



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

EDUARDO DE ALMEIDA

**DINÂMICA DE ESTADOS EMARANHADOS DE ÍONS DE
DOIS NÍVEIS, MODOS VIBRACIONAIS E FÓTONS**

Londrina
2008

EDUARDO DE ALMEIDA

**DINÂMICA DE ESTADOS EMARANHADOS DE ÍONS DE
DOIS NÍVEIS, MODOS VIBRACIONAIS E FÓTONS**

Tese apresentada ao programa de Doutorado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientadora: Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma.

Londrina
2008

Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca
Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

A447d Almeida, Eduardo de.
Dinâmica de estados emaranhados de íons de dois níveis, modos vibracionais e fótons / Eduardo de Almeida. – Londrina, 2008. 173f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.
Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2008. Inclui bibliografia.

1. Mecânica quântica – Teses. 2. Computação quântica – Teses.
I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 530.14

EDUARDO DE ALMEIDA

**DINÂMICA DE ESTADOS EMARANHADOS DE ÍONS DE DOIS
NÍVEIS, MODOS VIBRACIONAIS E FÓTONS**

Tese apresentada ao programa de Doutorado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma (Orientadora)
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Bôas
Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Manuel Simões Filho
UEL – Londrina – PR

Londrina, 15 de agosto de 2008

Dedico este trabalho à minha esposa

ALMEIDA, Eduardo. **Dinâmica de estados emaranhados de íons de dois níveis, modos vibracionais e fótons**. 2008. 159 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

RESUMO

Neste trabalho, propomos a geração de estados emaranhados de íons de dois níveis, estados vibracionais e fótons em uma cavidade. Obtemos o Hamiltoniano que governa a evolução temporal dos íons aprisionados dentro de uma cavidade, no regime de Lamb-Dicke, considerando o sistema de três íons em três configurações diferentes: *i*) três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo no estado de Fock; *ii*) três íons aprisionados individualmente e o campo no estado de Fock e *iii*) três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo no estado coerente. Para estados iniciais específicos, derivamos expressões analíticas para o estado do sistema no tempo t , as quais são usadas para calcular a probabilidade de gerar estados tipo W de três qubits, a variância das quadraturas do campo e o número médio de fótons e de fônons. Mostramos quais as condições iniciais mais apropriadas para gerar estados W deterministicamente e probabilisticamente, assim como as condições para se gerar estados comprimidos do campo. A negatividade global, a negatividade parcial K-way e a entropia linear são usadas para quantificar o emaranhamento do sistema. Encontramos uma correspondência entre o aumento nas correlações quânticas de dois partidos e o aumento na probabilidade de gerar estados W . Considerando o modelo adiabático de perda de coerência, estudamos os efeitos sobre o sistema causados pela interação com o ambiente o qual é modelado como um sistema de osciladores bubônicos que não interagem entre si. Quando o sistema é preparado com os três íons no estado fundamental e o campo no estado de Fock, encontramos que para tempos suficientemente longos, a interação com o ambiente destrói o emaranhamento entre o subsistema fônon-fóton e os estados internos, mas preserva o emaranhamento entre os estados internos.

Palavras-chave: Íons aprisionados. Íons numa cavidade. Emaranhamento.

ALMEIDA, Eduardo. **Dynamics of entangled states of two levels of ions, photons and vibrational modes**. 2008. 159 f. Thesis (doctoral) - University of Londrina, Londrina, 2008.

ABSTRACT

In this work, a scheme to generate entangled states of two level trapped ions, vibrational states and photons in a cavity is proposed. With the vibrational state coupled to the field, we obtain the Hamiltonian that govern the system's time evolution in the Lamb-Dicke regime. We consider the three ion system in three different configurations: *i*) three ions in a single trap with the field in a Fock state; *ii*) three ions trapped individually and the field in a Fock state and *iii*) three ions in a single trap with the field in a coherent state. For specific initial states, analytical expressions for the state of the system at current time are derived and used to calculate the probability of generating W like states of three qubits, quadrature variance of the field, mean photon and phonon number. We identify the initial conditions to generate W states deterministically and probabilistically and also the conditions to generate squeezed states of the field. The global negativity, partial K -way negativity and linear entropy are used to quantify the entanglement of the system. We find a correspondence between the increase in the two body quantum correlations and the probability to generate W states. The adiabatic decoherence model is used to study the effects on the system due to the interaction with the environment, which is modeled as a set of noninteracting bosonic oscillators. When the system is prepared with the three ions in the ground state and the field in a Fock state, we find that, for sufficiently long interaction time with the environment, the entanglement between the phonon-photon subsystem and the internal states is destroyed, but the entanglement between internal states is preserved.

Key-words: Trapped ions. Ions in cavity, Entanglement.

LISTA DE FIGURA

Figura 4.1 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $ 000, 3, 3\rangle$	41
Figura 4.2 – Probabilidades P_0, P_1 e P_2 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $ 000, 2, 2\rangle$	46
Figura 4.3 – Probabilidades P_0, P_1 e P_2 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $ 000, 2, 4\rangle$	47
Figura 4.4 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $ 111, 0, 0\rangle$	49
Figura 4.5 – Negatividade global e negatividade parcial K-way com o sistema preparado no estado inicial $ 000, 2, 2\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).....	53
Figura 4.6 – Negatividade global e negatividade parcial K-way calculados para as partições $A+BCD$ com o sistema preparado no estado inicial a) $ 000, 2, 2\rangle$ e b) $ 000, 2, 4\rangle$ em função da variável τ (graus).....	54
Figura 4.7 – Negatividade global e negatividade parcial K-way com o sistema preparado no estado inicial $ 000, 3, 3\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).....	55
Figura 4.8 – Comparação da negatividade global com a entropia linear para a partição $A + BCD$ com o sistema preparado no estado inicial $ 000, 3, 3\rangle$	56
Figura 4.9 – Negatividade global e negatividade parcial K-way com o sistema preparado no estado inicial $ 111, 0, 0\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).....	57
Figura 4.10 – Comparação da negatividade global com a entropia linear para a partição $A + BCD$ com o sistema preparado no estado inicial $ 111, 0, 0\rangle$	58

Figura 5.1 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Psi_{1,3}^{(2)}$	66
Figura 5.2 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Psi_{1,4}^{(2)}$	67
Figura 5.3 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Phi_{0,0}^{(2)}$	68
Figura 5.4 – Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $ 0000\rangle$ com um fônon e três fótons.....	69
Figura 5.5 – Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $ 0000\rangle$ com um fônon e dois fótons.....	70
Figura 5.6 – Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $ 1113\rangle$ com zero fônons e zero fótons.....	71
Figura 6.1 – Número médio de fótons como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$	78
Figura 6.2 – Variância ΔX_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(t)$	79
Figura 6.3 – Número médio de fótons como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$	81
Figura 6.4 – Variância ΔX_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$	82
Figura 6.5 – Variância das quadraturas X_1 e X_2 como função da variável $\tau = g\eta t$ para estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, com $ \alpha ^2 = 0, 1$	83
Figura 6.6 – Probabilidade P_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$ com um número médio inicial de fótons igual	

$|\alpha|^2 = 1$ em a), $|\alpha|^2 = 4$ em b), $|\alpha|^2 = 9$ em c) e $|\alpha|^2 = 25$ em d)..... 84

Figura 6.7 – Variâncias ΔX_1 , ΔX_2 e probabilidades P_1 e P_2 como função da variável $\tau = g\eta t$. O estado inicial é preparado com os três íons no estado fundamental, dois fônons de vibração e $|\alpha|^2 = 25$ 85

Figura 6.8 – Negatividade global em função da variável τ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$ 88

Figura 6.9 – Negatividade global e negatividade parcial K-way em função da variável τ para o estado inicial $\Psi_{2,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$ 89

Figura 6.10 – Negatividade global e negatividade parcial K-way em função da variável τ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$ 90

Figura 6.11 – Entropia linear em função da variável τ para $\alpha = 5$ e estado inicial a) $\Psi_{1,\alpha}(0)$, b) $\Psi_{2,\alpha}(0)$ e c) $\Psi_{3,\alpha}(0)$ 91

Figura 7.1 – Negatividade global do subsistema A como função da variável $\mathbf{T} = a_{11}t$ para $\kappa = 0, 0; 0, 001; 0, 01$ e $0, 1$ em unidades de $(ns)^2$ com o sistema preparado no estado inicial $|g, 0, 0\rangle$ 102

Figura 7.2 – Negatividade global do subsistema B como função da variável $\mathbf{T} = a_{11}t$ para $\kappa = 0, 0; 0, 001; 0, 01$ e $0, 1$ em unidades de $(ns)^2$ com o sistema preparado no estado inicial $|g, 0, 0\rangle$ 103

Figura 7.3 – Probabilidade P_0 versus a variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ com $\kappa = 0, 1 (ns)^2$ e o ambiente a uma temperatura $T = 0; 005K, 0; 03K$ e $0; 6K$ 105

Figura 7.4 – Probabilidade P_0 como função da variável $\tau = g\eta t$, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ e temperatura $T = 0; 03 K$, com a) $\kappa = 0, 1 (ns)^2$ e b) $\kappa = 1, 0 (ns)^2$, para $q = 1, 2, 4$ e 8 dados por $\hbar\omega_{cut} = qK_B T$ 106

Figura 7.5 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$ e $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ 108

Figura 7.6 – Probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$ e $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ 109

Figura 7.7 – Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K-way E_K^A ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ 110

Figura 7.8 – Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ 112

Figura 7.9 – Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K-way E_K^A ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$ 113

Figura 7.10 – Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$ 114

Figura 7.11 – Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K-way E_K^A ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de

$\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$ 115

Figura 7.12 – Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2; 3; 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$ 116

LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1** – Mostramos a variação de $P_0(\text{máx})$ para cada ciclo correspondente a um período para dois estados iniciais diferentes. 45
- Tabela 4.2** – Mostramos os dois primeiros picos de P_1 e P_2 maiores que 0,5 e os correspondentes valores da negatividade parcial para o sistema preparado no estado inicial $|000, 3, 3\rangle$ 56
- Tabela 4.3** – Mostramos os dois primeiros picos de P_2 maiores que 0,5 e os correspondentes valores da negatividade parcial para o sistema preparado no estado inicial $|111, 0, 0\rangle$ 58

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	15
Capítulo 2 – Interação de íons aprisionados dentro de uma cavidade	21
2.1 O Hamiltoniano	21
3 Capítulo 3 – Teorias do emaranhamento	26
3.1 Introdução	26
3.2 Operador densidade	28
3.3 Caracterizações do emaranhamento	30
3.4 Quantificação do emaranhamento	31
3.4.1 Negatividade global	32
3.4.2 Negatividade parcial K-way	32
3.4.3 Medidas entrópicas	34
Capítulo 4 – Três íons aprisionados em uma cavidade com o campo em um estado de fock	35
4.1 Introdução	35
4.2 O modelo	38
4.2.1 Evolução temporal	41
4.3 Emaranhamentos do sistema	49
4.3.1 Análise dos resultados	53
4.4 Conclusões	58
Capítulo 5 – Três íons aprisionados separadamente em uma cavidade com o campo em um estado de fock	60
5.1 O modelo	61
5.1.1 O Hamiltoniano de interação	61
5.1.2 Evolução temporal do sistema composto	62
5.2 Emaranhamentos do sistema	68
5.3 Conclusões	72

Capítulo 6 – Três íons aprisionados em uma cavidade com o campo no estado coerente	73
6.1 Introdução.....	73
6.2 Evolução temporal do estado.....	76
6.2.1 Estado inicial $\Phi_{m-2,\alpha}(0) = 1, 1, 1, m-2, \alpha\rangle$	76
6.2.2 Estado inicial $\Psi_{m+1,\alpha}(0) = -1, -1, -1, m+1, \alpha\rangle$	76
6.3 Emaranhamento do sistema.....	84
6.3.1 Negatividade global e negatividade parcial K-way.....	87
6.3.2 Entropia linear	89
6.4 Conclusões.....	91
Capítulo 7 – Modelo adiabático de perda de coerência	93
7.1 Introdução.....	93
7.2 O modelo	95
7.3 Perdas de coerência de um íon aprisionado dentro de uma cavidade.....	99
7.3.1 Evolução temporal do sistema fechado	99
7.3.2 Evolução temporal do sistema aberto.....	100
7.3.3 Emaranhamento do sistema	101
7.4 Perdas de coerência de três íons aprisionados dentro de uma cavidade.....	103
7.4.1 O Hamiltoniano do sistema fechado.....	103
7.4.2 Evolução temporal do sistema aberto.....	104
7.4.3 Emaranhamento do sistema	109
7.5 Conclusões.....	117
8 Conclusões	119
Apêndice A – Álgebra dos operadores de Pauli	123
A.1 – Adição do momento angular	125
Apêndice B – Representação de interação	127
Apêndice C – Calculo analítico do operador densidade reduzido do sistema no modelo adiabático de perda de coerência	130

Apêndice D – De coherence of tripartite states -a trapped ion coupled to an optical cavity	135
Apêndice E – Multipartite entanglement of three trapped ions in a cavity and W-state generation	149
Referências	161

Capítulo 1

Introdução

“Se sistemas computacionais são uma consequência natural das leis da física, então um computador quântico não é somente possível, mas inevitável. Pode levar décadas, talvez um século, mas um computador quântico viável comercialmente é uma certeza”. (Milburn [1]).

O emaranhamento é uma característica da mecânica quântica, sem análogo na mecânica clássica. Sendo uma propriedade não local, o emaranhamento pode ser compartilhado entre partidos* remotos. Esse recurso físico, o emaranhamento, é de fundamental importância no processamento e na transmissão de informação quântica. Na década de 80, Deutsch [2] propôs o uso de estados emaranhados para resolver algumas tarefas computacionais e desde então, várias propostas de algoritmos quânticos foram surgindo.

O código binário usado no processamento de informação clássica é uma seqüência de bits, ou seja, de números 0 ou 1. A proposta da teoria da informação quântica é realizar o processamento de informação utilizando bits quânticos (qubits), que além de assumirem valores 0 ou 1, também podem estar em uma superposição dada por

$$|\Psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle. \quad (1.1)$$

Os coeficientes a_0 e a_1 representam, respectivamente, amplitudes de probabilidades do sistema estar no estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, são complexos e satisfazem a condição de normalização $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Veremos quais sistemas físicos podem representar um qubit. Dois qubits podem estar em qualquer superposição dos quatro estados

*O termo partido vem sendo usado para designar as partes ou subsistemas em que o sistema total pode ser dividido.

$$|\Psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle. \quad (1.2)$$

Portanto, são necessários 2^N coeficientes complexos para representar um estado quântico de N qubits. Isso mostra que sistemas quânticos podem armazenar muita informação em um sistema físico pequeno.

Além da capacidade de armazenar muita informação, a velocidade de processamento através de algoritmos quânticos pode ser muito maior do que a velocidade de processamento dos atuais computadores clássicos. A transformada de Fourier rápida (FFT) de um vetor com dimensão 2^n , por exemplo, realiza $n2^n$ passos. Em um algoritmo quântico, a mesma tarefa seria realizada com um número de passos igual a n^2 . Para procurar uma informação em um banco de dados com n itens desorganizados, um algoritmo clássico realiza n operações, enquanto que a mesma tarefa realizada por um algoritmo quântico pode ser feita com apenas \sqrt{n} operações. Tal algoritmo quântico é conhecido como algoritmo de Grover [3, 4].

Também há interesse na possibilidade de uma comunicação segura usando criptografia quântica. A segurança de muitos sistemas criptográficos é baseada na fatoração de um número muito grande, pois computadores clássicos não são muito eficientes nessa tarefa. Em 1994 Peter Shor [5], propôs um algoritmo quântico no qual a velocidade para se fatorar números grandes é exponencialmente maior do que um algoritmo clássico. Os sistemas criptográficos utilizados hoje poderiam ser facilmente decifrados utilizando um computador quântico. Por esses motivos, pesquisadores teóricos e experimentais, são incentivados a investigar sistemas quânticos com perspectivas de implementação experimental. Instituições privadas como bancos e laboratórios também demonstram interesse pelo assunto.

O sistema de dois qubits é um sistema bastante explorado devido a sua simplicidade [6, 7]. Há, porém, pesquisas recentes voltadas à manipulação e geração de estados emaranhados de sistemas mais complexos [8], pois um computador quântico provavelmente envolverá estados emaranhados de muitos sistemas quânticos. No caso de três qubits, há duas classes distintas de estados emaranhados: estados tipo GHZ e estados tipo W que não podem ser transformados uns em outros por meio de operações locais e comunicação clássica (LOCC) [9]. Exemplos de estados GHZ e estados W de três qubits são, respecti-

vamente,

$$\begin{aligned} |\Psi_{GHZ}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \\ |\Psi_W\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Tais estados podem ser usados em tarefas como teletransporte [10], codificação superdensa [11] e comunicação quântica segura [12, 13]. Os estados W são mais robustos do que os estados GHZ com relação a perda de um qubit, pois nos estados GHZ se uma medida é realizada sobre um qubit, a função de onda colapsa em um estado separável.

Os sistemas quânticos propostos para implementação experimental são íons aprisionados, átomos neutros aprisionados, eletrodinâmica quântica em cavidades, pontos quânticos e ressonância magnética nuclear. Um resumo dos principais avanços já alcançados utilizando esses sistemas pode ser visto na ref. [14]. Segundo DiVincenzo [15], o sistema físico deve satisfazer 5 requisitos a fim de que um computador quântico seja implementado:

- Deve ser possível preparar um sistema físico em escala com qubits bem caracterizados;
- Deve ser possível preparar o sistema em um estado inicial específico;
- O tempo de perda de coerência deve ser maior do que o tempo necessário para a realização de uma porta lógica;
- Deve ser possível implementar uma família universal de transformações unitárias;
- Deve ser possível medir o estado de saída.

Íons aprisionados vêm se mostrando promissor na finalidade de processar informação quântica. Cirac e Zoller [16] propuseram pela primeira vez o uso de íons aprisionados a fim de se processar informação quântica. O sucesso no aprisionamento de íons é devido aos avanços nas técnicas de resfriamento, o que tornou possível a quantização dos estados vibracionais de um único íon aprisionado em 1996 [17]. Desde então, estados emaranhados com 2, 4 e até 8 íons aprisionados já foram observados deterministicamente

[18, 19, 20]. Para se realizar o processamento de informação quântica com íons aprisionados, é necessária a manipulação individual de cada íon, o que pode ser realizada com a utilização de lasers. Direcionar um feixe de laser em um único íon foi um avanço tecnológico alcançado em 1999 usando íons de $^{40}\text{Ca}^+$ [21]. Através da manipulação de íons aprisionados, foi possível a realização do teletransporte de informação quântica, a geração de estados do tipo gato de Schrödinger e a implementação do algoritmo Deutsch-Jozsa [22, 23, 24, 25].

Estados emaranhados entre fótons são estados com possível utilidade em computação quântica, porém não podem ser armazenados por muito tempo [26] e a geração destes estados é um processo probabilístico [27]. Enquanto íons e átomos, com níveis eletrônicos metaestável, são apropriados para armazenar informação quântica, fótons são mais indicados à transferência de informação em longas distâncias. Íons aprisionados em cavidade podem ser usados como uma interface entre qubits estáticos e qubits de transporte de informação.

O acoplamento determinístico do estado vibracional de um íon com um único modo do campo da cavidade foi obtido experimentalmente com sucesso por Mundt *et al.* [28, 29]. O íon $^{40}\text{Ca}^+$ foi aprisionado em uma armadilha miniaturizada e colocada dentro de uma cavidade com um campo estacionário. A posição do íon dentro da cavidade é determinada com uma alta precisão de até $\lambda/100$. A perspectiva é de que no futuro seja possível aprisionar mais do que um íon, na mesma armadilha ou em armadilhas separadas, em uma cavidade com o estado vibracional acoplado ao modo do campo.

Muitos trabalhos teóricos têm explorado a dinâmica de emaranhamento entre átomos de dois níveis interagindo com um campo de cavidade [30-42]. Nesses trabalhos encontramos propostas de manipulação de sistemas contendo de 1 a 4 átomos. Nas refs. [33, 34] os autores calcularam analiticamente o operador de evolução temporal para 2, 3 e 4 átomos interagindo, em ressonância, com um único modo do campo de cavidade. Nos trabalhos envolvendo o acoplamento do estado vibracional com o modo do campo quantizado, podemos destacar o trabalho de Bužek *et al.* [43] que consideraram um íon aprisionado em uma cavidade com o campo em um estado de Fock e sintonizado na transição azul de bandas laterais, mostraram que a dinâmica do estado vibracional é bastante modificada quando o campo na cavidade é alterado para um estado coerente. Semião *et al.* [44]

consideraram tanto o estado vibracional de um íon como o estado do campo na cavidade preparados em um estado coerente, e mostraram que ordens superiores do parâmetro de Lamb-Dicke η podem afetar a dinâmica da inversão da população. Sharma [45] mostrou que estados *GHZ* envolvendo estados internos, estados vibracionais e estados do campo, podem ser gerados com um íon aprisionado numa cavidade interagindo simultaneamente com um laser externo e com um único modo do campo quantizado.

Neste trabalho propomos um sistema constituído por íons aprisionados em uma cavidade, com possível aplicação no processamento de informação quântica. O sistema de três íons aprisionados é considerado em três configurações diferentes: *i*) três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo de cavidade em um estado de Fock; *ii*) três íons aprisionados individualmente e o campo de cavidade em um estado de Fock; *iii*) três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo de cavidade em um estado coerente. Calculamos a dinâmica do sistema no regime de Lamb-Dicke e consideramos estados iniciais com os três íons no estado excitado e com os três íons no estado fundamental. Quando a cavidade é preparada em um estado de Fock, discutimos as condições iniciais mais apropriadas para a geração de estados do tipo *W*. Com a cavidade preparada em um estado coerente, mostramos que é possível obter estados comprimidos do campo. A dinâmica do emaranhamento é analisada usando medidas de emaranhamento, tais como, negatividade global, negatividade parcial *K*-way e entropia linear. Em um modelo mais próximo da realidade, consideramos o processo de perda de coerência devido à interação com o ambiente, o qual é modelado como um sistema de osciladores bosônicos não interagentes. Nesse modelo representamos a perda de coerência causada por flutuações do campo magnético e flutuações na frequência do laser. Outras fontes de perda de coerência como emissão espontânea e perda de fótons na cavidade não são consideradas, pois os íons tipicamente usados para representar um qubit possuem um tempo de vida longo comparado com o tempo necessário para uma operação lógica e as cavidades usadas no confinamento de campos eletromagnéticos possuem um alto fator de qualidade. Analisamos os efeitos da perda de coerência do sistema de um íon aprisionado em uma cavidade interagindo com um laser externo e de três íons aprisionados em uma única armadilha com o campo em um estado de Fock.

No capítulo (2) mostramos como o Hamiltoniano que descreve a interação de N íons

aprisionados em uma cavidade com os estados vibracionais acoplados ao modo do campo pode ser obtido considerando o regime de Lamb-Dicke. No capítulo (3) discutimos as propriedades de estados emaranhados e estados separáveis. O critério de Peres, usado para verificar se há emaranhamento, e medidas de emaranhamento são definidas nesse capítulo. Usamos o Hamiltoniano obtido no capítulo (2) e os conceitos sobre emaranhamento discutidos no capítulo (3) para analisar a dinâmica de cada sistema definido nos capítulos (4), (5) e (6). Os sistemas de um e três íons aprisionados em uma cavidade são tratados como um sistema aberto no capítulo (7). A perda de coerência é analisada variando a intensidade do acoplamento com o ambiente. Por fim, no capítulo (8) apresentamos as conclusões gerais da tese e discutimos a relevância do trabalho.

Capítulo 2

Interação de íons aprisionados dentro de uma cavidade

O modelo proposto por Jaynes e Cummings, também conhecido como JCM, trata da interação de um único átomo com um único modo do campo quantizado [46]. Considerando um átomo de dois níveis, a dinâmica é determinada analiticamente. Os resultados teóricos previam fenômenos como oscilações de Rabi, colapsos e ressurgimentos [47], que depois foram confirmados experimentalmente [48]. Várias derivações surgiram desse modelo como o modelo Tavis-Cummings que generaliza para N íons [49], íons de vários níveis [50] e com vários modos do campo [51]. O modelo foi adaptado, também, para sistemas com um íon aprisionado em uma cavidade com o estado vibracional acoplado ao campo [44, 52] e com dois íons aprisionados em armadilhas separadas [53]. Neste capítulo o Hamiltoniano, tipo Jaynes-Cummings, é obtido para um sistema de N íons aprisionados em uma única armadilha e em armadilhas separadas dentro de uma cavidade. Tal Hamiltoniano servirá como ponto de partida nos próximos capítulos.

2.1 O Hamiltoniano

Um ou mais íons podem ser isolados espacialmente em uma armadilha de íons. Cada tipo de armadilha possui uma geometria particular. A armadilha linear de Paul, por exemplo, consiste de quatro eletrodos cilíndricos nos quais são aplicados, em suas extremidades, uma combinação de potenciais estáticos e oscilantes na faixa de radiofrequência, de forma que um potencial oscilante em x , y e z é gerado. Outra armadilha com uma geometria mais simplificada consiste de um único anel, na forma de uma elipse, acoplado a um potencial

oscilante na faixa de radiofrequência. Tal armadilha tem dimensões da ordem de milímetros e pode ser colocada dentro de uma cavidade. Baixando a temperatura relacionada à energia cinética do íon, o modo vibracional pode ser quantizado ao longo do eixo z com frequência angular dada por ν . Para um confinamento unidimensional, a frequência de oscilação radial deve ser maior do que a frequência de oscilação longitudinal. Quando o estado de vibração é quantizado, a energia de vibração é discreta e cada fônon possui energia $\hbar\nu$. Portanto, a energia associada ao modo vibracional é dada por $\hbar\nu(m + 1/2)$, onde m é o número de fônons. Para oscilações harmônicas, o operador posição \hat{z} pode ser escrito como

$$\hat{z} = z_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.1)$$

em que $z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu}}$, M é a massa do íon e

$$\begin{aligned} \hat{a}|m\rangle &= \sqrt{m}|m-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|m\rangle &= \sqrt{m+1}|m+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

são os operadores de aniquilação e criação de um quantum do estado vibracional, respectivamente e satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Em uma cavidade de Fabry-Perot podemos confinar um campo eletromagnético em uma estreita faixa de frequência bem definida. As superfícies espelhadas fazem com que um campo estacionário se forme dentro da cavidade. A intensidade do campo elétrico será mais intensa quanto menor for o volume interno da cavidade. O operador campo elétrico associado a um único modo do campo quantizado em uma cavidade é dado por [54]

$$\hat{E} = E_0(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \sin k\hat{z}, \quad (2.3)$$

sendo \hat{b} e \hat{b}^\dagger operadores de aniquilação e criação de um fóton, respectivamente e que satisfazem a relação de comutação $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. A energia de um único modo do campo quantizado com frequência angular ω_c é dada por $\hbar\omega_c(n + 1/2)$, onde n é o número de fótons do campo.

Considere um íon de dois níveis com o estado fundamental designado por $|g\rangle$ e estado excitado designado por $|e\rangle$. A energia de transição entre esses dois estados é dada por $\hbar\omega_0$. O Hamiltoniano do sistema pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (2.4)$$

onde

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \quad (2.5)$$

é o Hamiltoniano livre e

$$\hat{H}_1 = -\hat{\mu} \cdot \hat{E} \quad (2.6)$$

é o Hamiltoniano de interação do campo elétrico com o dipolo elétrico $\hat{\mu}$ do íon [55]. A componente z do operador de Pauli pode ser escrita como $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ e possui autovalores ± 1 . Podemos escrever o momento de dipolo elétrico na base dos estados internos da seguinte forma $\mu = \langle g|\mu|e\rangle|g\rangle\langle e| + \langle e|\mu|g\rangle|e\rangle\langle g|$ e assim reescrevemos (2.6) como

$$\hat{H}_1 = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \sin(\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})), \quad (2.7)$$

em que usamos as equações (2.3) e (2.1) e definimos $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$, $\hbar g = -\langle g|\mu|e\rangle E_0$ e $\eta = kz_0$, chamado de parâmetro de Lamb-Dicke. Os operadores $\hat{\sigma}_z$ e $\hat{\sigma}_\pm$ satisfazem a álgebra descrita no apêndice (A).

Escrevendo o Hamiltoniano da equação (2.7) na representação de interação, por meio da transformação $e^{i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H}_1 e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}}$ (ver apêndice (B)), obtemos

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}) (\hat{b}^\dagger e^{i\omega_c t} + \hat{b} e^{-i\omega_c t}) \sin(\eta(\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})), \quad (2.8)$$

onde usamos a relação

$$e^{-\alpha \hat{a}^\dagger} f(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) e^{\alpha \hat{a}^\dagger} = f(\hat{a} e^{-\alpha}, \hat{a}^\dagger e^{-\alpha}). \quad (2.9)$$

No regime de Lamb-Dicke, podemos assumir $\eta \ll 1$ e desprezar os termos de ordem superior a η . Essa aproximação pode ser feita quando o comprimento de onda do campo for muito maior do que a amplitude de vibração do centro de massa no estado fundamental do oscilador harmônico. No estado fundamental do oscilador harmônico, a amplitude de vibração do íon é dada por $A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{M\nu}}$ e portanto podemos escrever o parâmetro de Lamb-Dicke como $\eta = \sqrt{2\pi} \frac{A_0}{\lambda}$. Impondo a condição $\lambda \gg A_0$ resulta que $\eta \ll 1$. Podemos expandir a função seno como

$$\sin(\eta(\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})) = \eta(\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t}) + \frac{\eta^3 (\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})^3}{3!} + \dots \quad (2.10)$$

Portanto, no regime de Lamb-Dicke podemos reescrever a equação (2.8) como

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \hbar\eta g \left[\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} e^{i(\delta-\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a}^\dagger e^{i(\delta+\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger \hat{a} e^{i(\Delta-\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{i(\Delta+\nu)t} \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_- \hat{b} \hat{a} e^{-i(\Delta+\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b} \hat{a}^\dagger e^{-i(\Delta-\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a} e^{-i(\delta+\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{-i(\delta-\nu)t} \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\delta = \omega_0 - \omega_c$ e $\Delta = \omega_0 + \omega_c$. Para uma escolha particular entre as frequências dada por $\delta = \nu$, podemos considerar a aproximação de onda girante e desprezar os termos de alta frequência que contenham Δ ou $\delta + \nu$. Nessas condições o Hamiltoniano se resume a

$$\hat{H}_I = \hbar\eta g (\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger). \quad (2.12)$$

O primeiro termo desse Hamiltoniano descreve o processo de excitação de um íon acompanhado da aniquilação de um fóton e um fônon, enquanto que o segundo termo descreve a desexcitação do íon acompanhado da criação de um fóton e um fônon.

No entanto, se escolhermos uma relação entre as frequências dada por $\delta = -\nu$ e usando a aproximação de onda girante, a equação (2.11) se reduz a

$$\hat{H}_I = \hbar\eta g (\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}). \quad (2.13)$$

A primeira parte desse Hamiltoniano descreve um processo de aquecimento do sistema atômico, pois absorvendo um fóton o íon aumenta um quantum de vibração e vai para o estado excitado. A segunda parte descreve o processo inverso, ou seja, um processo de resfriamento. Uma discussão de um sistema como esse pode ser visto na ref. [43].

Podemos considerar N íons aprisionados em uma única armadilha colocada dentro de uma cavidade. Com o centro de massa vibrando com frequência ν . A energia associada ao modo vibracional do centro de massa é dada por $\hbar\nu(m + 1/2)$, onde m é o número de fônons. O Hamiltoniano livre \hat{H}_0 é reescrito como

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)}. \quad (2.14)$$

Os íons são colocados um distante do outro de modo a não haver interação dipolo-dipolo. Cada íon interage com o campo na forma da equação (2.7), de forma que o Hamiltoniano de interação é a soma da contribuição de cada íon. Seguindo as mesmas considerações para se obter o Hamiltoniano da equação (2.12), obtemos o Hamiltoniano de interação na representação de interação para N íons como

$$\hat{H}_I = \hbar\eta g \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger). \quad (2.15)$$

Outro sistema envolvendo N íons aprisionados em uma cavidade consiste em aprisionar cada íon em uma armadilha separada. Nesse sistema cada íon pode oscilar com frequências diferentes e com amplitudes diferentes, de forma que o Hamiltoniano livre pode ser escrito como

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hbar\nu \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^N \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)}, \quad (2.16)$$

e o respectivo Hamiltoniano de interação na representação de interação como

$$\hat{H}_I = \hbar\eta g \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b} \hat{a}_i + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}^\dagger \hat{a}_i^\dagger). \quad (2.17)$$

Capítulo 3

Teoria do emaranhamento

3.1 Introdução

Até o ano de 1925 as bases da mecânica quântica já estavam estabelecidas, porém havia um detalhe que incomodava Einstein. No famoso artigo de Einstein, Podolsky e Rosen publicado em 1935, os autores contestavam algumas previsões da mecânica quântica propondo um experimento de pensamento que ficou conhecido como Paradoxo EPR, em analogia as iniciais dos autores [56]. Neste experimento eles consideraram um sistema composto, A e B , que interagiram por um determinado intervalo de tempo e que depois deixaram de interagir. Segundo a mecânica quântica, a medida do estado em um dos subsistemas, A ou B , interferiria instantaneamente no resultado da medida do outro subsistema, mesmo após cessada a interação. Como a mecânica quântica não faz menção à distância entre os dois subsistemas, esse resultado violaria o princípio da relatividade restrita o qual diz que informação não pode ser enviada com uma velocidade superior à velocidade da luz. Essa previsão da teoria ficou conhecida como a não localidade da mecânica quântica.

Einstein não acreditava que a mecânica quântica, embora matematicamente correta, pudesse descrever a realidade e chegou a dizer que a mecânica quântica realizava uma “ação fantasmagórica à distância”. Einstein e companheiros acreditavam que a mecânica quântica estava incompleta e que deveria haver alguma variável escondida, ainda desconhecida, para que a teoria pudesse descrever a realidade.

Ainda no ano de 1935 e no ano seguinte, Schrödinger rebateu as críticas de Einstein publicando dois trabalhos sobre a descrição de sistemas compostos dada pela mecânica quântica [57, 58]. Nesses trabalhos Schrödinger afirmava que dois subsistemas A e B , uma

vez tendo interagido um com outro, não podiam mais ser descritos como antes, ou seja, como um estado produto $|A\rangle \otimes |B\rangle$. A interação tornava o sistema A emaranhado com B. Mesmo depois de cessada a interação os dois subsistemas continuavam emaranhados e a medida em um dos subsistemas interferiria no estado do outro subsistema. Schrödinger ainda enfatizou que essa era a principal característica que diferia a mecânica quântica da mecânica clássica. A ref. [59] faz uma boa revisão destes trabalhos de Schrödinger.

Nos anos subseqüentes, um grupo de cientistas defendiam a não localidade enquanto outros defendiam a localidade da mecânica quântica. Só um experimento poderia dar um “veredicto”, mas na época as discussões teóricas eram muito longe da realidade experimental. Na década de 60, J. Bell deu uma grande contribuição deduzindo uma relação matemática envolvendo parâmetros que poderiam ser medidos experimentalmente [60, 61]. Essa relação matemática ficou conhecida como desigualdades de Bell e foi fundamentada pelos trabalhos de Einstein. Uma medida experimental que violasse essa relação acabaria com a teoria local da mecânica quântica. Uma boa revisão sobre a formulação matemática das desigualdades de Bell pode ser encontrada na ref. [62].

Os primeiros trabalhos experimentais na tentativa de elucidar a questão da localidade ou não localidade da mecânica quântica foram realizados no início da década de 80 e já apontavam que a não localidade seria a teoria correta [63, 64, 65, 66]. Anos mais tarde, em 1996, pôde-se gerar experimentalmente um estado emaranhado, análogo ao estado proposto por Schrödinger, que ficou conhecido como estado gato de Schrödinger [67]. Com esses resultados, ficou definitivamente comprovado que o emaranhamento é uma característica não local da mecânica quântica.

Neste capítulo discutimos algumas propriedades do emaranhamento. Fazemos uma breve revisão sobre como representar estados puros e estados mistos através do operador densidade. O critério de Peres [68] é usado para definir a separabilidade do sistema por meio da transposta parcial do operador densidade. Por fim, definimos as medidas de emaranhamento que serão usadas ao longo desta tese para quantificar o emaranhamento.

3.2 Operador densidade

Estados puros são aqueles que admitem ser escritos na forma de uma função de onda e a evolução temporal pode ser determinada resolvendo a equação de Schrödinger. Um estado puro $|\Psi\rangle$ pode ser expandido em termos dos vetores de base $|x_n\rangle$ da seguinte forma

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |x_n\rangle, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes c_n são números complexos e $|c_n|^2$ representa a probabilidade do sistema descrito pela função de onda $|\Psi\rangle$ estar no estado $|x_n\rangle$.

O valor esperado de um operador \hat{O} é definido por

$$\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = \sum_{np} c_n^* c_p O_{np}, \quad (3.2)$$

onde $O_{np} = \langle x_n|\hat{O}|x_p\rangle$ são os elementos de matriz de \hat{O} .

Em um sistema caracterizado por um estado misto, não podemos descrevê-lo usando o formalismo de função de onda. Um estado misto é uma soma de estados puros $|\Psi_k\rangle$ com fração populacional P_k , tal que o estado total possa ser descrito por um operador densidade dado por

$$\hat{\rho} = \sum_k P_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|. \quad (3.3)$$

Em outras palavras, a equação acima representa uma mistura estatística de estados puros $|\Psi_k\rangle$ com probabilidade P_k . Um estado maximamente misto é definido como um sistema contendo estados $|\Psi_k\rangle$ igualmente populados para qualquer k . Da condição de normalização temos que $\sum_k P_k = 1$. Os elementos de matriz de $\hat{\rho}$ na base $|x_n\rangle$ são dados por

$$\begin{aligned} \rho_{np} &= \langle x_n|\hat{\rho}|x_p\rangle \\ &= \sum_k P_k c_n^{(k)} c_p^{*(k)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

O valor esperado de um operador \hat{O} em um estado misto é definido como

$$\begin{aligned} \langle\hat{O}\rangle &= \sum_k P_k \langle\Psi_k|\hat{O}|\Psi_k\rangle \\ &= \sum_{knp} P_k c_p^{*(k)} c_n^{(k)} O_{pn} \\ &= \sum_{np} \rho_{np} O_{pn} \\ &= \text{tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podemos verificar que o traço de $\hat{\rho}$ é igual a 1, pois

$$\begin{aligned}
 tr(\hat{\rho}) &= \sum_{k,n} P_k |c_n^{(k)}|^2 \\
 &= \sum_k P_k \left(\sum_n |c_n^{(k)}|^2 \right) \\
 &= \sum_k P_k \\
 &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da equação (3.3) podemos ver que $\hat{\rho}$ é hermitiano, ou seja,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \tag{3.7}$$

e também que

$$\hat{\rho}^2 = \sum_k P_k^2 |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|. \tag{3.8}$$

Calculando o traço de $\hat{\rho}^2$ da mesma forma como foi calculado o traço de $\hat{\rho}$ dado pela equação (3.6) fica fácil ver que

$$tr(\hat{\rho}^2) \leq 1. \tag{3.9}$$

Uma outra propriedade importante é que o operador densidade é um operador positivo-definido, isto é,

$$\langle x_n | \hat{\rho} | x_n \rangle \geq 0. \tag{3.10}$$

Para estados puros, isto é, $P_i = 1$ e $P_k = 0$ para qualquer $k \neq i$, temos da equação (3.8) que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ e conseqüentemente

$$tr(\hat{\rho}^2) = 1 \quad (\text{Estado puro.}) \tag{3.11}$$

Seja $\hat{\rho}$ o estado de um sistema composto constituído pelos subsistemas A e B . Podemos calcular o operador densidade reduzido do subsistema A calculando o traço sobre os estados do subsistema B , ou seja,

$$\hat{\rho}^A = tr_B(\hat{\rho}). \tag{3.12}$$

Analogamente podemos obter o operador reduzido do subsistema B . O operador densidade reduzido satisfaz as mesmas propriedades de um operador densidade.

3.3 Caracterização do emaranhamento

Considere um sistema quântico constituído por N partidos e que cada partido é representado pelo operador densidade $\hat{\sigma}(p)$ ($p = 1, 2, \dots, N$) com dimensão $d^{(p)}$. O espaço de Hilbert associado a este sistema terá uma dimensionalidade total igual a $\prod_p d^{(p)}$. Um vetor de estado na base computacional pode ser escrito como $|i_1, i_2, \dots, i_N\rangle$, onde i_p pode assumir valores inteiros entre 0 e $d^{(p)} - 1$. A literatura vem chamando os sistemas com $d^{(d)} > 2$ de qudit. No caso geral podemos escrever o operador densidade como

$$\hat{\rho} = \sum_I \langle i_1, i_2, \dots, i_N | \hat{\rho} | j_1, j_2, \dots, j_N \rangle |i_1, i_2, \dots, i_N\rangle \langle j_1, j_2, \dots, j_N|, \quad (3.13)$$

em que $I = i_1, i_2, \dots, i_N, j_1, j_2, \dots, j_N$.

Se o sistema é separável podemos escrever o operador densidade como uma somatória de produtos tensoriais de cada parte como,

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_i(2) \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_i(N), \quad (\text{Sistema separável.}) \quad (3.14)$$

sendo P_i probabilidades que satisfazem $\sum_i P_i = 1$. Dado um operador densidade $\hat{\rho}$, não é uma tarefa trivial escrevê-lo na forma da equação (3.14), se o sistema for separável, ou mesmo provar que não se pode escrevê-lo assim, se não for separável. Por isso é necessário uma maneira mais prática de verificar se o sistema é ou não separável.

Um operador densidade que representa um sistema físico deve ser um operador positivo, ou seja, ter autovalores positivos. Os autovalores do operador densidade representam probabilidades de encontrar o sistema em um dado estado e portanto devem ser positivos. Uma condição necessária para um subsistema ou um conjunto de subsistemas ser separável é o teste da transposição parcial positiva proposto por Peres [68]. Se o sistema é separável, fazer a transposta parcial com relação ao subsistema p significa fazer a transposta somente do subsistema p , ou seja,

$$\hat{\rho}^{T_p} = \sum_i P_i \hat{\sigma}_i(1) \otimes \hat{\sigma}_i(2) \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_i(p)^{T_p} \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_i(N). \quad (3.15)$$

A transposta do operador $\hat{\sigma}(p)$ não muda sua propriedade de operador positivo e portanto, $\hat{\rho}^{T_p}$ também deve ser positivo se o subsistema p for separável. Com o operador $\hat{\rho}$ escrito na forma da equação (3.13), a transposta parcial com relação ao subsistema p é escrita como

$$\hat{\rho}^{T_p} = \sum_I \langle i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_N | \hat{\rho} | j_1, j_2, \dots, j_p, \dots, j_N \rangle | i_1, i_2, \dots, i_p, \dots, i_N \rangle \langle j_1, j_2, \dots, j_p, \dots, j_N |. \quad (3.16)$$

Se $\hat{\rho}^{T_p}$ tem autovalores negativos, então $\hat{\rho}$ não pode ser escrito da forma da equação (3.14) e o subsistema p não é separável. A positividade da transposta parcial é, além de necessária, também suficiente para sistemas 2×2 e 2×3 , como demonstrado por Horodecki *et al.* [69]. Recentemente foi demonstrado que, para um sistema de N qubits, não há $\hat{\rho}^{T_p}$ positivo, para qualquer partição p , se os N qubits estiverem todos emaranhados entre si [70]. Esta é uma condição necessária e suficiente para que todos os N qubits estejam emaranhados. Existem outros testes para verificar se o sistema é separável como o critério da Redução e o critério da Majorização que juntamente com o critério de Peres são comparados na ref. [71]. Também há um critério baseado na entropia generalizada de Tsallis, chamado de entropia condicional quântica, definida por Abe e Rajagopal [72].

3.4 Quantificação do emaranhamento

Na seção anterior vimos como detectar emaranhamento por meio da transposta parcial. Nesta seção, queremos quantificar o emaranhamento, ou seja, dizer o quanto de emaranhamento um estado possui. Seja $E(\rho)$ uma função do operador densidade, que quantifica o emaranhamento do sistema. Chamamos essa função de medida de emaranhamento. Existe uma lista de requisitos que uma medida de emaranhamento deve satisfazer, porém é muito difícil que uma medida satisfaça a todas elas. Uma classe particular de medidas de emaranhamento, chamada de monótono de emaranhamento, devem satisfazer as seguintes condições [73]:

1. A medida $E(\rho)$ é um mapeamento de uma matrix densidade para um número real positivo, isto é,

$$\hat{\rho} \rightarrow E(\rho), \quad (3.17)$$

onde $E(\rho) \in \mathfrak{R}^+$.

2. $E(\rho) = 0$ para estados separáveis.

3. Operações Locais e Comunicação Clássica (LOCC) não aumentam o emaranhamento.

Vamos ver em seguida definições de algumas medidas de emaranhamento.

3.4.1 Negatividade global

A negatividade global é uma proposta de quantificação do emaranhamento baseada nos autovalores negativos do operador densidade após realizada a transposta parcial [74]. Dado um sistema composto por N partidos, a negatividade global é definida como menos duas vezes a soma dos autovalores negativos dividido por um fator relativo à dimensionalidade do sistema, isto é,

$$N_G^p = \frac{-2}{d-1} \sum_i \lambda_i^-, \quad (3.18)$$

onde λ_i^- são os autovalores negativos do operador densidade $\hat{\rho}_G^{T_p}$, p indica qual subsistema está se calculando a transposta parcial e d é a dimensão do menor subsistema. Usando a propriedade de que o traço de $\hat{\rho}_G^{T_p}$ é igual a 1, podemos reescrever (3.18) como

$$N_G^p = \frac{1}{d-1} (\|\hat{\rho}_G^{T_p}\| - 1), \quad (3.19)$$

em que $\|\hat{\rho}_G^{T_p}\|$ é a soma dos módulos dos autovalores de $\hat{\rho}_G^{T_p}$. A negatividade global é igual a zero se o subsistema p for separável.

3.4.2 Negatividade parcial K-way

Em um estado emaranhado pode haver diferentes tipos de emaranhamento, os quais a negatividade global não diferencia. Vejamos como exemplo o estado GHZ de três qubits

$$|\Psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (3.20)$$

Neste exemplo, os valores lógicos dos três qubits são trocados nos elementos fora da diagonal do operador densidade $\hat{\rho} = |\Psi_{GHZ}\rangle\langle\Psi_{GHZ}|$. Dizemos que o estado envolve somente correlações quânticas de três partidos. Já nos estados tipo W de três qubits, como o estado

$$|\Psi_W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \quad (3.21)$$

as correlações quânticas dos elementos fora da diagonal do operador $\hat{\rho} = |\Psi_W\rangle\langle\Psi_W|$ envolvem somente a troca de dois partidos. Em um estado mais geral de três qubits dado por

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p}|\Psi_{GHZ}\rangle + \sqrt{(1-p)}|\Psi_W\rangle, \quad (3.22)$$

em que p varia de zero a um, existem correlações quânticas de 2 e 3 partidos, no entanto a negatividade global não diferencia essas correlações. Para um sistema composto por N partidos, a negatividade parcial K -way mede as correlações de K partidos, com $K=2,3,\dots,N$.

Considere o operador densidade $\hat{\rho}$ de um sistema N -partido, escrito na base computacional na forma da equação (3.13). Dependendo do número de partidos e da dimensionalidade de cada subsistema, pode haver muitos elementos. Podemos rearranjar esses elementos em grupos de matrizes \hat{R}_K que compartilham correlações de K partidos, de forma que,

$$\hat{\rho} = \sum_{K=0}^N \hat{R}_K, \quad (3.23)$$

sendo \hat{R}_K dado por

$$\hat{R}_K = \sum_{I_K} \langle i_1, i_2, \dots, i_N | \hat{\rho} | j_1, j_2, \dots, j_N \rangle | i_1, i_2, \dots, i_N \rangle \langle j_1, j_2, \dots, j_N |, \quad (3.24)$$

com $I_K = \{i_1, i_2, \dots, i_N, j_1, j_2, \dots, j_N\}$ sujeito à condição

$$K = N - \sum_{m=1}^N \delta_{i_m, j_m}. \quad (3.25)$$

Note que K é um valor inteiro entre 0 e N e se $i_m = j_m$ para qualquer m então $K = 0$. A matriz \hat{R}_0 , obviamente, será uma matriz diagonal. Definimos a transposta parcial K -way com relação ao subsistema p como

$$\hat{\rho}_K^{T_p} = \hat{R}_K^{T_p} + \sum_{K' \neq K} \hat{R}_{K'}. \quad (3.26)$$

A negatividade K -way é definida como

$$N_K^p = \frac{1}{d-1} \left(\|\hat{\rho}_K^{T_p}\| - 1 \right). \quad (3.27)$$

Pode-se verificar que $\hat{\rho}_G^{T_p}$ e $\hat{\rho}_K^{T_p}$ se relacionam da seguinte forma

$$\hat{\rho}_G^{T_p} = \sum_{K=2}^N \hat{\rho}_K^{T_p} - (N-2)\hat{\rho}. \quad (3.28)$$

Podemos reescrever a negatividade global (equação (3.18)) como

$$N_G^p = \frac{-2}{d-1} \sum_i \langle \Psi_i^- | \hat{\rho}_G^{T_p} | \Psi_i^- \rangle, \quad (3.29)$$

onde $|\Psi_i^-\rangle$ é o autovetor de $\hat{\rho}_G^{T_p}$ correspondente ao autovalor λ_i^- . Substituindo a equação (3.28) em (3.29), obtemos

$$N_G^p = \frac{-2}{d-1} \sum_{K=2}^N \sum_i \langle \Psi_i^- | \hat{\rho}_K^{T_p} | \Psi_i^- \rangle. \quad (3.30)$$

Na última passagem usamos a propriedade de que $\hat{\rho}$ é um operador positivo. Definimos a negatividade parcial K-way E_K^p para $K = 2$ a N como [75]

$$E_K^p = \frac{-2}{d-1} \sum_i \langle \Psi_i^- | \hat{\rho}_K^{T_p} | \Psi_i^- \rangle. \quad (3.31)$$

Portanto, a negatividade global pode ser expandida em termos da negatividade parcial K-way como

$$N_G^p = \sum_{K=2}^N E_K^p. \quad (3.32)$$

3.4.3 Medidas entrópicas

Em analogia à entropia da termodinâmica, há na teoria do emaranhamento diferentes propostas de medidas de emaranhamento derivadas da definição de entropia. Como exemplo temos a entropia de von Neumann [76, 77, 78]

$$S = -tr(\rho_{red} \ln(\rho_{red})), \quad (3.33)$$

e a entropia linear

$$S = \frac{d}{d-1} \left(1 - tr(\rho_{red}^2) \right), \quad (3.34)$$

onde ρ_{red} é o operador reduzido com relação ao subsistema que se queira calcular o emaranhamento e d a dimensão deste subsistema. A entropia de von Neumann e a entropia linear são casos particulares da entropia generalizada de Tsallis com $q = 1$ e $q = 2$ [79], respectivamente.

Capítulo 4

Três íons aprisionados em uma cavidade com o campo em um estado de Fock

4.1 Introdução

As cavidades ópticas tipicamente usadas em experimentos para manipulação de íons são formadas por duas superfícies espelhadas com um formato côncavo e separadas por uma distância L . Estas superfícies são excelentes supercondutoras a baixas temperaturas, feitas por exemplo de nióbio. A distância entre os espelhos variam de $10^{-2}m$ a $10^{-5}m$. As micro-cavidades, $L \approx 10^{-5}m$, são mais apropriadas para se obter um regime de acoplamento forte, pois a constante de acoplamento átomo-campo, g , é inversamente proporcional à raiz quadrada do volume da cavidade, isto é, $g \propto 1/\sqrt{V}$. Há, porém, uma dificuldade de se manipular íons em cavidades de tamanho muito reduzido, pois a carga do íon pode gerar um acúmulo indesejado de cargas sobre as superfícies da cavidade. Entretanto, pode-se usar átomos neutros em experimentos com micro-cavidades [80, 81]. Para se aprisionar íons em uma cavidade é conveniente uma cavidade não muito pequena de forma que se possa colocar dentro uma armadilha miniaturizada. Na ref. [29] se usou uma cavidade de comprimento $L = 21mm$ para se aprisionar um íon. O campo é refletido inúmeras vezes sobre as superfícies espelhadas e dependendo da distância entre os espelhos e da frequência do campo, uma onda estacionária dentro da cavidade pode ser formada. O campo da física que estuda as propriedades do campo dentro de uma cavidade é chamado de Eletrodinâmica Quântica em Cavidades (CQED, do inglês *Cavity Quantum Electrody-*

namics).

Com o avanço tecnológico dos últimos anos se tornou possível confinar um campo dentro de uma cavidade com um número médio de fótons muito pequeno. O campo em um estado térmico, por exemplo, pode ser preparado com um número médio de fótons $\bar{N} \cong 0,06$. É possível fazer com que um único átomo atravessando uma cavidade interaja com um único fóton. Em um experimento dessa natureza foi possível comprovar a quantização do campo dentro de uma cavidade [82].

As superfícies espelhadas de uma cavidade não são totalmente refletoras, sendo que uma fração \mathbf{T} da intensidade do campo incidente pode ser transmitida e outra fração \mathbf{A} absorvida. Quanto menor forem \mathbf{T} e \mathbf{A} maior será a “finesse” da cavidade. Dentre outros, a “finesse” F é um parâmetro que quantifica a qualidade de uma cavidade e pode ser escrita em termos de \mathbf{T} e \mathbf{A} da forma [83, 84]

$$F = \frac{\pi}{\mathbf{T} + \mathbf{A}}. \quad (4.1)$$

Recentemente foi construída uma cavidade com maior valor de “finesse” já alcançado, da ordem de 10^9 [85]. Nesta mesma cavidade um campo pôde ser mantido estável por um intervalo de tempo da ordem de 100 ms. Uma revisão dos experimentos realizados em cavidades, enfatizando o regime de acoplamento forte pode ser encontrado na referência [86].

