o que aconteceria com $(-1).(-1+1)$ e $[(-1)(-1)] + [(-1)(+1)]$. (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984, p. 116).

Do ponto de vista da Matemática Acadêmica, o produto acima é da maneira que é, por uma consistência algébrica e, se fosse diferente, a distributividade não valeria no anel $(\mathbb{Z}, +, .)$. No decorrer dos anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes passam a usar com mais frequência a propriedade distributiva, agora para produzir expressões algébricas equivalentes, por exemplo, $3.(2 + x) = 6 + 3x$ (WASSERMAN, 2016).

No Ensino Médio, essas propriedades começam a tomar novos significados com as operações e conjuntos mais abstratos, como as funções e composição de funções, matrizes e multiplicação de matrizes, vetores e adição de vetores, etc. Na verdade, ressalta Wasserman (2016), conceituar multiplicação de matrizes e composição de funções como "operações", de modo semelhante à adição ou à multiplicação usuais, não é necessariamente intuitivo (em particular, composição de funções). Além disso, esses exemplos de operações se diferenciam das usuais por não serem comutativas, propriedade exigida pelas estruturas de anel e corpo.

A Figura 15 resume o progresso das propriedades aritméticas segundo Wasserman (2016).

Figura 15: Progresso das propriedades aritméticas ao longo da Educação Básica

Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Anos Finais do Ensino Fundamental	Ensino Médio
Propriedades da adição, Multiplicação sobre N, Q+	Propriedades da Adição, Multiplicação sobre Z, Q, R; Expressões algébricas	Propriedades da Adição, Multiplicação sobre R, C; Polinomiais e Racionais Propriedades de multiplicação de matrizes; Propriedades de composição de funções
Corpos/Anéis ←	Estruturas Algébricas	→ Anéis/Grupos
Concreto ←	Objetos e operações	→ Abstrato

Fonte: traduzido de Wasserman (2016)

Reflexão 16: buscando consistência na Matemática Escolar

Novamente, a ideia de manter a consistência algébrica se mostra relevante na Matemática Acadêmica. Essa característica (consistência algébrica) já havia aparecido na fala de Victor, em discussões anteriores. Na Matemática Acadêmica, manter a consistência é mais importante do que manter o caráter intuitivo da operação ou de uma propriedade. Essa

discussão vai ao encontro do proposto por Moreira e David (2011), quando problematizam a extensão das propriedades das operações dos números inteiros para os números racionais.

Como vimos, o documento analisado por Wasserman (2016) também indica essa questão, quando sugere que a extensão da multiplicação de frações para os números racionais[61] exige que as propriedades continuem a ser satisfeitas. Quer dizer, a Matemática Escolar também demanda que o professor reconheça que essa extensão seja uma prática. Nesse sentido, por mais que a justificativa construída pela Matemática Acadêmica possa não ser adequada no contexto do Ensino Fundamental, acreditamos que tomar consciência desse modo de fazer matemática permite ao professor entendê-la como uma prática social, mutável e não neutra politicamente, dando-o autonomia para produzir justificativas consistentes no interior da Matemática Escolar.

Reflexão 17: o início do tratamento das estruturas deve se dar pelas estruturas de corpo e anel

Outra reflexão propiciada pelo texto de Wasserman (2016) vem da Figura 15. Reparemos que as estruturas de corpo e anel estão alocadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enquanto que a de grupo (e, também, a de anel) somente no Ensino Médio. O autor admite que não é verdade que as propriedades sobre $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Q}_+$ trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental formam um corpo ou anel, mas o fato de a adição e a multiplicação serem utilizadas juntas nesses contextos o leva a crer que lá se inicia essa noção das estruturas. Já a estrutura de grupo, por mais que seja uma estrutura algébrica mais simples (por ser um conjunto munido de uma única operação), não tem relevância nesse nível de ensino. Como afirma Wasserman (2016), mesmo que corpos e anéis possam conter grupos (por exemplo, $(\mathbb{Q}_+, \ .)$), a ênfase no Ensino Fundamental não está nessa estrutura de grupo.

Nesse sentido, uma possibilidade é que a introdução da Álgebra Abstrata seja feita com anéis e corpos e, somente nos casos em que seja interessante estudar as propriedades de uma operação isoladamente (por exemplo, o grupo de simetrias do triângulo equilátero $(R, \ \circ)$), essa estrutura seja abordada. Levamos esse fato em consideração quando elaboramos a sequência de tarefas proposta no próximo capítulo[62].

[61] Interpretamos que o documento chama de frações aqueles números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}^*$, enquanto que os números racionais envolvem, além desses, os seus simétricos.

[62] No texto para o exame de qualificação, apresentamos uma possível direção para a tarefa que seria proposta. Naquele momento, havíamos sugerido que as estruturas com uma única operação, como as de monoide e de grupo, precedessem o estudo das estruturas com duas operações, como as de anel e de corpo. Contudo, o professor Victor, em seu parecer para o texto de qualificação, fez comentários que vão ao encontro dos de Wasserman (2016), indicando que, no caso da abordagem dos conjuntos

Finalizamos sintetizando as análises aqui feitas. Realizamos 17 *Reflexões* que: (i) reafirmam diferenças entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica (*Reflexões 1*, *2*, *5* e *7*); (ii) problematizam mais diretamente o papel da Matemática Acadêmica na formação do professor (*Reflexões 8* e *11*); (iii) indicam caminhos, possibilidades e cuidados que devemos ter ao propormos o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática (*Reflexões 3*, *4*, *6*, *9*, *10*, *12*, *13*, *14*, *15*, *16* e *17*). Com essas *Reflexões*, retomamos o questionamento levantado no início desta seção: *em que medida acrescentar esses modos de pensar os números racionais* [próprios da Matemática Acadêmica] *ao perfil conceitual do professor em formação inicial favorece seu conhecimento do conteúdo no horizonte e, consequentemente, seu conhecimento matemático para o ensino?* Nosso estudo nos permitiu levantar algumas caraterísticas para darmos uma resposta a essa pergunta. Desde que seja de forma problematizada, evidenciando características da Matemática Acadêmica (como sua intencionalidade – *Reflexão 7* –, sua busca por consistência – *Reflexão 16* – e sua forma de compactar significados – *Reflexões 3* e *7*), acreditamos que acrescentar esses modos de pensar os números racionais (como classes de equivalência e como elementos de um corpo) permite ao futuro professor tomar consciência da matemática como uma produção social (*Reflexão 13*), passível de críticas em seu *modus operandi* e, principalmente, possibilita maior autonomia (*Reflexão* 16) a esse professor para fazer matemática, sem tomar a Matemática Acadêmica como uma referência que precisa, necessariamente, ser obedecida. Além disso, os números racionais na perspectiva da Matemática Acadêmica podem dar maior repertório ao professor para tomar decisões em diferentes contextos (*Reflexão 1*) e, também, dar condições para que possa descomprimir (*Reflexões 14* e *15*) regras e algoritmos presentes no ensino das operações com esses números.

2.4 Aspectos dos números racionais na Matemática Escolar

A quarta etapa deste aprofundamento teórico sobre os números racionais consiste em uma articulação entre a abordagem proposta em livros didáticos, o conhecimento matemático sobre os racionais apresentado por quatro professores em entrevistas e resultados de pesquisas que abordam características desses números no contexto da Educação Básica.

---

numéricos na matemática escolar, tem muita relevância a relação entre as duas operações (adição e multiplicação), estabelecida pela propriedade distributiva.

Para este momento, guiamo-nos pela seguinte pergunta: *de que modo as questões que se colocam na prática docente ao trabalhar com os números racionais podem ser favorecidas com o conhecimento dos significados dos números racionais na Matemática Acadêmica?* Para responder a essa pergunta, partimos das já citadas fontes especificamente voltadas para a Educação Básica – livros didáticos, entrevistas e pesquisas – a fim de compreender algumas das demandas da prática docente, adentramos em características dos números racionais na Matemática Acadêmica (seção 2.3) e retornamos para os números racionais na Matemática Escolar. Isto é, nosso ponto de partida e de chegada é a Matemática Escolar, como afirmamos na seção 1.3.

Assim como fizemos na seção anterior, nossa estratégia de análise foi tomar os livros didáticos como primeiros geradores de discussões, estabelecendo relações, sempre que possível, com trechos das falas dos professores da Educação Básica e de pesquisas. Quando os conteúdos das entrevistas ou as pesquisas foram além do que está discutido nos livros, complementamos as discussões a partir dessas fontes. A estrutura das análises é a mesma daquela ilustrada na Figura 13 e apresentada na seção anterior.

Primeiro momento: dos livros didáticos

Como ponto de partida, buscamos como os livros didáticos: i) tratam as frações e os números decimais; ii) apresentam o conceito de número racional; iii) relacionam suas diferentes representações; iv) tratam as operações entre os racionais; v) consideram diferentes usos dos números racionais em contextos diversos; vi) fazem uso da linguagem matemática.

Chavante (2015a), no livro Matemática – 6º ano, traz a unidade 3 inteiramente voltada para o trabalho com frações e números decimais. A unidade está dividida em: *Capítulo 1– Frações*; *Capítulo 2 – Números decimais*; *Capítulo 3 – Operações com números decimais*.

Na ilustração que apresenta a unidade 3 do livro e na primeira atividade, o autor indica sua busca por mostrar um uso cotidiano para as frações: o marcador de combustível. Outros usos são sugeridos, como as brocas, as jarras graduadas e notícias de jornal.

As frações são apresentadas por Chavante (2015a) como formas de escrever um número: “Nesse capítulo, você vai estudar os conceitos e as diferentes maneiras de representar e operar com números escritos na forma de fração, utilizados em diversas situações do dia a dia” (p. 155).

Na sequência, Chavante (2015a) discute alguns dos diferentes significados para as frações, tal como sugerido por Kieren (1976; 1980). Vejamos as Figuras 16, 17 e 18:

Figura 16: Significado parte-todo

Uma barra de chocolate foi dividida em 24 partes iguais. Depois de serem consumidas 7 partes, a barra ficou como mostra a imagem abaixo. Considerando a barra de chocolate como um inteiro, para representar as partes de chocolate que foram consumidas utilizamos a seguinte fração: Diga aos alunos que foi considerada a barra do chocolate dividida em partes exatamente iguais, o que geralmente não ocorre na realidade.

quantidade de partes consumidas

$\frac{7}{24}$ ← numerador / ← denominador

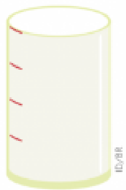
quantidade de partes em que a barra de chocolate foi dividida

Nesse caso, a fração $\frac{7}{24}$ representa a ideia de **parte de um inteiro**.

Fonte: Chavante (2015a, p. 156)

Figura 17: Significado quociente

Também podemos relacionar a fração com o **quociente de uma divisão**. A fração $\frac{4}{4}$, por exemplo, correspondente à quantidade de leite no recipiente ao lado, que representa 1 inteiro, pois $\frac{4}{4} = 1$. Como $4 : 4 = 1$, temos que $\frac{4}{4} = 4 : 4 = 1$. Assim, o traço da fração representa uma divisão.



Fonte: Chavante (2015a, p. 157)

Figura 18: Significado razão

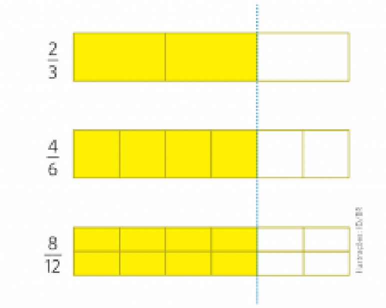
A fração também pode ser utilizada como uma **razão**. No armário representado abaixo, por exemplo, há 10 camisetas, das quais 3 são brancas. Podemos representar a quantidade de camisetas brancas desse armário pela fração $\frac{3}{10}$, ou seja, 3 das 10 camisetas são brancas, ou, ainda, a quantidade de camisetas brancas está na razão de 3 para 10.

Fonte: Chavante (2015a, p. 157)

Não visamos avaliar o livro didático aqui trazido para discussão. Contudo, não podemos deixar de mencionar que $\frac{3}{10}$ não representa a quantidade de camisetas brancas do armário, como o livro sugere. A razão $\frac{3}{10}$ representa a relação entre a quantidade de camisetas brancas (3) e o número total de camisetas no armário (10).

As frações decimais são, também, destacadas por Chavante (2015a) no início do estudo. Após apresentar frações próprias, impróprias e aparentes, o autor trata das frações equivalentes.

Figura 19: Frações equivalentes



Fonte: Chavante (2015a, p. 159)

Com o auxílio da Figura 19, as frações equivalentes são facilmente apresentadas pelas partes pintadas de amarelo. "Dizemos que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são *frações equivalentes*, isto é, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$" (CHAVANTE, 2015a, p. 159, grifos do autor).

A ideia de frações equivalentes permite, então, apresentar uma propriedade importante dos números racionais. Dada uma fração, podemos obter frações equivalentes como apresentado na Figura 20:

Figura 20: Obter frações equivalentes

Fonte: Chavante (2015a, p. 160)

Utilizando representações geométricas, como feito na Figura 19, é possível justificar tais equivalências, o que nos leva a crer que: "Ao multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial" (CHAVANTE, 2015a, p. 160). Esse é o "gancho" para se discutir simplificação de frações e, também, comparação de frações.

Reflexão 18: diferenças evidentes

Na introdução do tema fração, apresentada por Chavante (2015a), podemos perceber as diferenças entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. Enquanto, na Matemática Escolar, uma fração é descrita como uma forma de representar números, na Matemática Acadêmica, as frações são definidas como elementos de um conjunto quociente $K = (A \times A^*)/\sim$, em que A é um anel de integridade e K, então, é um corpo de frações do anel de integridade A.

Não estamos nos referindo apenas a uma diferença na complexidade da abordagem, mas também a uma diferença na natureza do conhecimento. Outro exemplo que explicita o que estamos tratando refere-se à Figura 19; ela cumpre um papel importante na compreensão do estudante do relevante conceito de equivalência de frações e, também, da possibilidade de se "multiplicar em cima e embaixo" pelo mesmo número, diferente de zero. Já o sistema lógico-formal-dedutivo da Matemática Acadêmica indica outro caminho, nada intuitivo. A ideia de equivalência de frações advém do conceito de classes de equivalência, obtidas pela relação de equivalência previamente definida. É essa mesma construção que nos permite enunciar e provar a proposição "se multiplicarmos numerador e denominador de uma fração por um número inteiro não-nulo, *a fração resultante pertence à mesma classe que a primeira*" (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984, grifos nossos). Repare que se trata da mesma afirmação que Chavante (2015a) apresentou, mas por meio do conceito de classe de equivalência, ou seja, mais abstrato e menos intuitivo.

Nesse sentido que concordamos com Moreira e David (2010), pois as lógicas internas das matemáticas são distintas. É claro que as definições e propriedades decorrentes dessas definições da Matemática Acadêmica se relacionam, do ponto de vista matemático, com as descrições e convencimento característicos da Matemática Escolar. Contudo, de que maneira esse modo de pensar se relaciona com o ensino das frações na Educação Básica e/ou com o conhecimento matemático do professor?

Outro destaque que fazemos refere-se ao uso do sinal de igual para representar *frações equivalentes*. Esse aspecto, bastante comum na Matemática Escolar, foi debatido na seção 2.3, *Reflexão 1*.

Na sequência, Chavante (2015a) apresenta as operações de adição e subtração de frações. Primeiro, a adição e a subtração de frações de mesmos denominadores. Com o recurso geométrico de um retângulo dividido em treze partes iguais, o autor mostra que $\frac{5}{13} + \frac{6}{13} = \frac{11}{13}$ e conclui: "Na adição de frações com denominadores iguais, repetimos os denominadores e adicionamos os numeradores" (CHAVANTE, 2015a, p. 167). Aproveitando a mesma situação-problema apresentada, o autor traz a subtração $\frac{13}{13} - \frac{11}{13} = \frac{2}{13}$ e a define do mesmo modo que fizera com a adição.

Para a adição de frações com denominadores diferentes, Chavantes (2015a) apresenta duas estratégias para encontrar frações equivalentes:

i) multiplicando cada fração em cima e embaixo até encontrar frações equivalentes cujos denominadores sejam iguais. Por exemplo, a soma $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$ está representada na Figura 21.

Figura 21: Obter frações equivalentes para somar frações

Fonte: Chavante (2015a, p. 168)

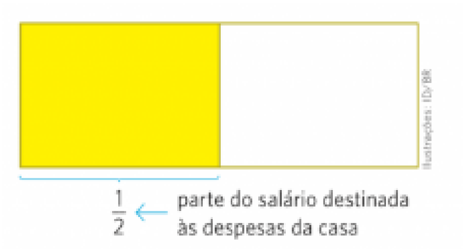
Como $\frac{1}{4}$ é equivalente a $\frac{5}{20}$ e $\frac{3}{5}$ equivalente a $\frac{12}{20}$, tem-se que $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$.

ii) utilizando o mínimo múltiplo comum (mmc), caindo na regra: "Para cada fração, dividimos o mmc obtido pelo denominador, multiplicamos o resultado pelo numerador e obtemos uma fração equivalente à dada inicialmente" (CHAVANTE, 2015a, p. 169).

Para as operações de multiplicação e de divisão de frações, a estratégia é a mesma: introduzir essas operações entre uma fração e um número natural. No caso da multiplicação entre um número natural e uma fração, Chavante (2015a) retoma a ideia da multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Assim, no exemplo apresentado no livro, $\frac{1}{6} + + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 4.\frac{1}{6} = \frac{4}{6}$. Dito isso, o autor conclui que na "multiplicação de um número natural por uma fração, multiplicamos o número natural pelo numerador e mantemos o denominador” (CHAVANTE, 2015a, p. 172).

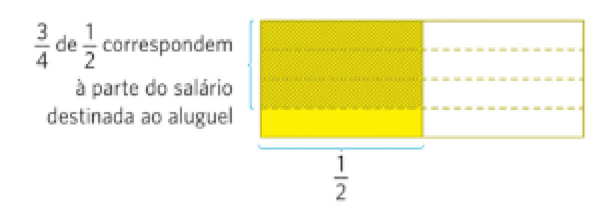
A multiplicação entre frações é apresentada com o recurso da representação geométrica. No contexto da situação-problema proposta, quando a metade do salário de uma pessoa destina-se aos gastos da casa, sendo que ¾ desses gastos corresponde ao aluguel, a fração do salário que representa o aluguel pode ser encontrada como apresentada nas Figuras 22 e 23:

Figura 22: Metade do salário



Fonte: Chavante (2015a, p. 172)

Figura 23: ¾ da metade do salário



Fonte: Chavante (2015a, p. 173)

Pela região hachurada, é possível concluir que $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ é $\frac{3}{8}$. Além disso, pode-se calcular $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ fazendo $\frac{3}{4}.\frac{1}{2}$, obtendo $\frac{3}{8}$ como resultado. Assim, pode-se concluir que, na “multiplicação de duas ou mais frações, o resultado tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores” (CHAVANTE, 2015a, p. 172).

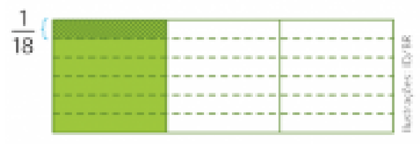
Em seguida, o autor apresenta a divisão entre uma fração e um número natural e entre um número natural e uma fração. No primeiro caso, a situação-problema sugere que $\frac{1}{3}$ de um estoque de soja seja armazenado em 6 vagões de um trem. Para determinar qual a fração da soja estocada será colocada em cada vagão, o autor sugere a divisão do todo em três partes, como aparece na Figura 24.

Figura 24: $1/3$ da soja estocada

Fonte: Chavante (2015a, p. 173)

Em seguida, divide-se cada uma das partes em 6 partes iguais, chegando à fração $\frac{1}{18}$, como indicado na Figura 25:

Figura 25: $1/18$ da soja estocada será transportada em cada vagão

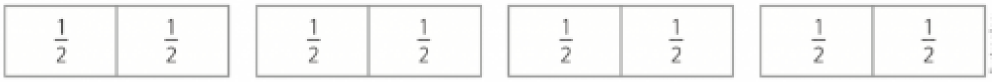


Fonte: Chavante (2015a, p. 173)

O segundo caso explicita o modo de pensar a divisão como a operação inversa da multiplicação. A situação-problema envolve dividir $4\ m$ de barbante em partes iguais de $\frac{1}{2}\ m$ e determinar quantos pedaços de $\frac{1}{2}\ m$ obtém-se. Nesse caso, o autor encaminha a solução do seguinte modo: "precisamos calcular quantas vezes $\frac{1}{2}\ m$ cabe em $4\ m$".

Considerando, inicialmente, $1\ m$ de barbante e estendendo a ideia para os $4\ m$, chega-se na representação da Figura 26:

Figura 26: Divisão entre número natural e fração



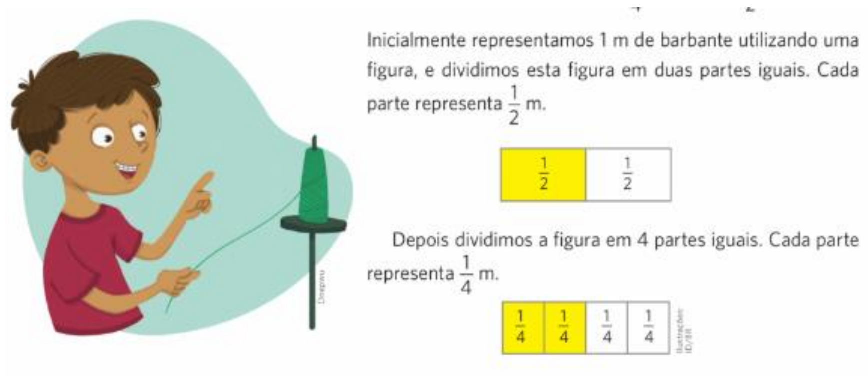
Fonte: Chavante (2015a, p. 174)

Assim, $4 : \frac{1}{2} = 8$.

Para apresentar a divisão entre frações, Chavante (2015a) explora o mesmo problema do barbante, mas agora pretende-se providenciar pedaços de barbante de $\frac{1}{4}\ m$ utilizando um pedaço de $\frac{1}{2}\ m$**.** Como obter?

Novamente, a divisão como a operação inversa da multiplicação: "quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em $\frac{1}{2}$" (CHAVANTE, 2015a, p. 174). A explicação está na Figura 27:

Figura 27: Divisão de frações



Fonte: Chavante (2015a, p. 174)

Com o auxílio da Figura 27, o autor chega à conclusão que $\frac{1}{2}:\frac{1}{4} = 2$.

Feita essa apresentação da divisão de frações, Chavante (2015a) pretende chegar à tradicional regra para efetuar tal operação (na divisão de frações, mantem-se a primeira fração e a multiplica pelo inverso da segunda). Para tanto, o autor define *inverso*: "Dois números não nulos são inversos quando o produto entre eles é igual a um" (p. 175). Com isso, descreve o método para se obter a inversa de uma fração: "Para obter a inversa de uma fração, invertemos o numerador e o denominador" (p. 175). Agora sim, o autor já tem elementos suficientes para concluir que "Na divisão de frações, repetimos a primeira fração e a multiplicamos pelo inverso da segunda fração. Esse procedimento também é válido para divisões de um número natural e de uma fração por um número natural" (p. 175).

Para chegar a essa regra, além de definir inverso e apresentar a técnica para obter frações inversas, Chavante (2015a) precisou apresentar alguns exemplos que mostram que dividir um número por uma fração é o mesmo que multiplicar pelo inverso dela. "Dividir 4 por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que multiplicar 4 por 2" (p. 175).

Reflexão 19: operações com frações e a propriedade do fechamento

Há alguns pontos relevantes para a nossa discussão nessa apresentação das operações com frações. Novamente, a representação geométrica é um forte recurso para introduzir e convencer os estudantes sobre a validade das regras das operações. Não estamos questionando a abordagem do livro, mesmo porque concordamos com ela. Além disso, não é nosso objetivo analisar o livro e suas estratégias, mas, sim, fazer discussões acerca do conhecimento matemático necessário ao professor a partir dele.

Por se tratar de um livro para o 6º ano do Ensino Fundamental, Chavante (2015a) busca apresentar as operações com frações da maneira mais intuitiva possível. Isso pode ser percebido quando tenta relacionar a multiplicação de um número natural com uma fração, tomando-a como uma soma de parcelas iguais, ou apresentando a divisão de frações, utilizando as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, cujo resultado (de $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$) é um número inteiro, o que facilita sua compreensão e visualização na Figura 27 apresentada.

Contudo, é possível notar que, após a apresentação das operações de frações feita no 6º ano, esse assunto não é mais retomado como foco de estudo pelos estudantes do Ensino Fundamental. No livro para o 7º ano, por exemplo, quando define número racional e suas operações, Chavante (2015b) afirma logo de início que “Nas operações com números racionais, utilizamos o que aprendemos com as operações envolvendo números na forma fracionária, números na forma decimal e números inteiros” (p. 50). Quer dizer, o que fora apresentado no 6º ano é tomado como sabido pelos estudantes nos próximos anos e, portanto, as lacunas (possivelmente) produzidas por uma abordagem mais intuitiva talvez não sejam mais retomadas ao longo de toda a Educação Básica. Vamos tomar os dois casos acima citados (multiplicação entre número natural e fração; e divisão entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$). Se é possível pensarmos $4.\frac{1}{6}$ como a soma de 4 parcelas iguais a $\frac{1}{6}$, o mesmo poderia ser feito para $\frac{1}{6}.4$? O estudante que compreende $4.\frac{1}{6}$ também compreende $\frac{1}{6}.4$?

No segundo caso, o da divisão entre as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, seria o mesmo se tivéssemos as frações $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$, cujo resultado não é um inteiro e sua visualização geométrica não é tão direta?

Os dois casos, menos intuitivos, não são discutidos no livro. Não estamos, de modo algum, sugerindo que se altere a abordagem no 6º ano do Ensino Fundamental.

Estamos refletindo sobre a necessidade de serem retomadas as explicações em outros momentos do período escolar, quando há a possibilidade de se trabalhar em um campo mais abstrato.

Nesse sentido, o HCK é o domínio do MKT que permite ao professor perceber que o que está sendo ensinado sobre frações no 6º ano está conectado a um território disciplinar mais amplo e que novos elementos podem ser inseridos em anos posteriores a fim de retomar o ensino das operações com frações, tornando mais claras as justificativas para as validades das regras anteriormente aprendidas. Um exemplo, a nosso ver, está na possibilidade de se estabelecer relações entre números racionais e equações, propondo uma alternativa para se justificar as operações com frações, como detalhado na *Reflexão 5*.

Outro ponto que gostaríamos de ressaltar aqui se refere à propriedade de fechamento de $\mathbb{Q}$ para as operações de adição e multiplicação. Quando é apresentada a multiplicação de frações, por exemplo, Chavante (2015a) considera que o resultado tem como numerador o produto dos numeradores e como denominador o produto dos denominadores, isto é, o autor assume, implicitamente, que o resultado é uma fração, pois possui numerador e denominador. Isso parece natural, mas sempre acontece dessa maneira? Todo conjunto é fechado para a multiplicação ou para a adição?

Tomemos o seguinte caso: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Escrito dessa forma compactada e omitindo o passo a passo da resolução, temos que a adição entre as frações resultou em um número inteiro. Obviamente, podemos dizer que 1 pode ser escrito na forma de fração, mas isso será discutido na sequência. Nosso ponto é: será a discussão sobre o fechamento relevante para o aprendizado do estudante e, por isso, relevante para a formação do professor? Sugerimos que sim, é necessário aprofundar esse conhecimento matemático para o professor, uma vez que nem todos os conjuntos abordados na Educação Básica são fechados para as operações usuais. Basta tomar os elementos π e $-\pi$ do conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais e ver que $\pi+(-\pi)=0$, e 0 não é irracional; ou $\sqrt{2}\in\mathbb{I}$ e ver que $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$, e 2 também não é irracional. Entendemos que destacar essa distinção entre os conjuntos dos números racionais e irracionais por meio da propriedade do fechamento seja, também, um aspecto favorável à formação matemática do professor. Como assegurar o fechamento de $\mathbb{Q}$ para as operações de adição e multiplicação?

Retomando a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Se fizermos passo a passo, temos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$. Isto é, utilizamos o fato de que a fração $\frac{2}{2}$ é equivalente à fração $\frac{1}{1}$ e, neste momento, assumimos que $\frac{1}{1}$ é o mesmo que 1. Na Matemática Acadêmica, essa passagem de $\frac{1}{1}$ ser o mesmo que 1 é explicada por um isomorfismo de anéis, como comentado na seção anterior e brevemente discutido na *Reflexão 6*. Na Matemática Escolar, evidentemente, não cabe essa explicação via isomorfismo. Contudo, é preciso atenção, uma vez que a passagem $\frac{a}{1} = a$ é tomada como natural quando se assume que "6 é o inverso de $\frac{1}{6}$ e vice-versa" (CHAVANTE, 2015a, p. 175), pois, para se obter a inversa de uma fração, "invertemos o numerador e o denominador" (p. 175). Ou seja, $\frac{1}{6}$ é o inverso de 6, já que é resultado da inversão do numerador e denominador da fração $\frac{6}{1}$.

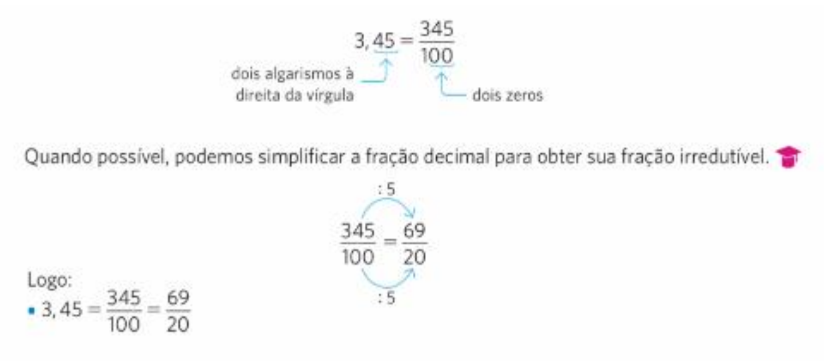
Ainda no livro para o 6º ano, após discursar sobre as frações, Chavante (2015a) as relaciona com a noção de porcentagem: "A relação 10 em cada 100 pode ser representada por uma fração decimal cujo denominador é igual a 100, ou seja, $\frac{10}{100}$. Essa fração pode ser escrita na forma de porcentagem, ou seja, 10%, que se lê 'dez por cento'" (p. 176). A mesma aproximação pode ser percebida no Capítulo 9 do mesmo livro, quando apresenta os números decimais, buscando "estabelecer relações entre esses números e as frações decimais" (p. 183). Vimos, ao longo da história da matemática, que essa relação trouxe grandes avanços para a matemática. Em sua entrevista, o professor Roberto destacou esse como o aspecto central no ensino dos números racionais e, também, na formação de professores:

Roberto: *Eu acho que essa associação, essa conversão entre diferentes registros de representação, isso não foi trabalhado comigo na faculdade, isso não foi trabalhado comigo no Ensino Médio, eu não tinha esse pensamento. Esse pensamento eu fui criando por conta própria, na faculdade já, e eu acho que isso é muito falho. Enquanto a universidade não fizer esse trabalho de mostrar que a representação de número fracionário, pode ser número decimal, pode ser uma porcentagem... sabe o que acontece? Isso eu não vi na faculdade, mas um professor de conjuntos poderia ter falado para mim. Ele pressupõe que eu sei.*

Essa aproximação parece ser uma característica do livro *Matemática*, de Chavante (2015a). Os números decimais são definidos, por Chavante (2015a), como números com vírgula e aparecem em situações cotidianas, como em placas de trânsito para delimitar a altura máxima de um veículo ou em preços de combustíveis. Os décimos, centésimos e milésimos são apresentados em comparação com as frações decimais $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$, respectivamente. As moedas de 1 centavo, 10 centavos e 1 real são utilizadas para abordar o tema.

Há seções específicas para se tratar da transição das frações decimais para os números decimais e dos números decimais para as frações decimais. Nesses casos, a transição entre as diferentes representações é trabalhada e a conexão entre o número de casas à direita da vírgula na representação decimal[63] e o número de zeros no denominador de base 10 é estabelecida. “De maneira prática, ao transformar um número decimal em fração decimal, o numerador será o número decimal sem a vírgula, e o denominador será uma potência de base 10” (CHAVANTE, 2015a, p. 187). A Figura 28 ilustra essa conexão:

Figura 28: Relação entre as representações decimal e fracionária de um número



Fonte: Chavante (2015a, p. 187)

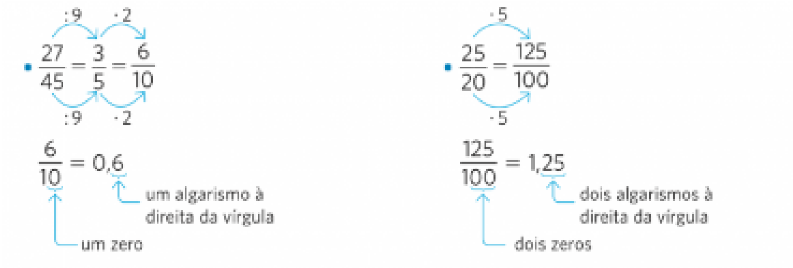
De modo parecido, Chavante (2015a) apresenta o procedimento contrário, isto é, como escrever uma fração decimal na forma de número decimal.

> De maneira prática, para representar uma fração decimal na forma decimal, inicialmente obtemos, se necessário, a fração decimal equivalente. Depois, escrevemos o numerador da fração decimal e inserimos a vírgula para separar a parte inteira da decimal, de maneira que a quantidade de algarismos à direita seja a mesma que a quantidade de zeros do número que aparece no denominador da fração decimal. (CHAVANTE, 2015a, p. 188).

A Figura 29 ilustra esse caso:

[63] Nesse contexto do 6º ano, Chavante (2015a) está considerando a representação decimal *finita* de um número, isto é, uma representação na forma decimal com uma quantidade finita de casas decimais. Os casos das representações decimais infinitas (periódicas e não periódicas) são apresentadas posteriormente.

Figura 29: relação entre as representações decimal e fracionária de um número



Fonte: Chavante (2015a, p. 188)

Trouxemos essa discussão sobre as diferentes representações e a transição entre elas, pois a abordagem de Chavante (2015a) vai ao encontro daquela sugerida pelo professor Roberto, ratificando a fala do professor, que também se aplica às operações, como pode ser observado neste outro trecho da entrevista:

Roberto: *[...] eu questionava assim [...]: quanto dá um meio mais um quarto? E ele respondia 0,75 de cabeça, na forma decimal. Por que isso? Porque no país dele as moedas são... . Então, isso falta. Essa troca no Brasil falta. Porque você vê mais facilidade do aluno em número decimal toda a vez que você começa a conversar com ele sobre dinheiro. Você fala em dinheiro, o cara associa ao cotidiano. "Você está devendo R$ 3,15 na cantina, você está com 4 reais no bolso". O cara entende por que é que não vai colocar o 4 lá no centésimo, por que ele vai colocar o quatro na unidade e tal. Ele entende. Mas por quê? Porque esse é o cotidiano dele. E eu acho que isso é algo que falta muito. É uma associação na sociedade como um todo. A moeda de 25 centavos americana é quarter dólar. A moeda de 50 centavos, half dólar. [...] Então, se o aluno conseguisse pensar de forma fracionária e responder de forma decimal, associando as duas coisas, seria o ideal. A gente tenta trabalhar isso, mas o aluno acaba vendo isso só em sala de aula.*

Sem entrar no mérito do uso social das frações e dos decimais, destacamos a atenção dada à transição entre as representações, inclusive nas operações. O tratamento de Chavante (2015a) para as operações vai no mesmo caminho, como pode ser observado na Figura 30, quando o autor utiliza dois métodos para adicionar números decimais: um utilizando frações decimais e outro utilizando o algoritmo, conhecido desde a adição de números naturais.

Figura 30: Adição de números decimais finitos

- Utilizando frações decimais

$$29{,}58 + 17{,}81 = \frac{2\,958}{100} + \frac{1\,781}{100} = \frac{2\,958 + 1\,781}{100} = \frac{4\,739}{100} = 47{,}39 \rightarrow \text{R\$ } 47{,}39$$

- Utilizando o algoritmo

Inicialmente, colocamos vírgula embaixo de vírgula; depois, adicionamos centésimo com centésimo, décimo com décimo, unidade com unidade, e assim por diante.

$$\begin{array}{rrrr} \text{D} & \text{U} & \text{d} & \text{c} \\ {}^{1}2 & {}^{1}9, & 5 & 8 \\ +\ 1 & 7, & 8 & 1 \\ \hline 4 & 7, & 3 & 9 \end{array} \rightarrow \text{R\$ } 47{,}39$$

Observe que, ao somarmos 5 décimos com 8 décimos, obtemos 13 décimos. Assim, mantemos o 3 na casa dos décimos e trocamos 10 décimos por uma unidade.

Portanto, Rafaela vai pagar R$ 47,39 pelos dois livros.

Fonte: Chavante (2015a, p. 188)

Não vamos, neste momento, detalhar as demais operações (multiplicação e divisão) envolvendo os números decimais abordadas por Chavante (2015a). A transição entre as representações, apontada pelo professor Roberto e corroborada pelo autor, nos dá elementos para uma reflexão que será feita na sequência. Antes disso, vamos prosseguir com a apresentação do livro de Chavante (2015a) até chegar em sua definição de números racionais, feita nos livros para os 7º e 8º anos.