O avanço nas técnicas de resfriamento permitiu isolar íons e quantizar o estado de movimento. Em uma armadilha de Paul, um arranjo particular de eletrodos é usado para gerar um campo eletromagnético oscilante, fazendo com que o centro de massa dos íons oscile com uma frequência radial ω_r e uma frequência axial ω_z ao longo do eixo z . Para um confinamento unidimensional ao longo do eixo z , a frequência de vibração radial deve ser maior do que a frequência de vibração axial ω_z . É possível gerar estados não clássicos de vibração do centro de massa, tais como estados térmicos, estados de Fock, estados coerentes e estados comprimidos [17]. Pode-se representar os modos quantizados de vibração iônica como modos quantizados do oscilador harmônico. Porém, só podemos usar essa representação se a temperatura associada a energia cinética dos íons for bem baixa. Existem vários métodos utilizados para baixar a temperatura de íons como o resfriamento

Doppler, resfriamento por bandas laterais [87] e resfriamento “quench”. Átomos de cálcio já foram resfriados a uma temperatura próxima de $7\mu K$ utilizando o método “quench” [88, 89]. Uma boa revisão sobre as propriedades e aplicações de íons aprisionados pode ser obtida na referência [90] do grupo *National Institute of Standards and Technology* (NIST).

Os íons Ca^+ , Sr^+ e Ba^+ são apontados como candidatos a um bom sistema quântico de dois níveis para ser usado no processamento de informação quântica. Todos esses íons possuem um nível eletrônico metaestável, o que proporciona uma melhor confiabilidade na leitura do estado final. O nível metaestável $D_{5/2}$ do íon $^{40}\text{Ca}^+$ tem um tempo de vida da ordem de 1s, que junto com o estado fundamental $S_{1/2}$ representam um qubit nos experimentos [20, 21, 23, 25]. Na ref. [29] demonstrou-se o acoplamento dos estados internos* de um único íon de $^{40}\text{Ca}^+$, com os modos vibracionais e com um único modo do campo quantizado de uma cavidade. O íon é aprisionado em uma armadilha no formato de um anél elíptico e colocado no centro de uma cavidade. O eixo de simetria da armadilha, definido como eixo z , faz um ângulo de 45° com o eixo da cavidade. Por efeito Doppler o íon é esfriado e atinge um número médio de fônons igual a $(\bar{n}_x; \bar{n}_y; \bar{n}_z) = (20 \pm 5; 4 \pm 1; 6 \pm 1)$. A frequência angular de vibração do centro de massa ao longo do eixo z foi de $\nu_z = 2\pi \times 7,4\text{MHz}$. Neste experimento pôde-se determinar a localização do íon com precisão $\approx \lambda/100$.

Dentre as propostas teóricas, destacamos a ref. [91] que propõe uma forma eficiente para a realização de uma porta lógica usando íons aprisionados, e na ref. [92] estados tipo W de N qubits podem ser gerados em um sistema com N íons aprisionados, usando o método “postselection”. Um esquema para gerar um estado de três qubits maximamente emaranhado, tipo GHZ , usando um íon aprisionado em uma cavidade e interagindo com um laser externo foi proposto na ref. [45] e o processo de perda de coerência analisado na ref. [93].

Neste capítulo, propomos um sistema para gerar estados emaranhados de muitos partidos. Definimos o Hamiltoniano para o sistema de três íons aprisionados em uma cavidade. Consideramos estados iniciais com os três íons no estado fundamental e com os três íons no estado excitado, e o campo no estado de Fock. Mostramos que é possível obter estados do tipo W_1 com um íon no estado excitado e W_2 com dois íons no estado excitado. Para a

*Estados excitado e fundamental eletrônico do íon.

análise da dinâmica do emaranhamento, utilizamos a negatividade global, a negatividade parcial K-way e a entropia linear.

4.2 O modelo

Considere três íons de dois níveis aprisionados em uma armadilha interagindo com um único modo do campo eletromagnético quantizado, com frequência ω_c , de uma cavidade óptica. Cada íon, possuindo uma energia de transição igual a $\hbar\omega_0$, é aprisionado em um nó da onda estacionária que se forma dentro da cavidade. Os íons são resfriados a uma baixa temperatura de tal forma que o movimento do centro de massa possa ser aproximado por oscilações harmônicas com frequência ν . A distância entre íons vizinhos é grande o suficiente para que não haja interação dipolo-dipolo. O Hamiltoniano para N íons aprisionados em uma cavidade foi descrito no capítulo (2). Para o caso de três íons, o Hamiltoniano livre pode ser escrito como

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)}, \quad (4.2)$$

em que os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger são respectivamente os operadores de aniquilação e criação de um fônon, \hat{b} e \hat{b}^\dagger os operadores de aniquilação e de criação de um fóton do campo da cavidade, respectivamente. O operador de Pauli $\hat{\sigma}_k$ com componentes $k = z, +, -$ atua no estado interno dos íons. Os autovalores -1 e $+1$ da componente $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ do íon i representam os estados fundamental e excitado, respectivamente.

A interação do dipolo elétrico com o campo da cavidade para o caso de três íons pode ser representado pelo Hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_1 = \sum_{j=1}^3 \hbar g (\hat{\sigma}_+^{(j)} + \hat{\sigma}_-^{(j)}) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \sin[\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})], \quad (4.3)$$

sendo g a constante de interação, $\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2M\nu}}$ o parâmetro de Lamb-Dicke, onde k é o número de onda angular do campo elétrico e M a massa total dos três íons. O Hamiltoniano total é dado por $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$. Transformando \hat{H}_1 para a representação de interação por meio da transformação $e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$, obtemos um Hamiltoniano com muitos termos e dependente do tempo. Entretanto, considerando o regime de transição vermelha de bandas

laterais $\omega_0 - \omega_c = \nu$, a parte relevante do Hamiltoniano na aproximação de onda girante e no limite de Lamb-Dicke $\eta \ll 1$, pode ser simplificada para

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1}^3 \hbar g \eta [\hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger]. \quad (4.4)$$

Relembrando a álgebra dos operadores de Pauli (ver apêndice (A)) podemos representar o estado interno pelo estado produto $|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}\rangle$ ou alternativamente pela base acoplada $|\sigma, \sigma_z\rangle$, onde $\hat{\sigma}_z$ é a soma das componentes de cada íon, ou seja, $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(3)}$ e $\hat{\sigma}$ é a soma vetorial de $\hat{\sigma}^{(i)}$ de cada íon. Vamos representar o estado produto $|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}\rangle$ por um estado da base computacional $|i_A, i_B, i_C\rangle$ onde $i_A = 0$ para o íon A no estado fundamental e $i_A = 1$ para o íon A no estado excitado, e assim analogamente para os íons B e C . Os operadores $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_z$ são diagonais na base acoplada com autovalores $\sigma(\sigma+2)$ e $\sigma_z = -\sigma, -\sigma+2, \dots, \sigma-2, \sigma$, respectivamente. Para 3 íons, os valores possíveis de σ são 3, 1₁ e 1₂, havendo duas configurações diferentes com o mesmo valor de σ igual a 1. A base acoplada pode ser expandida em termos da base computacional pela transformação

$$|\text{base acoplada}\rangle \longrightarrow T|\text{base computacional}\rangle, \quad (4.5)$$

onde T é dado por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde os vetores da base computacional seguem a ordem $|000\rangle; |100\rangle; |010\rangle; |110\rangle; |001\rangle; |101\rangle; |011\rangle; |111\rangle$ e a base acoplada segue a seguinte ordem: $|3, -3\rangle; |3, -1\rangle; |3, 1\rangle; |3, 3\rangle; |1, -1\rangle_1; |1, 1\rangle_1; |1, -1\rangle_2; |1, 1\rangle_2$. A base computacional foi ordenada de forma crescente de acordo com a relação $|i_A + 2i_B + 4i_C + 1\rangle = |i_A, i_B, i_C\rangle$.

O estado produto do sistema total tem a forma $|\sigma, \sigma_z, m, n\rangle$, onde m é o número de fônons de vibração do centro de massa e n o número de fótons do campo da cavidade. A vantagem de se trabalhar na base acoplada é que o Hamiltoniano (4.4) não mistura estados com valores diferentes de σ . Portanto, se o estado inicial é um autoestado de $\hat{\sigma}^2$ com autovalor $\sigma_I(\sigma_I + 2)$ o sistema evolui para uma combinação linear de estados do tipo $|\sigma_I, \sigma_z, m, n\rangle$, com $-\sigma_I \leq \sigma_z \leq \sigma_I$. Na base acoplada o Hamiltoniano pode ser separado em um sistema 4×4 para $\sigma_I = 3$ e mais dois sistemas 2×2 com $\sigma_I = 1$.

Seguindo a ordem dos estados na base acoplada: $|3, -3, m + 1, n + 1\rangle$; $|3, -1, m, n\rangle$; $|3, 1, m - 1, n - 1\rangle$; $|3, 3, m - 2, n - 2\rangle$ para $\sigma = 3$, e $|1, -1, m, n\rangle$; $|1, 1, m - 1, n - 1\rangle$ para $\sigma = 1$, obtemos a representação matricial do Hamiltoniano (equação (4.4)) como

$$\hat{H}_I(\sigma_I = 3) = \sqrt{2}\hbar g\eta \begin{pmatrix} 0 & B_{mn} & 0 & 0 \\ B_{mn} & 0 & A_{mn} & 0 \\ 0 & A_{mn} & 0 & C_{mn} \\ 0 & 0 & C_{mn} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\hat{H}_I(\sigma_I = 1) = \frac{\hbar g\eta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & A_{mn} \\ A_{mn} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

onde $\sqrt{2}B_{mn} = \sqrt{3(m+1)(n+1)}$, $A_{mn} = \sqrt{2mn}$ e $\sqrt{2}C_{mn} = \sqrt{3(m-1)(n-1)}$. As matrizes (4.7) e (4.8) são facilmente diagonalizáveis gerando um total de 8 autovalores, tais que, $\hat{H}_I|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$. Definindo $E_{\pm} = \sqrt{\mu \pm \beta}$, onde $\mu = (A_{mn}^2 + B_{mn}^2 + C_{mn}^2)$ e $\beta = \sqrt{\mu^2 - 4B_{mn}^2 C_{mn}^2}$, escrevemos os quatro autovalores $\lambda_1 = \hbar g\eta E_+$, $\lambda_2 = -\hbar g\eta E_+$, $\lambda_3 = +\hbar g\eta E_-$, $\lambda_4 = -\hbar g\eta E_-$ correspondentes à matriz (4.7) e os outros quatro autovalores correspondentes a duas configurações diferentes com $\sigma = 1$ dados por $\lambda_5 = +\hbar g\eta \frac{A}{\sqrt{2}}$, $\lambda_6 = -\hbar g\eta \frac{A}{\sqrt{2}}$, $\lambda_7 = \lambda_5$ e $\lambda_8 = \lambda_6$. Podemos obter os autoestados $|\phi_i\rangle$ através da transformação

$$|\phi_i\rangle \rightarrow \hat{U}|\text{base acoplada}\rangle, \quad (4.9)$$

sendo

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\text{e } \mu_1 = \mu - 2C_{mn}^2 \text{ e } \mu_2 = \mu - 2B_{mn}^2.$$

4.2.1 Evolução temporal

Na representação de interação a evolução temporal é governada por \hat{H}_I na forma de uma equação de Schrödinger da forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \hat{H}_I \Psi(t). \quad (4.11)$$

Como o Hamiltoniano é independente do tempo isso nos permite resolver a equação diferencial de uma forma simples, de forma que o resultado possa ser escrito como

$$\Psi(t) = e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}} \Psi(0). \quad (4.12)$$

Para obter a dinâmica do sistema basta expressar o estado inicial em termos dos autovetores $|\phi_i\rangle$ do Hamiltoniano \hat{H}_I e atuar o operador de evolução temporal $e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}}$ sobre o estado inicial. Se o estado inicial é preparado na base acoplada $|\sigma, \sigma_z, m, n\rangle_j$, então expressamos o estado inicial em termos de $|\phi_i\rangle$ como

$$|\sigma, \sigma_z, m, n\rangle_j = \sum_{i=1}^8 U_{ji}^\dagger |\phi_i\rangle. \quad (4.13)$$

Atuando o operador de evolução temporal obtemos o estado evoluído para qualquer tempo t da forma

$$\Psi_j(t) = \sum_{i=1}^8 U_{ji}^\dagger \exp(-i\frac{\lambda_i t}{\hbar}) |\phi_i\rangle, \quad (4.14)$$

que também pode ser escrita em termos da base acoplada fazendo a transformação inversa,

$$\Psi_j(t) = \sum_{i,k=1}^8 U_{ji}^\dagger \exp(-i \frac{\lambda_i t}{\hbar}) U_{ik} |\sigma, \sigma_z, m, n\rangle_k, \quad (4.15)$$

onde j indica qual é o estado inicial. O estado obtido está na representação de interação e pode passar para a representação de Schrödinger através da transformação $\Psi_S(t) = e^{-i \frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \Psi(t)$.

De maneira análoga, se preparamos o estado inicial na base computacional e queremos o estado final também na base computacional, podemos expressar o estado $\Psi(t)$ da seguinte forma

$$\Psi_j(t) = \sum_{i,k,l,p=1}^8 T_{ji}^\dagger U_{ik}^\dagger \exp(-i \frac{\lambda_k t}{\hbar}) U_{kp} T_{pl} |i_A, i_B, i_C, m, n\rangle_l. \quad (4.16)$$

O número inicial de fônons e fótons pode restringir o número de estados acessíveis para o qual o sistema evolui. Temos dois casos triviais em que o estado não evolui, que são: $|3, -3, 0, 0\rangle$ e $|1, -1, 0, 0\rangle$. Como a evolução temporal é governada pela equação (4.4), é fácil ver que \hat{H}_I aplicado a esses estados não leva a nenhum outro estado. A função (4.16) é simétrica com relação a troca de m por n no estado inicial.

Estado inicial $\Psi_{m+1,n+1}^{(1)} = |000, m+1, n+1\rangle$

Considere cada íon preparado no estado fundamental e o centro de massa vibrando com $m+1$ fônons. O campo da cavidade é preparado em um estado de Fock com $n+1$ fótons. A função de onda na representação de Schrödinger para este caso terá a forma

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1,n+1}^{(1)}(t) &= a_0(t) |000, m+1, n+1\rangle + a_1(t) |W_1, m, n\rangle \\ &\quad + a_2(t) |W_2, m-1, n-1\rangle + a_3(t) |111, m-2, n-2\rangle, \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que

$$|W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [| -1, -1, 1\rangle + | -1, 1, -1\rangle + |1, -1, -1\rangle], \quad (4.18)$$

$$|W_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [| -1, 1, 1\rangle + |1, 1, -1\rangle + |1, -1, 1\rangle] \quad (4.19)$$

são estados do tipo W com um e dois íons no estado excitado, respectivamente. Os coeficientes $a_i(t)$, $i = 0$ a 3 são dados por

$$\begin{aligned}
a_0(t) &= \left(\frac{(\beta - \mu_2)}{2\beta} \cos\left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}\right) + \frac{(\beta + \mu_2)}{2\beta} \cos\left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_1(t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin\left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin\left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_2(t) &= +\frac{\sqrt{\beta^2 - \mu_2^2}}{2\beta} \left(\cos\left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}\right) - \cos\left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_3(t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin\left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}\right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin\left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

em que $E = m\hbar\omega_0 + \hbar\omega_c(n - m - 1/2)$ é autovalor de \hat{H}_0 . Os coeficientes satisfazem a relação de normalização $\sum_{i=0}^3 |a_i(t)|^2 = 1$. O operador densidade reduzido dos íons $\hat{\rho}(t)$ pode ser escrito como

$$\hat{\rho}(t) = |a_0(t)|^2 |000\rangle\langle 000| + |a_1(t)|^2 |W_1\rangle\langle W_1| + |a_2(t)|^2 |W_2\rangle\langle W_2| + |a_3(t)|^2 |111\rangle\langle 111|. \tag{4.21}$$

Para valores de t tais que $\cos(\sqrt{\mu + \beta}g\eta t) = \cos(\sqrt{\mu - \beta}g\eta t) = \pm 1$ o sistema composto torna-se um estado separável. E quando a condição $\sin(\sqrt{\mu + \beta}g\eta t) = \sin(\sqrt{\mu - \beta}g\eta t) = \pm 1$ é satisfeita o estado do sistema composto pode ser escrito como

$$\Psi_{m+1, n+1}^{(1)}(t) = a_1(t) |W_1, m, n\rangle + a_3(t) |111, m - 2, n - 2\rangle. \tag{4.22}$$

Sejam P_j ($j = 0, 1, 2, 3$) as probabilidades de encontrar j íons no estado excitado, ou seja, $P_0 = |a_0|^2$, $P_1 = |a_1|^2$, $P_2 = |a_2|^2$ e $P_3 = |a_3|^2$. Na figura (4.1) plotamos as probabilidades P_j para o estado inicial $|000, 3, 3\rangle$. Em $\tau \approx 0,37\pi$ o estado pode ser escrito como na equação (4.22) com $P_1 \approx 0,75$ e $P_3 \approx 0,25$. Vemos que o sistema retorna ao estado inicial periodicamente, com período aproximado de $p \approx \frac{3\pi}{4g\eta}$. Porém, só podemos considerar esse período para um curto tempo de interação, pois para tempos longos veremos que não podemos mais fazer essa consideração. Na tabela (4.1) anotamos numericamente os valores de $P_0(\text{máx})$ que ocorrem a cada período aproximado de $p \approx \frac{3\pi}{4g\eta}$. Note que já no segundo período a probabilidade $P_0(\text{máx})$ já não é mais exatamente igual a um e assim sucessivamente vai diminuindo até atingir um valor mínimo e voltar a crescer. Para longos intervalos de interação o período para o sistema retornar ao estado inicial é

de aproximadamente $\approx \frac{50}{gn}$. Ainda na tabela (4.1) mostramos um outro exemplo com o sistema inicializado no estado inicial $|000, 8, 8\rangle$, onde esta propriedade está mais aparente.

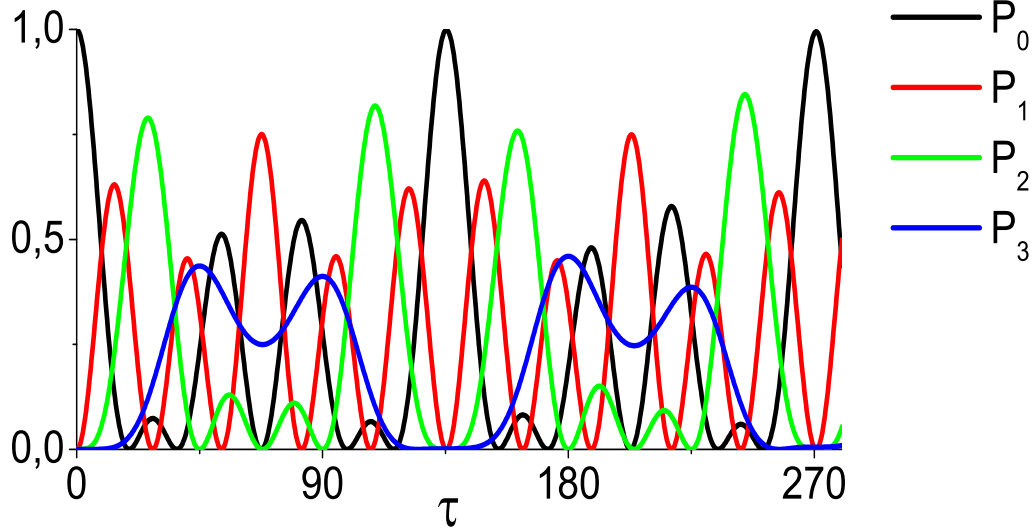


Figura 4.1: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $|000, 3, 3\rangle$.

Se o número inicial de fônons ou fótons for igual a 2, isto é, $m = 1$ ou $n = 1$, o estado com três íons excitados não estará acessível. Podemos ver isso observando que para $m = 1$ ou $n = 1$ temos que $C_{11} = 0$ e $\mu_1 = \mu = \beta$ e com isso os dois coeficientes do estado $|111, m - 2, n - 2\rangle$ se anulam. Considerando $|000, 2, n + 1\rangle$, $n \geq 1$, como estado inicial, o estado evoluído que obtemos é escrito como

$$\begin{aligned} \Psi_{2,n+1}^{(1)}(t) &= \frac{1}{(5n+3)} \left(3(n+1) \cos \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) + 2n \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |000, 2, n+1\rangle \\ &\quad - i \sqrt{\frac{3(n+1)}{(5n+3)}} \sin \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |W_1, 1, n\rangle \\ &\quad + \frac{\sqrt{6n(n+1)}}{(5n+3)} \left(\cos \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) - 1 \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |W_2, 0, n-1\rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

e o respectivo operador densidade reduzido dos íons

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \frac{1}{(5n+3)^2} \left(3(n+1) \cos \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) + 2n \right)^2 |000\rangle\langle 000| \\ &\quad + \frac{3(n+1)}{(5n+3)} \sin^2 \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) |W_1\rangle\langle W_1| \\ &\quad + \frac{6n(n+1)}{(5n+3)^2} \left(\cos \left(\sqrt{2(5n+3)}g\eta t \right) - 1 \right)^2 |W_2\rangle\langle W_2|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Tabela 4.1: Mostramos a variação de $P_0(\text{máx})$ para cada ciclo correspondente a um período para dois estados iniciais diferentes.

Estado inicial	P_0 (máx)	P_1	P_2	P_3	τ
$ 3, -3, 3, 3\rangle$	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00
$ 3, -3, 3, 3\rangle$	0,9984	0,0002	0,0000	0,0014	2,36
$ 3, -3, 3, 3\rangle$	0,9938	0,0007	0,0000	0,0055	4,73
$ 3, -3, 3, 3\rangle$	0,9874	0,0002	0,0000	0,0124	7,09
$ 3, -3, 3, 3\rangle$	0,9779	0,0000	0,0002	0,0219	9,45
$ 3, -3, 8, 8\rangle$	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00
$ 3, -3, 8, 8\rangle$	0,9900	0,0016	0,0000	0,0084	0,45
$ 3, -3, 8, 8\rangle$	0,9631	0,0035	0,0002	0,0332	0,89
$ 3, -3, 8, 8\rangle$	0,9255	0,0004	0,0004	0,0737	1,34

Um resultado semelhante também é obtido se o estado inicial for $|3, -1, 1, n\rangle$ ou $|3, 1, 0, n - 1\rangle$, ambos com $n \geq 1$. Para o sistema inicializado no estado $|000, 2, n + 1\rangle$, $n \geq 1$, o sistema terá uma probabilidade P_2 de ocupar o estado W_2 , P_1 de ocupar o estado W_1 e P_0 de ocupar o estado com três íons no estado fundamental. Plotamos as probabilidades P_0 , P_1 e P_2 como funções da variável τ para os estados iniciais $|000, 2, 2\rangle$ e $|000, 2, 4\rangle$ nas figuras (4.2) e (4.3), respectivamente. Podemos notar um comportamento oscilatório em que o período de repetição diminui com o aumento do número inicial de fótons. O período para o sistema retornar ao estado inicial é $p = \frac{2\pi}{g\eta\sqrt{2(5n+3)}}$. A probabilidade máxima de encontrar o sistema no estado W_2 , $P_2(\text{máx})$, se encontra nos pontos em que $\tau = \frac{k\pi}{\sqrt{2(5n+3)}}$, ($k = 1, 3, 5, \dots$). Notamos também que na figura (4.2) temos $P_2(\text{máx}) = P_1(\text{máx}) = 3/4$. Podemos ver que enquanto $P_2(\text{máx})$ aumenta com n , $P_1(\text{máx})$ diminui. Com um valor grande de n , $P_2(\text{máx})$ pode chegar a um valor próximo de $24/25$.

Considerando apenas um fônon no estado inicial, ou seja, $|000, 1, n + 1\rangle$, $n \geq 0$, os estados acessíveis serão aqueles com 0 e 1 fônon. Para $m = 0$ o coeficiente A_{00} é igual a zero, mas o coeficiente C_{00} é diferente de zero. Vemos no Hamiltoniano (4.7) que o coeficiente C_{00} envolve transições entre os estados $|\sigma = 3, \sigma_z = 1\rangle$ e $|\sigma = 3, \sigma_z = 3\rangle$, que não são acessíveis neste caso. Portanto, a função de onda não pode ser obtida a partir da equação (4.20). A representação matricial do Hamiltoniano \hat{H}_I no espaço vetorial formado pelos estados $|000, 1, n + 1\rangle$ e $|W_1, 0, n\rangle$ tem a forma

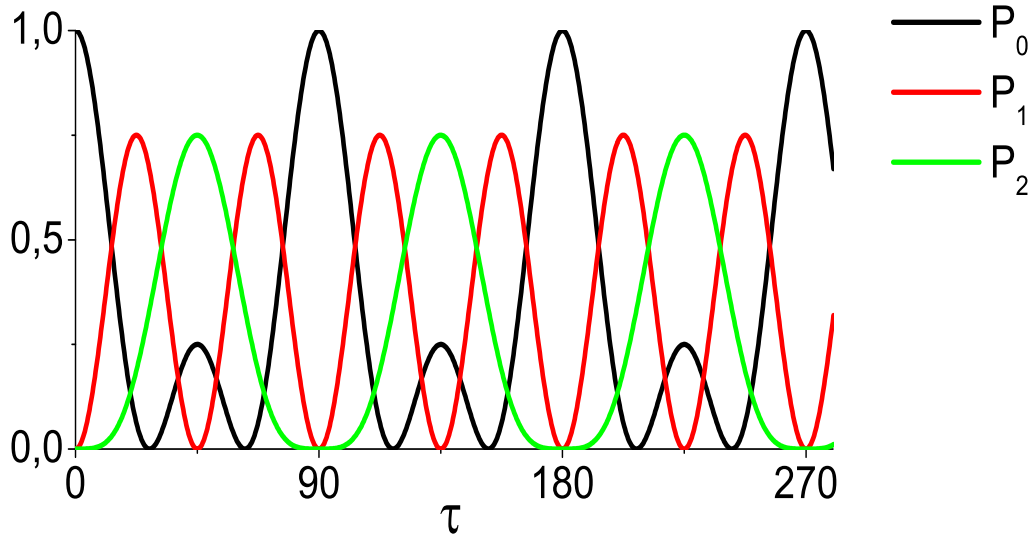


Figura 4.2: Probabilidades P_0 , P_1 e P_2 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $|000, 2, 2\rangle$.

$$\hat{H}_I = \sqrt{2}\hbar g\eta \begin{pmatrix} 0 & B_{0n} \\ B_{0n} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde $\sqrt{2}B_{0n} = \sqrt{3(n+1)}$. Os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{2}B_{0n}\hbar g\eta$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}B_{0n}\hbar g\eta$ e os respectivos autovetores são

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Com o mesmo procedimento descrito na seção (4.2.1), escrevemos o estado inicial $|000, 1, n+1\rangle$, $n \geq 0$ em termos dos autoestados $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ e atuamos o operador $e^{-\frac{i\hat{H}_I t}{\hbar}}$ sobre o estado inicial. Obtemos uma função periódica da seguinte forma

$$\Psi^{(1)}(t) = \cos(\sqrt{2}B_{0n}g\eta t)|000, 1, n+1\rangle - i \sin(\sqrt{2}B_{0n}g\eta t)|W_1, 0, n\rangle \quad (4.27)$$

e respectivo operador densidade reduzido dos íons

$$\hat{\rho}(t) = \cos^2(\sqrt{2}B_{0n}g\eta t)|000\rangle\langle 000| + \sin^2(\sqrt{2}B_{0n}g\eta t)|W_1\rangle\langle W_1|. \quad (4.28)$$

Na equação (4.27) o estado do sistema fica oscilando entre o estado com três íons no estado fundamental ($|000, 1, n+1\rangle$) e o estado W_1 com um íon no estado excitado

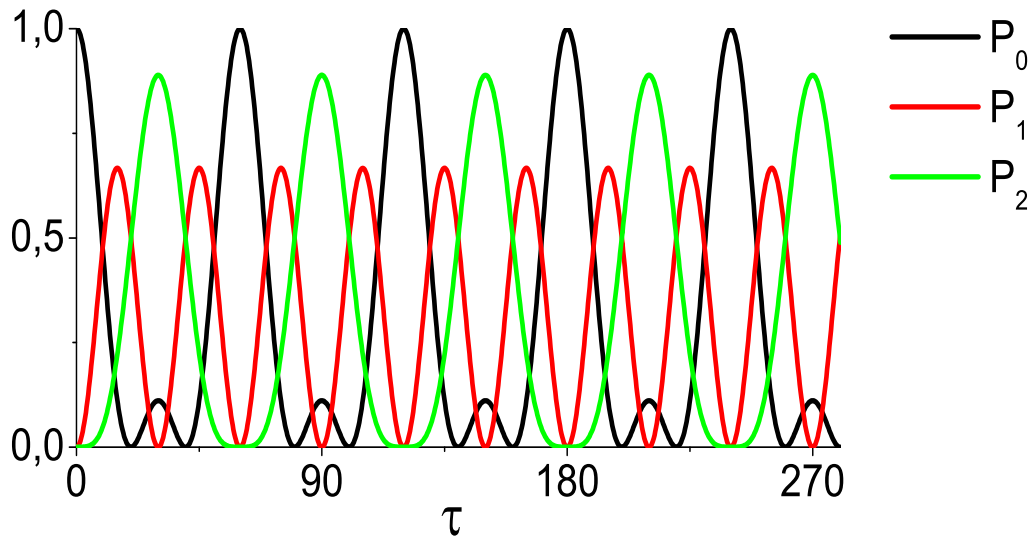


Figura 4.3: Probabilidades P_0 , P_1 e P_2 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $|000, 2, 4\rangle$.

$(|W_1, 0, n\rangle)$ com uma frequência de $\sqrt{3(n+1)}g\eta$. Em intervalos de tempo tais que satisfaçam $\sqrt{3(n+1)}\tau = (2k+1)\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), encontramos o sistema no estado W_1 com probabilidade 1.

Estado inicial $\Psi_{m-2, n-2}^{(1)} = |111, m-2, n-2\rangle$

Considere cada íon preparado no estado excitado e o centro de massa com $m-2$ fônons. O sistema iônico é aprisionado em uma cavidade com $n-2$ fótons, e a função de onda do sistema composto para um tempo qualquer t pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Psi_{m-2, n-2}^{(1)}(t) = & b_0(t)|000, m+1, n+1\rangle + b_1(t)|W_1, m, n\rangle \\ & + b_2(t)|W_2, m-1, n-1\rangle + b_3(t)|111, m-2, n-2\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que os coeficientes dados por

$$\begin{aligned}
b_0(t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_1)(\beta - \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\beta + \mu_1)(\beta + \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
b_1(t) &= \frac{+\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}}{2\beta} \left(\cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) - \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
b_2(t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_1)(\beta + \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta + \mu_1)(\beta - \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
b_3(t) &= \frac{+1}{2\beta} \left((\beta - \mu_1) \cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) + (\beta + \mu_1) \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

satisfazem a condição de normalização $\sum_{i=0}^3 |b_i|^2 = 1$. O operador densidade reduzido dos íons se resume a

$$\hat{\rho}(t) = |b_0(t)|^2 |000\rangle\langle 000| + |b_1(t)|^2 |W_1\rangle\langle W_1| + |b_2(t)|^2 |W_2\rangle\langle W_2| + |b_3(t)|^2 |111\rangle\langle 111|. \tag{4.31}$$

Em tempos de interação tais que $\sin(\sqrt{\mu + \beta}g\eta t) = \sin(\sqrt{\mu - \beta}g\eta t) = \pm 1$, temos que $b_1(t) = b_3(t) = 0$ e, portanto, podemos escrever o estado do sistema como

$$\Psi_{m-2, n-2}^{(1)}(t) = b_0(t) |000, m+1, n+1\rangle + b_2(t) |W_2, m-1, n-1\rangle. \tag{4.32}$$

Na figura (4.4) fazemos um gráfico das probabilidades P_j para o sistema preparado no estado $|111, 0, 0\rangle$. Em $\tau \approx 3\pi/8$ o estado do sistema pode ser escrito como na equação (4.32) com $|b_0|^2 = 0,25$ e $|b_2|^2 = 0,75$. Para curtos intervalos de interação o período para o sistema retornar ao estado inicial é de aproximadamente $\approx \frac{3\pi}{4g\eta}$. Para longos intervalos de interação o período para se encontrar o sistema no estado inicial será maior. Devido ao pequeno valor do coeficiente $\frac{\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}}{2\beta}$, o estado W_1 tem uma probabilidade muito pequena de ser populado.

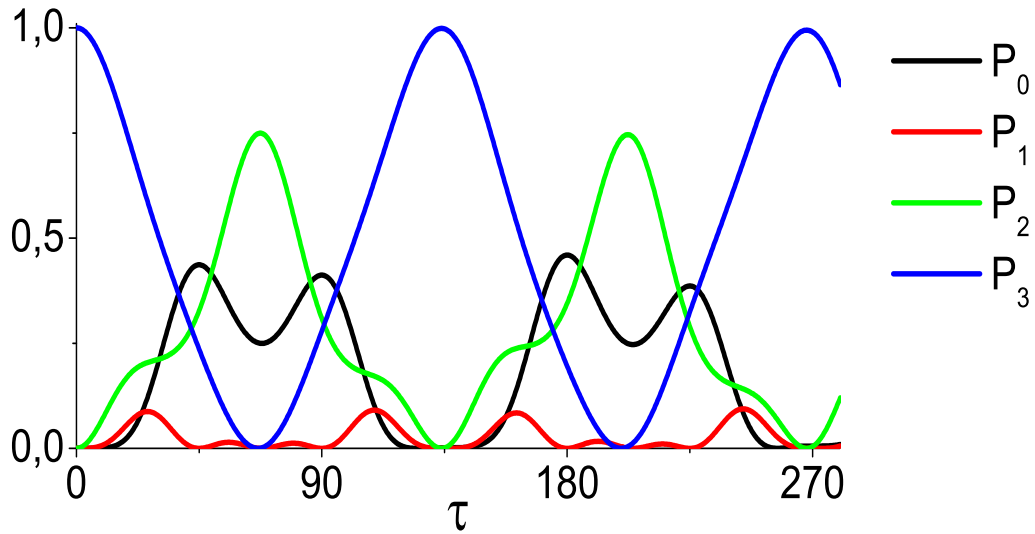


Figura 4.4: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) para o sistema preparado no estado inicial $|111, 0, 0\rangle$.

4.3 Emaranhamento do sistema

O sistema descrito na seção (4.2) é constituído por cinco partidos. Vimos que apesar do grande número de subsistemas, apenas oito estados são permitidos. No estudo do emaranhamento vamos considerar este sistema separado em quatro subsistemas A , B , C e D , ao invés de cinco. Os estados internos de cada íon são representados por A , B e C respectivamente, enquanto D representa o estado produto do modo vibracional com o modo do campo. Assim, o sistema composto é descrito por estados lógicos $|i_A, i_B, i_C, i_D\rangle$, onde $i_A = 0$ se o íon A está no estado fundamental ou $i_A = 1$ se o íon A está no estado excitado e analogamente para i_B e i_C . O estado produto fônon-fóton assume os seguintes valores $|i_D = 0\rangle = |m + 1, n + 1\rangle$, $|i_D = 1\rangle = |m, n\rangle$, $|i_D = 2\rangle = |m - 1, n - 1\rangle$ e $|i_D = 3\rangle = |m - 2, n - 2\rangle$. Na transição de um estado para outro a variação no número de fônons é igual a variação no número de fótons, isto é, $\Delta m = \Delta n$. A função de onda evoluída no tempo, tanto com o estado inicial preparado com os três íons no estado fundamental como com os três íons no estado excitado, pode ser escrita como

$$\psi^{(1)}(\tau) = \alpha_0(t)|0000\rangle + \alpha_1(t)|W_1, 1\rangle + \alpha_2(t)|W_2, 2\rangle + \alpha_3(t)|1113\rangle, \quad (4.33)$$

em que os coeficientes $\alpha_i(t) = a_i(t)$ (equação (4.20)) quando os íons são preparados no estado fundamental e $\alpha_i(t) = b_i(t)$ (equação (4.30)) quando os íons são preparados no estado excitado.

O sistema composto ABCD pode ser particionado em sistemas de dois partidos como $A + BCD$, $B + ACD$, $C + ABD$, $D + ABC$, $AB + CD$, $AC + BD$ e $AD + BC$, porém, devido à simetria entre os íons, as partições relevantes são $A + BCD$, $D + ABC$ e $AB + CD$.

O operador densidade na base lógica pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{\rho} = \sum_{i_A, j_A=0}^{d_A-1} \sum_{i_B, j_B=0}^{d_B-1} \sum_{i_C, j_C=0}^{d_C-1} \sum_{i_D, j_D=0}^{d_D-1} \langle i_A, i_B, i_C, i_D | \hat{\rho} | j_A, j_B, j_C, j_D \rangle \times |i_A, i_B, i_C, i_D\rangle \langle j_A, j_B, j_C, j_D|, \quad (4.34)$$

onde d_X ($X = A, B, C, D$) é a dimensão do subsistema X. O espaço de Hilbert em que o operador $\hat{\rho}$ atua tem dimensão $d_A \times d_B \times d_C \times d_D = 32$. Felizmente, o tipo de interação que consideramos impõe restrições de forma que os estados que podem ser ocupados são apenas 8.

Negatividade global

A negatividade global é uma medida de emaranhamento relacionada à transposta parcial global com relação ao subsistema que se deseja conhecer o emaranhamento. Tendo o operador densidade escrito na forma da equação (4.34), a transposta parcial global, por exemplo com relação ao subsistema A , é calculada trocando os índices relativos à A da seguinte forma

$$\hat{\rho}^{TA} = \sum_{i_A, j_A=0}^{d_A-1} \sum_{i_B, j_B=0}^{d_B-1} \sum_{i_C, j_C=0}^{d_C-1} \sum_{i_D, j_D=0}^{d_D-1} \langle i_A, i_B, i_C, i_D | \hat{\rho} | j_A, j_B, j_C, j_D \rangle \times |j_A, i_B, i_C, i_D\rangle \langle i_A, j_B, j_C, j_D|. \quad (4.35)$$

Como a dimensão do subsistema A é igual a 2, a negatividade global definida pela equação (3.19) pode ser escrita como

$$N_G^A = \|\hat{\rho}^{TA}\| - 1, \quad (4.36)$$

onde $\|\hat{\rho}^{TA}\|$ é a soma dos módulos dos autovalores de $\hat{\rho}^{TA}$.

O operador $\hat{\rho}^{TA}$ pode ser separado em 3 blocos de matrizes quadradas que não conectam entre si. Dois blocos são matrizes 4×4 que têm como base respectivamente $\{|0000 \rangle; |0101 \rangle; |0011 \rangle; |0112 \rangle\}$ e $\{|1001 \rangle; |1102 \rangle; |1012 \rangle; |1113 \rangle\}$, já o terceiro bloco é uma matriz 8×8 que tem como base $\{|1000 \rangle; |0001 \rangle; |1101 \rangle; |1011 \rangle; |0102 \rangle; |0012 \rangle; |1112 \rangle; |0113 \rangle\}$. As duas primeiras têm somente autovalores positivos, enquanto esta última tem autovalores negativos e positivos.

Calculamos a negatividade global para as seguintes partições $A + BCD$; $AB + CD$ e $D + ABC$ e obtivemos os seguintes resultados analíticos

$$N_G^A = 2\sqrt{\left(|\alpha_3|^2 + \frac{2}{3}|\alpha_2|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_1|^2\right) \left(|\alpha_0|^2 + \frac{2}{3}|\alpha_1|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_2|^2\right)}; \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} N_G^{AB} &= \frac{2}{3}\sqrt{\left(|\alpha_3|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_2|^2\right) \left(|\alpha_0|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_1|^2\right)} \\ &\quad + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}(|\alpha_2|^2 + |\alpha_1|^2) \left(|\alpha_0|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_1|^2\right)} \\ &\quad + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3} \left(|\alpha_3|^2 + \frac{1}{3}|\alpha_2|^2\right) (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)}; \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$N_G^D = \frac{1}{3} \left((|\alpha_3| + |\alpha_2| + |\alpha_1| + |\alpha_0|)^2 - 1 \right). \quad (4.39)$$

Negatividade parcial K-way

Conforme descrito na seção (3.4.2), o operador densidade pode ser expandido da seguinte forma

$$\hat{\rho} = \hat{R}_0 + \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \hat{R}_4. \quad (4.40)$$

Pode-se verificar facilmente que para nosso sistema $\hat{R}_1 = 0$.

Para calcular a negatividade parcial 4-way com relação ao subsistema A , por exemplo, deve-se calcular a transposta parcial 4-way do operador densidade com relação ao subsistema A . De acordo com a definição (3.26), a transposta parcial 4-way se obtém calculando a transposta parcial do subsistema A somente na matriz R_4 , ou seja,

$$\hat{\rho}_4^{TA} = \hat{R}_0 + \hat{R}_2 + \hat{R}_3 + \hat{R}_4^{TA}. \quad (4.41)$$

Portanto, a negatividade parcial 4-way definida pela equação (3.31), para este exemplo, é dada por

$$E_4^A = -2 \sum_i \langle \Psi_i^- | \hat{\rho}_4^{TA} | \Psi_i^- \rangle, \quad (4.42)$$

em que $|\Psi_i^- \rangle$ são autoestados de $\hat{\rho}_G^{TA}$ com respectivos autovalores negativos. Com cálculos análogos para a negatividade parcial 2-way e 3-way obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} E_4^A &= \frac{4}{N_G^A} \left(|\alpha_0|^2 |\alpha_3|^2 + \frac{|\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2}{3} \right), \\ E_3^A &= \frac{4}{N_G^A} \left(\frac{2|\alpha_0|^2 |\alpha_2|^2}{3} + \frac{2|\alpha_1|^2 |\alpha_3|^2}{3} \right), \\ E_2^A &= \frac{4}{N_G^A} \left(\frac{|\alpha_0|^2 |\alpha_1|^2}{3} + \frac{|\alpha_2|^2 |\alpha_3|^2}{3} + 2 \left(\frac{|\alpha_1|^2}{3} + \frac{|\alpha_2|^2}{3} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para a partição $D + ABC$ obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} E_4^D &= \frac{2}{d_D - 1} \left(|\alpha_0| |\alpha_3| + \frac{|\alpha_1| |\alpha_2|}{3} \right), \\ E_3^D &= \frac{2}{d_D - 1} (|\alpha_0| |\alpha_2| + |\alpha_1| |\alpha_3|), \\ E_2^D &= \frac{2}{d_D - 1} \left(|\alpha_0| |\alpha_1| + |\alpha_2| |\alpha_3| + \frac{2|\alpha_1| |\alpha_2|}{3} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Entropia linear

Analisamos o emaranhamento do sistema também usando a entropia linear para as partições $A + BCD$; $AB + CD$ e $D + ABC$. O operador densidade reduzido do subsistema A , por exemplo, é obtido a partir da equação (4.34) calculando o traço sobre os estados dos subsistemas BCD . Obtemos o operador densidade reduzido do subsistema A como

$$\hat{\rho}_{red}^A = \left(|\alpha_0|^2 + \frac{2}{3} |\alpha_1|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_2|^2 \right) |0\rangle\langle 0| + \left(|\alpha_3|^2 + \frac{2}{3} |\alpha_2|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_1|^2 \right) |1\rangle\langle 1|. \quad (4.45)$$

Para calcular a entropia linear associada ao subsistema A usamos a definição dada pela equação (3.34) e $\hat{\rho}_{red}^A$ obtido na equação anterior e obtemos

$$S^A = 2 \left(1 - \left(|\alpha_0|^2 + \frac{2}{3} |\alpha_1|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_2|^2 \right)^2 - \left(|\alpha_3|^2 + \frac{2}{3} |\alpha_2|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_1|^2 \right)^2 \right). \quad (4.46)$$

Para as decomposições $AB + CD$ e $D + ABC$ obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}
S^{AB} &= \frac{4}{3} \left(1 - \left(|\alpha_0|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_1|^2 \right)^2 - \left(|\alpha_3|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_2|^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{1}{3} |\alpha_1|^2 + \frac{1}{3} |\alpha_2|^2 \right)^2 \right), \\
S^D &= \frac{4}{3} \left(1 - \left(|\alpha_3|^4 + |\alpha_2|^4 + |\alpha_1|^4 + |\alpha_0|^4 \right) \right). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

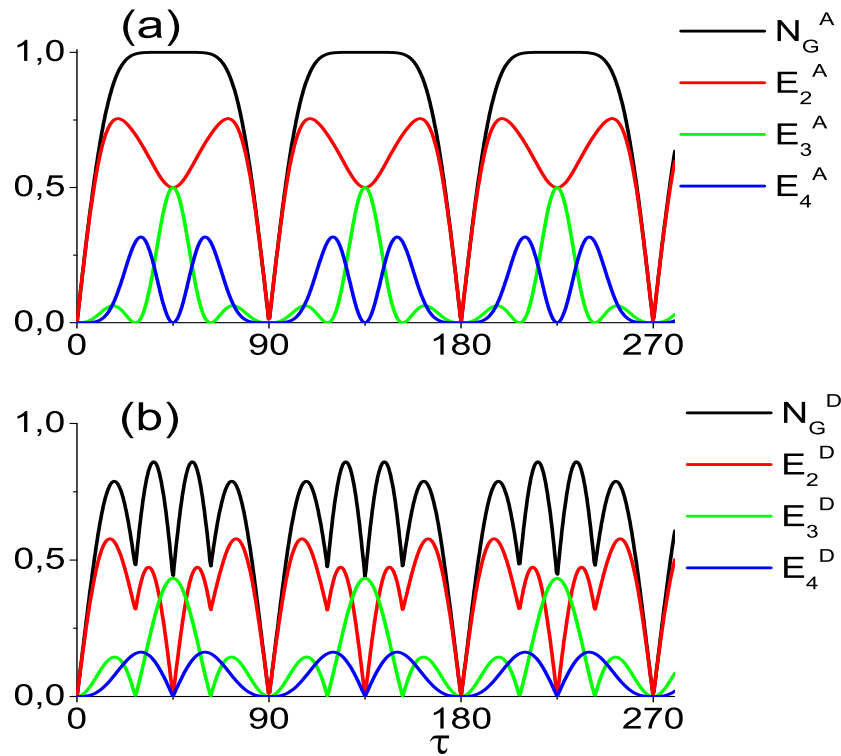


Figura 4.5: Negatividade global e negatividade parcial K-way com o sistema preparado no estado inicial $|000, 2, 2\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).

4.3.1 Análise dos resultados

Analisamos o emaranhamento do estado interno de um íon com o restante do subsistema, representado pela partição $A + BCD$ e também o emaranhamento do subsistema composto fônon-fóton com o restante do subsistema, representado por $D + ABC$. Plotamos na figura (4.5) a negatividade global N_G^p e a negatividade parcial E_K^p para o sistema preparado no estado $|000, 2, 2\rangle$. Observamos que o estado torna-se separável a cada intervalo de $\tau = \pi/2$. Em $\tau = \pi/4$ o emaranhamento do subsistema A é máximo contendo correlações de dois e três partidos, enquanto que o subsistema D apresenta $E_4^D = E_2^D = 0$, mostrando que o emaranhamento do subsistema fônon-fóton com os estados internos dos íons é puramente

do tipo $K = 3$, ou seja, envolve somente correlações de três partidos. Se neste instante o emaranhamento entre o subsistema D e ABC envolve somente emaranhamento do tipo $K = 3$ e o emaranhamento do subsistema A com BCD envolve emaranhamento tanto do tipo $K = 3$ como com $K = 2$, podemos inferir que o emaranhamento do tipo $K = 2$ envolve somente os estados internos. No início da interação, à medida que o sistema se torna emaranhado a negatividade global aumenta e a negatividade parcial também com uma taxa de crescimento maior para $K = 2$ e menor para $K = 4$. Observamos que na média a negatividade parcial com $K = 2$ tem uma representação significativa no emaranhamento do sistema.

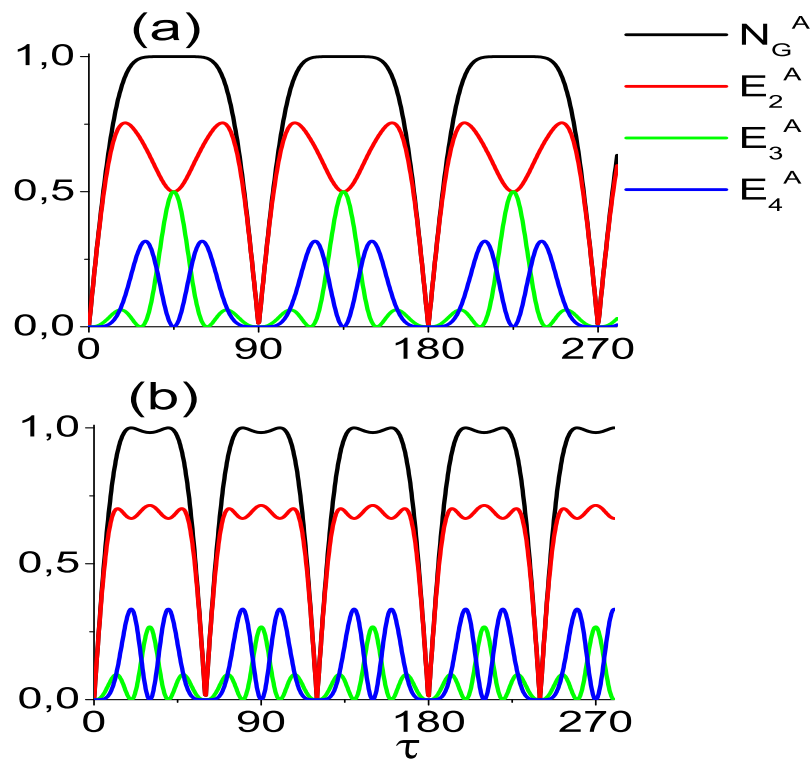


Figura 4.6: Negatividade global e negatividade parcial K -way calculados para as partições $A+BCD$ com o sistema preparado no estado inicial a) $|000, 2, 2\rangle$ e b) $|000, 2, 4\rangle$ em função da variável τ (graus).

Substituindo $\tau = \pi/4$ na equação (4.23) obtemos que $|a_0|^2 = 1/4$, $|a_1|^2 = 0$ e $|a_2|^2 = 3/4$. Podemos verificar, substituindo estes coeficientes na equação (4.37), que $N_G^A = 1$. Nesse ponto a probabilidade de se obter o estado W_2 é igual a $3/4$. Esta probabilidade aumenta se aumentamos o número inicial de fótons. Podemos ver na figura (4.6) o que acontece com o emaranhamento do subsistema A quando aumentamos o número de fótons

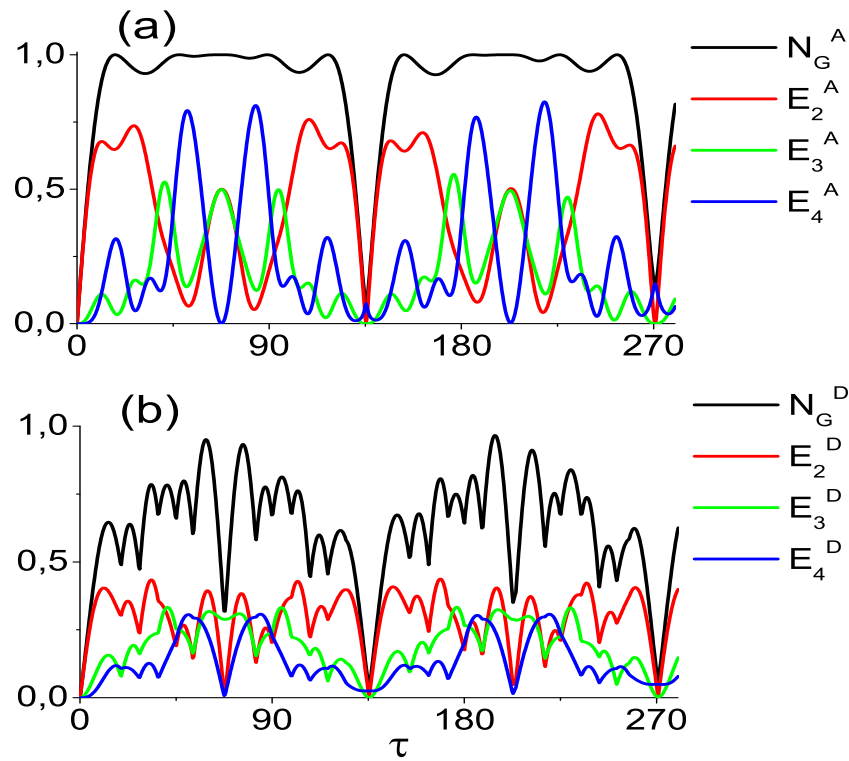


Figura 4.7: Negatividade global e negatividade parcial K-way com o sistema preparado no estado inicial $|000, 3, 3\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).

de 2 para 4. Vemos que à medida que a probabilidade de se obter o estado W_2 aumenta, E_3^A diminui e E_2^A aumenta. Ou seja, há um aumento nas correlações quânticas de dois partidos, o que é característico do emaranhamento do estado W_2 .

Com os três íons preparados no estado fundamental, mas agora com 3 fótons e 3 fônons, a dinâmica do emaranhamento pode ser vista na figura (4.7). Observamos que o subsistema A é maximamente ou quase maximamente emaranhado em um grande intervalo de τ . Em $\tau \approx 3\pi/8$ o emaranhamento do subsistema D é com boa aproximação puramente do tipo $K = 3$, enquanto que o subsistema A possui emaranhamento parcial do tipo $K = 2$ e $K = 3$ com $E_2^A = E_3^A = 0,5$. Neste ponto o emaranhamento do tipo $K = 2$ envolve somente estados internos dos íons. Na tabela (4.2) destacamos os valores dos dois primeiros picos de P_1 e P_2 que ocorrem para o estado inicial $|000, 3, 3\rangle$ (ver figura (4.1)), com os correspondentes valores da negatividade parcial. Vemos que em $\tau \approx 3\pi/8$ ocorre um máximo de probabilidade de se medir o estado W_1 . Com exceção do que ocorre em $\tau = 0,08\pi$, nos outros três casos em que ocorre um máximo de P_1 ou P_2 o emaranhamento

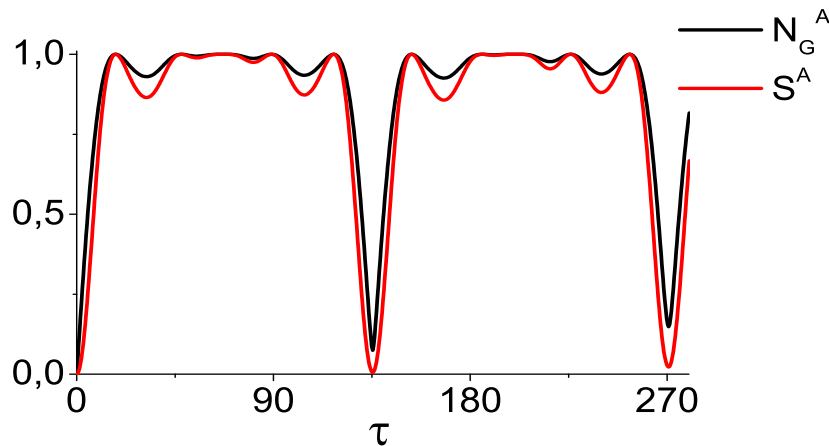


Figura 4.8: Comparação da negatividade global com a entropia linear para a partição $A + BCD$ com o sistema preparado no estado inicial $|000, 3, 3\rangle$.

Tabela 4.2: Mostramos os dois primeiros picos de P_1 e P_2 maiores que 0,5 e os correspondentes valores da negatividade parcial para o sistema preparado no estado inicial $|000, 3, 3\rangle$.

τ	P_1	P_2	E_2^A	E_3^A	E_4^A	E_2^D	E_3^D	E_4^D
$0,08\pi$	0,63		0,67	0,10	0,20	0,39	0,16	0,10
$0,14\pi$		0,79	0,73	0,15	0,07	0,30	0,19	0,09
$3\pi/8$	0,75		0,50	0,50	0,00	0,02	0,29	0,01
$0,61\pi$		0,82	0,76	0,14	0,05	0,28	0,18	0,08

parcial com $K = 4$ é igual a zero ou tem um valor muito pequeno comparado com os valores correspondentes a $K = 3$ e $K = 2$.

Ainda na figura (4.7) observamos que os pontos de mínimo da negatividade global especificamente em $\tau \approx 3\pi/4$ e $\tau \approx 3\pi/2$ têm um emaranhamento pequeno e predominantemente do tipo $K = 4$. Estes pontos correspondem aos pontos em que o sistema quase retorna ao estado inicial (ver figura (4.1)). Comparamos a negatividade global com a entropia linear com relação ao subsistema A na figura (4.8) e vemos que há uma boa concordância entre as duas medidas. Nos pontos $\tau = 3\pi/4$ e $\tau = 3\pi/2$ os valores da negatividade global e da entropia linear são respectivamente $N_G^A = 0,076$, $S^A = 0,005$ e $N_G^A = 0,148$, $S^A = 0,023$. Nesses pontos não temos um sistema separável, pois tanto a entropia linear quanto a negatividade global são diferentes de zero. A negatividade global e a entropia linear devem ter mesmos valores para sistemas separáveis e maximamente emaranhado, mas entre esses dois estados os valores quantitativos do emaranhamento são

diferentes.

Com o estado preparado com os três íons no estado excitado com zero fótons e zero fônons, isto é, $|111, 0, 0\rangle$, plotamos a negatividade global e as negatividades parciais na figura (4.9). Em $\tau \approx 3\pi/8$ vemos que o emaranhamento do subsistema D é com boa aproximação puramente do tipo $K = 3$ e como neste ponto o emaranhamento do subsistema A envolve emaranhamento somente do tipo $K = 2$ e $K = 3$, o emaranhamento do tipo $K = 2$ envolve somente os estados internos dos íons.

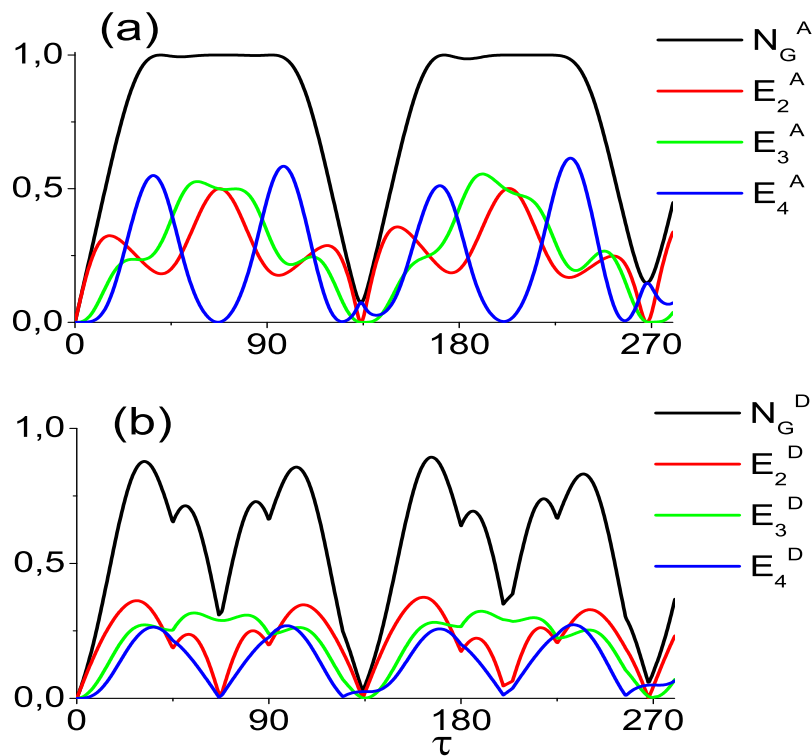


Figura 4.9: Negatividade global e negatividade parcial K -way com o sistema preparado no estado inicial $|111, 0, 0\rangle$ para as partições a) $A + BCD$ e b) $ABC + D$ em função da variável τ (graus).

Destacamos na tabela (4.3) os dois primeiros picos de P_2 e os correspondentes valores das negatividades parciais. Os valores de P_1 para este estado inicial são muito baixos como pode ser visto na figura (4.4). Os pontos destacados nesta tabela correspondem a pontos em que o subsistema A exhibe correlações do tipo $K = 2$ e $K = 3$, que coincide com os pontos em que a probabilidade de se medir o estado W_2 é alta. Comparamos a negatividade global com a entropia linear na figura (4.10) e vemos uma boa concordância, com exceção dos pontos em que o sistema é fracamente emaranhado em $\tau \approx 3\pi/4$ e

Tabela 4.3: Mostramos os dois primeiros picos de P_2 maiores que 0,5 e os correspondentes valores da negatividade parcial para o sistema preparado no estado inicial $|111, 0, 0\rangle$.

τ	P_2	E_2^A	E_3^A	E_4^A	E_2^D	E_3^D	E_4^D
$3\pi/8$	0,75	0,50	0,50	0,00	0,02	0,29	0,01
$1,12\pi$	0,74	0,50	0,49	0,01	0,06	0,29	0,03

$\tau \approx 3\pi/2$. Nesses pontos a entropia linear prevê um sistema menos emaranhado do que a negatividade global.

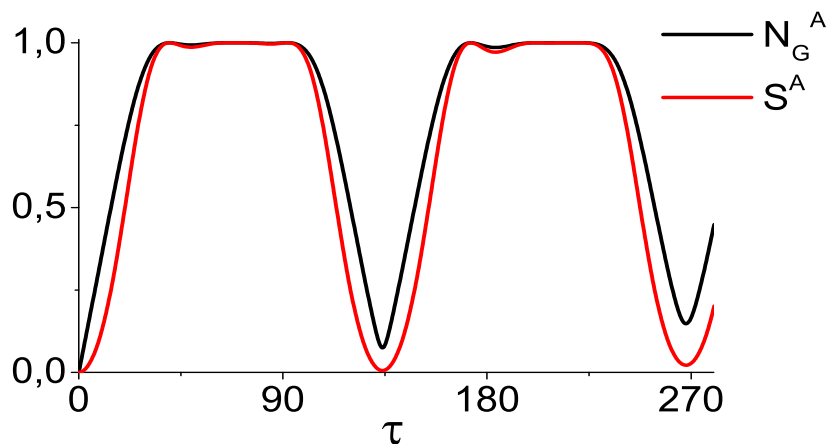


Figura 4.10: Comparação da negatividade global com a entropia linear para a partição $A + BCD$ com o sistema preparado no estado inicial $|111, 0, 0\rangle$.

4.4 Conclusões

Obtivemos expressões analíticas para a evolução do sistema quando os três íons são preparados no estado fundamental e quando estão no estado excitado. Quando os íons são preparados no estado fundamental, tal como $|000, m + 1, n + 1\rangle$, o menor valor entre m e n pode limitar a evolução unitária no espaço de Hilbert, fazendo com que alguns estados não fiquem acessíveis. Para o estado inicial $|000, 1, n + 1\rangle$, com $n \geq 0$, temos um sistema de 4 qubits em que a evolução restringe-se à apenas 4 estados na base computacional, sendo possível obter deterministicamente e periodicamente o estado W_1 . Assumindo um acoplamento íon-cavidade $g = 8,95MHz$ e um parâmetro de Lamb-Dicke $\eta = 0,01$, o primeiro estado W_1 é gerado em um intervalo de tempo $t = 10,13\mu s$.

Com o sistema preparado no estado inicial $|000, 2, n + 1\rangle$, com $n \geq 1$, é possível medir o

estado W_2 com probabilidade $\approx 24/25$ para um valor grande de n . Aumentando o número inicial de fótons pode-se gerar o estado W_2 em um menor tempo, no entanto, um número maior de fótons pode resultar em um processo de perda de coerência mais acelerado. O primeiro estado W_2 é gerado em $\tau = \pi/\sqrt{2(5n+3)}$, para $n \geq 1$. O número inicial de fônons oferece um controle adicional para a manipulação do sistema composto, quando os íons são preparados no estado fundamental. Esta propriedade é uma característica única de sistemas com os estados internos acoplados ao modo vibracional e com o modo do campo, pois íons acoplados somente ao modo do campo ou somente ao modo vibracional não apresentam esta propriedade.

Considerando o sistema particionado da forma $A + BCD$, $AB + CD$ e $ABC + D$ obtivemos expressões analíticas para a negatividade global e para a entropia linear quando o sistema é preparado com os íons no estado fundamental e com os íons no estado excitado. Os resultados mostram que o subsistema A fica maximamente emaranhado em grande parte da interação. Quando o emaranhamento do subsistema A é máximo e a negatividade parcial E_4^A é igual a zero, o emaranhamento do subsistema D é puramente do tipo $K = 3$ e correlações de dois partidos envolve somente os estados internos. Quando há uma grande probabilidade de se medir os estados W_1 ou W_2 , a negatividade parcial 2-way tem um valor expressivo. Isto pode ser entendido pelo fato de um estado do tipo W de 3 qubits possuir emaranhamento puramente do tipo $K = 2$. A entropia linear tem uma boa concordância com a negatividade global para os casos apresentados, prevendo porém, estados menos emaranhados nos pontos em que o sistema é quase separável.

Capítulo 5

Três íons aprisionados separadamente em uma cavidade com o campo em um estado de Fock

Diferentes técnicas são usadas para se aprisionar íons ou átomos neutros. Armadilhas de Paul são tipicamente usadas para aprisionar íons, enquanto que ‘Magneto-Optical Trap’ (MOT) são usadas para aprisionar átomos neutros. No experimento realizado por Fortier *et al.* [94, 95], mais de um átomo de ^{87}Rb foi aprisionado em uma cavidade. A técnica usada permite preparar o sistema com um número específico de átomos, deterministicamente. O experimento foi realizado em um regime de acoplamento forte com $(g, \kappa, \gamma/2) = 2\pi(17, 7, 3)\text{MHz}$, onde g é a intensidade de acoplamento átomo-campo, κ a taxa de decaimento do campo e γ a taxa de emissão espontânea. Usando um processo simultâneo de resfriamento e detecção de átomos, foram observados de um até três átomos dentro da cavidade para períodos maiores do que 15 segundos. A perspectiva para futuros experimentos é de que seja possível aprisionar átomos dentro da cavidade em armadilhas separadas, com possibilidade de acoplamento dos estados vibracionais com o campo da cavidade.

O acoplamento com o estado vibracional fornece uma variável de controle a mais do que sistemas atômicos acoplados unicamente com o campo ou com o estado vibracional. Aprisionar cada átomo em armadilhas separadas dentro da mesma cavidade constitui um sistema complexo, mas que, sob algumas condições, pode ser tratado de modo semelhante ao sistema com uma única armadilha.

Uma cavidade de comprimento L centímetros contendo um campo de comprimento de

onda λ nanômetros conterá um campo estacionário se a condição $L = q\lambda/2$ for satisfeita, onde $q = 1, 2, 3, \dots$ é o número de modos normais de oscilação. A onda estacionária formará um número muito grande de nós e antinós. Portanto, mais de uma armadilha miniaturizada, da ordem de milímetros, pode ser colocada dentro de uma cavidade e em nós distintos. Mundt *et al.* [29] realizaram um experimento em que um único íon $^{40}\text{Ca}^+$ foi aprisionado em uma armadilha de Paul e coerentemente acoplado ao campo quantizado de uma cavidade.

Neste capítulo, o sistema em estudo consiste de três íons individualmente aprisionados dentro da cavidade. A interação dos íons com o campo faz com que estados internos, estados vibracionais e estados do campo se tornem emaranhados. Fazemos uma análise da dinâmica do sistema discutindo os estados de interesse que podem ser gerados a partir de estados iniciais específicos do sistema. A dinâmica do emaranhamento é analisada com cálculos da negatividade global e da negatividade parcial K-way.

5.1 O modelo

5.1.1 O Hamiltoniano de interação

Consideramos três íons, cada um aprisionado numa armadilha dentro da cavidade, vibrando com frequências distintas ν_i , ($i = 1, 2, 3$). O estado do campo com frequência ω_c é um estado de Fock no instante $t = 0$. A frequência característica do íon de dois níveis é ω_0 . O Hamiltoniano livre para este sistema é escrito como

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^3 \hbar\nu_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)}, \quad (5.1)$$

onde \hat{a}_i (\hat{a}_i^\dagger) é o operador de aniquilação (criação) de um fônon de vibração na armadilha i e os operadores \hat{b} , \hat{b}^\dagger e $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ têm a funcionalidade descrita na seção (4.2). Os íons aprisionados interagem com o campo quantizado da cavidade. Lembrando que as transições elétricas de um átomo de dois níveis são descritas pelos operadores de Pauli $\hat{\sigma}_+^{(i)}$ e $\hat{\sigma}_-^{(i)}$, o Hamiltoniano de interação é dado por

$$\hat{H}_1 = \hbar g \sum_{i=1}^3 (\hat{\sigma}_-^{(i)} + \hat{\sigma}_+^{(i)}) (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \sin[\eta_i (\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger)], \quad (5.2)$$

onde $\eta_i = k\sqrt{\hbar/2M\nu_i}$, depende da frequência de vibração.

Na representação de interação, o operador \hat{H}_I tem a forma

$$\hat{H}_I = \hbar g \sum_{i=1}^3 (\hat{\sigma}_+^{(i)} e^{i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_-^{(i)} e^{-i\omega_0 t}) (\hat{b}^\dagger e^{i\omega_c t} + \hat{b} e^{-i\omega_c t}) \sin [\eta_i (\hat{a}_i e^{-i\nu_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\nu_i t})]. \quad (5.3)$$

No regime de Lamb-Dicke, $\eta_i \ll 1$, aproximamos $\sin [\eta_i (\hat{a}_i e^{-i\nu_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\nu_i t})]$ por $\eta_i (\hat{a}_i e^{-i\nu_i t} + \hat{a}_i^\dagger e^{i\nu_i t})$ e obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \sum_{i=1}^3 \hbar \eta_i g \left[\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} e^{i(\delta-\nu_i)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a}^\dagger e^{i(\delta+\nu_i)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger \hat{a} e^{i(\Delta-\nu_i)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{i(\Delta+\nu_i)t} \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_- \hat{b} \hat{a} e^{-i(\Delta+\nu_i)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b} \hat{a}^\dagger e^{-i(\Delta-\nu_i)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a} e^{-i(\delta+\nu_i)t} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{-i(\delta-\nu_i)t} \right], \quad (5.4) \end{aligned}$$

em que $\delta = \omega_0 - \omega_c$ e $\Delta = \omega_0 + \omega_c$. Consideramos o caso quando a frequência de vibração $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$. Ajustando ν e ω_c a satisfazer o regime de bandas laterais vermelha, isto é, $\delta = \nu$, assim, o Hamiltoniano da equação (5.4), na aproximação de onda girante, se resume a

$$\hat{H}_I = \hbar g \eta \sum_{i=1}^3 [\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{b} \hat{a}_i + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{b}^\dagger \hat{a}_i^\dagger]. \quad (5.5)$$

5.1.2 Evolução temporal do sistema composto

O estado produto do sistema composto de 3 íons em armadilhas separadas em uma cavidade é dado por $|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, m_1, m_2, m_3, n\rangle$, onde $\sigma_z^{(i)}$ é autovalor de $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ do i -ésimo íon, m_i o número de quanta de vibração do i -ésimo íon e n o número de fótons do campo. Podemos calcular a representação matricial de \hat{H}_I diretamente na base $|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, m_1, m_2, m_3, n\rangle$, composta por oito elementos: $|-1, -1, -1, m_1, m_2, m_3, n+1\rangle$, $|1, -1, -1, m_1 - 1, m_2, m_3, n\rangle$, $|-1, 1, -1, m_1, m_2 - 1, m_3, n\rangle$, $|1, 1, -1, m_1 - 1, m_2 - 1, m_3, n - 1\rangle$, $|-1, -1, 1, m_1, m_2, m_3 - 1, n\rangle$, $|1, -1, 1, m_1 - 1, m_2, m_3 - 1, n - 1\rangle$, $|-1, 1, 1, m_1, m_2 - 1, m_3 - 1, n - 1\rangle$ e $|1, 1, 1, m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1, n - 2\rangle$. Porém, definindo os vetores ortonormais

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= |-1, -1, -1, m_1, m_2, m_3, n+1\rangle, \\
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [|1, -1, -1, m_1-1, m_2, m_3\rangle + |-1, 1, -1, m_1, m_2-1, m_3\rangle \\
&\quad + |-1, -1, 1, m_1, m_2, m_3-1\rangle] |n\rangle, \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [|1, 1, -1, m_1-1, m_2-1, m_3\rangle + |-1, 1, 1, m_1, m_2-1, m_3-1\rangle \\
&\quad + |1, -1, 1, m_1-1, m_2, m_3-1\rangle] |n-1\rangle, \\
|\psi_3\rangle &= |1, 1, 1, m_1-1, m_2-1, m_3-1, n-2\rangle, \\
|\psi_4\rangle &= \left[\frac{1}{\sqrt{6}} |1, -1, -1, m_1-1, m_2, m_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |-1, 1, -1, m_1, m_2-1, m_3\rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{3}} |-1, -1, 1, m_1, m_2, m_3-1\rangle \right] |n\rangle, \\
|\psi_5\rangle &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} |1, 1, -1, m_1-1, m_2-1, m_3\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |-1, 1, 1, m_1, m_2-1, m_3-1\rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{6}} |1, -1, 1, m_1-1, m_2, m_3-1\rangle \right] |n-1\rangle, \\
|\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, -1, -1, m_1-1, m_2, m_3\rangle - |-1, 1, -1, m_1, m_2-1, m_3\rangle] |n\rangle, \\
|\psi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, -1, 1, m_1-1, m_2, m_3-1\rangle - |-1, 1, 1, m_1, m_2-1, m_3-1\rangle] |n-1\rangle,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

podemos verificar que quando $m_1 = m_2 = m_3 = m$ o Hamiltoniano \hat{H}_I é representado por um bloco 4×4 e dois blocos 2×2 . Consideraremos, apenas, os estados iniciais $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_3\rangle$ para estudar a dinâmica do sistema, determinada por

$$\hat{H}_I = \sqrt{2m\hbar g\eta} \begin{pmatrix} 0 & B_n & 0 & 0 \\ B_n & 0 & A_n & 0 \\ 0 & A_n & 0 & C_n \\ 0 & 0 & C_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

na base $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$, onde $\sqrt{2}B_n = \sqrt{3(n+1)}$, $A_n = \sqrt{2n}$ e $\sqrt{2}C_n = \sqrt{3(n-1)}$. Este Hamiltoniano tem uma estrutura semelhante ao do sistema com uma única armadilha, porém com elementos de matriz diferentes. Na representação matricial (5.7) o fator \sqrt{m} pôde ser colocado em evidência, enquanto que na matriz (4.7) do capítulo anterior isso não foi possível. Diagonalizando (5.7) obtemos os seguintes quatro auto-

valores $\lambda_0 = \sqrt{m\hbar g\eta\sqrt{\mu' + \beta'}}$, $\lambda_1 = -\sqrt{m\hbar g\eta\sqrt{\mu' + \beta'}}$, $\lambda_2 = +\sqrt{m\hbar g\eta\sqrt{\mu' - \beta'}}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{m\hbar g\eta\sqrt{\mu' - \beta'}}$, onde $\mu' = (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2) = 5n$ e $\beta' = \sqrt{\mu'^2 - 4B_n^2 C_n^2} = \sqrt{16n^2 + 9}$. As variáveis μ' e β' , diferentemente de μ e β definidas no capítulo anterior, não dependem de m . Definindo ainda $\mu'_1 = \mu' - 2C_n^2$ e $\mu'_2 = \mu' - 2B_n^2$ obtemos a matriz V , análoga ao bloco 4×4 da matriz (4.10), que transforma a base $|\psi_i\rangle$ na base de autoestados de \hat{H}_I , ou seja,

$$|\phi_i\rangle \rightarrow V|\psi_i\rangle, \quad (5.8)$$

onde $|\phi_i\rangle$ são autoestados de \hat{H}_I , tais que $\hat{H}_I|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$.

Para um Hamiltoniano independente do tempo, o operador de evolução temporal pode ser escrito como $e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}}$. Usando do mesmo raciocínio descrito na seção (4.2.1), escrevemos o estado evoluído como

$$\Psi_I^{(2)}(t) = \sum_{k,l=0}^3 V_{Ik}^\dagger \exp(-i\frac{\lambda_k t}{\hbar}) V_{kl} |\psi_l\rangle. \quad (5.9)$$

O estado na representação de Schrödinger é obtido pela transformação $\Psi_S^{(2)}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \Psi_I^{(2)}(t)$.

Estado inicial $\Psi_{m,n+1}^{(2)}(0) = |-1, -1, -1, m, m, m, n+1\rangle$

Consideramos que cada íon seja preparado no estado fundamental com m fônons de vibração. Os três íons interagem com um campo de cavidade preparado em um estado de Fock com $n+1$ fótons. Se $m=0$ ou $n+1=0$, não haverá evolução temporal. O estado do sistema no instante t na representação de Schrödinger tem a forma

$$\Psi_{m,n+1}^{(2)}(t) = a_0(t)|\psi_0\rangle + a_1(t)|\psi_1\rangle + a_2(t)|\psi_2\rangle + a_3(t)|\psi_3\rangle, \quad (5.10)$$

com coeficientes

$$\begin{aligned}
a_0(t) &= \left(\frac{(\beta' - \mu'_2)}{2\beta'} \cos\left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t\right) + \frac{(\beta' + \mu'_2)}{2\beta'} \cos\left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_1(t) &= \frac{-i}{2\beta'} \left(\sqrt{(\beta' - \mu'_2)(\beta' + \mu'_1)} \sin\left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t\right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta' + \mu'_2)(\beta' - \mu'_1)} \sin\left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_2(t) &= +\frac{\sqrt{\beta'^2 - \mu'^2_2}}{2\beta'} \left(\cos\left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t\right) - \cos\left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
a_3(t) &= \frac{-i}{2\beta'} \left(\sqrt{(\beta' - \mu'_2)(\beta' - \mu'_1)} \sin\left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t\right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\beta' + \mu'_2)(\beta' + \mu'_1)} \sin\left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t\right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

que satisfazem a condição de normalização $\sum_{i=0}^3 |a_i(t)|^2 = 1$ e $E = 3m\hbar\omega_0 + \hbar\omega_c(n - 3m - 1/2)$ é autovalor de \hat{H}_0 . Destacamos aqui que apenas a fase e o argumento das funções seno e cosseno têm dependência de m . De acordo com a notação, $n = 2$ é suficiente para que os oito estados produtos ou os 4 estados $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_3\rangle$ tenham probabilidade finita de serem populados.

Para valores de t tais que $\cos(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t) = \cos(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t) = \pm 1$ o sistema composto torna-se um estado separável. E quando a condição $\sin(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t) = \sin(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t) = \pm 1$ é satisfeita o estado do sistema composto pode ser escrito como

$$\Psi_{m,n+1}^{(2)}(t) = a_1(t)|\psi_1\rangle + a_3(t)|\psi_3\rangle. \tag{5.12}$$

Na figura (5.1) plotamos as probabilidades de encontrar zero íons no estado excitado (P_0), um íon no estado excitado (P_1), dois íons no estado excitado (P_2) e três íons no estado excitado (P_3). Cada íon é preparado com um fônon ($m = 1$) e a cavidade com três fótons ($n + 1 = 3$). Notamos que no início da interação P_0 decresce até zero, enquanto P_1 , P_2 e P_3 , nesta seqüência, aumentam com um atraso de tempo entre elas. Mostrando que inicializando os íons no estado fundamental, os primeiros estados a serem populados serão aqueles com um íon no estado excitado, depois 2 íons no estado excitado e então 3 íons no estado excitado. Em $\tau \approx 1,28\pi$ vemos um caso em que a função de onda pode ser aproximada pela equação (5.12), onde $P_3 \approx 0,25$ e $P_1 \approx 0,73$. Podemos medir o estado $|\psi_2\rangle$ com probabilidade $P_2 = 0,92$ em $\tau = 0,93\pi$. Porém, aumentando para 4 o número

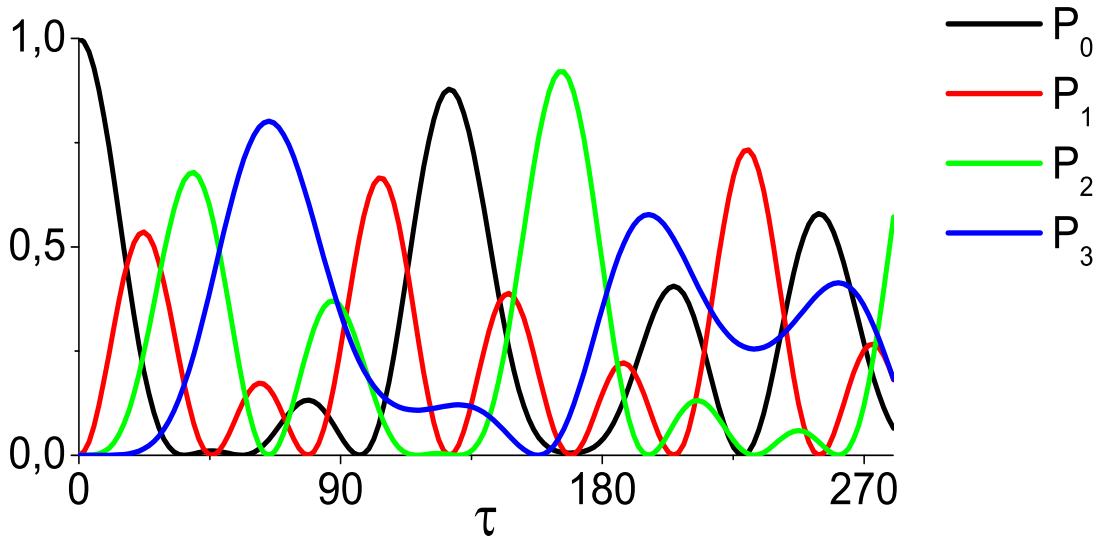


Figura 5.1: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Psi_{1,3}^{(2)}$.

inicial de fótons do campo a probabilidade P_1 não alcança valores maiores do que 0,75 e P_2 tem valor máximo em $\tau \approx 1,33\pi$ com $P_2 \approx 0,82$, como pode ser visto na figura (5.2). Vê-se que o sistema torna-se quase separável a cada intervalo de $\Delta\tau \approx 0,58\pi$ e que intercaladamente aos picos de P_0 , aparecem os picos de P_3 .

Preparando a cavidade com dois fótons ($n + 1 = 2$), o estado no tempo t com $m \geq 1$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Psi_{m,2}^{(2)}(t) = & \left(\frac{3}{5} \cos(\sqrt{10mg\eta t}) + \frac{2}{5} \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |\psi_0\rangle \\ & - i\sqrt{\frac{3}{5}} \sin(\sqrt{10mg\eta t}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |\psi_1\rangle \\ & + \frac{\sqrt{6}}{5} (\cos(\sqrt{10mg\eta t}) - 1) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |\psi_2\rangle. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para este caso o sistema volta ao estado inicial a cada intervalo de tempo $t = \frac{2q\pi}{\sqrt{10mg\eta}}$, ($q = 0, 1, 2, \dots$). Em $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{10m}}$, pode-se medir o sistema no estado $|\psi_2\rangle$ com probabilidade $P_2(\text{máx}) = 24/25$.

Estado inicial $\Phi_{m-1,n-2}^{(2)} = |1, 1, 1, m-1, m-1, m-1, n-2\rangle$

Nesta seção cada íon é preparado no estado excitado com $m-1$ fônons de vibração. Os três íons interagem com um campo de cavidade preparado em um estado de Fock com

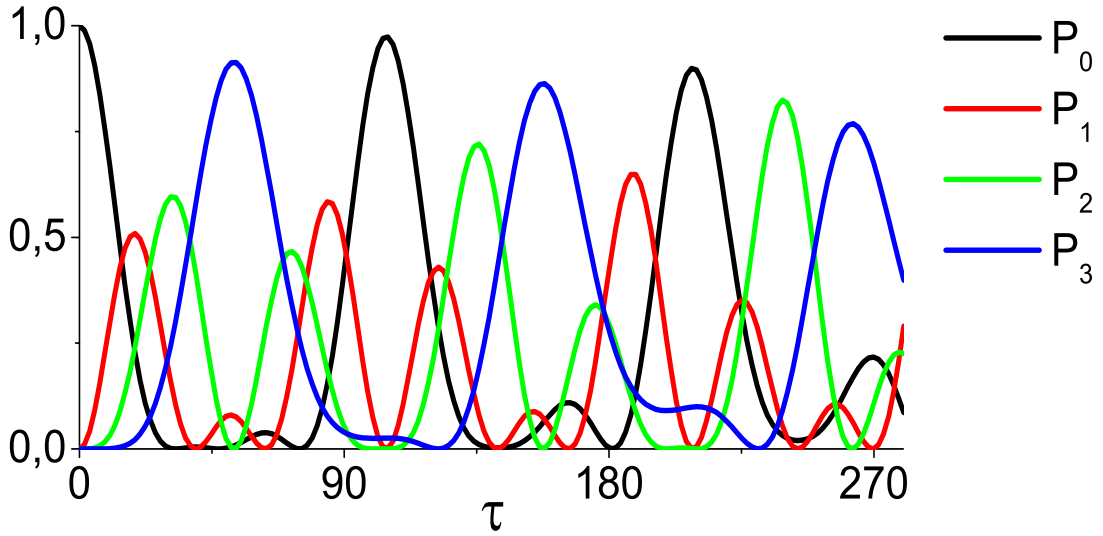


Figura 5.2: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Psi_{1,4}^{(2)}$.

$n - 2$ fótons. A função de onda no tempo t e na representação de Schrödinger será

$$\Phi_{m-1,n-2}^{(2)}(t) = b_0(t)|\psi_0\rangle + b_1(t)|\psi_1\rangle + b_2(t)|\psi_2\rangle + b_3(t)|\psi_3\rangle, \quad (5.14)$$

com coeficientes dados por

$$\begin{aligned} b_0(t) &= \frac{-i}{2\beta'} \left(\sqrt{(\beta' - \mu'_1)(\beta' - \mu'_2)} \sin \left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\beta' + \mu'_1)(\beta' + \mu'_2)} \sin \left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\ b_1(t) &= \frac{+\sqrt{\beta'^2 - \mu_1'^2}}{2\beta'} \left(\cos \left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t \right) - \cos \left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\ b_2(t) &= \frac{-i}{2\beta'} \left(\sqrt{(\beta' - \mu'_1)(\beta' + \mu'_2)} \sin \left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\beta' + \mu'_1)(\beta' - \mu'_2)} \sin \left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\ b_3(t) &= \frac{+1}{2\beta'} \left((\beta' - \mu'_1) \cos \left(\sqrt{m(\mu' + \beta')}g\eta t \right) + (\beta' + \mu'_1) \cos \left(\sqrt{m(\mu' - \beta')}g\eta t \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

que satisfazem a condição de normalização $\sum_{i=0}^3 |b_i(t)|^2 = 1$.

Quando $\cos \left(\sqrt{m(\mu + \beta)}g\eta t \right) = \cos \left(\sqrt{m(\mu - \beta)}g\eta t \right) = \pm 1$ o sistema volta ao estado inicial. Quando $\sin \left(\sqrt{m(\mu + \beta)}g\eta t \right) = \sin \left(\sqrt{m(\mu - \beta)}g\eta t \right) = \pm 1$ o estado do sistema pode ser escrito como

$$\Phi_{m-1,n-2}^{(2)}(t) = b_0(t)|\psi_0\rangle + b_2(t)|\psi_2\rangle. \quad (5.16)$$

Plotamos na figura (5.3) as probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 para $m-1=0$ e $n-2=0$, isto é, zero fônons e zero fótons. Assim que a interação tem início, P_3 decresce até chegar a zero, enquanto P_2 , P_1 e P_0 , nesta ordem, aumentam com um atraso entre elas. Em $\tau \approx 1,27\pi$ o estado do sistema pode ser aproximado pela equação (5.16), pois $P_0 \approx 0,26$ e $P_2 \approx 0,73$. A probabilidade P_1 tem pouca contribuição pois o coeficiente $\frac{\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}}{2\beta}$ é muito pequeno. Em $\tau \approx 3\pi/4$ temos $P_3 \approx 0,88$.

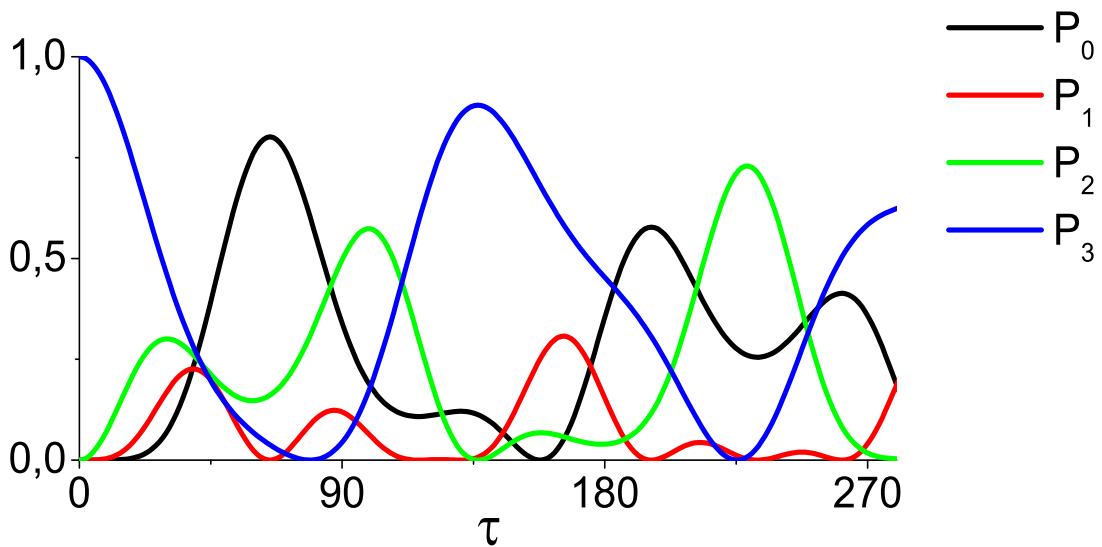


Figura 5.3: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ (graus) com o sistema preparado no estado inicial $\Phi_{0,0}^{(2)}$.

5.2 Emaranhamento do sistema

Para os cálculos de emaranhamento reagrupamos o sistema total em apenas quatro partidos designados por A , B , C e D . O qubit A representa o estado produto do estado interno com o modo vibracional do íon 1, e assim analogamente para B e C , enquanto que o subsistema D representa o estado do campo. Assim, o estado do sistema composto pode ser representado por estados lógicos $|i_A, i_B, i_C, i_D\rangle$, onde $|i_A = 0\rangle$ corresponde ao primeiro íon no estado fundamental com m fônons ($|\sigma_z^{(1)} = -1, m\rangle$) e $|i_A = 1\rangle$ corresponde ao primeiro íon no estado excitado com $m-1$ fônons ($|\sigma_z^{(1)} = 1, m-1\rangle$), e analogamente

para B e C . A representação lógica para o subsistema D assume os seguintes valores $|i_D = 0\rangle = |n + 1\rangle$, $|i_D = 1\rangle = |n\rangle$, $|i_D = 2\rangle = |n - 1\rangle$ e $|i_D = 3\rangle = |n - 2\rangle$. Nesta base lógica, a função de onda em qualquer tempo t , para os estados iniciais considerados na seção (5.1.2), pode ser escrita como

$$\varphi^{(2)}(\tau) = \alpha_0(t)|0000\rangle + \alpha_1(t)|W_1, 1\rangle + \alpha_2(t)|W_2, 2\rangle + \alpha_3(t)|1113\rangle, \quad (5.17)$$

onde

$$|W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle], \quad (5.18)$$

$$|W_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[|011\rangle + |110\rangle + |101\rangle] \quad (5.19)$$

e os coeficientes $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ e $\alpha_3(t)$ são dados por (5.11) se o estado inicial for $\Psi_{m,n+1}^{(2)}(0)$ ou dados por (5.15) se o estado inicial for $\Phi_{m-1,n-2}^{(2)}(0)$.

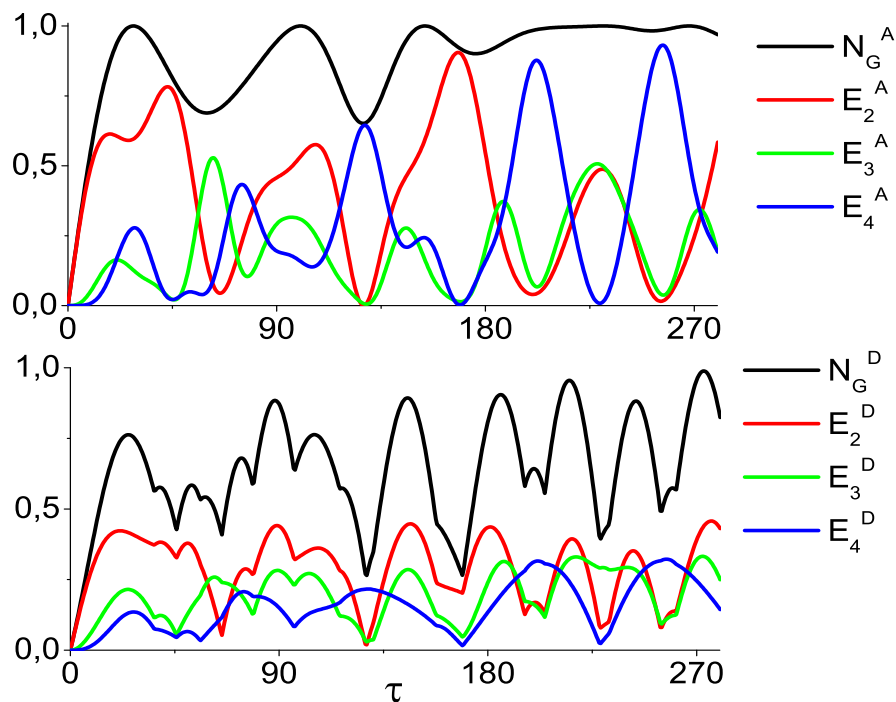


Figura 5.4: Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $|0000\rangle$ com um fônon e três fótons.

Escrito dessa forma, o sistema do capítulo anterior e deste capítulo possuem bases lógicas idênticas, porém com estruturas diferentes. Os estados W_1 e W_2 no capítulo anterior representam somente estados internos, enquanto que neste capítulo os estados W_1

e W_2 representam estados internos e estados vibracionais. Os resultados analíticos para a negatividade global, negatividade parcial K-way e entropia linear obtidos no capítulo anterior partem de um estado puro análogo à equação (5.17). Portanto, o emaranhamento do sistema pode ser analisado substituindo os coeficientes (5.11) ou (5.15) nas expressões para negatividade global, negatividade parcial K-way e entropia linear.

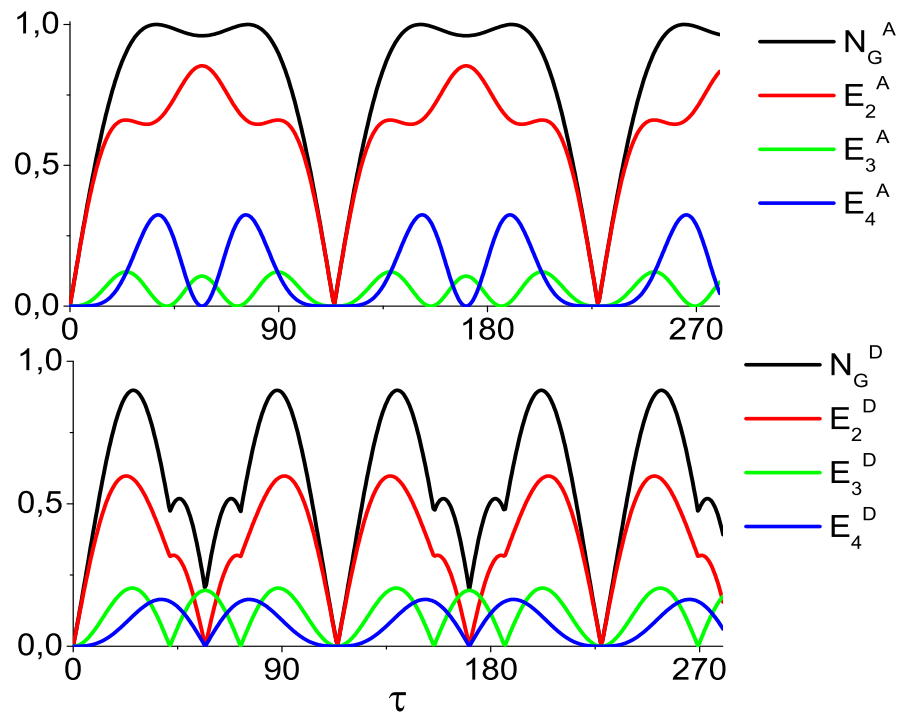


Figura 5.5: Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $|0000\rangle$ com um fônon e dois fótons.

Considerando os três íons no estado fundamental com um fônon de vibração cada e o campo preparado com três fótons em $t = 0$, a negatividade global e as negatividades parciais K-way são calculadas substituindo os coeficientes (5.11) nas equações (4.37), (4.38), (4.39), (4.43) e (4.44). A dinâmica do emaranhamento pode ser vista na figura (5.4). O subsistema A torna-se maximamente emaranhado pela primeira vez em $\tau \approx 0,15\pi$, enquanto que $N_G^D = 0,74$. Podemos ver dois pontos onde $N_G^A \approx E_2^A$ que correspondem a $\tau \approx 0,25\pi$ e $\tau \approx 0,93\pi$. Estes pontos correspondem a picos de P_2 como podem ser vistos na figura (5.1), onde $P_2 = 0,92$ em $\tau = 0,93\pi$. A função de onda em $\tau = 0,93\pi$ é escrita como

$$\begin{aligned} \Psi_{1,3}^{(2)} = e^{-i\frac{E_{0,93}\pi}{\hbar g \eta}} & (-0,0765|0000\rangle + 0,0745i|W_1, 1\rangle \\ & + 0,9570|W_2, 2\rangle - 0,2700i|1113\rangle). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Outros pontos que destacamos são os picos de E_4^A que correspondem a $\tau \approx 0,71\pi$, $\tau \approx 1,15\pi$ e $\tau \approx 1,42\pi$. Comparando com o gráfico (5.1), esses valores de τ correspondem a pontos em que P_0 e P_3 somam mais de 90% da probabilidade total, mostrando uma grande correlação quântica entre os estados $|0000\rangle$ e $|1113\rangle$.

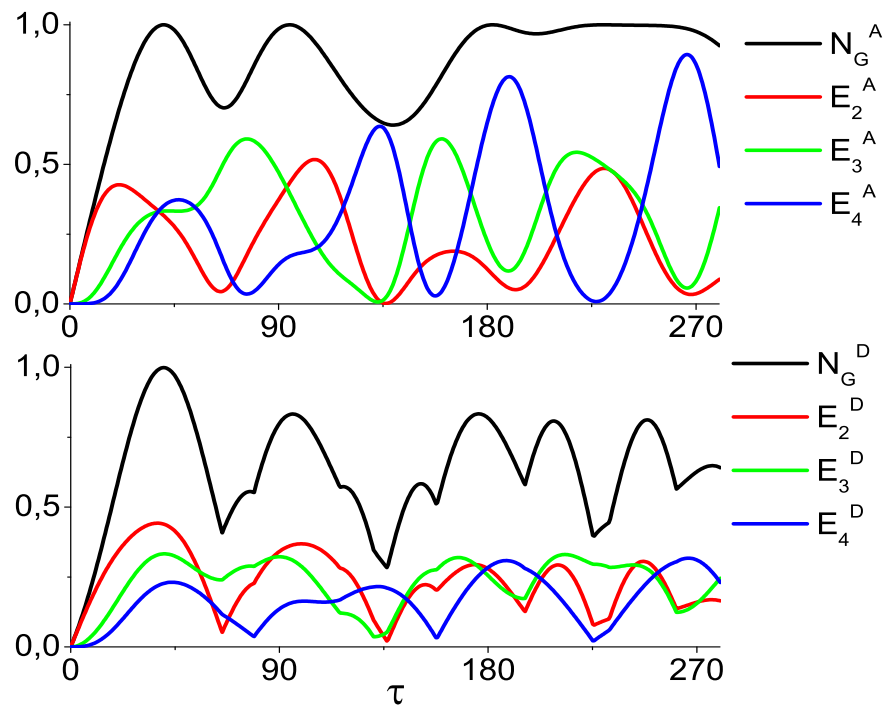


Figura 5.6: Negatividade global e negatividades parciais para as partições $A + BCD$ e $D + ABC$ em função de $\tau = g\eta t$ (graus) para o estado inicial $|1113\rangle$ com zero fônons e zero fótons.

Na seqüência, plotamos na figura (5.5) a negatividade global e as negatividades parciais K-way para os três íons preparados no estado fundamental com um fônon cada e o campo com dois fótons. Depois de passar por um máximo de emaranhamento, a negatividade global do subsistema D passa por um mínimo local em $\tau = \pi/\sqrt{10}$ com $N_G^D = E_3^D = 0,20$. Neste ponto o subsistema D apresenta correlações quânticas de três partidos, enquanto que o subsistema A está quase maximamente emaranhado com $E_2^A = 0,85$ e $E_3^A = 0,10$. Mostrando que A , B e C apresentam correlações quânticas de dois partidos entre si, mas

não com D .

Na figura (5.6) apresentamos a negatividade global e as negatividades parciais K-way para os íons preparados no estado excitado com zero fônons cada e zero fótons na cavidade. Em $\tau \approx 0,22\pi$ os subsistemas A e D ficam maximamente emaranhados. O subsistema A apresenta fortes correlações de 4 partidos em $\tau \approx 0,74\pi$, $\tau \approx 1,05\pi$ e $\tau \approx 1,47\pi$. Comparando com a figura (5.3) vemos que nestes pontos a soma $P_0 + P_3$ representa mais de 90% da probabilidade total.

5.3 Conclusões

Para o estado inicial com $m_1 = m_2 = m_3$, é possível expressar o estado do sistema em termos de estados W cuja estrutura envolve estados internos e estados vibracionais. Pode-se medir o estado W_2 com probabilidade $P_2 = 0,92$ em $\tau = 0,93\pi$ para o estado inicial $\Psi_{1,3}^{(2)}$. Considerando o estado inicial $\Psi_{1,2}^{(2)}$ com 2 fótons na cavidade, o estado W_2 pode ser medido com probabilidade $24/25$ em $\tau = \pi/\sqrt{10}$. Para o estado inicial $\Phi_{0,0}^{(2)}$ a probabilidade de se medir o estado W_2 não é maior do que $0,75$.

Como o estado W de três qubits apresenta correlações quânticas de dois partidos, os pontos onde há grande probabilidade de se medir um estado W , a negatividade parcial 2-way para o subsistema A apresenta um pico. Para o estado inicial $\Psi_{1,2}^{(2)}$, por exemplo, em $\tau = \pi/\sqrt{10}$ podemos medir o estado W_2 com probabilidade $P_2 = 24/25$ e a negatividade parcial 2-way correspondente ao subsistema A é dado por $E_2^A = 0,85$. Neste caso as correlações de 2 partidos envolvem somente os subsistemas A , B e C .

Nos pontos em que $P_0 + P_3$ correspondem a mais de 90% da probabilidade total, a negatividade parcial 4-way tem um pico. Mostrando que há uma correlação quântica de 4 partidos entre os estados $|0000\rangle$ e $|1113\rangle$.

Capítulo 6

Três íons aprisionados em uma cavidade com o campo no estado coerente

6.1 Introdução

Na superposição de ondas eletromagnéticas, a coerência entre as fases tem um papel determinante na onda resultante. O padrão de interferência, constituído por máximos e mínimos, entre duas fontes de luz só poderá ser observado se as fontes forem coerentes (mesma fase). No contexto da teoria quântica da luz, Glauber em 1963 [96] contribuiu com exemplos bem claros sobre a luz coerente e a luz incoerente. A luz emitida por uma lâmpada de filamento incandescente é uma luz incoerente, devido à emissão de fótons em vários comprimentos de onda e em direções aleatórias. A luz de um laser, no entanto, é um exemplo de luz coerente, onde os átomos são excitados e estimulados a decaírem simultaneamente, emitindo luz em um único comprimento de onda e com mesma fase. Não existe na natureza uma fonte de luz com tal propriedade. Em 2005, Glauber dividiu o prêmio Nobel de física com outros dois cientistas, devido a sua contribuição na área da óptica e por ter aberto uma nova área de pesquisa na física, a óptica quântica. Propriedades estatísticas de uma luz coerente são descritas, a nível quântico, usando um estado coerente. Tal estado é definido como uma superposição de estados do oscilador harmônico da forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (6.1)$$

onde α é um número complexo. O estado $|\alpha\rangle$ é autoestado do operador de aniquilação \hat{b} com autovalor α ($\hat{b}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$). É fácil verificar que $\langle\alpha|\hat{b}^\dagger\hat{b}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ é o número médio de fótons.

É bem conhecido que as incertezas nas quadraturas de um campo coerente satisfazem a relação de incerteza mínima. Sejam \hat{A} e \hat{B} dois operadores que representam dois observáveis e que satisfazem a relação de comutação $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$. A incerteza na medida de uma grandeza, por exemplo \hat{A} , é definida como $(\Delta A)^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$. A relação de incerteza na medida simultânea de \hat{A} e \hat{B} é dada por [55, 97]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle\hat{C}\rangle|. \quad (6.2)$$

Note que se \hat{A} for medido em uma autobase, não teremos incerteza na medida de \hat{A} , pois $(\Delta A)^2 = 0$. Igualmente para \hat{B} teremos incerteza igual a zero se for medido em sua autobase. Adicionado a isso, se \hat{A} e \hat{B} não comutam, não existe uma autobase comum a \hat{A} e \hat{B} , portanto não podemos medi-los simultaneamente com incerteza igual a zero.

As quadraturas do campo são definidas como $\hat{X}_1 = (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)/2$ e $\hat{X}_2 = (\hat{b} - \hat{b}^\dagger)/2i$. Podemos verificar facilmente que $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$ e que a relação de incerteza nas quadraturas \hat{X}_1 e \hat{X}_2 é dada por

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (6.3)$$

Calculando a variância de cada quadratura com relação a um estado coerente obtemos $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0,5$. Essa é uma propriedade importante dos estados coerentes, pois além de satisfazerem o mínimo da relação de incerteza, também apresentam incertezas iguais nas quadraturas X_1 e X_2 . As quadraturas devem satisfazer a relação (6.3) para qualquer estado do campo, porém, a variância ΔX_1 ou ΔX_2 pode ter um valor menor do que 0,5 à custa de um aumento na variância da variável conjugada. O estado com variância menor do que 0,5 para uma dada quadratura é chamado de estado comprimido com relação a esta quadratura. Na definição mais geral, um estado comprimido de ordem $2p$ com relação a quadratura X_i , é aquele em que a variância ΔX_i satisfaça a relação [98, 99, 100]

$$\langle(\Delta X_i)^{2p}\rangle < (2p - 1)!!/2^{2p} \quad (p = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.4)$$

Os estados comprimidos são de grande interesse tecnológico por diminuir o ruído em uma das quadraturas. Flutuações do vácuo é um ruído de fundo de natureza quântica, isto é, não é devido a imperfeições dos aparelhos de medida. A utilização de luz comprimida pode aumentar a precisão de uma medida quântica aumentando a razão sinal-ruído [101, 102], com possível aplicação em comunicação quântica [103]. As propostas teóricas para geração de estados comprimidos incluem átomos de dois níveis [30, 104] e de três níveis [105, 106] interagindo com um campo de cavidade em um estado coerente. Experimentalmente, a geração de estados comprimidos foi observada incidindo um laser em um ensemble de átomos de *Ca* aprisionados em uma cavidade [107] e em átomos de *Na* interagindo com um campo de cavidade [108].