No livro para o 7º ano, após tratar dos números inteiros, Chavante (2015b) já tem elementos que o possibilitam, no *Capítulo 3 – Números Racionais*, definir os números racionais como "Todo número que pode ser escrito como quociente de dois números inteiros, com o divisor diferente de zero" (p. 44). Com isso, tanto os números escritos na forma de fração, como os decimais finitos e as porcentagens satisfazem a definição de número racional como um quociente de números inteiros.

Além de "incorporar" os diferentes significados das frações destacados por Chavante (2015a), a definição de números racionais trazida por Chavante (2015b) agrega outro significado ao representá-los na reta numérica, muitas vezes chamado de medida.

Para completar a descrição dos números racionais, é preciso tratar dos números decimais infinitos periódicos. Apesar de definir dízima periódica já no livro para o 6º ano (essa definição é feita em um exercício proposto), Chavante (2015b) retoma esse conceito com mais atenção. Dízimas periódicas, período e fração geratriz são trabalhados e as relações entre as representações fracionária e decimal se expandem para outros casos que não apenas as frações decimais e os decimais finitos.

Completada a descrição dos números racionais, suas operações são devidamente apresentadas, mas de maneira mais breve, uma vez que as operações entre frações e entre números decimais já foram apresentadas em Chavante (2015a).

Chavante (2015c), com um capítulo exclusivamente destinado aos números, dedica o *Capítulo 1 – Conjuntos Numéricos* a retomar os já conhecidos números naturais, inteiros e racionais, agora os tratando em termos de conjuntos numéricos, e, principalmente, introduzir os números irracionais e os reais. Nesse momento, duas "novas" definições envolvendo os números racionais são trazidas. A primeira diz respeito ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais: "Os números obtidos por meio da divisão de dois números inteiros formam o *conjunto dos números racionais*, que podemos indicar com o símbolo $\mathbb{Q}$" (CHAVANTE, 2015c, p. 11, grifos do autor). A outra parece chegar à definição como usualmente é apresentada: "Os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros, com $b \neq 0$" (p. 12). Notemos que, nesta última definição, os termos "quociente" e "divisão" não aparecem mais e dão lugar ao termo "escritos na forma $\frac{a}{b}$".

Reflexão 20: a transição entre as representações e o conhecimento matemático para além das regras

Historicamente, vimos que os egípcios, há milhares de anos, já utilizavam as chamadas frações comuns e efetuavam cálculos sofisticados com frações unitárias. Vimos, também, que, no final do século XVII, com Simon Stevin e a criação de uma notação para as frações decimais, foram possíveis avanços nos cálculos, uma vez que as operações com os números decimais eram exatamente como se estivessem usando números inteiros.

Pela história, pelo livro de Chavante (2015a) e pela fala do professor Roberto, percebemos as contribuições de se transitar entre a forma fracionária e a forma decimal dos números racionais.

Contudo, de que modo trabalhar a transição entre essas representações na formação do professor, ampliando seu conhecimento matemático para o ensino dos números racionais?

Existem vários aspectos a serem tratados aqui, mas precisamos focar em nosso objetivo, que visa compreender de que modo certas questões que se colocam na prática docente ao trabalhar com os números racionais podem ser favorecidas com o conhecimento dos significados dos números racionais na Matemática Acadêmica. Nesse sentido, queremos problematizar como a Matemática Acadêmica favorece (ou não) a compreensão da relação entre essas diferentes representações.

Quando os números racionais são entendidos como classes de equivalência de pares de números inteiros ou quando dizemos que $\mathbb{Q}$ é o corpo das frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}$, a ideia da fração é central. Nesse contexto da Matemática Acadêmica, o conjunto quociente $K = (A \times A^*)/\sim$ é construído, da forma como o é, justamente para “dar conta” de um objeto matemático já conhecido previamente, a fração (novamente, temos a questão da intencionalidade da Matemática Acadêmica, levantada na *Reflexão 7*).

Feita a construção de $\mathbb{Q}$, as operações definidas sobre esse conjunto envolvem, como vimos, a representação fracionária. Parece-nos, então, que as construções formais do conjunto dos números racionais não favorecem o trabalho com a representação decimal para além do fato de que são válidas as propriedades de corpo dos números racionais independentemente das representações.

Mas, escrever um número na forma fracionária em sua representação decimal ou o contrário aparenta ser um conhecimento necessário ao professor para que faça uso desses ganhos[64] propiciados pela transição entre as representações.

Chavante (2015b) apresenta exemplos que induzem o estudante a perceber uma regra para escrever a fração geratriz de um número decimal infinito periódico, como pode ser visto na Figura 31, abaixo:

Figura 31: Maneira prática para obter a fração geratriz em alguns casos

Todo número racional pode ser representado na forma decimal por um número com finitas casas decimais ou por uma dízima periódica. Observe os números racionais a seguir:

$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$ $\quad \frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$ $\quad \frac{3}{9} = 0{,}333\ldots$ $\quad \frac{4}{9} = 0{,}444\ldots$ $\quad \frac{5}{9} = 0{,}555\ldots$

Note que em todos eles o denominador da fração é igual a 9, e o número que se repete na representação decimal é igual ao numerador da fração, que possui apenas um algarismo.

A forma fracionária de uma dízima periódica é chamada **fração geratriz**.

- **Escreva a forma fracionária irredutível da dízima 0,888...** $\frac{8}{9}$

Agora, observe as regularidades presentes nos números racionais a seguir.

$\frac{16}{99} = 0{,}1616\ldots$ $\quad \frac{39}{99} = 0{,}3939\ldots$ $\quad \frac{87}{99} = 0{,}8787\ldots$

$\frac{25}{99} = 0{,}2525\ldots$ $\quad \frac{46}{99} = 0{,}4646\ldots$ $\quad \frac{91}{99} = 0{,}9191\ldots$

- **Escreva a forma fracionária da dízima 0,606060...** $\frac{60}{99}$

Essa é apenas uma maneira prática de determinar as frações correspondentes a dízimas periódicas com parte inteira nula e períodos de um ou dois algarismos.

Fonte: Chavante (2015b, p. 46)

É evidente que um professor precisa conhecer maneiras de se justificar tal regra, para que consiga responder aos questionamentos dos estudantes e, também, para que tenha confiança de extrapolar o uso pontual da regra apresentada naquele contexto (por

[64] Com ganhos estamos nos referindo a situações em que pode ser mais vantajoso se trabalhar com uma ou outra representação, como é o caso das operações, da comparação entre números racionais para identificar maior ou menor, ou, até mesmo, para se trabalhar com número irracionais.

exemplo, no caso em que a parte inteira não é nula). Esse caso da procura de uma fração geratriz que representa uma dízima periódica, é bastante elucidativo no que se refere a saber *mais* matemática e ter consciência do contexto em que uma justificativa é mais ou menos fértil do que a outra. Vamos explorar um caso bastante curioso e discutido por algumas pesquisas (ELIAS; GERETI; SAVIOLI, 2015; PENTEADO, 2004), que é a afirmação "$0{,}999\ldots = 1$", um fato pouco intuitivo e que nem sempre é compreendido por estudantes e professores. Separamos quatro maneiras distintas de se justificar tal afirmação.

i) A abordagem tomada por Chavante (2015b) parece-nos adequada ao 7º ano do Ensino Fundamental, uma vez que alguns exemplos são suficientes para que os estudantes se convençam da maneira prática para se obter frações geratriz proposta pelo livro. Tal abordagem serviria, inclusive, para convencer os estudantes da afirmação $0{,}999\ldots = 1$, uma vez que, seguindo seu raciocínio apresentado na Figura 31, temos que $0{,}999\ldots = \frac{9}{9} = 1$. Trata-se, como o próprio autor afirma, de uma maneira prática de se encontrar a fração geratriz, mas que nada justifica;

ii) Niven (1984) apresenta outra justificativa, que talvez possa convencer em um grau maior do que a anterior, mas que não deixa de causar estranhezas. Sabendo que a representação decimal infinita da fração $\frac{1}{3}$ é $0{,}3333\ldots$, isto é, $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, se multiplicarmos ambos os lados dessa igualdade por 3, temos que $1 = 0{,}9999\ldots$. Apesar de parecer evidente que $3\times 0{,}3333\ldots = 0{,}9999\ldots$, será que essa multiplicação é compreendida pelos estudantes? Penteado (2004) questiona essa abordagem, quando pergunta: "Como se opera com representações infinitas? É sempre possível?" (p. 85). E afirma que essa "tentativa de explicação é falha e insuficiente" (p. 85), apesar de ser utilizada por Niven (1984) e outros autores, inclusive no Provão para Licenciatura e Bacharelado em Matemática do ano de 2002. O procedimento de fazer $3\times 0{,}3333\ldots = 0{,}9999\ldots$ pode levar o estudante a crer que sempre é possível operar com números em sua representação decimal infinita (PENTEADO, 2004);

iii) uma terceira justificativa que consideramos usual e que também é apresentada por Niven (1984) é aquela que considera a igualdade:

$$x = 0{,}9999\ldots \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os lados por 10, temos:

$$10x = 9{,}9999\ldots.$$

$$10x = 9 + 0{,}9999\ldots \qquad (2)$$

Subtraindo a equação (1) de (2), temos:

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

Portanto, $1 = 0{,}9999 \ldots$.

Entendemos que essa seja uma justificativa plausível para o que se pretende, mas também traz estranhezas consigo. Ao multiplicarmos $0{,}9999 \ldots$ por 10, caímos em $9{,}9999 \ldots$ e "acreditamos" que a quantidade de nove à direita da vírgula é a mesma que a quantidade de nove em $0{,}9999 \ldots$, pois, ao subtrairmos $0{,}9999 \ldots$ de $9{,}9999 \ldots$ e zeramos todas as casas decimais, concluindo que $9{,}9999 \ldots - 0{,}9999 \ldots = 9$.

iv) a quarta e última justificativa apresentada aqui envolve os conceitos de série geométrica e convergência, que se relacionam com a noção de Progressão Geométrica (PG), tratada no Ensino Médio. Nesse contexto (do Ensino Médio), a soma de uma PG finita (soma essa denotada por S_n) é dada por:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Em que a é o primeiro termo da PG, r é a razão e n é o número de termos tomados na PG finita.

No caso do nosso exemplo, temos:

$$\begin{aligned} 0{,}9999 \ldots &= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \cdots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots \\ &= \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots}_{Soma\ de\ uma\ PG\ infinita} \end{aligned}$$

Assim, como $a = \frac{9}{10}$ e $r = \frac{1}{10}$. Na fórmula da soma de uma PG finita, se quisermos saber a soma dos n primeiros termos, temos:

$$S_n = \frac{\frac{9}{10} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{9.\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{10\left(\frac{10-1}{10}\right)} = \frac{9\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{9} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Ainda no contexto do Ensino Médio, a ideia da soma dos n primeiros termos pode ser estendida para o caso da soma dos termos de uma PG infinita, mas usa-se a noção de limite, mesmo que intuitivamente. Para tanto, é preciso avaliar os valores da razão r. Tomando esses cuidados, chega-se à fórmula para a soma de uma PG infinita:

$$S = \frac{a}{1 - r} \ (se\ |r| < 1)$$

Essas noções que envolvem a soma de uma PG infinita são discutidas dentro de um contexto mais amplo, de séries e sequências, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise. Vejamos.

Retomemos o fato que:

$$0{,}9999\ldots = \underbrace{\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots}_{Soma\ de\ uma\ PG\ infinita}$$

Isso pode ser entendido como uma soma de uma sequência infinita (a_n), cujo termo geral é $a_n = \frac{9}{10^n}$. A sequência seria:

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10^2}, \frac{9}{10^3}, \ldots, \frac{9}{10^n}\ \ldots\right)$$

A soma dos termos de uma sequência infinita como essa é chamada de série infinita (ou apenas série). A $n - ésima$ soma parcial dessa série (conhecida como série geométrica) é:

$$S_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{10}$ (que é a razão da série geométrica), temos:

$$\frac{S_n}{10} = \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}}$$

Assim, fazendo $S_n - \frac{S_n}{10}$, temos:

$$S_n - \frac{S_n}{10} = \frac{9}{10} - \frac{9}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9S_n}{10} = \frac{9}{10} - \frac{9}{10^{n+1}}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Se fizermos $n \to \infty$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = 1$$

Assim, a soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = 1$

Concluindo:

$$0{,}9999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \cdots = 1$$

Com o recurso das noções de série geométrica, convergência de séries e de limite, provamos, de modo mais formal, a igualdade pretendida. E a generalização do caso:

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ $(|r| < 1)$. Se $|r| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

Trouxemos as quatro justificativas acima para apontar um caso do que buscamos para o conhecimento matemático do professor. As justificativas diferem entre si em nível de complexidade, mas entendemos que cada uma delas tenha um contexto no qual seja mais adequada sua utilização. Obviamente, a quarta justificativa não serve para os propósitos do 6º ano, mas se o professor a conhece e sabe das limitações e dificuldades das demais justificativas, talvez se sinta mais confiante para tratar desse tema com seus estudantes.

Ficou evidente que a justificativa quatro utilizou conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Real. Quando propusemos investigar de que modo a estrutura de corpo favorece o conhecimento matemático do professor acerca dos números racionais, não excluímos outras áreas da Matemática Acadêmica nesse papel. Pelo contrário, ao colocarmos o foco nos conceitos da Matemática Escolar para buscarmos, na Matemática Acadêmica, situações em que esta pode contribuir para o ensino e a aprendizagem daquela, estamos considerando todas aquelas disciplinas de conteúdo matemático veiculadas na Licenciatura em Matemática.

A Álgebra Abstrata não contempla todas as discussões matemáticas que envolvem os números racionais. Ao nos preocuparmos com o HCK envolvendo esses números, precisamos, necessariamente, compreender como os racionais se conectam com os irracionais e, consequentemente, com os reais. Se, por um lado, a construção formal dos números racionais por classes de equivalência é feita a partir das operações já conhecidas para os números inteiros, por outro, a natureza da construção dos números reais é bem diferente, uma vez que necessita de noções da Análise Real, como a de limite. Victor, ao tratar das passagens de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$, comenta essa distinção:

Victor: *[...] De $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não é uma passagem algébrica, é uma passagem topológica, porque ela é baseada na noção de completamento, entendeu? Só com estruturas algébricas, partindo de $\mathbb{Q}$, você não obtém $\mathbb{R}$. Porque, por exemplo, π, que é um número transcendente, não é gerado de nenhuma operação algébrica com racionais. A partir dos racionais só pode obter π por meio de um processo de limite, entendeu? [...] essa passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ ela é epistemologicamente diferente. [...] $\mathbb{R}$ não é construído com base em nenhuma operação definida em $\mathbb{Q}$. Ele é construído por base algum processo de* *aproximação infinita, necessariamente. Ou sequência de Cauchy ou cortes de Dedekind, tudo isso são processos de aproximação infinita... Isso é uma coisa que eu acho que é uma coisa importante para o professor. Porque é uma coisa de natureza epistemológica diferente. E isso torna difícil né, o conceito de número real*.

De volta à discussão sobre a igualdade $0,999\ldots = 1$, outras problematizações podem ser feitas, de modo que inclua os irracionais. Por exemplo, se $0,999\ldots$ e 1 forem diferentes, então deve haver um número real entre esses eles. Neste caso, qual seria a média aritmética entre esses dois números ($0,999\ldots$ e 1)? Trata-se de uma problematização interessante para se trabalhar na formação do professor, ampliando seu conhecimento matemático para o ensino dos números racionais.

Segundo momento: das entrevistas

Das entrevistas dos professores da Educação Básica, destacamos os seguintes pontos que consideramos essenciais: i) a professora Márcia ressalta a *linguagem* utilizada pelo professor como um dos grandes problemas na aprendizagem da matemática e, em particular, dos números racionais; ii) o professor Roberto, como já evidenciamos algumas vezes, considera a transição entre as diferentes *representações* dos números racionais; iii) os professores Paulo e Carla frisam em suas falas a questão do *mecanicismo* presente no ensino dos números racionais.

Assim, a linguagem, a transição entre as representações e o mecanicismo são os temas centrais das entrevistas com os professores da Educação Básica que discutiremos a partir de agora.

Em Elias, Savioli e Ribeiro (2016), analisamos algumas das considerações feitas pela professora Márcia e percebemos como o HCK permeou toda sua fala sobre os números racionais. O primeiro caso que trazemos refere-se ao cuidado com o uso da expressão "multiplicar cruzado", utilizada para ensinar a regra da divisão de frações ou para a regra de três.

Márcia: *[...] eu acho que um dos maiores problemas da Matemática, das dificuldades dos alunos, não só em números racionais, mas em tudo, mais em números racionais, é a linguagem do professor. De começar a usar aquilo que te falei...a divisão de fração, multiplica cruzado. Não! Jamais um professor vai falar isso! E eu acho que quem vai falar isso é um licenciado, como ele já percebeu que multiplica cruzado, ele fala: "já vou contar para o aluno que é multiplicar cruzado". Tentando facilitar, porque ele está enxergando só aquela série que ele está dando aula. Por exemplo, ele [o professor] está no sexto ano ele está* *enxergando o sexto ano. Então, para ele, se um aluno do sexto ano conseguir naquele momento dividir frações e ele foi treinado para isso naquele momento, ele vai fazer. Só que a apropriação desse conteúdo? E o entendimento desse conteúdo lá na frente para ele usar? Pode ser que confunda e confunde. Isso é fato. Agora o professor que dá aula para o sexto mas também tem a visão de como vai usar isso no terceiro. [...] Por exemplo, numa regra de três, essa coisa do multiplica cruzado você faz as duas coisas. Na composta, por exemplo, quando está na direita, o lado de cá da igualdade você vai multiplicar certinho e quando tiver a fração do lado de lá do igual aí seria o cruzado, mas não tem que falar isso. Tem que falar que esse está dividindo, vai passar multiplicando para o outro lado. Sempre isso! Se o aluno sozinho perceber que esse sinal vai virar um multiplicar cruzado, mas ele fez porque ele não quer pensar. Mas não a gente falar isso para o aluno.*

A professora Márcia destaca o fato de que o professor, muitas vezes, está preocupado com o ensino de certo conteúdo naquele momento específico e, sem se preocupar com a aprendizagem futura da matemática, explica por meio de regras que ele mesmo já percebeu como válidas, mas o estudante ainda não.

Em um dos contextos levantados, uma regra de três composta $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} . \frac{e}{f}$, a professora chama a atenção para o fato de que em um dos lados da equação $\left(\frac{c}{d} . \frac{e}{f}\right)$ a multiplicação é feita numerador com numerador e denominador com denominador, mas no momento em que se passa a considerar a fração do lado esquerdo da igualdade $\left(\frac{a}{b} = \frac{m}{n}\right)$, multiplica-se "cruzado". Contudo, essa regra pode gerar confusão entre os estudantes. A professora alerta para o cuidado com a linguagem, e sugere "Tem que falar que esse está dividindo, vai passar multiplicando para o outro lado".

Uma das observações feitas por Wasserman (2014) refere-se justamente à percepção do professor sobre a relação entre o uso apropriado da linguagem e a aprendizagem do estudante. Por meio de pré e pós-testes aplicados aos professores da Educação Básica participantes de sua pesquisa, Wasserman (2014) percebeu uma alteração na valorização de um vocabulário específico relacionado às propriedades aritméticas, como é o caso do elemento inverso, implicitamente apontado pela professora Márcia. Wasserman (2014) notou que a abordagem utilizando a resolução de uma equação linear simples, detalhando o passo a passo e as propriedades envolvidas nessa resolução, promoveu uma mudança na percepção dos professores, que passaram a considerar o uso mais frequente de um vocabulário específico para essas propriedades em seus ensinamentos. Contudo, isso não significa, alerta o autor, ao passo que os professores indicaram maior frequência no uso do vocabulário formal, simplesmente utilizá-lo não necessariamente melhora o ensino, especialmente se a terminologia se tornar desprovida de significado.

Outro aspecto levantando pela professora Márcia, que se refere diretamente aos apontamentos de Wasserman (2014) e, obviamente, ao nosso trabalho, trata-se da expressão, equivocada segundo a professora, “passa para o outro lado, muda de sinal”.

Márcia: *[...] Vamos supor que eu tivesse isso aqui:* $-2x+4=0$*, porque eu quero abordar esse* $-2x$ *aqui. Fica* $-2x=-4$*. Aí um erro muito comum dos alunos é passar esse* -2 *como* 2*....*

Pesquisador*: porque ele passou para o outro lado e também troca o sinal. É isso?*

Márcia*: porque alguém falou para ele em algum momento da vida dele que mudou de lado, muda de sinal. Mas, não muda de sinal! Muda de operação. [...] Então essa ideia do “muda de sinal” eu também não uso isso e acho que nenhum professor devia usar. Porque vai atrapalhar número oposto. Vai confundir oposto com inverso. Por exemplo, na Geometria Analítica, que você vai dar que retas perpendiculares tem os coeficientes angulares inversos e opostos, o inverso eles já colocam menos. Eu falo: não! Então, se você fala troca o sinal, você está falando de oposto, você não está falando de inverso.*

Pesquisador*: o oposto seria?*

Márcia*:* 3*, qual é o oposto de* 3*?* -3.

Pesquisador*: e o inverso?*

Márcia*: inverso é* $\frac{1}{3}$*. Só que para o aluno, o inverso é o* -3*, porque alguém lá atrás falou: troca o sinal. E não atrapalha?*

Novamente discutindo a linguagem utilizada por professores, Márcia externaliza não apenas o HCK, quando relaciona o momento atual do ensino de equação linear e o elemento simétrico com questões futuras no ensino da Geometria Analítica, mas também o Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes, quando alerta para erros recorrentes dos estudantes, e o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, quando sugere, como alternativa, o uso de uma linguagem adequada que evite a confusão entre elemento oposto e elemento inverso.

Reflexão 21: os cuidados com a linguagem no ensino e o HCK que permite conectar aritmética e álgebra

As questões trazidas pela professora Márcia não exigem, necessariamente, o conhecimento da estrutura algébrica corpo. Conhecer a linguagem adequada para elemento

oposto e elemento simétrico, certamente, não exige tal conhecimento. Todavia, ao se trabalhar com a estrutura, valorizando a necessidade coletiva das propriedades das operações, a apropriação da linguagem pode ser uma consequência. Retomamos o que afirmamos na *Reflexão 3*, quando consideramos que a relação entre a estrutura algébrica corpo e uma equação do tipo $a.x = b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$ pode ser um caminho a ser considerado quando abordamos o corpo dos números racionais em um curso de formação de professores.

Ademais, uma abordagem que associe as propriedades de operações com números e as equações algébricas, como a proposta de Wasserman (2014), permite ter uma visão mais ampla da relação entre aritmética e álgebra, favorecendo o desenvolvimento do HCK.

Essa extensão da exploração individual das propriedades aritméticas para a exploração coletiva no contexto das equações também é tratada em Wasserman (2016) e, para ele, constitui o coração das estruturas algébricas estudadas em Álgebra Abstrata.

Já apresentamos um pouco da posição do professor Roberto e sua preocupação com a transição entre as diferentes representações dos números racionais. No trecho abaixo, além de confirmar essa posição, Roberto comenta sobre aspectos da formação do professor de Matemática e sugere uma insuficiência na definição usual de números racionais para a compreensão dos estudantes:

Roberto: *O professor que vai ensinar o cara que está se graduando, ele tem que no mínimo saber mais do que o aluno. Se ele só souber que fração soma assim, decimal soma assim, não souber associar as duas coisas, ele não sabe mais. Ele sabe o mesmo tanto que o cara. Então em algum momento esse cara tem que começar a se questionar, e é isso que eu acho que falta, as graduações mais novas, pelo menos na minha formação, eu nunca tive que questionar nada. [...] E essas associações. Isso a faculdade pode fazer, é muito fácil de fazer. [...] A hora que você chega nos números racionais, você vai ter que operar com isso aí, mas não ficar só naquela operação.... p barra q pertence a $\mathbb{Q}$ tal que p seja pertencente a $\mathbb{Z}$ e q a $\mathbb{Z}^*$. Isso aí...está bom, entendi. Tem que virar fração esse "trem" aí. Pronto, acabou. Mas, e daí? Eu quero operar com todos os tipos, associar um tipo com o outro, mexer entre eles....*

Pesquisador: *Você está dizendo então que a cada definição usual de números racionais, ela por si só não é suficiente*.

Roberto: *Não faz sentido. Está bom, eu chego para o meu aluno e digo assim: todo o número que pode ser escrito na forma de fração... beleza, professor. 3,15. Tá... 3,272727... dá. Por que o 3,27349 etc. etc. não dá? Você vai precisar de mais coisa, mas essa* *definição só também, sem você saber como opera, converte... tem uma frase muito legal do Raymond Duval que fala assim: "as conversões são o limiar da aprendizagem". Ou seja, se você não chegar na conversão, você só está operando número, na forma de fração, até chegar numa forma fracionária, você só trabalhou mudanças dentro da própria notação. Quando você concilia as duas, que você consegue fazer as conversões, aí você está no limiar da aprendizagem, senão você decorou um jeito de fazer, um método e tal. [...] Enquanto isso não for feito na faculdade, nenhum professor de matemática vai fazer isso, quanto mais quem se formou só em pedagogia lá no primeiro a quinto.*

Ribeiro (2011) concorda com Roberto ao tratar das operações com números decimais, destacando a importância de uma eficaz navegação entre representações. Afirma o autor:

> É de salientar que o facto de se abordarem conjuntamente representações dos números em decimais e fraccionários possibilita que os alunos se consciencializem de diferentes representações para um mesmo valor, o mesmo ocorrendo quando se utilizam diversas quantidades como unidades discretas, ou distintos tipos de unidades. Apenas se o professor for detentor de um sustentado conhecimento matemático para o ensino ele poderá recorrer a essas distintas representações de maneira construtiva e de modo a que tenham significado para os alunos. (RIBEIRO, 2011, p. 407).

Ribeiro (2009, 2011) nos indica possibilidades de se trabalhar a multiplicação envolvendo número decimais, discutindo o conhecimento matemático para o ensino subjacente ao ensino desse tópico.

Reflexão 22: como contemplar a transição entre as diferentes representações na formação de professores?

A questão das diferentes representações dos números racionais e da transição entre elas parece ser uma demanda da prática do trabalho com esse conceito que não deve ficar de fora do trato dos números racionais na formação do professor. Isso fica explícito, não apenas nas falas do professor Roberto ou nos trabalhos de Ribeiro (2009, 2011), mas, também, no alto número de referências (10 dos 37 trabalhos levantados e apresentados no Apêndice A) aos trabalhos de Raymond Duval e os registros de representação semiótica.

Elias, Gereti e Savioli (2015) investigaram como um grupo de 4 estudantes de um curso de pós-graduação *stricto sensu* lidavam com perguntas envolvendo números racionais. Uma dessas perguntas era: *Como você faria para explicar que a representação decimal de um número racional é finita ou é uma dízima periódica?* (Pergunta baseada na questão número 8 do Provão 2002 – Sistema de Avaliação da Educação Superior). Dentre os aspectos analisados por Elias, Gereti e Savioli (2015), destacamos trechos de falas de um dos estudantes participantes, quando afirma "*Ah, mas se mostrar que ele é um racional ele é finito ou é uma dízima periódica*" (p. 7) e, na sequência, repete "*Então, mas se você mostra que ele é um racional, teoricamente você já está mostrando que ou ele é finito ou é uma dízima periódica*" (p. 7). Chamamos a atenção para esses trechos, pois ilustram um aspecto extremamente relevante sobre a transição entre as formas de representar esses números. Muitas vezes, o conceito de número racional está tão fortemente associado às suas formas de representação (um número racional é um número que pode ser escrito na forma a/b com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, ou um número racional é um número cuja representação decimal é finita ou é uma dízima periódica), que pensar sobre a transição entre essas formas deixa de fazer sentido, pois isso "*já está mostrando*", visto que é um número racional.

Na *Reflexão 20*, discutimos a transição da representação decimal de um número racional para a representação fracionária, obtendo a fração geratriz. Essa questão trazida por Elias, Gereti e Savioli (2015) aborda o contrário, a transição de uma representação fracionária para a representação decimal. Uma resposta para essa transição está no algoritmo da divisão. Vejamos.

Vamos representar as frações $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{27}{36}$ e $\frac{6}{75}$ na forma decimal. Por uma escolha nossa, a estratégia utilizada será escrever, quando for possível, o denominador como uma potência de 10. Para tanto, as frações equivalentes precisarão ser utilizadas.

$$\frac{2}{5} = \frac{2.2}{5.2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2.5} = \frac{3.5}{2^2.5^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15$$

$$\frac{27}{36} = \frac{3^3}{3^2.2^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3.5^2}{2^2.5^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$\frac{6}{75} = \frac{2.3}{5^2.3} = \frac{2}{5^2} = \frac{2.2^2}{5^2.2^2} = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Depois de simplificada ao máximo, se a fração resultante $\frac{p}{q}$ tem denominador q que se fatora em potências de 2 ou de 5, então, multiplicando por potências de 2 ou de 5 convenientes, esse denominador pode ser transformado em uma potência de 10. Consequentemente, esse racional tem uma representação decimal finita, isto é, uma representação na forma decimal com uma quantidade finita de casas decimais depois da vírgula. Assim, um número racional na forma irredutível p/q cujo denominador q não tem outros fatores primos além de 2 e 10, tem uma representação decimal *finita*. A volta também é válida, quer dizer, se a representação decimal de um número racional é finita, então esse número pode ser escrito na forma fracionária com um denominador q sendo uma potência de 10.

Mas, o que acontece se o denominador de uma fração irredutível $\frac{p}{q}$ tiver um fator primo diferente de 2 ou 5? Por exemplo,

$$\frac{1}{7} = ?$$

$$\frac{3}{11} = ?$$

Aqui entra o algoritmo da divisão e nossa familiaridade com ele nos permite perceber que, nesse caso, quando dividimos p por q, obtemos uma conta "que nunca acaba", ou seja, a representação decimal é *infinita*. Vamos procurar um argumento mais formal que garanta isso. Mas, antes:

Observemos que, nesses dois exemplos dados ($\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{11}$), não é possível multiplicar denominador e numerador por um número inteiro de forma a transformar o denominador em uma potência de 10. Por quê? Isso é consequência do Teorema Fundamental da Aritmética: "qualquer número natural pode ser escrito como produto de fatores primos, de modo único a menos da ordem dos fatores". Sendo assim, qualquer potência de 10 se fatora, de modo único, como produto de potências de 2 e potências de 5.

Dessa forma, se o denominador de uma fração irredutível tem algum fator diferente de 2 e de 5 não será possível encontrar uma fração equivalente cujo denominador seja uma potência de 10, o que implica que a representação decimal desse número racional será *infinita*.

No caso de determinar a representação decimal do número $\frac{1}{7}$, realizamos a divisão de 1 por 7. O que podemos dizer sobre os restos dessa divisão por 7? Seus restos variam entre os números naturais de 1 a 6. De um modo geral, podemos dizer que, se um racional se escreve, na forma de fração irredutível, como p/q e q contém algum fator distinto de 2 e de 5, então:

(i) é impossível transformar o denominador em uma potência de 10, o que torna a representação *infinita;*

(ii) os possíveis restos da divisão de p por q são $1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ (q-1)$. (Notemos que o resto da divisão nunca é igual a 0);

Portanto, sendo uma divisão infinita (argumento i) e apenas uma quantidade finita de restos possíveis (argumento ii), a partir de algum momento, algum resto irá se repetir e aparecerá um período no quociente, o que nos permite concluir que a representação decimal de um número racional, se não for finita, será necessariamente periódica.

Acreditamos que compreensões como essa que apresentamos sejam essenciais ao conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Contudo, assim como fora levantado na *Reflexão 20*, a construção formal dos números racionais como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, bem como a noção de corpo dos números racionais, não "dão conta" dessas discussões matemáticas para o trabalho docente.

Os professores Carla e Paulo expuseram o caráter mecânico que, muitas vezes, predomina no ensino dos números racionais, em particular nas operações com frações. Além disso, expõem o fato de que os números racionais ficam em segundo plano no ensino da matemática, servindo como "trampolim" para outros conceitos matemáticos. Vejamos os trechos em que esse papel coadjuvante dos números racionais aparece.

Paulo: *Eu, particularmente, trabalhava de uma maneira mais formal mesmo, sem muito.... como uma introdução para os reais. Até porque fica corrido, é corrido. Não tem muito o que você ficar trabalhando, então você acaba passando, passando mesmo.*

Pesquisador: *E em que aspectos vocês acham que os estudantes têm mais dificuldades? [...] Como a gente pode pensar em diminuir essas dificuldades? Não só somar, mas divisão de frações...Como vocês explicam isso, essas coisas difíceis, esses métodos difíceis, que a gente acaba explicando algoritmos*?

Carla: *É, você explica regras. Faz isso, faz isso... pronto. Isso é ensinado no... começa no sexto ano.*

[...]

Paulo: [falando] *dos racionais, eu, particularmente, ... é realmente só introdutório para...*

Carla: *para outros cálculos básicos que aparecem dele*.

Reflexão 23: os números racionais não são suficientemente trabalhados em cursos de formação de professores

A maneira de pensar os números racionais como introdutório para outros conteúdos matemáticos, como os números reais, explicita um problema que vai de encontro ao que afirmam Behr et al. (1983), quando consideram que os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. Desse modo, considerar os números racionais como introdutórios para outros assuntos parece ser um descuido a essa complexidade.

A professora Márcia apresentou uma percepção diferente nesse ponto. Para a professora, os números racionais são "quase todos os números" da Educação Básica, no sentido de que são mais utilizados na escola.

Márcia: *Você vê que tudo remete ao número racional? Ou o decimal ou o fracionário. Tanto é que é nosso maior número, se você for ver. Porque para montar os reais só os irracionais, mas quem trabalha com os irracionais? Só mais na academia mesmo que se trabalha com os irracionais. [...] Então os racionais é o top de linha. Quando se fala assim "ah, como vai a aprendizagem dos racionais", estamos falando de quase todos os números.*

É claro que não podemos afirmar que o tratamento dado pelo professor Paulo é uma consequência de uma formação de professores que não discute os números racionais de maneira adequada às necessidades da prática. Contudo, pela conversa com os professores formadores, esse parece ser um problema evidente. Quando os questionamos (pergunta 3 do Apêndice B) sobre a atenção dada aos números racionais na Licenciatura em Matemática, todos foram enfáticos ao considerar insuficiente a abordagem dos números racionais nos cursos de formação.

Plínio: *Não considero que é trabalhado bem [...]. Porque o conjunto dos racionais, ele é visto... Assim, primeiro ele é suposto sabido, de uma maneira geral, você começa a estudar, entrou em um curso de Licenciatura, você faz lá um curso de Cálculo ou um Pré-Cálculo e etc., ninguém vai ficar te explicando o que é número racional e tal, o cara no máximo vai falar um pouquinho de número real lá ou alguma.*

Victor: *Então, isso eu acho extremamente insuficiente, talvez números [racionais] seja uma das mais sacrificadas, nos cursos tradicionais.*

Tiago: *Não* [é suficiente]. *Por exemplo, no curso de Teoria de Números, que é Fundamentos de Matemática, eles (números racionais) são a última parte da ementa. Então, desde que se criou o curso, ninguém consegue... a ementa diz "construção dos* *números racionais", ninguém consegue construir os números racionais. Porque é fim de ementa, porque você precisa de relações e ninguém consegue dar relações. [...] Aí lá em Álgebra, também tem os racionais como exemplo de corpo. Só que também, lá, pelo menos eu dando as disciplinas, eles são negligenciados. Por quê? [...] porque ele entra em um pacotão das estruturas.*

O que as falas dos professores formadores indicam, portanto, é que a formação de professores no Brasil é frágil no que se refere ao desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais e o mecanicismo, nosso próximo tema, no ensino desses números na Educação Básica parece comprovar isso.

Quando conversamos sobre estratégias de ensino de frações, ou de números racionais de um modo geral, os professores Carla e Paulo consideraram que o problema está, muitas vezes, no mecanicismo presente.