Previsto pelo modelo de Jaynes-Cummings [46], colapsos e ressurgimentos, é um fenômeno típico de sistemas envolvendo átomos interagindo com um campo de cavidade no estado coerente [109, 110]. Colapsos e ressurgimentos foram analisados em sistemas com um único íon aprisionado em uma cavidade nas refs. [43, 44]. O teletransporte de estados coerentes foi proposto teoricamente como teletransporte de variáveis contínuas de dimensão infinita [111] e posteriormente realizado experimentalmente [112]. Outras propostas de sistemas envolvendo estados coerentes na cavidade incluem um átomo de 3 níveis com uma interação não linear [113], um átomo de 2 níveis interagindo com um campo de cavidade no estado coerente e com um campo clássico externo [114], dois átomos de dois níveis com interação dipolo-dipolo interagindo com um campo de cavidade no estado coerente [115] e átomos atravessando 4 cavidades com um campo no estado coerente para gerar estados do tipo “cluster” [116].

Neste capítulo, consideramos o sistema de três íons aprisionados em uma única armadilha dentro de uma cavidade com o campo no estado coerente. Preparando o sistema com os três íons no estado fundamental e também com os três íons no estado excitado, obtemos, na seção (6.2), a função de onda no tempo t . Calculamos numericamente a variação temporal das variâncias ΔX_1 e ΔX_2 e das probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 . Observamos o aparecimento de colapsos e ressurgimentos. Destacamos algumas condições para que se possa obter um estado comprimido do campo. Na seção (6.3), usamos a negatividade global, a negatividade parcial K-way e a entropia linear para analisar a dinâmica do emaranhamento. Calculamos uma expressão para o operador densidade reduzido do

campo e discutimos em quais situações o campo é emaranhado com o sistema atômico.

6.2 Evolução temporal do estado

O sistema de três íons aprisionados em uma cavidade foi estudado no capítulo (4) considerando o campo da cavidade em um estado de Fock. Neste capítulo, vamos considerar o campo da cavidade preparado em um estado coerente. O Hamiltoniano livre \hat{H}_0 é dado pela equação (4.2) e assumindo as mesmas aproximações utilizadas no capítulo (4), o Hamiltoniano de interação na representação de interação \hat{H}_I é dado pela equação (4.4). O operador de evolução temporal é dado por $e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}}$. Na base produto, um estado do sistema composto é representado por $|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, m, \alpha\rangle$, onde $\sigma_z^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) é autovalor do operador $\hat{\sigma}_z^{(i)}$ e representa o estado interno do íon i , m é o número de fônons do estado vibracional do centro de massa e $|\alpha\rangle$ é o estado coerente do campo de cavidade. Dado um estado inicial na base produto, o estado evoluído é escrito da forma

$$\Psi(t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\frac{\hat{H}_I t}{\hbar}} |\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, m, n\rangle, \quad (6.5)$$

onde usamos a equação (6.1).

Seguindo o desenvolvimento descrito no capítulo (4), usamos as matrizes T e U para escrever o estado inicial em termos dos autoestados de \hat{H}_I . Atuamos o operador de evolução temporal sobre o estado inicial e em seguida fazemos a transformação inversa para retornar a base produto. Fazendo esses passos chegamos à expressão

$$\Psi_j(t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_{i,k=1}^8 \sum_{l,p=1}^8 T_{ji}^\dagger U_{ik}^\dagger e^{-i\frac{\lambda_k t}{\hbar}} U_{kl} T_{lp} |\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, m, n\rangle_p. \quad (6.6)$$

Calculamos o estado $\Psi(t)$ para estados iniciais com os 3 íons no estado excitado e com os 3 íons no estado fundamental.

6.2.1 Estado inicial $\Phi_{m-2,\alpha}(0) = |1, 1, 1, m-2, \alpha\rangle$

Para calcular a evolução temporal do sistema, consideramos o estado inicial preparado com os três íons no estado excitado. O estado de vibração do centro de massa é preparado com $m-2$ quanta e o campo da cavidade é preparado em um estado coerente com um número médio de fótons igual a $|\alpha|^2$. Obtemos o estado do sistema no tempo t como

$$\begin{aligned}
\Phi_{m-2,\alpha}(t) &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{(n-2)!}} [G_0(m, n, t)|-1, -1, -1, m+1, n+1\rangle \\
&\quad + G_1(m, n, t)|W_1, m, n\rangle + G_2(m, n, t)|W_2, m-1, n-1\rangle \\
&\quad + G_3(m, n, t)|1, 1, 1, m-2, n-2\rangle], \tag{6.7}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
G_0(m, n, t) &= \frac{i}{2\beta} \left(-\sqrt{(\beta - \mu_1)(\beta - \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta + \mu_1)(\beta + \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
G_1(m, n, t) &= \frac{+\sqrt{\beta^2 - \mu_1^2}}{2\beta} \left(\cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) - \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
G_2(m, n, t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_1)(\beta + \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta + \mu_1)(\beta - \mu_2)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
&\text{e} \\
G_3(m, n, t) &= \left(\frac{(\beta - \mu_1)}{2\beta} \cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) + \frac{(\beta + \mu_1)}{2\beta} \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \tag{6.8}
\end{aligned}$$

satisfazem a relação $|G_0(m, n, t)|^2 + |G_1(m, n, t)|^2 + |G_2(m, n, t)|^2 + |G_3(m, n, t)|^2 = 1$ e $E = m\hbar\omega_0 + \hbar\omega_c(n - m - 1/2)$. As variáveis β , μ , μ_1 e μ_2 , que dependem de m e n , são definidas no capítulo (4).

Calculamos o número médio de fônons e de fótons com o estado inicial preparado com os 3 íons no estado excitado e obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= m - 2 + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(3|G_0(m, n+2, t)|^2 + 2|G_1(m, n+2, t)|^2 \right. \\
&\quad \left. + |G_2(m, n+2, t)|^2 \right), \\
\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle &= |\alpha|^2 + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(3|G_0(m, n+2, t)|^2 + 2|G_1(m, n+2, t)|^2 \right. \\
&\quad \left. + |G_2(m, n+2, t)|^2 \right). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Portanto, a variação do número médio de fônons com o tempo será similar ao número médio de fótons. Plotamos na figura (6.1) o número médio de fótons em função da variável τ

para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$. No cálculo numérico, somamos o número de fótons até a função convergir. Para $|\alpha|^2 = 3$, somamos até $n = 15$ e para $|\alpha|^2 = 25$, somamos até $n = 50$. Quando $|\alpha|^2 = 3$, o número médio de fótons varia de 3 para 5 logo nos primeiros instantes de interação, devido ao decaimento de dois íons. Já para $|\alpha|^2 = 25$, o número médio de fótons varia de 25 para 27,5 nos primeiros instantes de interação, mostrando que aumentando o valor de $|\alpha|^2$ aumentamos a probabilidade de que mais íons decaiam assim que a interação é inicializada. Observamos um colapso entre $\tau = 2 - 5$ para $|\alpha|^2 = 3$ e para $\tau > 5$ o número médio de fótons oscila aleatoriamente, enquanto que para $|\alpha|^2 = 25$ observamos um colapso entre $\tau = 2 - 10$ e um ressurgimento entre $\tau = 18 - 32$ com oscilações entre $\langle n \rangle = 25,6 - 26,6$.

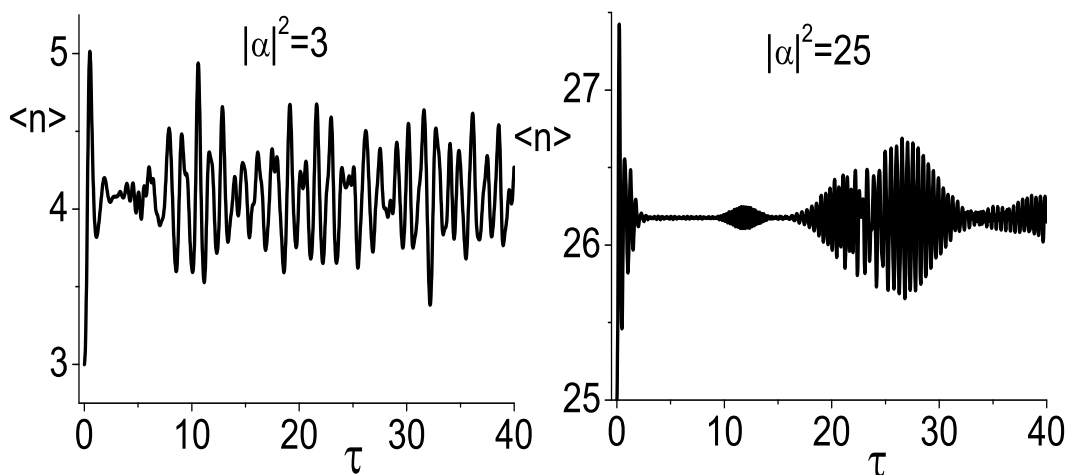


Figura 6.1: Número médio de fótons como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$.

Na figura (6.2) plotamos a variância ΔX_1 como função da variável $\tau = g\eta t$, para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$. O campo é preparado com um número médio inicial de fótons igual a $|\alpha|^2 = 3, 9, 16$ e 25 , e será comprimido com relação a quadratura X_1 se o valor de ΔX_1 for menor do que $0,5$. Observamos que há uma pequena região de compressão para $|\alpha|^2 = 9, 16$ e 25 próximo de $\tau \approx 0,5$ e depois o campo não volta mais a ser comprimido. Para $|\alpha|^2 = 9$ encontramos $\Delta X_1 = 0,43$ em $\tau = 0,5$. Conforme se aumenta o número médio inicial de fótons aumenta a oscilação em torno de $\Delta X_1 = 0,5$. Com relação a X_2

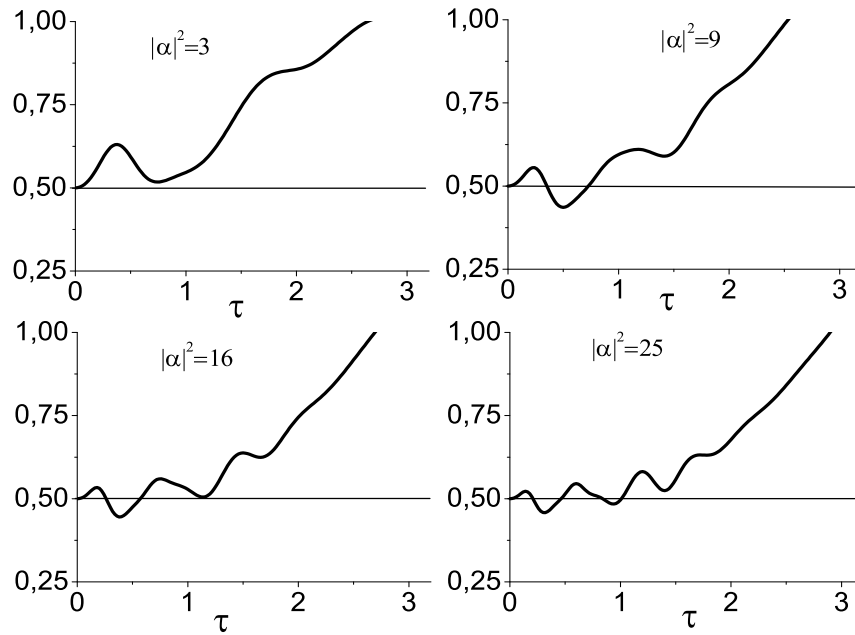


Figura 6.2: Variância ΔX_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(t)$.

não encontramos estado comprimido.

6.2.2 Estado inicial $\Psi_{m+1,\alpha}(0) = |-1, -1, -1, m+1, \alpha\rangle$

Consideramos o estado inicial com os três íons preparados no estado fundamental, o estado vibracional do centro de massa com $m+1$ quanta e o campo no estado coerente. Seguindo os passos utilizados para se chegar às equações (6.5) e (6.6), obtemos o estado do sistema no tempo t como

$$\begin{aligned}
\Psi_{m+1,\alpha}(t) = & e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} F_0(m, n, t) |-1, -1, -1, m+1, n+1\rangle \\
& + e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} F_1(m, n, t) |W_1, m, n\rangle \\
& + e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} F_2(m, n, t) |W_2, m-1, n-1\rangle \\
& + e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} F_3(m, n, t) |1, 1, 1, m-2, n-2\rangle, \quad (6.10)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
F_0(m, n, t) &= \left(\frac{(\beta - \mu_2)}{2\beta} \cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) + \frac{(\beta + \mu_2)}{2\beta} \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
F_1(m, n, t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
F_2(m, n, t) &= +\frac{\sqrt{\beta^2 - \mu_2^2}}{2\beta} \left(\cos \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) - \cos \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \\
&\text{e} \\
F_3(m, n, t) &= \frac{-i}{2\beta} \left(\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin \left(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin \left(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t} \right) \right) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \tag{6.11}
\end{aligned}$$

satisfazem a relação $|F_0(m, n, t)|^2 + |F_1(m, n, t)|^2 + |F_2(m, n, t)|^2 + |F_3(m, n, t)|^2 = 1$.

O número médio de fônons e fótons, dado a função de onda (6.10), é dado por

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= m + 1 - |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} |F_1(m, 0, t)|^2 - \frac{|\alpha|^4}{2} e^{-|\alpha|^2} \left(|F_1(m, 1, t)|^2 + 2|F_2(m, 1, t)|^2 \right) \\
&\quad - e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(|F_1(m, n-1, t)|^2 + 2|F_2(m, n-1, t)|^2 + 3|F_3(m, n-1, t)|^2 \right), \\
\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle &= |\alpha|^2 - |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} |F_1(m, 0, t)|^2 - \frac{|\alpha|^4}{2} e^{-|\alpha|^2} \left(|F_1(m, 1, t)|^2 + 2|F_2(m, 1, t)|^2 \right) \\
&\quad - e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \left(|F_1(m, n-1, t)|^2 + 2|F_2(m, n-1, t)|^2 + 3|F_3(m, n-1, t)|^2 \right). \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Caso (i) $m = 0$ - estado do centro de massa preparado com um fônon

Plotamos na figura (6.3) o número médio de fótons em função da variável τ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$. Quando $|\alpha|^2 = 3$, o número médio de fótons diminui de 3 para um valor próximo de 2,2 logo nos primeiros instantes de interação, enquanto que para $|\alpha|^2 = 25$, o número médio de fótons diminui de 25 para próximo de 24, mostrando que aumentando o valor de $|\alpha|^2$ aumentamos a probabilidade de que mais íons sejam excitados assim que a interação é inicializada. A variação do número médio de fótons é pequena, o que representa poucos fótons do campo sendo trocados com os íons. Observamos um colapso em $\tau \approx 3$ para $|\alpha|^2 = 3$ e para $\tau > 4$ o número médio de fótons oscila aleatoriamente, enquanto que para $|\alpha|^2 = 25$ observamos um colapso entre $\tau = 2 - 12$ e um ressurgimento em seguida.

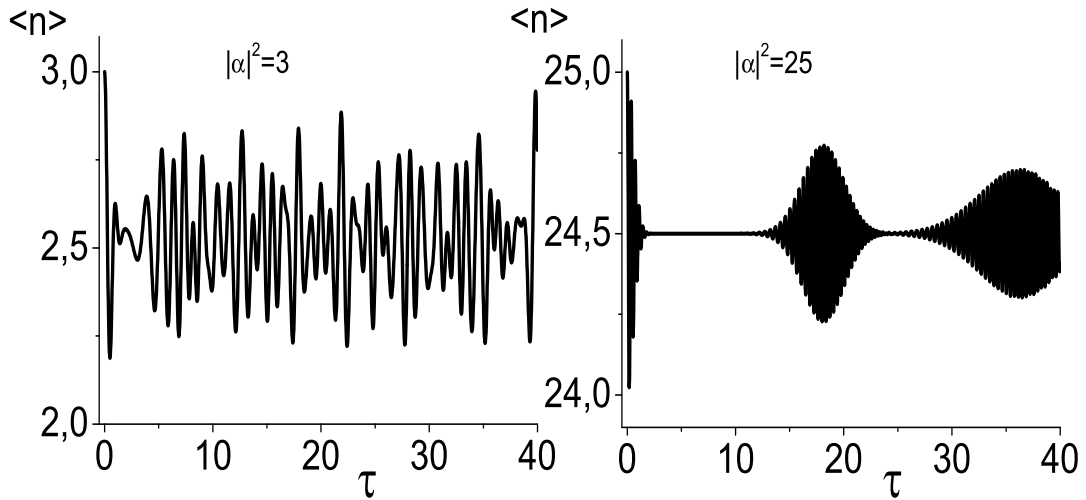


Figura 6.3: Número médio de fótons como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$.

Com o sistema preparado no estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, plotamos na figura (6.4) a variância ΔX_1 para $|\alpha|^2 = 3, 9, 16$ e 25 conforme se vê na figura. Notamos que para $|\alpha|^2 = 16$ e 25 aparece uma região de compressão bem visível próximo de $\tau \approx 12$ e 18 , respectivamente. Para $|\alpha|^2 = 3$ e 9 não há compressão do campo. A compressão máxima acontece em $\tau \approx 15,7$ para $|\alpha|^2 = 25$ com $\Delta X_1 = 0,36$.

Quando $|\alpha|^2 < 1$ o padrão da curva para a variância ΔX_1 muda totalmente como vemos na figura (6.5) para $|\alpha|^2 = 0, 1$, onde plotamos também a variância ΔX_2 . Vemos neste gráfico que as variâncias ΔX_1 e ΔX_2 oscilam simetricamente com relação a linha horizontal que separa a região de campo comprimido da região de campo não comprimido. O campo pode ser comprimido com relação a X_2 somente para $|\alpha|^2 < 1$ e com os três íons no estado fundamental. Os pontos de máxima compressão acontecem para X_1 com $\Delta X_1 \approx 0,43$. A ref. [30] apresenta resultados semelhantes onde um único átomo de dois níveis é inicializado no estado excitado e atravessa uma cavidade com um campo em um estado coerente.

Para analisar o comportamento dos íons quando a cavidade é preparada com um campo no estado coerente, calculamos as probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 que correspondem às probabilidades de encontrar 0, 1, 2 e 3 íons no estado excitado, respectivamente. Com

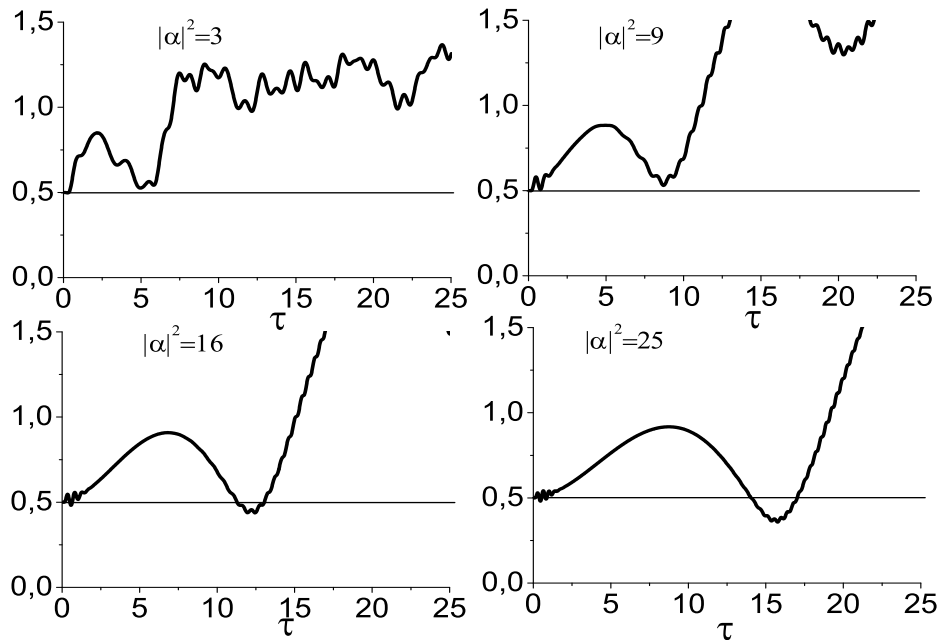


Figura 6.4: Variância ΔX_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$.

o sistema inicializado no estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, o estado do sistema oscila entre estados internos $|-1, -1, -1\rangle$ e $|W_1\rangle$ com probabilidades P_0 e P_1 , respectivamente. Na figura (6.6) plotamos a probabilidade P_1 em função da variável τ para alguns valores diferentes de $|\alpha|^2 = 1, 4, 9$ e 25 . O comportamento da probabilidade P_0 é simétrico a P_1 , exceto para valores pequenos de α , em que os valores de P_1 tendem à diminuir e os valores de P_0 à aumentarem. No limite de α tendendo a zero observamos que $P_0 \rightarrow 1$ e $P_1 \rightarrow 0$. Na figura (6.6a) em que o número médio de fótons inicial é igual a 1, notamos que na média P_1 está abaixo de 0,5. Conforme o valor de α vai aumentando um padrão para a curva de probabilidade vai se estabelecendo. Para $|\alpha|^2 = 4$ (figura (6.6b)) notamos o surgimento de um colapso entre $\tau = 1,5 - 4,5$ e em seguida um ressurgimento das oscilações que logo se torna oscilações aleatórias. Conforme aumentamos α notamos que os colapsos ficam mais definidos e que após o ressurgimento das oscilações acontece um segundo colapso.

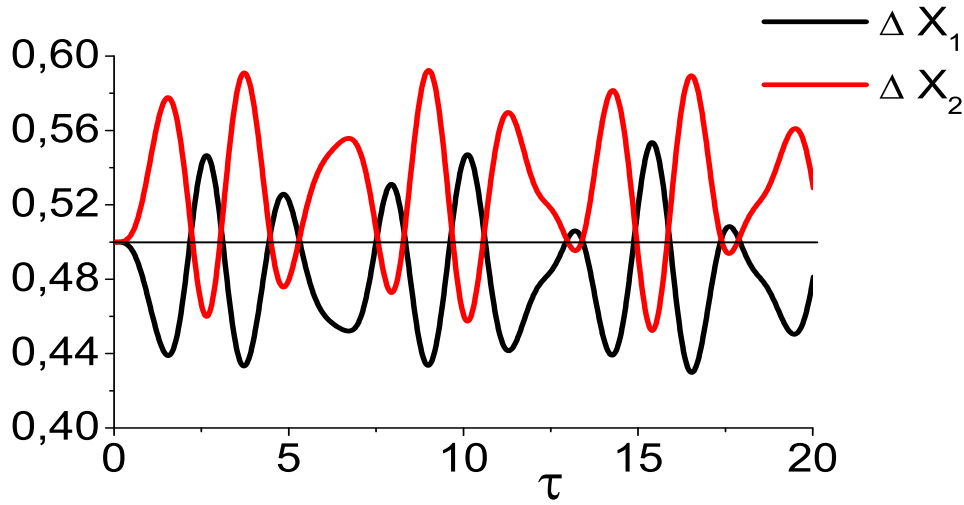


Figura 6.5: Variância das quadraturas X_1 e X_2 como função da variável $\tau = g\eta t$ para estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, com $|\alpha|^2 = 0, 1$.

Caso (ii) $m = 1$ - estado do centro de massa preparado com dois fônons

Para o estado inicial com 2 fônons $\Psi_{2,\alpha}(0)$ a função de onda dada pela equação (6.10) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \Psi_{2,\alpha}(t) = & e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{(3(n+1) \cos(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) + 2n) e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}{(5n+3)} \\
 & \times |-1, -1, -1, 2, n+1\rangle \\
 & -ie^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \sqrt{\frac{3(n+1)}{(5n+3)}} \sin(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} |W_1, 1, n\rangle \\
 & +e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \sqrt{\frac{6n(n+1)}{(5n+3)}} (\cos(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) - 1) e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \\
 & \times |W_2, 0, n-1\rangle. \tag{6.13}
 \end{aligned}$$

Para o estado inicial preparado com os três íons no estado fundamental e o estado vibracional com dois fônons, os estados internos possíveis de serem populados são $|-1, -1, -1\rangle$, $|W_1\rangle$ e $|W_2\rangle$ com probabilidades P_0 , P_1 e P_2 , respectivamente. O fenômeno de colapsos e ressurgimentos acontecem somente para $|\alpha|^2 \approx 9$ ou maior.

Na figura (6.7), plotamos as variâncias ΔX_1 e ΔX_2 e as probabilidades P_1 e P_2 como funções da variável τ , para $|\alpha|^2 = 25$. Vemos que ΔX_1 tem os dois primeiros mínimos aproximadamente em torno de $\tau \cong 20$ e 40 , enquanto que ΔX_2 tem seus mínimos em

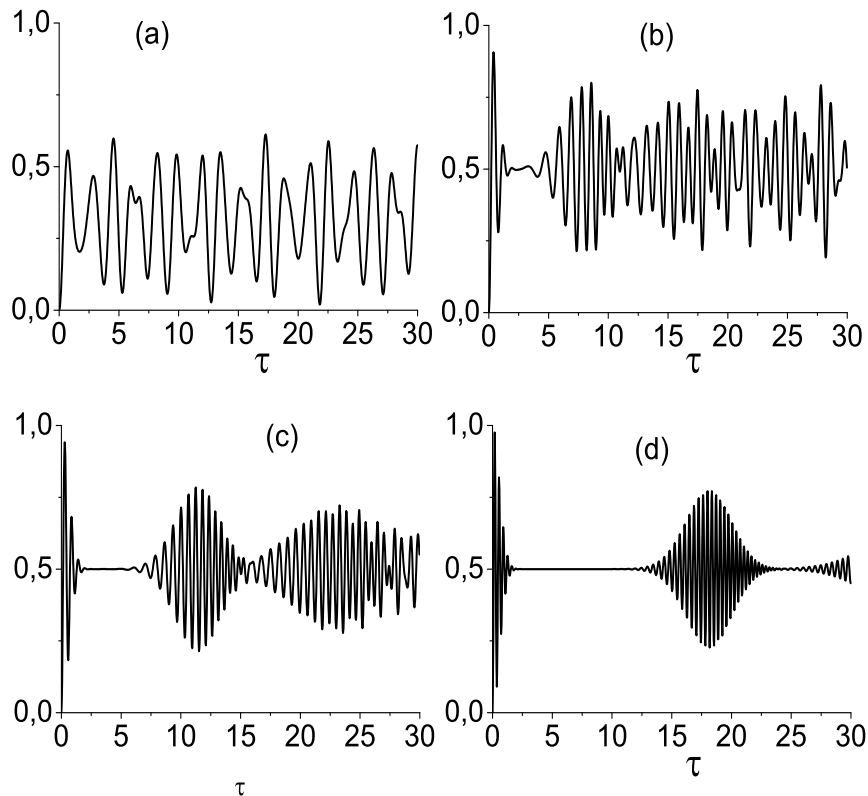


Figura 6.6: Probabilidade P_1 como função da variável $\tau = g\eta t$ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$ com um número médio inicial de fótons igual a $|\alpha|^2 = 1$ em a), $|\alpha|^2 = 4$ em b), $|\alpha|^2 = 9$ em c) e $|\alpha|^2 = 25$ em d).

torno de $\tau \cong 10, 20, 30$ e 40 . A cada mínimo de ΔX_2 corresponde, aproximadamente, a um ressurgimento de P_1 e P_2 . A cada intervalo aproximado de $\tau \cong 10$ corresponde a um ressurgimento. A envoltória dos ressurgimentos de P_2 tem aproximadamente o mesmo padrão para P_0 .

6.3 Emaranhamento do sistema

O operador densidade de um estado puro pode ser escrito como $\hat{\rho}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Para os três íons no estado excitado, o estado do sistema é dado pela equação (6.7) e para os três íons no estado fundamental, o estado é dado pela equação (6.10). É conveniente definir uma base lógica para representar o estado dos íons, constituído de estados internos e estados vibracionais do centro de massa, dado pelo conjunto de estados $\{|i_A, i_B, i_C, i_D\rangle\}$, onde os índices A, B e C representam estados internos e D os estados vibracionais do centro de massa. Para a análise do emaranhamento, calculamos o operador densidade reduzido

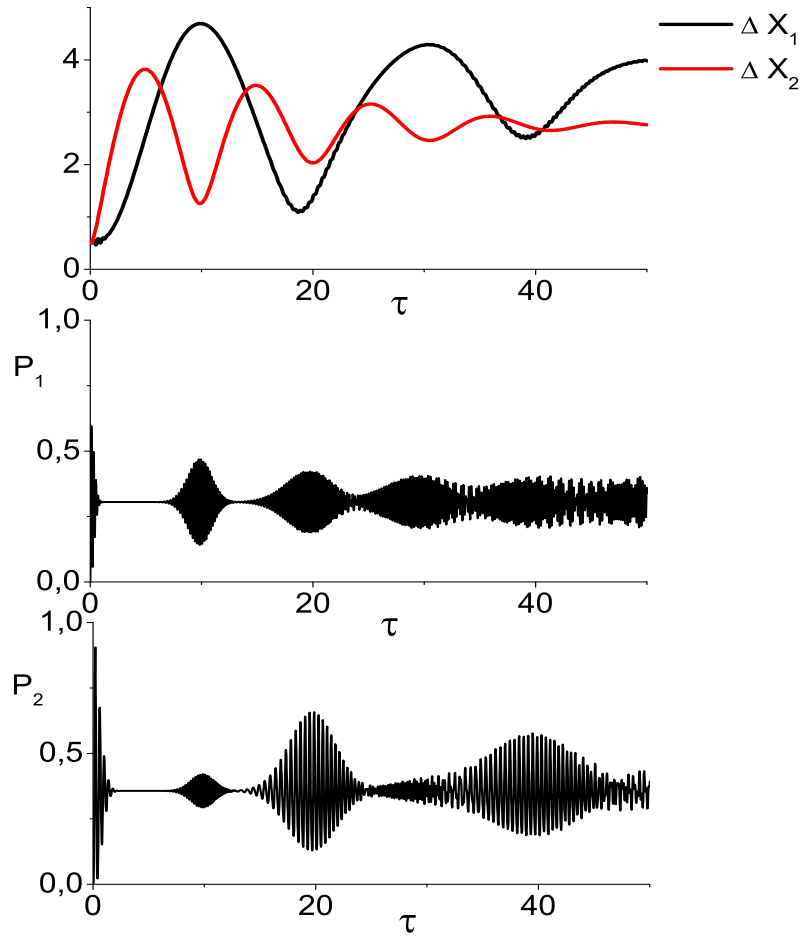


Figura 6.7: Variâncias ΔX_1 , ΔX_2 e probabilidades P_1 e P_2 como funções da variável $\tau = g\eta t$. O estado inicial é preparado com os três íons no estado fundamental, dois fônons de vibração e $|\alpha|^2 = 25$.

dos íons $\hat{\rho}^{ABCD}(t)$ e o operador densidade reduzido do campo $\hat{\rho}^F(t)$. Quando reduzimos o operador densidade a um subsistema específico, o resultado é um estado misto. Os valores lógicos $i_A = 0$ e $i_A = 1$ representam o estado fundamental e o estado excitado do íon A , respectivamente. Os valores lógicos de i_B e i_C são análogos à i_A . Para os estados vibracionais, os valores lógicos são dados por $|i_D\rangle = |m + 1 - i_D\rangle$, onde $i_D = 0, 1, 2, 3$.

O operador reduzido do subsistema $ABCD$ é obtido calculando $tr_F(\hat{\rho}(t))$, onde F representa os estados do campo, ou seja,

$$\hat{\rho}^{ABCD}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle. \quad (6.14)$$

Com os três íons inicializados no estado fundamental, $m + 1$ quanta de vibração e número

médios de fótons $|\alpha|^2$, o operador densidade reduzido dos estados internos e estado do centro de massa é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^{ABCD}(t) = & e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |f_0(n)|^2 |0000\rangle\langle 0000| \right. \\
& + \frac{|\alpha|^{2n} \alpha^*}{\sqrt{n!(n+1)!}} f_0(n) f_1^*(n+1) |0000\rangle (\langle 0011| + \langle 0101| + \langle 1001|) + c.h. \\
& + \frac{|\alpha|^{2n} \alpha^{*2}}{\sqrt{n!(n+2)!}} f_0(n) f_2^*(n+2) |0000\rangle (\langle 0112| + \langle 1012| + \langle 1102|) + c.h. \\
& + \frac{|\alpha|^{2n} \alpha^{*3}}{\sqrt{n!(n+3)!}} f_0(n) f_3^*(n+3) |0000\rangle \langle 1113| + c.h. \\
& + \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{(n+1)!} |f_1(n+1)|^2 (|0011\rangle + |0101\rangle + |1001\rangle) (\langle 0011| + \langle 0101| + \langle 1001|) \\
& + \frac{|\alpha|^{2(n+1)} \alpha^*}{\sqrt{(n+1)!(n+2)!}} f_1(n+1) f_2^*(n+2) (|0011\rangle + |0101\rangle + |1001\rangle) \\
& \quad \times (\langle 0112| + \langle 1012| + \langle 1102|) + c.h. \\
& + \frac{|\alpha|^{2(n+1)} \alpha^{*2}}{\sqrt{(n+1)!(n+3)!}} f_1(n+1) f_3^*(n+3) (|0011\rangle + |0101\rangle + |1001\rangle) \langle 1113| + c.h. \\
& + \frac{|\alpha|^{2(n+2)}}{(n+2)!} |f_2(n+2)|^2 (|0112\rangle + |1012\rangle + |1102\rangle) (\langle 0112| + \langle 1012| + \langle 1102|) \\
& + \frac{|\alpha|^{2(n+2)} \alpha^*}{\sqrt{(n+2)!(n+3)!}} f_2(n+2) f_3^*(n+3) (|0112\rangle + |1012\rangle + |1102\rangle) \langle 1113| + c.h. \\
& \left. + \frac{|\alpha|^{2(n+3)}}{(n+3)!} |f_3(n+3)|^2 |1113\rangle\langle 1113| \right], \tag{6.15}
\end{aligned}$$

em que definimos $f_0(n) = F_0(m-1, n-1, \tau)$, $f_1(n) = F_1(m-1, n-1, \tau)/\sqrt{3}$, $f_2(n) = F_2(m-1, n-1, \tau)/\sqrt{3}$ e $f_3(n) = F_3(m-1, n-1, \tau)$, onde $F_i(m-1, n-1, \tau)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) são dados pela equação (6.11). Os coeficientes satisfazem a condição de normalização $|f_0(n)|^2 + 3|f_1(n)|^2 + 3|f_2(n)|^2 + |f_3(n)|^2 = 1$.

O operador densidade reduzido do subsistema A é obtido calculando $tr_{BCD}(\hat{\rho}^{ABCD}(t))$, de forma que para o estado dado pela equação (6.15), obtemos o seguinte operador

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^A(t) = & e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |f_0(n)|^2 + 2 \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{(n+1)!} |f_1(n+1)|^2 \right. \\
& \left. + \frac{|\alpha|^{2(n+2)}}{(n+2)!} |f_2(n+2)|^2 \right] |0\rangle\langle 0| + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{(n+1)!} |f_1(n+1)|^2 \right. \\
& \left. + 2 \frac{|\alpha|^{2(n+2)}}{(n+2)!} |f_2(n+2)|^2 + \frac{|\alpha|^{2(n+3)}}{(n+3)!} |f_3(n+3)|^2 \right] |1\rangle\langle 1|. \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Calculamos também o operador densidade reduzido do campo, definido como

$$\hat{\rho}^F(t) = tr_{ABCD}(\hat{\rho}). \tag{6.17}$$

Para o estado do sistema dado pela equação (6.10), o operador densidade reduzido do campo pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^F(t) = & e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,p=0}^{\infty} \alpha^n \alpha^{*p} \left[\frac{f_0(n) f_0^*(p)}{\sqrt{n! p!}} + 3 \frac{|\alpha|^2 f_1(n+1) f_1^*(p+1)}{\sqrt{(n+1)! (p+1)!}} + \right. \\
& \left. 3 \frac{|\alpha|^4 f_2(n+2) f_2^*(p+2)}{\sqrt{(n+2)! (p+2)!}} + \frac{|\alpha|^6 f_3(n+3) f_3^*(p+3)}{\sqrt{(n+3)! (p+3)!}} \right] |n\rangle\langle p|. \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Os operadores $\hat{\rho}^A$ e $\hat{\rho}^F$ são usados na seção (6.3.2) para o cálculo da entropia linear.

6.3.1 Negatividade global e negatividade parcial K-way

Com o operador densidade $\hat{\rho}^{ABCD}(t)$ podemos calcular a negatividade global definida pela equação (3.19). Na figura (6.8) plotamos a negatividade global para o sistema preparado com os três íons no estado fundamental com 1 fônon, para as decomposições A + BCD e ABC + D. Neste caso, só há correlações quânticas de dois partidos e portanto $N_G^{A,D} = E_2^{A,D}$. Os picos de máximos, correspondem aos colapsos da probabilidade P_1 e os mínimos aos ressurgimentos, como podemos ver na figura (6.6). Próximo de $\tau = 18$ e $\tau = 36$ o estado vibracional é quase separável, pois $N_G^D \approx 0$. Em $\tau \approx 9$ temos $N_G^D \approx 1$.

Considerando o estado inicial com o centro de massa vibrando com 2 fônons, os três íons no estado fundamental e $|\alpha|^2 = 25$, calculamos a negatividade global e negatividade parcial K-way e plotamos na figura (6.9). Vemos que na média, N_G^A oscila em torno de $N_G^A = 0,75$, enquanto que N_G^D fica na maior parte do tempo abaixo de 0,70. A negatividade

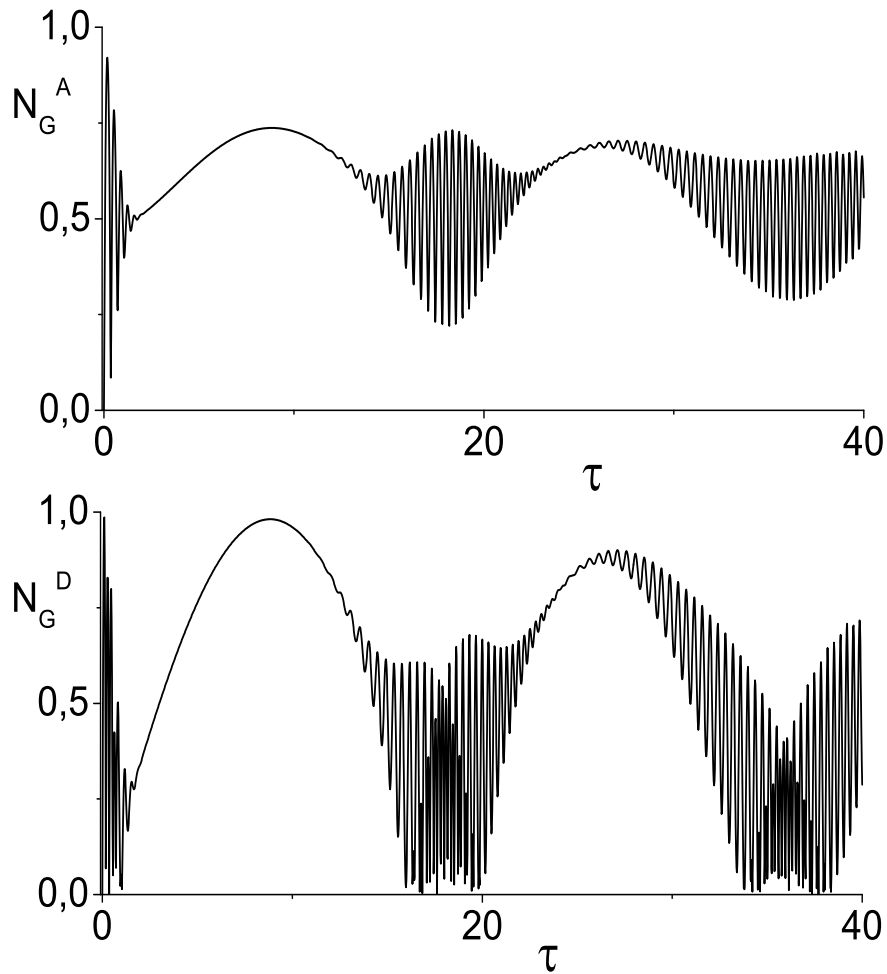


Figura 6.8: Negatividade global em função da variável τ para o estado inicial $\Psi_{1,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$.

parcial 4-way mede correlações quânticas entre os 4 partidos A , B , C e D . Vemos na figura (6.9) que o subsistema D apresenta correlações do tipo $K = 4$, pois $E_4^D > 0$, enquanto que o subsistema A apresenta $E_4^A = 0$ na maior parte do tempo de interação. A negatividade parcial E_4^D indica que há correlações quânticas de quatro partidos, porém E_4^A falha em detectar essas correlações. O subsistema A tem fortes correlações de 2 partidos. Os mínimos de N_G^A e N_G^D coincidem com os ressurgimentos das probabilidades P_1 e P_2 como podemos ver na figura (6.7).

Na figura (6.10), plotamos a negatividade global e a negatividade parcial K -way, para o sistema preparado com os três íons no estado excitado, zero fônons e $|\alpha|^2 = 25$. A negatividade global para o subsistema A é próximo de 1 em $\tau = 0,32$ com $N_G^A = 0,98$.

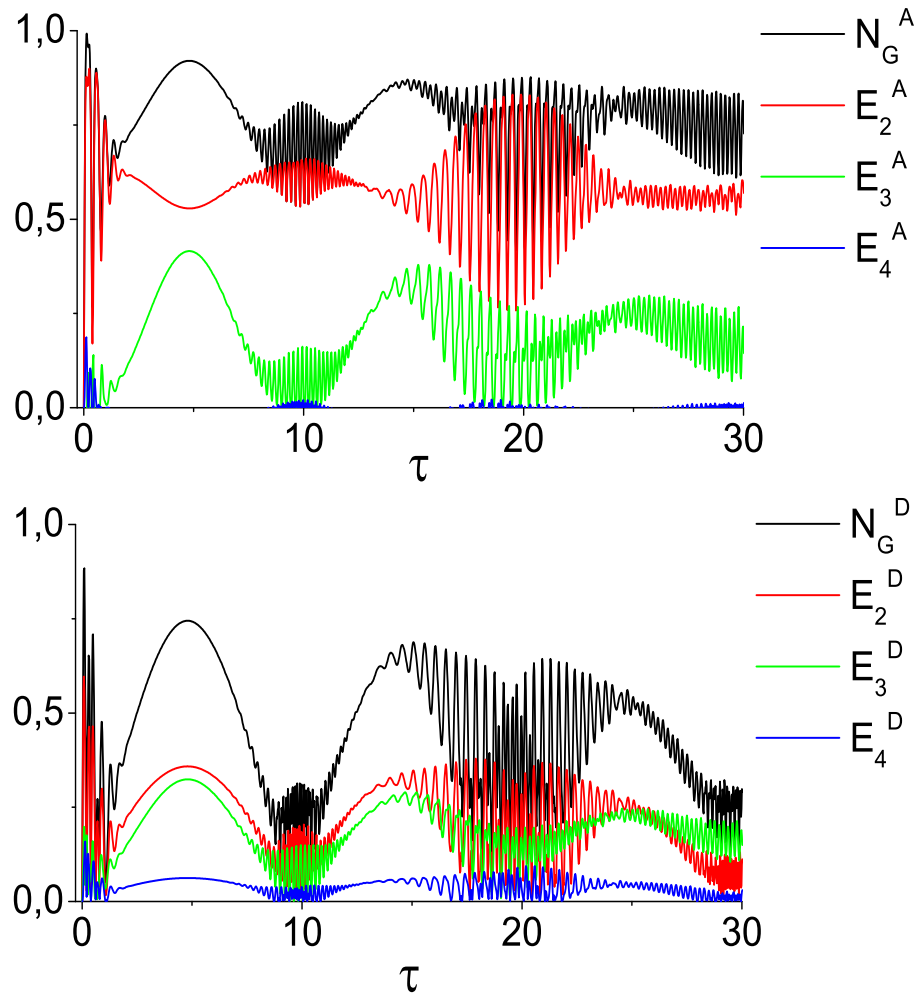


Figura 6.9: Negatividade global e negatividade parcial K-way em função da variável τ para o estado inicial $\Psi_{2,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$.

Os picos de N_G^A são acompanhados de picos de E_4^A . Na figura (6.9), quando os íons são preparados no estado fundamental, as correlações quânticas com $K = 4$ para o subsistema A são pequenas. Já quando os íons são preparados no estado excitado, vemos que as correlações com $K = 4$ para o subsistema A não são desprezíveis.

6.3.2 Entropia linear

Na figura (6.11) plotamos a entropia linear, calculada pela equação (3.34), considerando os três íons preparados no estado fundamental. Na figura (6.11a) o estado vibracional é preparado com um fônon. Vemos que o campo fica próximo de se tornar separável em $\tau \approx 9$. A região onde o campo é comprimido corresponde ao intervalo de $\tau \approx 14-18$, como

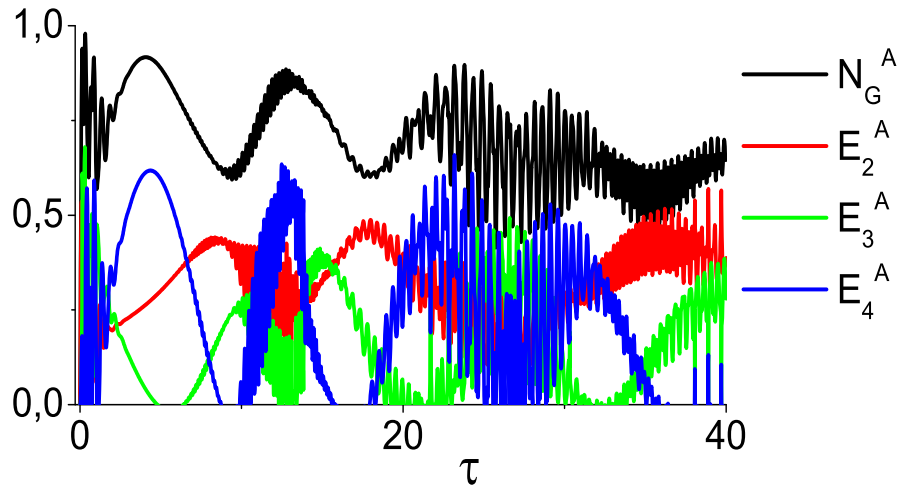


Figura 6.10: Negatividade global e negatividade parcial K-way em função da variável τ para o estado inicial $\Phi_{0,\alpha}(0)$, com $\alpha = 5$.

pode-se ver na figura (6.4) para $|\alpha|^2 = 25$ e corresponde a um estado em que o campo é emaranhado com os estados internos como podemos ver na figura (6.11a), em que S^F tem um pico. Os picos de S^F nas figuras (6.11a) e (6.11b) correspondem a ressurgimentos das probabilidades como podemos comparar com as figuras (6.6) e (6.7). Aumentando o número inicial de fônons, a entropia linear para o subsistema A também aumenta. Com 3 fônons, o subsistema A fica maximamente emaranhado em todo intervalo de interação, sofrendo algumas flutuações.

Comparando a figura (6.11a) com (6.8), vemos que quando o campo tem um mínimo de emaranhamento em $\tau \approx 9$ e $\tau \approx 26$, a negatividade global para o subsistema $ABCD$ mostra um aumento nas correlações quânticas. Um resultado parecido apresentado na ref. [115], mostra a transferência de emaranhamento entre campo e átomos usando dois átomos interagindo com um campo de cavidade. Em outro trabalho [43] pôde-se ver resultados similares, onde um íon é aprisionado em uma cavidade com o campo em um estado de Fock e os modos vibracionais em um estado coerente.

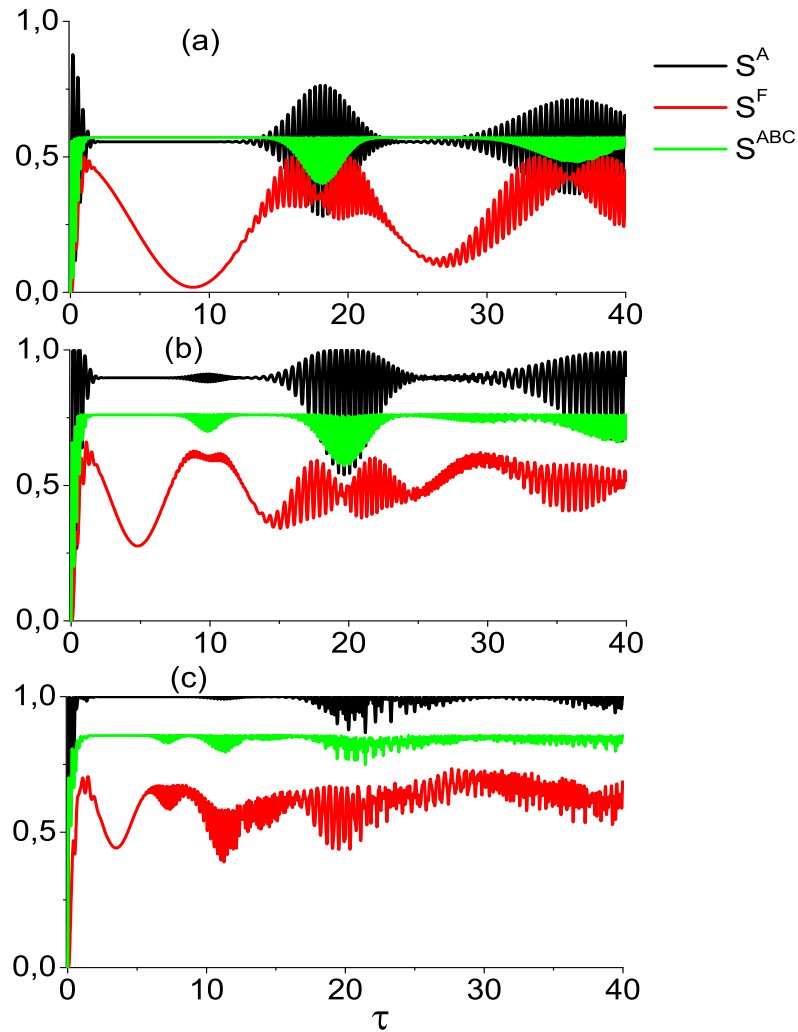


Figura 6.11: Entropia linear em função da variável τ para $\alpha = 5$ e estado inicial a) $\Psi_{1,\alpha}(0)$, b) $\Psi_{2,\alpha}(0)$ e c) $\Psi_{3,\alpha}(0)$.

6.4 Conclusões

Analisamos a dinâmica do sistema considerando estados iniciais com os 3 íons no estado fundamental e também com os 3 íons no estado excitado. Obtivemos expressões analíticas para a função de onda, para o número médio de fótons e para o número médio de fônons. No cálculo numérico da variância ΔX_1 , os resultados mostram que dependendo do estado inicial e do valor de α , o campo pode estar comprimido com relação a X_1 . O campo fica comprimido nos primeiros instantes de interação, tanto para o estado inicial com os três íons no estado fundamental como para o estado inicial com os três íons no estado excitado. Porém, a maior compressão acontece quando os íons são preparados no estado

fundamental, com um fônon e $|\alpha|^2 = 25$ com $\Delta X_1 = 0,36$. Várias regiões de menor compressão com relação a X_1 e a X_2 podem ser encontradas para $\alpha < 1$ quando os três íons são preparados no estado fundamental e para qualquer $m + 1 \geq 1$.

Obtivemos expressões analíticas para o operador densidade reduzido do campo $\hat{\rho}^F$ e dos estados internos e centro de massa $\hat{\rho}^{ABCD}$. Devido à dimensionalidade do campo ser muito grande, calculamos o operador reduzido do subsistema $ABCD$ para calcular a negatividade global. A negatividade global e a entropia linear não podem ser comparadas diretamente, pois a entropia linear do subsistema A ou ABC mede o emaranhamento com o campo também, enquanto que no cálculo da negatividade global não analisamos correlações quânticas com relação ao campo. Com os três íons no estado fundamental com 1 e 2 fônons, aparece uma região em que os estados internos ficam fortemente emaranhados com os modos vibracionais enquanto que a entropia mostra que o emaranhamento com o campo é bem fraco. O contrário também se observa, ou seja, o emaranhamento com campo aumenta, enquanto que o emaranhamento dos estados internos com os modos de vibração diminui. Isso mostra uma oscilação do emaranhamento entre campo e íons.

Capítulo 7

Modelo adiabático de perda de coerência

7.1 Introdução

Qual a fronteira entre a mecânica quântica e a mecânica clássica? A mecânica quântica seria a física dos sistemas microscópicos e a mecânica clássica a física dos sistemas macroscópicos? Experiências com átomos de Rydberg foram realizadas com o propósito de se entender melhor a transição de um estado quântico para um estado clássico [118, 119]. Esses átomos podem ser excitados a um nível de energia bastante alto e, em condições apropriadas, podem apresentar propriedades clássicas. Sistemas quânticos apresentam superposição de estados e a interação com o mundo externo causa perda de coerência e conseqüentemente o colapso da função de onda em um dos estados possíveis. O fato de não observarmos superposição de estados clássicos se deve a uma perda instantânea da coerência a que sistemas macroscópicos estão sujeitos. Não existe aparato experimental com precisão suficiente para se observar o tempo de perda de coerência em sistemas clássicos. Essa linha de pensamento foi principalmente fundamentada por Zurek nas décadas de 80 e 90 [120, 121, 122]. Na seqüência vieram trabalhos teóricos propondo diferentes maneiras de se medir experimentalmente a perda de coerência [123, 124].

A primeira medida experimental do processo de perda de coerência acompanhada em tempo real foi realizada em 1996 fazendo átomos de dois níveis atravessar uma cavidade previamente preparada com um campo em uma superposição quântica [125]. A metodologia empregada foi bem próxima da proposta teórica em [124]. Outra medida experimental mais recente do processo de perda de coerência foi realizada no trabalho [126].

A maioria dos trabalhos teóricos que levam em conta a interação do sistema quântico com o ambiente, usam a equação mestra para obter o operador densidade reduzido do sistema [127, 128, 129]. Entretanto, outras formas de tratar a interação com o ambiente também são possíveis [130, 131, 132]. O ambiente, ou banho térmico, exerce forças aleatórias e não correlacionadas sobre o sistema quântico principal. Tal ambiente pode ser modelado como um sistema de osciladores bosônicos que não interagem entre si [133, 134]. Mozyrsky e Privman [130] modelaram o ambiente como um sistema de osciladores bosônicos, que trocam energia com o sistema quântico principal de uma forma particular, caracterizando uma perda de coerência adiabática. Inicialmente, o estado do sistema e do ambiente são considerados separáveis. Após o início da interação, sistema e ambiente se tornam emaranhados. Uma expressão analítica para o operador densidade reduzido do sistema é obtido calculando o traço sobre os graus de liberdade do ambiente. Estados coerentes são usados para avaliar o traço. Os efeitos da perda de coerência devido a flutuações do campo magnético e da frequência do laser podem ser tratados pelo modelo de Mozyrsky e Privman.

As fontes de perda de coerência em um sistema com íons aprisionados em uma cavidade são: emissão espontânea, perda de fótons na cavidade e oscilações indesejadas na fonte do campo. Em um experimento envolvendo o aprisionamento de um íon de $^{40}\text{Ca}^+$ observou-se um tempo de coerência dos estados internos da ordem de 1 *ms* e do estado vibracional da ordem de 100 *ms* [135]. Nesse experimento, flutuações do campo magnético e na frequência do laser foram as principais fontes de perda de coerência.

A emissão espontânea também causa perda de coerência. O íon $^{40}\text{Ca}^+$, tipicamente usado como um sistema de dois níveis, possui o nível metaestável $D_{5/2}$ cujo tempo de decaimento é da ordem de $\approx 1s$, ou mais precisamente 1168 *ms* [136]. Porém, é possível aumentar ou diminuir o tempo de vida do estado excitado de um átomo, acoplando este a um campo de cavidade. A taxa de emissão espontânea é maior com o íon posicionado em um nó da onda estacionária do que no antinó [137, 138]. Não vamos considerar a perda de coerência devido à emissão espontânea, pois há estados eletrônicos com tempo de vida relativamente longo comparado com a escala de tempo na qual manipulações com íons aprisionados são realizadas. Também não consideramos a perda de fótons do campo na cavidade, pois existem cavidades com alto fator de qualidade.

Não existe uma medida única para quantificar a perda de coerência. O processo de perda de coerência leva o sistema, que geralmente é inicializado em um estado puro, para um estado misto. Nestes casos o sistema não pode mais ser descrito por uma função de onda, mas deve ser representado por um operador densidade. O processo de perda de coerência faz com que os elementos fora da diagonal atinjam um valor limite. Trabalhos teóricos [139, 140, 141] sugerem formas diferentes de se medir a perda de coerência. Na ref. [139] se faz uma breve discussão das diferentes formas de se quantificar a perda de coerência como por exemplo: escala de tempo de relaxação, entropia linear, fidelidade e desvio da norma.

O sistema de três íons aprisionados em uma cavidade foi tratado como um sistema fechado no capítulo (4) e será tratado neste capítulo de forma mais realística considerando a interação com o ambiente. Usamos o modelo de Mozyrsky e Privman [130] para descrever a interação entre o sistema e o ambiente. Primeiramente, fazemos, na seção (7.2), uma descrição física e matemática do modelo. O operador densidade reduzido para um sistema geral é obtido. Na seção (7.3) investigamos os efeitos da interação do ambiente com o sistema de um único íon aprisionado em uma cavidade interagindo com um laser externo. Com o íon preparado no estado fundamental, obtemos uma expressão para o operador densidade reduzido do sistema e o emaranhamento é analisado usando a negatividade global. Os resultados desta seção foram publicados na ref. [93]. Na seção (7.4) consideramos o sistema de três íons aprisionados em uma única armadilha dentro de uma cavidade interagindo com o ambiente. Os resultados da negatividade global e negatividade parcial K-way obtidos no capítulo (4) para um sistema isolado são comparados com o sistema interagindo com o ambiente.

7.2 O modelo

A interação do sistema quântico principal com o ambiente, se dá por um processo adiabático [130]. No modelo adiabático, o ambiente é representado por um sistema de osciladores bosônicos que não interagem entre si, cuja formulação matemática é descrita em [133, 134]. O Hamiltoniano total é escrito como uma soma do Hamiltoniano do sistema \hat{H}_S , o Hamiltoniano do ambiente \hat{H}_B e o Hamiltoniano de interação entre o sistema e o ambiente \hat{V} ,

ou seja,

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_B + \hat{V}. \quad (7.1)$$

O Hamiltoniano do sistema pode ser separado em um Hamiltoniano livre \hat{H}_0 e o Hamiltoniano de interação \hat{H}_1 , tal que

$$\hat{H}_S = \hat{H}_0 + \hat{H}_1. \quad (7.2)$$

Descrevendo o ambiente como um sistema de osciladores harmônicos que não interagem entre si, reescrevemos o Hamiltoniano total como

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_1 \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k), \quad (7.3)$$

em que \hat{B}_k^\dagger (\hat{B}_k) é o operador de criação (aniquilação) de um bôson com modo k e com frequência angular ω_k . A constante de interação do sistema com o modo k dos bósons é dada por χ_k .

Obtemos o Hamiltoniano na representação de interação por meio da transformação

$$\hat{H}' = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (7.4)$$

Como \hat{H}_0 não comuta apenas com \hat{H}_1 , basta transformar \hat{H}_1 para a representação de interação. Portanto, o Hamiltoniano total na representação de interação pode ser escrito como

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \hat{H}_I + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_I \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k), \quad (7.5)$$

sendo $\hat{H}_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_1 e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$. A evolução temporal do sistema quântico principal acoplado ao ambiente, na representação de interação, é governada por

$$\hat{H}_{II} = \hat{H}_I + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_I \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k). \quad (7.6)$$

O estado do ambiente, por definição, é descrito como um estado estacionário, ou seja, que não tem dependência temporal. Cada oscilador k do ambiente é descrito por um operador densidade $\hat{\Theta}_k = Z_k^{-1} e^{-\beta\hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k}$, onde Z_k é a função de partição definida como

$$Z_k = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}}, \quad (7.7)$$

onde $\beta = 1/(K_B T)$, com K_B sendo a constante de Boltzmann e T a temperatura. O operador densidade do ambiente é o produto dos operadores densidade de cada oscilador,

ou seja, $\Pi_k \hat{\Theta}_k$. O estado do sistema quântico principal é representado pelo operador densidade reduzido $\hat{\rho}(t)$. Consideramos que inicialmente o estado produto do sistema e ambiente seja dado da forma $\hat{\rho}(0)\Pi_k \hat{\Theta}_k$, e sua evolução temporal dada por

$$e^{-\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}} \hat{\rho}(0) \prod_k \hat{\Theta}_k e^{\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}}. \quad (7.8)$$

O operador densidade reduzido do sistema no tempo t é obtido calculando o traço sobre os estados do ambiente, ou seja,

$$\hat{\rho}(t) = tr_B \left(e^{-\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}} \hat{\rho}(0) \prod_k \hat{\Theta}_k e^{\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}} \right). \quad (7.9)$$

O conjunto de autoestados $\{|\phi_i\rangle\}$, tal que $\hat{H}_I|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$, forma uma base de dimensão d_S no espaço de Hilbert. Escrevemos o operador identidade como $\hat{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{d_S} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ e introduzimos na equação (7.9) e a reescrevemos como

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,l=1}^{d_S} tr_B \left(e^{-\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \hat{\rho}(0) \prod_k \hat{\Theta}_k |\phi_l\rangle\langle\phi_l| e^{\frac{i\hat{H}_{II}t}{\hbar}} \right). \quad (7.10)$$

Substituindo na equação (7.10) o Hamiltoniano \hat{H}_{II} (equação (7.6)) e usando $\hat{H}_I|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \sum_{j,l=1}^{d_S} \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l)\frac{t}{\hbar}} tr_B \left(e^{-i(\sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_j \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k))\frac{t}{\hbar}} \times \prod_{k'} \hat{\Theta}_{k'} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(\sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_l \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k))\frac{t}{\hbar}} \right) |\phi_j\rangle\langle\phi_l|, \end{aligned} \quad (7.11)$$

sendo $\rho_{jl}(0) = \langle\phi_j|\hat{\rho}(0)|\phi_l\rangle$. Como os operadores de criação e aniquilação de bósons para diferentes modos de vibração comutam entre si, podemos reescrever o argumento dentro do traço como uma única produtória,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \sum_{j,l=1}^{d_S} \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l)\frac{t}{\hbar}} \prod_k tr_B \left(e^{-i(\hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_j (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k))\frac{t}{\hbar}} \times \hat{\Theta}_k \right. \\ &\quad \left. \times e^{i(\hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_l (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k))\frac{t}{\hbar}} \right) |\phi_j\rangle\langle\phi_l|. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Para avaliar o traço sobre os estados do ambiente, usamos estados coerentes. Os detalhes dos cálculos são apresentados no apêndice C. Reescrevemos o operador densidade reduzido do sistema quântico principal obtido na equação (C.22) como

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,l=1}^{d_S} \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l)\frac{t}{\hbar}} e^{-i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)\frac{C(t)}{\hbar^2}} e^{-(\lambda_j - \lambda_l)^2 \frac{\Gamma(t)}{4\hbar^2}} |\phi_j\rangle\langle\phi_l|, \quad (7.13)$$

em que

$$\Gamma(t) = 8 \sum_k \frac{|\chi_k|^2}{\omega_k^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \quad (7.14)$$

e

$$C(t) = \sum_k \frac{|\chi_k|^2}{\omega_k^2} (\sin(\omega_k t) - \omega_k t). \quad (7.15)$$

Como temos um número infinito de osciladores com diferentes frequências, podemos considerar um espectro contínuo de frequências. No limite do contínuo, introduzimos uma densidade espectral de estados $G(\omega)$. Fazemos uma mudança de variável, e a constante de acoplamento com o ambiente passa a variar continuamente com a frequência $|\chi(\omega)|^2$. Motivado por propriedades de um campo de fônons, consideramos uma maior densidade de estados a baixas frequências e menor densidade para altas frequências. Para uma dissipação Ohmica, temos

$$\frac{dk}{d\omega} G(\omega) |\chi(\omega)|^2 = \kappa \omega e^{(-\omega/\omega_{cut})}, \quad (7.16)$$

onde κ é uma constante de proporcionalidade e ω_{cut} é a frequência de corte. No limite do contínuo as equações (7.14) e (7.15) são reescritas como

$$\Gamma(t) = 8\kappa \int d\omega \frac{e^{(-\omega/\omega_{cut})}}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \quad (7.17)$$

e

$$C(t) = \kappa \int d\omega \frac{e^{(-\omega/\omega_{cut})}}{\omega} (\sin(\omega t) - \omega t). \quad (7.18)$$

Todos os parâmetros relacionados às propriedades do ambiente estão contidos nas funções $\Gamma(t)$ e $C(t)$. A intensidade da interação com o ambiente foi parametrizada pela variável κ . Quanto maior κ , maior será o efeito da interação do ambiente sobre o sistema. Para o caso com $\kappa = 0$, vemos que $\Gamma(t) = C(t) = 0$, o que corresponde a um sistema isolado, sem interação com o ambiente. As funções $\Gamma(t)$, $C(t)$ e a constante κ têm dimensão de tempo ao quadrado. Na base $|\phi_i\rangle$, vemos que as funções $\Gamma(t)$ e $C(t)$ não afetam os elementos diagonais de $\hat{\rho}(t)$.

7.3 Perda de coerência de um íon aprisionado dentro de uma cavidade

7.3.1 Evolução temporal do sistema fechado

Consideramos um único íon aprisionado em uma armadilha de Paul, vibrando com frequência ν . O íon de dois níveis tem energia de transição $\hbar\omega_0$ e interage com um único modo de um campo de cavidade com frequência ω_c . Um laser externo, com frequência ω_L , também interage com o íon. O Hamiltoniano livre \hat{H}_0 e o Hamiltoniano de interação \hat{H}_1 são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z, \\ \hat{H}_1 &= \hbar\Omega (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \cos [\eta_L (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \omega_L t] \\ &\quad + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \sin [\eta_c (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)],\end{aligned}\tag{7.19}$$

em que Ω é a frequência de Rabi, g é a intensidade de acoplamento íon-cavidade, η_L é o parâmetro de Lamb-Dicke associado a interação íon-laser e η_c é o parâmetro de Lamb-Dicke associado a interação íon-cavidade. Assumimos um laser em ressonância com a transição elétrica $\omega_L = \omega_0$ e a frequência do campo da cavidade $\omega_c = \omega_0 - \nu$. O Hamiltoniano na representação de interação é obtido pela transformação $e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H}_1 e^{-i\frac{\hat{H}_0 t}{\hbar}}$, ou seja,

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) + \hbar g \eta_c (\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger),\tag{7.20}$$

onde consideramos o regime de Lamb-Dicke $\eta_L \ll 1$ e $\eta_c \ll 1$ e a aproximação de onda girante.

Consideramos que o sistema possa evoluir dentro de um espaço modelo de dimensão $d_s = 4$ contendo os seguintes vetores $\{|g, m-1, n-1\rangle, |e, m-1, n-1\rangle, |g, m, n\rangle, |e, m, n\rangle\}$. O estado composto forma um sistema de 3 qubits, onde e e g representam os estados excitado e fundamental, respectivamente, do íon, $m(n)$ e $m-1(n-1)$ são os estados possíveis do número de fônons (fótons). O Hamiltoniano \hat{H}_I da equação (7.20) conecta estados de base com estados fora do espaço modelo. Para um curto intervalo de interação com o sistema preparado no estado $|g, 0, 0\rangle$, a probabilidade de um estado fora do espaço

modelo ser gerado é pequena. A representação matricial do Hamiltoniano (7.20) na base $\{|g, m-1, n-1\rangle, |e, m-1, n-1\rangle, |g, m, n\rangle, |e, m, n\rangle\}$ é dada por

$$\hat{H}_I = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega & 0 & 0 \\ \hbar\Omega & 0 & \hbar g\eta_c\sqrt{mn} & 0 \\ 0 & \hbar g\eta_c\sqrt{mn} & 0 & \hbar\Omega \\ 0 & 0 & \hbar\Omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

A matriz (7.21) pode ser facilmente diagonalizada. A matriz unitária que diagonaliza \hat{H}_I é dada por

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A+B & A-B & A-B & -A-B \\ A-B & -A-B & A+B & A-B \\ B-A & A+B & A+B & A-B \\ -A-B & B-A & A-B & -A-B \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

onde $A^2 = (\mu_{mn} + \Omega)/4\mu_{mn}$, $B^2 = (\mu_{mn} - \Omega)/4\mu_{mn}$, $\mu_{mn} = \sqrt{a_{mn}^2 + \Omega^2}$ e $a_{mn} = \frac{1}{2}g\eta_c\sqrt{mn}$. Os autoestados satisfazem a equação $\hat{H}_I|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$, ($i = 1, 2, 3, 4$), com autovalores $\lambda_1 = \hbar(\mu_{mn} - a_{mn})$, $\lambda_2 = -\hbar(\mu_{mn} + a_{mn})$, $\lambda_3 = \hbar(\mu_{mn} + a_{mn})$ e $\lambda_4 = \hbar(a_{mn} - \mu_{mn})$.

A evolução temporal do sistema fechado, dado um estado inicial, é obtida resolvendo a equação de Schrödinger. Considerando o estado inicial $|g, m-1, n-1\rangle$ a função de onda no tempo t foi obtida na ref. [45] e pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Psi_g(t) = & \left[\frac{a_{mn}}{\mu_{mn}} \sin(a_{mn}t) \sin(\mu_{mn}t) + \cos(a_{mn}t) \cos(\mu_{mn}t) \right] |g, m-1, n-1\rangle \\ & -i \left[\frac{\Omega}{\mu_{mn}} \cos(a_{mn}t) \sin(\mu_{mn}t) \right] |e, m-1, n-1\rangle \\ & - \left[\frac{\Omega}{\mu_{mn}} \sin(a_{mn}t) \sin(\mu_{mn}t) \right] |g, m, n\rangle \\ & +i \left[\frac{a_{mn}}{\mu_{mn}} \cos(a_{mn}t) \sin(\mu_{mn}t) - \sin(a_{mn}t) \cos(\mu_{mn}t) \right] |e, m, n\rangle. \end{aligned} \quad (7.23)$$

7.3.2 Evolução temporal do sistema aberto

Considerando a interação do sistema com o ambiente no modelo adiabático, descrito na seção (7.2), a evolução temporal do sistema acoplado ao ambiente é governada pelo Hamiltoniano da equação (7.6), ou seja,

$$\hat{H}_{II} = \hat{H}_I + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_I \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k), \quad (7.24)$$

em que \hat{H}_I é dado pela equação (7.20). Conhecemos os autovalores e autovetores de \hat{H}_I , portanto, podemos obter o operador densidade reduzido do sistema no tempo t , a partir da equação (7.13). Para o estado inicial $|g, m-1, n-1\rangle$, os elementos de matriz do operador densidade reduzido na base $\{|\phi_i\rangle\}$ são dados por

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \rho_{44}(t) = \frac{(A+B)^2}{2}, \\ \rho_{22}(t) &= \rho_{33}(t) = \frac{(A-B)^2}{2}, \\ \rho_{12}(t) &= \frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(-2i\mu_{mn}t + 4ia_{mn}\mu_{mn}C(t)) \exp(-\mu_{mn}^2\Gamma(t)), \\ \rho_{13}(t) &= \frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(2ia_{mn}t + 4ia_{mn}\mu_{mn}C(t)) \exp(-a_{mn}^2\Gamma(t)), \\ \rho_{14}(t) &= -\frac{(A+B)^2}{2} \exp(2i(a_{mn} - \mu_{mn})t) \exp(-(a_{mn} - \mu_{mn})^2\Gamma(t)), \\ \rho_{23}(t) &= \frac{(A-B)^2}{2} \exp(2i(a_{mn} + \mu_{mn})t) \exp(-(a_{mn} + \mu_{mn})^2\Gamma(t)), \\ \rho_{24}(t) &= -\frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(2ia_{mn}t - 4ia_{mn}\mu_{mn}C(t)) \exp(-a_{mn}^2\Gamma(t)), \\ \rho_{34}(t) &= -\frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(-2i\mu_{mn}t - 4ia_{mn}\mu_{mn}C(t)) \exp(-\mu_{mn}^2\Gamma(t)), \end{aligned} \quad (7.25)$$

lembrando que $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$.

7.3.3 Emaranhamento do sistema

Vamos representar o estado do sistema tripartido por estados lógicos do tipo $|i_A, i_B, i_C\rangle$, onde o índice A representa o estado interno, B o estado vibracional do centro de massa e C o estado do campo da cavidade. Os estados lógicos assumem os seguintes valores: $|i_A = 0\rangle = |g\rangle$, $|i_A = 1\rangle = |e\rangle$, $|i_B = 0\rangle = |m-1\rangle$, $|i_B = 1\rangle = |m\rangle$, $|i_C = 0\rangle = |n-1\rangle$ e $|i_C = 1\rangle = |n\rangle$. A matriz (7.22) pode ser usada para transformar o operador densidade reduzido (7.25) para a representação lógica, tal que o operador densidade reduzido possa ser escrito como

$$\hat{\rho}_{ABC} = \sum_{i_A, i_B, i_C} \sum_{j_A, j_B, j_C} \langle i_A, i_B, i_C | \hat{\rho} | j_A, j_B, j_C \rangle |i_A, i_B, i_C\rangle \langle j_A, j_B, j_C|. \quad (7.26)$$

Podemos calcular a transposta parcial para um subsistema específico e calcular a negatividade global usando a equação (3.19).

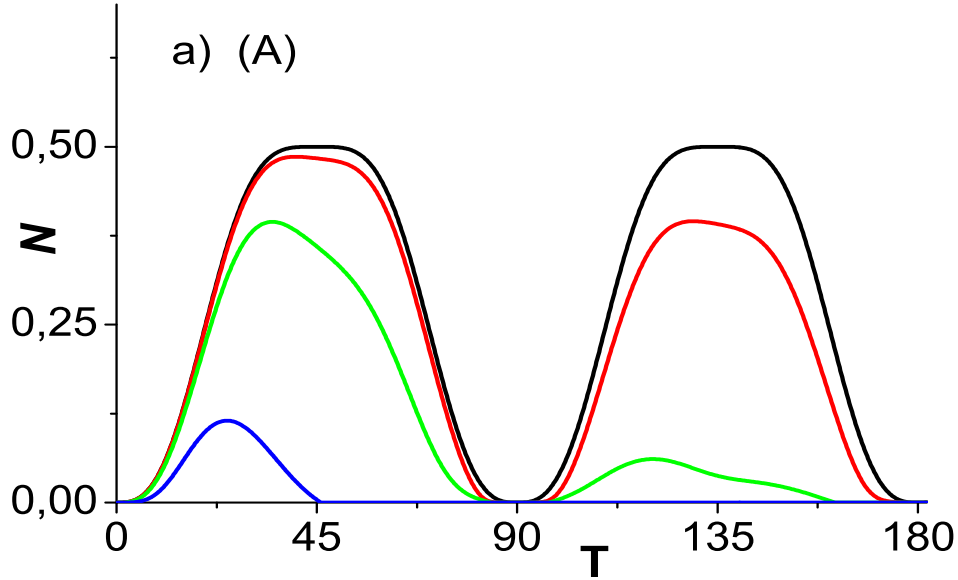


Figura 7.1: Negatividade global do subsistema A como função da variável $\mathbf{T} = a_{11}t$ para $\kappa = 0,0; 0,001; 0,01$ e $0,1$ em unidades de $(ns)^2$ com o sistema preparado no estado inicial $|g, 0, 0\rangle$.

Considerando o estado inicial $\hat{\rho}_{ABC}(0) = |g, 0, 0\rangle\langle g, 0, 0|$, calculamos numericamente a negatividade global para diferentes valores de κ . A frequência de Rabi foi fixada em $\Omega = 8,95MHz$ [29] e a razão $\mu_{11}/a_{11} = 4$. Outros parâmetros relacionados ao ambiente são $\omega_{cut} = 1200MHz$ e a temperatura $T = 0,03K$. Plotamos na figura (7.1) a negatividade global para os estados internos como função da variável $\mathbf{T} = a_{11}t$ para $\kappa = 0,0; 0,001; 0,01$ e $0,1$ em unidades de $(ns)^2$. Observamos que o emaranhamento dos estados internos do íon de dois níveis com o estado vibracional e o estado do campo da cavidade é destruído pela ação do ambiente. A negatividade global para os estados vibracionais calculada a partir do operador densidade $\hat{\rho}_{ABC}^{TB}$ é mostrada na figura (7.2) para os mesmos parâmetros da figura (7.1). Pela simetria do Hamiltoniano, o emaranhamento do estado de fótons é idêntico ao emaranhamento dos estados vibracionais. Notamos que conforme o valor de κ aumenta, há uma redução no máximo de emaranhamento dos subsistemas A , B e C com os seus respectivos complementos. Em $\mathbf{T} = \pi/2$ o subsistema A continua sendo separável para qualquer valor de κ , enquanto que o subsistema B deixa de ser separável para $\kappa \neq 0$.

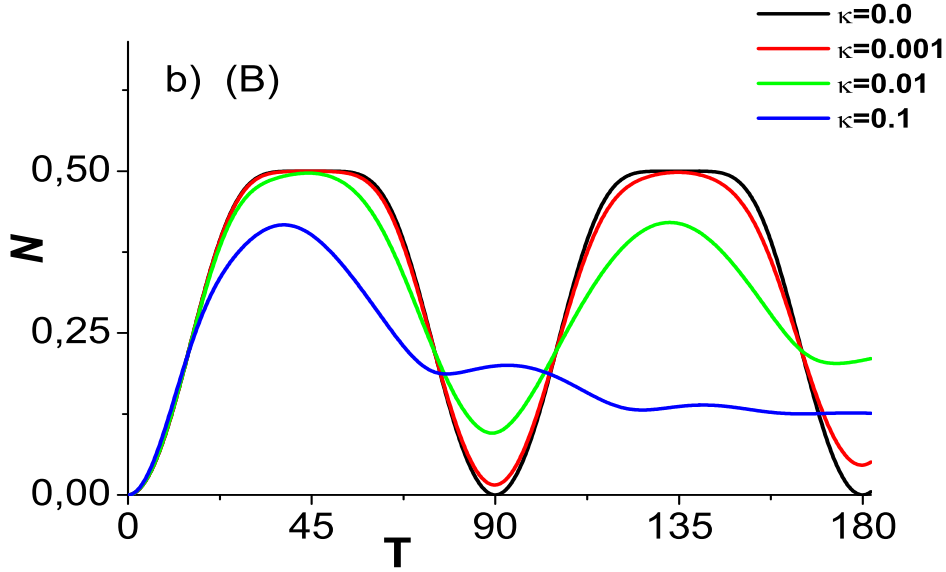


Figura 7.2: Negatividade global do subsistema B como função da variável $\mathbf{T} = a_{11}t$ para $\kappa = 0, 0; 0,001; 0,01$ e $0,1$ em unidades de $(ns)^2$ com o sistema preparado no estado inicial $|g, 0, 0\rangle$.

7.4 Perda de coerência de três íons aprisionados dentro de uma cavidade

7.4.1 O Hamiltoniano do sistema fechado

O sistema considerado nesta seção consiste de três íons de dois níveis com energia de transição $\hbar\omega_0$ cada. A evolução temporal do sistema de três íons aprisionados em uma única armadilha dentro de uma cavidade, sem a interação com o ambiente, foi estudado no capítulo (4). O campo da cavidade é preparado em um estado de Fock com frequência ω_c e sintonizado na transição vermelha de bandas laterais, ou seja, $\omega_c = \omega_0 - \nu$, em que ν é a frequência de vibração do centro de massa. O Hamiltoniano na representação da interação é dado por

$$\hat{H}'_S = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (7.27)$$

em que

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^{(i)}, \\ \hat{H}_I &= \sum_{j=1}^3 \hbar g \eta [\hat{\sigma}_+^{(j)} \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_-^{(j)} \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger], \end{aligned} \quad (7.28)$$

onde consideramos o regime de Lamb-Dicke $\eta \ll 1$ e a aproximação de onda girante. Os detalhes das passagens para se obter o Hamiltoniano estão no Capítulo (4).

7.4.2 Evolução temporal do sistema aberto

Nesta seção, usaremos o modelo adiabático para verificar os efeitos sobre o sistema de três íons aprisionados dentro de uma cavidade, quando este interage com o ambiente. O Hamiltoniano, na representação de interação, que governa a evolução temporal do sistema acoplado ao ambiente é dado pela equação (7.6), ou seja,

$$\hat{H}_{II} = \hat{H}_I + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_I \sum_k (\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k), \quad (7.29)$$

em que \hat{H}_I é dado pela equação (7.28). Com os autovalores e autovetores obtidos no capítulo (4) podemos escrever o operador densidade reduzido do sistema a partir da equação (7.13). Considerando o estado inicial com os três íons no estado fundamental, dois fônons e $n + 1 \geq 2$ fótons, isto é,

$$\hat{\rho}(0) = |-1, -1, -1, 2, n + 1\rangle \langle -1, -1, -1, 2, n + 1|, \quad (7.30)$$

o operador densidade reduzido do sistema no tempo t na base acoplada $|3, -3, 2, n + 1\rangle$, $|3, -1, 1, n\rangle$ e $|3, 1, 0, n - 1\rangle$, é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \frac{17n^2 + 18n + 9}{2(5n + 3)^2} + \frac{9(n + 1)^2}{2(5n + 3)^2} (e^{-g^2\eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \cos(2f_n g \eta t)) \\ &\quad + \frac{12n(n + 1)}{(5n + 3)^2} e^{-\frac{f_n^2}{4} g^2 \eta^2 \Gamma(t)} (\cos(f_n g \eta t) \cos(f_n^2 g^2 \eta^2 C(t))), \\ \rho_{12}(t) &= \frac{i}{2} \left(\frac{3(n + 1)}{(5n + 3)} \right)^{3/2} e^{-g^2\eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \sin(2f_n g \eta t) \\ &\quad + \frac{2in\sqrt{3(n + 1)}}{(5n + 3)^{3/2}} e^{if_n^2 g^2 \eta^2 C(t) - \frac{f_n^2}{4} g^2 \eta^2 \Gamma(t)} \sin(f_n g \eta t), \\ \rho_{13}(t) &= \frac{(3 - n)\sqrt{3n(n + 1)}}{\sqrt{2}(5n + 3)^2} + \frac{3(n + 1)\sqrt{3n(n + 1)}}{\sqrt{2}(5n + 3)^2} e^{-g^2\eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \cos(2f_n g \eta t) \\ &\quad + \frac{2\sqrt{3n(n + 1)}}{\sqrt{2}(5n + 3)^2} e^{-\frac{f_n^2}{4} g^2 \eta^2 \Gamma(t)} \cos(f_n g \eta t) \left(2ne^{if_n^2 g^2 \eta^2 C(t)} - 3(n + 1)e^{-if_n^2 g^2 \eta^2 C(t)} \right), \\ \rho_{22}(t) &= \frac{3(n + 1)}{2(5n + 3)} (1 - e^{-g^2\eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \cos(2f_n g \eta t)), \\ \rho_{23}(t) &= \frac{-3i(n + 1)\sqrt{n}}{\sqrt{2}(5n + 3)^{3/2}} e^{-g^2\eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \sin(2f_n g \eta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{33}(t) = & \frac{6i(n+1)\sqrt{n}}{\sqrt{2}(5n+3)^{3/2}} e^{-if_n^2 g^2 \eta^2 C(t) - \frac{f_n^2}{4} g^2 \eta^2 \Gamma(t)} \sin(f_n g \eta t), \\
& \frac{9n(n+1)}{(5n+3)^2} + \frac{3n(n+1)}{(5n+3)^2} e^{-g^2 \eta^2 f_n^2 \Gamma(t)} \cos(2f_n g \eta t) \\
& - \frac{12n(n+1)}{(5n+3)^2} e^{-\frac{f_n^2}{4} g^2 \eta^2 \Gamma(t)} \cos(f_n g \eta t) \cos(f_n^2 g^2 \eta^2 C(t)),
\end{aligned} \tag{7.31}$$

sendo que $\rho_{21}(t) = \rho_{12}^*(t)$, $\rho_{31}(t) = \rho_{13}^*(t)$, $\rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t)$ e $f_n = \sqrt{2(5n+3)}$.

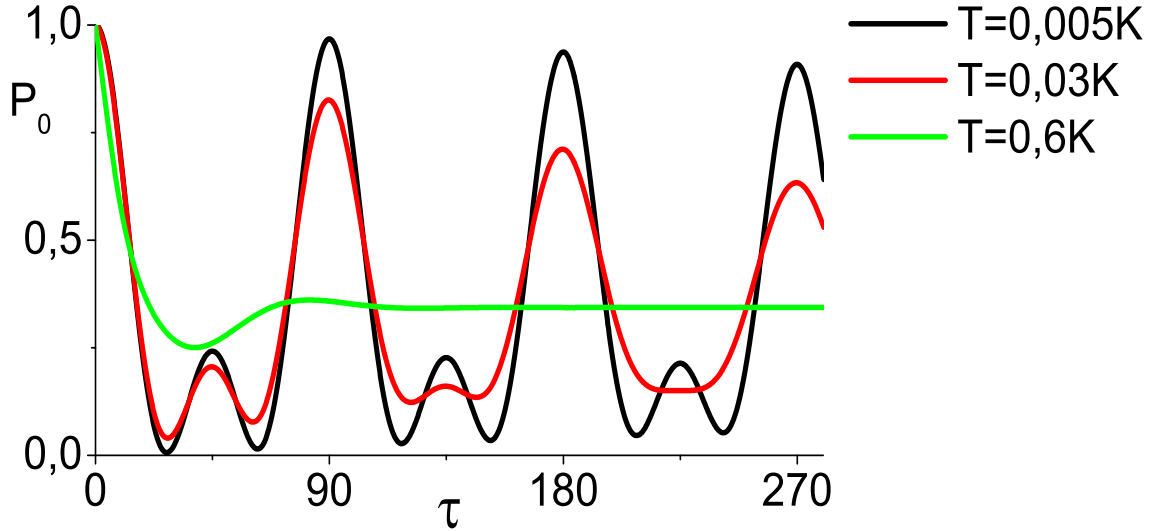


Figura 7.3: Probabilidade P_0 versus a variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ com $\kappa = 0,1 (ns)^2$ e o ambiente a uma temperatura $T = 0,005K, 0,03K$ e $0,6K$.

Para uma análise numérica da dinâmica do sistema aberto, calculamos as probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$. Estas probabilidades foram definidas no capítulo (4) e calculadas para o sistema fechado. Variamos alguns parâmetros como a temperatura T , a frequência de corte ω_{cut} e κ , e vemos quais são os efeitos sobre a dinâmica do sistema. Adotamos $g = 8,95MHz$ e $\eta = 0,5$. No cálculo numérico das funções $\Gamma(t)$ e $C(t)$, equações (7.17) e (7.18), respectivamente, usamos como limite superior de integração $5 \times \omega_{cut}$.

Efeito da temperatura sobre a dinâmica do sistema

Com os três íons preparados no estado fundamental, dois fônons de vibração e dois fótons do campo, mostramos na figura (7.3) a probabilidade de encontrar os três íons no estado fundamental (P_0) para três valores diferentes de temperatura $T = 0,005K, 0,03K$ e $0,6K$. A probabilidade P_0 para esse estado inicial corresponde ao elemento ρ_{11} da equação (7.31),

com $n + 1 = 2$. Os outros parâmetros foram fixados em $\kappa = 0,1 (ns)^2$ e $\hbar\omega_{cut} = K_B T$. A variação de P_0 , para $\kappa = 0,0 (ns)^2$, não depende da temperatura como podemos ver na figura (4.2). Observamos na figura (7.3) que para $T = 0,005K$ a probabilidade P_0 é pouco afetada pela interação com o ambiente, comparada com o caso com $\kappa = 0,0 (ns)^2$. Já com $T = 0,6K$, a probabilidade P_0 é logo atenuada e para $\tau > \pi/2$, a probabilidade se estabiliza com um valor constante. Para uma realização experimental, portanto, é importante manter o sistema a baixas temperaturas. Em geral, nos experimentos envolvendo íons aprisionados realizados pelo grupo NIST [90], os íons são resfriados de modo que $\hbar\nu \ll K_B T$ seja satisfeita. Para $\nu = 2\pi \times 7,4MHz$ [29] e $T = 0,03K$ a condição $\hbar\nu \ll K_B T$ é satisfeita.

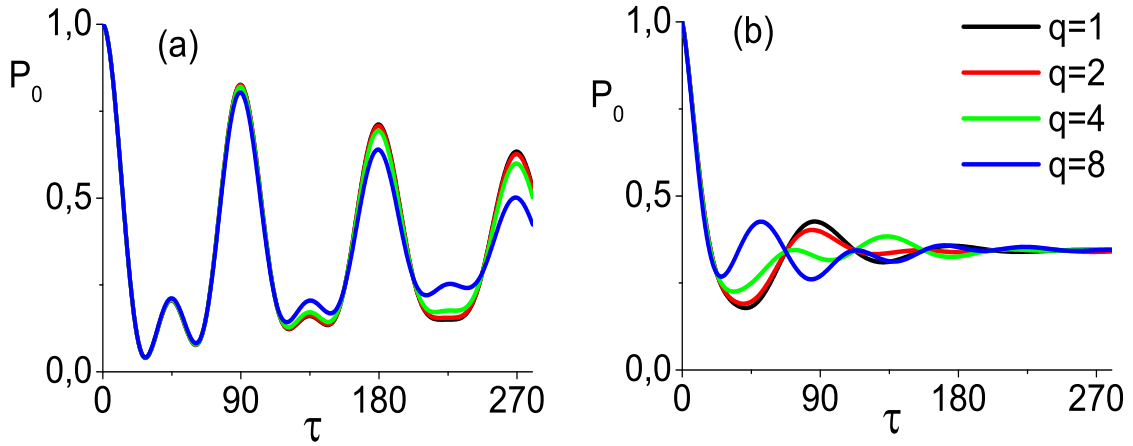


Figura 7.4: Probabilidade P_0 como função da variável $\tau = gnt$, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ e temperatura $T = 0,03 K$, com a) $\kappa = 0,1 (ns)^2$ e b) $\kappa = 1,0 (ns)^2$, para $q = 1, 2, 4$ e 8 dados por $\hbar\omega_{cut} = qK_B T$.

Efeito da frequência de corte sobre a dinâmica do sistema

Para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$ analisamos a variação de P_0 com τ para diferentes valores de ω_{cut} na figura (7.4), considerando um valor fixo da temperatura. Geramos resultados para quatro valores diferentes de ω_{cut} dados pela relação $\hbar\omega_{cut} = qK_B T$, para $q = 1, 2, 4$ e 8 , com $T = 0,03 K$. Plotamos a probabilidade P_0 como função da variável τ para $\kappa = 0,1 (ns)^2$ na figura (7.4a) e $\kappa = 1,0 (ns)^2$ na figura (7.4b). Quando $\kappa = 0,1 (ns)^2$ vemos que até $\tau \approx 3\pi/4$ praticamente não há mudança da probabilidade variado ω_{cut} , entretanto para $\tau > 3\pi/4$ a probabilidade com $q = 8$ começa a se desviar das outras curvas. Já para $\kappa = 1,0 (ns)^2$ a probabilidade com $q = 8$ tem um padrão de oscilação diferente das outras curvas entre $\tau \approx \pi/4$ e $3\pi/4$ e depois todas entram em um regime

estacionário. A probabilidade P_2 também apresenta um comportamento similar a este, porém P_1 não. A dependência da frequência de corte está nas funções $\Gamma(t)$ e $C(t)$. Para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$, a probabilidade P_1 corresponde ao elemento ρ_{22} da equação (7.31), e como podemos ver, este elemento não tem dependência da função $C(t)$, mas depende de $\Gamma(t)$. Para o valor do parâmetro $g\eta = 4,5MHz$ escolhido, a escala de tempo em que a dinâmica acontece é da ordem de μs . Para a temperatura $0,03K$, temos que $\hbar\beta = 0,25 ns$. Portanto, a escala de tempo corresponde a um regime térmico na qual $t \gg \hbar\beta$ e neste regime a função $\Gamma(t)$ não depende de ω_{cut} , mas tem uma dependência linear de t e inversamente proporcional a β [130]. A integral da função $C(t)$, dada pela equação (7.18), pode ser facilmente integrada desprezando $\sin(\omega t)$, pois para frequências da ordem de ω_{cut} , temos que $\sin(\omega t) \ll \omega t$. Como resultado obtemos $C(t) \cong -\kappa\omega_{cut}t$. Aumentar o valor de ω_{cut} tem efeito somente sobre a função $C(t)$.

Parâmetro κ e dinâmica do sistema

Considerando o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$, plotamos na figura (7.5) as probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ para $\kappa = 0,01 (ns)^2, 0,1 (ns)^2$ e $1,0 (ns)^2$. Assumimos a temperatura de $0,03K$ e também $\hbar\omega_{cut} = K_B T$. Quando não levamos em conta a interação com o ambiente, o sistema volta ao estado inicial em $\tau \approx 3\pi/4$, como podemos ver na figura (4.1) do capítulo (4). Entretanto, se $\kappa \neq 0$ o sistema não volta mais ao estado inicial como vemos na figura (7.5). O estado W_1 pode ser gerado com probabilidade $P_1 = 0,75$ para $\kappa = 0,0 (ns)^2$ em $\tau \approx 0,37\pi$. Neste ponto a probabilidade de se medir o estado W_1 diminui 5,3% e 33,3% para $\kappa = 0,01 (ns)^2$ e $\kappa = 0,1 (ns)^2$, respectivamente. Para $\kappa = 1,0 (ns)^2$ a dinâmica é fortemente atenuada e as probabilidades se estabilizam com um valor próximo de 0,25. O mesmo ocorre para outros valores de $\kappa \neq 0$, para tempos suficientemente longos.

Com o sistema preparado no estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$, plotamos na figura (7.6) as probabilidades P_0, P_1, P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$ para $\kappa = 0,01 (ns)^2, 0,1 (ns)^2$ e $1,0 (ns)^2$. Os outros parâmetros são os mesmos aos da figura (7.5). A dinâmica das probabilidades com o sistema fechado pode ser visto na figura (4.4). Em $\tau = 0,37\pi$ podemos medir o estado W_2 com probabilidade $P_2 = 0,75$ para $\kappa = 0,0 (ns)^2$. Para $\kappa = 0,01 (ns)^2$ e $\kappa = 0,1 (ns)^2$ a probabilidade de se medir o estado W_2 tem uma

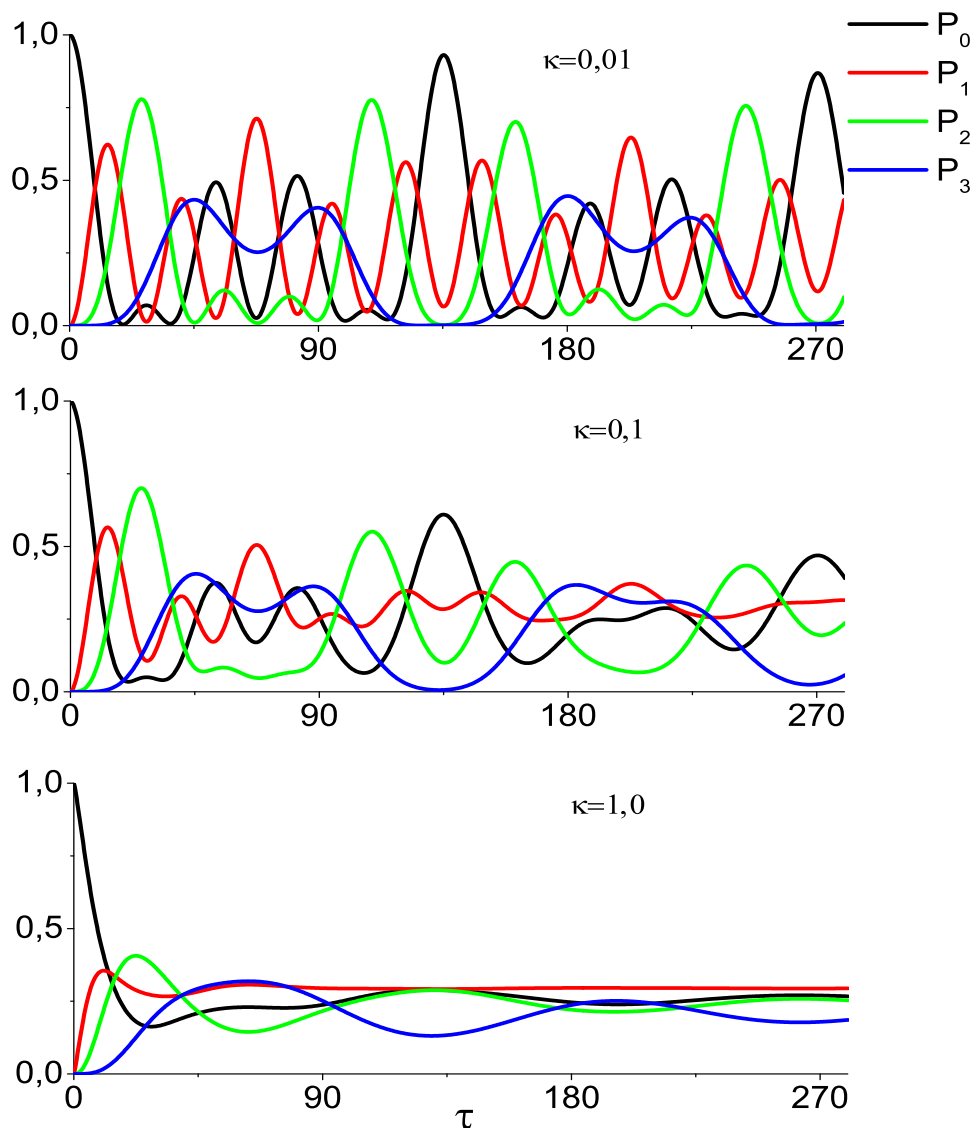


Figura 7.5: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$ e $\kappa = 0,01$; $0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$.

redução de 1,3% e 8,0%, respectivamente. Para um tempo suficientemente longo e $\kappa \neq 0$, a probabilidade P_3 estabiliza com um valor próximo de 0,5 e as outras probabilidades abaixo de 0,3.

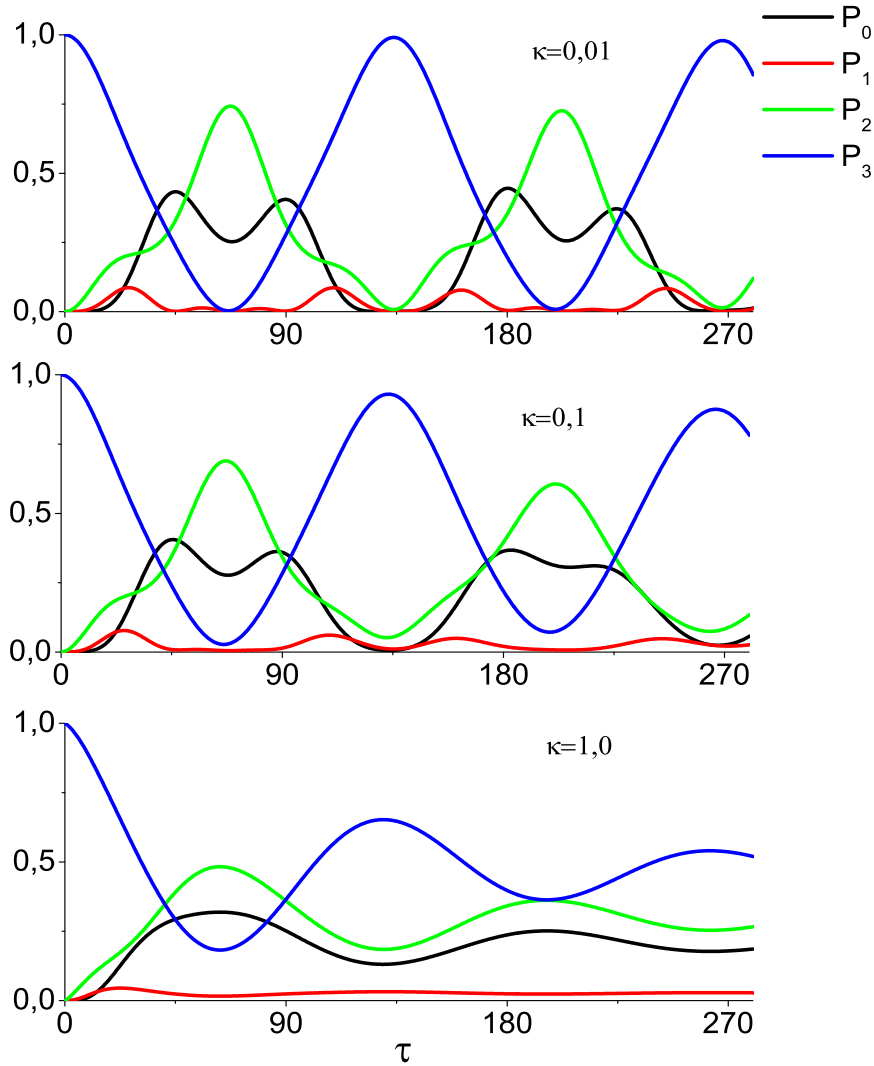


Figura 7.6: Probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 como funções da variável $\tau = g\eta t$, dado em graus, para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$ e $\kappa = 0,01$; $0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$.

7.4.3 Emaranhamento do sistema

Nos cálculos de emaranhamento escrevemos o estado do sistema na base lógica $\{|i_A, i_B, i_C, i_D\rangle\}$, definida na seção (4.3), onde os índices A , B e C representam estados internos dos íons e D o estado produto fônon-fóton. O emaranhamento do sistema sujeito a interações com o ambiente é analisado pela negatividade global e negatividade parcial K-way. Avaliamos numericamente o operador densidade reduzido do sistema (equação (7.13)) na base lógica para calcular a negatividade global e negatividade parcial K-way.

Da figura (7.7) a (7.12) mostramos os resultados numéricos para negatividade global e negatividade parcial K-way em função da variável $\tau = g\eta t$. Ajustamos os parâmetros em

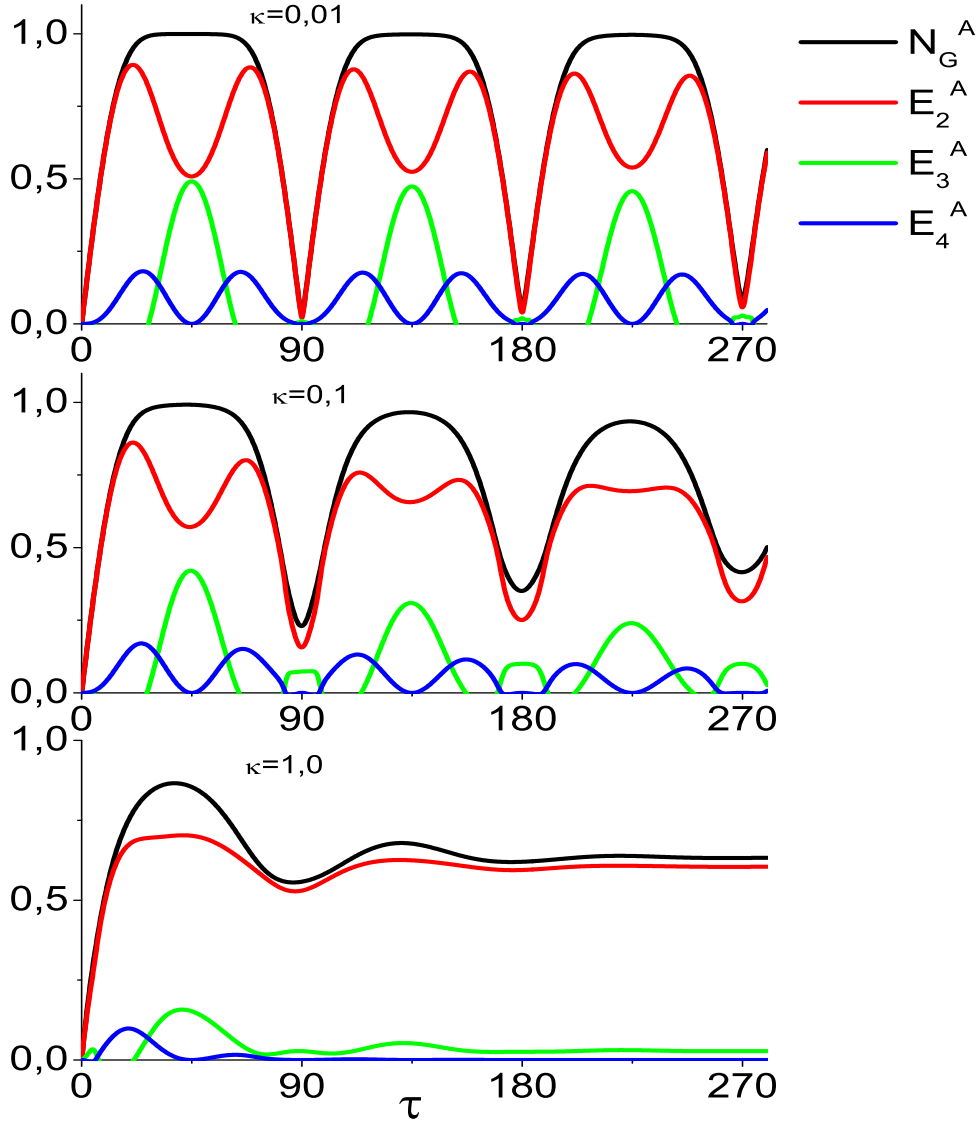


Figura 7.7: Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K-way E_K^A ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$.

$g\eta = 4,5MHz$, $\hbar\omega_{cut} = K_B T$ e $T = 0,03K$ para três valores diferentes de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades $(ns)^2$.

Na figura (7.7) plotamos a negatividade global e a negatividade parcial K-way para o subsistema A com o sistema preparado no estado $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$. Quando consideramos o sistema fechado no capítulo (4), já tínhamos enfatizado que a cada intervalo de $\Delta\tau = \pi/2$ o sistema tornava-se separável, como pode-se ver na figura (4.5a). A interação com ambiente faz com que o sistema deixe de ser separável nesses pontos, como vemos na figura (7.7). Para κ pequeno, como $\kappa = 0,01 (ns)^2$, a negatividade global ainda tem valores próximos de zero em $\tau = \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$, mas para $\kappa = 0,1 (ns)^2$ e $\kappa = 1,0 (ns)^2$ é

visível como $N_G^A > 0$ nesses pontos. Para $\kappa = 0,01 (ns)^2$ e $\kappa = 0,1 (ns)^2$ o subsistema A atinge o emaranhamento máximo com $N_G^A \approx 1$, mas com $\kappa = 1,0 (ns)^2$ o emaranhamento máximo é da ordem de 0,9. Para $\kappa \neq 0$, a negatividade global e a negatividade parcial K-way tendem a um valor estacionário para um tempo suficientemente longo. Quando $\kappa = 1,0 (ns)^2$ a negatividade global e a negatividade parcial K-way ficam praticamente constantes para $\tau > \pi/2$. Com relação à negatividade parcial K-way, vemos que a interação com o ambiente causa uma diminuição das correlações quânticas de 3 e 4 partidos, enquanto que as correlações quânticas de dois partidos tendem a aumentar. Próximo de $\tau = 0,1\pi$ temos $N_G^A \approx 0,95$ e $E_2^A \approx 0,75$ para $\kappa = 0,0 (ns)^2$. Aumentando o valor de κ para $0,01 (ns)^2$ ou $0,1 (ns)^2$, vemos que o pico correspondente de E_2^A aumenta para valores acima de 0,75, enquanto que para $\kappa = 1,0 (ns)^2$ o valor de E_2^A cai abaixo de 0,75. Portanto, pode-se aumentar as correlações quânticas de dois partidos com um valor apropriado de κ .