Carla: *essa questão aí de ensinar a fração, da soma... eu acho que é uma falha no sétimo ano. Esse mecanismo incluso, decora-se "oh, é assim, assim, assim". É uma falha no sétimo ano, porque é lá que começa a trabalhar as operações. Porque até a quarta série ele só trabalha representação. Aí, quando começa alguns cálculos...*

Pesquisador: *representação que você fala...*

Carla: *você põe um desenho lá, uma figura, uma barra de chocolate, coisas simples assim. Agora lá no sétimo ano, quando vai trabalhar com as operações, ali que é uma falha. [...] Ele esquece que ali ele tem uma criança ainda. Por exemplo, ele poderia voltar, muito bem, lá com o desenhinho. Oh, vamos lembrar primeiro "o que é meio, o que é dois terços". Na hora que for fazer isso no primeiro do Ensino Médio, não funciona mais isso. Então, eu acho que a falha está no sétimo ano, é lá que ele não aprende...*

Paulo: *eu acho que a falha, primeiro, está no ensino básico, de primeiro ao quinto ano, são professores que não gostam de matemática, então eles acabam ficando no B A BA básico [...]. De sexto ao oitavo ano é essa questão lá, no sétimo ano, em que a maior parte dos professores... é o mecânico, sem mostrar para o aluno sem mostrar de onde, porque que dá aquele resultado. Então o aluno acaba reproduzindo. Aí, Ensino Médio, é mecânico, mecânico, mecânico e acabou.*

Pesquisador: *Uma saída seria o quê? Manter um pouco mais essa relação entre uma representação geométrica e a parte mais...*

Paulo: *isso, talvez seria uma solução sim. Mas, para isso, eu vejo assim... vai mexer um monte de coisas. Por exemplo, qual foi a formação desses professores que trabalham* *ali no sétimo ano? Qual foi? Foi tecnicista? Se foi, vão continuar reproduzindo mecanicamente e ponto. Se eles tiveram uma formação mais ampla, aí pode ser que você consiga, né, fazer com que esses professores trabalhem de forma diferenciada. O aspecto, também, de tempo. É preciso reprogramar... qual o nosso objetivo do ensino ali? Tem essas questões, é uma questão ampla. A gente está limitando a apenas a um conteúdo, números racionais, mas e os outros?*

Nesse trecho, vemos que Paulo toca no tema formação de professores e a consequência que ela pode ter na prática docente. Outro aspecto bastante citado na conversa refere-se aos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e sua importância na introdução das frações. Ambos, Paulo e Carla, atuam como professores no Magistério e convivem com futuros professores desse nível de ensino.

A fala da professora Carla parece levantar uma questão relevante acerca do ensino das frações, que é a transição das representações geométricas que, como vimos, são bastante utilizadas por Chavante (2015a, 2015b) e a abstração das operações por si só. A dificuldade de se abstrair as operações parece ser o motivo do mecanicismo do trabalho com as operações.

O mecanicismo é objeto de críticas em pesquisas sobre o ensino das frações. Lopes (2008) questiona a predominância de regras e macetes no ensino de frações em detrimento de atividades que possibilitam o exercício do pensamento matemático autêntico.

> A maioria dos professores e autores de materiais didáticos, desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva. O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar idéias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico. (LOPES, 2008, p. 20-21).

Quando perguntamos ao professor Paulo como aborda as regras usuais de operações com frações, o professor explicita que sua prática também se baseia nos aspectos mecânicos das operações.

Pesquisador: *como vocês trabalham o algoritmo da soma? Por que tem que tirar o mmc? Com vocês trabalham isso?*

Paulo: *na realidade, quando eu falo disso, a gente acaba virando mais o mecânico, né? Na realidade, eu tento mostrar para os alunos que a necessidade de você somar* *frações equivalentes que têm a mesma parte, a mesma divisão. O que eu faço é isso, mas é mais ênfase no aspecto mecânico da operação.*

Reflexão 24: o mecanicismo no ensino dos números racionais

O mecanicismo e a pouca ênfase dada aos números racionais na formação do professor, como mencionado na *Reflexão 23*, parecem ter conexões. Portanto, é indiscutível que essa situação precisa ser repensada. Acreditamos que superar o mecanicismo passa, necessariamente, por preparar os professores para que tenham um conhecimento matemático para além da simples reprodução de regras e técnicas. Na *Reflexão 20*, indicamos um pouco sobre isso, quando discutimos formas de mostrar que $0{,}999\ldots = 1$. Diferentes formas para diferentes situações e de acordo com o contexto em que se está. Dizer que $0{,}999\ldots = 1$ porque a fração geratriz do decimal $0{,}999\ldots$ é obtida copiando o número que se repete no numerador e colocando 9 no denominador $\left(\frac{9}{9}\right)$ pode ser útil na sétima série, mas não é suficiente para o trabalho do professor. Outras formas precisam ser trabalhadas, para que a regra (o algoritmo) seja uma alternativa quando considerada adequada e não uma prática constante.

Do que foi apresentado até o momento, levantamos três aspectos sobre o ensino dos números racionais e que nos interessam nesse instante: 1) a prática mostra uma carência no conhecimento matemático para o ensino dos números racionais de forma que extrapole o uso de regras, macetes e o cálculo pelo cálculo; 2) a formação do professor parece não ser suficiente para as demandas da prática docente nesse sentido; e 3) muitas vezes os números racionais são tomados como sabidos pelos licenciandos e, portanto, são tidos como exemplos das estruturas algébricas. Ou seja, o foco está nas estruturas e não nos números racionais.

Diante disso, validamos o que dissemos anteriormente: tomar os números racionais como foco do ensino e assumi-los como o conceito matemático a ser trabalhado na formação do professor e o corpo dos números racionais como *uma* (possível) zona do seu perfil conceitual parece ser uma alternativa plausível. Com isso, não temos a pretensão de sugerir que nosso estudo vá contemplar todas as necessidades do trabalho com os números racionais na Licenciatura. Pretendemos, sim, que seja uma contribuição para reverter esse quadro, em que os valores da Matemática Acadêmica são, muitas vezes, priorizados em detrimento de outros mais urgentes à prática docente.

As experiências trazidas pelos professores da Educação Básica são valiosas contribuições para a orientação do debate sobre currículo de cursos de formação de professores. Evidentemente, a formação de cada um deles se deu em um contexto diferente dos atuais cursos de formação de professores e, por isso, suas perspectivas podem trazer características de uma outra época. Por outro lado, esses professores estavam atuando (no momento das entrevistas), ou seja, conhecem o chão da escola e a realidade atual do ensino da matemática. São dessas circunstâncias distintas – formação inicial realizada há tempos, prática docente atual e, em alguns casos, cursos de formação continuada – que se constituem as falas dos professores da Educação Básica aqui entrevistados.

Terceiro momento: das pesquisas

A partir das entrevistas selecionadas para esse momento, vamos compreender um pouco mais sobre aspectos do "conhecimento do ensino de números racionais", por meio do estudo de Zakaryan e Ribeiro (2016), e do sentido de número racional, apresentado por Pinto (2011). Além disso, vamos retomar de forma breve alguns apontamentos feitos por Damico (2007) e por Pinto e Tall (1996), acerca de concepções de futuros professores acerca dos números racionais. Assim como fizemos para as pesquisas voltadas aos números racionais na Matemática Acadêmica, não buscamos examinar os trabalhos na íntegra, mas sim trazer questionamentos ainda não levantados pelas outras fontes de dados ou, em alguns casos, reforçar alguns aspectos já levantados.

A investigação de Pinto (2011), realizada em Portugal, promoveu e analisou uma unidade de ensino, concebida e realizada em trabalho colaborativo entre a pesquisadora e a professora da turma, com o objetivo de provocar o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais não negativos de alunos do 6º ano de escolaridade. Tal unidade de estudo contemplou a "exploração de tarefas de multiplicação e divisão de números racionais em contextos significativos" (p. 481).

Para Pinto (2011), o desenvolvimento do sentido de número racional não se limita a desenvolver o conhecimento e a destreza com os números, mas deve, também, contemplar a complexidade e diversidade do conceito de número racional. Nesse sentido, a autora se pautada em seus estudos anteriores[65] e em diversos outros autores[66] para construir um modelo para caracterizar o sentido dos números racionais, apresentado na Figura 32.

---

[65] Por exemplo, Monteiro e Pinto (2005, 2007).
[66] Por exemplo, Behr et al. (1992), Behr e Post (1992) e Lamon (2006, 2007).

Figura 32: Sentido de número racional

SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL	
Componentes	**Capacidades a desenvolver**
Familiaridade com os diferentes significados das fracções em contexto	→ Reconhecer os diferentes significados das fracções (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em situações discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referencia das fracções em contexto	→ Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua) → Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
Familiaridade com diferentes representações de numero racional	→ Conectar diferentes representações (numeral decimal, fracção e numeral misto) → Reconhece fracções equivalentes
Flexibilidade na comparação, ordenação e densidade de números racionais	→ Representar números racionais na recta numérica → Comparar e ordena números racionais → Reconhecer a existência de outros números entre dois números racionais
Símbolos e linguagem matemática formal significativos de números racionais	→ Relacionar os símbolos com acções e conhecimentos informais. → Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal.

Fonte: Pinto (2011, p. 112-113)

Muitas das componentes e das capacidades a desenvolver, propostas por Pinto (2011), já apareceram ao longo de nossa pesquisa. As ideias de comparação e de densidade dos números racionais serão abordadas na sequência, quando formos tratar da pesquisa de Zakaryan e Ribeiro (2016).

Por ora, destacamos a atenção dada por Pinto (2011) à unidade de referência, pois essa discussão ainda não apareceu em nossas *Reflexões*. Se considerarmos as razões, enquanto uma relação entre grandezas, “só representarão a mesma quantidade se forem referidas à mesma unidade” (p. 111). A autora apresenta a seguinte situação: “A Maria poupou $\frac{1}{5}$ da sua mesada enquanto a Marta poupou $\frac{1}{6}$ da sua mesada, quem poupou mais?”. Nesse caso, os estudantes acostumados a um ensino essencialmente procedimental vão comparar as frações $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$, sem se questionarem se as unidades de referência são as mesmas ou não. Nessa direção, torna-se fundamental a discussão acerca da unidade, chamando a atenção para o todo a que a fração faz referência e que se explorem situações diversificadas relativamente à unidade (PINTO, 2011).

De uma maneira bem próxima, Campos e Rodrigues (2007) destacam que a noção de fração enquanto comparação quantitativa entre grandezas passa, necessariamente, pela ideia fundamental de que essas quantidades devem ser expressas segundo um mesmo referencial. Contudo, os resultados apresentados pelos autores revelam que essa ideia ainda não está presente em muitos sujeitos, o que constitui em um obstáculo importante à construção plena da noção de fração e, por consequência, dos números racionais. Como afirmam,

> O ato de medir se fundamenta na fixação do referencial, que adquire o status de *unidade* quando o estudante conquista a capacidade de generalizar, caminhando da idéia de fração – aparentemente simples – para idéia de número racional, passando das associações aos objetos físicos às abstrações características dos objetos matemáticos. (CAMPOS; RODRIGUES, 2007, p. 88-89, grifo dos autores).

Reflexão 25: a Matemática Acadêmica não abarca todas as necessidades da matemática relevantes para o ensino dos números racionais

A discussão aqui gerada a partir dos estudos de Pinto (2011) e complementada por Campos e Rodrigues (2007) indica o papel da unidade no desenvolvimento do conceito de número racional. Isso significa que a discussão sobre a unidade de referência em cursos de formação de professores deve permear as abordagens para o ensino dos números racionais.

Se, por um lado, a compreensão dos números racionais enquanto parte-todo, razão e medida passa pela ideia de unidade, os números racionais como classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros não parecem tem relação alguma com essa ideia. Ou seja, um curso de formação inicial que prioriza apenas essa construção formal dos números racionais deixa de promover no futuro professor o desenvolvimento de um aspecto do conhecimento matemático que, como apontam as pesquisas, é central para seu trabalho de ensinar matemática.

A mesma problematização pode ser feita para número racional enquanto elemento de um corpo. Nesse contexto, como já salientamos, os números racionais são "qualquer coisa" que satisfaça aquelas propriedades do corpo dos racionais, independentemente se esse número significa um quociente, uma razão ou uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros. Isso significa que a unidade também se modifica e passa a ter um novo papel, agora como elemento neutro da multiplicação, e sua manipulação se dá de forma abstrata, somente como um número (abstrato), sem maiores relações com a unidade de referência enquanto um objeto que está sendo repartido. Campos e Rodrigues (2007) destacam como essa passagem pode se tornar problemática aos estudantes:

> Nessa passagem das situações conceituais para os algoritmos, as frações adquirem o status de número, e se costuma dar pouca ênfase a um novo papel adquirido pela unidade, que deixa de ser o objeto que está sendo repartido e passa a ser o próprio elemento neutro da multiplicação. A passagem para essa fase pressupõe um grande salto em termos de abstração, aparentemente não conseguido pela maioria dos alunos, configurando-se exatamente aí, no entender destes pesquisadores, a origem dos falsos conceitos que os alunos carregam ao longo da escolarização, e que este estudo mostra serem surpreendentemente duradouros. (CAMPOS; RODRIGUES, 2007, p. 90).

Para contornar essa situação e tornar mais sólida a noção de unidade construída pelos estudantes, Campos e Rodrigues (2007) sugerem que seja dada mais ênfase ao trabalho com o significado de medida antes de partir rapidamente para atividades algorítmicas envolvendo operações entre frações.

Reconhecer e valorizar o papel da unidade na construção do conhecimento dos números racionais passa, portanto, por um trabalho cuidadoso na formação de professores com significados dos números racionais que são mais característicos da Matemática Escolar. Parece-nos que, nesse aspecto, os números racionais na Matemática Acadêmica não fornecem os elementos necessários para o conhecimento dos números racionais para o ensino na Educação Básica.

Como já anunciamos, vamos, agora, levantar questões acerca da densidade dos números racionais, tema que emergiu de nosso estudo acerca do trabalho de Zakaryan e Ribeiro (2016). Nesse artigo, os autores tiveram como objetivo evidenciar e caracterizar as relações entre os distintos subdomínios do conhecimento matemático especializado do professor de matemática, discutindo, particularmente, os números racionais. Para tanto, baseiam-se em um quadro teórico que, assim como o MKT, tem origem no PCK de Shulman e discute um conhecimento matemático que é específico para o professor, a saber: Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK[67]), dos autores Muñoz-Catalán et al. (2015).

Foi realizado um estudo de caso com uma professora chilena que atuava no 8º ano da Educação Básica do Chile e os dados foram obtidos a partir de observações não participantes das aulas dessa professora e, em seguida, sua prática foi analisada em busca de relações entre os distintos subdomínios do MTSK.

---

[67] Utilizaremos a sigla MTSK em referência ao original: *Mathematics Teacher Specialized Knowledge*.

Dentre os resultados obtidos por Zakaryan e Ribeiro (2016), trouxemos uma para discussão, pois esse não apareceu ainda na tese: a importância dos exemplos no ensino e na aprendizagem da matemática. Um dos casos trazidos pelos autores refere-se à discussão acerca da densidade de um conjunto. Trouxemos o trecho da explicação da professora a fim de ilustrar como utilizou de outros conjuntos numéricos para explicar que o conjunto dos números racionais é denso.

> Professora: [...] Por que o conjunto é dito denso? Aqui preciso fazer dois esclarecimentos que a maioria de vocês que mostrou o caderno escreveu "porque o conjunto é infinito". O conjunto é, sim, infinito, mas isso não o caracteriza como denso, porque $\mathbb{Z}$ é infinito, $\mathbb{N}$ é infinito, e nenhum deles é denso. A densidade não tem a ver com a quantidade de elementos dessa forma, mas tem a ver com quantos elementos existem entre um racional e outro, e existem infinitos, por isso se pode dizer que é denso. Coisa que não ocorre com os naturais, porque se temos 0 e 1, existe algum natural no meio? Não, então não é denso. (ZAKARYAN; RIBEIRO, 2016, tradução nossa).

Podemos notar que a professora apresenta alguns contraexemplos que não são densos na reta numérica, ressaltando a propriedade topológica dos números racionais (ZAKARYAN; RIBEIRO, 2016). Assim, a professora evidenciou, segundo os autores, um conhecimento das potencialidades e da importância dos exemplos no processo de ensino.

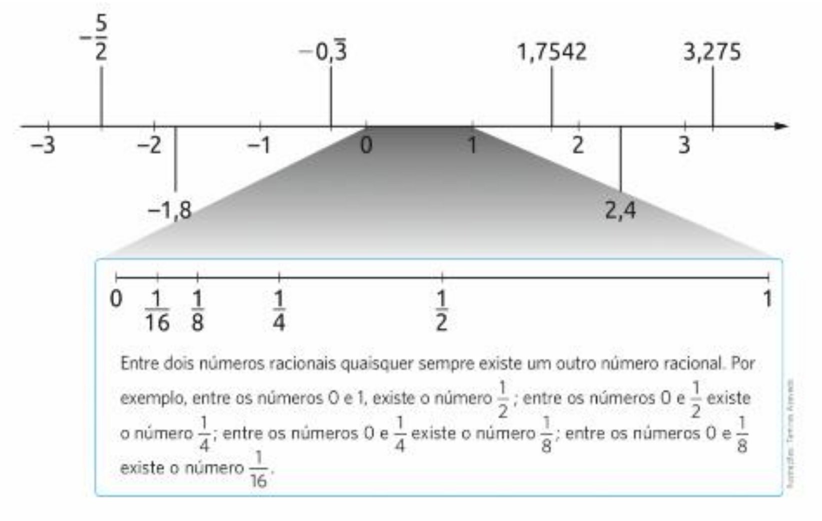
Em uma direção parecida, Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015), quando investigaram um estudo coletivo envolvendo 6 professores, também levantaram a questão da densidade do conjunto dos números racionais como um conhecimento matemático relevante ao professor. Enquanto os participantes compunham uma lista com tópicos que entendiam ter relações com o tema em questão (números racionais), os conceitos de antecessor e sucessor surgiram. Foi quando uma professora afirmou: "Nos racionais, eu sei o que vem antes de 1/2, por exemplo, mas não sei o antecessor de 1/2. O antecessor é o que vem imediatamente antes e o imediatamente antes, nos racionais, não tem" (RANGEL; GIRALDO; MACULAN FILHO, 2015, p. 59). Isso os levou a incluírem na lista o tópico "Não existência de antecessor e de sucessor → densidade dos racionais → infinito", mesmo que o conceito de densidade dos números racionais não seja um objetivo da Educação Básica. Na fala de um dos professores, "Essa lista não precisa conter só coisas que a gente precisa ensinar. Tem que ter coisas que a gente precisa saber (como professor)" (RANGEL; GIRALDO; MACULAN FILHO, 2015, p. 59).

Reflexão 26: a valorização dos exemplos e contraexemplos na Matemática Escolar

Na *Reflexão 19*, ressaltamos que discutir a propriedade do fechamento passa por reconhecer operações que não são fechadas sobre um dado conjunto, como o caso da adição sobre os irracionais. Também destacamos a fala do professor formador Tiago sobre o trabalho com uma operação que não satisfaz a propriedade associativa, como a potenciação sobre os naturais. Esses dois casos se juntam ao apresentado por Zakaryan e Ribeiro (2016) sobre a densidade do conjunto dos racionais, para tornar mais evidente a necessidade de se valorizar, na formação de professores, o trabalho com exemplos e contraexemplos nas mais variadas situações, uma vez que esses são ferramentas produtivas para o ensino dos números racionais. Os contraexemplos podem exaltar determinadas propriedades de uma operação ao mostrar que nem todos as operações a satisfazem e, também, podem ajudar na explicação de um conceito, como fora o caso da professora chilena.

A importância dos exemplos pode ser percebida, ainda no caso da densidade dos números racionais, na explicação dada por Chavante (2015c), na Figura 33:

Figura 33: uma explicação para a densidade dos números racionais na Matemática Escolar



Fonte: Chavante (2015c, p. 12)

A Figura 33 nos mostra que a questão da densidade dos números racionais (o termo *densidade* não é utilizado), nesse contexto de 8º ano do Ensino Fundamental, é mais uma questão de convencimento feito por meio de exemplos do que de demonstração.

É importante destacar que a noção de densidade tem fortes relações com a interpretação geométrica dos números racionais. Carvalho, Lopes e Souza (1984), nos elucidam tal fato:

> Por ser denso o conjunto $\mathbb{Q}$, isto é, porque em qualquer segmento da escala métrica, por menor que seja, há sempre uma infinidade de pontos da abscissa racional, todas as grandezas mensuráveis, na prática, podem ser expressas mediante números racionais com grau de aproximação suficiente. Por mais preciso que sejam os instrumentos de medir, não nos obrigam a sair do conjunto $\mathbb{Q}$. (p. 150).

Reflexão 27: do convencimento da Matemática Escolar à demonstração da Matemática Acadêmica

Os trabalhos de Zakaryan e Ribeiro (2016) e de Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015) nos levam à necessidade de discutir a densidade dos números racionais do ponto de vista da Matemática Acadêmica e levantar questionamentos. Para tanto, nos basearemos em Domingues (1991).

Para demonstrar que o corpo $(\mathbb{Q}, +, .)$ é denso, é preciso mostrar que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$, tal que $a < c < b$. Evidentemente, provar essa proposição envolve, antes de tudo, definir uma relação de ordem sobre $\mathbb{Q}$. Domingues (1991) faz a seguinte explicação:

> Sejam a e b elementos de $\mathbb{Q}$ e tomemos, para cada um deles, uma representação $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ em que o denominador seja estritamente positivo. Nessas condições, diz-se que *a é menor que ou igual a b,* e escreve-se $a \leq b$, se $ms \leq nr$ (obviamente esta última relação é considerada em $\mathbb{Z}$). Equivalentemente pode-se dizer que *b é maior que ou igual a a* e anotar $b \geq a$. Com as mesmas hipóteses, se $ms < nr$, diz-se que *a é menor que b* (notação: $a < b$) ou que *b é maior que a* (notação: $b > a$). (DOMINGUES, 1991, p. 190, grifos do autor).

Destacamos que a ordem em $\mathbb{Q}$ é estabelecida, nesse contexto, a partir da ordem em $\mathbb{Z}$ já definida anteriormente. Como um número racional é um par ordenado de números inteiros, carregamos as construções já feitas em $\mathbb{Z}$.

Agora que já definimos a ordem em $\mathbb{Q}$, retornemos à demonstração da densidade do conjunto dos números racionais. Se $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a < b$, como na hipótese, então $a + a < a + b$ e $a + b < b + b$. Logo, $a + a < a + b < b + b$. Mas,

$$a + a = 1.a + 1.a = (1 + 1).a = 2a$$

De modo análogo, chegamos que $b + b = 2b$. Repare que na linha anterior foram utilizadas as propriedades do elemento neutro para a multiplicação e a distributiva da multiplicação pela adição. Podemos fazer isso, já que $(\mathbb{Q}, +, .)$ é um corpo.

Continuando:

como $a + a = 2a$ e $b + b = 2b$, segue que

$$2a < a + b < 2b$$

Multiplicando os termos dessa desigualdade por $\frac{1}{2}$ (o inverso multiplicativo de 2):

$$\frac{1}{2}(2a) < \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(2b)$$

Pelas propriedades associativa da multiplicação e do elemento neutro para a multiplicação, temos:

$$a < \frac{1}{2}(a+b) < b$$

Assim, pela propriedade do fechamento, temos que c pode ser igual a $\frac{1}{2}(a+b) \in \mathbb{Q}$.

Por fim, a definição de corpo *denso* fica estabelecida como “Um corpo K se diz *denso* quando, para quaisquer $a, b \in K$, $a < b$ (que significa $a \leq b$ e $a \neq b$) existe $c \in K$ de modo que $a < c < b$” (DOMINGUES, 1991, p. 196, grifo do autor). Ou seja, o corpo $(\mathbb{Q}, +, .)$ é denso.

Podemos fazer paralelos entre a abordagem da Matemática Acadêmica e a da Matemática Escolar. Além da diferença entre o “convencimento” da Matemática Escolar e da demonstração na Matemática Acadêmica[68] no caso da densidade dos racionais (*Reflexão 26*), podemos abordar a comparação entre frações. Pela definição dada por Domingues (1991), dados dois números racionais $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, diz-se que a é menor que ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $ms \leq nr$. Como o autor explica, essa última passagem é considerada em $\mathbb{Z}$.

Na Matemática Escolar, a seguinte regra para comparar números racionais na forma de fração é, muitas vezes, aceita, decorada: para comparar as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ basta “multiplicar em cruz”. Se ms for maior do que rn, então a fração $\frac{m}{n}$ é maior do que $\frac{r}{s}$. Se ms for menor do que rn, então a fração $\frac{m}{n}$ é menor do que $\frac{r}{s}$. E se ms for igual a rn, então as frações são equivalentes.

Por mais que a definição de Domingues (1991) indique para uma regra, sem muito explicação, na Matemática Escolar é preciso descomprimir (McCRORY et al., 2012). A comparação de frações de mesmo denominador é mais direta, pois se pensarmos as

[68] O termo convencer foi inspirado em Tall (1991), quando afirma que a passagem de uma matemática mais elementar para uma matemática mais avançada envolve uma transição importante que corresponde à passagem da *descrição* à *definição*, do *convencer* ao *provar* de uma forma lógica baseada em definições.

frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{n}$ (com $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$) como divisão entre números inteiros, estamos dividindo os números m e r por um mesmo número n, ou seja, a comparação pode se resumir aos numeradores das frações: $\frac{m}{n}$ é maior que $\frac{r}{n}$, se m for maior que r. Reconhecer esse caso como um primeiro momento para se ensinar comparações entre números racionais na forma de fração pode ser relevante ao professor. Ponte et al. (2015) ilustram isso a partir da fala de alguns professores.

Um segundo momento pode ser a comparação entre frações de denominadores diferentes ($\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$, com $m, r \in \mathbb{Z}$ e $n, s \in \mathbb{Z}^*$), que, juntamente com a noção de frações equivalentes, pode levar os estudantes a caírem no caso da comparação entre frações de mesmo denominador, fazendo $\frac{ms}{ns}$ e $\frac{rn}{sn}$. Assim, novamente, a comparação entre as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ pode ser pensada considerando apenas os numeradores das frações $\frac{ms}{ns}$ e $\frac{rn}{sn}$, isto é: $\frac{m}{n}$ é maior que $\frac{r}{s}$ se ms for maior que rn.

Uma abordagem como a apresentada nos dois últimos parágrafos para a comparação entre números racionais na forma de fração (abordagem também sugerida por Chavante (2015a)) pode ser mais relevante para a prática docente do que uma construção a partir de deduções formais, como aquela apresentada por Domingues (1991).

Para finalizar esse estudo de pesquisas em Educação Matemática, vamos considerar aquelas que selecionamos para dar destaque às concepções alternativas de estudantes acerca dos números racionais: Damico (2007) e Pinto e Tall (1996).

Pinto e Tall (1996) analisam respostas de sete estudantes a professores para o ensino de matemática do Ensino Fundamental para identificarem suas concepções sobre números racionais. Desses sete, três apresentaram o que os autores chamam de definições distorcidas para os números racionais.

Quando solicitado a responder ao seguinte questionamento “Você pode definir número racional?”, um estudante respondeu:

> Estudante I: “Um número racional é um número que pode ser definido por ... é mais fácil dizer que não é um número irracional ... Um número irracional é um número com um infinito ... não pode ser definido para um número finito de casas decimais. ... Sim, então um número racional seria um número que pode ser definido para um número específico de casas decimais.” (PINTO; TALL, 1996, p. 6, tradução nossa).

Para além da definição incorreta de número irracional dada pelo estudante, esse modo de definir os números racionais, baseado na negação dos irracionais, nos chamou a atenção, pois, não apenas o termo *irracional* indica o contrário de *racional*, mas, também, a notação muitas vezes utilizada para representar o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) parece levar estudantes a estabelecerem essa relação.

De acordo com Ripoll (2001 apud POMMER, 2012), é usual encontrar as seguintes definições para o conjunto dos números irracionais em livros didáticos:

> (a) Um número é irracional se não puder ser escrito da forma a/b com $a, b \in \mathbb{Z}$ e b não nulo [ou] Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração; (b) Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica [ou] Todo número escrito na forma de um decimal infinito não-periódico é um número irracional; (c) Os números irracionais positivos representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade. (RIPOLL, 2001, p. 1 apud POMMER, 2012, p. 22).

Na mesma linha de pensamento do estudante, a definição (a) se baseia em uma negação do número racional para definir números irracionais. Evidentemente, essa definição (a) não é adequada, uma vez que, como salienta, $\sqrt{-1}$ não é um número racional e, do mesmo modo, não é um número irracional.

Na fala do estudante J da pesquisa de Pinto e Tall (1996), percebemos o mesmo equívoco na definição de irracional.

> Estudante J: "Um número racional é um número que pode ser escrito como uma fração. Por exemplo, um é um número racional, porque pode ser escrito com um sobre um, metade é um número racional porque é obviamente um sobre dois. Um número irracional é o oposto de um número racional, você não pode escrevê-lo como uma fração". (PINTO; TALL, 1996, p. 6, tradução nossa).

Novamente, número irracional como a negação de número racional. A resposta do estudante J nos revela outro aspecto. Ao definir número racional, o estudante afirma que "Um número racional é um número que pode ser escrito como uma fração". Tal definição carrega consigo a possibilidade de equívocos futuros, como o fato de considerar $\frac{\sqrt{2}}{2}$ um número racional. Entretanto, esse modo de pensar os números racionais é bastante comum.

Assim como Pinto e Tall (1996), Damico (2007) também questionou os participantes de sua pesquisa sobre "O que é um número racional?". De 324 estudantes de licenciatura, 111 apresentaram "concepções absolutamente errôneas" (DAMICO, 2007) sobre o conceito de número racional. Desses 111, 27 são concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática e 84 são iniciantes.

Algumas das respostas apresentadas por Damico (2007) também indicam a concepção de número racional como aquele número que pode ser expresso na forma de fração: "É um número que é expresso sob a forma de fração" (p. 120); "É todo número que pode ser escrito na forma de fração" (p. 120); "É todo número que pode ser escrito na forma a/b com $b \neq 0$" (p. 120).

Reflexão 28: concepção alternativa

Parece-nos inegável que, em diversos contextos, a noção de fração está inteiramente relacionada ao conceito de número racional, chegando, muitas vezes, a serem considerados como a mesma coisa. Se não fosse desse modo, Silva (2009) não teria o rigor em definir número fracionário daquela maneira formal, como apontamos na *Reflexão 5*.

Acreditamos que o próprio currículo da Educação Básica favoreça tal modo de pensar. Algumas noções envolvendo as frações são trabalhadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, quando as frações abordadas são aquelas cujo numerador e denominador são números naturais (denominador diferente de zero), relacionando-as às noções de parte-todo e ao resultado de uma divisão. No 6º ano do Ensino Fundamental, as frações ganham mais espaço, ampliando seus significados em diferentes contextos e abordando as operações. Contudo, será somente no 7º ano do Ensino Fundamental, com a inserção dos números negativos, que as frações ganham o *status* de número racional. Isso significa que, durante alguns anos, as frações que os estudantes têm contato são aquelas cujo numerador e denominador são números naturais ou inteiros (denominador diferente de zero).

No 8º ano, quando os números irracionais são introduzidos, é que os estudantes têm contato com um tipo de número que, se escrito na forma de fração, não é um número racional. Mas, até lá, algumas concepções já formadas podem não se desfazerem facilmente.

Não estamos sugerindo que se altere a forma como os conjuntos numéricos são construídos ao longo da Educação Básica, visando evitar qualquer tipo de concepção equivocada. Nossa reflexão caminha na direção de reconhecer que associar número racional a uma fração, sem definir seu numerador e denominador, pode ter origem nessa trajetória de ensino que é realizada ao longo do Ensino Fundamental. Parece-nos, e isso é uma suposição nossa, que, se até o final do 7º ano do Ensino Fundamental, as únicas frações que o estudante conhece são números racionais, em momentos futuros pode haver uma tendência em associar número racional a uma fração, sem fazer restrição ao numerador e denominador. Estamos levantando a possibilidade de que, quando um estudante afirma que um número racional é um número que pode ser escrito na forma a/b, omitindo maiores detalhes sobre a e b, não significa, necessariamente, que a e b para ele possam ser números irracionais ou complexos.

Talvez o costume de, na maioria das vezes, lidar com frações em que a e b sejam inteiros e $b \neq 0$, leve esse estudante a considerar essas restrições ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$) um mero detalhe.

Os trabalhos de Pinto e Tall (1996) e de Damico (2007) apontaram para esse mesmo tipo de concepção de número racional como um número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$. Diante disso e de nossa reflexão aqui feita, parece-nos que esse modo de conceber número racional a partir de sua forma de representar seja um tema a ser destacado na matriz epistemológica que construiremos na próxima seção.

Reflexão 29: a relevância dos números irracionais para a compreensão dos números racionais

A definição de número racional a partir da negação dos irracionais dada pelos estudantes nos remete à relevante discussão acerca desses dois conjuntos numéricos e de suas relações. Ao longo da *Reflexão 20*, principalmente por meio da fala do professor Victor, já levantamos esse debate, só que do ponto de vista da Matemática Acadêmica. Se na Matemática Acadêmica as construções formais dos racionais e dos irracionais são epistemologicamente distintas, na Educação Básica essa diferença também surge, mas em outros sentidos.

Para Pommer (2012), o conjunto dos números racionais apresenta uma abordagem pragmática no Ensino Fundamental, semelhante ao que ocorreu ao longo de seu desenvolvimento histórico, enquanto que, de modo oposto, "os números irracionais essencialmente desfrutam de uma natureza teórica, originando um descompasso com a essência pragmática dos racionais" (p. 211).

Essa natureza teórica acaba por deixar os números irracionais na periferia do ensino dos números e isso pode ser percebido pelos poucos números irracionais que são discutidos na Educação Básica. Como traz Pommer (2012), o universo numérico dos nossos estudantes se restringe aos números racionais acrescido de um conjunto enumerável de pouquíssimos números irracionais notáveis. Isso fica bastante evidente na já citada fala da professora da Educação Básica:

Márcia: *Você vê que tudo remete ao número racional? Ou o decimal ou o fracionário. Tanto é que é nosso maior número, se você for ver. Porque para montar os reais só os irracionais, mas quem trabalha com os irracionais? Só mais na academia mesmo que se trabalha com os irracionais.*

Essa constatação vai ao encontro da *Reflexão 28*, pois o fato de se trabalhar com poucos números irracionais pode levar os estudantes a não considerarem frações do tipo

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ como um número, mas sim como uma divisão entre um número irracional por um número racional, levando-os a associar as frações apenas aos números racionais. Desse modo, acreditamos que uma compreensão consistente de número irracional favorece a compreensão dos números racionais. Afinal, por que aprender dízimas periódicas se não se conhece casos com dízimas não periódicas? Por que conhecer um conjunto enumerável se não se conhece um conjunto não enumerável? O infinito dos números racionais é igual ao infinito dos números irracionais?

Na *Reflexão 19*, comentamos sobre o fato de o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais não ser fechado para as operações de adição e multiplicação. Por isso, tal conjunto com as operações de adição e multiplicação não constituem um corpo (diferentemente de $(\mathbb{Q}, +, .)$, pois, pela definição de corpo (dada na seção 2.2), as operações sobre um dado conjunto A são definidas como uma função $A \times A \rightarrow A$ e, portanto, já está pressuposta a propriedade de fechamento. Isso significa que, na Matemática Acadêmica, uma operação que não é fechada sobre um determinado conjunto nem seria uma operação sobre tal conjunto. Pelo mesmo motivo, na Matemática Acadêmica, a subtração em $\mathbb{N}$ também não seria uma operação sobre $\mathbb{N}$.

Se, por um lado, essas questões dizem respeito somente à Matemática Acadêmica, por outro, há de se perceber que na Educação Básica os números irracionais têm pouco espaço enquanto um conjunto disjunto do conjunto dos números racionais, pois tão logo são apresentados, são colocados em um mesmo conjunto maior, o dos números reais. Além da natureza teórica desses números, como afirma Pommer (2012), as estranhezas que esses números geram, como o fato de $\mathbb{I}$ não ser fechado para aquelas operações, parecem ser algumas das causas da rápida transição dos racionais para os reais.

Nesse sentido, acreditamos que, na formação de professores, o diálogo entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais deve ir além das diferenças nos termos (*racional* e *irracional*) e na notação ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$), permitindo ao futuro professor lidar de forma consistente com o ensino desses conjuntos numéricos, transitando entre suas diferenças, de modo a favorecer a aprendizagem de seus estudantes.

Ao longo dessa seção, realizamos *12 Reflexões*, que: (i) reafirmam diferenças entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica (*Reflexões 18*, 26 e 27); (ii) problematizam mais diretamente o papel da Matemática Acadêmica na formação do professor (*Reflexão 25*); (iii) indicam caminhos, possibilidades e cuidados que devemos ter ao propormos o ensino do corpos dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática (*Reflexões 19, 20, 21, 22, 24, 26* e *29*); (iv) destacam a insuficiência do trabalho dos números racionais na formação do professor (*Reflexão 23*); e (v) apresentam concepções alternativas sobre os números racionais (*Reflexão 28*). Com essas *Reflexões*, retomamos à pergunta que abriu a seção: *de que modo as questões que se colocam na prática docente ao trabalhar com os números racionais podem ser favorecidas com o conhecimento dos significados dos números racionais na Matemática Acadêmica?* Acreditamos que a Matemática Acadêmica, assim como a matemática produzida em outros contextos, deve problematizar a Matemática Escolar a partir de suas diferenças (*Reflexões 18* e *26*), mas também de suas possiblidades de aproximações (*Reflexões 20, 21* e *27*). Recuperamos a fala do professor Roberto quando confessa que, em sua formação, não teve espaço para questionar: *"[...] é isso que eu acho que falta, as graduações mais novas, pelo menos na minha formação, eu nunca tive que questionar nada"*, pois entendemos que a ação de questionar a Matemática Escolar deve ser central em um curso de formação e um dos caminhos possíveis para isso pode ser pela Matemática Acadêmica. A *Reflexão 29* indica essa possibilidade, quando põe em questão possíveis causas de um ensino de número irracional tão pouco explorado em detrimento das formas de se representar esses números. Acreditamos que a Matemática Escolar, enquanto uma prática social, deve estar em relação com outros modos de se fazer matemática para se pôr sempre em questionamento.