A negatividade global e a negatividade parcial K-way para o subsistema D , para $\kappa = 0,0 (ns)^2$, foram mostradas na figura (4.5b), onde vimos que em $\tau = \pi/4, 3\pi/4$ e $5\pi/4$ as correlações quânticas eram puramente do tipo E_3^D . Nesses pontos o subsistema D continua tendo correlações puramente do tipo E_3^D mesmo com $\kappa \neq 0$, como vemos na figura (7.8), para $\kappa = 0,01 (ns)^2$; $0,1 (ns)^2$ e $1,0 (ns)^2$. Vemos que, ao contrário do subsistema A , o subsistema D fica fracamente emaranhado para $\kappa = 1,0 (ns)^2$ e $\tau > \pi/2$. A interação com o ambiente, portanto, destrói o emaranhamento do subsistema D com os estados internos, mas preserva o emaranhamento entre os estados internos.

Como $\Gamma(t)$ é uma função crescente, observamos no operador densidade (7.31), que os elementos diagonais e o elemento $\rho_{13}(t)$ tendem a um valor constante com o passar do tempo. Para $n + 1 = 2$, $\kappa \neq 0$ e considerando um tempo suficientemente longo, a representação matricial do operador $\hat{\rho}$ na base acoplada $\{ |3, -3, 2, 2\rangle, |3, -1, 1, 1\rangle, |3, 1, 0, 0\rangle \}$ será

$$\hat{\rho} \cong \begin{pmatrix} 0,34 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0,37 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,28 \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Se não consideramos os elementos fora da diagonal, pois são pequenos, o estado do sistema

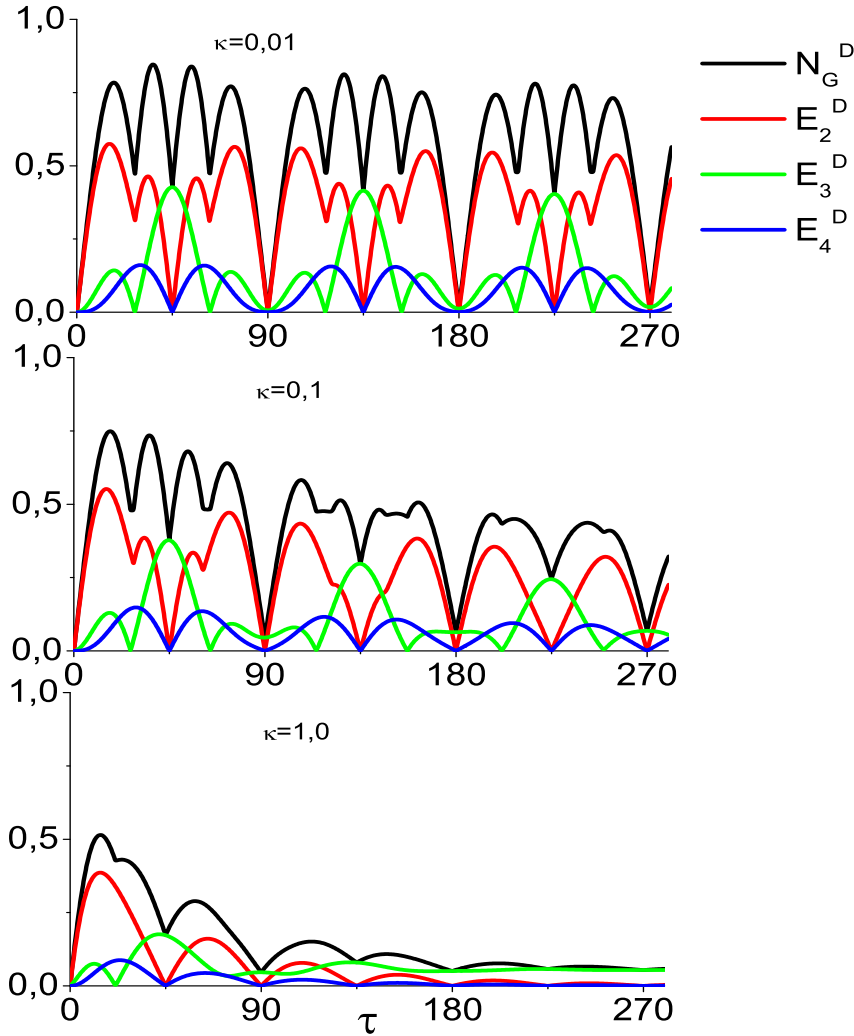


Figura 7.8: Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = gnt$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 2, 2\rangle$.

descrito pela matriz (7.32), corresponde a um estado misto, com 34% de probabilidade de medir os íons no estado fundamental, 37% de probabilidade de medir o estado W_1 e 28% de probabilidade de medir o estado W_2 . A negatividade global para o subsistema D é facilmente calculada, calculando a transposta parcial do operador $\hat{\rho}$ com relação ao subsistema D e em seguida calculando os autovalores. Obtemos um único autovalor negativo igual a $-0,05$. Pela equação (3.18), a negatividade global para esse caso é $0,05$. Para calcular a negatividade global com relação ao subsistema A , devemos escrever o operador densidade na representação lógica, onde teremos uma matriz 7×7 com outros elementos fora da diagonal principal. Realizada a transposta parcial com relação ao subsistema A , obtemos

dois autovalores negativos $-0,14$ e $-0,17$. A negatividade global para o subsistema A é portanto $0,62$. Os valores de N_G^D e N_G^A para o estado da equação (7.32), são consistentes com o emaranhamento que vemos nas figuras (7.7) e (7.8), para $\kappa = 1,0$ (ns)² quando não há mais variação da negatividade global.

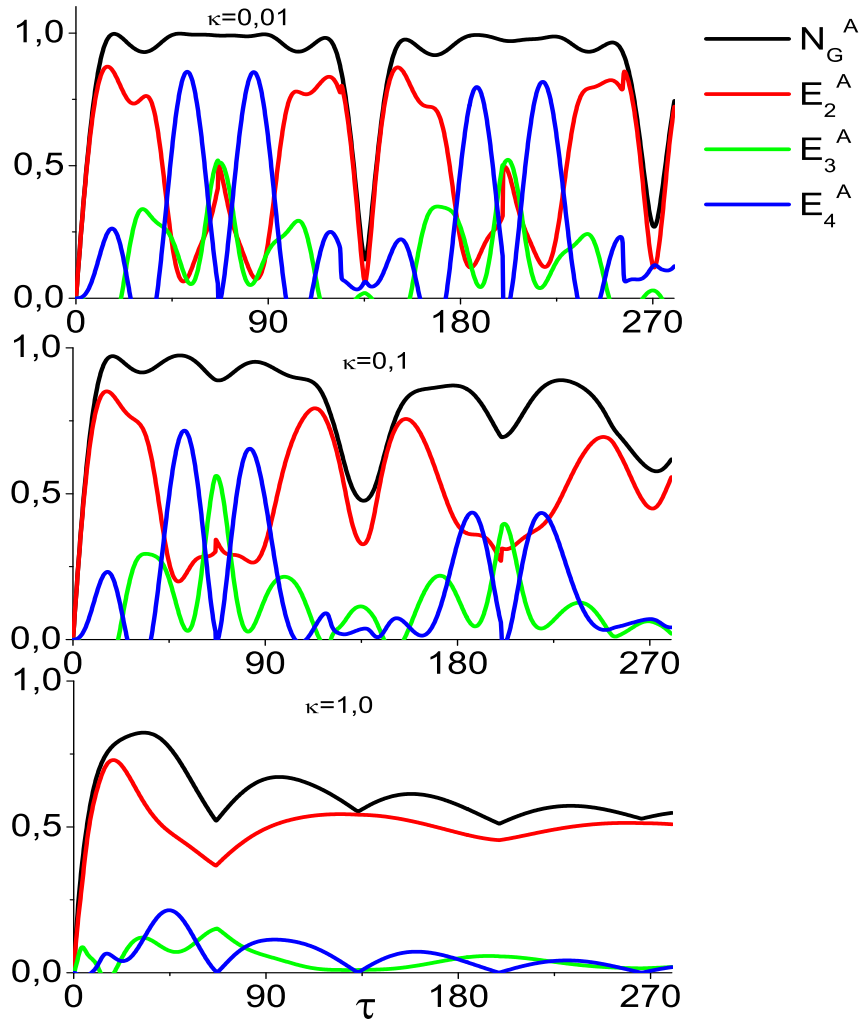


Figura 7.9: Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K-way E_K^A ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$.

Nas figuras (7.9) e (7.10) plotamos a negatividade global e a negatividade parcial K-way como funções da variável $\tau = g\eta t$, para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$. Vimos na figura (4.7) do capítulo (4) que, em $\tau = 0,37\pi$, o emaranhamento entre os estados internos envolvia correlações quânticas de dois e três partidos, enquanto que o emaranhamento do subsistema D com os estados internos envolvia somente correlações quânticas de três

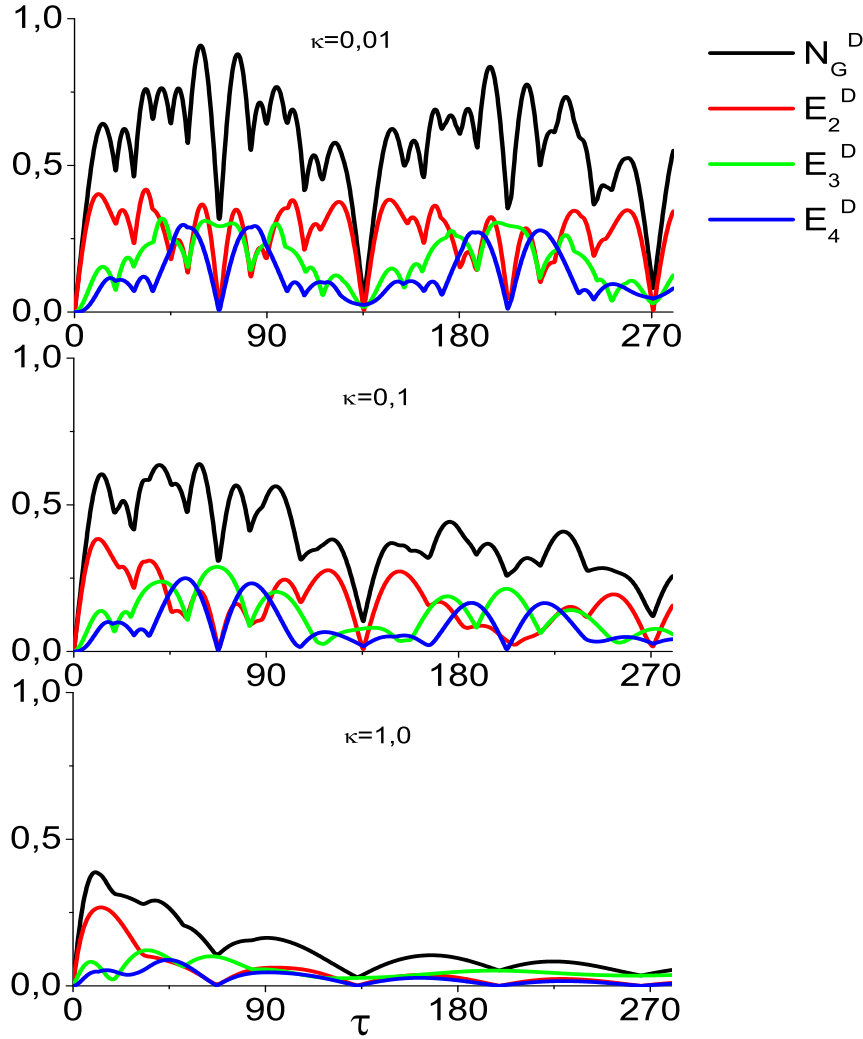


Figura 7.10: Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$.

partidos. Observamos nas figuras (7.9) e (7.10), que essa propriedade é mantida para qualquer κ , pois as igualdades $E_4^A = E_4^D = 0$ e $N_G^D = E_3^D$ são mantidas em $\tau = 0, 37\pi$. Ainda em $\tau = 0, 37\pi$, vemos que para $\kappa = 0,1 (ns)^2$ a negatividade parcial E_2^A diminui de 0,50 para 0,33 e E_3^A aumenta de 0,50 para 0,56, comparados com o caso $\kappa = 0,0 (ns)^2$. Para $\kappa = 0,01 (ns)^2$ e $\kappa = 0,1 (ns)^2$, a interação com o ambiente faz aumentar as correlações quânticas de dois partidos em $\tau = 0,08\pi$, mas para $\kappa = 1,0 (ns)^2$ essas correlações diminuem. Quando $\kappa = 1,0 (ns)^2$, o subsistema D tem poucas correlações quânticas para $\tau > \pi/2$, enquanto que para o subsistema A , a negatividade global aproxima-se de um valor estacionário com $N_G^A \approx 0,5$. A interação com o ambiente resulta na atenuação

das correlações quânticas de três e quatro partidos do subsistema A , fazendo com que as correlações quânticas de dois partidos fiquem predominantes. Para tempos suficientemente longos, o emaranhamento do subsistema D com os estados internos é destruído pela interação com o ambiente, mas é preservado o emaranhamento entre os estados internos.

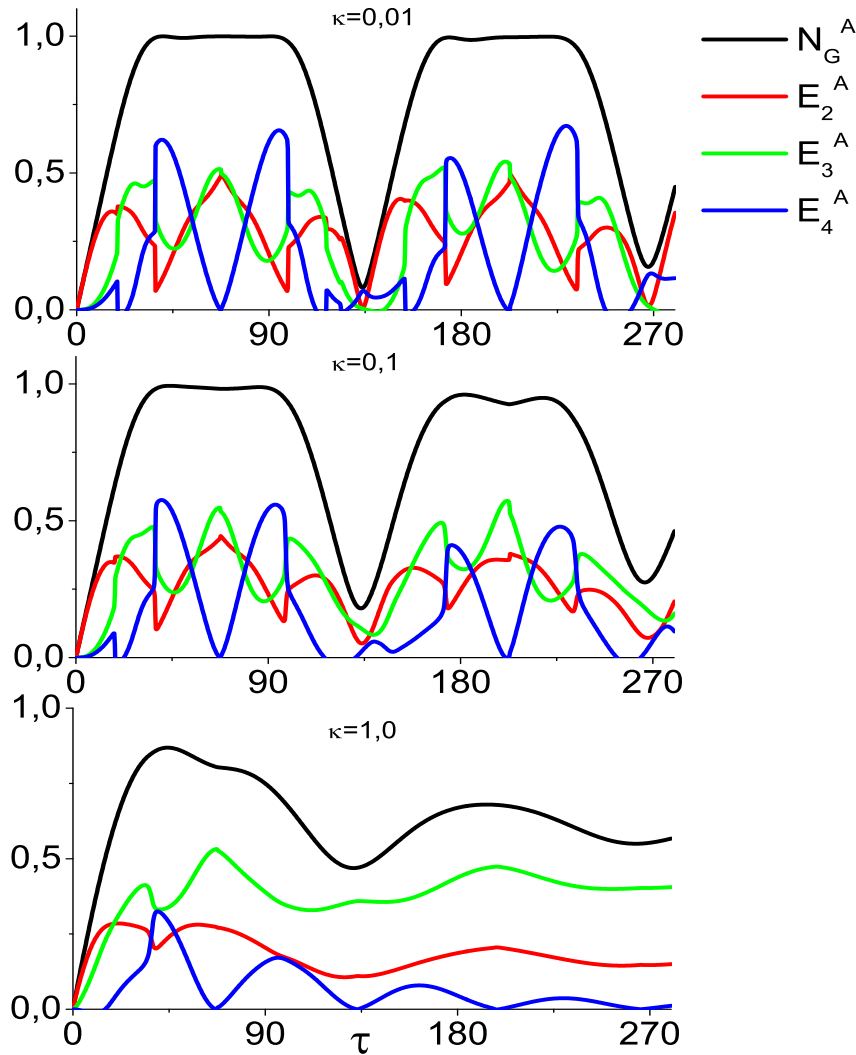


Figura 7.11: Negatividade global N_G^A , e negatividade parcial K -way E_K^A ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = g\eta t$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$.

Nas figuras (7.11) e (7.12) consideramos o estado inicial com os três íons no estado excitado, zero fônons e zero fótons, ou seja, $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$, para $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$. O caso com $\kappa = 0,0$ $(ns)^2$ pode ser visto na figura (4.9). No capítulo (4) vimos que em $\tau \approx 0,37\pi$ o emaranhamento entre os estados internos era caracterizado por correlações quânticas de dois e três partidos, enquanto que o emaranhamento

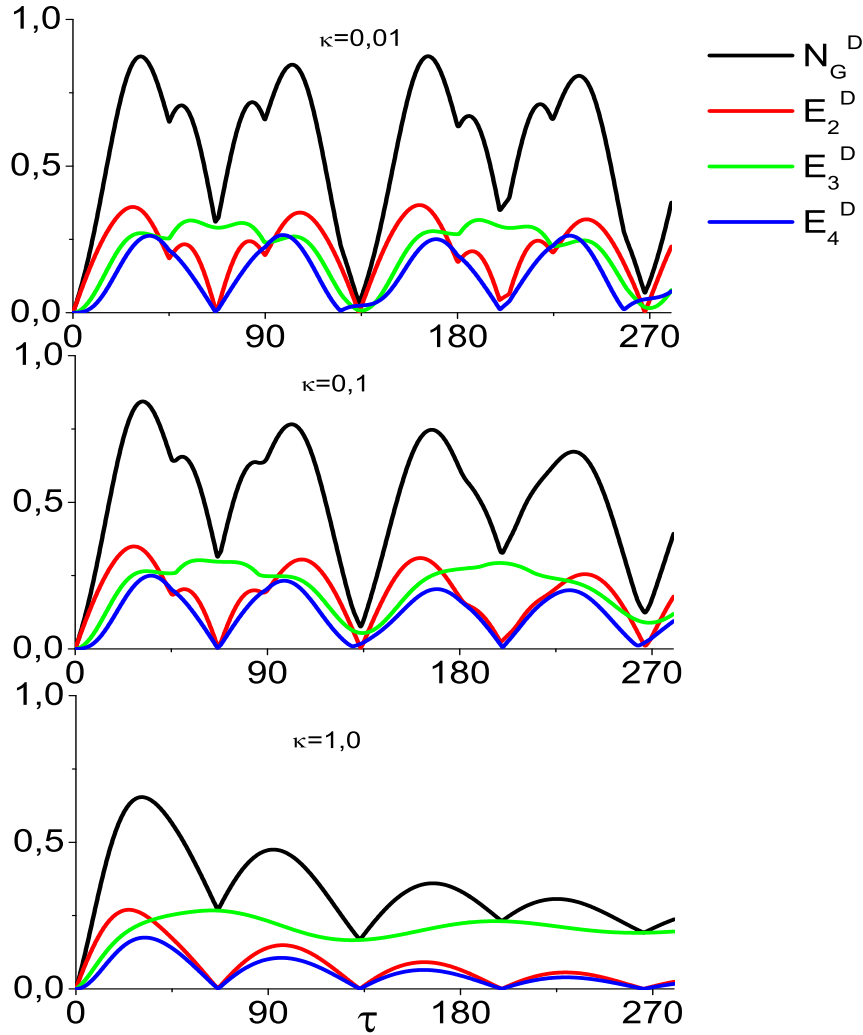


Figura 7.12: Negatividade global N_G^D , e negatividade parcial K-way E_K^D ($K = 2, 3, 4$) como funções da variável $\tau = gnt$ (em graus) e valores de $\kappa = 0,01; 0,1$ e $1,0$ em unidades de $(ns)^2$ para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$.

entre o subsistema D e os estados internos era caracterizado por correlações quânticas de três partidos. Essa propriedade é mantida mesmo com a interação com o ambiente para qualquer valor de κ , pois observamos nas figuras (7.11) e (7.12) que em $\tau \approx 0,37\pi$ temos $E_4^A = E_4^D = 0$ e que $N_G^D = E_3^D$. O ponto em $\tau \approx 3\pi/4$, onde o sistema é quase separável para $\kappa = 0,0$ $(ns)^2$, tem um aumento nas correlações quânticas quando aumentamos o valor de κ . Para $\kappa = 1,0$ $(ns)^2$, a negatividade global tende a um valor estacionário $N_G^A \approx 0,6$ para o subsistema A e $N_G^D \approx 0,25$ para o subsistema D . Para tempos suficientemente longos, a interação com o ambiente destrói as correlações quânticas de 4 partidos, mas não destrói o emaranhamento do subsistema D com os estados internos,

que fica caracterizado por correlações quânticas de três partidos, enquanto que o emaranhamento entre os estados internos fica caracterizado por correlações quânticas de dois e três partidos.

7.5 Conclusões

Usando o modelo adiabático de perda de coerência analisamos quais são os efeitos, das fontes de perda de coerência, sobre a dinâmica de emaranhamento do sistema constituído por um íon aprisionado em uma cavidade interagindo com um campo externo e também pelo sistema de três íons aprisionados em uma cavidade. O modelo representa a perda de coerência do sistema causada por flutuações do campo magnético e flutuações na frequência do laser externo. Considerando um estado inicial específico, obtivemos expressões analíticas para o operador densidade reduzido do sistema.

Para o sistema de um íon aprisionado em uma cavidade interagindo com um laser externo em ressonância, os cálculos numéricos para a negatividade global mostram que o máximo de emaranhamento dos subsistemas A e B com seus complementos diminui com o aumento de κ . Para tempos suficientemente longos e $\kappa \neq 0$ o subsistema A fica separável, enquanto que B e C mantêm-se correlacionados. O tempo em que os estados internos do íon permanecem correlacionados com o estado vibracional do centro de massa e com o estado do campo, também diminui com o aumento de κ .

Para o sistema de três íons aprisionados dentro de uma cavidade, calculamos numericamente as probabilidades P_0 , P_1 , P_2 e P_3 considerando os estados iniciais $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$ e $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$. Observamos que os efeitos da interação com o ambiente sobre as probabilidades são menores quando o sistema é preparado no estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$ do que quando o sistema é preparado no estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$. Pois, para $\kappa = 0,1 (ns)^2$, a probabilidade de se obter um estado W_1 sofre uma redução de 33% comparado com $\kappa = 0,0 (ns)^2$ para o estado inicial $|-1, -1, -1, 3, 3\rangle$. Já para o estado inicial $|1, 1, 1, 0, 0\rangle$, a probabilidade de se obter o estado W_2 para o mesmo valor de κ e τ tem uma redução de apenas 8%. Os estados W_1 e W_2 podem ser gerados probabilisticamente em $\tau = 0,37\pi$, o que corresponde a $t = 0,26\mu s$.

Calculamos a negatividade global e negatividade parcial K-way considerando o sistema

preparado com os três íons no estado fundamental e com os três íons no estado excitado para $\kappa = 0,01 (ns)^2$; $0,1 (ns)^2$ e $1,0 (ns)^2$. Observamos que quando os três íons são preparados no estado fundamental, a interação com o ambiente destrói o emaranhamento do subsistema D (fótons e fônons) com o subsistema dos estados internos, mas preserva o emaranhamento entre os estados internos. As correlações quânticas de 3 e 4 partidos do subsistema A com BCD são mais afetadas pela interação com o ambiente do que as correlações de 2 partidos. Quando os íons são preparados no estado excitado, o emaranhamento do subsistema D com ABC é mais resistente à ação do ambiente do que quando os íons são preparados no estado fundamental.

Capítulo 8

Conclusões

Nesta tese, íons frios de dois níveis com o estado vibracional acoplado ao campo quantizado foram analisados com diferentes configurações do estado inicial. A frequência do campo foi sintonizada na transição vermelha de bandas laterais. Consideramos sistemas com três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo em um estado de Fock; três íons aprisionados individualmente e o campo em um estado de Fock e três íons aprisionados em uma única armadilha e o campo em um estado coerente. Para cada sistema escrevemos o Hamiltoniano que governa sua evolução temporal no regime de Lamb-Dicke e na aproximação de onda girante. Calculamos a evolução temporal para estados iniciais com os três íons no estado fundamental e com os três íons no estado excitado.

Mostramos que é possível gerar estados do tipo W de três qubits quando a cavidade é preparada em um estado de Fock. Os estados W obtidos com o sistema de três íons em uma única armadilha envolvem estados internos. No caso de três íons aprisionados individualmente, os estados internos e vibracionais de cada íon são tratados como um subsistema quântico de dois níveis. Além de gerar estados tipo W , o sistema de três íons aprisionados em uma cavidade permite a manipulação de qubits individuais, o que não é possível no caso de um único íon aprisionado. Geramos estados emaranhados entre íons sem a interação direta entre eles.

O estado W_1 , com um íon no estado excitado, pode ser obtido deterministicamente e periodicamente preparando a cavidade em um estado de Fock com um fóton e os três íons no estado fundamental. Se ainda consideramos o estado inicial de vibração com um fônon, $g = 8,95MHz$ e $\eta = 0,01$, tanto o sistema com uma única armadilha como o sistema com íons aprisionados individualmente geram o estado W_1 em $t = 10,13\mu s$. Preparando os três

íons no estado fundamental com um fônon em cada armadilha, é possível obter um estado W_2 com probabilidade $24/25$ com apenas dois fótons na cavidade. Já para o sistema com uma única armadilha preparada com os três íons no estado fundamental e dois fônons, o mesmo estado W_2 pode ser obtido com probabilidade $\approx 24/25$, mas com o campo em um estado de Fock com um número grande de fótons.

O estado inicial com os três íons no estado fundamental oferece uma variável de controle adicional, dada pelo número de fótons ou pelo número de fônons no estado inicial, que pode restringir a evolução da função de onda a um espaço de Hilbert reduzido. Para o sistema com uma única armadilha, se o número de fônons inicial for igual a dois, não importa quantos fótons tenham dentro da cavidade que o estado com os três íons excitados não será populado. Analogamente, com os três íons aprisionados individualmente, se o número de fótons inicial for igual a dois, não importa quantos fônons tenham em cada armadilha que o estado com os três íons no estado excitado não será populado. Essa é uma característica única de sistemas nos quais os estados vibracionais são acoplados ao modo do campo.

No sistema com uma única armadilha e o campo no estado de Fock, encontramos estados emaranhados onde as correlações quânticas de dois partidos envolvem somente os estados internos, enquanto que o subsistema fônon-fóton exibe somente correlações quânticas de três partidos com os estados internos. Estados com características semelhantes são encontrados quando os íons são aprisionados individualmente, onde as correlações quânticas de dois partidos ficam restritas ao subsistema de estados internos e fônons, enquanto que o estado de fótons apresenta correlações quânticas de três partidos com o subsistema restante. As correlações quânticas de dois partidos são características dos estados W de três qubits.

Quando a cavidade é preparada em um estado coerente, focalizamos nossa discussão no estado do campo. Com uma escolha apropriada das condições iniciais do sistema, mostramos que é possível gerar estados comprimidos do campo. Para o estado inicial com os três íons no estado fundamental e um fônon observamos a maior compressão com $\Delta X_1 = 0,36$ para $|\alpha|^2 = 25$. Observamos compressão na quadratura X_2 somente quando os íons são preparados no estado fundamental e $|\alpha|^2 < 1$. O emaranhamento do campo com o estado composto pelos estados internos e vibracionais pôde ser calculado através

da entropia linear. Para o estado inicial com os três íons no estado fundamental, um fônon e $\alpha = 5$, a entropia linear mostra que é possível encontrar um estado do campo quase separável, enquanto que a negatividade global mostra que há um aumento nas correlações quânticas entre estados internos e estados vibracionais. Quando a entropia linear do campo aumenta a negatividade global dos estados internos e estados vibracionais diminuem. Notamos que há uma transferência de emaranhamento entre o campo e os estados internos e vibracionais.

Em um modelo mais realista, consideramos a interação dos sistemas de um íon e de três íons aprisionados em uma cavidade interagindo com o ambiente. Usamos o modelo adiabático de perda de coerência para representar os processos de perda de coerência causadas por oscilações indesejadas do campo. Os íons tipicamente propostos como um sistema de dois níveis possuem um tempo de vida longo e as cavidades usadas no confinamento do campo possuem um alto fator de qualidade, portanto, a emissão espontânea e a perda de fótons do campo não foram consideradas neste trabalho. Assumindo uma temperatura externa de $0,03 K$, analisamos a dinâmica das probabilidades P_0, P_1, P_2, P_3 e a dinâmica do emaranhamento para $\kappa = 0,01 (ns)^2$, $\kappa = 0,1 (ns)^2$ e $\kappa = 1,0 (ns)^2$. Observamos que para $\kappa = 0,1 (ns)^2$ a probabilidade de se medir o estado W_1 sofre uma redução de 33% para o estado inicial com os três íons no estado fundamental, três fônons e três fótons, enquanto que o estado W_2 sofre uma redução de apenas 8% quando os íons são preparados no estado excitado com zero fônons e zero fótons. Com os três íons preparados no estado fundamental, observamos que para $\kappa \neq 0$ e um tempo suficientemente longo, a interação com o ambiente destrói as correlações quânticas do subsistema fônon-fóton com os estados internos, mas preserva as correlações quânticas entre os estados internos. Para o sistema de um único íon, a interação com o ambiente também destrói o emaranhamento entre os estados internos e o subsistema fônon-fóton, mas preserva o emaranhamento entre fótons e fônons.

O presente trabalho representa um avanço teórico no estudo da dinâmica de sistemas envolvendo íons aprisionados em uma cavidade com mais de dois íons. O sistema pode ser usado como uma interface na transferência de informação usando fótons e íons, e os estados gerados, tais como W_1 e W_2 , podem ser utilizados em operações lógicas ou na implementação de algoritmos quânticos. Nenhum experimento, com mais de um íon

aprisionado em uma cavidade com os estados vibracionais acoplados ao modo do campo, ainda foi realizado. Portanto, os resultados obtidos aqui podem guiar experimentalistas a realizarem tais experimentos.

Apêndice A

Álgebra dos operadores de Pauli

Os operadores de Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ possuem apenas dois autovalores e por isso são bem apropriados para descrever sistemas de dois níveis. Agrupamos neste apêndice algumas das propriedades básicas dos operadores de Pauli. Cada componente dos operadores de Pauli é definido como $\hat{\sigma}_j = 2\hat{S}_j$ ($j = x, y, z$), onde \hat{S}_j são os operadores de spin 1/2 que satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (\text{A.1})$$

e portanto,

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k. \quad (\text{A.2})$$

Assim como os operadores de spin, os operadores de Pauli também satisfazem a álgebra de Lie SU(2), onde $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$ são os geradores da álgebra e $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2$ é o operador Casimir, pois

$$[\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_i] = 0, \quad (\text{A.3})$$

para qualquer componente i . Um átomo de dois níveis pode ser convenientemente descrito na base $|\sigma, \sigma_z\rangle$. Os autovalores de $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_z$ são dados por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2|\sigma, \sigma_z\rangle &= \sigma(\sigma + 2)|\sigma, \sigma_z\rangle, \\ \hat{\sigma}_z|\sigma, \sigma_z\rangle &= \sigma_z|\sigma, \sigma_z\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para um átomo $\sigma = 1$ e $\sigma_z = \pm 1$. Para mais de um átomo veremos mais adiante como tratar.

É conveniente definir os operadores de levantamento e abaixamento respectivamente por

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ &= \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}, \\ \hat{\sigma}_- &= \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2},\end{aligned}\tag{A.5}$$

que satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned}[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_z, \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+] &= 2\hat{\sigma}_+, \\ [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_-] &= -2\hat{\sigma}_-.\end{aligned}\tag{A.6}$$

Os operadores $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_z$ são geradores da álgebra de Lie SU(2) e o respectivo operador Casimir dado por $\hat{\sigma}^2 = 4\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - 2\sigma_z + \hat{\sigma}_z^2$. Das relações de comutação acima vemos que $\hat{\sigma}_+$ aumenta de 2 unidades o autovalor de $\hat{\sigma}_z$ e $\hat{\sigma}_-$ diminui de 2 unidades o autovalor de $\hat{\sigma}_z$. Podemos portanto escrever

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+|\sigma, \sigma_z\rangle &= c_+|\sigma, \sigma_z + 2\rangle, \\ \hat{\sigma}_-|\sigma, \sigma_z\rangle &= c_-|\sigma, \sigma_z - 2\rangle.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Para determinar os coeficientes c_+ e c_- usamos a relação do operador Casimir para escrever

$$\begin{aligned}\langle \sigma, \sigma_z | \hat{\sigma}_-^\dagger \hat{\sigma}_- | \sigma, \sigma_z \rangle &= \langle \sigma, \sigma_z | \frac{\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_z(\hat{\sigma}_z - 2)}{4} | \sigma, \sigma_z \rangle \\ |c_-|^2 &= \frac{\sigma(\sigma + 2) - \sigma_z(\sigma_z - 2)}{4}.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Analogamente podemos obter c_+ . Reescrevemos (A.7) como

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_+|\sigma, \sigma_z\rangle &= \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+2) - \sigma_z(\sigma_z+2)}}{2}|\sigma, \sigma_z+2\rangle, \\
\hat{\sigma}_-|\sigma, \sigma_z\rangle &= \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+2) - \sigma_z(\sigma_z-2)}}{2}|\sigma, \sigma_z-2\rangle.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

A.1 Adição do momento angular

Quando dois ou mais átomos são combinados para formar um spin total do sistema devemos somar vetorialmente os spins de cada átomo e as componentes $\hat{\sigma}_z$ podem ser somadas escalarmente. Como exemplo considere o caso de dois átomos. O operador $\hat{\sigma}$ e a componente $\hat{\sigma}_z$ total podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2, \\
\hat{\sigma}_z &= \hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

portanto $\hat{\sigma}^2$ é escrito como

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + 2\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2. \tag{A.11}$$

Para escrever (A.11) de uma forma mais conveniente lembramos que $\hat{\sigma}_1^2 = 4\hat{\sigma}_{1+}\hat{\sigma}_{1-} - 2\sigma_{1z} + \hat{\sigma}_{1z}^2$ e analogamente para $\hat{\sigma}_2^2$. Também podemos escrever

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_1 \cdot \hat{\sigma}_2 &= \hat{\sigma}_{1x}\hat{\sigma}_{2x} + \hat{\sigma}_{1y}\hat{\sigma}_{2y} + \hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z} \\
&= 2\hat{\sigma}_{1+}\hat{\sigma}_{2-} + 2\hat{\sigma}_{1-}\hat{\sigma}_{2+} + \hat{\sigma}_{1z}\hat{\sigma}_{2z},
\end{aligned} \tag{A.12}$$

e substituindo em (A.11) obtemos

$$\hat{\sigma}^2 = 4\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - 2\sigma_z + \hat{\sigma}_z^2, \tag{A.13}$$

onde $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{1+} + \hat{\sigma}_{2+}$ e $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{1-} + \hat{\sigma}_{2-}$.

A base produto dos dois átomos $|\sigma_1, \sigma_{1z}\rangle|\sigma_2, \sigma_{2z}\rangle$ pode ser, por motivos de simplificação, escrita simplesmente $|\sigma_{1z}, \sigma_{2z}\rangle$. Nesta base os estados possíveis são $|1, 1\rangle$; $|1, -1\rangle$; $|-$

$1, 1\rangle; |-1, -1\rangle$. Diagonalizando $\hat{\sigma}^2$, os autovetores na base $|\sigma, \sigma_z\rangle$ são $|2, 2\rangle; |2, 0\rangle; |2, -2\rangle; |0, 0\rangle$, que em termos da base produto são escritos como

$$\begin{aligned} |2, 2\rangle &= |1, 1\rangle, \\ |2, 0\rangle &= \frac{|1, -1\rangle + |-1, 1\rangle}{\sqrt{2}}, \\ |2, -2\rangle &= |-1, -1\rangle, \\ |0, 0\rangle &= \frac{|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aumentando-se o número de átomos o espaço vetorial aumenta e começa a ficar trabalhoso fazer esses cálculos na mão. Para três átomos, por exemplo, o espaço vetorial aumenta para 8. Mas existe bastante já pronto. Os coeficientes para mudança de base $|\sigma, \sigma_z\rangle \longrightarrow |\sigma_{1z}, \sigma_{2z}\rangle$ são chamados de coeficientes de Clebsch-Gordan e são tabelados. Para maiores detalhes veja [142].

Apêndice B

Representação de interação

Determinar a dinâmica de um sistema quântico é um dos problemas básicos da mecânica quântica. Diferentes métodos são descritos nos livros de mecânica quântica. Um sistema quântico representado pelo Hamiltoniano \hat{H} tem sua dinâmica totalmente determinada resolvendo-se a equação de Schrödinger dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = \hat{H} \Psi(t), \quad (\text{B.1})$$

onde $\Psi(t)$ é o estado do sistema no tempo t e carrega consigo toda a informação que se possa obter. No tratamento mais geral o Hamiltoniano pode depender do tempo, entretanto, em muitos casos práticos o Hamiltoniano é independente do tempo. A solução da equação (B.1) para um Hamiltoniano independente do tempo é dada por

$$\Psi(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \Psi(0), \quad (\text{B.2})$$

onde $\Psi(0)$ é o estado inicial do sistema.

Se sabemos como atuar o operador $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$ sobre o estado inicial, então o problema de determinar a dinâmica do sistema está resolvido. Este procedimento no qual o estado carrega a dependência temporal é conhecido como representação de Schrödinger. Alternativamente à representação de Schrödinger, a dinâmica do sistema pode ser determinada resolvendo-se a equação de Heisenberg, onde a dependência temporal está no operador \hat{O} , que representa um observável, e não no estado. A mecânica quântica nos permite essa liberdade, pois o valor esperado do observável $\langle \hat{O} \rangle$, quantidade medida experimentalmente, é o mesmo em qualquer representação.

Com o objetivo de obter a equação de movimento na representação de Heisenberg, definimos que um observável na representação de Heisenberg é obtido de acordo com a equação

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{O}_S \hat{U}(t), \quad (\text{B.3})$$

onde o índice diferencia o operador na representação de Heisenber (H) do operador na representação de Schrödinger (S) e $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$ quando \hat{H} não depende do tempo. O estado na representação de Heisenberg, que não carrega dependência temporal, pode ser obtido pela transformação

$$\Psi_H = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \Psi_S(t). \quad (\text{B.4})$$

Observe que em $t = 0$ as duas representações se coincidem.

Diferenciando a equação (B.3) com relação ao tempo, obtemos a equação de movimento de Heisenberg dada por

$$\frac{d\hat{O}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}_H, \hat{H}]. \quad (\text{B.5})$$

Nas passagens omitidas para se chegar à equação (B.5) devemos lembrar que \hat{O}_S não depende do tempo, o operador $\hat{U}(t)$ é unitário e portanto $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$.

Um outro procedimento alternativo é a representação de interação, que consiste em deixar parte da dependência temporal no estado e outra parte no observável. A representação de interação é apropriada quando o Hamiltoniano do sistema pode ser separado em um Hamiltoniano livre \hat{H}_0 , que não envolve interação entre os subsistemas, e o Hamiltoniano de interação \hat{H}_1 , que envolve a interação entre os subsistemas. Considerando que o Hamiltoniano total do sistema possa ser escrito como

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (\text{B.6})$$

definimos o operador e o estado na representação de interação como

$$\hat{O}_I(t) = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{O}_S e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \quad (\text{B.7})$$

$$\Psi_I(t) = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \Psi_S(t). \quad (\text{B.8})$$

Diferenciando as duas equações com relação ao tempo obtemos as equações de movimento na representação de interação para operadores e para estados da forma

$$\frac{d\hat{O}_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}_I, \hat{H}_0], \quad (\text{B.9})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\Psi_I(t) = \hat{H}_I\Psi_I(t). \quad (\text{B.10})$$

Portanto, na representação de interação a evolução de um operador é determinada por \hat{H}_0 na forma de uma equação de Heisenberg (B.9) e a evolução do estado é determinado por \hat{H}_I na forma de uma equação de Schrödinger (B.10), onde $\hat{H}_I = e^{\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}} \hat{H}_1 e^{-\frac{i\hat{H}_0 t}{\hbar}}$.

Apêndice C

Cálculo analítico do operador densidade reduzido do sistema no modelo adiabático de perda de coerência

Na solução analítica do operador densidade reduzido do sistema calculado na equação (7.13), deixamos para calcular o traço sobre os estados do banho separadamente neste apêndice. Vamos seguir a solução dada na ref. [130] fazendo alguns passos com mais detalhes. Usaremos estados coerentes para avaliar o traço sobre operadores que atuam no estado do ambiente (ver equação (7.12)). Um estado coerente $|\alpha\rangle$ é autoestado do operador de aniquilação com autovalor α , de forma que

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{C.1})$$

onde $|n\rangle$ é um estado de Fock.

Estados coerentes não são ortogonais,

$$\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = e^{(\alpha_1^*\alpha_2 - \frac{1}{2}|\alpha_1|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2)}, \quad (\text{C.2})$$

mas satisfazem a relação de completeza,

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}, \quad (\text{C.3})$$

onde $d^2\alpha = \frac{1}{\pi}d(\text{Re}\alpha)d(\text{Im}\alpha)$. O traço sobre algum operador \hat{A} é definido como

$$\text{tr}(\hat{A}) = \int d^2\alpha \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle. \quad (\text{C.4})$$

Reescrevemos a equação (7.12) da seguinte forma

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,l=1}^8 \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l) \frac{t}{\hbar}} \prod_k Z_k^{-1} \text{tr}_B \left(\hat{S}_{jl,k} \right) |\phi_j\rangle \langle \phi_l|, \quad (\text{C.5})$$

onde

$$S_{jl,k} = e^{-i(\hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_j(\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k)) \frac{t}{\hbar}} e^{-\beta \hbar \omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k} e^{i(\hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \lambda_l(\chi_k \hat{B}_k^\dagger + \chi_k^* \hat{B}_k)) \frac{t}{\hbar}}. \quad (\text{C.6})$$

Por hora podemos omitir o índice k . Para resolver o traço sobre \hat{S}_{jl} inserimos operadores identidades, definidos na equação (C.3), entre as exponenciais,

$$\text{tr}_B \left(\hat{S}_{jl} \right) = \int d^2\alpha_0 d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 \langle \alpha_0 | e^{-i \frac{t}{\hbar} \hat{\gamma}_j} | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1 | e^{-\beta \hbar \omega \hat{B}^\dagger \hat{B}} | \alpha_2 \rangle \langle \alpha_2 | e^{i \frac{t}{\hbar} \hat{\gamma}_l} | \alpha_0 \rangle, \quad (\text{C.7})$$

onde $\hat{\gamma}_j = \hbar\omega \hat{B}^\dagger \hat{B} + \lambda_j(\chi \hat{B}^\dagger + \chi^* \hat{B})$.

Para resolver a exponencial do meio vamos usar uma relação de igualdade para operadores que satisfaçam a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Para estes casos podemos escrever

$$e^{\Omega \hat{a}^\dagger \hat{a}} = N[e^{\hat{a}^\dagger (e^\Omega - 1) \hat{a}}], \quad (\text{C.8})$$

onde N significa ordenamento normal, ou seja, $N[e^{\hat{a}^\dagger (e^\Omega - 1) \hat{a}}] = \sum_n \frac{\hat{a}^{\dagger n} (e^\Omega - 1)^n \hat{a}^n}{n!}$, e Ω é uma constante qualquer. Retornando à equação (C.7), podemos expressar a exponencial do meio como

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 | e^{-\beta \hbar \omega \hat{B}^\dagger \hat{B}} | \alpha_2 \rangle &= \langle \alpha_1 | e^{\hat{B}^\dagger (e^{-\beta \hbar \omega} - 1) \hat{B}} | \alpha_2 \rangle, \\ &= \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle e^{\alpha_1^* (e^{-\beta \hbar \omega} - 1) \alpha_2}, \\ &= e^{(\alpha_1^* \alpha_2 - \frac{1}{2} |\alpha_1|^2 - \frac{1}{2} |\alpha_2|^2 + \alpha_1^* (e^{-\beta \hbar \omega} - 1) \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Definindo o operador $\hat{\xi} = \hat{B} + \frac{\lambda_j \chi}{\hbar \omega}$, podemos escrever de forma apropriada o operador $\hat{\gamma}_j$ como

$$\hat{\gamma}_j = \hbar\omega\hat{\xi}^\dagger\hat{\xi} - \frac{\lambda_j^2|\chi|^2}{\hbar\omega}. \quad (\text{C.10})$$

Observando que $[\hat{\xi}, \hat{\xi}^\dagger] = 1$, escrevemos a primeira exponencial da equação (C.7) como

$$\begin{aligned} \langle \alpha_0 | e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{\gamma}_j} | \alpha_1 \rangle &= e^{\frac{it\lambda_j^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega}} \langle \alpha_0 | e^{\hat{\xi}^\dagger(e^{-it\omega}-1)\hat{\xi}} | \alpha_1 \rangle, \\ &= e^{\frac{it\lambda_j^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega}} \langle \alpha_0 | \alpha_1 \rangle e^{(\alpha_0^* + \frac{\lambda_j\chi^*}{\hbar\omega})(e^{-it\omega}-1)(\alpha_1 + \frac{\lambda_j\chi}{\hbar\omega})}, \\ &= e^{\left[\frac{it\lambda_j^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega} + \alpha_0^*\alpha_1 - \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_1|^2 + (\alpha_0^* + \frac{\lambda_j\chi^*}{\hbar\omega})(e^{-it\omega}-1)(\alpha_1 + \frac{\lambda_j\chi}{\hbar\omega}) \right]}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

E analogamente a terceira exponencial da equação (C.7) é escrita como

$$\langle \alpha_2 | e^{i\frac{t}{\hbar}\hat{\gamma}_l} | \alpha_0 \rangle = e^{\left[\frac{-it\lambda_l^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega} + \alpha_2^*\alpha_0 - \frac{1}{2}|\alpha_2|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 + (\alpha_2^* + \frac{\lambda_l\chi^*}{\hbar\omega})(e^{it\omega}-1)(\alpha_0 + \frac{\lambda_l\chi}{\hbar\omega}) \right]}. \quad (\text{C.12})$$

Substituímos os resultados (C.9, C.11 e C.12) na integral da equação (C.7), alguns termos se cancelam e rearranjamos de forma a deixar em evidência os termos com α_0 e deixamos para fora da integral os termos que não dependem das variáveis de integração. Fazendo isso obtemos

$$\begin{aligned} tr_B(\hat{S}_{jl}) &= e^{\left[i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)\frac{t|\chi|^2}{\hbar^2\omega} + \frac{\lambda_j^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega^2}(e^{-it\omega}-1) + \frac{\lambda_l^2|\chi|^2}{\hbar^2\omega^2}(e^{it\omega}-1) \right]} \\ &\quad \times \int d^2\alpha_0 d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 \left[e^{(-|\alpha_0|^2 + \alpha_0 A + \alpha_0^* B - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2)} \right. \\ &\quad \left. \times e^{(\alpha_1^*\alpha_2 e^{-\beta\hbar\omega} + \alpha_1 \frac{\lambda_j\chi^*}{\hbar\omega}(e^{-it\omega}-1) + \alpha_2^* \frac{\lambda_l\chi}{\hbar\omega}(e^{it\omega}-1))} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \alpha_2^* e^{it\omega} + \frac{\lambda_l\chi^*}{\hbar\omega}(e^{it\omega}-1), \\ B &= \alpha_1 e^{-it\omega} + \frac{\lambda_j\chi}{\hbar\omega}(e^{-it\omega}-1). \end{aligned}$$

Para fazer a integração sobre α_0 separamos a parte real da parte imaginária como $\alpha_0 = x_0 + iy_0$. Separando somente a integral sobre α_0 , temos

$$\begin{aligned} \int d^2\alpha_0 (-|\alpha_0|^2 + \alpha_0 A + \alpha_0^* B) &= \frac{1}{\pi} \int dx_0 dy_0 (-x_0^2 - y_0^2 + x_0(A+B) + iy_0(A-B)), \\ &= e^{AB}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Para resolver a integral formamos um quadrado perfeito nas variáveis x_0 e y_0 , ficando com a forma de uma função gaussiana, cuja integral tem solução conhecida. Substituindo esse resultado na integral (C.13) e rearranjando os termos de forma a deixar em evidência os termos com α_1 , obtemos

$$\begin{aligned} tr_B(\hat{S}_{jl}) &= e \left[i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2) \frac{t|x|^2}{\hbar^2 \omega} + \frac{\lambda_j^2 |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{-it\omega} - 1) + \frac{\lambda_l^2 |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{it\omega} - 1) + \frac{\lambda_j \lambda_l |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{-it\omega} - 1)(e^{it\omega} - 1) \right] \\ &\quad \times \int d^2 \alpha_1 d^2 \alpha_2 e^{[-|\alpha_1|^2 + \alpha_1 C + \alpha_1^* D - |\alpha_2|^2 + \frac{\alpha_2^* \chi}{\hbar \omega} (\lambda_j - \lambda_l)(1 - e^{it\omega})]}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} C &= \alpha_2^* + \frac{\chi^*}{\hbar \omega} (\lambda_j - \lambda_l)(e^{-it\omega} - 1), \\ D &= \alpha_2 e^{-\beta \hbar \omega}. \end{aligned}$$

A integração sobre a variável α_1 tem a mesma forma da integral sobre α_0 na equação (C.14). Portanto, com o mesmo procedimento integramos sobre α_1 reagrupamos os termos e obtemos

$$\begin{aligned} tr_B(\hat{S}_{jl}) &= e \left[i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2) \frac{t|x|^2}{\hbar^2 \omega} + \frac{\lambda_j^2 |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{-it\omega} - 1) + \frac{\lambda_l^2 |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{it\omega} - 1) + \frac{\lambda_j \lambda_l |x|^2}{\hbar^2 \omega^2} (e^{-it\omega} - 1)(e^{it\omega} - 1) \right] \\ &\quad \times \int d^2 \alpha_2 e^{[-|\alpha_2|^2 (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) + \alpha_2 F + \alpha_2^* G]}, \end{aligned} \quad (C.15)$$

onde

$$\begin{aligned} F &= \frac{\chi^*}{\hbar \omega} (\lambda_j - \lambda_l)(e^{-it\omega} - 1)e^{-\beta \hbar \omega}, \\ G &= \frac{\chi}{\hbar \omega} (\lambda_j - \lambda_l)(1 - e^{it\omega}). \end{aligned}$$

Para resolver a integral da equação (C.15), escrevemos $\alpha_2 = x_2 + iy_2$ e rearranjamos os termos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int d^2 \alpha_2 e^{[-|\alpha_2|^2 (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) + \alpha_2 F + \alpha_2^* G]} &= \frac{1}{\pi} \int dx_2 dy_2 e^{-(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \left[\left(x_2 - \frac{x_2(F+G)}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right) + \left(y_2 - \frac{iy_2(F-G)}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right) \right]} \\ &= \frac{e^{\frac{FG}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}. \end{aligned} \quad (C.16)$$

Substituindo esse resultado na equação (C.15) temos

$$\begin{aligned} tr_B \left(\hat{S}_{jl} \right) &= e^{\frac{|X|^2}{\hbar^2 \omega^2} [i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)t\omega + \lambda_j^2(e^{-it\omega} - 1) + \lambda_l^2(e^{it\omega} - 1) + \lambda_j \lambda_l (e^{-it\omega} - 1)(e^{it\omega} - 1)]} \\ &\times \frac{1}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega})} e^{\left[-\frac{|X|^2}{\hbar^2 \omega^2} (\lambda_j - \lambda_l)^2 \frac{(e^{-it\omega} - 1)(e^{it\omega} - 1)e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right]}. \end{aligned} \quad (C.17)$$

Substituindo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (e^{-it\omega} - 1)(e^{it\omega} - 1) &= 4 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right), \\ \lambda_j^2 (e^{-it\omega} - 1) + \lambda_l^2 (e^{it\omega} - 1) &= -2(\lambda_j^2 + \lambda_l^2) \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) - i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2) \sin(\omega t), \end{aligned}$$

e rearranjando alguns termos obtemos

$$\begin{aligned} tr_B \left(\hat{S}_{jl} \right) &= e^{\frac{|X|^2}{\hbar^2 \omega^2} [-i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)(\sin(\omega t) - \omega t) - 2 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) (\lambda_j - \lambda_l)^2]} \\ &\times \frac{1}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega})} e^{\left[-\frac{|X|^2}{\hbar^2 \omega^2} (\lambda_j - \lambda_l)^2 \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \right]}, \\ &= Z e^{-\frac{|X|^2}{\hbar^2 \omega^2} [i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)(\sin(\omega t) - \omega t) + 2(\lambda_j - \lambda_l)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}]}. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Este é o resultado equivalente a um único modo k . Generalizamos este resultado para qualquer modo k e substituímos na equação (C.5)

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,l=1}^8 \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l) \frac{t}{\hbar}} e^{-\sum_k \frac{|X_k|^2}{\hbar^2 \omega_k^2} \left[i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2)(\sin(\omega_k t) - \omega_k t) + 2(\lambda_j - \lambda_l)^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right]} |\phi_j\rangle \langle \phi_l|. \quad (C.19)$$

Para escrever de forma mais compacta definimos outras duas variáveis

$$\Gamma(t) = 8 \sum_k \frac{|X_k|^2}{\omega_k^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_k t}{2} \right) \coth \left(\frac{\beta \hbar \omega_k}{2} \right) \quad (C.20)$$

e

$$C(t) = \sum_k \frac{|X_k|^2}{\omega_k^2} (\sin(\omega_k t) - \omega_k t). \quad (C.21)$$

Por fim, escrevemos o operador densidade reduzido do sistema, interagindo adiabaticamente com o ambiente como

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{j,l=1}^8 \rho_{jl}(0) e^{-i(\lambda_j - \lambda_l) \frac{t}{\hbar}} e^{-i(\lambda_j^2 - \lambda_l^2) \frac{C(t)}{\hbar^2}} e^{-(\lambda_j - \lambda_l)^2 \frac{\Gamma(t)}{4\hbar^2}} |\phi_j\rangle \langle \phi_l|. \quad (C.22)$$

Apêndice D

Decoherence of tripartite states - a trapped ion coupled to an optical cavity

Decoherence of tripartite states—a trapped ion coupled to an optical cavity

S Shelly Sharma¹, E de Almeida¹ and N K Sharma²

¹ Depto. de Física, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 86051-990, PR, Brazil

² Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 86051-990, PR, Brazil

E-mail: shelly@uel.br, eduardo@fisica.uel.br and nsharma@uel.br

Received 26 September 2005, in final form 15 November 2005

Published 9 January 2006

Online at stacks.iop.org/JPhysB/39/695

Abstract

We investigate the decoherence process of a three-qubit system obtained by manipulating the state of a trapped two-level ion coupled to an optical cavity. Interaction of the ion with a resonant laser and the cavity field tuned to red sideband of ionic vibrational motion generates tripartite entanglement of the internal state of the ion, vibrational state of ionic centre of mass motion and the cavity-field state. Non-dissipative decoherence occurs due to entanglement of the system with the environment, modelled as a set of non-interacting harmonic oscillators. Analytic expressions for the state operator of tripartite composite system, the probability of generating maximally entangled GHZ state and the population inversion have been obtained. Coupling to environment results in exponential decay of off-diagonal matrix elements of the state operator with time as well as a phase decoherence of the component states. Numerical calculations to examine the time evolution of GHZ state generation probability and population inversion for different values of system environment coupling strengths are performed. Using negativity as an entanglement measure and linear entropy as a measure of mixedness, the entanglement dynamics of the tripartite system in the presence of decoherence sources has been analysed. The maximum tripartite entanglement is found to decrease with increase in the strength of system–environment coupling. The negativity as well as the linear entropy as entanglement measures gives qualitatively similar results, uniquely identifying maximally entangled and separable states of the system. For large values of system–environment coupling strength, the mixed states of the composite system lying at the boundary of an entangled–separable region are reached. For these states, whereas the negativity measures only quantum correlations, the linear entropy measures classical correlations as well.

1. Introduction

Controlled manipulation of quantum states and implementation of quantum logic gates are essential elements of a quantum computer. Quantum computation relies on non-classical properties of qubits such as entanglement. Entanglement dynamics is of utmost importance to quantum communication [1], dense coding [2] and quantum teleportation [3], as well. Cold ions in a linear trap [4] offer a promising physical system to implement quantum computation, as each ion allows two-qubit state manipulation. One of the experimental efforts to realize multipartite entanglement involves trapping two-level ion in an optical cavity. Deterministic control of coupling of a single calcium ion in a linear trap to the cavity field has been reported [5]. The trap geometry is well suited to storing two or more ions along the axis. Coupling of vibrational and internal states of a cooled trapped ion to a quantized field inside an optical cavity has been successfully achieved [6]. More than one trapped ion can be used to construct a more complex multiple function system in which quantum states of several trapped ions entangled with cavity photons are manipulated in a controlled manner. A string of trapped ions in a cavity may be used for implementing quantum gates [7]. In quantum networks involving cavity QED setups [8], quantum information is stored and processed by ions trapped in a cavity. Decoherence of quantum systems is one of the major hurdles to implement quantum computers. Suppression of quantum coherence occurs due to interactions of the quantum system with environment resulting in random and unknown perturbations of the system Hamiltonian. In a previous article [9], we proposed a scheme to generate three-qubit maximally entangled GHZ state, using trapped ion interacting with a resonant external laser and sideband tuned single mode of a cavity field. In this paper, we investigate the decoherence process of the three-qubit system obtained by manipulating the state of a two-level trapped ion coupled to an optical cavity. In the context of a qubit based on a single Ca^+ ion, Schmidt-Kaler *et al* [10] have found magnetic field fluctuations and laser frequency fluctuations to be the major decoherence sources. Decoherence of motional quantum states of a trapped atom coupled to engineered phase and amplitude reservoirs has been measured [11, 12]. The trap frequency was changed by applying potentials to trap electrodes to simulate a phase reservoir. In general, the environment or heat bath is modelled as a system of non-interacting boson modes [13]. It is known that for harmonic systems a heat bath is effectively equivalent to an external uncorrelated random force acting on the quantum system. As such, the decoherence effects due to magnetic field fluctuations, laser frequency fluctuations and potentials applied to electrodes can be modelled as a system of non-interacting boson modes. Other important decoherence sources are cavity losses and spontaneous decay. Generally long-lived internal states of the ion with lifetime of the order of 1 s are used to encode a qubit. Optical cavity lifetimes in the current experiments are close to $2 \mu\text{s}$. The case where spontaneous decay effects and cavity losses become important has been examined by Fidio *et al* [14]. In the present work, these two effects are assumed to be negligible.

As the laser–ion interaction times involved in experiments with ions trapped in a cavity are in the micro seconds range, Markovian approximation is likely to yield undesirable results. We consider here only adiabatic decoherence of the system with no energy exchange between the quantum system and environment. A detailed discussion on adiabatic decoherence has been given by Mozyrsky and Privman in [15]. Starting from an initial state in which the system and environment are in a separable state, the state operator of the ion–cavity system is obtained by tracing over the environment degrees of freedom. Coherent states are used to evaluate the trace [15]. The decoherence effects result in a state operator with off-diagonal matrix elements decaying with time, in the eigen-basis of the interaction Hamiltonian. The state operator is used to examine the decoherence effects on the probability of generating maximally entangled

tripartite GHZ state and population inversion of two-level ion. As the coherences decrease the system tends to a purely mixed state of energy eigenvectors. Decoherence of tripartite entanglement is analysed by applying the Peres–Horodecki condition for separability [16] to bipartite decompositions of the composite system. A state is separable if the partial transpose of its density matrix with respect to a subsystem is positive semidefinite. An entangled state violates the positive partial transpose (PPT) separability criterion. Negativity [17] is an entanglement measure based on PPT separability criterion. We use negativity to characterize the entanglement and linear entropy to measure the mixedness of three subsystems.

2. Unitary evolution of the isolated system

Consider a single two-level ion trapped in a high finesse optical cavity. The frequency of radio frequency (Paul) trap along the x axis is ν and the excitation energy of the ion is $\hbar\omega_0$. The ion is radiated by an external resonant laser of frequency ω_L and interacts with the single mode cavity field of frequency ω_c tuned to red sideband of ionic vibrational motion. Interaction with an external laser field as well as the cavity field generates entanglement of internal states of the ion, vibrational states of ionic centre of mass and the cavity-field number state. The free Hamiltonian of the system is

$$\hat{H}_{0S} = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (1)$$

$\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ and $\hat{b}^\dagger(\hat{b})$ being the creation (destruction) operators for vibrational phonon and cavity-field photon respectively. The Pauli operators $\hat{\sigma}(k = z, +, -)$ model the internal state of the ion. With the ion placed close to the node of cavity-field standing wave, the interaction Hamiltonian is given by

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \hbar\Omega[\hat{\sigma}_+ \exp[i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - i\omega_L t] + \hat{\sigma}_- \exp[i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + i\omega_L t]] \\ & + \hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{b} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger) \sin[\eta_c(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)], \end{aligned} \quad (2)$$

where Ω , g , η_L and η_c are the Rabi frequency, the ion–cavity coupling strength, ion–laser Lamb Dicke parameter and the ion–cavity field Lamb Dicke parameter, respectively. We work in the Lamb Dicke regime, that is, $\eta_L \ll 1$, $\eta_c \ll 1$. In the interaction picture determined by the transformation $\hat{U} = \exp(i\hat{H}_{0St}/\hbar)$ and rotating wave approximation, for $\omega_L = \omega_0$ and $\omega_c = \omega_0 - \nu$, the interaction Hamiltonian reduces to

$$\hat{H}_{II} = \hbar\Omega[\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-] + \hbar g \eta_c [\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger]. \quad (3)$$

The unitary evolution of the isolated system in interaction picture is given by

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_I(t)}{\partial t} = \hat{H}_{II} \Psi_I(t),$$

where $\Psi_I(t) = \exp(i\hat{H}_{0St}/\hbar) \Psi_S(t)$.

2.1. Basis truncation

We expand \hat{H}_{II} in the space of basis vectors $|i, k, l\rangle$ as

$$\hat{H}_{II} = \sum_{i,k,l,i',k',l'} \langle i', k', l' | \hat{H}_{II} | i, k, l \rangle | i', k', l' \rangle \langle i, k, l |, \quad (4)$$

where $i = (g \text{ or } e)$ and $k, l(0, 1, \dots, \infty)$, denote the state of ionic vibrational motion and the cavity-field number state, respectively. We isolate a four-dimensional vector space containing the computational basis vectors $|g, m-1, n-1\rangle$, $|e, m-1, n-1\rangle$, $|g, m, n\rangle$ and $|e, m, n\rangle$

for a given choice of m, n values. The matrix representing the interaction Hamiltonian acting in the four-dimensional space is

$$\hat{H}_{\text{IS}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \hbar\Omega & 0 & 0 \\ \hbar\Omega & 0 & \hbar g\eta_c\sqrt{mn} & 0 \\ 0 & \hbar g\eta_c\sqrt{mn} & 0 & \hbar\Omega \\ 0 & 0 & \hbar\Omega & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

The unitary transformation that diagonalizes \hat{H}_{IS} is easily obtained and yields the eigenvectors satisfying $\hat{H}_{\text{IS}}\Phi_p = E_p\Phi_p$, ($p = 1, 4$). The computational basis vectors are related to the eigenvectors Φ_p through

$$\begin{bmatrix} |g, m-1, n-1\rangle \\ |e, m-1, n-1\rangle \\ |g, m, n\rangle \\ |e, m, n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A+B}{\sqrt{2}} & \frac{A-B}{\sqrt{2}} & \frac{A-B}{\sqrt{2}} & \frac{-A-B}{\sqrt{2}} \\ \frac{A-B}{\sqrt{2}} & \frac{-A-B}{\sqrt{2}} & \frac{A+B}{\sqrt{2}} & \frac{A-B}{\sqrt{2}} \\ \frac{B-A}{\sqrt{2}} & \frac{A+B}{\sqrt{2}} & \frac{A+B}{\sqrt{2}} & \frac{A-B}{\sqrt{2}} \\ \frac{-A-B}{\sqrt{2}} & \frac{B-A}{\sqrt{2}} & \frac{A-B}{\sqrt{2}} & \frac{-A-B}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

where $a_{mn} = \frac{1}{2}g\eta_c\sqrt{mn}$, $\mu_{mn} = \sqrt{a_{mn}^2 + \Omega^2}$, $A^2 = (\mu_{mn} + \Omega)/4\mu_{mn}$ and $B^2 = (\mu_{mn} - \Omega)/4\mu_{mn}$. The corresponding eigenvalues are $E_1 = \hbar(\mu_{mn} - a_{mn})$, $E_2 = -\hbar(\mu_{mn} + a_{mn})$, $E_3 = \hbar(\mu_{mn} + a_{mn})$ and $E_4 = \hbar(a_{mn} - \mu_{mn})$.

2.2. Unitary evolution in truncated basis space

Unitary time evolution of the system due to interaction operator \hat{H}_{IS} had been obtained, analytically, in [9] for initial states $|g, m-1, n-1\rangle$ and $|e, m-1, n-1\rangle$. For interaction time t_p such that $\mu_{mn}t_p = p\pi$, $p = 1, 2, \dots$, the initial state $|g, m-1, n-1\rangle$ is found to evolve into

$$\Psi_{\text{I}}(t_p) = (-1)^p [\cos(a_{mn}t_p)|g, m-1, n-1\rangle - i \sin(a_{mn}t_p)|e, m, n\rangle]. \quad (7)$$

Now consider a special initial state with the ion in its ground state occupying the lowest energy trap state, while the cavity is prepared in vacuum state ($m = n = 1$). Without taking into consideration the decoherence effects, the ratio $\alpha = (\mu_{11}/a_{11})$ determines the interaction time t_p needed to generate maximally entangled tripartite GHZ state. Leaving out an overall phase factor, for an interaction time t_p such that $a_{11}t_p = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots$, ($\alpha = 4$), the system is found to be in the state

$$\Psi_{\text{GHZ,I}}^-(t_p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0, 0\rangle - i|e, 1, 1\rangle), \quad (8)$$

and for $a_{11}t_p = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots$, the state of the system is

$$\Psi_{\text{GHZ,I}}^+(t_p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0, 0\rangle + i|e, 1, 1\rangle). \quad (9)$$

The density operator representation for these states is

$$\hat{\rho}_{\text{GHZ,I}}(t_p) = |\Psi_{\text{GHZ,I}}(t_p)\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ,I}}(t_p)|. \quad (10)$$

Neglecting an overall phase factor, the states can be written in Schrodinger picture as

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{GHZ}}^-(t_p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0, 0\rangle - i \exp(-i2\omega_0 t)|e, 1, 1\rangle) \\ \Psi_{\text{GHZ}}^+(t_p) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0, 0\rangle + i \exp(-i2\omega_0 t)|e, 1, 1\rangle). \end{aligned}$$

3. Decoherence of unitary evolution in truncated space

We note that the interaction Hamiltonian \hat{H}_Π (equation (4)) connects the model space states to states outside the model space. For the specific case of initial state $|g, 0, 0\rangle$, the leading term in the probability of finding a state outside the model space varies as t^8 . The states outside the model space may be considered as part of the environment states. The resulting decoherence effects can be accounted for by coupling the model space interaction Hamiltonian to the environment modelled as a set of oscillators. We recall that the scattering outside the model space results in internal states linked to motional states with phonon number >1 , resulting in heating of the ions. In a realistic experimental set-up, the heating of ions trapped in a radio-frequency trap occurs due to the electric field noise from the trap electrodes [18]. The two effects cannot be separated. Error in initial phonon state preparation can also add to decoherence by additional scattering to states outside the model space. The cavity states with number of photons >1 are created and annihilated in the vector space outside the model space. In a lossy cavity photons leaving the cavity are akin to state reduction which can contribute to creating states in the model space. In this work we consider the average decoherence effects arising due to the decoherence sources such as magnetic field fluctuations, laser frequency fluctuations, potentials applied to electrodes and coupling to states outside the model space. The random perturbations of the Hamiltonian are accounted for by coupling the model space interaction Hamiltonian to environment modelled as a set of noninteracting harmonic oscillators [13]. The phase decoherence results in decay of entanglement needed for various computation related tasks. In interaction picture the Hamiltonian for the system and environment, with \hat{H}_{IS} coupled to environment, is given by

$$\hat{H} = \hat{H}_{IS} + \sum_k \hbar\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \hat{H}_{IS} \sum_k (g_k^* \hat{B}_k + g_k \hat{B}_k^\dagger), \quad (11)$$

where \hat{B}_k^\dagger and \hat{B}_k are bosonic creation and destruction operators for the environment mode of frequency ω_k . The coefficients g_k, g_k^* are the system environment couplings.

The initial state of the system is assumed to be $\hat{\rho}_S(0)$, while the environment is in an uncorrelated state, $\prod_k \hat{\theta}_k$, where $\hat{\theta}_k = Z_k^{-1} e^{-\beta\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k}$ and $Z_k = (1 - e^{-\beta\omega_k})^{-1}$ with $\beta = 1/(kT)$. The assumption that the environment is in an uncorrelated state allows exact solvability, though no physical fundamental reason can be given for this. However, as the initial state of the system is a doctored state, the assumption of separability of the system environment state at $t = 0$ holds. The state operator for the system is obtained by solving

$$\hat{\rho}_{IS}(t) = \text{Tr}_E \left(e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{\rho}_S(0) \prod_k \hat{\theta}_k e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \right), \quad (12)$$

where Tr_E refers to the operation of tracing over bosonic degrees of freedom used to model the environment. Working in the eigen-basis of \hat{H}_{IS} , we may write

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{IS}(t) = & \sum_{i,j} \text{Tr}_E \left(\exp \left(-it \sum_k \left(\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \frac{E_i}{\hbar} (g_k^* \hat{B}_k + g_k \hat{B}_k^\dagger) \right) \right) \prod_k \hat{\theta}_k \right. \\ & \times \exp \left(it \sum_k \left(\omega_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \frac{E_j}{\hbar} (g_k^* \hat{B}_k + g_k \hat{B}_k^\dagger) \right) \right) \\ & \times \exp \left[\frac{-i(E_i - E_j)t}{\hbar} \right] \langle \Phi_i | \hat{\rho}_S(0) | \Phi_j \rangle | \Phi_i \rangle \langle \Phi_j |. \end{aligned} \quad (13)$$

The trace over bosonic bath states is evaluated by using coherent states [15] and the resulting state operator for the system is

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_{\text{IS}}(t) = & \sum_{i,j} \langle \Phi_i | \widehat{\rho}_{\text{S}}(0) | \Phi_j \rangle \exp\left(\frac{-(E_i - E_j)^2 \Gamma(t)}{4.0\hbar^2}\right) \\ & \times \exp\left[-i\left(\frac{(E_i - E_j)t}{\hbar} + \frac{(E_i^2 - E_j^2)C(t)}{\hbar^2}\right)\right] | \Phi_i \rangle \langle \Phi_j |, \end{aligned} \quad (14)$$

where, using the notation of [15],

$$\Gamma(t) = 8 \sum_k \frac{|g_k|^2}{\omega_k^2} \sin^2\left(\frac{\omega_k t}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_k}{2}\right), \quad (15)$$

and

$$C(t) = \sum_k \frac{|g_k|^2}{\omega_k^2} (\sin(\omega_k t) - \omega_k t). \quad (16)$$

The summation over bath modes in equations (15) and (16) can be replaced by integration over frequency by introducing a frequency-dependent density function. For an ohmic dissipation characterized by density function $D(\omega)|g|^2 = \kappa\omega \exp(-\omega/\omega_c)$, we obtain

$$\Gamma(t) = 8\kappa \int d\omega \frac{\exp(-\omega/\omega_c)}{\omega} \coth\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right), \quad (17)$$

and

$$C(t) = \kappa \int d\omega \frac{\exp(-\omega/\omega_c)}{\omega} (\sin(\omega t) - \omega t), \quad (18)$$

where ω_c is a cut-off frequency and constant κ is a measure of system–bath coupling strength.

3.1. Initial state $\widehat{\rho}_{\text{S}}(0) = |g, m-1, n-1\rangle\langle g, m-1, n-1|$

We consider the case when the system is prepared, at $t = 0$, in the state $\widehat{\rho}_{\text{S}}(0) = |g, m-1, n-1\rangle\langle g, m-1, n-1|$. The state operator $\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t)$ obtained by putting in the energy spectrum of \widehat{H}_{IS} in equation (14) is

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}_{\text{IS}}(t) = & \frac{(A+B)^2}{2} [|\Phi_1\rangle\langle\Phi_1| + |\Phi_4\rangle\langle\Phi_4|] + \frac{(A-B)^2}{2} (|\Phi_2\rangle\langle\Phi_2| + |\Phi_3\rangle\langle\Phi_3|) \\ & - \frac{(A+B)^2}{2} \exp(-(\mu_{mn} - a_{mn})^2 \Gamma(t)) [\exp(-i2(\mu_{mn} - a_{mn})t) |\Phi_1\rangle\langle\Phi_4| \\ & + \exp(i2(\mu_{mn} - a_{mn})t) |\Phi_4\rangle\langle\Phi_1|] + \frac{(A-B)^2}{2} \exp(-(\mu_{mn} + a_{mn})^2 \Gamma(t)) \\ & \times [\exp(i2(\mu_{mn} + a_{mn})t) |\Phi_2\rangle\langle\Phi_3| + \exp(-i2(\mu_{mn} + a_{mn})t) |\Phi_3\rangle\langle\Phi_2|] \\ & + \frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(-\mu_{mn}^2 \Gamma(t)) [\exp[-i(2\mu_{mn}t - \varphi(t))] |\Phi_1\rangle\langle\Phi_2| \\ & + \exp[i(2\mu_{mn}t - \varphi(t))] |\Phi_2\rangle\langle\Phi_1| - \exp[-i(2\mu_{mn}t + \varphi(t))] |\Phi_3\rangle\langle\Phi_4| \\ & - \exp[i(2\mu_{mn}t + \varphi(t))] |\Phi_4\rangle\langle\Phi_3|] + \frac{(A^2 - B^2)}{2} \exp(-a_{mn}^2 \Gamma(t)) \\ & \times [\exp[i(2a_{mn}t + \varphi(t))] |\Phi_1\rangle\langle\Phi_3| + \exp[-i(2a_{mn}t + \varphi(t))] |\Phi_3\rangle\langle\Phi_1| \\ & - \exp[i(2a_{mn}t - \varphi(t))] |\Phi_2\rangle\langle\Phi_4| - \exp[-i(2a_{mn}t - \varphi(t))] |\Phi_4\rangle\langle\Phi_2|], \end{aligned} \quad (19)$$

where $\varphi(t) = 4\mu_{mn}a_{mn}C(t)$. The state operator $\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t)$ contains information about the decay of coherences due to coupling of the system with the environment.

4. Decoherence and GHZ state generation probability

Undergoing decoherence free time evolution, for $\widehat{\rho}_S(0) = |g, 0, 0\rangle\langle g, 0, 0|$ and the interaction time t_p such that $a_{11}t_p = \frac{\pi}{4}$, $\mu_{11}t_p = \pi$ ($\alpha = 4$), the system evolves into a maximally entangled tripartite two-mode GHZ state given by equation (8). We define GHZ state generation probability as $P_{\text{GHZ}}(t) = \text{tr}(\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t)\widehat{\rho}_{\text{GHZ},1}^{(-)})$, where $\widehat{\rho}_{\text{GHZ},1}^{(-)} = |\Psi_{\text{GHZ},1}^-\rangle\langle\Psi_{\text{GHZ},1}^-|$. Using equation (19) we write the density operator $\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t)$ for the choice $m = 1, n = 1$ and evaluate $P_{\text{GHZ}}(t)$. The resulting expression for GHZ state generation probability is

$$\begin{aligned} P_{\text{GHZ}}(t) = & \frac{1}{2} + \frac{\Omega^2}{4\mu_{11}^2} \exp(-\mu_{11}^2\Gamma(t)) \cos(2\mu_{11}t) \cos(\varphi(t)) \\ & + \frac{\Omega^2}{4\mu_{11}^2} (\exp(-a_{11}^2\Gamma(t)) \sin(2a_{11}t) \cos(\varphi(t)) - 1) \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{11} + a_{11}}{2\mu_{11}} \right)^2 \exp(-(\mu_{11} - a_{11})^2\Gamma(t)) \sin[2(\mu_{11} - a_{11})t] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{11} - a_{11}}{2\mu_{11}} \right)^2 \exp(-(\mu_{11} + a_{11})^2\Gamma(t)) \sin[2(\mu_{11} + a_{11})t]. \end{aligned} \quad (20)$$

We also calculate the population inversion defined as $I = P_g - P_e$, where $P_g(P_e)$ is the probability of finding the ion in ground (excited) state. For the choice $m = 1, n = 1$, in the state $\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t)$ of equation (19), we get

$$\begin{aligned} I = & \left(\frac{\mu_{11} + a_{11}}{2\mu_{11}} \right) \exp(-(\mu_{11} - a_{11})^2\Gamma(t)) \cos[2(\mu_{11} - a_{11})t] \\ & + \left(\frac{\mu_{11} - a_{11}}{2\mu_{11}} \right) \exp(-(\mu_{11} + a_{11})^2\Gamma(t)) \cos[2(\mu_{11} + a_{11})t]. \end{aligned} \quad (21)$$

In the limit $\kappa \rightarrow 0$ equations (19)–(21) reduce to decoherence free evolution of the state operator, the GHZ state generation probability and the population inversion, respectively. As the cavity is initially in vacuum state and ionic centre of mass in the lowest energy trap state, decoherence effects due to cavity decay and heating are expected to be small and have not been considered.

5. Negativity and linear entropy

The state of the three-qubit composite system is represented by $\widehat{\rho}_{\text{IS}}(t) = \widehat{\rho}_{ABC}(t)$, where A, B and C refer to the internal state of two-level ion, the state of vibrational motion and the cavity state respectively. A pure state of the tripartite system can be separable, or entangled. Entangled state may or may not have (biseparable) true tripartite entanglement. Bipartite entanglement is relatively well understood. Entanglement content of the tripartite system may be measured through the entanglement of its bipartite decompositions, that is, $A + (BC)$, $B + (AC)$ and $C + (AB)$. The decoherence effects result in a composite state $\widehat{\rho}_{ABC}(t)$, which is usually a mixed state. Mixed state entanglement is less understood than the pure state entanglement. On examining equation (19), in which the state operator is expressed in the eigen-basis of \widehat{H}_{IS} , we note that the diagonal matrix elements of density matrix are not affected by coupling to the environment, whereas the moduli of off-diagonal matrix elements decay with time. Consequently, when only non-dissipative decoherence is present the trace of $\widehat{\rho}_{ABC}(t)$ remains constant with time and the eigenvalues continue to be positive. Since $\widehat{\rho}_{ABC}(t)$ is positive definite, we use negativity proposed by Vidal and Werner [17] as an entanglement

measure for pure as well as mixed states. Negativity is based on partial transpose of density matrix of a composite system with respect to a subsystem.

The state of a bipartite system, composed of subsystems A and B in finite-dimensional Hilbert spaces d_A and d_B , is written as

$$\widehat{\rho} = \sum_{i,j=1}^{d_A} \sum_{m,r=1}^{d_B} \langle i, m | \widehat{\rho} | j, r \rangle |i, m\rangle \langle j, r|. \quad (22)$$

The partial transpose of density operator with respect to the sub-system A is defined as

$$\widehat{\rho}^{TA} = \sum_{i,j=1}^{d_A} \sum_{m,r=1}^{d_B} \langle i, m | \widehat{\rho} | j, r \rangle |j, m\rangle \langle i, r|. \quad (23)$$

The partial transpose of density matrix of an entangled state is not positive definite. Negativity defined as $N^A = \sum_i |\lambda_i|$, where λ_i are the negative eigenvalues of $\widehat{\rho}^{TA}$ is a measure of entanglement of the quantum system A with B . For a separable state $N^A = 0$ and at maximal entanglement value of N^A depends on dimension d_A . For the tripartite system in hand, we construct the partial transpose with respect to sub-systems A , B or C , while keeping the composite state of the remaining two sub-systems unaltered. For the density matrix operator $\widehat{\rho}_{ABC}(t)$ acting on composite space, the transpose with respect to the sub-system A reads

$$\widehat{\rho}^{TA} = \sum_{i,j=1}^{d_A} \sum_{m,r=1}^{d_B} \sum_{n,s=1}^{d_C} \langle i, m, n | \widehat{\rho} | j, r, s \rangle |j, m, n\rangle \langle i, r, s|, \quad (24)$$

where d_X ($X = A, B, C$) refers to dimension of the Hilbert space of subsystem X . We use $\widehat{\rho}^{TA}$, $\widehat{\rho}^{TB}$ and $\widehat{\rho}^{TC}$ to calculate the negativity measures for sub-systems A , B and C , respectively.

For a quantum state $\widehat{\rho}$ in d -dimensional Hilbert space, the linear entropy S_1 is defined as

$$S_1 = \frac{d}{d-1} (1 - \text{Tr}(\widehat{\rho}^2)). \quad (25)$$

Linear entropy is used to measure the mixedness of subsystems A , B and C . For pure states $S_1 = 0$, whereas for maximally mixed states $S_1 = 1$. Reduced state operators $\widehat{\rho}_{\text{red}}^A = \text{tr}_{BC}(\widehat{\rho}_{ABC})$, $\widehat{\rho}_{\text{red}}^B = \text{tr}_{AC}(\widehat{\rho}_{ABC})$ and $\widehat{\rho}_{\text{red}}^C = \text{tr}_{AB}(\widehat{\rho}_{ABC})$ are used to calculate linear entropy S_1 , for the subsystems A , B and C , respectively. Negativities and linear entropies are used to characterize the state of the composite system at an instant t , for a given value of coupling to the environment.

6. Numerical results

We consider the system prepared in the state $\widehat{\rho}_S(0) = |g, 0, 0\rangle \langle g, 0, 0|$, at $t = 0$. The laser-ion coupling constant is taken to be $\Omega = 8.95$ MHz [6], whereas the ratio $\mu_{11}/a_{11} = 4.0$. Numerical values of $\Gamma(t)$ and $C(t)$ are obtained by solving the integrals of equations (17) and (18) for the choice $\omega_c = 1200$ MHz, temperature $T = 0.03$ K and different values of coupling strength κ . The variable ω in equations (17) and (18) is varied from zero to $3\omega_c$. The value $\kappa = 0.001$ corresponds to a weak coupling and successively larger values tend to produce decoherence on a scale comparable to GHZ state generation time which is of the order of 0.34 ns. The state of the system at an instant t can be detected experimentally by cavity-photon measurement combined with atomic population inversion measurement.

Figures 1 and 2 display $P_{\text{GHZ}}(t)$ and population inversion $I(t)$, respectively, as a function of scaled time variable $T (= a_{11}t)$ for decoherence parameter values of $\kappa = 0, 0.001, 0.01$ and 0.1. Evidently the evolution dynamics of $P_{\text{GHZ}}(t)$ and $I(t)$ is sensitive to changes in the

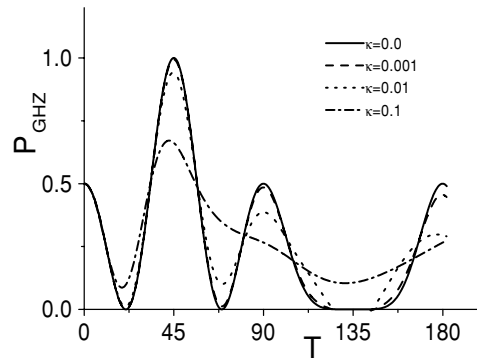


Figure 1. $P_{\text{GHZ}}(t)$ as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$ and $\kappa = 0, 0.001, 0.01$ and 0.1 .

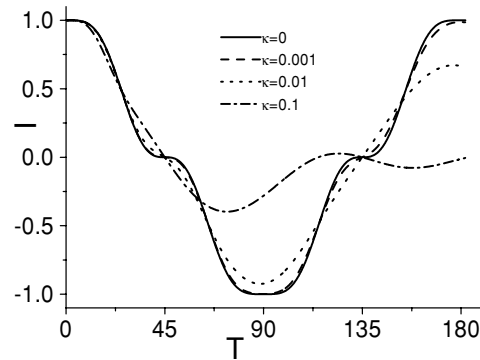


Figure 2. Population inversion $I(t)$, as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$ and $\kappa = 0, 0.001, 0.01$ and 0.1 .

decoherence parameter κ . The presence of decay factors in equation (20) causes the peak value of P_{GHZ} to decrease with time. Phase decoherence causes a shift in the interaction time needed to get the system in maximally entangled state. The population inversion however does not show any phase decoherence effects. We may point out that at $T = 135^\circ$ the tripartite system is in maximally entangled state of equation (9) which is orthogonal to the state of equation (8) for which $P_{\text{GHZ}}(t)$ has been calculated. Population inversion is zero at $T = 45^\circ$ as well as 135° , signalling maximally entangled state generation. For weak coupling ($\kappa = 0.001$), the behaviour of $I(t)$ does not differ much from no decoherence curve. However, for larger values of κ , $I(t)$ for the separable system at $T = 90^\circ$ can indicate the amount of decoherence present.

The state operator of equation (19) for $m = 1, n = 1$ is used to calculate the density matrices transposed with respect to quantum systems A, B and C . The negativities are calculated, numerically, from $\hat{\rho}^{T_A}, \hat{\rho}^{T_B}$ and $\hat{\rho}^{T_C}$ and plotted as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$. The negativity plot displaying entanglement dynamics of internal state of two-level ion (A) is shown in figure 3. For subsystem B , the negativity calculated from $\hat{\rho}^{T_B} = \hat{\rho}^{T_C}$ is displayed as a function $T(=a_{11}t)$ in figure 4. The values of decoherence parameter are $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 . The time evolution of vibrational motion of ion's centre of mass (B) and cavity number state (C) are identical due to inherent symmetry of these subsystems. We note that as the value of decoherence parameter increases, there is a decrease

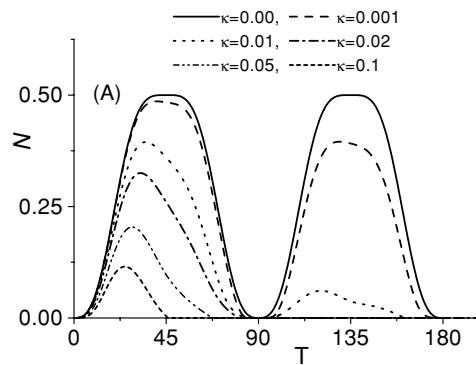


Figure 3. N , calculated from $\widehat{\rho}^{TA}$, as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$ and $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 .

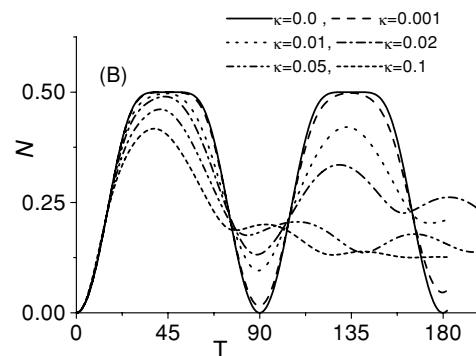


Figure 4. N , calculated from $\widehat{\rho}^{TB} = \widehat{\rho}^{TC}$, as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$ and $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 .

in the maximum entanglement of sub-systems A , B and C with their compliments. Besides that, the phase decoherence changes the time at which maximal entanglement of the three parties is observed. These two factors are consistent with the behaviour of $P_{\text{GHZ}}(t)$ and $I(t)$ in figures 1 and 2.

Linear entropies S_I for subsystems A , B and C have been calculated using the reduced density operators obtained from $\widehat{\rho}_{IS}(t)$ of equation (19) for $m = 1, n = 1$. Figures 5 and 6 display S_I as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$ for subsystems A and B (or C), respectively. The decoherence parameter values are $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 . For $\kappa = 0.001, 0.01$, the trend of time evolution of linear entropy follows the variation of entanglement as seen in negativity plots of figures 3 and 4. However, for a stronger coupling value of $\kappa = 0.02$ for subsystem A , whereas N tends to zero for T approaching 90° , S_I shows fluctuation for $T > 90^\circ$. Similarly for $\kappa = 0.05$ negativity indicates a decoupling of system A from system BC beyond $T = 67^\circ$ while S_I points to the presence of some correlations. For $\kappa = 0.1$, the system is highly damped and both N and S_I show the ion to become separable around $T = 45^\circ$. We may conclude that for the states lying at the boundary of the entangled–separable region negativity measures entanglement generating quantum correlations. The linear entropy, on the other hand, is a measure of all correlations that tend to mix the state.

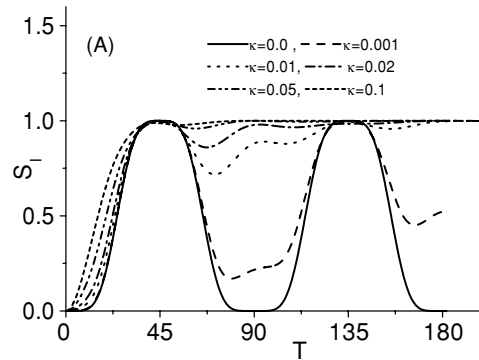


Figure 5. Linear entropy S_l^A , calculated from $\hat{\rho}_{\text{red}}^A$, as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$, and $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 .

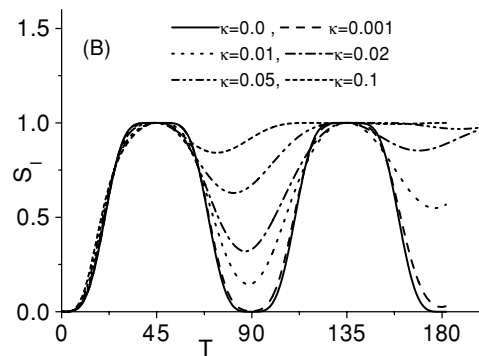


Figure 6. Linear entropy S_l^B , calculated from $\hat{\rho}_{\text{red}}^B$, as a function of scaled time variable $T(=a_{11}t)$, for the choice $\mu_{11} \setminus a_{11} = 4$ and $\kappa = 0, 0.001, 0.01, 0.02, 0.05$ and 0.1 .

7. Conclusions

To conclude, we have investigated the decoherence process of the three-qubit system obtained by manipulating the state of a cold trapped two-level ion coupled to an optical cavity. Interaction of the ion with a resonant laser field and the cavity field tuned to red sideband of ionic vibrational motion generates entanglement of internal states of the ion, vibrational states of ionic centre of mass and the cavity-field state. Non-dissipative decoherence of the state of the system occurs due to interaction of the system with the environment. We have considered the effect of decoherence sources such as magnetic field fluctuations, laser frequency fluctuations, potentials applied to electrodes and coupling to states outside the model space. The random perturbations of the Hamiltonian are accounted for by coupling the model space interaction Hamiltonian to the environment, modelled as a set of noninteracting harmonic oscillators. The pointer observable is energy of the isolated quantum system. Analytic expression for the state operator of the tripartite composite system, including non-dissipative decoherence effects, has been obtained. The initial state of the tripartite system is a separable state and the state of environment has no initial correlations. Coupling to environment is found to introduce an exponential decay with time of the off-diagonal matrix elements of density operator $\hat{\rho}_{\text{IS}}(t)$. In addition, a dephasing of various states in the superposition also occurs. The extent to which

the process is decohered depends on the system environment coupling strength, that can be partially controlled by adjusting the electrode potentials. Besides the strength of coupling to the environment, the energy spectrum of the system Hamiltonian plays an important role in determining the decoherence rate of a given initial state of the composite system. For a specific choice of interaction parameters, the isolated system evolves to tripartite GHZ state [9]. We have evaluated analytically the probability of generating maximally entangled GHZ state, and the population inversion in the presence of non-dissipative decoherence. Numerical calculations for different values of the system environment coupling strengths using interaction parameter from a recent experiment show the peak value of GHZ state generation probability to decrease with increase in κ . $P_{\text{GHZ}}(t)$ is also sensitive to phase decoherence. The population inversion however does not show any phase decoherence effects. The results can be used to study the effect of engineered environment on the process of tripartite maximally entangled state generation. Bipartite entanglement of cavity mode and atomic internal states can be produced without coupling to the motional states. In this case entanglement occurs through coupling to motional states and can be transferred to other ions that might be added to the trap. In comparison with an earlier proposal for GHZ state generation [14], in the current scheme the initial state of the system is $|g, 0, 0\rangle$. As such the cavity losses and spontaneous decay effects are minimized.

Using negativity as an entanglement measure, the entanglement dynamics of the tripartite system in the presence of decoherence has been analysed. As the value of decoherence parameter increases, the maximum entanglement of sub-systems A and B with their compliments decreases. In the context of trapped ion radiated by the single mode cavity field and an external resonant laser, the time for which the two-level ion remains coupled to the state of vibrational motion and the cavity state decreases with increase in κ . For large values of κ the states of the composite system lying at the boundary of the entangled–separable region are reached. For these states, whereas the negativity measures only quantum correlations, the linear entropy measures all correlations that reduce the purity of the state.

Acknowledgments

S S Sharma and N K Sharma acknowledge financial support from FAEPE/UEL and CNPq, Brazil. E de Almeida thanks Capes, Brazil for financial support.

References

- [1] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [2] Bennet C H and Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [3] Bennet C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A and Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [4] Wineland D J, Monroe C, Itano W M, Leibfried D, King B E and Meekhof D M 1998 *NIST J. Res.* **103** 259
Roos Ch, Zeiger Th, Rohde H, Nagerl H C, Eschner J, Leibfried D, Schmidt-Kaler F and Blatt R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4713
- [5] Guthohrlein G R, Keller M, Hayasaka K, Lange W and Walther H 2001 *Nature* **414** 49
- [6] Mundt A B, Kreuter A, Russo C, Becher C, Leibfried D, Eschner J, Schmidt-Kaler F and Blatt R 2003 *Appl. Phys. B* **76** 117
- [7] Pellizzari T, Cirac J I, Gardiner S A and Zoller P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3788
- [8] Cirac J I, Zoller P, Kimble H J and Mabuchi H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3221
- [9] Sharma S S 2003 *Phys. Lett. A* **311** 111
- [10] Schmidt-Kaler F, Gulde S, Riebe M, Deuschle T, Kreuter A, Lancaster G, Becher C, Eschner J, Häffner H and Blatt R 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** 623
- [11] Myatt C J, King B E, Turchette Q A, Sackett C A, Kielpinski D, Itano W M, Monroe C and Wineland D J 2000 *Nature* **403** 269

-
- [12] Turchette Q A, Myatt C J, King B E, Sackett C A, Kielpinski D, Itano W M and Wineland D J 2000 *Phys. Rev. A* **62** 053807
 - [13] Caldeira A O and Legget A J 1983 *Physica A* **121** 587
 - [14] Di Fidio C, Maniscalco S and Vogel W 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033825
 - [15] Mozyrsky D and Privman V 1998 *J. Stat. Phys.* **91** 787
 - [16] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
Horodecki M, Horodecki P and Horodecki R 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1
 - [17] Vidal G and Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
 - [18] Turchette Q A *et al* 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063418

Apêndice E

Multipartite entanglement of three trapped ions in a cavity and W-state generation

Multipartite entanglement of three trapped ions in a cavity and W-state generation

S Shelly Sharma¹, Eduardo de Almeida¹ and Naresh K Sharma²

¹ Depto. de Física, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 86051-990, PR, Brazil

² Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina 86051-990, PR, Brazil

E-mail: shelly@uel.br

Received 19 May 2008, in final form 24 June 2008

Published 8 August 2008

Online at stacks.iop.org/JPhysB/41/165503

Abstract

A scheme to generate three qubit maximally entangled W-states, using three trapped ions interacting with the red sideband tuned single-mode field of a high finesse cavity, is proposed. For the cavity field initially prepared in a number state, the probability of generating the three-ion W-state is calculated. By using the ion-cavity coupling strengths achieved in experimental realizations, the interaction time needed for W-state generation is found to be of the order of $10 \mu\text{s}$. It is found that for a fixed number of photons in the cavity the nature of entanglement of ionic internal states can be manipulated by an appropriate choice of the initial-state phonon number. The ionic qubits in the W-like state are found to be entangled to cavity photons. Analytical expressions for global negativity and partial K -way negativities ($K = 2$ to 4) are obtained to study the evolution of entanglement distribution as a function of the interaction parameter. Reversible entanglement exchange between different entanglement modes is observed. For specific values of the interaction parameter, the three ions and photon-phonon system are found to have 4-partite entanglement, generated by 2-way and 3-way correlations.

1. Introduction

Interest in manipulation of multipartite quantum states is motivated by the possible use in quantum communication [1], quantum dense coding [2] and quantum teleportation [3]. Advances in experimental techniques of trapping, cooling and manipulation of internal states of ions through interaction with external lasers [4–6] have made the generation of maximally entangled states [7] a reality. While single atoms and ions, with long-lived internal states, are suitable for storing quantum information, the photonic qubits serve as fast and reliable carriers to transport quantum information over long distances. Cirac *et al* [8] considered the possibility of using photonic channels to interconnect high finesse cavities with single trapped ions inside. It was shown in [9] that the composite quantum system with a single trapped two-level ion interacting with a quantized light field in a single-mode cavity evolves into the maximally entangled three-particle Greenberger–Horne–Zeilinger state. A different scheme to generate the

three qubit maximally entangled GHZ state, using a trapped ion interacting with a resonant external laser and sideband tuned single mode of a cavity field has been proposed in [10] and the decoherence process of this three qubit system examined [11]. Experimentally successful efforts in this direction [12–14] have demonstrated coherent coupling of electronic and motional states of a single trapped Ca^+ ion to a single field mode of a high finesse cavity. In the experiment of [12], a Ca^+ ion in an RF-Paul trap was placed with high precision at an arbitrary position in the standing wave field of a near-confocal resonator for several hours of interaction time. Since the size of the cavity is large compared to the wavelength of standing wave, a large number of nodes and antinodes of the standing wave are formed inside the cavity. The electromagnetically induced transparency (EIT) method used in the work of Morigi *et al* [15] and Roos *et al* [16] could make possible the initialization of motional states of ion strings in a cavity. These experiments open the possibility that more than one trapped ion may be cooled down to their lowest vibrational states and interact with the

quantized cavity field. A string of ions in the same trap with the centre of mass in a definite motional mode may, likewise, be prepared inside a cavity. In this paper, we propose a scheme in which three two-level trapped ions are cooled inside a high finesse cavity to generate multipartite entangled states through coherent coupling of their electronic and vibrational states to the standing wave cavity field. For the cavity field initially prepared in a number state, we obtain conditions on the interaction parameters to generate states in which the three ions in the W-like state are entangled to cavity photons. Tessier *et al* [17] have investigated the multipartite entanglement of two two-level atoms, generated by resonant coupling to a single mode of the electromagnetic field. The resulting physical system corresponds to the two-atom Tavis–Cummings model [18]. Our system is similar to that of [17] in that the entanglement between the ions arises not through direct interaction between the ions, but through their coupling to the phonon–photon system. We have not considered the effects of spontaneous decay, decoherence of motional states and cavity losses in this paper. The object of studying a closed system, without decoherence effects, is to have a clear picture of dynamics of quantum correlations. The entanglement of mixed multipartite states resulting due to decoherence is not so well understood. The memory qubits (ionic internal states) are known to have a coherence time of the order of seconds and even minutes (magnetically insensitive transitions). The success of experiments with a single ion indicates that the motional decoherence caused by trap fluctuations or environment noise is negligible on the time scale of state generation and photon qubit coherence of the order of milliseconds. The decoherence caused by the implementation of the scheme itself needs to be studied theoretically for the three-ion case though such studies for the single ion case have been done in [11, 19].

Multipartite entanglement is a useful resource for implementation of quantum information processing protocols [20]. To retrieve information about the entanglement of a group of K ($2 \leq K \leq 4$) subsystems of the composite system, we use the global negativity and the partial K -way negativities. For analysing the entanglement dynamics, we have considered the vibrational phonons and cavity photons to constitute a single quantum system. Negativity [21–23], based on the Peres–Horodecki [24, 25] criterion, has been shown to be an entanglement monotone [26]. The K -way negativity refers to the negativity of a partial transpose constructed by imposing specific constraints during transposition. The coherences of a multipartite composite system having N subsystems can be quantified by K -way negativities [27] ($2 \leq K \leq N$). Partial K -way negativity is the contribution of a specific K -way partial transpose to global negativity. For canonical states, the partial K -way negativities measure the genuine K -partite entanglement of the system [28, 29]. Genuine K -partite entanglement refers to K -partite entanglement due to correlations similar to those present in a GHZ-like state of K subsystems. Loss of a single subsystem destroys this type of entanglement completely, leaving no residual entanglement. We have obtained analytical expressions for partial K -way negativities with respect to the photon–phonon state and

internal states of ions. The advantage of using partial K -way negativities lies in the fact that the entanglement between parts of a composite system is obtained from the full state operator, without state reduction. With the cavity prepared initially in a Fock state, the entanglement of ionic internal states depends strongly on the choice of the phonon number at $t = 0$. Extra control on qubit state manipulation, gained by coupling the vibrational modes to the cavity field [13, 14], is an advantage for the successful implementation of quantum gates.

The vector space and system Hamiltonian are discussed in section 2. Analytical expressions for the state of the system at current time, with the three ions prepared in their respective (i) ground states and (ii) excited states, are presented in section 3. The role of initial-state centre of mass quanta in state manipulation and the time evolution of W-state generation probabilities is also discussed in section 3. In section 4, the entanglement dynamics of ions, phonons and photons is investigated. The global and partial K -way negativities, used to study the entanglement distribution in the composite system, are defined and calculated analytically as well as numerically for special initial-state preparations of the system. We discuss, briefly, the information gained from the dynamics of global and partial K -way negativities in section 5, followed by the conclusions in section 6.

2. The model

Consider three two-level trapped cold ions vibrating with trap frequency ν inside a high finesse cavity. The frequency of standing wave cavity field is ω_c and ions are well separated from each other so that no dipole interaction takes place between the ions. The free Hamiltonian of the system composed of internal states of ions, the vibrational state of the centre of mass and the state of standing wave cavity field is given by

$$\hat{H}_0 = \hbar\nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_c \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_z^{(j)}, \quad (1)$$

where \hat{a}^\dagger (\hat{a}) and \hat{b}^\dagger (\hat{b}) are the creation(annihilation) operators for vibrational phonons and cavity field photons, respectively. The eigenstates of the Pauli operator $\hat{\sigma}_z^{(j)}$ model the internal states of the j th two-level ion ($j = 1, 2, 3$) with energy splitting $\hbar\omega_0$. We define the total spin operators as $\hat{\sigma}_k = \sum_{j=1}^3 \hat{\sigma}_k^{(j)}$, where $k = (z, +, -)$ and use the eigenvectors of $\hat{\sigma}^2$ and $\hat{\sigma}_z$ to represent the three ion internal states. The ionic internal states in product basis are labelled as $|\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)}\rangle$ ($\sigma_z^{(j)} = -1$ or $+1$). The coupled basis vectors are $|\sigma, \sigma_z\rangle$, where the label $\sigma (=2s)$ refers to the eigenvalue of σ^2 given by $\sigma(\sigma + 2)$. The computational basis states, on the other hand, read as $|i_1, i_2, i_3\rangle$, where $i_j = 0$ for atom in the ground state and $i_j = 1$ for atom in the excited state.

The interaction of cold ions, located at the node of the standing wave, with the quantized cavity field is given by

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \sin[\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})], \quad (2)$$

with g being the ion-cavity coupling constant and η the Lamb–Dicke parameter. The interaction picture Hamiltonian

obtained by applying the unitary transformation $\hat{U}_I = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar)$ is a complex looking operator [30]. However, with the cavity coupled to red sideband of ionic vibrational motion ($\omega_0 - \omega_c = \nu$), the relevant part of \hat{H}_I in the rotating-wave approximation and the Lamb-Dicke limit ($\eta \ll 1$) reduces to

$$\hat{H}_{II} = \hbar g \eta [\hat{\sigma}_+ \hat{b} \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger]. \quad (3)$$

The possible values of σ for three ions are 3, 1, 1, there being two distinct internal configurations that allow $\sigma = 1$. The matrix T that transforms from the computational basis to the coupled basis is given by

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

The computational basis vectors are taken in the order $|000\rangle, |100\rangle, |010\rangle, |110\rangle, |001\rangle, |101\rangle, |011\rangle$ and $|111\rangle$, while the ordering of coupled basis vectors is $|3, -3\rangle, |3, -1\rangle, |3, 1\rangle, |3, 3\rangle, |1, -1\rangle_1, |1, 1\rangle_1, |1, -1\rangle_2, |1, 1\rangle_2$. The subscript in $|1, \pm 1\rangle_{1,2}$ distinguishes the states with the same value of σ but different internal configurations.

The product state of the composite system looks like $|\sigma, \sigma_z\rangle \otimes |m, n\rangle$, where m is the number of centre of mass vibrational quanta and n is the number of cavity field photons. The advantage of working in a coupled basis stems from the fact that the Hamiltonian of equation (3) does not connect states with different values of σ . If the initial state is an eigenstate of $\hat{\sigma}^2$ with eigenvalue $\sigma_I(\sigma_I + 2)$, the system evolves into a linear combination of states of the type $|\sigma_I, \sigma_z, m, n\rangle$ with $-\sigma_I \leq \sigma_z \leq \sigma_I$.

For $\sigma_I = 3$ the Hamiltonian (equation (3)) in the basis $|3, 3\rangle \otimes |m-2, n-2\rangle, |3, 1\rangle \otimes |m-1, n-1\rangle, |3, -1\rangle \otimes |m, n\rangle$ and $|3, -3\rangle \otimes |m+1, n+1\rangle$ is written as

$$H_{II}(\sigma = 3) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A_{mn} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}A_{mn} & 0 & \sqrt{2}B_{mn} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}B_{mn} & 0 & \sqrt{2}C_{mn} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}C_{mn} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

where

$$A_{mn} = \hbar g \eta \sqrt{\frac{3}{2}(m-1)(n-1)}, \quad B_{mn} = \hbar g \eta \sqrt{2mn}, \quad (6)$$

and

$$C_{mn} = \hbar g \eta \sqrt{\frac{3}{2}(m+1)(n+1)}. \quad (7)$$

Defining

$$\mu = (A_{mn}^2 + B_{mn}^2 + C_{mn}^2), \quad \text{and} \quad \beta = \sqrt{\mu^2 - 4A_{mn}^2 C_{mn}^2},$$

the eigenvalues of $H_{II}(\sigma = 3)$, in units of $\hbar g \eta$, are

$$\begin{aligned} E_1 &= -\sqrt{\mu - \beta}, & E_2 &= \sqrt{\mu - \beta}, \\ E_3 &= -\sqrt{\mu + \beta}, & E_4 &= \sqrt{\mu + \beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

The unitary matrix \hat{U} that diagonalizes $H_{II}(\sigma = 3)$, ($H_{II}(\sigma = 3)|\phi_i\rangle = E_i|\phi_i\rangle$, ($i = 1, 4$)) is given by

$$\hat{U}(\sigma = 3) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} \\ -\sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} \\ -\sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & -\sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} \\ \sqrt{\frac{\beta-\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_1}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta+\mu_2}{4\beta}} & \sqrt{\frac{\beta-\mu_1}{4\beta}} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

where $\mu_1 = \mu - 2A_{mn}^2$ and $\mu_2 = \mu - 2C_{mn}^2$.