2.5 Matriz Epistemológica do conceito de Número Racional

A presente seção refere-se ao terceiro objetivo específico: organizar, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar os números racionais.

Essa organização foi feita fundamentada no diálogo entre as investigações realizadas nas seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, que nos permitiu apontar temas epistemológicos (SEPULVEDA, 2010) envolvidos na significação do conceito de número racional nos contextos em que os dados foram coletados.

É fato que os estudos de Kieren (1976, 1980) já nos forneceram uma base para a identificação desses temas. Ambas as categorizações de Kieren (a de 1976 e a de 1980) nos deram um norte para a compreensão de diferentes significados dos números racionais. Como ressaltamos na seção 1.4.2, a estratégia metodológica que utilizamos para a construção da matriz epistemológica foi a segunda apresentada, ou seja, aquela que se inicia pelas fontes históricas, filosóficas e de concepções alternativas, inferindo, assim, as zonas de significação e, mais tarde, as categorias de respostas que as caracterizaram naquele momento serão buscadas no material empírico. Um dos riscos dessa estratégia, previsto na abordagem dos perfis conceituais, é fundamentar as análises nas categorias presentes nesta literatura, como já discutido anteriormente. Entretanto, mesmo que tenhamos sido influenciados pelas categorias de Kieren, certamente não ficamos presos e restritos a elas.

Juntamente com as categorias de Kieren, o estudo histórico dos números racionais também nos indicara diferentes usos e contextos nos quais o conceito de número racional parece ser significado. Sintetizamos alguns pontos que consideramos centrais e os apresentamos no Quadro 4.

Quadro 4: Quadro síntese do desenvolvimento histórico dos números racionais

Para Caraça (1951), se existir um segmento $\overline{EF}$ e dois números naturais m e n $(n \neq 0)$ tais que $\overline{AB} = m\overline{EF}$ e $\overline{CD} = n\overline{EF}$, então os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são ditos ***comensuráveis* e isso significa que a razão entre seus comprimentos é um número racional**: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{m\overline{EF}}{n\overline{EF}} = \dfrac{m}{n}$
O trabalho com as frações unitárias indica que, para os egípcios, as **frações representavam os inversos dos números** (ROQUE, 2012). A ideia de inverso também aparece nos babilônios, que utilizavam *tabelas de recíprocos* para realizar divisões.
Para Katz (2010), as frações egípcias aparecem como **resultado de divisões não exatas**.
Nos trabalhos formais, os gregos utilizavam as **razões entre duas quantidades**, ao invés das frações comuns. Entretanto, uma razão $a:b$ de Euclides não pode ser interpretada como uma fração que corresponde a um ponto particular na reta numérica e sobre a qual podem ser aplicadas as operações aritméticas padrão (KATZ, 2010). Foi Stevin, na obra *L'Atithmétique*, de 1585, que desfez explicitamente a distinção euclidiana entre número e quantidade. Como afirma Katz (2010), a partir de então, número deixa de ser uma coleção de unidades, como em Euclides, e qualquer quantidade, inclusive a unidade, pode ser dividida continuamente.
Desde os egípcios, em problemas para a determinação de quantidades desconhecidas, chamados de Cálculo do *hau*, contidos no Papiro Rhind, as frações aparecem como **soluções de equações do 1º grau com uma incógnita**. O mesmo pode ser encontrado nas equações consideradas por al-Khwarismi.
Um destaque das frações chinesas era a tendência que tinham à **decimalização de frações.** O uso da ideia decimal em situações de peso e medida gerou o **hábito decimal no tratamento**

das frações. Artifícios decimais nos cálculos eram, por vezes, adotados para facilitar a manipulação de frações. Foi no século XVIII que se desenvolveu efetivamente o sistema métrico decimal, "planejado para substituir uma miscelânea caótica de sistemas de pesos e medidas não científico por um apenas, sistemático, científico, preciso e simples" (EVES, 1996, p. 493).
Segundo Roque (2012), para Leibniz uma fração significava uma **divisão de dois números**, "logo era uma quantidade obtida pela divisão de duas quantidades" (p.361).
Até a construção formal dos números reais pelos "cortes de Dedekind", supunha-se que a reta contivesse todos os números reais (ROQUE, 2012), o que, certamente, incluía os **números racionais enquanto pontos dessa reta**.
Foi no século XIX, conhecido como "a idade do rigor", que os matemáticos deixaram de associar números a quantidades, uma vez que essa associação impedia o desenvolvimento da matemática. Portanto, para avançar era necessário migrar para um **conceito abstrato de número** não subordinado à ideia de quantidade (ROQUE, 2012). É nesse contexto que os números racionais são construídos, então, como **classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros**.
Foi com matemáticos como Galois, Dedekind, Kronecker e Weber que, no século XIX, o conceito de corpo se constitui e, um dos exemplos relevantes dessa nova estrutura algébrica, é o de corpo dos números racionais. Nesse caso, um **número racional é um elemento de um corpo**.
Com o progressivo estudo acerca das estruturas algébricas, um novo modo de pensar pode ser considerado: $(\mathbb{Q}, +, .)$ é o menor corpo em que todo elemento não nulo do anel $(\mathbb{Z}, +, .)$ tem inverso multiplicativo. Por ter essa propriedade, $\mathbb{Q}$ é chamado de **corpo das frações** de um domínio de integridade $\mathbb{Z}$.

Fonte: o próprio autor

O Quadro 4, extraído do estudo histórico dos números racionais, permitiu-nos um primeiro diálogo com os subconstrutos de Kieren, quando encontramos contextos históricos em que os significados trazidos por Kieren também apareciam. Mas, víamos que os subconstrutos compactavam diferentes modos de pensar os números racionais que a história mostrou não serem "a mesma coisa", como o caso da divisão indicada e a de corpo quociente, que Kieren inclui em uma mesma categoria – o subconstruto quociente. Quando fomos para os demais dados (entrevistas, livros didáticos e pesquisas), muitos dos subconstrutos foram reforçados, principalmente pelos livros didáticos e pelas pesquisas, mas outros foram se mostrando, como a concepção alternativa apresentada na *Reflexão 28*. Assim, por meio de um exercício analítico que buscou fazer dialogar os dados produzidos nesta tese, identificamos onze temas epistemológicos que estão descritos a seguir.

Tema epistemológico 1: *relação entre grandezas*. A ideia de relação entre duas quantidades (ou grandezas), que aparece desde os gregos, como vimos em Katz (2010), indica uma gênese do conceito de número racional.

Não apenas a ideia de razão se mostrou, ao longo de nosso estudo, diferente da ideia de fração (para Roque (2012), na época de Euclides, a noção de razão não equivalia a uma fração entre números; Onuchic e Allevato (2008) reiteram essa diferença entre razão e fração), como, também, a própria noção de razão apresenta diferentes modos de ser significada.

Como vimos, para Leibniz, diferente da fração, uma razão é uma relação independente dos termos que a compõem. Nesse sentido, a relação significa uma terceira "coisa", que é autônoma em relação aos dois termos que a compõem. Isso nos conduz a uma ideia de taxa (ou *rate*, como abordado na seção 2.1). Por exemplo, a relação entre massa e volume de um corpo define o conceito de densidade, que é um conceito produzido pela relação estabelecida entre os termos. Nesses termos, taxa (*rate*) está mais associada a uma variação de uma grandeza em relação a outra (grandezas de espécies diferentes).

Já Kieren (1976, 1980) tem uma abordagem para razão no sentido de uma comparação entre números ou quantidades de natureza semelhante (*ratio*). Tal modo conduz a outro significado de razão, distinto daquele do parágrafo anterior. Um exemplo desse tipo é trazido por Chavante (2015a), no livro para o 6º ano. Nesse contexto, Chavante (2015a) está introduzindo fração e apresenta a ideia de razão como a comparação entre a quantidade de camisas branca e a quantidade total de camisa no armário (comparação entre quantidades de natureza semelhante).

No livro voltado para o 7º ano do Ensino Fundamental, Chavante (2015b) dedica uma unidade para apresentar os números racionais e outra, separada, para discutir razão e proporção. Nesta unidade, Chavante (2015b) não faz distinção entre os dois significados de razão (*rate* e *ratio*) e seus exemplos sugerem ora um, ora outro significado. Contudo, vale destacar que a ideia de porcentagem é definida como "uma razão que compara grandezas de mesma natureza e representa a parte considerada em um total de 100 partes iguais" (CHAVANTE, 2015b, p. 126).

Tema epistemológico 2: *divisão entre dois inteiros*. Do Quadro 4, também percebemos que número racional na representação de fração era concebido como uma divisão. Além das evidências apresentadas em trechos da história, as pesquisas e o livro didático do Ensino Fundamental nos levam aos seguintes modos de significar os números racionais:

(i) o símbolo $\frac{a}{b}$ pode também ser usado para representar uma operação, isto é, $\frac{a}{b}$ é usado como forma de escrever $a \div b$ (BEHR et al., 1983). Mais do que um número, $\frac{a}{b}$ indica um processo, um "algo a ser feito", que chamamos de divisão indicada. O numerador a não representa as partes tomadas, mas sim como algo que será divido por b partes;

(ii) como colocou Katz (2010), para os egípcios da chamada Matemática Antiga, frações apareciam quando precisavam dividir dois números e o resultado dessa divisão não era exato. Nesse caso, a representação $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*)$ indica um quociente[69]. Esse modo de significar os números racionais como um quociente não se restringe a uma divisão não exata e pode se estender a divisões exatas. Em uma das definições de Chavante (2015c) para números racionais, fica evidente essa forma de significação: números racionais são "números obtidos por meio da divisão de dois números inteiros" (p. 11).

Damico (2007) nos traz um exemplo que pode clarear essa diferença entre (i) e (ii). Uma pizza será dividida entre cinco crianças. A fração $\frac{1}{5}$ corresponde tanto à divisão (1 pizza dividida por 5 crianças) quanto ao resultado da divisão (da pizza, cada criança recebe $\frac{1}{5}$).

Tema epistemológico 3: *o inverso de um número inteiro*. Um significado que não aparece em Kieren (1976, 1980), mas que destacamos em nossa pesquisa, é o de fração como inverso de número inteiro. Tal significado era atribuído pelos egípcios, tal como apontado por Roque (2012). No caso dos babilônios e de suas *tabelas de recíprocos*, os inversos eram utilizados para realizar divisões: dividir por a é o mesmo que multiplicar pelo inverso de a.

Essa maneira de significar os números racionais, ao nosso ver, tem uma ligação natural com os números inteiros. Em certa medida, isso tem alguma ligação, também, com o discurso do professor Victor quando ele explica que, para se manter a consistência algébrica, a passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ acrescenta não apenas os inversos multiplicativos dos inteiros, mas também um monte de elementos que não são nem inteiros nem inversos

[69] Segundo do dicionário eletrônico Houaiss (2009), quociente significa o resultado de uma divisão e sua etimologia indica que a palavra quociente vem do latim quotiente que significa 'quantas vezes' e é tratado como adjetivo. Assim, o termo quociente está sendo utilizado aqui como resultado de uma divisão, não como uma divisão indicada.

multiplicativos de inteiros. Isto é, a extensão dos inteiros para os racionais envolve a inclusão de dois “tipos” de elementos: os inversos multiplicativos dos números inteiros e os que não são nem inteiros nem inversos de inteiros. Os inversos multiplicativos de inteiros têm certa especificidade na significação dos racionais.

Quando analisou o conteúdo da matemática da escola dos Estados Unidos[70], Wasserman (2016) também apontou para essa direção, quando destacou o fato de uma fração do tipo $\frac{a}{b}$ poder ser pensada como um múltiplo de $\frac{1}{b}$, isto é, $\frac{a}{b}$ como um múltiplo do inverso do número inteiro b. Não que os egípcios tratassem dos inversos dessa mesma maneira trazida por Wasserman (2016), pois, como afirma Ifrah (1996), a noção de fração geral $\frac{m}{n}$, como m vezes o inverso de n, não era concebida pelos egípcios. O que há em comum entre eles é o tema *o inverso de um número inteiro* em torno do qual o número racional pode ser significado.

Tema epistemológico 4: *processo de dupla contagem*. Como mencionamos, Katz (2010) afirma que, tanto os gregos dos tempos de Euclides, como os anteriores a ele, não usavam fração de todo no seu trabalho formal, uma vez que a unidade não podia ser dividida. Ao longo do desenvolvimento histórico que apresentamos, não identificamos, explicitamente, a relação parte-todo como um processo de dupla contagem, em que se particiona um todo em n partes iguais (cada parte pode ser representada por $\frac{1}{n}$) e se toma um número x de partes (teremos $\frac{x}{n}$ do todo). Silva (2009) nos indica uma possível explicação para tal fato, uma vez que considera o subconstruto parte-todo como um produto recente da necessidade do ensino das frações:

> A concepção parte-todo com vida própria no ensino de fracionários, desvinculando-se da submissão a outras concepções, é orientação recente do ensino, em termos históricos, sendo mobilizadas em tipos de tarefas que não aparecem nos primórdios da construção do campo dos números fracionários. Provavelmente, porque as necessidades práticas do ensino anteriormente realizado não eram pertinentes ao ensino das crianças. (SILVA, 2009, p. 95).

Atualmente, situações que envolvem a ideia de parte-todo, bem como a de divisão, são, muitas vezes, aquelas que, com as quais, a noção de fração é introduzida aos estudantes dos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Esse modo de significar os números racionais está relacionado à habilidade de dividir uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em subpartes de mesmo tamanho (BEHR et al., 1983). Além disso, a relação parte-todo tem um forte apelo geométrico.

---

[70] Para isso, Wasserman (2016) utilizou o *Common Core Mathematics Standards from the United States*.

No caso de dividir quantidades contínuas, a relação parte-todo, geralmente, está relacionada a barras de chocolate ou a pizzas (isto é, figuras geométricas como retângulos ou círculos). Nesse caso, os "modelos que se utilizam da interpretação de regiões geométricas envolvem, aparentemente, uma compreensão da noção de área" (DAMICO, 2007, p. 69). Dividir uma barra de chocolate (no formato de um retângulo) em partes iguais não significa dividir em partes com formas iguais, mas sim dividir em partes com áreas congruentes (DAMICO, 2007), como fica ilustrado na Figura 34:

Figura 34: relação parte-todo

Fonte: Damico (2007, p. 69)

No livro para o 6º ano, em seu primeiro exemplo sobre formas de interpretar as frações, Chavante (2015a) apresenta a ideia de relação parte-todo por meio de uma barra de chocolates.

Como evidenciado por Silva (2009), a concepção parte-todo como um produto recente da necessidade do ensino das frações demanda a criação de abordagens de ensino para os números racionais e, obviamente, tais abordagens têm consequências na aprendizagem desses números. Por exemplo, Niemi (1996) nos relata que um grande número de estudantes participantes de sua pesquisa escreveu que uma fração é um pedaço de alguma coisa (torta, brownie, cookie) que você come.

Para o caso de dividir quantidades discretas, vamos adotar um exemplo semelhante ao dado por Damico (2007) para ilustrar como o número racional pode ser significado. Suponha que João tenha 4 bolas de gude, Márcio tenha 5 bolas de gude e Renata tenha 10 bolas de gude. Os três juntos têm 19 bolas de gude. Se um estudante tomar a bola de gude individual como a unidade de divisão, então esse estudante pode ilustrar esta situação por meio de 19 círculos. A representação parte-todo para a parte de João seria feita pintando 4 desses círculos. Dessa maneira, a "parte" é o número de bolas pintadas e o "todo" é o número total de bolas de gude. Cada uma das unidades que compõem a "parte" tem tamanho igual, porque cada uma representa o mesmo número de objetos (1 bola de gude), mas a divisão não resulta em partes de tamanho iguais (DAMICO, 2007). O todo é formado pela combinação de três partes, em que cada uma pode ser presentada por uma fração: $\frac{4}{19}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{10}{19}$.

Assim, a relação parte-todo parece-nos um modo de significar os números racionais que é característico do ensino das frações no contexto escolar, no intuito de "auxiliar a criança no aprendizado dos novos números, utilizando seus conhecimentos dos números naturais" (SILVA, 2009, p. 95).

Tema epistemológico 5: *formas de representar*. Essa maneira de significar o conceito de número racional é aquela que valoriza suas formas de representação. Discutimos alguns aspectos sobre essa valorização da representação, que muitas vezes se confunde com o próprio conceito, na *Reflexão 22*.

Por meio das pesquisas analisadas em nosso estudo sobre as concepções alternativas de estudantes, conforme a *Reflexão 28*, encontramos uma concepção de número racional como um número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ (sem restringir a e b). Parece haver, nesse modo de conceber esses números, uma origem em um ensino que valoriza a representação, em particular a fracionária, e os algoritmos das operações com frações.

A definição usualmente adotada na Educação Básica favorece tal modo de pensar. A definição apresentada por Chavante (2015c) é um exemplo de tal situação: "Os números racionais são aqueles que *podem ser escritos na forma* $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros, com $b \neq 0$" (CHAVANTE, 2015c, p. 12, grifos nossos). Kieren (1976) apontou as *frações* como um dos sete primeiros significados para os números racionais. Naquele momento, Kieren considerou que esse significado se caracteriza por ser um modo de pensar altamente voltado aos procedimentos ou algoritmos.

Há, no entanto, outra maneira de significar os números racionais baseando-se na forma de representação: "Todo número racional pode ser representado na forma decimal por um número finito de casas ou por uma dízima periódica" (CHAVANTE, 2015b). Tal modo de significar os números racionais pode levar a modos de pensar como daquele estudante, citado na seção 2.4, que define número racional a partir da negação dos irracionais.

Tema epistemológico 6: *geométrico*. Os números racionais enquanto pontos de uma reta já eram utilizados por Dedekind. No livro de Chavante (2015b), o autor apresenta a representação de um número racional na reta numérica, discutindo sua localização por meio de diferentes representações (fração, número misto, decimal). Nesse contexto, devemos notar que o número zero, além do elemento neutro para a adição, representa a origem da reta e o número um, além de elemento neutro da multiplicação, é valorizado enquanto a unidade.

Kieren (1980) e Pinto (2011) também chamam a atenção para o reconhecimento dos números racionais na reta numérica na construção do sentido de número racional. Se, por um lado, o significado de número racional enquanto ponto na reta numérica favorece a noção de densidade dos números racionais, como apresentado no artigo de Zakaryan e Ribeiro (2016), por outro, chamamos a atenção para a nem tão evidente associação entre o ente geométrico (ponto na reta numérica) e o número, pois isso exige, por parte do estudante, o estabelecimento de uma correspondência biunívoca entre o ponto e o número.

Uma segunda forma de significação do conceito de número racional cuja origem tem um forte viés geométrico é aquela apresentada por Caraça (1951), quando o número racional é tido como a razão entre os comprimentos de dois segmentos comensuráveis. Por mais que esse significado se enquadre em uma comparação entre comprimentos (*ratio*), acreditamos que a noção de grandezas comensuráveis carrega consigo alguma especificidade que precisa ser destacada, principalmente pelo fato de estabelecer uma relação estreita entre os números racionais e irracionais. Vale lembrar que a descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos (ROQUE, 2012).

Tema epistemológico 7: *multiplicar e dividir*. Em determinados contextos, usa-se a fração $\frac{a}{b}$ (com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$) no sentido de dividir algo em b partes iguais e multiplicar o resultado por a (ou em outra ordem, multiplicar algo por a e dividir o resultado em b partes iguais). Esses casos, geralmente, são acompanhados da preposição "de", que carrega consigo um sentido multiplicativo. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ de 60 é o mesmo que $\frac{2}{3}.60 = \frac{2.60}{3} = \frac{120}{3} = 40$. Nesse exemplo, temos que a fração $\frac{2}{3}$ modificou o número 60 (situação inicial), transformando-o em 40 (situação final). Dizemos que os números racionais, nessa perspectiva, apresentam uma característica de operador, isto é, algo que modifica uma situação sobre a qual atua[71]. Além disso, por seu sentido multiplicativo, é comum dizer que o número racional com essa característica de operador define uma estrutura multiplicativa de números racionais (KIEREN, 1976, 1980; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; DAMICO, 2007).

Chavante (2015a) não apresenta explicitamente essa característica de operador como uma forma de interpretar as frações do mesmo modo como o faz para a razão, quociente e parte de um inteiro. Todavia, em suas tarefas propostas, a ideia de operador aparece

[71] Podemos citar outros operadores bastante conhecidos na matemática, como a derivada e a integral. Em ambos, quando "entramos" com uma função, os operadores derivada ou integral e "devolvem" outra função, isto é, a modificam.

em situações como: $\frac{1}{4}$ do tanque de gasolina ou $\frac{4}{6}$ do trajeto percorrido. Nas tarefas envolvendo porcentagem, em seu livro, o autor novamente traz a ideia de operador quando se quer calcular 45% de 40:

$$\frac{45}{100}\ de\ 40$$

$$\frac{45}{100}.40 = \frac{45.40}{100} = 18$$

Na seção 2.1, já apresentamos que, segundo Behr et al. (1983), um número racional $\frac{p}{q}$ pode ser entendido como uma transformação de um objeto contínuo ou discreto. No caso do objeto contínuo (tal como o comprimento de um segmento de reta), pensamos $\frac{p}{q}$ como uma combinação esticador-diminuidor. Qualquer segmento de reta de comprimento L operado por $\frac{p}{q}$ tem seu comprimento esticado p vezes, em seguida, diminuído por um fator de q. No caso de $\frac{p}{q}$ operar sobre um conjunto discreto, Behr et al. (1983) consideram a interpretação multiplicador-divisor, em que o número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com n elementos em um conjunto com np elementos e, em seguida, esse número é reduzido para $\frac{np}{q}$ elementos.

Ainda segundo Behr et al. (1983), é possível associar o número racional $\frac{p}{q}$ a uma função $f(x) = \frac{p}{q}.x$ que transforma q em p ou uma máquina que ao receber q, devolve p. Lembramos Kieren (1980), quando considera a maior contribuição dessa associação a possibilidade de tratar a multiplicação entre números racionais como composição de função.

Tema epistemológico 8: *práticas cotidianas*. Ao longo da história, vimos que, mesmo trabalhando com frações comuns, os chineses tinham uma tendência a decimalizar as frações. O uso da ideia decimal, em situações de peso e medida, gerou esse hábito decimal no tratamento das frações. Vimos também que esses hábitos e diversas outras práticas, de diferentes povos e em diferentes contextos, propiciaram a criação do sistema posicional hindu-arábico, que passou a ser usado, no ocidente, somente no século dezesseis.

Na seção 2.4, destacamos a fala do professor Roberto, quando ele associa os números racionais, em suas representações de fração e decimal, ao uso da moeda do pais, ressaltando a importância disso para a compreensão desses números: "*Porque você vê mais facilidade do aluno em número decimal toda a vez que você começa a conversar com ele sobre dinheiro*" (entrevista com Roberto). Também destacamos que, para Chavante (2015a), os números decimais são definidos como números com vírgula e aparecem em situações cotidianas, como em placas de trânsito para delimitar a altura máxima de um veículo ou em preços de combustíveis.

Os três exemplos trazidos (o trecho da história, a fala do professor Roberto e o livro didático) indicam como as práticas cotidianas são determinantes para significações de conceitos. Nesse sentido, destacamos algumas práticas cotidianas como um tema em torno do qual os números racionais podem ser significados. De algum modo, tais situações são trazidas para o interior da escola como um meio de se ensinar números racionais a partir da realidade do estudante. Contudo, tratam-se de situações em que, independentemente da escola, os números racionais aparecem e podem ser significados como *números utilizados* para lidar com dinheiro, peso, altura, receitas de cozinha, tempo (fração de segundos), descontos no comércio etc.

Em certo sentido, o que estamos querendo destacar nesse tema epistemológico é uma forma de significar os números racionais que tem uma característica em comum com o tema epistemológico 10: relevar a natureza do número. Enquanto, no tema 10, o número racional é “qualquer coisa” que satisfaça aquelas propriedades do corpo dos racionais, neste tema epistemológico, estamos considerando aquelas situações da prática cotidiana, em que sua significação ocorre pela associação ao seu uso social, independente da natureza do número. São situações diárias do tipo: (i) expressões como “frações de segundo” para indicar um pequeno intervalo de tempo, que geralmente é dado na representação decimal; (ii) o valor do preço da gasolina, dado por um número racional na representação decimal, muitas vezes, com três casas decimais, enquanto que nosso sistema monetário possui apenas duas casas decimais; (iii) pessoas da religião católica rezam o terço, assim chamado porque corresponde a um terço de um rosário (LINS; SILVA, 2008); (iv) muito antigamente, os colonizadores portugueses cobravam um imposto sobre todo o ouro extraído no Brasil, correspondendo a um quinto do ouro, e esse imposto era mandado para Portugal em navios chamados de “o navio dos quintos”. Daí veio a expressão “vá para os quintos!”, que quer dizer “vá para longe” (LINS; SILVA, 2008).

Os números racionais são usados em muitas situações sem ter, necessariamente, alguma ligação com um significado específico daqueles próprios da

Matemática Escolar ou da Matemática Acadêmica, mas são provenientes de uma Matemática do Cotidiano[72].

Tema epistemológico 9: *classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros*. Esse significado dos números racionais, característico da matemática contemporânea, surge na história nos séculos XVIII e XIX. É resultado de um contexto histórico favorável à matemática como um sistema lógico-formal-dedutivo e, no que diz respeito aos números, significou a construção de um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade (ROQUE, 2012).

Os livros didáticos voltados ao ensino superior que foram analisados por nós apresentam a construção dos números racionais como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, ou seja, trata-se de uma extensão do conjunto $\mathbb{Z}$ e cujas propriedades também são deduzidas daquelas já conhecidas em $\mathbb{Z}$. Os professores formadores por nós entrevistados também falaram sobre esse tema a partir do qual o número racional pode ser significado. As *Reflexões 2* e *7* discutem mais diretamente alguns aspectos dessa construção dos números racionais.

No caso da *Reflexão 2*, indicamos a estranheza de significar número racional como uma classe de equivalência, ou seja, como um conjunto. Como afirmou o professor Victor durante a entrevista, *"Acho que é um processo de reificação, que você tem uma coisa que é encapsulada como um objeto, se você for pensar na construção formal* [dos números racionais] *ele é construído primeiro como um conjunto, aí depois você chama aquilo de número*.

Nesse contexto, de classes de equivalência, a *fração* significa um símbolo, uma maneira convencional de se escrever o par (a, b) na forma $\frac{a}{b}$ (CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984).

Tema epistemológico 10: *elemento de um corpo*. Os trabalhos de Wasserman (2014, 2016) nos indicaram, em vários momentos de nossa discussão e, em particular, nas *Reflexões 3* e *9*, que valorizar a coletividade dos axiomas pode ser um caminho fértil para se trabalhar as estruturas algébricas em cursos de formação de professores. O caminho para isso, como mostramos, pode ser as equações polinomiais do primeiro grau com uma incógnita. Isso

[72] Segundo David, Moreira e Tomaz (2013), "*Matemática do cotidiano*, vista como um conjunto de ideias, saberes e práticas (frequentemente, mas nem sempre, com um correspondente na matemática escolar) utilizadas em situações do cotidiano (dia a dia, trabalho, etc.) fora da escola" (p. 45, grifos dos autores).

significa que os números racionais sejam considerados como solução de uma equação do tipo $ax = b$, com $b \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Kieren (1976), ao considerar *elemento de um corpo* como um dos significados para os números racionais, sugere que o trabalho com as equações pode, inclusive, promover justificativas para as operações com os números racionais na forma de fração que podem ser ricas para o ensino desses números. Como constatamos na história da matemática, os egípcios tomavam as frações no contexto das soluções de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, como aquelas consideradas por al-Khwarismi.

Nesse contexto de elemento de um corpo, o número racional é "qualquer coisa" que satisfaça aquelas propriedades do corpo dos racionais, independentemente se esse número significa um quociente, uma razão ou uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros. A estrutura se sobrepõe à natureza do número.

Lembramos, também, que se considerarmos a quádrupla $(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$, onde $(\mathbb{Q}, +, .)$ é um corpo e $\leq$ é a relação de ordem total[73] compatível com as operações usuais de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, podemos pensar na coletividade dos axiomas de corpo ordenado $(\mathbb{Q}, +, ., \leq)$ e nas propriedades consequentes desses axiomas para buscar a resolução de inequações em $\mathbb{Q}$, assim como fizemos para as equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Essa característica, de ser um corpo ordenado, também vale para o corpo dos números reais, o que nos permite resolver inequações em $\mathbb{R}$, bastante comum na Matemática Escolar. Por outro lado, o mesmo não vale para o corpo dos complexos $(\mathbb{C}, +, .)$, pois este não é ordenado e, por esse motivo, não existem inequações com números complexos.

Tema epistemológico 11: *o corpo de frações do domínio de integridade* $\mathbb{Z}$. Esse tema epistemológico parece-nos o mais distante da Matemática Escolar. Discutimos, a partir dos livros de Domingues e Iezzi (2003) e Evaristo e Perdigão (2013), a respeito de tal construção e a *Reflexão 5* ilustra isso. É um modo de significar os números racionais característico da Matemática Acadêmica e, do ponto de vista da história aqui retratada, é o significado mais recente atribuído aos números racionais.

Nessa perspectiva recente, os elementos do conjunto quociente $K = (A \times A^*)/\sim$, em que A é um domínio de integridade, são as *frações* $\frac{a}{b}$ $(a \in A$ e $b \in A^*)$. Nesse

[73] Se R é uma relação em X que, além de satisfazer as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, satisfaz a propriedade "para todo x e para todo y, distintos, pertencentes a X se tem xRy ou yRx" (CARVALHO, LOPES, SOUZA, 1984, p. 78), então R é uma relação de ordem em X.

contexto, o significado de fração está atrelado ao conceito avançado de conjunto quociente. Quando tomamos o domínio $\mathbb{Z}$ como o domínio de integridade A, então o corpo $(K, +, .)$ é chamado de corpo dos números racionais e é denotado por $(\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim, +, .)$.

Em certa medida, esse modo de significar os números racionais favorece reconhecer que há paralelos entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[x]$, uma vez que ambos são corpos de frações de um domínio de integridade. Como dissemos na *Reflexão 5*, na Matemática Acadêmica, notar essa "semelhança" é importante, pois permite ao matemático lidar com coisas distintas ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[x]$) como se fossem a mesma coisa (corpo de frações). Dessa maneira, os elementos $\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{x+1}{x^2+1}$ possuem uma característica que os aproxima: são elementos de um corpo de frações de um domínio de integridade A.

O Quadro 5 apresenta nossa Matriz Epistemológica de Número Racional (MENR), construída com base na Matriz Epistemológica do conceito de adaptação de Sepulveda (2010).

Quadro 5: Matriz Epistemológica de significação dos Números Racionais (MENR)

Tema Epistemológico	**Categorias**	**Compromissos ontológicos e epistemológicos**
1. *Relação entre grandezas*	Taxa	Número racional é interpretado como uma variação de uma grandeza em relação a outra, de naturezas distintas.
	Razão	Número racional é interpretado como um indicador comparativo entre duas quantidades de naturezas semelhantes, não como um número.
2. *Divisão entre dois números inteiros*	Divisão indicada	Número racional é interpretado como uma quantidade obtida pela divisão de duas quantidades. $\frac{a}{b}$ é usado como forma de escrever $a \div b$.
	Quociente	Número racional é interpretado como um número obtido por meio da divisão de dois números inteiros.

3. *O inverso de um número inteiro*	O inverso da operação	Número racional é interpretado como o inverso de um inteiro: dividir por a é o mesmo que multiplicar pelo inverso de a
	Múltiplo	Número racional $\frac{a}{b}$ é interpretado como um múltiplo do inverso do número inteiro b.
4. *Processo de dupla contagem*	Dividir o todo contínuo	Número racional é interpretado como a divisão de uma quantidade contínua em subpartes de mesmo tamanho.
	Dividir o todo discreto	Número racional é interpretado como a divisão de uma quantidade discreta em subpartes de mesmo tamanho, sendo a "parte" o número de objetos tomados e o "todo" o número total de objetos.
5. *Formas de representar*	Fração	Número racional é interpretado como um número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, sem considerar as restrições para os números a e b.
	Fração de inteiros	Número racional é interpretado como aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b números inteiros, com $b \neq 0$.
	Decimal	Número racional é interpretado como aquele que pode ser representados na forma decimal por um número finito de casas ou por uma dízima periódica.
6. *Geométrico*	Localização na reta	Número racional é interpretado como ponto na reta numérica.
	Relação entre dois segmentos comensuráveis	Número racional é interpretado como a razão entre dois segmentos comensuráveis.
7. *Multiplicar e dividir*	Transformação de um objeto contínuo	Número racional é interpretado como uma combinação esticador-diminuidor.
	Transformação de um objeto discreto	Número racional é interpretado como uma combinação multiplicador-divisor.

	Funcional	Número racional é interpretado como uma função $f(x) = \frac{p}{q} . x$ que transforma q em p ou uma máquina que ao receber q, devolve p.
8. *Práticas cotidianas*	Associação ao uso social	Número racional é interpretado como os números utilizados nas práticas cotidianas.
9. *Classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros*	Construção formal a partir dos inteiros	Número racional é interpretado como uma classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros.
	Abstração	Número racional é interpretado como um conjunto antes de se tornar um número.
10. *Elemento de um corpo*	Solução de uma equação do tipo $ax = b$ (com $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^*$)	Número racional é interpretado como elemento de um corpo quociente.
	A relevância da estrutura sobrepõe a natureza do número	Número racional é interpretado como "qualquer coisa" que satisfaça aquelas propriedades do corpo dos racionais.
11. *O corpo de frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}$*	Estabelecer semelhanças para lidar com coisas distintas	Número racional é interpretado como um elemento do corpo das frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}$.

Fonte: o próprio autor

Ao final da construção de nossa Matriz Epistemológica de Número Racional (MENR), duas questões precisam ser respondidas: (i) em que medida individuar as zonas do perfil conceitual se diferem de determinar os temas epistemológicos? (ii) por que construir mais uma categorização para os números racionais, sendo que há, na literatura, diferentes categorizações[74] já postas?

A primeira pergunta pode ser respondida com base no apontamento de Sepulveda (2010), quando diz que as "zonas do perfil conceitual não são equivalentes a diferentes significados tornados estáveis socialmente atribuídos ao conceito, mas a modos de pensar, ou contextos epistemológicos e discursivos em que estes significados emergem e são estabilizados" (p. 183). Isso significa que os compromissos epistemológicos e ontológicos aqui identificados na Matriz Epistemológicos de Número Racional (MENR) precisam ser

[74] Além de Kieren (1976, 1980), temos Behr et al. (1983), Onuchic e Allevato (2008), Romanatto (1997), entre outros.

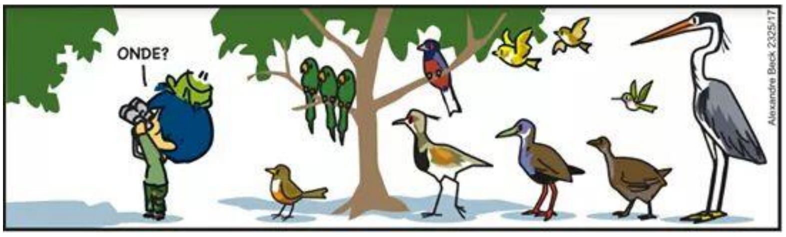
combinados entre si, em um movimento analítico a ser realizado em outras pesquisas, de modo a individuar as zonas de um perfil de número racional. Além disso, como já afirmamos, precisamos de mais dados empíricos (principalmente no domínio microgenético) para que nossas zonas não sejam ricas do ponto de vista teórico, mas pobres quando confrontadas com dados empíricos. Certamente, os temas epistemológicos aqui levantados serão utilizados para construir e analisar questionários, entrevistas e aulas vídeo-gravadas voltadas para este domínio microgenético, na busca das (possíveis) zonas de um perfil conceitual de número racional. Como aponta Sepulveda (2010), uma das contribuições do trabalho de Coutinho (2005) foi a percepção da possibilidade de "incluir a busca de modos de expressão recorrentes nas respostas a questionários como um dos procedimentos metodológicos para determinar as zonas de um perfil" (SEPULVEDA, 2010, p. 56).

A segunda pergunta pode ser respondida tomando-se por base a primeira. As zonas de um perfil conceitual não são equivalentes a diferentes significados tornados estáveis socialmente atribuídos ao conceito, mas sim, são compostos por uma combinação de compromissos epistemológicos e ontológicos (e axiológicos) que estabilizam formas de pensar e modos de falar sobre os conceitos e possibilitam individuar zonas e perfilar um conceito. As zonas de um perfil não são, portanto, uma categorização construída a partir de análises estritamente matemáticas, buscando significados e relações matemáticas somente no interior da própria matemática. As zonas do perfil conceitual de número racional – como de qualquer outro conceito – devem ser compostas por formas de pensar e falar sobre esse conceito e isso inclui, também, formas ditas não científicas.

Nesse sentido, um perfil conceitual de número racional se difere de outras categorizações já organizadas na literatura para os diferentes significados dos números racionais, na medida em que inclui não apenas relações matemáticas, mas, também, diferentes modos de pensar dentro e fora das salas de aula.

No capítulo seguinte, apresentamos nossas análises sobre o que chamamos de aprofundamento metodológico para o ensino do corpo dos números racionais.

3. Aprofundamento metodológico para o ensino do corpo dos números racionais



Enquanto o capítulo 2 discutiu aprofundamentos teóricos para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática, dando ênfase a *o que* e *por que* trabalhar o corpo dos números racionais na formação do professor, este capítulo 3 está mais voltado a *como*, sugerindo algum caminho que consideramos plausível. De certo modo, a divisão dos capítulos 2 e 3 é feita apenas por motivos de organização da tese, pois, na prática, esses capítulos se complementam e poderiam ser escritos juntos, dada a estreita relação entre eles. É notável que, ao longo de todo o capítulo 2, muitas indicações do *como* ensinar o corpo dos números racionais surgiram (por exemplo, nas *Reflexões 3*, *7*, *9*, *10*, *12*, *13*, *15*, *17*, *20*), o que reforça a ideia de que não há uma nítida separação entre esses capítulos.

De modo análogo, algumas discussões realizadas neste capítulo poderiam ser deslocadas para o capítulo 2. É o caso da seção 3.1 que virá na sequência, em que realizamos um estudo de documentos oficiais voltados tanto para a Educação Básica – a Base Nacional Comum Curricular – como para cursos de Licenciatura em Matemática – Diretrizes Curriculares e Projetos Pedagógicos de Cursos –, com o objetivo de compreender como os números racionais aparecem nesses documentos e, no caso dos documentos para a Licenciatura, como a estrutura algébrica corpo é proposta para a formação de professores. Deixamos esse estudo para o capítulo 3, por entendermos que os documentos analisados servem como base para a maneira como os conteúdos estão dispostos ao longo dos diferentes níveis de estudo e, dessa forma, indicam uma maneira de *como* abordar os conteúdos. Veremos, ao longo da seção 3.1, que a investigação por nós desenvolvida sugere uma alteração nesse *como* apresentado pelos documentos, propondo uma mudança curricular na formação matemática do professor.

Além da análise dos documentos oficiais, neste capítulo, temos a seção 3.2, em que realizamos uma discussão sobre tarefas. Nessa seção, sugerimos nossa intenção de delineamento de materiais didáticos, sendo que esses materiais didáticos são por nós chamados de tarefas, seguindo a tipologia e a diferenciação entre tarefa e atividade propostas por Ponte (2005, 2014). Dessa forma, a seção 3.2 é uma seção que visa fundamentar um dos resultados principais desta tese e que compreende o quarto objetivo específico: *elaborar* uma sequência de tarefas para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática, baseada nas pesquisas realizadas ao longo dos capítulos 2 e 3.

3.1 O que apresentam os documentos oficiais

Na introdução deste trabalho, afirmamos que a escolha pelo terceiro caminho – aquele que considera o ensino das estruturas algébricas na formação do professor relevante para a formação docente, desde que se busque articulações com os conteúdos a serem abordados na Educação Básica – considerou o fato de que as estruturas algébricas estão presentes em cursos de Licenciatura em Matemática. Isso pode ser percebido e justificado por meio do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de algumas instituições (Quadro 7). Documentos oficiais, como as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (CNE/CES 1.302/2001), normatizam e orientam os planejamentos curriculares dos cursos, fazendo parte da constituição desses projetos.

Dessa maneira, entendemos ser conveniente apresentar e discutir esses documentos (Diretrizes e PPC de alguns cursos) a fim de perceber que espaço e relevância têm sido dados aos números racionais e à estrutura de corpo na formação do professor de matemática em alguns cursos.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, conforme Parecer CNE/CP 1.302/2001 (BRASIL, 2002), explicitam as diferentes finalidades dos cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática. “Os cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a educação básica” (BRASIL, 2002, p. 3).

Quando descrevem tais diferenças, as Diretrizes demonstram “a complexidade da generalização evidente na constituição profissional do licenciado” (JUNQUEIRA; MANRIQUE, 2013, p. 632), uma vez que caracterizar a especificidade do curso de Licenciatura em Matemática parece ser menos evidente que a do Bacharelado. Enquanto para os bacharéis espera-se que o curso propicie (i) uma sólida formação de conteúdos de Matemática e (ii) uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional; para os cursos de Licenciatura é desejado que seus egressos tenham (i) uma visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos, (ii) uma visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania e (iii) visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina (BRASIL, 2002).

Ao discutir os Conteúdos Curriculares, as Diretrizes consideram os seguintes conteúdos[75] comuns a todas as Licenciaturas em Matemática: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; e Geometria Analítica. Na sequência, complementa afirmando que essa parte comum deve incluir, entre outros, os “conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise”. Diferente do que acontece com o Bacharelado, em que é sugerida a disciplina de Álgebra, para a Licenciatura as Diretrizes indicam a disciplina de Fundamentos de Álgebra. O mesmo acontece com a disciplina Análise Matemática, que, na Licenciatura, se torna Fundamentos de Análise.

Entretanto, apesar de os nomes das disciplinas indicarem diferenças entre a Álgebra para o Bacharelado e Fundamentos de Álgebra para a Licenciatura, as Diretrizes não explicitam quais são, deixando para as instituições estabelecê-las. Veremos, ainda nesta seção, que a disciplina de Fundamentos de Álgebra tem sido compreendida de diferentes maneiras pelas instituições, pois há cursos que entendem as estruturas algébricas como parte desses fundamentos, há cursos que não.

Apesar de aparecer no documento a necessidade de se incluir conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise, acreditamos que essa menção seja muito tímida e pouco clara para os propósitos de um curso de formação de professores. Concordamos com Junqueira e Manrique (2013), quando afirmam “que os conteúdos, da forma como são apresentados nos cursos de Licenciatura em Matemática, não sugerem a construção de uma visão global de maneira significativa para o aluno, estão fragmentados, desvinculados de significados” (p. 633). E, nesse sentido, as Diretrizes parecem não condizer com o que fora proposto pelo documento como perfil do licenciado, chegando a ser contraditório – termo utilizado por Junqueira e Manrique (2013). Apesar das críticas, consideramos que as Diretrizes têm a qualidade de destacar as diferenças entre os cursos (Bacharelado e Licenciatura) e, talvez, as dificuldades em caracterizar a especificidade da

[75] O termo *conteúdos* usado nesse contexto segue a escrita utilizada nas Diretrizes.

Licenciatura indiquem a necessidade de pesquisas como a nossa, que visam tornar mais claros os papéis das disciplinas de conteúdo matemático (como as relativas aos Fundamentos de Álgebra) para a prática docente do professor na Educação Básica. Esse é um dos desafios atuais da Educação.

Seguindo para os PPC, apresentamos a discussão a partir dos documentos de 15 cursos presenciais de instituições brasileiras, sendo 14 públicos e 1 privado[76]: Universidade Federal do Amazonas – câmpus Manaus (UFAM), Universidade Federal do Tocantins – câmpus Araguaína (UFT), Instituto Federal da Bahia – câmpus Salvador (IFBA), Universidade Federal do Piauí – câmpus Teresina (UFPI), Instituto Federal de Goiás – câmpus Goiânia (IFG), Universidade Federal do Mato Grosso – câmpus Rondonópolis (UFMT), Universidade Federal do ABC – câmpus Santo André (UFABC), Universidade Federal de Ouro Preto – câmpus Ouro Preto (UFOP), Universidade Federal do Rio de Janeiro – câmpus Cidade Universitária (UFRJ), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – câmpus Rio Claro (Unesp), Universidade Federal do Rio Grande – câmpus Carreiros (FURG), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Cornélio Procópio (UTFPR), Universidade Federal do Paraná – câmpus Curitiba (UFPR), Mackenzie – câmpus São Paulo.

Seria inviável investigar os PPC de todos os cursos de Licenciatura em Matemática do país[77]. Por isso, selecionamos alguns para analisarmos. Em um primeiro momento, o critério de escolha das instituições a serem consideradas foi tomar aquelas que, de algum modo, se relacionam com o nosso trabalho. A UTFPR, a UFOP e a UFRJ são as instituições atuais dos professores formadores entrevistados neste trabalho (Tiago Reis, Plínio Moreira e Victor Giraldo, respectivamente); já a UEL e a UFABC são as universidades em que a pesquisa se desenvolveu (por meio do Doutorado e do Doutorado Sanduíche no País, respectivamente). Contudo, pensamos que esse número, cinco, poderia ser ampliado de modo a nos permitir maior clareza sobre a maneira como os cursos de Licenciatura em Matemática compreendem a disciplina de Fundamentos de Álgebra e qual o espaço e a relevância dados à estrutura de corpo e aos números racionais em suas ementas. Aumentamos o número de

[76] Pesquisamos sobre o oferecimento de cursos presenciais de Licenciatura em Matemática em algumas instituições privadas (Mackenzie; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP); Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR); e Anhanguera), a partir do site e-MEC (http://emec.mec.gov.br/). Com exceção do curso do Mackenzie, os demais não ofereciam curso presencial ou, quando ofereciam, não disponibilizavam as ementas das disciplinas.
[77] No Cadastro e-MEC de Instituições e Cursos de Educação Superior do Ministério da Educação (MEC) constam 830 cursos de Licenciatura em Matemática.

instituições investigadas para 15, garantindo que todas as regiões do Brasil (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul) tivessem pelo menos duas incluídas no estudo. Além de procurar por universidades/institutos das cinco regiões do país, outro critério para a escolha foi a disponibilidade do PPC ou, pelo menos, da Matriz Curricular e das Ementas (MCE) das disciplinas em seus sites. Sem considerar outro critério mais específico para a escolha, buscamos, de maneira arbitrária, cursos de instituições de ensino das diferentes regiões na lista disponibilizada no e-Mec, resultando naqueles já citadas e que organizamos no Quadro 6:

Quadro 6: Cursos investigados por região do Brasil

Região do País	**Instituições investigadas**
Norte	UFAM (Manaus); UFT (Araguaína)
Nordeste	IFBA (Salvador); UFPI (Teresina)
Centro-Oeste	IFG (Goiânia); UFMT (Rondonópolis)
Sudeste	UFABC (Santo André); UFOP (Ouro Preto); UFRJ (Rio de Janeiro); Unesp (Rio Claro); Mackenzie (São Paulo)
Sul	FURG (Rio Grande); UEL (Londrina), UTFPR (Cornélio Procópio); UFPR (Curitiba)
Total	**15**

Fonte: o próprio autor

Sabemos que os PPC, de um modo geral, ou as ementas, de um modo particular, não definem o tratamento que é dado a cada disciplina do curso. O fato da ementa de uma dada disciplina não explicitar o conteúdo "números racionais" não significa, necessariamente, que um professor não tratará dos números racionais ao longo do semestre/ano. Do mesmo modo, constar o tema "números racionais" não garante que este será abordado ao longo da disciplina. Esse descompasso entre o que está apresentado nas ementas e o que o professor efetivamente faz se aproxima do que Oliveira (2013) chama de currículo prescrito e currículo implementado. O primeiro refere-se àquele presente em documentos oficiais e o segundo àquele desenvolvido pelos professores durante o curso. Sem nos aprofundarmos nessa discussão sobre currículo prescrito e currículo implementando, mas reconhecendo tal distinção, vamos nos concentrar no currículo prescrito, pois julgamos que eles sejam constituintes relevantes do processo de formação de professores, além de representarem uma visão de formação vislumbrada por aqueles que os desenvolveram.

Com os PPC ou somente as MCE em mãos, realizamos nossa análise seguindo, pela ordem, os procedimentos: 1) busca pela disciplina de Fundamentos de Álgebra (não havendo esse nome, buscamos por Álgebra, Álgebra Abstrata ou Estruturas Algébricas) na Matriz Curricular do curso; 2) recorte da ementa dessa(s) disciplina(s); 3) busca pelas palavras *corpo*, *anel* e *grupo* em todas as disciplinas obrigatórias; 4) busca, nas disciplinas obrigatórias, pelas palavras “racionais” e “racional”, identificando o contexto (disciplina) em que apareciam; 5) nos casos das instituições que disponibilizavam o PPC, buscamos, em algumas delas, os objetivos do ensino da Álgebra (ou Estruturas Algébricas) na formação do professor; 6) por fim, fizemos uma leitura geral sobre as demais disciplinas de conteúdo matemático, visando perceber contextos em que os números racionais pudessem estar presentes, mas que não estivesse explicitado por meio dos termos “racionais” ou “racional”.

Um primeiro resultado de nossas análises está sintetizado no Quadro 7:

Quadro 7: A presença da estrutura algébrica corpo e dos números racionais nas ementas das disciplinas dos 15 cursos de Licenciatura em Matemática investigados

Instituição e o documento (junto com o ano, quando disponibilizado) utilizado na investigação	**Aborda estruturas algébricas (grupo, anel ou corpo) nas disciplinas obrigatórias?**	**Aborda a estrutura algébrica corpo explicitada em disciplinas obrigatórias?**	**Os termos “racionais” ou “racional” aparecem em alguma ementa de disciplina obrigatória? Se sim, em quais contextos?**
UFAM (MCE – 2011)	Sim, nas disciplinas *Introdução à Álgebra* e *Estruturas Algébricas*.	Sim, na disciplina de *Estruturas Algébricas*.	Sim, na disciplina de *Introdução à Álgebra*, no tema “Números Inteiros e Racionais”.
UFT (PPC – 2012)	Sim, na disciplina *Álgebra Moderna I*.	Não.	Sim, na disciplina de *Análise Real 1*, no tema “Números reais: conjunto dos números naturais, números racionais”.
IFBA – Salvador (PPC – 2015)	Sim, nas disciplinas de *Álgebra I* e de *Álgebra II*.	Sim, na disciplina de *Álgebra II*.	Sim, na disciplina de *Fundamentos de Matemática I*, no tema “Construção dos conjuntos numéricos valorizando a abordagem histórica: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos”.
UFPI – Teresina (PPC – 2006)	Sim, nas disciplinas *Álgebra Superior I* e *Fundamentos de Matemática Elementar*.	Sim, na disciplina de *Fundamentos de Matemática Elementar*.	Sim, na disciplina de *Fundamentos de Matemática Elementar*, no tema “Corpo dos números racionais”; na disciplina Álgebra Superior I, no tema “Extensão Algébrica dos Racionais” e na disciplina de Teoria dos Números, no tema “Expansão Decimal de Números Racionais”.
IFG – Goiânia (PPC – 2009)	Sim, na disciplina de *Álgebra II*.	Sim, na disciplina de *Álgebra II*.	Não.
UFMT – Rondonópolis (PPC – 2008)	Sim, nas disciplinas de *Álgebra Linear I*, *Estruturas Algébricas I* e *Estruturas Algébricas II*.	Sim, nas disciplinas de *Álgebra Linear I* e *Estruturas Algébricas II*.	Sim, na disciplina *Estruturas Algébricas II*, no tema “polinômios sobre o corpo racional”.

UFABC – Santo André (PPC – 2010)	Sim, na disciplina *Fundamentos de Álgebra*.	Não.	Sim, na disciplina *Teoria Aritmética dos Números*, no tema "Construção do Conjunto dos Números Racionais" e na disciplina *Fundamentos de Análise*, no tema "Construções dos Racionais a partir dos Inteiros".
UFOP (MCE – 2016)	Não.	Não.	Não.
UFRJ (MCE – site)	Sim, na disciplina *Teoria de Anéis e Grupos*.	Não.	Sim, na disciplina *Números Inteiros*, no tema "Os números racionais: construção dos racionais a partir de $\mathbb{Z}$, operações com números racionais"; na disciplina *Fundamentos de Aritmética e Álgebra*, no tema "O conjunto dos racionais: Construção"; e na disciplina *Fundamentos de Funções e Conjuntos*, no tema "A cardinalidade dos conjuntos numéricos N, Q e R".
Unesp – Rio Claro (PPC – 2015)	Sim, nas disciplinas de *Estruturas Algébricas I* e *Estruturas Algébricas II*.	Sim, na disciplina de *Estruturas Algébricas II*.	Não.
FURG (PPC – 2014)	Sim, na disciplina *Álgebra Abstrata*.	Sim, na disciplina *Álgebra Abstrata*.	Sim, na disciplina de *Álgebra Abstrata*, no tema "corpo dos racionais" e na disciplina Introdução ao Cálculo, no tema "Funções racionais".
UEL (PPC – 2013)	Sim, na disciplina de *Estruturas Algébricas*.	Sim, na disciplina de *Estruturas Algébricas*.	Sim, na disciplina *Estruturas Algébricas*, no tema "Extensões de corpos sobre os racionais".
UTFRP-Cornélio Procópio (PPC – 2014)	Sim, na disciplina de *Álgebra*.	Sim, na disciplina de *Álgebra*.	Sim, na disciplina de *Fundamentos de Matemática I*, no tema "construção dos números racionais; operações com números racionais".
UFPR – Curitiba (MCE – site)	Sim, nas disciplinas de *Teoria de Grupos* e *Teoria de Anéis*.	Sim, na disciplina de *Teoria de Anéis*.	Sim, na disciplina de *Fundamentos de Análise*, no tema "racionais e reais" e na disciplina de Funções, no tema "Funções racionais".
Mackenzie – São Paulo (MCE – 2015)	Sim, nas disciplinas de *Álgebra I* e *Álgebra II*.	Sim, na disciplina de *Álgebra II*.	Não.

Fonte: o próprio autor

Com base no Quadro 7, percebemos que apenas um curso investigado, o da UFOP, não contempla estruturas algébricas em suas disciplinas obrigatórias. Como já dissemos, as Diretrizes deixam a cargo dos cursos a interpretação para Fundamentos de Álgebra (que, segundo as Diretrizes, deve ser comum a todas as Licenciaturas em Matemática) e a intepretação assumida pela UFOP destoa dos demais cursos investigados, na medida em que não considera as estruturas algébricas como sendo parte desses fundamentos.

Por exemplo, a Unesp – Rio Claro, em seu PPC de Licenciatura em Matemática, faz uma correspondência entre disciplinas do currículo mínimo (de acordo com as diretrizes) e as disciplinas em que se desdobram no curso. A disciplina de Fundamentos de Álgebra, exigida pelas Diretrizes (CNE/CES 1.302/2001), é contemplada, pela Unesp, por meio de cinco disciplinas (totalizando 20 créditos, sendo 4 créditos para cada disciplina, como indica o PPC): Matemática Elementar, Funções Elementares, Estruturas Algébricas I, Estruturas Algébricas II e Teoria dos Números. Nesse caso, a estrutura de corpo é tratada na disciplina de Estruturas Algébricas II. Diferentemente da UFOP, na Unesp as estruturas algébricas compreendem um papel central no entendimento sobre os fundamentos de álgebra necessários à formação o professor. Dos 20 créditos disponibilizados a este conteúdo matemático comum, 8 são destinados às estruturas algébricas.

Outro aspecto a ser observado a partir do Quadro 7 refere-se à terceira coluna, que trata dos cursos que apresentam (ou não) explicitamente a estrutura de corpo em alguma de suas ementas. Excluindo a UFOP que não aborda as estruturas, há cursos (UFT, UFABC, UFRJ) que não possuem a palavra *corpo* (no sentido de estrutura algébrica) em seu ementário de disciplinas obrigatórias. A UFT, em sua disciplina Álgebra Moderna I[78], se restringe à estrutura de grupo. Na UFABC, a disciplina de Fundamentos de Álgebra[79] contempla tanto a estrutura de grupo como a de anel. Na UFRJ, há uma disciplina chamada Teoria de Anéis e Grupos[80]. Em ambos os casos (UFABC e UFRJ), a estrutura de corpo pode estar implícita no estudo de anéis, mas a palavra *corpo* (no sentido de estrutura algébrica) não aparece no ementário.

Nas outras onze instituições, o termo *corpo* aparece, seja vinculado ao tratamento de polinômios ("Anel de Polinômios sobre um Corpo" – UFAM), seja relacionado aos racionais ("Corpo dos números racionais" – UFPI) ou desconectado de outro assunto ("Corpos" – UTFPR).

[78] Ementa: Números inteiros. Congruência módulo n e relações de equivalência. Teoria de grupos.
[79] Ementa: Conjuntos e Operações Binárias. Definição de Grupos e exemplos. Subgrupos. Homomorfismos. Classes Laterais. Grupos Quocientes. Definição de Anéis e exemplos. Subanéis. Homomorfismo de Anéis. Ideais e Anéis Quocientes. Anéis Euclidianos. Anéis de Polinômios. Aritmética dos Anéis de Polinômios.
[80] Ementa: Polinômios: polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Algoritmo de divisão, máximo divisor comum, polinômios irredutíveis, teorema de fatoração única. Critério de Eisenstein, funções racionais, decomposição em frações parciais. Raízes de Polinômios: determinação das raízes racionais de um polinômio em Z/[X], teorema fundamental da álgebra.

Não são todos os cursos investigados que abordam as estruturas algébricas na formação do professor, entretanto, podemos dizer que a maioria dos 15 cursos aborda sim e, em nossa interpretação, as consideram importantes a ponto de constá-las em alguma disciplina. Tomando novamente o PPC da Licenciatura em Matemática da Unesp – Rio Claro como exemplo, as disciplinas de conteúdo matemático (de um modo geral) são debatidas em termos de seu papel na formação do licenciado e do bacharel em Matemática. As estruturas algébricas aparecem como constituintes do pensamento algébrico, tanto do bacharel como do licenciado: "O pensamento algébrico constrói-se a partir da Geometria Analítica, prossegue com a Álgebra Linear, depois com outras estruturas algébricas (grupos, anéis e corpos) e tem um acabamento natural nas construções com régua e compasso, justificadas pela Teoria de Galois (neste último caso, para o bacharelado)" (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO", 201, p. 10). Com a formação de conteúdos mais avançados[81], segundo o PPC, o licenciando pode se voltar para os conteúdos que são ensinados na Educação Básica, por meio de disciplinas que tematizem a matemática elementar, como parece ser o caso da disciplina Matemática Elementar do Ponto de Vista Avançado[82] (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO", 2015). Essa parece ser a concepção do curso sobre o papel da Matemática Acadêmica na formação do professor.

Com relação à última coluna do Quadro 7, temos um aspecto que merece destaque. Fizemos uma busca pelos termos *racionais* e *racional*, pois gostaríamos de entender qual o espaço ou a relevância que os cursos de formação estão dando aos números racionais e, principalmente, se dão ênfase nas relações desse conceito com a Educação Básica (ensino, aprendizagem, diferentes significados e representações, operações), ou se o estão tematizando apenas como exemplo da estrutura algébrica corpo ou qualquer outro conteúdo avançado.

De forma surpreendente, os termos buscados não apareceram no ementário de quatro cursos investigados (IFG, UFOP, Unesp, Mackenzie). Isso não significa, entretanto, que esses cursos não tratem dos números racionais. Por exemplo, a já citada disciplina

---

[81] Segundo o PPC, as disciplinas de conteúdo matemático para a Licenciatura devem promover, paralelamente, a construção do pensamento diferencial e do pensamento algébrico. O pensamento diferencial se dá com disciplinas como Cálculo (I, II e III), Equações Diferenciais e Análise; o pensamento algébrico se dá com disciplinas como Geometria Analítica, Álgebra Linear, Estruturas Algébricas. A disciplina de Funções de Variável Complexa I é a confluência desses dois pensamentos. São todas essas disciplinas que o PPC da Licenciatura da Unesp - Rio Claro entende por formação de conteúdos mais avançados.

[82] Ementa: Construção de conjuntos numéricos. Geometria Euclidiana do ponto de vista axiomático. Geometrias não euclidianas.

Matemática Elementar do Ponto de Vista Avançado, e as disciplinas Matemática Elementar[83] e Matemática da Educação Básica[84] do curso da Unesp – Rio Claro aparentam abarcar esse conceito de alguma maneira, mesmo não explicitando o termo de nossa busca. Mas, levando em consideração o apontamento de Damico (2007), quando afirma que cursos de Licenciatura em Matemática não têm oferecido aos futuros professores uma preparação sobre os números racionais com a abrangência e o cuidado que esse assunto requer, acreditamos que a pouca relevância atribuída a esse tema fica evidente já no momento em que o termo *racionais* (ou *racional*) não consta em nenhuma ementa de um curso.

Por outro lado, o fato de o termo *racionais* (*racional*) aparecer em 11 dos 15 cursos investigados também não significa, necessariamente, que os números racionais têm tido espaço dentro dos currículos. Vejamos o caso da UEL. Nos documentos oficiais para a Licenciatura em Matemática da UEL, na deliberação 013/2013 que altera a matriz curricular do 1º ano e ementas do 1º e do 2º anos do curso de Licenciatura em Matemática da UEL, consta a disciplina Pré-Cálculo no 1º ano. O primeiro tópico da ementa é: números reais e suas propriedades. Na disciplina Matemática Elementar, ainda para o 1º ano, consta "Operações elementares. Regras de potenciação e radiciação. Logaritmo e exponencial. Trigonometria. Números complexos" (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2013, p. 6). Na disciplina Estruturas Algébricas para o 2º ano, a ementa é:

> Teoria elementar dos números. Grupos: subgrupos, subgrupos normais, grupos quocientes. Homomorfismo de grupo. Grupos de permutação. Anéis: subanéis, ideais, anéis quocientes, homomorfismo de anéis. Anéis de polinômios. Extensões de corpos sobre os racionais. Construção com régua e compasso. Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados. (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2013, p. 6-7).

Ou seja, na primeira disciplina, Pré-Cálculo, os números reais são prioridade. Tais números ganham um novo *status* na disciplina Análise Real, no 3º ano. Na disciplina Matemática Elementar, é a vez dos números complexos. Entretanto, os números racionais, seus diferentes significados e representações e os conhecimentos matemáticos para seu ensino não são foco de estudo nas disciplinas do primeiro ano (e também não serão nos demais anos, pelo menos se tomarmos as ementas como referência). O único momento em que o termo *racionais* aparece é na disciplina de Estruturas Algébricas, no tema "Extensões de corpos sobre os

[83] Ementa: Noções de lógica. Álgebra dos conjuntos. Conjuntos numéricos. Indução Finita. Desigualdades e valor absoluto. Significado de Argumentação e prova matemática.

[84] Ementa: Sistemas de numeração. Números Naturais. Frações. Razão e Proporção. Análise combinatória. Pensamento Algébrico. Funções.

racionais", ou seja, os números racionais são tomados como um exemplo da estrutura de corpo, não como foco de estudo.

O mesmo acontece nos cursos da FURG e da UFMT, em que o termo *racionais* aparece no contexto de "corpo dos racionais" e de "polinômios sobre o corpo racional", respectivamente. Sem contar a UFPR e a UFT, em que o termo só aparece na disciplina de Análise Real, cujo foco, geralmente, está nos números reais.

Reflexão 30: os PPC nos indicam para uma mudança

Essa breve análise de PPC, em especial das matrizes curriculares e das ementas, de Licenciatura em Matemática, nos permitiu, em certa medida, confirmar três hipóteses que tínhamos: i) a maioria dos cursos de formação de professores investigados, 14 de 15, abordam as estruturas algébricas em suas disciplinas, o que justifica a necessidade de se realizar pesquisas sobre o papel dessas estruturas na formação inicial de professores; ii) os números racionais são, em muitos casos, tomados como sabidos pelos estudantes, uma vez que seu tratamento não é priorizado ao longo do curso (como discutido na *Reflexão 23*); iii) em diversos casos, quando tratados, os números racionais são tomados como exemplos de estruturas e não como o foco de estudo.

É inegável que, ao propormos uma busca por fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática, estamos indicando uma possibilidade de alteração em currículos de cursos de Licenciatura em Matemática. Todo nosso estudo sobre os números racionais, fundamentado em diversos outros trabalhos, como os discutidos anteriormente, visa sugerir um caminho alternativo aos que estão postos, uma vez que temos percebido (ainda hoje) a "dupla descontinuidade" apontada em Klein (2009). O fato de que os números racionais não estão sendo tomados como foco de estudo nas Licenciatura nos mostra que a matemática na formação do professor vigente não se alinha àquela que propusemos: uma matemática que tem como ponto de partida e de chegada a Matemática Escolar. Enquanto ponto de partida, a Matemática Escolar se coloca como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo. Enquanto ponto de chegada, a Matemática Escolar deve estar impregnada de novas reflexões do licenciando como futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica.

Contudo, é preciso ter clareza e não perder de vista a complexidade que é o tema currículo. Segundo Sacristán (2000),

> [...] o currículo que se realiza por meio de uma prática pedagógica é o resultado de uma série de influências convergentes e sucessivas, coerentes

> ou contraditórias, adquirindo, dessa forma, a característica de ser um objeto preparado num processo complexo, que se transforma e constrói no mesmo. Por isso, exige ser analisado não como um objeto estático, mas como a expressão de um equilíbrio entre múltiplos compromissos. E mais uma vez esta condição é crucial tanto para compreender a prática escolar vigente como para tratar de mudá-la. (SACRISTÁN, 2000, p. 102).

Por não assumir o currículo como um objeto estático, mas como a expressão de um equilíbrio entre múltiplos compromissos, estamos sugerindo e, até em certa medida, indicando uma alternativa para os cursos de formação de professores. Diferentemente do que percebemos nos PPC investigados, estamos propondo uma mudança de olhar sobre o currículo no sentido de colocar o foco na Matemática Escolar e buscar, por meio dela, aspectos da Matemática Acadêmica que contribuam para a construção do conhecimento matemático para o ensino. Nessa mudança, os temas escolares como os números racionais, os números inteiros, o teorema de Pitágoras, a equação polinomial do segundo grau, entre outros, deixam de ser tomados como coadjuvantes para assumir o papel principal na formação matemática do professor, no sentido em que propusemos na seção 1.3.

É evidente que nosso estudo possui certos limites, uma vez que está circunscrito em torno de um tema matemático específico (o corpo dos números racionais). Sabemos que isso se insere em um contexto específico (o conteúdo comum de Fundamentos de Álgebra, indicado pela Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura) e, temos consciência, que para qualquer sugestão de mudança curricular, uma reflexão mais ampla e profunda acerca do currículo como um todo é demandada. Mas um movimento de mudança sempre precisa ser iniciado em algum momento.

Particularmente sobre os números racionais, o currículo que almejamos contempla uma mescla de aspectos de diferentes ementas dos cursos investigados. A disciplina Fundamentos de Matemática I[85], do IFBA – Salvador valoriza a abordagem histórica dos números, incluindo os racionais. Na UFRJ, as disciplinas de Fundamentos de

[85] Ementa: Construção dos conjuntos numéricos valorizando a abordagem histórica: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos.

Aritmética e Álgebra[86] e de Fundamentos de Funções e Conjuntos[87] indicam o tratamento dos números racionais relacionados ao seu ensino na Educação Básica, incluindo análises de livros didáticos e de propostas curriculares oficiais. Já a UFPI – Teresina apresenta as estruturas algébricas (anel e corpo) de maneira atrelada aos números (inteiros, racionais e reais) e polinômios, como pode ser visto na ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar: "Anel dos inteiros. Corpo dos números racionais. Corpo dos números reais. Anel dos polinômios".

Essa mescla a que nos referimos parece contemplar o conteúdo específico em uma perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, como sugerem Fiorentini e Oliveira (2013).

Pensar os conteúdos matemáticos que devem estar presentes em um currículo próprio para um curso de formação de professores passa, necessariamente, por compreender a matemática veiculada na Educação Básica. Desse modo, não poderíamos deixar de tecer algumas considerações acerca da principal "ferramenta" para orientar o currículo das escolas brasileiras nos próximos anos, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A defesa de uma referência nacional para a formulação de currículos vem sendo feita desde os anos 1980 ou antes disso (MACEDO, 2014). No artigo 26, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996, a base nacional comum já está prevista e, nas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica de 2013, é entendida como

> os conhecimentos, saberes e valores produzidos culturalmente, expressos nas políticas públicas e que são gerados nas instituições produtoras do conhecimento científico e tecnológico; no mundo do trabalho; no desenvolvimento das linguagens; nas atividades desportivas e corporais; na

[86] Ementa: História dos números. Números naturais. Contagem, conceituação das operações, algoritmos das operações elementares, histórico (ábaco, algoritmos em outros sistemas, algoritmos hindus primitivos). Algoritmos em outras bases de numeração. Potências: regras básicas e ligação com a aritmética. Estudo de regularidades numéricas: Ligações com a geometria. Progressões aritméticas e geométricas. Combinações simples. O conjunto dos inteiros e a noção de módulo. Estudo de equações modulares. O conjunto dos racionais: Construção. Modelos explorados no ensino. Análise de livros didáticos e paradidáticos e de propostas curriculares oficiais.

[87] Ementa: O conceito de função Injetividade, sobrejetividade, bijetividade, funções inversas à direita e à esquerda, funções inversas invertíveis. Relação entre funções e operações entre conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, propriedades. A cardinalidade dos conjuntos numéricos N, Q e R. Teorema de Cantor, a noção de número transfinito. Evolução histórica. Funções reais. Funções polinomiais. Funções racionais e algébricas. Funções trigonométricas. Funções exponenciais e logarítmicas. Funções e novas tecnologias. Modelos explorados no ensino e formas de abordagem. Análise de livros didáticos e paradidáticos e de propostas curriculares oficiais.

> produção artística; nas formas diversas de exercício da cidadania; nos movimentos sociais (BRASIL, 2013, p. 31).

No Plano Nacional de Educação (PNE), regulamentado em 2014 e com vigência de 10 anos, a BNCC aparece entre as estratégias para se atingir quatro das vinte metas (BRASIL, 2014) para a melhoria da qualidade da Educação Básica. Essas quatro metas dizem respeito à universalização do Ensino Fundamental (meta 2) e do Ensino Médio (meta 3), ao aumento das médias nacionais para o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) (meta 7) e à formação de professores (meta 15).

É evidente que a instauração de uma base nacional comum traz consequências para a formação de professores. A meta 15 visa garantir que todos os professores da Educação Básica possuam formação específica em nível superior, obtida em cursos de Licenciatura na área de conhecimento em que atuam e uma das estratégias (a estratégia 15.6), para alcançar tal meta, é:

> [...] promover a *reforma curricular dos cursos de licenciatura* e estimular a renovação pedagógica, de forma a assegurar o foco no aprendizado do (a) aluno (a), dividindo a carga horária em formação geral, formação na área do saber e didática específica e incorporando as modernas tecnologias de informação e comunicação, *em articulação com a base nacional comum dos currículos da educação básica.* (BRASIL, 2014, destaques nossos).

Portanto, dentre as diferentes consequências provenientes da instauração de uma base comum, uma delas, certamente, respinga no currículo dos cursos de formação de professores.

Frente a isso, investigamos como a BNCC orienta o trabalho com os números racionais ao longo de toda a Educação Básica para, então, termos condições de e elementos para propor qualquer alteração nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em particular, no que diz respeito ao corpo dos números racionais.

Em uma busca pelos termos “racionais” e “racional”, encontramos 22 citações que se referem aos números racionais. Pelos termos “fração” e “frações”, encontramos nove citações. Recortamos contextos em que cada uma dessas citações se encontram e trouxemos algumas partes que consideramos relevantes para nossa compreensão do tema. Nosso objetivo aqui é simplesmente compreender como o documento (BNCC) trata os números racionais ao longo da Educação Básica.

Os números racionais aparecem já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Seja no campo da Geometria, das Grandezas e Medidas ou da Estatística e Probabilidade, destacando que, para as aprendizagens de todas essas áreas, “[...] é essencial a ampliação dos conhecimentos dos números naturais e de suas operações, bem como a iniciação no convívio com um novo tipo de número, os racionais positivos” (BRASIL, 2016, p. 253).

Diversas noções são introduzidas nesse documento, como: (i) a ideia de razão: calcular “a probabilidade de ocorrer um resultado por meio de uma razão” (BRASIL, 2016, p. 266); (ii) a fração como divisão ou como parte-todo: “Outro conjunto de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento envolve os conhecimentos sobre as frações: os/as estudantes devem associá-las ao resultado de uma divisão e à ideia de parte de um todo” (BRASIL, 2016, p. 270); (iii) a insuficiência dos números naturais para a resolução de alguns problemas devem levar aos números racionais positivos:

> Os números decimais, por exemplo, passam a ter maior significado ao serem utilizados no estudo das medidas, pois, a partir de situações em que a unidade tomada para medir uma grandeza não cabe um número exato de vezes na grandeza a ser medida, eles compreendem que os números naturais são insuficientes para expressar o resultado da medida. (BRASIL, 2016, p. 273).

No 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, a percepção de número racional representado na reta numérica também é recomendada. A comparação e a ordenação dos racionais positivos e as formas fracionária e decimal fazem parte dos estudos nesses anos:

> Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão e à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. [...] Comparar e ordenar números racionais positivos (representação fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (BRASIL, 2016, p. 275).

Passamos para os anos finais do Ensino Fundamental, período em que o campo dos números se amplia consideravelmente. Já no 6º ano, no estudo de Estatística e Probabilidade, as diferentes formas de representar os números racionais são essenciais para “Indicar a probabilidade de um evento por um número racional (na forma fracionária, decimal e percentual) e analisar o significado dessa medida por meio de experimentos” (BRASIL, 2016, p. 420).

Como forma de se trabalhar os números racionais, sobretudo na representação decimal, o documento sugere aproveitar o sistema monetário ou de medidas, em decorrência do uso social desses números. Dessa maneira, e aproveitando os conhecimentos prévios dos estudantes, sugere-se que novos números sejam apresentados sempre por meio da insuficiência daqueles já conhecidos para resolução de situações-problema: caminhando dos naturais para os racionais positivos, e destes para os números negativos, permitindo a criação de novos conjuntos numéricos: os inteiros e os racionais. Da insuficiência dos números racionais, é desejado que os estudantes percebam a necessidade de outros números, os irracionais. Ainda que a apresentação dos números racionais não inclua “um trabalho explícito que anteceda a construção do conjunto dos números reais” (BRASIL, 2016, p. 424).

Sobre o trabalho específico com os números racionais, a orientação apresentada no documento é que, ao relacioná-los com situações cotidianas,

> lembrar que qualquer medida empírica é racional e que, na vida cotidiana, na avaliação de medidas, trabalha-se com aproximação e erro, especialmente nos cálculos realizados com a calculadora. Recomenda-se levar em conta que a calculadora apresenta arredondamentos, tanto para os números irracionais, como π ou $\sqrt{2}$, como também para resultados de operações com números racionais, que resultem em decimais exatos com muitas casas decimais e dízimas periódicas. (BRASIL, 2016, p. 425)

Os anos do Ensino Fundamental que mais se debruçam a estudar os números racionais são o 6º e o7º. No 7º ano, são aprofundadas as operações de adição e subtração de frações[88], são discutidas a multiplicação e a divisão[89], são revistas e ampliadas as noções de comparação e ordenação de frações[90] vinculadas aos diferentes significados das frações (parte-todo, quociente, operador e razão), uma vez que já foram debatidas no 5º ano do Ensino Fundamental. A noção de equivalência de frações permeia esses estudos.

No Ensino Médio, cada vez mais os números racionais se aproximam de outras áreas, como a Física, a Química, a Geografia, principalmente nos estudos de grandezas e medidas. Agora sim, segundo a BNCC, o conjunto dos números reais ganha forma.

> O estudo das grandezas e medidas é fundamental para a discussão sobre a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos, principalmente dos racionais para os reais, partir da utilização de números irracionais para representação de medidas de segmentos incomensuráveis. Essa relação é importante para ampliar as discussões feitas no ensino fundamental sobre medidas de comprimento da circunferência e de área do círculo, no que diz respeito ao uso do número π. (BRASIL, 2016, p. 567).

A última menção dos números racionais na Base está na Unidade Curricular II, da unidade de conhecimento *Números e Operações* para o Ensino Médio: “Compreender as características dos diferentes conjuntos numéricos, a necessidade de ampliá-los (naturais, inteiros, racionais, reais), suas operações e as propriedades das operações” (BRASIL, 2016, p. 574). Esse parece ser um momento de síntese e de ampla compreensão dos conjuntos numéricos pelos estudantes.

---

[88] “Resolver e elaborar problemas envolvendo adição e subtração de frações por meio da equivalência de frações” (BRASIL, 2016, p. 428).

[89] “Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias” (BRASIL, 2016, p. 428).

[90] “Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, de resultado da divisão, razão e operador, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2016, p. 426).

Reflexão 31: possibilidades de se pensar o ensino da estrutura de corpo a partir do que está apresentado na BNCC

De maneira resumida, podemos dizer que a BNCC destaca os seguintes aspectos sobre os números racionais na Educação Básica: o uso social, as diferentes representações (fracionária, decimal, percentual), os diferentes significados (parte-todo, razão, divisão, operador), a importância da noção de frações equivalentes, as operações envolvendo frações, a necessidade de se criar novos números provocada pela insuficiência, em determinadas situações, daqueles que já são conhecidos dos estudantes. Entretanto, como apresentamos anteriormente, esses aspectos não estão tendo destaque nos PPC dos cursos de Licenciatura em Matemática por nós investigados.

Para além de simplesmente conhecer os momentos do currículo da Educação Básica em que esses diferentes aspectos dos números racionais aparecem, é desejável que o professor saiba as conexões matemáticas entre eles e tenha consciência dos níveis passado e futuro daquele assunto que está ensinando em um determinado momento, isto é, é preciso que o professor tenha uma compreensão longitudinal do conteúdo que está trabalhando (FERNÁNDEZ; FIGUEIRAS, 2014). Explorar essa compreensão longitudinal, promovendo o desenvolvimento do HCK do professor, deve ser um dos objetivos dos cursos de formação inicial de professores.

Mas, e a estrutura algébrica corpo? Onde está situada nessa discussão? Do apresentado pela BNCC, uma organização que pode ser levada para a formação de professores é: *introduzir novos números a partir da insuficiência dos anteriores*. Na Educação Básica isso deve ser feito, como aponta a BNCC, por meio de situações-problema que demandam o uso de novos números. No caso da formação de professores, uma construção formal dos números racionais a partir dos inteiros, estabelecendo comparações entres as passagens de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{N}$, discutindo o que se "ganha" e o que se "perde" nessas passagens. Essa sugestão é apontada pelo professor formador Victor, em uma fala que já apresentamos na seção 2.3, mas que deve ser retomada aqui, pois ilustra o que acabamos de afirmar:

Victor: *[...] Em cada passagem, dos naturais para os inteiros, dos inteiros para os racionais, os racionais para reais, o que que você acrescenta e que estruturas você incorpora com aquilo e que coisas deixam de valer. Por exemplo, dos naturais para os inteiros você acrescenta os inversos aditivos. Dos inteiros para os racionais você acrescenta os inversos multiplicativos, para resolver divisões, para resolver frações. E aí, por exemplo,* *ao incluir os inversos multiplicativos deixa de valer o princípio da boa ordem, que diz que todo o conjunto* [não-vazio] *limitado inferiormente tem mínimo. Então, você passa a ter densidade, isso é uma consequência de você ter incorporado os inversos multiplicativos e quer preservar a estrutura de anel. Com isso você tem que acrescentar um monte de outros elementos e acaba tendo um conjunto denso, entendeu? [...] a ideia de estrutura algébrica ela é importante nesse sentido para a formação do professor.*

Nesse sentido, ao se trabalhar os números racionais a partir da insuficiência dos inteiros para lidar com determinadas situações-problema, como indica a BNCC, também se pode discutir, paralelamente, o que essa insuficiência e as diferenças, em termos de construção e em termos de estrutura, significam do ponto de vista da Matemática Acadêmica.

Assim, com base no que a BNCC nos indica em termos de possibilidades de se trabalhar com os números racionais, a formação de professores deve dar maior atenção aos seus mais variados aspectos (suas diferentes formas de significações, diferentes representações e usos sociais, abordagens de ensino e questões sobre a aprendizagem) e, disso, fazer emergirem as estruturas algébricas, como algo que acrescente ao conhecimento matemático para o ensino dos conjuntos numéricos dos professores em formação inicial. Se buscarmos essas aproximações com a Matemática Escolar, talvez possamos minimizar discursos como aquele da estudante que apresentamos na introdução desta tese, quando revela que "Eu não me esforcei para aprender, porque não me sentia muito motivada, porque pra mim não fazia muito sentido".

Dessa maneira, enquanto a *Reflexão 30* nos indica a necessidade de alterações nos currículos da formação de professores, a *Reflexão 31* nos mostra que essas alterações devem levar em consideração as orientações curriculares que pautam o ensino de matemática na Educação Básica.

Para além dos currículos, passamos agora a discutir uma forma como o ensino do corpo dos números racionais pode ser abordado nos cursos de Licenciatura em Matemática: por meio de tarefas. A próxima seção se dedica apresentar nossa concepção sobre os tipos de tarefas e a diferença entre tarefa e atividade.

3.2 Sobre tarefas

Barbosa e Oliveira (2015) argumentam em favor da adoção da Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática. Por Pesquisa de Desenvolvimento[91], os autores entendem que se refere

> àquelas investigações que envolvem delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões. Por delineamento, entendemos a elaboração do artefato em sua primeira versão; o desenvolvimento, por sua vez, refere-se ao processo contínuo de seu refinamento por meio da avaliação sistemática. (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Na medida em que se compreende que a atenção dada aos números racionais na Licenciatura em Matemática não tem sido suficiente para preparar o futuro professor para as demandas da prática (*Reflexão 23*), realizar uma investigação que envolva o delineamento de um artefato para posterior desenvolvimento e avaliação se coloca como uma pretensão dessa tese.

Como afirmam os autores, por vezes, a pesquisa em Educação Matemática é "acusada de não responder aos problemas prioritários de gestores, professores, legisladores, etc." (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527-528). A crítica é válida e sugere que, no nosso caso, não é suficiente apenas levantar e identificar problemas da formação matemática de professores sem propor alguma alternativa ou indicar caminhos possíveis de serem investigados visando a efetiva mudança que se almeja. Uma vez identificado o problema, o que fazer? Barbosa e Oliveira (2015) apontam que, identificado o problema, o propósito da Pesquisa de Desenvolvimento (PD) é gerar uma intervenção que se materialize em algum tipo de produto educacional que, após análises e refinamentos, possa ser utilizado por outras pessoas.

Temos o propósito de produzir um produto educacional como consequência de toda a investigação aqui realizada sobre o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática com vistas a sugerir uma alternativa aos problemas levantados. Contudo, vamos nos limitar ao que os autores chamam de delineamento, isto é, a elaboração de uma primeira versão do artefato, uma versão que ainda precisará passar por refinamentos e avaliações. Nesse sentido, não estamos comprometidos, ao menos nesse momento, com as características da PD, por mais que nos inspiremos nela.

Barbosa e Oliveira (2015) apontam para a característica cíclica da PD, efetivada por meio da relação entre o entendimento teórico e o desenvolvimento do produto

---

[91] O termo Pesquisa de Desenvolvimento, segundo Barbosa e Oliveira (2015), aparece na literatura internacional como *design-based reaearch*, *design research*, *design experiments*, *design studies* ou *development research*.

educacional. Explicamos: o ponto de partida para a elaboração de um produto educacional, na perspectiva da PD, é a teoria e os resultados de estudos prévios obtidos na literatura científica, produzindo um primeiro entendimento acerca do problema. Esse primeiro entendimento serve de subsídio para o delineamento da primeira versão do produto educacional, que será utilizado e submetido à análise, gerando um segundo entendimento sobre o problema. O segundo entendimento serve para refinar a versão inicial do produto educacional, levando-o à sua segunda versão. Esses ciclos de testes e refinamentos se repetem até chegar a uma saturação, isto é, até que os dados produzidos ofereçam uma base suficiente que justifique a finalização dos ciclos.

Sem entrar nos pormenores da PD, destacamos nossa intenção de construirmos um produto educacional (primeiro entendimento e delineamento da primeira versão) com vistas a realizar novos ciclos de entendimento e delineamento futuros, tal como orienta a PD. Todo o desenvolvimento realizado até esse momento da tese se configura como o primeiro entendimento do problema posto inicialmente – o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática – e o que vamos propor no capítulo 4 representa o delineamento da primeira versão de nosso produto educacional.

Tal produto educacional é o que temos chamado, ao longo de toda a tese e, mais particularmente, no objetivo específico 4, de uma sequência de tarefas. Nossa compreensão sobre tarefa está fundamentada no trabalho de Ponte et al. (2015), quando afirmam que no "ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que neste caso as tarefas são reconhecidas como elemento organizador da atividade dos alunos" (p. 111). Fica evidente que há diferenças entre tarefa e atividade. Ponte (2014) esclarece essa distinção quando afirma que a "atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto" (p. 15). Já a tarefa

> representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade). (PONTE, 2014, p. 15).

Enquanto a atividade é uma ação do estudante, a tarefa é exterior a ele. Posto desse modo, as tarefas se apresentam como uma ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que possibilitam ao estudante se colocar em atividade, e é "pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende" (PONTE, 2014, p. 17).

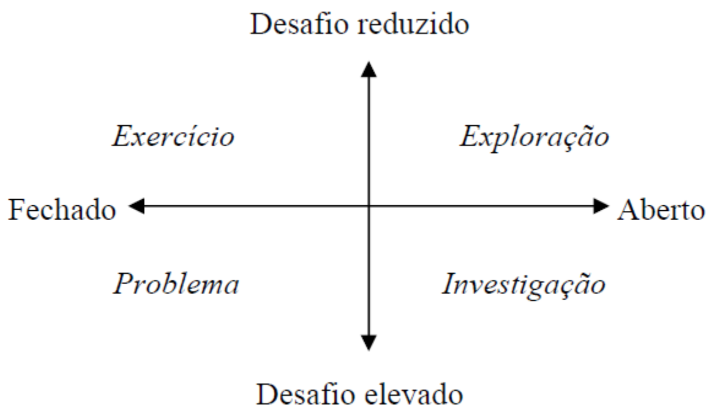
Lembramos que, em nossa pesquisa, estamos assumindo a perspectiva do perfil conceitual em que aprender é *internalizar* significados produzidos dentro de uma certa prática social. Nesse sentido, as tarefas, enquanto ferramentas que medeiam o ensino e a aprendizagem da matemática, têm o relevante papel de contemplar esses diferentes significados dos números racionais e buscar promover ações e reflexões nos estudantes. Elaborar tarefas com potencial para dar origem a diversas atividades é, portanto, um trabalho cuidadoso que demanda diferentes entendimentos e delineamentos, no sentido da PD.

É preciso estar ciente, entretanto, que somente a elaboração cuidadosa e a proposição de uma tarefa não garantem as atividades dos estudantes. Como aponta Ponte (2014), uma tarefa pode ter ou não potencialidades para mobilizar conceitos e processos matemáticos, originando atividades diversas. Mas, outras coisas influenciam, como "o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior" (PONTE, 2014, p. 16). Isso significa que, para uma tarefa dar lugar a atividade diversas, não basta sua proposição; as situações de ensino criadas pelo professor e o compromisso dos próprios estudantes também compõem esse processo.

Ainda no sentido de caracterizar tarefas, Ponte (2005) apresenta um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas. Para esse autor, há duas dimensões fundamentais das tarefas: (i) o grau de desafio matemático e (ii) o grau de estrutura. A primeira, grau de desafio matemático, está relacionada à percepção da dificuldade de uma questão, característica bastante comum para graduar as questões propostas aos estudantes, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação (PONTE, 2005). Esse grau de desafio matemático varia entre os polos de desafio "reduzido" e "elevado". A segunda dimensão fundamental, o grau de estrutura, varia entre os polos "aberto" e "fechado". Nesse caso, "Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (PONTE, 2005, p. 7-8).

Quando se cruzam essas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes que representam quatro tipos de tarefas, como apresentado na Figura 35.

Figura 35: tipos de tarefas



Fonte: Ponte (2005, p. 8)

Ponte (2005, 2014) explica essa figura, da seguinte forma:

- um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (segundo quadrante);
- um *problema* é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado (terceiro quadrante);
- uma *investigação* é uma tarefa aberta com desafio elevado (quarto quadrante);
- uma *exploração* é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos (primeiro quadrante).

A linha que separa essas tarefas não é tão nítida, uma vez sua caracterização depende do estudante que está envolvido na tarefa. Por exemplo, a diferença entre tarefas de exploração e de investigação está no grau de desafio, portanto, se o estudante souber lidar com a situação de imediato, sem grandes planejamentos, a tarefa é do tipo exploração. Caso contrário, se, para aquele estudante específico, a tarefa se apresentar como um desafio elevado, que demanda um empenho maior, melhor chamar de tarefa de investigação. No caso de tarefas de exploração e exercícios, um mesmo enunciado pode se referir a uma tarefa de exploração ou a um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos estudantes (PONTE, 2005).

Quanto à classificação de tarefas como exercícios ou problemas, uma tarefa pode ser um problema ou um exercício, conforme aquilo que o estudante já sabe; isto é, o que distingue exercício de problema é essencialmente o fato de o aluno dispor ou não de um método de resolução imediato (PONTE et al., 2015).

Considerando, então, que uma tarefa depende dos estudantes envolvidos, faz-se necessário que o professor busque propor uma variedade delas, para que consiga propiciar diferentes reações em seus estudantes. Como afirma Ponte (2005), cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares:

> - As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
> - As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança.
> - As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações, problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática.
> - As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (PONTE, 2005, p. 17, grifos do autor).

Assim, mais do que tarefas isoladas, o professor deve preparar sequências de tarefas devidamente organizadas, de modo que os estudantes possam atingir os objetivos de aprendizagem previstos (PONTE, 2014).

Pautados nesses referenciais de Ponte (2005, 2014) e Ponte et al. (2015), preparamos uma sequência de tarefas, apresentada no próximo capítulo, com vistas ao trabalho do corpo dos números racionais na formação de professores. Não vamos, neste momento, nos preocupar em classificar, no sentido de Ponte (2005), as tarefas que estamos propondo, pois não é este nosso objetivo no momento. Deixamos aos professores formadores que eventualmente fizerem uso dessas tarefas o trabalho de as classificarem de acordo com sua abordagem e seus propósitos em sala de aula. De todo modo, esperamos que um ensino baseado em tarefas, como as que sugerimos no próximo capítulo, oportunize aos licenciandos que se coloquem em atividade, fugindo do modelo de aula tradicional em que o professor (formador) expõe o conteúdo e o estudante fique passivo diante do conteúdo que está sendo trabalhado.

4. Uma sequência tarefas

Esse capítulo dedica-se unicamente a apresentar a sequência de tarefas delineada a partir de todo o entendimento promovido pelos capítulos 2 e 3. A sequência de tarefas aqui produzida não encerra o tema números racionais na formação inicial do professor; essa sequência deve ser encarada como parte integrante de uma disciplina que busca abordar o ensino desses números em sua completude. Nesse sentido, alguns aspectos não são abordados como um todo nessas tarefas, como a ordenação e a densidade desses números, a equivalência de frações. As tarefas buscam, essencialmente, demarcar diferentes modos de significar os números racionais, bem como discutir os temas epistemológicos, apresentados na MENR, mais característicos da Matemática Acadêmica na formação dos professores, problematizando-os.

Por mais que esta proposta seja para um curso de Licenciatura em Matemática com um currículo diferente do que está vigente (*Reflexão 30* apresentada no *Capítulo 3*), não é possível desconsiderar o contexto no qual ela deve estar inserida.

Ao longo da sequência de tarefas, fixamos três termos a fim de evitar confusões por parte do leitor. Usamos *professor formador* para nos referirmos ao professor da Licenciatura, aquele para quem essa sequência de tarefas foi produzida e sugestões foram feitas; *licenciandos* para os estudantes da Licenciatura, aqueles que desenvolverão a sequência de tarefas e que serão futuros professores da Educação Básica; e *estudante* para nos referirmos ao estudante da Educação Básica, aquele para quem a formação de professores deve sempre estar atenta.

Apresentamos 3 tarefas que têm conexões entre si (por isso chamamos de uma sequência, pois são tarefas que se relacionam), sendo que cada uma delas é precedida por seu *objetivo geral* e sucedida por *orientações ao professor formador* e por maiores explicações acerca da *elaboração da tarefa*. Para deixar a apresentação das tarefas visualmente menos poluída, evitamos colocar as referências que embasaram algumas das questões apresentadas, citando-as somente no momento posterior à tarefa, quando trazemos mais detalhes sobre a *elaboração da tarefa*. Além disso, as tarefas estão emolduradas, para serem destacadas em meio ao restante do texto.

4.1 Apresentando a sequência de tarefas

Tarefa 1: *Explorando diferentes temas a partir dos quais os números racionais podem ser significados.*

Objetivos

A *Tarefa 1* tem como objetivo conhecer e explorar os significados dos números racionais que já foram internalizados pelos licenciandos enquanto ex-estudantes da Educação Básica e sujeitos de uma determinada cultura, bem como discutir situações em que outros significados, além daqueles já conhecidos, possam surgir.

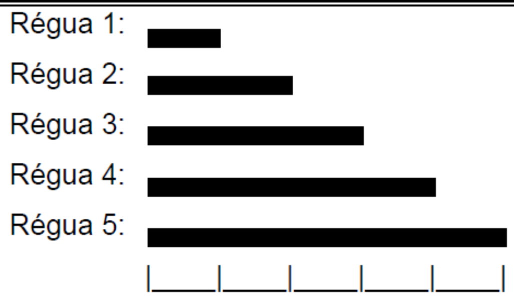
A. Suponha que você seja professor de uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental. Nesse contexto, seus estudantes já tiveram experiências com alguns casos envolvendo frações e números decimais. Como você faria, nessa turma de 7º ano, para introduzir o conceito de número racional?

B. Suponha, agora, que você esteja em uma classe de Ensino Médio e um estudante, quando solicitado, afirme que “número racional é um número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$”. O que se pode comentar a respeito dessa compreensão de número racional?

C. O que você pode dizer sobre $\frac{5}{6}$? Comente com seus colegas o que esse número pode indicar ou representar.

D. Discuta com seus colegas formas de resolver as seguintes situações:

i) Um carro A percorre a distância de $10\ km$ em $9\ minutos$. Um carro B percorre a distância de $7\ km$ em $8\ minutos$. Qual dos carros é mais veloz?
ii) Quantos alunos correspondem a $2/3$ de uma classe com 36 alunos?
iii) Observe as réguas abaixo e responda às perguntas.



a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1como unidade?

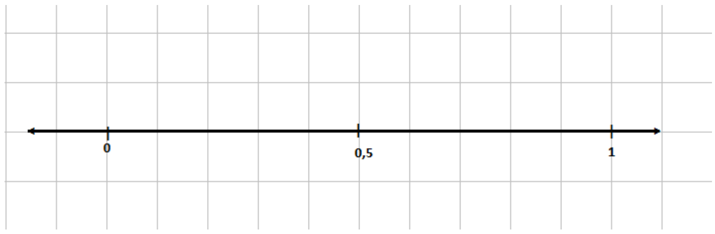
b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como unidade?

c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como unidade?

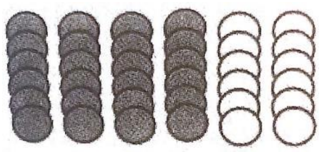
d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como unidade?

iv) Podemos representar números racionais na reta numérica, assim como fazemos com os números inteiros. Represente, na mesma reta, os números dados:

$$0{,}25 \qquad \frac{3}{4} \qquad 0{,}6 \qquad \frac{4}{10}$$



v) Minha mãe assou uma forma de biscoitos de dois sabores diferentes, chocolate e aveia. Tais biscoitos estão representados na figura abaixo, sendo os biscoitos de chocolates representados pela cor cinza e os biscoitos de aveia pela cor branca.



a) Que parte do total de biscoitos é de sabor chocolate?

b) Que parte do total de biscoitos é de sabor aveia?

c) É possível representar essas quantidades de outras maneiras?

d) Se a minha mãe faz pacotinhos com 3 biscoitos de tal forma que existem sempre 2 biscoitos de chocolate em cada pacote, quantos pacotes poderão ser feitos com essa quantidade de biscoitos representados na figura anterior?

E. As cinco situações apresentadas no item D permitem o uso dos números racionais. Você acredita que essas situações demandam a mesma forma de pensar os números racionais?

F. Ainda sobre as situações do item D e com base em sua resposta no item E, discuta com o restante da turma o contexto em que essas situações são mais adequadas ao longo da Educação Básica.

Orientações ao professor formador

No item A, é possível que os licenciandos necessitem realizar uma pesquisa para conhecer as maneiras como os números racionais em suas representações fracionária e decimal já foram abordados antes do sétimo ano. Uma sugestão seria levar livros didáticos desses anos anteriores (incluindo dos anos iniciais do Ensino Fundamental) para que os licenciandos procurem saber mais sobre o ensino dos números racionais antes daquele momento em que supostamente se encontram. Ter consciência do passado e do futuro do assunto sobre o qual está ensinando é uma das características do HCK.

No item B, explorar esse modo de significar os números racionais, sem desencorajar aqueles licenciandos que concordarem com tal compreensão, em que estão ausentes as restrições para a e b ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$). O professor formador deve destacar que esse modo de significar os números racionais pode ser comum entre estudantes da Educação Básica.

No item C, mesmo que os licenciandos estranhem a pergunta, deixe-os criarem suas respostas de maneira aberta. Como apresentam Onuchic e Alletavato (2008), diferentes respostas relevantes podem surgir. Esse momento é importante para conhecer algumas das formas que os licenciandos compreendem os números racionais.

Após os licenciandos realizarem os itens D e E e algumas discussões entre eles forem promovidas, sob a orientação do professor formador, um texto pode ser utilizado para aprofundar o debate. Nesse caso, uma sugestão de texto seria aquele que explica os temas epistemológicos de 1 a 8 e a matriz epistemológica (excluindo os temas 9, 10 e 11), ambos apresentados na seção 2.5 desta tese. Outra sugestão, exterior à tese, pode ser o artigo de Onuchic e Botta (1997), que discutem, de forma breve, alguns dos diferentes significados dos números racionais.

No item F, o professor formador pode trabalhar com o documento oficial que norteia o ensino de Matemática na Educação Básica (por exemplo, a BNCC), para que os licenciandos compreendam a maneira como os números racionais estão apresentados ao longo desse nível de ensino.

Comentários a respeito da elaboração da tarefa

Item A. Esse item foi elaborado na expectativa de que o licenciando se coloque em posição de professor da Educação Básica e que, estando nessa situação, manifeste seus modos de pensar os números racionais.

Item B. Esse item foi provocado pela *Reflexão 28*, aquela que versa sobre uma concepção alternativa dos números racionais, e pelo tema epistemológico 5, que centra o foco nas formas de representar o número racional.

Item C. Esse item foi adaptado de Onuchic e Allevato (2008). De modo análogo ao item A, esse item foi proposto para buscar conhecer os modos de pensar os números racionais manifestados pelos licenciandos. Ter consciência desses modos é necessário para o professor formador propor novos contextos em que outras formas de significação dos números racionais apareçam.

Item D. O subitem i foi adaptado de Damico (2007); o subitem ii foi retirado de Silva (2009); o subitem iii foi retirado de Damico (2007); o subitem iv foi adaptado de Ponte et al. (2015); e o subitem v foi retirado e resscrito de Cyrino et al. (2014). Esse item faz uso de variadas pesquisas acerca dos números racionais na Matemática Escolar, trazendo para o interior da formação de professores a importância das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desses números.

Itens E e *F*. Esses itens, juntamente com o item B, foram elaborados com vistas a, não apenas permitir a aquisição de novas zonas de um perfil conceitual (ou, no nosso caso, temas epistemológicos), mas também promover uma visão clara, entre os licenciandos, da demarcação entre os modos de pensar e significados, bem como entre seus contextos e aplicação (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009).

Tarefa 2: *Apresentando os números racionais na Matemática Acadêmica.*

Objetivos

A *Tarefa 2* tem como objetivo apresentar a construção lógico-formal dos números racionais enquanto classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, além de explorar a coletividade dos axiomas, fazendo emergir a estrutura algébrica corpo.

A. Em momentos anteriores, em seu curso de Licenciatura em Matemática, você construiu os números inteiros a partir dos números naturais, por meio do conceito de classe de equivalência. Usualmente, essa construção é chamada de *construção lógico-formal dos números inteiros*. Naquele caso, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros ficou definido como: $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim\ = \{\overline{(a,b)}\ |(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$, em que $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ |\ (x,y)\sim(a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ |\ x + b = y + a\}$. Por exemplo, $\overline{(1,0)} = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\dots\}$ e $\overline{(0,1)} = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$. Assim, um número inteiro, tal como você já conhecia enquanto estudante da Educação Básica, é uma classe de equivalência, como:

$$+1 = \overline{(1,0)} = \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\dots\}$$
$$0 = \overline{(0,0)} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\dots\}$$
$$-1 = \overline{(0,1)} = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$$

Dessa maneira, o conjunto dos números inteiros fica assim escrito:

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,+1,+2,\dots\}$$

Essa mesma linha de pensamento conduz à construção dos números racionais a partir dos números inteiros, também por meio do conceito de classe de equivalência. Essa construção, chamada de *construção lógico-formal dos números racionais*, é o que nos interessa nesse momento. Junto com alguns colegas de sua turma, discuta:

i) No caso da construção de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$, incluímos, em $\mathbb{Z}$, os inversos aditivos dos elementos de $\mathbb{N}$. No caso da construção de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$, que elementos serão incluídos?

ii) Que relação de equivalência $\sim$ precisamos definir sobre o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ para obtermos os elementos a serem incluídos e discutidos no item i?

iii) Descreva, com suas palavras, o que são os números racionais nessa construção lógico-formal.

iv) Na construção de $\mathbb{Q}$, cada classe de equivalência pode ser interpretada como um conjunto de *divisões (ou frações) equivalentes*. Um fato análogo ocorre na construção de $\mathbb{Z}$: os números inteiros são construídos como conjuntos de *subtrações equivalentes*. Por exemplo, subtrair 4 de 2 $(2 - 4)$ é equivalente a subtrair 5 de 3 $(3 - 5)$ e equivalente a subtrair 6 de 4 $(4 - 6)$ e todas essas subtrações, que pertencem a uma mesma classe de equivalência, podem ser representadas por -2. No caso das divisões equivalentes, dividir 2 por 4 $\left(\frac{2}{4}\right)$ é equivalente a dividir 3 por 6 $\left(\frac{3}{6}\right)$ e ambas essas divisões, que pertencem a uma mesma classe de equivalência, podem ser representadas por $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{6}$ (por exemplo). Portanto, essas construções formais (tanto de $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$ como de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$) se fundamentam nas ideias de *subtrações equivalentes* e de *divisões equivalentes*. Discuta com seu grupo se e como essas ideias se conectam com o trabalho docente com os números na Educação Básica.

B. Feita a construção dos números racionais como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, são definidas as operações de adição e de multiplicação sobre esse conjunto $\mathbb{Q}$. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

- Chama-se *soma* de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms + nr}{ns}$$

A correspondência $(a, b) \to a + b$ é uma aplicação, uma operação sobre $\mathbb{Q}$ que chamamos de *adição* em $\mathbb{Q}$.

- Chama-se *produto* de a por b e indica-se por $a.b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$ab = a.b = \frac{mr}{ns}$$

A correspondência $(a, b) \to a.b$ é uma aplicação, uma operação sobre $\mathbb{Q}$ que chamamos de *multiplicação* em $\mathbb{Q}$.

i) Use a definição dada para demonstrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais munido da operação de adição goza das propriedades: associativa, comutativa, existência de elemento neutro da adição, todo elemento $a \in \mathbb{Q}$ possui simétrico aditivo (oposto).

ii) Use a definição dada para demonstrar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais munido da operação de multiplicação goza das propriedades: associativa, comutativa, existência de elemento neutro da multiplicação, todo elemento $a \in \mathbb{Q}$ ($a \neq 0$) possui simétrico multiplicativo (inverso).

iii) Existe uma propriedade que estabelece uma relação entre as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, que é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Com isso, mostre que

$$a(b + c) = ab + bc, \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$$

iv) Quando se compara o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números inteiros com as operações de adição e multiplicação, que propriedade(s) não é (são) satisfeitas por $\mathbb{Z}$, mas é (são) por $\mathbb{Q}$? Comente.

C. Considere a equação $4x + 5 = 6$.

i) Encontre a solução dessa equação e comente que número é esse.

ii) Explique, detalhadamente, cada passo utilizado para chegar à solução.

iii) Suponha que o enunciado fosse: "Resolva a equação $4x + 5 = 6$ em $\mathbb{Z}$", qual seria sua resposta? Comente com seus colegas.

iv) É possível estabelecer alguma relação entre esses passos realizados para resolver a equação do primeiro grau de uma incógnita dada e as propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$?

v) Se, por exemplo, não existissem as propriedades associativa para a adição e a associativa para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, seria possível resolver a equação dada?

vi) São as propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ que permitem resolver uma equação polinomial de primeiro grau de uma incógnita do tipo $ax + b = c$ $(b, c \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}^*)$. Juntas, essas propriedades possibilitam o passo a passo que conduz ao número racional que é solução daquela equação. Se alguma dessas propriedades não fosse válida, a resolução da equação não caminharia. Isso significa que, no caso da resolução de equações como essa que está sendo mencionada, a coletividade das propriedades deve ser valorizada. Essa coletividade está associada ao que chamamos de estrutura algébrica. Uma estrutura algébrica é um conjunto (numérico ou não) munido de uma ou duas operações (que podem ser as conhecidas adição e multiplicação, mas podem ser outras) e que goza de algumas propriedades. Os números racionais, munidos das operações de adição e multiplicação, gozam das propriedades apresentadas no item B- i, ii e iii, constituindo uma estrutura algébrica chamada *corpo*. Em uma notação matemática, dizemos que $(\mathbb{Q}, +, .)$ é o corpo dos números racionais. Investigue, em diferentes livros de Álgebra, como *corpo* é definido e responda as questões abaixo.

a) Há diferenças nessas definições da estrutura algébrica corpo apresentadas nos livros consultados?

b) Discuta com os demais colegas o que você compreendeu sobre o objeto "estrutura algébrica corpo".

Orientações ao professor formador

No item A, o professor formador pode precisar atuar mais diretamente, uma vez que a construção lógico-formal dos números racionais é abstrata e não deve ocorrer sem algumas intervenções. Pode ser o caso de propor que os licenciandos utilizem livros de Álgebra para chegarem à construção pedida. É importante conduzir o diálogo, retomando ideias da construção por classes de equivalência já feita para os números inteiros. Ao final, o professor poderá formalizar essa construção na lousa, buscando manter uma linguagem adequada. No caso do item v, há a possibilidade de explorar a noção formal de equivalência e sua relação direta com a ideia de fração equivalente na Matemática Escolar; por outro lado, no caso de $\mathbb{Z}$, a ideia de número inteiro como conjunto de subtrações equivalentes não se dá na Matemática Escolar.

No item B, assim como no item A, a atuação do professor formador pode ser bastante exigida. Apresentar as propriedades e demonstrar uma delas pode ser importante para que os estudantes compreendam qual o caminho para essas demonstrações. Contudo, as demais devem ficar a cargo dos licenciandos, para que percebam como se dá uma demonstração a partir de uma definição dada. Aqui é relevante ao professor formador perceber e chamar a atenção dos licenciandos para o fato de que m, n, r e s são números inteiros ($n \neq 0$ e $s \neq 0$) e que, portanto, as operações entre eles já são conhecidas e podem ser utilizadas, pois os inteiros já foram construídos e suas operações definidas anteriormente.

No item C, os subitens i até v podem ser deixados mais a cargo dos licenciandos e das discussões geradas por eles. Contudo, para fundamentar a ação do professor formador, a pesquisa de Wasserman (2014) pode ser essencial.

O subitem vi exigirá, novamente, a ação direta do professor formador, conduzindo a discussão, trabalhando com o auxílio de livros de Álgebra e fazendo emergir a estrutura corpo, a partir do estudo das propriedades das operações de adição e multiplicação sobre $\mathbb{Q}$. Nesse item, é desejado que o professor formador consiga discutir com os licenciandos a característica abstrata do objeto matemático corpo, um objeto construído a partir de três outros objetos matemáticos já conhecidos: conjunto, operações e propriedades. A retirada de uma das propriedades que constituem a estrutura algébrica corpo pode dar origem a uma outra estrutura; do mesmo modo, a mudança do conjunto ou das operações também pode originar outro corpo.

Isso significa que a estrutura algébrica precisa ser entendida como a coordenação desses três objetos juntos: conjunto, operações e propriedades.

Comentários a respeito da elaboração da tarefa

Item A. Esse item está pautado no tema epistemológico 9 (classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros) e, para sua construção, foi considerado que os estudantes já estudaram conceitos da Matemática Acadêmica, como relação, classe de equivalência e a própria construção dos números inteiros a partir dos naturais, bem como já têm alguma noção sobre os números racionais da Educação Básica. Por mais que não o faça de modo formal, como apresentado neste item A, a extensão dos números inteiros para os racionais também é uma prática a ser reconhecida na Matemática Escolar (*Reflexão 16*).

Item B. Tanto para a adição como para a multiplicação, as propriedades associativa e comutativa, bem como os elementos neutro e simétrico, fazem parte do repertório trabalhado com os estudantes no desenvolvimento dessas operações envolvendo números e polinômios na Educação Básica. A distributiva da multiplicação em relação à adição também, principalmente no trabalho com polinômios. Considerando isso e, ainda, sugerindo que essas propriedades sejam retomadas de forma mais cuidadosa na formação de professores, tais propriedades são trazidas nesse contexto mais abstrato, em que suas demonstrações são feitas a partir da construção formal dos números racionais e das definições dadas às operações.

Item C. Esse item, relacionado ao tema epistemológico 10 (elemento de um corpo), está fundamentado nos trabalhos de Wasserman (2014, 2016); nas *Reflexões 3* e *9*, quando indicam o trabalho com as equações como um caminho fértil para o trabalho com o corpo dos números racionais; e na *Reflexão 12*, quando questiona que, nos cursos de formação de professores, os números racionais têm sido tratados como exemplo das estruturas algébricas. O subitem vi foi inspirado na *Reflexão 4*, quando discute formas de interpretar a estrutura de grupo, ora como um conjunto, ora como uma operação, ora como as propriedades a serem satisfeitas.

Tarefa 3: *Problematizando os números racionais na Matemática Acadêmica a partir dos números racionais na Matemática Escolar*.

Objetivos

A *Tarefa 3* tem como objetivo problematizar a Matemática Acadêmica com vistas ao conhecimento matemático para o ensino dos números racionais, buscando explicitar a

Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar como diferentes práticas sociais situadas em contextos distintos, mas que se complementam.

A. Com base no que fora discutido no item A da Tarefa 2, novos questionamentos podem ser feitos e debatidos entre vocês:

i) O que significa uma *construção lógico-formal* dentro dessa matemática que você está aprendendo? Além das construções dos conjuntos numéricos, você teve contato com outra construção dessa natureza até o momento em seu curso?

ii) Uma construção desse tipo é feita na Educação Básica para ensinar os números inteiros ou os racionais? Discuta com os demais colegas sobre a diferença de abordagens sobre/para os números racionais que vocês estão vendo agora e a forma tratada na Educação Básica.

iii) Nesse contexto da construção formal dos números racionais, um número racional é uma classe de equivalência e, como vocês já viram, uma classe de equivalência é um conjunto. Para vocês, faz sentido um número racional ser um conjunto, por exemplo, $\frac{1}{2} = \{(1,2), (-1,-2), (2,4), (-2,-4), \ldots\}$? Na Tarefa 1, item D-i, vimos uma forma de significar os números racionais: número racional é uma variação de uma grandeza em relação a outra. Ou seja, em D-i, um número é uma relação entre grandezas. Afinal, o que é um número racional?

B. Na Tarefa 2, item B, as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ foram formalmente definidas. Essas definições condizem com as operações realizadas ao longo de toda a Educação Básica, afinal, a regra é a mesma.

i) Com seus colegas, discuta: o que veio primeiro, a definição formal ou o uso mais intuitivo das operações, como geralmente é apresentado na Educação Básica?

ii) No contexto de uma prática matemática específica, chamada de Matemática Acadêmica, qual o sentido de se estabelecer uma definição formal da maneira como fora feita?

iii) Por que as definições formais das operações foram aquelas e não outras? Se fossem outras, será que a matemática construída e conhecida até então perderia sentido?

iv) Na Tarefa 2, item A-ii, você, juntamente com os demais colegas, determinou uma relação de equivalência que fosse adequada para a *construção lógico-formal* dos números racionais a partir dos números inteiros. Será que não houve alguma intencionalidade na escolha da relação de equivalência?

C. Na Tarefa 2 item C, foi apresentada a você a estrutura algébrica corpo e, junto a ela, o corpo dos números racionais.

i) Considerando que você já conhece a construção lógico-formal dos inteiros, o que se pode dizer sobre a afirmação "$(\mathbb{Z}, +, .)$ não é um corpo"? Discuta com o restante da sala e justifique sua resposta.

ii) Levando em conta a ideia de estrutura algébrica (tomando as operações usuais de adição e multiplicação), quando passamos de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, que propriedades são mantidas e que propriedades são incluídas?

iii) Note que, na extensão de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ não basta acrescentar somente os inversos multiplicativos dos inteiros, é preciso acrescentar vários outros elementos, como $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}$ etc. A inserção desses outros elementos é necessária para manter a consistência da estrutura de corpo, a partir dessa ampliação dos inteiros. Discuta com os demais colegas que consistência é essa que se busca, ao acrescentar esses elementos que não são inversos de números inteiros, na passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$.

iv) Na passagem de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$, acrescentar os inversos multiplicativos dos números inteiros, bem como outras frações do tipo $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$), implica em outras diferenças entre esses dois conjuntos.

   a) O que se pode dizer sobre a ideia de antecessor e de sucessor no conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números racionais? Compare essas ideias entre os conjuntos.

   b) Com base na discussão do item a, o que se pode dizer sobre a afirmação "Entre dois números racionais quaisquer (mesmo muito próximos) sempre existe outro número racional". Essa afirmação também é válida quando tratamos de números inteiros?

v) Existe algum outro conjunto munido de duas operações que constituem o que estamos chamando de corpo? Qual a vantagem em se estabelecer uma estrutura algébrica sobre um conjunto que já é conhecido, como é o caso do corpo dos números racionais?

vi) Discuta com seus colegas essa forma de fazer matemática, que é característica da Matemática Acadêmica, e compare-a com a forma de fazer matemática da Matemática Escolar.

Orientações ao professor formador

No item A, a ideia é que os licenciandos compreendam um pouco da forma de ser da Matemática Acadêmica, enquanto um sistema lógico-formal-dedutivo, cujas construções são pautadas em axiomas e definições que, de uma maneira lógico-dedutiva, levam a demonstrações de teoremas e proposições, permitindo a construção de novos conhecimentos matemáticos. Por outro lado, na Matemática Escolar, a intuição e o convencimento servem, muitas vezes, para convencer os estudantes da validade de um resultado. No item iii, explorar a ideia de que um número racional, dentro da Matemática Acadêmica, perde seu sentido intuitivo e ganha em sentido abstrato, deixando, cada vez mais, de importar o seu significado.

No item B, talvez se possa resgatar alguns aspectos da história dos números racionais, explicitando que, nem sempre a matemática teve esse caráter formal, evidenciando que a ordem da construção formal dos números é bastante distinta da ordem da criação dos mesmos. Além disso, o professor formador pode explorar a intencionalidade da Matemática Acadêmica, na qual, muitas vezes, as construções matemáticas formais são feitas já se conhecendo onde se quer chegar.

O professor formador deve trabalhar com os licenciandos o fato de que, assim como na Matemática Acadêmica – onde a construção dos racionais a partir dos inteiros e a demonstração de suas propriedades carrega consigo tudo o que já fora construído e provado para os inteiros (por exemplo, as propriedades das operações nos racionais utilizam do fato de que as operações e propriedades dos inteiros já são conhecidas) –, na Matemática Escolar, a abordagem para os racionais, suas operações e propriedades também podem derivar do que já é conhecido dos números inteiros.

No item C, o professor formador pode explorar que a extensão dos inteiros para os racionais implica em uma extensão entre estruturas algébricas (anel e corpo). Uma das ideias contidas nesse item C é abordar a consistência algébrica. Por exemplo, no subitem iii, o professor formador pode debater com os licenciandos o fato de que, se não fossem incluídas as outras frações de inteiros que não apenas os inversos multiplicativos dos inteiros, poderíamos ter o seguinte caso: tomando os elementos 2 e $\frac{1}{3}$ de $\mathbb{Q}$, a multiplicação entre esses elementos não resultaria em um elemento de $\mathbb{Q}$, logo a multiplicação, dentro da Matemática Acadêmica, não seria uma operação em $\mathbb{Q}$, já que não haveria a propriedade do fechamento. Assim, para manter a consistência algébrica, essas outras frações de inteiros precisam ser incluídas. Trazer a consistência algébrica para o centro da discussão é relevante inclusive para a Matemática Escolar, pois explicita alguns modos de ser da matemática, deixando claro que algumas escolhas são desse modo, e não de outro, pelo simples fato de fazer sentido dentro da matemática.

Comentários a respeito da elaboração da tarefa

Item A. A construção desse item foi com base na *Reflexão 2*, que questiona o significado de número, e na *Reflexão 17*, quando discute algumas diferenças entre o convencimento da Matemática Escolar e a demonstração da Matemática Acadêmica.

Item B. As problematizações pensadas para esse item foram inspiradas pela *Reflexão 7*, que aborda a questão das intencionalidades da Matemática Acadêmica e pela *Reflexão 10*, que considera não haver hierarquias entre as matemáticas Escolar e Acadêmica, mas poder haver contribuições de uma para a outra.

Item C. Esse item se pauta na ideia de busca por consistência algébrica, discutida na *Reflexão 16*. A ideia de consistência algébrica permeia, também, a Matemática Escolar, como fora discutido para o caso do produto $(-1).(-1) = 1$ e a necessidade de ser do modo como é para manter a propriedade distributiva. Junto a isso, a *Reflexão 13*, que traz a matemática como uma produção social. Assim como outros itens das três tarefas, esse item C traz muitas influências das entrevistas com os professores formadores. O subitem iii, bem como a valorização da consistência algébrica, têm fortes relações com a fala do professor Victor. Do mesmo modo, as tarefas e os itens que visam problematizar os números racionais na Matemática Acadêmica também têm inspirações nas falas do professor formador Plínio, que, como mostramos, tem argumentos contrários ao ensino das estruturas algébricas na formação do professor. Buscamos trazer para o interior de nossa proposta alguns desses argumentos, como no caso do subitem v, para gerar discussões e reflexões na direção que Plínio sugere, mesmo que nossa posição não seja exatamente a mesma que a do entrevistado. Como afirmamos na *Reflexão 11*, são essas diferentes perspectivas que nos permitem caminhar.

4.2 Comentários sobre a sequência de tarefas

A sequência de tarefas proposta é resultado de toda a discussão realizada ao longo da tese. Os temas epistemológicos e as *Reflexões* aqui feitas propiciam outras possibilidades de produções de sequências como a que fizemos. A que elaboramos aqui é um exemplo que consideramos plausível e que contempla nosso modo de pensar a matemática na formação de professores. Recordamos nossa caracterização para ela: *uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar; que permita ao professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pensar os conceitos matemáticos em contextos variados da Educação Básica; que possibilite ao professor, ao mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo escolar e possíveis relações com a Matemática Acadêmica*. Nesse sentido, nossa Tarefa 1 resgata aspectos da Matemática Escolar, discutindo diferentes temas epistemológicos que são característicos do contexto da Educação Básica. A Tarefa 2 leva os licenciandos a extrapolar os modos de significar os números racionais para além daqueles já conhecidos, explorando os temas epistemológicos 9 e 10, característicos da Matemática Acadêmica. A Tarefa 3 busca problematizar essa Matemática Acadêmica com vistas a contribuições para que o futuro professor desenvolva seu conhecimento matemático para o ensino dos números racionais, em especial os conhecimentos relacionados ao HCK.

A sequência de tarefas ilustra, portanto, o que havíamos descrito na seção 1.3: a matemática a ser trabalhada na Licenciatura deve ter como ponto de partida e de chegada a Matemática Escolar. Enquanto ponto de partida, a Matemática Escolar se coloca como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo. Enquanto ponto de chegada, a Matemática Escolar deve estar impregnada de novas reflexões do licenciando como futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica. Mais do que conteúdos, essas reflexões, no caso da sequência proposta, significam: discutir a consistência algébrica, a intencionalidade característica da Matemática Acadêmica e a matemática enquanto prática social.

Evidentemente, as tarefas, por si só, não garantem que os objetivos esperados sejam alcançados. O papel do professor formador é essencial na condução das aulas e os licenciandos têm que estar dispostos a se envolverem no que está sendo oferecido. É preciso que o futuro professor esteja comprometido com sua formação, caso contrário, não há proposta que possibilite o que entendemos por formação matemática adequada.

Conclusões e considerações finais

Na introdução deste trabalho, apresentamos três caminhos possíveis de serem trilhados. Eram caminhos que, naquele momento, conseguíamos enxergar. Outros pesquisadores, com outros modos de ver o mundo e a formação matemática do professor, poderiam enxergar outras possibilidades. Dentro de nossas possibilidades, escolhemos um dos três caminhos[92] e o percorremos, fazendo escolhas e tomando decisões que o tornaram ora de mais fácil acesso, pois outros pesquisadores já haviam passado por ali, ora aparentando uma mata fechada, de difícil acesso. Chegamos, enfim, a uma determinada altura da caminhada em que a parada é inevitável, seja para refletir sobre o que fora até então percorrido, seja para pensar os próximos passos.

Começamos com a reflexão do que fora percorrido. Iniciamos a caminhada levantando uma questão inicial: *de que maneira o corpo dos números racionais pode ser abordado em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais?* Para responder a essa pergunta, estabelecemos um objetivo principal – *investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática* – que foi desmembrado em quatro objetivos específicos, permitindo-nos pensar o trajeto em partes, as quais vamos revisitar agora.

Iniciamos nossa caminhada com uma necessidade: *caracterizar* que matemática entendemos ser adequada à formação do professor. Não seria possível vislumbrar fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática sem termos clareza de que matemática pretendemos para a formação do professor. Essa caracterização se deu a partir do diálogo de nossos três referenciais teóricos centrais: a abordagem dos perfis conceituais, o HCK e a diferenciação entre a

[92] Lembramos que tomamos o terceiro caminho, aquele que considera que o ensino das estruturas algébricas na formação do professor pode contribuir para a construção dos saberes profissionais docentes, mas que é necessário investigar formas de fazê-lo.

Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica. Tal caracterização se deu na seção 1.3 e fundamentou todo o restante do trabalho: *uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar; que permita ao professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pensar os conceitos matemáticos em contextos variados da Educação Básica; que possibilite ao professor, ao mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo escolar e possíveis relações com a Matemática Acadêmica*.

O segundo objetivo específico se refere à etapa do caminho em que foi necessário recorrer a diferentes personagens que compõem a matemática na formação do professor que almejamos. Trata-se de *discutir com* e *a partir de* diferentes fontes de dados aspectos dos números racionais na Matemática Escolar e na Matemática Acadêmica. Para esse objetivo específico, estabelecemos a seguinte estratégia: colocar lado a lado os números racionais na escola e os números racionais (junto com a estrutura de corpo) na formação inicial de professores. Para toda fonte de dados prevista para pensar os números racionais na escola era, imediatamente, considerado seu equivalente para a formação inicial de professores. Nesse sentido, analisamos livros didáticos e documentos oficiais de ambos os contextos, entrevistamos professores da Educação Básica e professores formadores, e buscamos resultados de pesquisas que discutem os números racionais no contexto escolar e na formação de professores.

Das discussões promovidas por essas diferentes fontes de dados, produzimos *Reflexões*, que são produtos de nossas interpretações sobre os dados e entrelaçamentos com os referenciais teóricos assumidos. Tais *Reflexões* foram fundamentais para termos maior entendimento sobre o problema investigado, permitindo-nos sair do senso comum, questionando, problematizando e buscando alternativas para o ensino do corpo dos números racionais. Foram produzidas, ao total, *31 Reflexões* que nos levaram a concluir que, estando a Matemática Acadêmica presente nos cursos de formação de professores, ela deve ser tomada de forma problematizada, não de forma absoluta, pronta e acabada, mas, sim, evidenciando algumas de suas características que a explicitam como uma produção social, tal como sua intencionalidade, suas escolhas pautadas na busca por consistência, sua forma de compactar significados. No caso particular dos números racionais na Matemática Acadêmica, acreditamos que acrescentar os modos de pensar os racionais característicos desse contexto (como classes de equivalência e como elementos de um corpo), trabalhando com o futuro professor a tomada de consciência de demarcação das zonas de um perfil conceitual de número racional, pode dar maior autonomia a esse professor na produção de conhecimento matemático, deixando de tomar a Matemática Acadêmica como uma referência epistemológica a ser seguida, passando a assumi-la como um modo específico de fazer matemática, que, muitas vezes, não convém à prática docente na Educação Básica. Retomamos a descrição do HCK proposta por Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), quando afirmam que o HCK inclui conhecer de onde as ideias vêm e como a "verdade" ou validade é estabelecida, para ressaltarmos que concordamos com essa colocação, não no sentido de haver *uma* verdade, mas no sentido de que o professor precisa conhecer as maneiras como as validades são estabelecidas, para se ter consciência de como se tratar essas validades dentro da Matemática Escolar.

Novamente, destacamos que, não somente a Matemática Acadêmica serve para o propósito de se colocar em conflito com a Matemática Escolar, modificando-a continuamente de acordo com as mudanças da sociedade. Outras matemáticas produzidas em outros contextos, como a Matemática do Cotidiano, devem problematizar a Matemática Escolar, para que esta não se encontre desconectada do contexto sócio-histórico-cultural em que a escola se situa. Desse modo, acreditamos que a Matemática Escolar, enquanto uma prática social, deve estar em relação com outros modos de se fazer matemática para se pôr sempre em questionamento.

Antes de retomarmos o terceiro objetivo específico, reafirmamos que os números racionais na perspectiva da Matemática Acadêmica podem dar maior repertório ao professor para tomar decisões em diferentes contextos e, também, dar condições para que possa descomprimir regras e algoritmos presentes, por exemplo, no ensino das operações com esses números. Contudo, é preciso chamar a atenção para um ponto nessa afirmação. A tomada de consciência da demarcação dos modos de pensar os números racionais é fundamental para que o conhecimento da Matemática Acadêmica não sirva como uma ferramenta de demonstração de poder pelo professor, isto é, os conhecimentos da Matemática Acadêmica não devem servir para o professor dar uma explicação muito rebuscada, fora do alcance de seus estudantes, de modo que eles não a compreendam e, ainda, fiquem com a impressão de que o professor é o detentor do conhecimento matemático, tornando-o um ser inquestionável. Um professor que não reconhece o contexto pode não perceber que falar em "números racionais como classe de equivalência", em um 7º ano do Ensino Fundamental, não favorece a compreensão desses números, criando a sensação de que os estudantes nada sabem e colocando o conhecimento matemático como inacessível.

O que estamos propondo é o inverso disso, o conhecimento de número racional como classe de equivalência pode ajudar o professor a se questionar, como fizemos na *Reflexão 2*, sobre a natureza do número (número é um conjunto?, o que é um número?), causando-lhe um estranhamento sobre a matemática, tornando-o mais sensível aos estranhamentos (LINS, 2005) comuns entre os estudantes da Educação Básica; por exemplo, quando os estudantes lidam com número racional $\frac{a}{b}$ no sentido de divisão indicada, será que não há uma dificuldade em ver $\frac{a}{b}$ como um número, já que indica um processo (uma divisão a ser feita)? No caso de uma razão, é imediato compreendê-la como um número, já que é uma relação entre grandezas?

Assim, um professor que já internalizou os significados característicos da Matemática Escolar pode ter, nos temas epistemológicos da Matemática Acadêmica, situações em que os estranhamentos com a matemática voltem a fazer parte de seu aprendizado, sendo mais solidário às dificuldades de seus estudantes.

O terceiro trecho do caminho que percorremos refere-se ao objetivo específico de *organizar*, na matriz epistemológica, diferentes formas de significar o conceito de número racional. A construção da matriz epistemológica foi realizada a partir de muitas das *Reflexões* levantas pelas *discussões com* e a *partir de* livros didáticos, pesquisas e entrevistas com os professores, bem como a partir do estudo histórico e dos trabalhos de Kieren (1976, 1980) sobre os subconstrutos dos números racionais. Nessa etapa, levantamos 11 temas epistemológicos, dos quais três deles são característicos do contexto da Matemática Acadêmica, sete da Matemática Escolar e um deles da Matemática do Cotidiano.

Os temas epistemológicos, que futuramente darão origem às zonas de um perfil conceitual de número racional, trazem um novo olhar para esses números. É fato que esse conceito tem sido bastante explorado pela comunidade científica. Na seção 2.1, citamos duas propostas curriculares para o ensino-aprendizagem de números racionais, a do *Rational Number Project* e a da Educação Matemática Realística. Também vimos os trabalhos de Kieren (1976, 1980) e citamos o de Lamon (2012) e de Onuchic e Allevato (2008). Todos esses trazem, cada um a seu modo, diferentes significados para os números racionais. Contudo, o perfil conceitual de número racional nos permitirá construir categorias diferentes, pautadas nos diferentes modos de pensar e falar, e não em uma análise puramente matemática. Evidentemente, as análises matemáticas nos auxiliam, entretanto, relembrando a discussão teórica da abordagem dos perfis conceituais, os conceitos são estabilizados socialmente e, portanto, análises matemáticas que sugerem formas de pensar parecem compor um movimento contrário ao que estamos buscando. Na abordagem dos perfis conceituais, os modos de pensar compõem as zonas e não as zonas que determinam formas de pensar. É justamente por isso que, por exemplo, incluímos a categoria “fração” no tema epistemológico 5 – *Formas de representar* –, pois a literatura de concepções alternativas nos indica que esse possa ser um modo de pensar os números racionais, mesmo "incorreto" do ponto de vista da Matemática Escolar ou Acadêmica. Em uma categorização puramente matemática dos números racionais, uma forma de pensar que não seja coerente com a Matemática Escolar ou Acadêmica é descartada; na abordagem dos perfis conceituais pode ser tomada como uma zona do perfil, dado seu valor pragmático.

A organização da matriz epistemológica foi um importante passo para a construção do perfil conceitual de número racional. Por mais que essa construção não esteja completa, ela é a base de nossa forma de compreender os números racionais na formação do professor. Exploramos isso mais adiante, na Figura 36.

Por ora, destacamos que as *Reflexões* junto com os temas epistemológicos apresentados na MENR nos conduziram até uma etapa do caminho que não seria mais possível seguir em frente sem antes repensar todos os passos que foram dados, e esse exercício de repensar implica em responder à pergunta: com tudo isso que investigamos, como seria um ensino do corpo dos números racionais pautado nas construções que fizemos? Foi na tentativa de respondê-la que *elaboramos* uma sequência de três tarefas para o ensino do corpo dos números racionais para a Licenciatura em Matemática, nosso quarto e último objetivo específico.

A Tarefa 1 resgata diferentes modos de pensar os números racionais que são característicos da Matemática Escolar e busca gerar discussões do ponto de vista de seu ensino. Faz parte da tarefa propor investigações sobre contextos nos quais os números racionais podem aparecer ao longo da Educação Básica, debatendo diferentes temas a partir dos quais os números racionais podem ser significados, na tentativa de promover uma familiaridade com a disciplina que contribua para o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino da Matemática Escolar. A Tarefa 2 visa trazer para a discussão os números racionais na Matemática Acadêmica. Sua apresentação logo na sequência da Tarefa 1 tem um motivo: contrastar as naturezas distintas entres os modos de pensar os números racionais. Debater essa natureza distinta com os licenciandos pode evitar a compactação de diferentes significados do conceito de número racional em um único e formal modo de pensar, uma vez que os mesmos terão a oportunidade, com a mediação do professor formador, de estabelecer o valor pragmático de cada significado. Esse exercício de tomada de consciência fica mais fortalecido com a Tarefa 3, quando, efetivamente, são levantados questionamentos sobre os números racionais na Matemática Acadêmica que podem ser pertinentes ao conhecimento matemático do futuro professor.

Ao nos empenharmos em elaborar uma sequência de tarefas, não buscávamos, de modo algum, ser prescritivos, no sentido de apresentarmos uma receita que o professor formador deve seguir para abordar o corpo dos números racionais. Propor essas tarefas foi uma necessidade que nos impusemos para sairmos da zona de conforto de simplesmente apontar *como não deve ser*, para cairmos no campo propositivo e, portanto, passível de críticas do *como acreditamos que pode ser*, indicando alternativas àquele modo que identificamos como sendo ineficaz à formação do professor. As tarefas que construímos aqui são primeiros exemplos que mostram nossa visão sobre como a Matemática Acadêmica pode ser tratada em cursos de Licenciatura em Matemática.

Em certa medida, mais importante do que propriamente a sequência de tarefas, entendemos que todo o processo de sua produção, a partir de um diálogo entre diferentes fontes e sempre buscando partir da Matemática Escolar para discutir aspectos da Matemática Acadêmica, mostrou-se como um modelo possível e, em certa medida, recomendável para se produzir novos conhecimentos a respeito da matemática na formação do professor. O que temos visto frequentemente, e isso ficou evidente nas discussões sobre os PPC de alguns cursos, é que o movimento tem sido o inverso: primeiramente é abordada a Matemática Acadêmica nos cursos de formação de professores para depois se buscar articulações com a Matemática Escolar, sendo que esse exercício (de buscar articulações) é, quase sempre, deixado a cargo dos licenciandos para quando ingressarem na profissão.

É fato que, além da estrutura de corpo, outros conteúdos da Matemática Acadêmica precisam ser problematizados, questionando suas presenças nos currículos de cursos de formação e buscando abordagens que os aproximem mais da prática docente. Essa prática de problematizar e produzir propostas é urgente para a discussão sobre a formação matemática do professor. Retomamos a fala do professor formador Tiago, que retrata essa necessidade, quando destaca sua dificuldade em estabelecer relações entre a estrutura algébrica corpo que ensina na Licenciatura em Matemática e os números racionais na Educação Básica, pois há *o problema de não ter de onde sair.* [...] *É difícil. É preciso ter uma pesquisa. Aí tem os racionais, grupos, relação, operação, polinômios... tudo isso.* [...] *Por mais que você pense no problema...* [...] *por exemplo, você propor, sua tese, você propor, é isso que falta. Falta eu ter acesso a isso. Eu não estou indo atrás ou isso não vem até mim?* (Entrevista com Tiago).

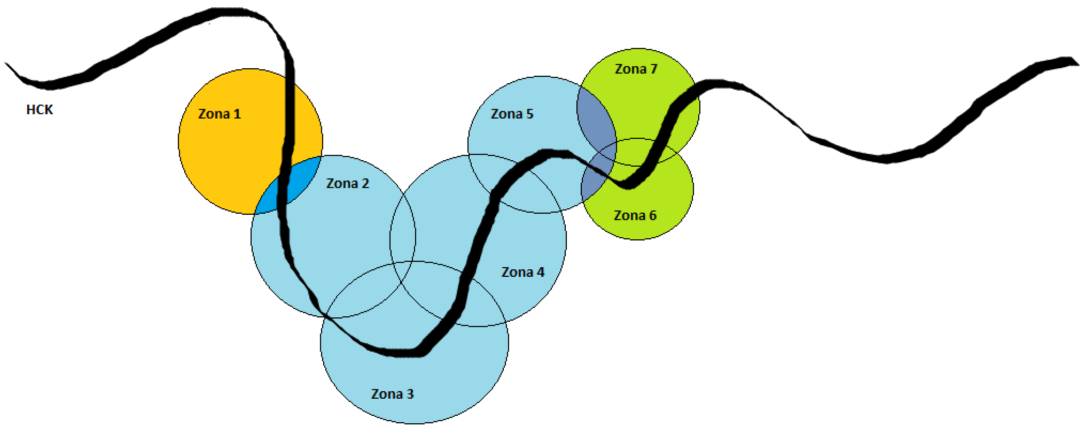
Pronto! Olhamos para trás e percebemos que a caminhada foi longa, mas produtiva. Produtiva a ponto de termos elementos para responder à questão investigativa que levantamos no início do trabalho. De certo modo, muitas coisas já foram respondidas no decorrer do caminho, o que torna difícil sintetizar tudo em uma pequena explicação. Em suma, afirmamos que uma maneira possível de se abordar o corpo dos números racionais em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais envolve: *tomar os números racionais na Matemática Escolar como ponto de partida, explorando situações de sala de aula em diferentes contextos (desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio), permitindo que os licenciandos tenham uma compreensão longitudinal desse conceito ao longo da Educação Básica, e, também, buscando ampliar essa compreensão para além da Matemática Escolar, propondo o trabalho com temas epistemológicos que são mais característicos da Matemática Acadêmica, de modo que os números racionais na Matemática Acadêmica possam ser problematizados em termos de sua relação (ou falta de relação) com os números racionais na Matemática Escolar, promovendo (i) a tomada de consciência da demarcação das zonas do perfil conceitual de número racional e (ii) a percepção das matemáticas como práticas sociais situadas em contextos diferentes, com objetivos e critérios de validação específicos.*

Desse modo, a abordagem sugerida para o ensino do corpo dos números racionais não está pautada no conteúdo estrutura algébrica corpo, mas sim nas formas de pensar os números racionais. Longe de tratar a estrutura algébrica corpo como aquela que *fundamenta* o trabalho docente ao ensinar números racionais, o centro da discussão que propomos está nos diferentes modos de se fazer matemática, de se pensar os números racionais.

Do ponto de vista do HCK, esses modos de se pensar os números racionais característicos da Matemática Acadêmica têm potencial para conectar esse conceito ao processo de resolução de uma equação polinomial de primeiro grau com uma incógnita, por meio da valorização da coletividade das propriedades, bem como reconhecer que pode se trabalhar com $\mathbb{Q}[x]$ da mesma forma que se trabalharia com $\mathbb{Q}$, operando com frações do tipo $\frac{2}{3}$ e do tipo $\frac{x+1}{x^2+1}$ da mesma maneira. Evidentemente, as considerações feitas pelo professor formador Plínio, quando considera a necessidade de se ter experiências com várias situações para poder extrair a estrutura, devem ser levadas em conta e podem ser incluídas na discussão proposta pelo professor formador, que deve reconhecer os aspectos levantados e saber trabalhá-los com os futuros professores.

Mesmo não tendo ainda individuado as zonas do perfil conceitual de número racional, essa construção faz parte de nossa compreensão sobre a discussão dos números racionais na formação do professor. Ficou evidente o fato de que os números racionais são um conceito polissêmico e, portanto, admite a construção de seu perfil conceitual. De um modo mais amplo, a articulação entre os três referenciais teóricos que embasam a tese constituem o fundamento de nossa resposta ao problema investigado e essa articulação fica melhor representada na Figura 36 a seguir[93].

Figura 36: Articulações entre HCK, zonas de um perfil conceitual e as diferentes matemáticas como um modelo para a formação do professor



Fonte: o próprio autor

Na Figura 36, as cores das distintas (laranja, azul e verde) indicam zonas do perfil conceitual[94] de determinado conceito (que pode ser número racional) que são características de um determinado contexto. Por exemplo, a laranja poderia representar os números racionais na Matemática do Cotidiano, as zonas azuis representariam os números racionais na Matemática Escolar e, as verdes, os números racionais na Matemática Acadêmica. A linha preta indica o HCK, um conhecimento que permite ao professor "um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo" (JAKOBSEN et al., 2012, p. 4642, tradução nossa). O HCK, no caso da Figura 36, é entendido como um fio que conecta o conhecimento sobre as diferentes zonas do conceito e, ao mesmo tempo, que conecta o conhecimento do conceito ao conhecimento de outros conceitos (observe, na figura, que o fio não se limita às zonas, mas se estende para se ligar a outros conceitos).

Feitas as reflexões sobre o que fora até então percorrido ao longo do caminho que escolhemos, vamos, agora, pensar alguns próximos passos, indicando possibilidades

[93] A Figura 36 e sua descrição logo na sequência não estão restritas aos números racionais. Nossa intenção aqui é apresentar a forma como enxergamos a relação entre os três referenciais teóricos de um modo geral, de maneira que sirva como um quadro de referência para outros conceitos polissêmicos na formação de professores. Por isso, o número de zonas que aparecem na Figura 36 não condiz com o número de zonas do perfil conceitual de número racional, mesmo porque ainda não o construímos.

[94] A construção dessa figura é uma reinterpretação nossa da Figura 10 da seção 2.1, aquela que ilustra a forma como Sepulveda, Mortimer e El-Hani (2007) sugerem representar perfis conceituais.

futuras. A tese que aqui se encerra abre possibilidades para uma ampla agenda de pesquisa. A primeira delas é a individuação das zonas do perfil conceitual de número racional. Como já destacamos, é preciso pesquisas envolvendo mais dados empíricos (principalmente no domínio microgenético), para que as zonas não sejam ricas do ponto de vista teórico, mas pobres quando confrontadas com dados empíricos. Com base nos temas epistemológicos aqui levantados, é possível construir e analisar questionários, entrevistas e aulas vídeo-gravadas voltadas para esse domínio microgenético, na busca das (possíveis) zonas de um perfil conceitual de número racional.

Ainda sobre a individuação das zonas, há muitas pesquisas que podem ser melhor exploradas, como o livro *Rational Numbers: an integration of research* (CARPENTER, FENNEMA, ROMBERG, 2009), um agregado de diferentes pesquisas sobre os números racionais, que têm potencial para refinar as zonas que futuramente serão propostas.

Uma segunda possibilidade imediata que surge ao final da tese é a utilização da sequência de tarefas em situações reais de ensino, promovendo novos entendimentos e delineamentos, tal como sugerido pela Pesquisa de Desenvolvimento. A sequência de tarefas fora elaborada com vistas a se tornar viável ao professor formador, portanto, precisa ser colocada em debate e em uso, para que seja refinada e ampliada, no sentido de compor uma sequência de tarefas maior, que contenha outros conteúdos matemáticos e faça sentido enquanto uma disciplina do curso de formação de professores.

Acreditamos que refinar a sequência de tarefas passa, também, por uma investigação que a proponha para professores já atuantes na Educação Básica, por meio de um curso de formação continuada ou em diálogos com esses professores. Esses, com seus conhecimentos e experiências sobre e na escola, podem nos dar um retorno bastante rico sobre a validade e a relevância de se discutir os aspectos que aqui levantamos.

Outra possibilidade de pesquisa futura que emergiu em vários momentos desta tese remete a um tema que precisa, urgentemente, ser levado adiante: o currículo da formação de professores. Não podemos continuar com cursos de Licenciatura em Matemática em que os egressos saiam como se o curso não tivesse desempenhado papel algum em sua formação matemática, como evidenciaram Rangel, Giraldo e Maculan Filho (2015), ou que se formem com certa habilidade na aplicação de algoritmos envolvendo números racionais, mas sem conhecer o conceito com profundidade, como concluiu Damico (2007). Muitos professores estão se formando e percebendo que “a formação matemática que eles tiveram durante a Licenciatura não ofereceu condições para lidarem com as demandas matemáticas do trabalho docente no Ensino Fundamental e Médio” (VIOLA DOS SANTOS; LINS, 2016, p. 369).

Diversas pesquisas (DAMICO, 2007; VIOLA DOS SANTOS; LINS, 2016; MOREIRA; DAVID, 2010) têm apontado para a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, equacionando melhor os papéis da Matemática Acadêmica e da Matemática Escolar nesse processo formativo. Esse redimensionamento sugerido para a formação matemática pode ser compreendido quando se questiona: o que é mais urgente para que o professor possa desempenhar seu papel de ensinar matemática na Educação Básica? Como afirmam Viola dos Santos e Lins (2016), não se trata de pensar que o professor precisa de uma formação matemática menos sofisticada e "pesada" do que o bacharel em matemática, mas, sim, uma formação que ofereça modos de lidar com as demandas matemáticas de sua prática profissional.

Para nós, o mais urgente para o professor, em termos de formação matemática, são os conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos da escola e esses devem ser centrais. Por isso, a direção que estamos sugerindo é que as disciplinas de conteúdo matemático sejam, essencialmente, de discussões sobre e para a Matemática Escolar e que a Matemática Acadêmica apareça no sentido de problematizar a Matemática Escolar e de se discutir com os licenciandos modos de se fazer matemática, evidenciando a matemática como uma atividade humana. Essa é a nossa aposta, essa é a proposta que apresentamos para a comunidade acadêmica de educadores matemáticos e de matemáticos. Viola dos Santos e Lins (2016) afirmam que "não há pesquisas que argumentem sobre a relevância ou que, pelo menos, deem algumas justificativas para a presença, nas grades curriculares dos cursos de formação inicial de professores de matemática, as disciplinas que contemplem a matemática do matemático" (p. 370). A nossa, ao percorrer o terceiro caminho, buscou fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais e apontou justificativas. Para nós, essas justificativas são plausíveis, mas demandam novos debates, novas reflexões a partir do que propusemos. Somente assim a compreensão acerca do papel da Matemática Acadêmica na formação de professores pode avançar: propondo possibilidades para serem usadas e avaliadas, refutando-as ou validando-as.

Fato é que as estruturas algébricas, da maneira como tradicionalmente têm sido dadas na formação, não servem para o trabalho docente na Educação Básica. Tanto os livros didáticos voltados ao Ensino Superior (considerando que não há um livro de Álgebra Abstrata que seja cuidadosamente construído para a formação de professores) como os PPC aqui analisados indicam que a prioridade, nos cursos de Licenciatura em Matemática, tem sido as estruturas algébricas, em detrimento dos temas matemáticos da escola. As entrevistas com os professores formadores alertam para isso, quando todos os três entrevistados consideram insuficiente a abordagem dos números racionais nos cursos de formação. Terminamos esta tese, enfim, reiterando nossa sugestão de inverter os papéis e tomar os números racionais como o foco de ensino, não como um exemplo da estrutura algébrica corpo. Dessa forma, quem sabe, o corpo dos números racionais possa integrar o que entendemos por Matemática Escolar, a partir do momento em que favoreça o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais.

Referências bibliográficas

ALVES, V. S. *A Construção do conceito de número racional no sexto ano do Ensino Fundamental*. 2012. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió. 2012.

AMARAL, E. M. R. *Perfil conceitual para a segunda lei da termodinâmica aplicada às transformações físicas e químicas e dinâmica discursiva em uma sala de aula de química do ensino médio*. 2004. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

AN, S.; KULM, G.; WU, Z. The pedagogical content knowledge of middle school teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, p. 145-172, 2004.

BALL, D. L.; BASS, H. Toward practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: DAVIS, B.; SIMMT, E. (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 2003, p. 3-14.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, n. 59, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v. 8, número temático, 2015.

BARBOSA, Y. O. *Multisignificados de equação*: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. 2009. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2009.

BRASIL. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. *Diário Oficial da União*, Brasília, 05 mar. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 16 fevereiro 2017.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Ministério da Educação. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 562 p.

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. *Diário Oficial da União*. Brasília, 2014. Disponível em: em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm, acessado em 21 de janeiro de 2017.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*: proposta preliminar, segunda versão revista, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 16 de fevereiro 2017.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and process*. New York: Academic Press, 1983. p.91-126.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994, 336p.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. *REVEMAT* - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 2, n. 1, p.68-93, 2007.

CAMPOS, H. R.; FRANCISCHINI, R. Trabalho infantil produtivo e desenvolvimento humano. *Psicologia em Estudo*, Maringá, v. 8, n. 1, p. 119-129, 2003.

CAMPOS, T. M. M.; SILVA, A. F. G. Conhecimento profissional docente de professoras das séries iniciais da Educação Básica acerca da equivalência de números racionais na representação fracionária em um processo de formação continuada. *REVEMAT* - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 4, n.1, p.114-127, 2009.

CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Ed.) *Rational Numbers*: an integration of research. New York: Routledge, 2009.

CARAÇA, B, J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1951.

CARVALHO, M. S; LOPES, M. L. M. L.; SOUZA, J. C. M. *Fundamentação da Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: Câmpus, 1984.

CATTO, G. G. 2000. *Registros de representação e o número racional*: uma abordagem nos livros didáticos. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CERAGIOLI, L. *Conhecimentos de alunos do programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) relativos aos números racionais na forma fracionária*. 2011. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2011.

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 6º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015a. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 7º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015b. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. *Convergências*: Matemática, 8º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015c. (Coleção Convergências).

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre, n.2, p.177-229, 1990.

CHEVALLARD, Y. *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique, 1991.

COUTINHO, F. A. *Construção de um perfil conceitual de vida*. 2005. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2005.

COUTINHO, F. A.; MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. Construção de um perfil conceitual para o conceito biológico de vida. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 12, n. 1, p. 115-137, 2007.

CYRINO, M. C. C. T. et al. *Formação de professores em Comunidades de Prática*: frações e raciocínio proporcional. Londrina: UEL, 2014.

CRESWELL, J. W. Projeto de pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto. Tradução: Magda Lopes. 3ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CROTTY, M. *The fundations of social research*: meaning and perspective in the research process. Londres: SAGE, 1998.

DAMICO, A. *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DAVID, M. M. D.; MOREIRA, P. C.; TOMAZ, V. S. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 15 n.1 p.42-60, 2013.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4 ed. Reform. São Paulo: Atual, 2003.

DORIGO, M. *Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio*. 2010. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2010.

DUBINSKY, E. et al. On learning fundamental concepts of groups theory**.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 27, 1994. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>. Acesso em: 07 set. 2016.

EINSTEIN, A. (1921) Geometria e Experiência. Tradução de V. A. Bezerra. *Scientiae Studia*. São Paulo, v.3, n.4, p.665-675, 2005.

ELIAS, H. R. *Dificuldades de estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos*. 2012. 145p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. D. Dificuldades de graduandos em Matemática na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo. *Educação Matemática Pesquisa* (Online), v. 15, p. 51-82, 2013.

ELIAS, H. R.; GERETI, L. V.; SAVIOLI, A. M. P. D. “Que horror! Uma coisinha tão simples": um estudo sobre a produção de significados para questões matemáticas. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2015. Pirenópolis. *Anais*... Pirenópolis, 2015.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. D.; RIBEIRO, A. J. “Corta”, “multiplica cruzado”, “mudou de lado, muda de sinal”: o conhecimento do horizonte acerca dos números racionais de uma professora da Educação Básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 12., 2016. São Paulo. *Anais...* São Paulo, 2016.

ELLIOTT, J. *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata, 1993.

ESTEBAN, M. P. S. *Pesquisa qualitativa em educação*: fundamentos e tradições. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010.

EVARISTO, J.; PERDIGÃO, E. *Introdução à Álgebra Abstrata*. Segunda Edição, Formato Digital/Versão 01.2013. Maceió, 2013

EVEN, R.; TIROSH, D. Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29, p. 1-20, 1995.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. Divisão e números racionais: como os professores avaliam a produção dos alunos. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande (MS), v.1 n.2, p. 111-123, jul./dez. 2008.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*, Campinas, v. 20, n. 37, 2012.

FENNEMA, E.; FRANKE, M. L. Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan, 1992, pp. 147-164.

FERNANDEZ, C. PCK - Conhecimento Pedagógico do Conteúdo: perspectivas e possibilidades para a formação de professores. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2011, Campinas. *Atas*... Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. v. 1. p. 1-12.

FERNÁNDEZ, S.; FIGUEIRAS, L. Horizon content knowledge: Shaping MKT for a continuous mathematical education. *Redimat*, v.3, n.1, p.7-29, 2014.

FIORENTINI, D. Pesquisando com professores – reflexões sobre o processo de produção e ressignificação dos saberes da profissão docente. In: MATOS, J. F.;

FERNANDES, E. (Eds). *Investigação em Educação Matemática*: perspectivas e problemas. Lisboa: APM, 2000. p. 187-195.

FIORENTINI, D. A Formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da Licenciatura em Matemática. *Revista de Educação*, Campinas, n. 18, p. 107-115, 2005.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A.; PINTO, R. A. Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. *Quadrante*: Revista Teórica e de Investigação. Lisboa: APM. Vol. 8, números 1-2, p.33-60, 1999.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática*: Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. – (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D.; SOUZA JUNIOR, A. J.; MELO, G. F. A. Saberes docentes: Um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. (Org.). *Cartografias do trabalho docente*: Professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, ALB, 2003, p. 307-335.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n. 36, p. 137-160, 2002.

FIORENTINI, D. et al. O professor que ensina Matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática*: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. p. 17-41.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FRANCO, M. A. R. S. A metodologia de pesquisa educacional como construtora da práxis investigativa. *Nuances*: estudos sobre educação, ano IX, v. 9, n. 9/10, p. 189-208, 2003.

FREIRE, P. C. *Uma jornada por diferentes mundos da matemática investigando os números racionais na forma fracionária*. 2011. 194f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2011.

GATTI, B. A. *A construção da Pesquisa em Educação no Brasil*. Brasília: Editora Plano, 2002.

GAUTHIER, C. *Por uma teoria da Pedagogia*: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: Unijuí, 1998.

GIL, J. S. *Uma abordagem lúdica para as diferentes representações do número racional positivo*. 2012. 164f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras. 2012.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, p. 65-104, 2010.

GOES, M. C. R. A formação do indivíduo nas relações sociais: contribuições teóricas de Lev Vigotski e Pierre Janet. *Revista Educação & Sociedade*, ano XXI, n. 71, 2000a.

GOES, M. C. R. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: Uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. *Cad. CEDES*, Campinas, v. 20, n.50, 2000b.

GOMES, M. L. M. Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira. *Bolema*, Rio Claro, ano 19, n. 25, p. 17-44, 2006.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

GRAEBER, A.; TIROSH, D. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development. In: SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Sense Publishers Rotterdam, 2008. p. 117 – 132.

HOUAISS, A. Quociente. In: HOUAISS, A. *Houaiss Eletrônico*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

IFRAH, G. *Os números: História de uma grande invenção*. Tradução: Stella Maria de Freitas Senra. 8ª edição – São Paulo: Globo, 1996.

JAKOBSEN, A. et al. Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge. In: ICME (Ed.), *12th International Congress In Mathematics Education*. Seoul (Coreia): ICME, 2012, p. 4635-4644.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M. Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching. In: *Eight Congress Of The European Society For Research In Mathematics Education*. Antalia, Turquia: ERME, 2013.

JUNQUEIRA, S. M. da S.; MANRIQUE, A. L. Reformas curriculares em cursos de licenciatura de Matemática: intenções necessárias e insuficientes. *Ciência e Educação*, Bauru, v. 21, n. 3, p. 623-635, 2015.

KATZ, V. J. *História da matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KICHOW, I. V. *Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental*. 2009. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul, Campo Grande. 2009.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.) *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. (Ed.) *Recent Research on Number Learning*. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

KLEIN, F. *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. Volume I, Parte I: Aritmética. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

KLUTH, V. S. O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma visada fenomenológica. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 20, n. 28, p. 95-113, 2007.

LAGE, L. *Enquadramento de números racionais em intervalos racionais*: uma investigação com alunos do Ensino Fundamental. 2006. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

LAMON, S. *Teaching fractions and ratios for understanding*: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2006.

LAMON, S. Rational numbers and proportional reasoning. In: LESTER, F. (Ed), *Second handbook ok mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing, 2007, p. 629-667.

LAMON, S. *Teaching fractions and ratios for understanding*: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3ª edition. New York: Routledge, 2012.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning*: Legitimate peripheral participation. New York: Cambridge University Press, 1991.

LERMAN, S. A review of research perspectives on mathematics teacher education. LIN, F. L.; COONEY, T. J. (Eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 33-52.

LESSARD-HEBART, M; GOYETTE, G; BOUTIN, G. *Investigação qualitativa*: fundamentos e práticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1994.

LIMA, C. W. *Representações dos números racionais e a medição de segmentos*: Possibilidades com Tecnologias Informáticas. 2010. 199f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2010.

LINS, R. C. A formação pedagógica nas disciplinas de conteúdo matemático nas Licenciaturas em Matemática. *Revista de Educação*, Campinas, n. 18, 2005.

LINS, R. C., SILVA, H. da. *Frações*. Brasília: MEC, SEB, SEED, UNESP, 2008, 39 p. (Coleção PRÓ-LETRAMENTO, Fascículo 04).

LLINARES, S. Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista Interuniversitária de formación del profesorado*, v. 32, n. 2, p. 117-127, 1998.

LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. *Bolema*: Rio Claro, Ano 21, nº 31, p. 1-22, 2008.

LUCENA, A. M.; ARAÚJO, L. F; SANTOS, M. C. A metacognição no livro didático de matemática: um olhar sobre os números racionais. *REVEMAT*, Florianópolis (SC), v. 08, Ed. Especial (dez.), p. 209-226, 2013.

MACHADO, A. C. *Aquisição do conceito de função*: perfil das imagens produzidas pelos alunos. 1998. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1998.

MACEDO, E. Base Nacional Curricular Comum: novas formas de sociabilidade produzindo sentidos para educação. *Revista e-Curriculum*, São Paulo, v. 12, n. 03 p.1530 – 1555, 2014.

MATTOS, C. R. Conceptual Profile as a Model of a Complex World. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile*: a theory of teaching and learning scientific concepts. New York: Springer, 2014.

McCRORY, et al. Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*. v. 43, n. 5, p. 584–615, 2012.

MARGENAU, H. *Open vistas*. New Haven, Connecticut: Yale University Press, 1961.

MARTINS, J. *O livro que divulgou o Papiro Rhind no Brasil*. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2015.

MILIES, F. C. P. Breve História da Álgebra Abstrata. Minicurso apresentado na *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática* – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números*: uma introdução à Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001.

MONDINI, F. BICUDO, M. A. V. A presença da Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Rio Grande do Sul. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 12, n.2, p.43-54, 2010.

MOREIRA, P.C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? *Zetetiké*, Campinas, v.13, n. 23, p.11-39, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, Campinas (SP), v.11, n. 19, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números Racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 21, p. 1-19, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 28, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor*: Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática Acadêmica e Matemática Escolar: dissonâncias e conflitos. In: LOPES, E. M. T.; PEREIRA, M. R. (Org.). *Conhecimento e inclusão social*: 40 anos de pesquisa em Educação. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2011. p. 193-222.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, nº 31, p. 103-127, 2008.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez. 2013.

MORTIMER, E. F. *Evolução do atomismo em sala de aula*: mudanças de perfis conceituais. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

MORTIMER, E. F. Conceptual change or conceptual profile change? *Science & Education*, 4, p. 265–287, 1995.

MORTIMER, E. F. *Linguagem e formação de conceitos no ensino de ciências*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.

MORTIMER, E. F. Mudança Conceitual ou Mudança de Perfil Conceitual?. In: LOPES, E. M. T.; PEREIRA, M. R. (Org.). *Conhecimento e inclusão social*: 40 anos de pesquisa em Educação. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2011. p. 165-191.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P.; EL-HANI, C. N. Bases teóricas e epistemológicas da abordagem dos perfis conceituais. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências, VII, 2009. *Anais*... Florianópolis: ABRAPEC, 2009.

MORTIMER, E. F. et al. Conceptual Profiles: Theoretical- Methodological Bases of a Research Program. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile*: a theory of teaching and learning scientific concepts. New York: Springer, 2014a.

MORTIMER, E. F. et al. Methodological Grounds of the Conceptual Profile Research Program. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile*: a theory of teaching and learning scientific concepts. New York: Springer, 2014b.

MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. Introduction. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile*: a theory of teaching and learning scientific concepts. New York: Springer, 2014.

MUÑOZ-CATALÁN, M.C. et al. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2015.

NACARATO, A. M. et al. Tendências das pesquisas brasileiras que têm o professor que ensina matemática como campo de estudo: uma síntese dos mapeamentos regionais. In:

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Org.). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática*: período 2001 – 2012. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. p. 319-350.

NETO, J. E. S.; AMARAL, E. M. R. A Produção Brasileira Sobre a Noção de Perfil conceitual: Analisando Tendências. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS. *Atas*... Águas de Lindóia, SP, 2013.

NIEMI, D. A Fraction Is Not a Piece of Pie: Assessing Exceptional Performance and Deep Understanding in Elementary School Mathematics. *Gifted Child Quarterly*, v. 40, n. 2, p. 70-80, 1996.

NIVEN, I. *Números*: racionais e irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1984.

OLIVEIRA, E. C. *Impactos da Educação Matemática nos Currículos Prescritos e Praticados*: estudo comparativo entre Brasil e Argentina. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. *Revista de Educação Matemática*. São Paulo: SBEM, ano 5, n. 3, p. 5-8, 1997.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 79-102, 2008.

PATRONO, R. M. *A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no* 6º *ano do Ensino Fundamental:* análise de uma proposta de ensino. 2011. 184f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. 2011.

PENTEADO, C. B. *Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimento para a abordagem dessa propriedade*. 2004. 177f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

PEREIRA, M. E. *Análise de situações de aprendizagem envolvendo números racionais*: uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar. 2007. 216f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

PINTO, M, F.; TALL, D. *Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers*. Published in Proceedings of PME 20, Valencia, vol. 4, p. 139–146, 1996.

PINTO, H. G. *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. 2011. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2011.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P. et al. *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and Development. In: LYN, D. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New York: Routledge, 2008, p. 233-261.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, Lisboa, v. 11, n. 2, 2002.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, 2014.

PONTE, J. P. et al. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, v. 24, n. 2, 2015.

POMMER, W. M. *A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico*: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 235 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

POSNER, G. J. et al. Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 1982.

RANGEL, L.; GIRALDO, V.; MACULAN FILHO, N. M. Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v.8, n. 2, 2015.

RIBEIRO, A. J. *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática*: contribuições de um estudo epistemológico. 2007, 144 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. *Ciência e Educação*, Bauru, v. 19, n.1, p. 55-71, 2013.

RIBEIRO, C. M. Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema*, Rio Claro, n. 34, 2009.

RIBEIRO, C. M. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 37, n. 2, 2011.

RODRIGUES, W. R. *Números racionais*: um estudo das concepções após o estudo formal. 2005. 246f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2005.

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 143-167, abr. 2015.

ROMANATTO, M. C. *Número racional*: relações necessárias à compreensão. 1997. 158f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1997.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, Campinas, v.7, n. 12, p. 37-49, 1999.

ROQUE, T. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSA, R. R. *Dificuldades na compreensão e na formação de conceitos de números racionais: uma proposta de solução*. 2007. 85f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2007.

ROSA, R. R.; VIALI, L. Utilizando Recursos Computacionais (Planilha) na Compreensão dos Números Racionais. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 183-207, 2008.

SACRISTÁN, J. G. *O currículo*: uma reflexão sobre a prática. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTOS, R. S. *Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais*. 2011. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2011.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. *Os professores e sua formação*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992.

SEPULVEDA, C. *Perfil conceitual de adaptação: uma ferramenta para análise de discurso de salas de aula de biologia em contextos de ensino de evolução*. 2010. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Universidade Federal da Bahia, Salvador. 2010.

SEPULVEDA, C.; MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. Construção de um perfil para o conceito de adaptação evolutiva. In: VI ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2007. *Atas*...Florianópolis, Santa Catarina, 2007.

SEPULVEDA, C.; MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. Construção de um perfil conceitual de adaptação: implicações metodológicas para o programa de pesquisa sobre perfis conceituais e o ensino de evolução. *Investigações em Ensino de Ciências*, Porto Alegre, v. 18, n. 2, p. 439-479, 2013.

SEVERO, D. F. *Números racionais e ensino médio: uma busca de significados*. 2009. 65f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2009.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15, n. 2, p. 4-14, Feb. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, Harvard, v.57, n.1, p.1-22, 1987.

SILVA, M. C. *Reta graduada:* um registro de representações dos números racionais. 2008. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2008.

SILVA, M. J. F. *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. São Paulo: Blucher Acadêmico, 2009.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. *Bolema*, Rio Claro (SP), ano 21, n. 31, p. 55-78, 2008.

SILVA, F. A. F.; SANTIAGO, M. L.; SANTOS, M. C. Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações. *REVEMAT* - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 8, Ed. Especial (dez.), p. 190-208, 2013.

SILVA, F. A. F.; SANTIAGO, M. M. L.; SANTOS, M. C. Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. *Bolema*, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1485-1504, dez. 2014.

SMITH, D. E. *History of mathematics*. Volume II, Dover Publications, INC: New York, 1958.

SOUZA, J. M. L. *Enquadramento de números racionais em intervalos racionais*: uma investigação com professores do Ensino Fundamental. 2006. 102f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

SOUZA, D. S. *Formação inicial do professor de matemática*: um estudo sobre o conhecimento pedagógico dos números racionais. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) - Universidade Federal do ABC, 2015.

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D. L. Studying the mathematical knowledge needed for teaching: the case of teachers' knowledge of reasoning and proof. In: *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, Estados Unidos, 2004.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: D. TALL (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer, 1991.

TARDIF, M. *Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários*: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. Quebec, Canadá: Universidade Laval, Grupo CRIFPE, 1999.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Deliberação – Câmara de Graduação 013/2013 de 16 de julho de 2013. *Altera a matriz curricular do 1º ano e as ementas do 1º e 2º ano do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2014*. Londrina, 2013. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/deliberacoes/deliberacao_13_13.pdf> Acesso em: out. 2016.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO". *Reestruturação do Curso de Graduação em Matemática*. Rio Claro, 2015. Disponível em: < http://igce.rc.unesp.br/#!/graduacao/matematica/sobre-o-curso/projeto-pedagico-a-partir-de-2015/ >. Acesso em 16 de fevereiro de 2017.

VIEIRA, V. L. *Álgebra Abstrata para Licenciatura*. 2ª ed. Campina Grande: EDUEPB, 2015.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. *Legitimidades possíveis para a formação matemática de professores de matemática*. 2012. 355f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2012.

WAGNER, H. *An analysis of the fraction concept*. An unpublished report, Chicago, 1976.

WASSERMAN, N. H. Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers, *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, Filadélfia, v. 24, n. 3, p. 191-214, 2014.

WASSERMAN, N. H. Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Ontário, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016.

WERTSCH, J. V.; STONE, C. A. The concept of internalization in Vygotsky´s account of the genesis of higher mental functions. In: WERTSCH, J. V. (Ed). *Culture, communication and cognition: vygotskian perspectives*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 24, n. 3, p. 301-321, 2016.

ZANELLA, M. S. *Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária*. 2014. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual De Maringá, Maringá. 2014.

ZEICHNER, K.M. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, C.M.G.; FIORENTINI, D; PEREIRA, E.M. (Orgs). *Cartografias do Trabalho Docente*: professor(a)-pesquisador(a). Campinas: ALB e Mercado de Letras, 1998, p.207-236.

APÊNDICE A

Publicação	Local	Autor(es)	Ano	Título	Objetivo	Alguns dos principais referenciais teóricos e/ou trabalhos citados que envolvam números racionais
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática	PUC-SP	Catto	2000	Registros de representação e o número racional: uma abordagem nos livros didáticos	Analisar livros didáticos do ensino fundamental acerca do conteúdo de número racional e utilizando a teoria dos registros de representação de Duval.	Duval (1988, 1992, 1996, 1999); Worle (1999); Adjiage (1999).
Tese – Doutorado em Educação Matemática	PUC-SP	Damico	2007	Uma investigação sobre a formação de professores de Matemática para o Ensino de Números Racionais no Ensino Fundamental	Identificar, descrever e categorizar a situação atual da formação dos futuros professores das universidades pesquisadas para o ensino de números racionais, por intermédio da análise de situações que captem os conhecimentos matemáticos e didáticos dos estudantes para professores.	Kieren (1976, 1980, 1989); Behr et al. (1983, 1992); Shulman (1986, 1987).
Dissertação – Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	PUC-SP	Pereira	2007	Análise de situações de aprendizagem evolvendo números racionais: Uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar	Analisar situações de aprendizagem envolvendo argumentações e provas matemáticas, integrando uma ferramenta computacional, tendo sido desenvolvido no âmbito do projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar,* referindo-se, particularmente, à 2ª fase deste projeto.	Balacheff (1988); Healy e Hoyles (2000); De Villiers (2001).
Dissertação - Mestrado Profissional	PUC-SP	Silva	2008	Reta Graduada: um registro de representação dos números racionais	Verificar se a introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades da	Duval (1993, 1995, 2005); Kieren (1976, 1988, 1993).

em Ensino de Matemática					aprendizagem dos racionais e se ela se configura como um elemento de auxílio para o ensino.	
Dissertação - Mestrado em Educação Matemática	PUC-SP	Souza	2006	Enquadramento de números racionais em intervalos de racionais: uma investigação com professores do ensino fundamental	Apresentar a duas professoras que lecionam em sétima e oitava séries do ensino fundamental, experientes no trabalho com o quadro teórico de Douady (1984), atividades envolvendo o enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.	Régine Douady (1984, 1986).
Dissertação - Mestrado em Educação Matemática	PUC-SP	Lage	2006	Enquadramento de números racionais em intervalos de racionais: uma investigação com alunos do ensino fundamental	Investigar quais conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos, bem como quais domínios (em termos de representação numérica, gráfica e outras) são utilizadas por estudantes de uma classe de sétima série do ensino fundamental de uma escola privada da cidade de São Paulo na resolução de atividades que abrangem enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.	Régine Douady (1984, 1986).
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática	PUC-SP	Rodrigues	2005	Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal	Identificar aspectos do conceito de fração relativos aos significados parte-todo e quociente que permanecem não apropriados por alunos em fase de escolarização posterior ao ensino formal desses números.	Caraça (1952); Vergnaud (1982, 1988, 1990, 1993, 1997), Kieren (1981, 1988, 1993); Behr et al. (1983); Behr et al. (1993); Santos (2005).
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática	UNESP – Rio Claro	Lima	2010	Representações dos números racionais e a medição de segmentos:	Buscar indícios das contribuições que o processo de medição de segmentos, realizado em um *software* de geometria	Romanatto (1997); Kieren, Behr et al. (1983).

				Possibilidades com Tecnologias Informáticas	dinâmica pode trazer ao ensino e aprendizagem dos números racionais.	
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática	UNIBAN	Freire	2011	Uma jornada por diferentes mundos da matemática investigando os números racionais na forma fracionária	Verificar quais mudanças de raciocínio de alunos de 5ª série sobre números racionais na forma fracionária foram acarretadas pelo estudo desse conteúdo nessa série.	David Tall (2004a, 2004b); Kieren (1976, 1988), Behr et al. (1983), Nunes et al. (1988) e Romanatto (1997).
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática	UNIBAN	Ceragioli	2011	Conhecimentos de alunos do programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) relativos aos números racionais na forma fracionária	Investigar saberes sobre números racionais na forma fracionária, particularmente quanto aos significados Parte-Todo e Quociente, os Invariantes de Equivalência e Ordem, os quais foram construídos por alunos de um Programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) da cidade de São Paulo.	Kieren (1976, 1988); Behr et al. (1983); Nunes (1997, 2005 e 2007) Damico (2007).
Dissertação – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática	PUC - RS	Severo	2009	Números racionais e ensino médio: uma busca de significados	Analisar registros de representação de números racionais, apresentados por alunos de Ensino Médio, e verificar se esses alunos relacionam o significado dos racionais com situações da vida cotidiana em que esses números são empregados.	Duval (2005), Catto (2000), Damico (2007); Allevato e Onuchic (2007); Merlini (2005).
Dissertação – Mestrado em Educação em Ciências e Matemática	PUC - RS	Rosa	2007	Dificuldades na compreensão e na Formação de conceitos de números Racionais: uma proposta de solução	Determinar se o uso de planilha como recurso no ensino dos números racionais na Educação Básica contribui para a aprendizagem e uma maior retenção desses conceitos a médio e longo prazo.	Álvarez (2003); Behr et al. (1983); Kieren (1976); Silva et al. (2000); Catto (2000).
Dissertação – Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática	UEM	Zanella	2014	Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em	Identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura de artigos internacionais sobre números racionais em sua representação	Kieren (1988, 1999); Behr et al. (1983).

				sua representação fracionária	fracionária em situações problemas com estruturas aditivas e multiplicativas.	
Dissertação – Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática	UFAL	Alves	2012	A construção do conceito de número racional no sexto ano do ensino fundamental	Propor uma sequência didática de ensino do conceito de números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental.	Caraça (1951); Catto (2000); Bryant et al. (2009); Duval (2009, 2010); Rodrigues (2005); Vygotsky (1998, 2005)
Dissertação – mestrado em Educação Matemática	UFMS	Kichow	2009	Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo ano do ensino fundamental	Descrever e analisar procedimentos didáticos implementados por professores, ao conduzirem o estudo dos números racionais para alunos em nível de sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental.	Romanatto (1999), Gomes (2006); Motta (2006); Chevallard (1999); Chevallard e Bosch (1999); Chevallard, Bosch e Gascón (2001)
Dissertação – Mestrado Profissional em Educação Matemática	UFOP	Patrono	2011	A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6 ano do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino	Investigar as contribuições de uma proposta de ensino de números racionais na forma fracionária, para alunos de 6 ano do Ensino Fundamental.	Caraça (2005); Romanatto (1997); Silva (1997); Rodrigues (2005); Catto(2000); Oliveira (1996); Bezerra (2001); Kieren (1976); Becker (1997); Caruso (2002).
Dissertação – Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica	UFPE	Santos	2011	Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede Municipal do recife na resolução de questões do SAEPE Sobre números racionais	Análise das estratégias utilizadas por alunos da Rede Municipal do Recife ao responderem questões de avaliações externas sobre números racionais, particularizando o SAEPE/Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco.	Nunes et al. (2003); Catto (2000); Caraça (1989); Duval (2003); Vergnaud (1996, 2001, 2009).

Dissertação – Mestrado Profissional em Educação Matemática	USS	Gil	2012	Uma abordagem lúdica para as diferentes representações do número racional positivo	Explorar de forma lúdica e concreta o conteúdo de números racionais e suas diferentes representações.	Castro (1995); Magina e Bianchini (1996); Silva e Aguiar (1997); Woerle (1999); Catto (2000); Bianchini (2001); Duval (2003; 2009) Vygotsky (1981, 1987, 2009).
Tese – Doutorado em Educação	Unicamp	Romanatto	1997	Número Racional: relações necessárias à sua compreensão	Analisar e discutir o processo de ensinar e de aprender os números racionais considerando a ideia de conhecimento como uma rede ou teia de relações ou significados.	Piaget (1978); Vergnaud (1993); Behr et al. (1992); Kieren (1975, 1988, 1989); Freudenthal (1983); Gimenez (1988).
Dissertação – Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática	UFABC	Souza	2015	A formação do professor de Matemática: um estudo sobre o conhecimento pedagógico dos números racionais	Investigar como se apresenta o conhecimento pedagógico dos números racionais com professores de matemática durante a sua prática em parceria com o projeto do Observatório da Educação da UFABC	Ball, Thames e Phelps (2008); Kieren (1976, 1988, 1993); Santos (2005); Damico (2007); Bezerra (2001); Bezerra, Magina e Spinillo (2002); Merlini (2005); Alves e Gomes (2007); Costa (2011); Tavares (2012).
Artigo	Bolema	Rojas, Flores, Carrillo	2015	Conocimiento Especializado de um Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales	Descrever o conhecimento especializado de um professor de matemática especialista da Educação Primária que ensina os números racionais a estudantes de 11 a 12 anos de idade.	Ball (2000); Ball; Thames; Phelps (2008); Hill et al. (2008)
Artigo	Bolema	Ponte e Quaresma	2014	Representações e Processos de Raciocínio na Comparação e	Saber em que medida a abordagem exploratória utilizada proporciona o desenvolvimento da capacidade dos alunos	Charalambous, Pitta-Pantazi (2007); Post et al.

				Ordenação de Números Racionais numa Abordagem Exploratória	compararem e ordenarem números racionais e conhecer o modo como usam diversas representações e como se caraterizam os seus processos de raciocínio.	(1993); Post, Behr e Lesh (1986)
Artigo	Bolema	Silva, Santiago e Santos	2014	Significados e Representações dos Números Racionais Abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM	Investigar quais são os significados e as representações dos números racionais que são contemplados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM	Romanatto (1997); Gomes (2010); Catto (2000); Merlini (2005); Duval (2003, 2009, 2011); Silva (2013).
Artigo	Bolema	Silva e Almouloud	2008	As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo	Realizar uma reflexão a respeito das operações com números fracionários focalizando a concepção parte-todo por meio de algumas atividades que possam contribuir para a prática docente na escola básica	Kieren (1988); Behr et al. (1983) e Behr et al. (1992); Silva (2005); Moreira e David (2004); Gomes (2006)
Artigo	Bolema	Onuchic e Allevato	2008	As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas	Abordar as diferentes "personalidades" do número racional e o conceito de proporcionalidade, analisando as possibilidades de utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.	Vergnaud (1991, 1994); Onuchic e Botta (1997), Botta (1997), Ohlsson (1991); Onuchic e Allevato (2005); Behr et al. (1992)
Artigo	Bolema	Moreira e Ferreira	2008	A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas	Apresentar uma síntese da literatura relacionada ao papel do subconstruto operador na aprendizagem escolar dos números racionais, oferecendo aportes que podem ser relevantes para a construção de uma visão profissional docente a respeito dos números racionais.	Kieren (1976, 1980); Behr et al. (1983); Behr et al. (1991, 1992)

Artigo	Bolema	Rosa e Viali	2008	Utilizando Recursos Computacionais (Planilha) na Compreensão dos Números Racionais	Determinar se o uso de planilha como recurso no ensino dos números racionais na Educação Básica contribui para a aprendizagem e uma maior retenção dessa aprendizagem a médio prazo.	Catto (2000); Duval (2003, 2007)
Artigo	Perspectivas da Educação Matemática	Fávero e Neves	2008	Divisão e números racionais: Como os professores avaliam a produção dos alunos	Analisar como professores de matemática, tanto aqueles licenciados em matemática ou ainda em curso e aqueles formados em pedagogia, interpretam as notações de alunos; e obter indícios de sua prática docente, incluindo o tipo de avaliação, sobretudo no que se refere à divisão e ao número racional.	Fávero (1994, 1995, 1996, 1999, 2000, 2001)
Artigo	Bolema	Gomes	2006	Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira	Foca a apresentação dos números racionais na matemática da escola secundária brasileira no século XX, até os anos 70, a partir da análise de alguns livros didáticos editados e utilizados nesse período.	Kieren (1976); Valente (1999, 2003, 2004).
Artigo	Bolema	Moreira e David	2004	Números racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica	Realizar uma análise do conhecimento matemático veiculado no processo de formação inicial do professor, confrontando-o com as questões que se colocam na prática docente na escola básica.	Behr et al. (1983); Moreira e David (2003)
Artigo	Zetetiké	Romanatto	1999	Número Racional: uma teia de relações	Discutir o processo de ensinar e de aprender os números racionais considerando a ideia de conhecimento como uma teia de aranha, em que de um ponto central (a notação $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$) emergem relações construídas a partir de diferentes contextos.	Vergnaud (1983, 1988); Kieren (1976, 1988); Behr et al. (1983); Behr et al. (1992); Botta (1997); Freudenthal (1983); Ohlsson (1988).

Artigo	Zetetiké	Fávero e Neves	2012	A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise	Analisa e discute uma pesquisa bibliográfica dos estudos brasileiros e internacionais centrados em dois tópicos: número racional e divisão. Foca dois objetivos principais: a análise do ponto de vista teórico e metodológico dessa produção e a identificação de possíveis aspectos consensuais, no que se refere tanto à prática de ensino quanto ao processo de aquisição conceitual.	Fávero e Sousa (2001). Em seu levantamento, aparecem Kieren, Vergnaud, Duval.
Artigo	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	Rangel, Victor e Maculan Filho	2015	Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais	Contribuir com a reflexão acerca da formação do professor de matemática do ensino básico apresentando uma investigação com foco no desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino. Estabelecer o foco sobre o conhecimento de matemática para o ensino com iluminação especial ao conteúdo, sob o entendimento de um metassaber do professor.	Ball, Thames e Phelps (2008); Klein (2009); Fiorentini e Oliveira (2013); Davis (2010); Davis e Renert (2014)
Artigo	REVEMAT	Campos e Rodrigues	2007	A idéia de unidade na construção do conceito do número racional	Apresentar um aspecto significativo da construção do conceito de número racional, que permanece não apropriado por alunos até estágios de escolarização posteriores ao seu ensino formal: a idéia de unidade.	Vergnaud (1982, 1988, 1993, 1997); Kieren (1981, 1988, 1993); Rodrigues (2005).
Artigo	REVEMAT	Campos e Silva	2009	Conhecimento profissional docente de professoras das séries iniciais da educação	Analisar a relação da compreensão do invariante equivalência em situações de parte-todo e quociente, com o conhecimento profissional docente.	Nunes et al. (2003); Vergnaud (1982); Rodrigues (2005)

				básica acerca da equivalência de números racionais na representação fracionária em um processo de formação continuada		
Artigo	REVEMAT	Silva, Santiago e Santos	2013	Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações	Analisar como são abordados os números racionais no ENEM, quanto aos seus significados e representações.	Duval (2003, 2009, 2011, 2012a e 2012b); Romanatto (1997); Gomes (2010).
Artigo	REVEMAT	Lucena, Araújo e Santos	2013	A metacognição no livro didático de matemática: um olhar sobre os números racionais	Investigar em que medida as atividades de livros didáticos de matemática poderiam favorecer o desenvolvimento de estratégias metacognitivas dos alunos, durante a sua resolução.	Onuchic e Allevato (2008); Romanatto (1997)

APÊNDICE B
Questões norteadoras para a entrevista com professores formadores

As perguntas abaixo têm como objetivo conhecer o ponto de vista de professores que atuam ou atuaram em cursos de Licenciatura em Matemática acerca do ensino das estruturas algébricas em cursos de formação de professores, em particular, o papel da estrutura algébrica corpo no desenvolvimento do conhecimento matemático dos números racionais de futuros professores em formação inicial.

O propósito de realizar essas entrevistas com professores formadores é oferecer subsídios para uma proposta de ensino que se pretende elaborar na tese de doutorado em andamento, que tem por objetivo (entre outros): *elaborar uma proposta de ensino da estrutura algébrica corpo que seja integrada com o ensino dos números racionais trabalhados na Educação Básica*. Entendemos que tal proposta será fortemente enriquecida se contar com as considerações e sugestões de professores formadores que conhecem o papel do ensino das estruturas algébricas na Licenciatura em Matemática.

As respostas às questões abaixo contribuirão para a elaboração da proposta e não serão objeto direto de análise da pesquisa.

1) Qual a sua formação (graduação, mestrado, doutorado)?

2) Você considera o ensino das estruturas algébricas (grupo, anéis e corpos) no curso de Licenciatura em Matemática relevante para a formação do professor? Por quê?

3) Você considera que, em cursos de Licenciatura (em todas as disciplinas), a atenção dada aos números racionais é suficiente para que o futuro professor esteja preparado para trabalhar nos diversos contextos em que esse conteúdo aparece na Educação Básica? Comente.

4) Você pensa que o ensino da estrutura algébrica corpo favorece o conhecimento matemático do professor da Educação Básica sobre os números racionais? Quer dizer, você considera necessário que o professor da Educação Básica tenha uma visão dos números racionais como elementos de corpo ordenado? Se sim, de que modo isso favorece o conhecimento matemático do professor?

5) Que tipo de relações matemáticas entre a estrutura algébrica corpo e os números racionais podem e devem ser feitas ao longo da formação inicial para que o licenciando consiga estabelecer conexões entre aquilo que está aprendendo e aquilo que irá ensinar na Educação Básica? Poderia nos dar alguns exemplos e caminhos a serem seguidos em nossa proposta?

Se considerar pertinente, sinta-se à vontade para levar materiais (livros, artigos, aulas preparadas etc) para contribuir com a conversa. Ou, se preferir, pode sugerir algum material para que eu leve no dia combinado.

APÊNDICE C

Termo de consentimento para os professores formadores

AUTORIZO o aluno **Henrique Rizek Elias**, matrícula número 201412350088, regularmente matriculado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações e gravações em áudio de minhas falas para fins de pesquisa relacionada ao doutorado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área.

Permito que o autor da pesquisa utilize em seu trabalho:

( ) Minhas respostas anonimamente.

( ) Meu nome e minhas respostas.

Declaro, ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação.

NOME:____

RG:____

DATA: ___ / ___ / 2016

ASS.:____

APÊNDICE D

Termo de consentimento para os professores da Educação Básica

AUTORIZO o aluno **Henrique Rizek Elias**, matrícula número 201412350088, regularmente matriculado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações e gravações em áudio de minhas falas para fins de pesquisa relacionada ao doutorado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que **meu nome não será citado em hipótese alguma**.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação.

NOME:____

RG:____

DATA: ___ / ___ / 2016

ASS.:____

ORIENTADORA: Angela Marta Pereira das Dores Savioli

ASS.:____