Starting from a given initial state, $|\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\rangle \otimes |m, n\rangle$, of the system, the time evolution in the interaction picture is obtained by applying the transformation $\exp(-i\hat{H}_{II}t/\hbar)$. An internal state of ions may be rewritten in terms of the coupled basis states as

$$|\sigma_z^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_z^{(3)}\rangle_j = \sum_i T_{ji}^\dagger |\sigma, \sigma_z\rangle_i. \quad (10)$$

The state $|\sigma, \sigma_z\rangle \otimes |m, n\rangle_i$ of the composite system with m vibrational quanta and n photons may, in turn, be expanded in terms of eigenstates of $H_{II}(\sigma)$ as

$$|\sigma, \sigma_z\rangle \otimes |m, n\rangle_i = \sum_k U_{ik}^\dagger(\sigma) |\phi_k\rangle. \quad (11)$$

We recall that the matrix T operates on the internal states of the two-level atom, while \hat{U} operates in the composite Hilbert space formed by internal states, cavity field states and the state of vibrational motion. The state of the system at instant t is given by

$$\Psi(t) = \sum_i \sum_k T_{ji}^\dagger U_{ik}^\dagger(\sigma) \exp(-iE_k g \eta t) |\phi_k\rangle. \quad (12)$$

To go back to the computational basis we use the inverse transformation. The state obtained is in the interaction picture and we go to Schrödinger picture by the transformation $\Psi_S(t) = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \Psi(t)$. As the state of the composite system evolves, the internal states of ions, the cavity field state and the state of vibrational motion become entangled.

3. The composite system state

3.1. Initial state, $\Psi_{m+1, n+1}(0) = |000\rangle \otimes |m+1, n+1\rangle$

Consider the three ions in their ground states with the centre of mass motion cooled down to a state with $m+1$ vibrational quanta. A photon field set to a fixed detuning is injected in to the cavity such that the cavity state is an $n+1$ photon Fock state at $t = 0$. The analytical expression for the state of the system at current time t is found to be

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1, n+1}(t) &= a_0(t) |000\rangle \otimes |m+1, n+1\rangle \\ &+ a_1(t) |W_1\rangle \otimes |m, n\rangle + a_2(t) |W_2\rangle \otimes |m-1, n-1\rangle \\ &+ a_3(t) |111\rangle \otimes |m-2, n-2\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

where $|W_1\rangle = \frac{|100\rangle+|001\rangle+|010\rangle}{\sqrt{3}}$ and $|W_2\rangle = \frac{|110\rangle+|101\rangle+|011\rangle}{\sqrt{3}}$ are W states with one and two excited ions, respectively. The coefficients $a_i(t)$, $i = 0$ to 3,

$$a_0(t) = \frac{e^{-i\omega_1 t}}{2\beta} ((\beta - \mu_2) \cos(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) + (\beta + \mu_2) \cos(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t})), \quad (14)$$

$$a_1(t) = -\frac{ie^{-i\omega_1 t}}{2\beta} (\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) + \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t})), \quad (15)$$

$$a_2(t) = \frac{e^{-i\omega_1 t} \sqrt{\beta^2 - \mu_2^2}}{2\beta} (\cos(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) - \cos(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t})) \quad (16)$$

and

$$a_3(t) = -\frac{ie^{-i\omega_1 t}}{2\beta} (\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta - \mu_1)} \sin(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) - \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta + \mu_1)} \sin(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t})), \quad (17)$$

satisfy the normalization condition $\sum_{i=0}^3 |a_i(t)|^2 = 1$. The frequency $\omega_1 = \nu(m + \frac{3}{2}) + \omega_c(n + 1) - \frac{3\omega_0}{2}$ refers to the zero-point energy of the initial state. The probability amplitude $a_2(t)$ is zero whenever $\cos(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) = \cos(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t})$. For values of t such that $\cos(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) = \cos(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}) = \pm 1$, the composite system state is a separable state. When the condition $\sin(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) = \sin(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}) = \pm 1$ is satisfied, the composite system is found to be in the state

$$\Psi_{m+1,n+1}^{W_1}(t) = a_1(t)|W_1\rangle \otimes |m, n\rangle + a_3(t)|111\rangle \otimes |m - 2, n - 2\rangle, \quad (18)$$

where the probability amplitudes

$$a_1(t) = -\frac{ie^{-i\omega_1 t}}{2\beta} (\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta + \mu_1)} + \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta - \mu_1)}) \quad (19)$$

$$a_3(t) = -\frac{ie^{-i\omega_1 t}}{2\beta} (\sqrt{(\beta - \mu_2)(\beta - \mu_1)} - \sqrt{(\beta + \mu_2)(\beta + \mu_1)}) \quad (20)$$

depend strongly on the initial-state photon and phonon number. The three ions in the W_1 -like state are found to be entangled to the photon-phonon state, constituting a state having 4-partite entanglement.

The probabilities $P_i(\tau)$ of finding i number of ions ($i = 0$ to 3) in an excited state are plotted as a function of variable τ in figure 1, for the choice $m = n = 2$. The value of parameter $\tau = g\eta t$ is determined by the cavity ion coupling strength, the Lamb-Dicke parameter and the interaction time. We note that for $\tau \approx 3\pi/4$ the system is found to be in a separable state and for $\tau \approx 3\pi/8$ in state $\Psi_{3,3}^{W_1}$, with $P_1(\tau) \approx 0.75$ and $P_3(\tau) \approx 0.25$.

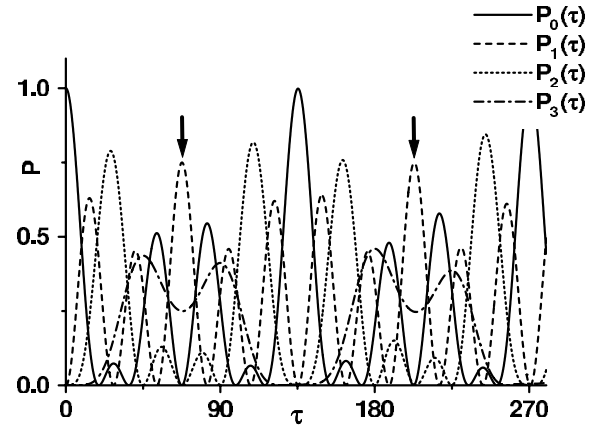


Figure 1. The probabilities P_i , $i = 0$ to 3 versus $\tau (= g\eta t)$ for the initial state $|000, 3, 3\rangle$.

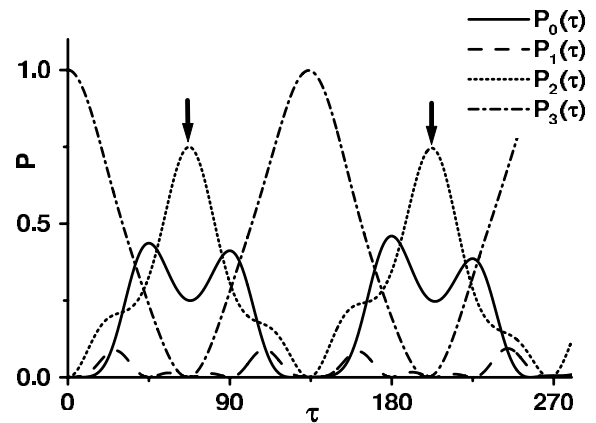


Figure 2. The probabilities P_i , $i = 0$ to 3 versus $\tau (= g\eta t)$ for the initial state $|111, 0, 0\rangle$.

3.2. Initial state, $\Phi_{m-2,n-2}(0) = |111\rangle \otimes |m - 2, n - 2\rangle$

When all three ions are in their excited states at $t = 0$, the centre of mass prepared in a state with $m - 2$ vibrational quanta, and the cavity in the $n - 2$ photon Fock state, the state of the composite quantum system at current time is found to be

$$\Phi_{m-2,n-2}(t) = a_3(t)|000\rangle \otimes |m + 1, n + 1\rangle + a_2(t)|W_1\rangle \otimes |m, n\rangle + a_1(t)|W_2\rangle \otimes |m - 1, n - 1\rangle + a_0(t)|111\rangle \otimes |m - 2, n - 2\rangle. \quad (21)$$

The maximum number of coupled basis states populated by the ions as the interaction time increases is 4, independent of the initial-state photon or phonon number. Recalling that for interaction time such that $\sin(\sqrt{(\mu + \beta)g\eta t}) = \sin(\sqrt{(\mu - \beta)g\eta t}) = \pm 1$, the probability amplitude $a_0(t) = a_2(t) = 0$, we find the three ions in the W_2 -like state entangled to the photon-phonon state such that

$$\Phi_{m-2,n-2}^{W_2}(t) = a_3(t)|000\rangle \otimes |m + 1, n + 1\rangle + a_1(t)|W_2\rangle \otimes |m - 1, n - 1\rangle, \quad (22)$$

with probability amplitudes $a_1(t)$ and $a_3(t)$ given by equations (19) and (20) respectively. Figure 2 displays the

probabilities $P_i(\tau)$ ($i = 0$ to 3) as a function of variable τ for the choice $m = 2, n = 2$ at $t = 0$. The initial-state preparation in this case involves cooling the centre of mass motion to the zero phonon mode with ions in the ground state and the cavity in vacuum state. The internal states of three ions can now be prepared in the excited state through controlled resonant interaction with external lasers. The ion's state is well preserved due to the long lifetime (~ 1 s). We observe that the composite system periodically returns to an initial separable state with a period of $t \approx \frac{3\pi}{4g\eta}$. The black arrows point out the $P_2(\tau)$ corresponding to the state $\Phi_{00}^{W_2}(t)$.

3.3. Quantum state control and the number of vibrational quanta

The maximum number of coupled basis states populated by the ions can be controlled by initial-state photon and phonon number. With the centre of mass prepared initially in one phonon mode ($m + 1 = 1$), and the cavity having one or more photons ($n + 1 \geq 1$), the composite system is found to be in the state

$$\Psi_{1,n+1}(t) = \cos(\sqrt{3(n+1)g\eta t}) e^{-i\omega_1 t} |000\rangle \otimes |1, n+1\rangle - i \sin(\sqrt{3(n+1)g\eta t}) e^{-i\omega_1 t} |W_1\rangle \otimes |0, n\rangle, \quad (23)$$

whereas for the ionic centre of mass in the zero phonon mode, the state of the system remains unchanged. The minimum interaction time needed to get the three-ion W_1 state generation probability peak is $t_{\min} = \frac{\pi}{2g\eta\sqrt{3(n+1)}}$. Deterministic coupling of the ions' quantized vibration in the trap to the cavity mode has been demonstrated by Mundt *et al* [13]. For cavity ion coupling strength $g = 8.95$ MHz, the Lamb–Dicke parameter value $\eta = 0.01$ and a cavity prepared in a single photon state at $t = 0$, we obtain $t_{\min} = \frac{\pi}{2g\eta\sqrt{3}} = 10.133 \mu\text{s}$. This is the simplest setting for generating a three-ion W state with a single ion in an excited state. The three-ion $|W_1\rangle$ state generation time can be decreased by increasing the number of initial-state photons in the cavity. The increase in cavity decay probability with the increase in the photon number is likely to reduce the $|W_1\rangle$ state generation probability and must be carefully accounted for.

For the initial-state preparation with $m + 1 = 2$ and $n + 1 \geq 2$ the state of the system at current time is

$$\begin{aligned} \Psi_{2,n+1}(t) = & \frac{e^{-i\omega_1 t}}{(5n+3)} ((3n+3) \cos(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) + 2n) |000\rangle \\ & \otimes |2, n+1\rangle - i e^{-i\omega_1 t} \sqrt{\frac{(3n+3)}{(5n+3)}} \sin(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) |W_1\rangle \\ & \otimes |1, n\rangle + \frac{e^{-i\omega_1 t} \sqrt{6n(n+1)}}{(5n+3)} (\cos(\sqrt{2(5n+3)g\eta t}) - 1) |W_2\rangle \\ & \otimes |0, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

The period for the system to return to the initial separable state is $t_p = \frac{2\pi}{g\eta\sqrt{2(5n+3)}}$. At $t_w = \frac{\pi}{g\eta\sqrt{2(5n+3)}}$, we have ions in

the W_2 -like state coupled to the photon–phonon system in the state

$$\begin{aligned} \Psi_{2,n+1}(t) = & \frac{e^{-i\omega_1 t} (n+3)}{(5n+3)} |000\rangle \otimes |2, n+1\rangle \\ & + \frac{e^{-i\omega_1 t} 2\sqrt{6n(n+1)}}{(5n+3)} |W_2\rangle \otimes |0, n-1\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

We note that the maximum probability of finding the state $|W_2\rangle$ increases with n , approaching $\cong \frac{24}{25}$ in the large- n limit. When an initial-state phonon and photon number is greater than or equal to three, all the four coupled basis vector states seen in equation (13) can be reached.

3.4. W-state generation probabilities

Three qubit W-states are extremely useful for implementing various communication protocols, quantum state transport and quantum gates. These states do not have genuine tripartite entanglement, but maximal pairwise entanglement. For these states, global negativity and partial 2-way negativity is nonzero, while the partial 3-way negativity is zero [31], which is equivalent to the three tangle [32] being zero. The tripartite entanglement of the state is due bipartite correlations. We label the three ions as subsystems A, B, C , and consider the phonons and photons to constitute a single quantum system D . The reduced state operator for the ions

$$\rho_{m+1n+1}^{ABC}(t) = \text{tr}_D(|\Psi_{m+1,n+1}(t)\rangle\langle\Psi_{m+1,n+1}(t)|)$$

obtained by tracing over the vibrational and cavity state degrees of freedom is a mixed state given by

$$\begin{aligned} \rho_{m+1n+1}^{ABC}(t) = & |a_0(t)|^2 |000\rangle\langle 000| + |a_1(t)|^2 |W_1\rangle\langle W_1| \\ & + |a_2(t)|^2 |W_2\rangle\langle W_2| + |a_3(t)|^2 |111\rangle\langle 111|. \end{aligned} \quad (26)$$

The $P_1(\tau)$ and $P_2(\tau)$ in figure 1 are the probabilities of finding the three ions in the state $|W_1\rangle$ and $|W_2\rangle$ for the choice $m + 1 = n + 1 = 3$. We note that for $t = \frac{3\pi}{8g\eta}$, $P_0(\tau) = P_2(\tau) = 0$, $P_1(\tau)$ shows a peak and $P_3(\tau)$ is finite.

The choice $m = n = 0$ in equation (13) yields

$$\rho_{11}^{ABC}(t) = \cos^2(\sqrt{3}g\eta t) |000\rangle\langle 000| + \sin^2(\sqrt{3}g\eta t) |W_1\rangle\langle W_1|,$$

with deterministic $|W_1\rangle$ state generation at $t = \frac{k\pi}{2g\eta\sqrt{3}}$, where k is an odd integer.

For the choice $m = n = 1$ in equation (13) we get

$$\begin{aligned} \rho_{22}^{ABC}(t) = & \left(\frac{3}{4} \cos(4g\eta t) + \frac{1}{4}\right)^2 |000\rangle\langle 000| \\ & + \frac{3}{4} \sin^2(4g\eta t) |W_1\rangle\langle W_1| \\ & + \frac{3}{16} (\cos(4g\eta t) - 1)^2 |W_2\rangle\langle W_2|. \end{aligned} \quad (27)$$

For an interaction time of $t = \frac{k\pi}{8g\eta}$, $k = 1, 3, 5, \dots$, the ionic state $|W_1\rangle$ is found with a probability of 75% in the state

$$\rho_{22}^{ABC}\left(\frac{k\pi}{8g\eta}\right) = \frac{1}{16} |000\rangle\langle 000| + \frac{3}{4} |W_1\rangle\langle W_1| + \frac{3}{16} |W_2\rangle\langle W_2|, \quad (28)$$

whereas the probability of finding the three ions in the state $|W_2\rangle$ is maximized for $t = \frac{k\pi}{4g\eta}$, with the reduced-state operator reading as

$$\rho_{22}^{ABC}\left(\frac{k\pi}{4g\eta}\right) = \frac{1}{4} |000\rangle\langle 000| + \frac{3}{4} |W_2\rangle\langle W_2|. \quad (29)$$

For $t = \frac{k\pi}{4g\eta}$ with $k = 0, 2, 4, \dots$ the three ions are found in their ground states. The three-ion state is a mixed state, $\frac{1}{3}|W_1\rangle\langle W_1| + \frac{2}{3}|W_2\rangle\langle W_2|$, for $g\eta t$ values such that $\cos(4g\eta t) = -\frac{1}{3}$.

The three-ion state operator ($\rho_{m-2,n-2}^{ABC}(t) = \text{tr}_D(|\Phi_{m-2,n-2}(t)\rangle\langle\Phi_{m-2,n-2}(t)|)$) reads as

$$\rho_{m-2,n-2}^{ABC}(t) = |a_3(t)|^2|000\rangle\langle 000| + |a_2(t)|^2|W_1\rangle\langle W_1| + |a_1(t)|^2|W_2\rangle\langle W_2| + |a_0(t)|^2|111\rangle\langle 111|. \quad (30)$$

For $m = n = 2$, the W_2 state population probability at the peak value is found to be 75% as seen in figure 2. The probability of the populating W_1 state is, relatively, small.

4. Entanglement of ionic qubits and photons

The entanglement of ionic memory qubits in the W-like state to cavity photons is an extremely interesting and useful aspect of the proposed scheme. Entangled cavity photons can transport information to a remote cavity in a fast and reliable way. For analysing the entanglement dynamics, we consider the $(m+1-i)$ phonons and $(n+1-i)$ photons to constitute a single quantum system in the space spanned by vectors $|i\rangle$ ($i = 0$ to 3), where $|i\rangle$ represents the state $|m+1-i, n+1-i\rangle$. Furthermore, the ground and excited state of an ion represent logical bits $|0\rangle$ and $|1\rangle$, respectively. The composite state of equation (13), in logical basis, reads as

$$\Psi_{m+1,n+1}(t) = a_0(t)|0000\rangle + a_1(t) \left(\frac{|1001\rangle + |0101\rangle + |0011\rangle}{\sqrt{3}} \right) + a_2(t) \left(\frac{|1102\rangle + |1012\rangle + |0112\rangle}{\sqrt{3}} \right) + a_3(t)|1113\rangle. \quad (31)$$

Labelling the three ions as A, B, C and the cavity field plus phonon state as the subsystem D , the possible bipartite partitions of the system are $A-BCD$, $B-ACD$, $C-ABD$, $D-ABC$, $AB-CD$, $AC-BD$ and $AD-BC$. We note that the ionic state is symmetrical with respect to interchange of a pair of qubits. As such distinct partitions are reduced to $A-BCD$, $D-ABC$ and $AB-CD$. The state is in the bi-orthogonal Schmidt form for qubits A, B, C and subsystem D . Quantifying or even detecting the entanglement of the composite system with four subsystems is a fairly complex task. The four subsystems may have the 4-partite GHZ state like correlations, or 4-partite entanglement resulting from bipartite entanglement between the subsystems. On tracing over anyone of the subsystems, 4-party GHZ-like entanglement is destroyed, but the three remaining subsystems may have tripartite GHZ like entanglement or W-like entanglement. While the GHZ-like tripartite entanglement is completely destroyed on tracing over one subsystem out of the three, the reduced bipartite mixed state may still have bipartite entanglement (provided that the tripartite system had W-like entanglement). The entanglement distribution in the pure state of the composite system determines the entanglement available simultaneously to all the four parties, three selected parties or a pair of subsystems. In particular, the nature, distribution and dynamics of entanglement involving

the memory qubits (trapped ions ABC) and photons is of special interest if the system is part of a quantum network.

Peres [24] was the first to observe that a partial transpose of a density matrix associated with a separable state of a bipartite system is still a valid density matrix and thus positive (semi) definite. Horodecki *et al* [25] proved that a positive partial transpose (PPT) was a necessary and sufficient condition for separability of a state if the dimension of the Hilbert space does not exceed six. A negative partial transpose is a clear signature of entanglement. Negativity [21–23] based on the Peres–Horodecki PPT criterion has been shown to be an entanglement monotone [26]. In a recent paper [28], we introduced 2-way and 3-way negativities to discuss the entanglement of three qubit states. In [27, 29], a characterization of multipartite quantum states having N subsystems, based on partial K -way negativities has been proposed. The K -way partial transpose with respect to a subsystem is constructed from the state operator by imposing specific constraints on the matrix elements involving the states of K subsystems of the multipartite composite system. It has been shown that the partial transpose of the density matrix of an N -partite system, with respect to a given subsystem, can be written as a sum of K -way partial transposes where $2 \leq K \leq N$. The contribution to negativity due to a K -way partial transpose is easily calculated. The K -way negativity ($2 \leq K \leq N$), defined as the negativity of K -way partial transpose, quantifies the K -way coherences of the composite system. In contrast with the entropic measures of entanglement, where a reduced-state operator is used to obtain information about the correlations between parts of a composite system, the partial K -way negativities are calculated from the state operator of the composite system itself. The negativity of global partial transpose remains invariant under local operations and classical communication (LOCC); however, the partial K -way negativities may increase or decrease under LOCC at the cost of each other. The partial K -way negativities show the entanglement distribution in different parts of the system in a given state. While the total entanglement in a composite system cannot be increased by local operations, the entanglement distribution can be changed by local operations. In this section, we investigate the entanglement dynamics of the composite system state by using the global negativity to detect the entanglement, and partial K -way negativities to determine the entanglement distribution amongst different subsystems.

4.1. Definition of global and K -way negativities

The global partial transpose $\widehat{\rho}_G^{TA}$ of the four-party state operator $\widehat{\rho}^{ABCD} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ with respect to the subsystem A is constructed by using the condition

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \widehat{\rho}_G^{TA} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle = \langle j_1 i_2 i_3 i_4 | \widehat{\rho}^{ABCD} | i_1 j_2 j_3 j_4 \rangle. \quad (32)$$

The K -way partial transpose ($2 \leq K \leq 4$) of the state operator $\widehat{\rho}^{ABCD}$ with respect to the subsystem A is defined as

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \widehat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle = \langle j_1 i_2 i_3 i_4 | \widehat{\rho}^{ABCD} | i_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$$

$$\text{if } \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{i_m, j_m}) = K \quad (33)$$

and

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}_K^{T_A} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$$

$$= \langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}^{ABCD} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle \quad \text{if} \quad \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{i_m, j_m}) \neq K,$$

where

$$\begin{cases} \delta_{i_m, j_m} = 1 & \text{for } i_m = j_m \\ \delta_{i_m, j_m} = 0 & \text{for } i_m \neq j_m. \end{cases} \quad (34)$$

Similar constraints are applied to construct global and K -way partial transpose with respect to subsystems B , C or D . The negativity of ρ^{T_p} is related to the trace norm of ρ^{T_p} through

$$N^p = \frac{1}{d_p - 1} (\|\rho^{T_p}\|_1 - 1). \quad (35)$$

Negativity based on the Peres–Horodecki criterion is a natural entanglement measure. We define the global negativity with respect to the subsystem p as

$$N_G^p = \frac{1}{d_p - 1} (\|\rho_G^{T_p}\|_1 - 1), \quad (36)$$

and K -way negativity [27, 29] as

$$N_K^p = \frac{1}{d_p - 1} (\|\rho_K^{T_p}\|_1 - 1), \quad (37)$$

where d_p is the dimension of the Hilbert space associated with the subsystem p .

Furthermore, we define the 3-way partial transpose $\hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}}$ involving the qubits ABC as

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle = \langle j_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}^{ABCD} | i_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$$

$$\text{if} \quad \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{i_m, j_m}) = 3, \quad \text{and} \quad i_4 \neq j_4, \quad (38)$$

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle = \langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}^{ABCD} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$$

$$\text{if} \quad \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{i_m, j_m}) = 3, \quad \text{and} \quad i_4 = j_4, \quad (39)$$

and

$$\langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle = \langle i_1 i_2 i_3 i_4 | \hat{\rho}^{ABCD} | j_1 j_2 j_3 j_4 \rangle$$

$$\text{if} \quad \sum_{m=1}^4 (1 - \delta_{i_m, j_m}) \neq 3, \quad (40)$$

with the corresponding negativity

$$N_3^{A-ABC} = \frac{1}{d_p - 1} (\|\hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}}\|_1 - 1). \quad (41)$$

Analogous definitions hold for the 3-way partial transposes $\hat{\rho}_3^{T_{A-ABD}}$, $\hat{\rho}_3^{T_{A-ACD}}$ and $\hat{\rho}_3^{T_{D-BCD}}$.

4.2. Global and partial K -way negativity

Global negativity with respect to a subsystem can be written as a sum of partial K -way negativities. The global transpose with respect to the subsystem p , written in its eigenbasis is given by

$$\hat{\rho}_G^{T_p} = \sum_i \lambda_i^{G+} |\Psi_i^{G+}\rangle \langle \Psi_i^{G+}| + \sum_i \lambda_i^{G-} |\Psi_i^{G-}\rangle \langle \Psi_i^{G-}|, \quad (42)$$

where λ_i^{G+} and $|\Psi_i^{G+}\rangle$ (λ_i^{G-} and $|\Psi_i^{G-}\rangle$) are the positive (negative) eigenvalues and eigenvectors of $\hat{\rho}_G^{T_p}$, respectively. Using the definition of trace norm and $\text{Tr}(\hat{\rho}_G^{T_p}) = 1$, the negativity of $\hat{\rho}_G^{T_p}$ is given by

$$N_G^p = -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_G^{T_p} | \Psi_i^{G-} \rangle$$

$$= -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \lambda_i^{G-}. \quad (43)$$

The global transpose with respect to the subsystem p , may also be rewritten as

$$\hat{\rho}_G^{T_p} = \sum_{K=2}^N \hat{\rho}_K^{T_p} - (N - 2)\hat{\rho}. \quad (44)$$

Substituting equation (44) into equation (43), we get

$$-2 \sum_i \lambda_i^{G-} = -2 \sum_{K=2}^N \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_K^{T_p} | \Psi_i^{G-} \rangle$$

$$+ 2(N - 2) \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho} | \Psi_i^{G-} \rangle. \quad (45)$$

Defining partial K -way negativity E_K^p ($K = 2$ to N) as

$$E_K^p = -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_K^{T_p} | \Psi_i^{G-} \rangle \quad (46)$$

and

$$E_0^p = -\frac{2(N - 2)}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho} | \Psi_i^{G-} \rangle \quad (47)$$

we may split the global negativity for qubit p as

$$N_G^p = \sum_{K=2}^N E_K^p - E_0^p. \quad (48)$$

To obtain the tripartite GHZ state like correlations between three subsystems, we calculate

$$E_3^{A-ABC} = -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_3^{T_{A-ABC}} | \Psi_i^{G-} \rangle, \quad (49)$$

$$E_3^{A-ABD} = -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_3^{T_{A-ABD}} | \Psi_i^{G-} \rangle \quad (50)$$

and

$$E_3^{A-ACD} = -\frac{2}{d_p - 1} \sum_i \langle \Psi_i^{G-} | \hat{\rho}_3^{T_{A-ACD}} | \Psi_i^{G-} \rangle. \quad (51)$$

It is easily verified that for the system at hand $E_3^{A-ABC} = 0$, and $E_3^{A-ACD} = E_3^{A-ABD} = E_3^A/2.0$. As such the three qubits have no genuine tripartite entanglement.

4.3. Entanglement dynamics of the pure state $\Psi_{m+1,n+1}(t)$

We use the global negativity to detect the entanglement of parts in bipartite splits of the system. In case the negativities $N_G^A, N_G^B, N_G^C, N_G^D$ and N_G^{AB} are nonzero, the system has 4-partite entanglement. The 4-way, 3-way and 2-way partial negativities identify and quantify the different types of entanglement between the subsystems of the composite system in a given state. From the state operator $\hat{\rho}(t) = |\Psi_{m+1,n+1}(t)\rangle\langle\Psi_{m+1,n+1}(t)|$, the global and K -way partial transposes are constructed by following the prescription given in section 4 (equations (32) and (33)). The state of equation (13) is very special in that analytical results can be obtained for partial K -way negativities characterizing the state. Using negative eigenfunctions of $\rho_G^{T_p}$, the entanglement measures E_K^p for $K = 2, 3$ and 4 are easily obtained. The negativity of global partial transpose with respect to qubit A is found to be

$$N_G^A = 2\sqrt{\left(|a_0(t)|^2 + \frac{2|a_1(t)|^2}{3} + \frac{|a_2(t)|^2}{3}\right)\left(|a_3(t)|^2 + \frac{|a_1(t)|^2}{3} + \frac{2|a_2(t)|^2}{3}\right)}. \quad (52)$$

Using the eigenvector corresponding to the negative eigenvalue of $\rho_G^{T_A}$, we get the partial negativities

$$E_4^A = \frac{4}{N_G} \left(|a_0(t)|^2 |a_3(t)|^2 + \frac{|a_1(t)|^2 |a_2(t)|^2}{3} \right), \quad (53)$$

$$E_3^A = \frac{4}{N_G} \left(\frac{2|a_0(t)|^2 |a_2(t)|^2}{3} + \frac{2|a_1(t)|^2 |a_3(t)|^2}{3} \right) \quad (54)$$

and

$$E_2^A = \frac{4}{N_G} \left[\frac{|a_0(t)|^2 |a_1(t)|^2}{3} + \frac{|a_2(t)|^2 |a_3(t)|^2}{3} + 2 \left(\frac{|a_1(t)|^2}{3} + \frac{|a_2(t)|^2}{3} \right)^2 \right]. \quad (55)$$

It is easily seen that $N_G^A = N_G^B = N_G^C$. Next we construct the transposes $\rho_G^{T_D}, \rho_4^{T_D}, \rho_3^{T_D}$ and $\rho_2^{T_D}$ for the decomposition $ABC-D$ of the state $\Psi_{m+1,n+1}(t)$ and obtain

$$N_G^D = \frac{2}{3} |a_0(t)| (|a_1(t)| + |a_2(t)| + |a_3(t)|) + \frac{2}{3} |a_1(t)| (|a_2(t)| + |a_3(t)|) + 2 |a_2(t)| |a_3(t)|, \quad (56)$$

$$E_4^D = \frac{2}{3} |a_0(t)| |a_3(t)| + \frac{2}{9} |a_1(t)| |a_2(t)|, \quad (57)$$

$$E_3^D = \frac{2}{3} |a_0(t)| |a_2(t)| + \frac{2}{3} |a_1(t)| |a_3(t)| \quad (58)$$

and

$$E_2^D = \frac{2}{3} |a_0(t)| |a_1(t)| + \frac{2}{3} |a_2(t)| |a_3(t)| + \frac{4}{9} |a_1(t)| |a_2(t)|. \quad (59)$$

Since the three qubits have no genuine tripartite entanglement, the partial negativity E_3^D represents the entanglement of the quantum system D with the W-like states of three qubits.

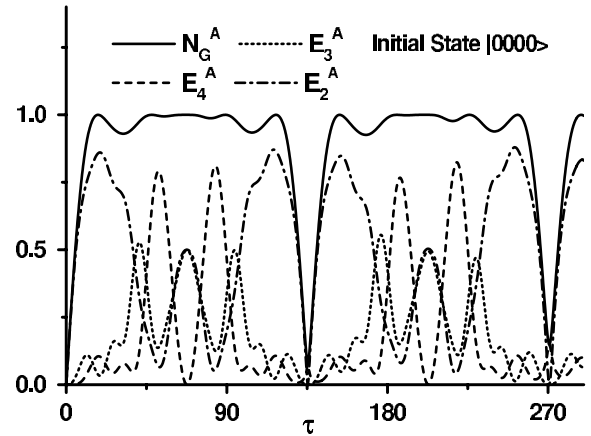


Figure 3. The global negativity N_G^A , and entanglement measures E_K^A , for $K = 2$ to 4 versus $\tau (=g\eta t)$ for the initial state $|0000\rangle$.

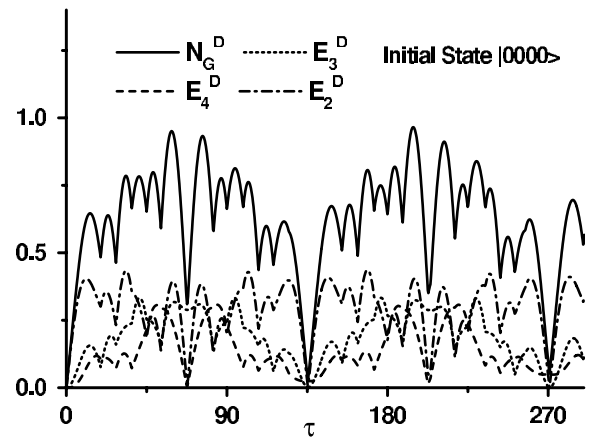


Figure 4. The global negativity N_G^D , and entanglement measures E_K^D , for $K = 2$ to 4 versus $\tau (=g\eta t)$ for the initial state $|0000\rangle$.

Treating AB as a single system in the Hilbert space of dimension 4, the global negativity is found to be

$$N_G^{AB} = \frac{2}{3} (\mu_0 \mu_1 + \mu_0 \mu_2 + \mu_1 \mu_2), \quad (60)$$

where

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sqrt{|a_0(t)|^2 + \frac{|a_1(t)|^2}{3}}, \\ \mu_1 &= \sqrt{\frac{2|a_1(t)|^2}{3} + \frac{2|a_2(t)|^2}{3}}, \\ \mu_2 &= \sqrt{|a_3(t)|^2 + \frac{|a_2(t)|^2}{3}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Figures 3 and 4 display the global negativity and K -way entanglement of qubits A and D in the state $\Psi_{33}(t)$, as a function of the interaction parameter $\tau = g\eta t$. At $\tau \approx \frac{3\pi}{8}$, we have $E_3^A = E_2^A = 0.5$, indicating that the qubit A (or B or C) has equally strong bipartite and tripartite correlations. Recalling that no genuine tripartite entanglement exists between the three qubits as evidenced by $E_3^{A-ABC} = 0$, we have here the three qubits in the W_1 -like state entangled to

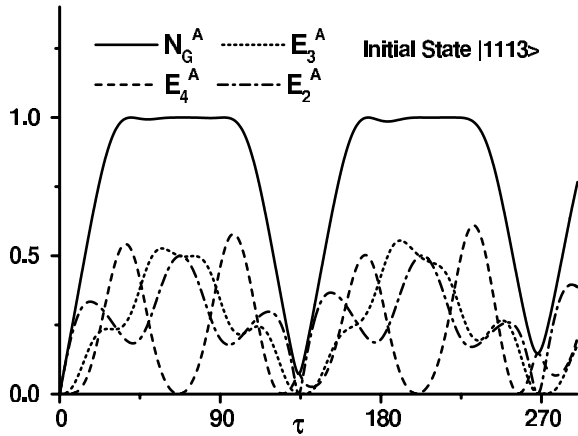


Figure 5. The global negativity N_G^A , and entanglement measures E_K^A , for $K = 2$ to 4 versus $\tau (=g\eta t)$ for the initial state $|1113\rangle$.

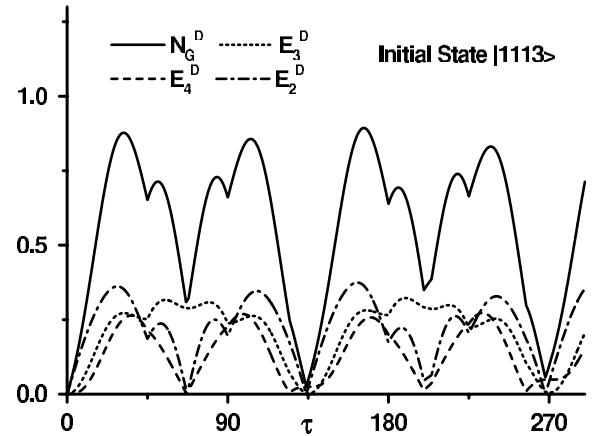


Figure 6. The global negativity N_G^D , and entanglement measures E_K^D , for $K = 2$ to 4 versus $\tau (=g\eta t)$ for the initial state $|1113\rangle$.

the subsystem D . In other words, the cavity field is entangled to three ions in the W_1 -like state and can be used to transfer the entanglement of the composite system to a remote quantum system. The probability plot of figure 1 confirms that for interaction time $t = \frac{3\pi}{8g\eta}$, $P_0(\tau) = P_2(\tau) = 0$, $P_1(\tau)$ shows a peak and $P_3(\tau)$ is finite. A measurement that finds the cavity in the two photon state collapses the composite system state to three ions in the W_1 -state with the centre of mass in a two-phonon state.

4.4. Entanglement dynamics of the pure state $\Phi_{m-2,n-2}(t)$

Analytical expressions for negativities and partial K -way negativities for the state $\Phi_{m-2,n-2}(t)$ (equation (21)) written in computational basis as

$$\begin{aligned} \Phi_{m-2,n-2}(t) = & a_3(t)|0000\rangle + a_2(t) \left(\frac{|1001\rangle + |0101\rangle + |0011\rangle}{\sqrt{3}} \right) \\ & + a_1(t) \left(\frac{|1102\rangle + |1012\rangle + |0112\rangle}{\sqrt{3}} \right) + a_0(t)|1113\rangle \quad (62) \end{aligned}$$

are analogous to those for the state $\Psi_{m+1,n+1}(t)$. For the special case of the state $\Phi_{00}(t)$, the global and partial K -way negativities are displayed, in figures 5 and 6 for qubits A and D , respectively. The negativities N_G^{AB} for the states $\Psi_{33}(t)$ and $\Phi_{00}(t)$ are shown in figure 7. At $\tau = \frac{3\pi}{8}$, the coefficient $a_2(t) = a_0(t) = 0$ and $E_3^A = E_2^A = 0.5$ giving (using equation (22)) the state

$$\begin{aligned} \Phi_{00} \left(\tau = \frac{3\pi}{8} \right) = & a_3(t)|000, m+1, n+1\rangle \\ & + a_1(t)|W_2, m-1, n-1\rangle. \end{aligned}$$

In this case we have three ions in the W_2 -like state entangled to the photon-phonon system. As such detecting the cavity in the single photon state ensures that the three ions are in the W_2 state. The entanglement of the cavity field with three ions in the W_2 -like state may, on the other hand, be used to communicate with a remote quantum system. For an interaction time $t = \frac{3\pi}{8g\eta}$, $P_2(\tau)$ shows a peak and $P_0(\tau)$ is finite in the probability plot of figure 2.

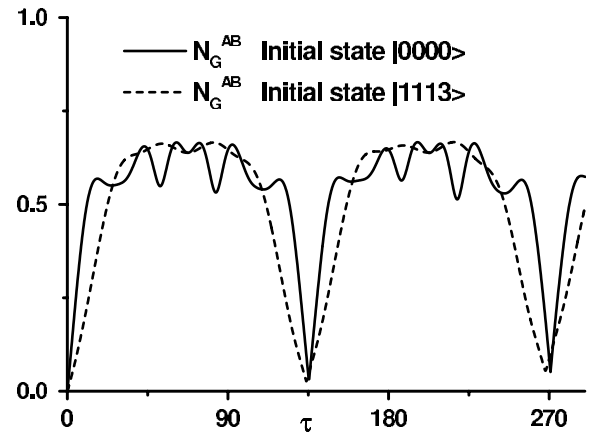


Figure 7. The global negativity N_G^{AB} versus $\tau (=g\eta t)$ for the initial states $|0000\rangle$ and $|1113\rangle$.

The number of initial-state vibrational quanta also controls the nature of entanglement in the composite system states. We note that for a single phonon initial state the general form of the state (equation (23))

$$\begin{aligned} \Psi_{1,n+1}(t) = & a_0(t)|0000\rangle \\ & + a_1(t) \left(\frac{|1001\rangle + |0101\rangle + |0011\rangle}{\sqrt{3}} \right), \quad (63) \end{aligned}$$

allows only bipartite entanglement. For $m \geq 2$, the composite system may have genuine 4-partite, tripartite as well as bipartite entanglement. This is an interesting aspect unique to systems where vibrational motion of ions is coupled to a cavity field.

5. What do the K -way negativities add to our knowledge of the system?

Figures 3–7 show the entanglement distribution between possible entanglement modes available to the system in states $\Psi_{33}(t)$ and $\Phi_{00}(t)$. Since analytical expressions for partial K -way negativities are available for specific initial-state preparations, the rate of change of partial K -way negativity for a particular mode can be easily obtained, if needed. The

two way partial negativity is seen to grow at the fastest rate being the first to reach its peak value, followed by two peaks showing maxima of partial 3-way and 4-way negativities, respectively. Besides that a reversible entanglement exchange between different entanglement modes is observed. In figure 3 at the maxima of partial 4-way negativity, partial 2-way and 3-way negativities are rather small, whereas the minima of E_4^A correspond to a large contribution to total entanglement from bipartite and genuine tripartite entanglement. Similar trend is seen in figures 4–6. Figure 7 complements the information about entanglement distribution obtained from figures 1–6. Once the interaction is switched on, a typical qubit pair is found to be in an entangled state until the composite becomes separable again. As seen from the global negativity plots, the period after which the composite system becomes separable is given by $T = \frac{3\pi}{4g\eta}$.

In particular, we look at the entanglement of states $\Psi_{m+1,n+1}^{W_1}$ (equation (18)) and $\Phi_{m-2,n-2}^{W_2}$ (equation (22)). For both types of states $N_G^D = E_3^D$, that is there no genuine 4-partite entanglement amongst the subsystems A, B, C and D . The global negativities are however finite for A, B, C, D as well as AB , pointing to 4-partite entanglement. Although for qubits A, B , and C we get finite partial 2-way negativities, 4-partite entanglement cannot be due to two-way correlations because $E_2^D = 0$. The 2-way negativity of the partial transpose of the W_1 state or W_2 state is 0.94, where as the 3-way negativity is zero. As such a W state is a state with maximal tripartite entanglement generated by 2-way correlations. In states $\Psi_{m+1,n+1}^{W_1}$ and $\Phi_{m-2,n-2}^{W_2}$ ions in a W-like state are entangled to the subsystem D . We conclude that the 4-partite entanglement of three ions with the photon–phonon system is generated by 2-way and 3-way correlations.

6. Conclusions

We have studied the entanglement dynamics of spatially separated three two-level cold trapped ions in a high finesse cavity with the cavity tuned to the red sideband of ionic vibrational motion. Analytical expressions for the state of the composite system as a function of interaction time are obtained for the interaction Hamiltonian of equation (3) with the cavity prepared initially in different photon number states. With three ions initially in their ground state, the state $|000, m+1, n+1\rangle$ evolves (i) for $m=0$ and $n \geq 0$, in a bi-dimensional subspace, (ii) for $m=1$ and $n \geq 1$ in a tridimensional subspace and (iii) for $m \geq 2$ and $n \geq 2$ in a four-dimensional subspace of the coupled basis ionic states. The initial state $|111, m+1, n+1\rangle$ always evolves in a four-dimensional subspace independent of the initial phonon and photon number. The number of initial-state vibrational quanta offers a control mechanism for manipulation of composite system states, when ions are in their ground state initially. This is an interesting aspect unique to systems where vibrational motion of ions is coupled to a cavity field in contrast to the ions coupled only to quantized cavity field [33, 34] or only with the vibrational modes [35]. Useful practical applications to implement information processing and communication-related tasks can benefit from this special feature. The reduced three-ion state operator is obtained by

tracing out the phonon and photon degrees of freedom. For the cavity ion coupling strength $g = 8.95$ MHz, the Lamb–Dicke parameter value $\eta = 0.01$ and the cavity prepared in the single photon state at $t = 0$, the minimum interaction time needed to generate a three-ion W-state is found to be $\sim 10.133 \mu\text{s}$. For the initial state in which three ions are in their ground state and the centre of mass in the two phonon state, the W_2 state generation probability increases while the minimum interaction time to get the probability peak decreases, with increase in the number of photons present in the cavity at $t = 0$.

The ionic qubits in the W-state are found to be entangled to cavity photons, which may be used to transport information to a remote cavity in a fast and reliable way. Multipartite entanglement dynamics of the composite system is examined using global, 4-way, 3-way and 2-way negativities. Analytical expressions for partial K -way negativities ($K = 2$ to 4) are obtained. For the three ions prepared initially in their ground state or in their excited state, the partial K -way negativities are calculated numerically and plotted as a function of the interaction parameter. These plots show the entanglement distribution as well as the rate of change with time of entanglement between possible entanglement modes available to the system. Besides that, reversible entanglement exchange between different entanglement modes is observed. For specific values of the interaction parameter, the three ions and photon–phonon system are found to have 4-partite entanglement, generated by 2-way and 3-way correlations. Three ions in the W-state are found to be entangled to photons. We expect this analysis to add to the understanding of multipartite entanglement in the context of trapped ions interacting with photons in optical cavities.

Acknowledgments

SSS acknowledges financial support from FAEP/UEL, and Fundação Araucaria PR, Brazil. EdeA thanks Capes, Brazil for financial support.

References

- [1] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [2] Bennett C H and Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [3] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A and Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [4] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Itano W M and Wineland D J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4714
- [5] Wineland D J, Monroe C, Itano W M, Leibfried D, King B E and Meekhof D M 1998 *NIST J. Res.* **103** 259
- [6] Roos C F, Zeiger Th, Rohde H, Nagerl H C, Eschner J, Leibfried D, Schmidt-Kaler F and Blatt R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4713
- Monroe C, Meekhof D M, King B E, Itano W M and Wineland D J 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4714
- [7] Häffner H *et al* 2005 *Nature* **438** 643
- [8] Cirac J I *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3221
- [9] Bužek V, Drobny G, Kim M S, Adam G and Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* **56** 2352
- [10] Sharma S S 2003 *Phys. Lett. A* **311** 187
- [11] Sharma S S, Sharma N K and de Almeida E 2006 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39** 695

- [12] Mundt A B, Kreuter A, Becher C, Leibfried D, Eschner J, Schmidt-Kaler F and Blatt R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 103001
- [13] Mundt A B, Kreuter A, Russo C, Becher C, Leibfried D, Eschner J, Schmidt-Kaler F and Blatt R 2003 *Appl. Phys. B* **76** 117
- [14] Eschner J, Raab Ch, Mundt A, Kreuter A, Becher C, Schmidt-Kaler F and Blatt R 2003 *Fortschr. Phys.* **51** 359
- [15] Morigi G, Eschner J and Keitel C H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4458
- [16] Roos C F, Leibfried D, Mundt A B, Schmidt-Kaler F, Eschner J and Blatt R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5547
- [17] Tessier T E, Deutsch I H and Delgado A 2003 *Phys. Rev. A* **68** 062316
- [18] Tavis and Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379
- [19] Fidio C Di, Maniscalco S and Vogel W 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033825
- [20] Bouwmeester D, Ekert A and Zeilinger A 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer)
- [21] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A and Lewenstein M 1998 *Phys. Rev. A* **58** 883
- [22] Vidal G 2000 *J. Mod. Opt.* **47** 355
- [23] Eisert J 2001 *PhD Thesis* University of Potsdam
- [24] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [25] Horodecki M, Horodecki P and Horodecki R 1996 *Phys. Lett. A* **223** 1
- [26] Vidal G and Werner R F 2002 *Phys. Rev.* **65** 032314
- [27] Sharma S S and Sharma N K 2006 arXiv:quant-ph/0608062 (unpublished)
- [28] Sharma S S and Sharma N K 2007 *Phys. Rev. A* **76** 012326
- [29] Sharma S S and Sharma N K 2008 *Phys. Rev. A* **77** 042117
- [30] Sharma S S and Vidiella-Barranco A 2003 *Phys. Lett. A* **309** 345
- [31] Sharma S S and Sharma N K 2008 *Phys. Rev. A* **78** 012113
- [32] Coffman V, Kundu J and Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306
- [33] Fujii K, Higashida K, Kato R, Suzuki T and Wada Y 2004 *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **1** 6
- [34] Cai JF and Liu HP 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 427–31
- [35] Retzker A, Solano E and Reznik B 2007 *Phys. Rev. A* **75** 022312

Referências Bibliográficas

- [1] G. J. Milburn, *The Feynman processor: quantum entanglement and the computing revolution*. (Perseus Books 1998) p. 192.
- [2] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turning principle and the universal quantum computer*. Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [3] L. K. Grover, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*. In *28th ACM Symposium on theory of computation*, p. 212, New York (1996). Association for computing machinery.
- [4] L. K. Grover, *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack*. Phys. Rev. Lett. **79**, 325 (1997).
- [5] P. Shor, *Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring*. Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, p. 124, Los Alamitos, CA. (1994). IEEE Computer Society Press.
- [6] B. Kraus e J. I. Cirac, *Optimal creation of entanglement using a two-qubit gate*. Phys. Rev. A **63**, 062309 (2001).
- [7] A. F. Abouraddy, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko e M. C. Teich, *Degree of entanglement for two qubits*. Phys. Rev. A **64**, 050101 (2001).
- [8] C. S. Yu, X. X. Yi, H. S. Song e D. Mei, *Robust preparation of GHZ and W states of three distant atoms*. quant-ph/0709.0802 (2007).
- [9] W. Dur, G. Vidal e J. I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*. Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000).

- [10] B. S. Shi e A. Tomita, *Teleportation of an unknown state by W state*. Phys. Lett. A **296**, 161 (2002).
- [11] V. N. Gorbachev, A. I. Trubilko e A. A. Rodichkina, *Can the states of the W-class be suitable for teleportation*. quant-ph/0203028 (2003).
- [12] J. Joo, Y. J. Park, J. Jang e I. Kim, *Quantum secure communication via a W state*. Korean Phys. Soc. **46**, 763 (2005).
- [13] J. Joo, J. Lee, J. Jang e Y. J. Park, *Quantum secure communication with W states*. quant-ph/0204003 (2002).
- [14] Quantum Information Science and Technology Roadmapping Project, Universidade da California. http://qist.lanl.gov/qcomp_map.shtml
- [15] D. P. DiVincenzo, *Quantum computation*. Science **270**, 255 (1995).
- [16] J. I. Cirac e P. Zoller, *Quantum computations with cold trapped ions*. Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [17] D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King, W. M. Itano e D. J. Wineland, *Generation of nonclassical motional states of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996).
- [18] Q. A. Turchette, C. S. Wood, B. E. King, C. J. Myatt, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe e D. J. Wineland, *Deterministic entanglement of two trapped ions*. Phys. Rev. Lett. **81**, 3631 (1998).
- [19] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano e D. J. Wineland, *Experimental entanglement of four particles*. Nature **404**, 256 (2000).
- [20] H. Haffner, W. Hansel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Korber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Guhne, W. Dur e R. Blatt, *Scalable multiparticle entanglement of trapped ions*. Nature **438**, 643 (2005).
- [21] H. C. Nagerl, D. Leibfried, H. Rohde, G. Thalhammer, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Laser addressing of individual ions in a linear ion trap*. Phys. Rev. A **60**, 145 (1999).

- [22] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Leibfried, R. Ozeri e D. J. Wineland, *Deterministic quantum teleportation of atomic qubits*. Nature **429**, 737 (2004).
- [23] M. Riebe, H. Haffner, C. F. Roos, W. Hansel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Korber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James e R. Blatt, *Deterministic quantum teleportation with atoms*. Nature **429**, 734 (2004).
- [24] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle e D. J. Wineland, *Creation of a six-atom ‘Schrödinger cat’ state*. Nature **438**, 639 (2005).
- [25] S. Gulde, M. Riebe, G. P. T. Lancaster, C. Becher, J. Eschner, H. Haffner, F. Schmidt-Kaler, I. L. Chuang e R. Blatt, *Implementation of the Deutsch-Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer*. Nature **421**, 48 (2003).
- [26] Y. Wu, M. G. Payne, E. W. Hagley e L. Deng, *Preparation of multiparty entangled states using pairwise perfectly efficient single-probe photon four-wave mixing*. Phys. Rev. A **69**, 063803 (2004).
- [27] D. Bouwmeester, J. W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Observation of three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*. Phys. Rev. Lett. **82**, 1345 (1999).
- [28] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity*. Phys. Rev. Lett. **89**, 103001 (2002).
- [29] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Russo, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Coherent coupling of a single $^{40}\text{Ca}^+$ ion to a high-finesse optical cavity*. Appl. Phys. B **76**, 117 (2003).
- [30] X. Yang e X. Zheng, *Effect of atomic state measurement on squeezing of the field*. Phys. Rev. A **40**, 8 (1989).
- [31] S. B. Zheng e G. C. Guo, *Efficient scheme for two atom entanglement and quantum information processing in cavity QED*. Phys. Rev. Lett. **85**, 2392 (2000).

- [32] W. X. Yang, Z. M. Zhan e J. H. Li, *Generation of two mode nonclassical states via dispersive interaction in trapped-ion cavity quantum electrodynamics*. Chin. Phys. Lett. **21**, 421 (2004).
- [33] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato e Y. Wada, *Explicit form of solution of two atoms Tavis-Cummings model*. quant-ph/0403008 v3 (2004).
- [34] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato, T. Suzuki e Y. Wada, *Explicit form of the evolution operator of Tavis-Cummings model: three and four atoms cases*. Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **1**, 721 (2004).
- [35] M. Abdel-Atv e A. S. F. Obada, *Analytic solution for entangled two-qubit in a cavity field*. J. Math. Phys. **45**, 4271 (2004).
- [36] S. B. Li e J. B. Xu, *Generation of maximally entangled mixed states of two atoms inside an optical cavity*. quant-ph/0507072 (2005).
- [37] J. B. Xu e S. B. Li, *Control of the entanglement of two atoms in an optical cavity via white noise*. New Journal of Physics **7**, 72 (2005).
- [38] J. F. Cai e H. P. Liu, *Entanglement in three-atom Tavis-Cummings model induced by a thermal field*. Commun. Theor. Phys. **43**, 427 (2005).
- [39] L. J. Jin e M. F. Fang, *Entanglement in a system of two two-level atoms interacting with a single-mode field*. Chin. Phys. Soc. **15**, 2012 (2006).
- [40] X. P. Liao, M. F. Fang, X. J. Zheng e J. W. Cai, *Three-body entanglement induced by spontaneous emission in a three two-level atoms system*. Chin. Phys. Soc. **15**, 353 (2006).
- [41] Z. J. Zhang e K. L. Wang, *Discussion on maximally entangled states of two coupled two-level particles by coherent state approximation*. Chin. Phys. Lett. **23**, 1369 (2006).
- [42] Y. F. Xiao, Z. F. Han, J. Gao e G. C. Guo, *Generation of multi-atom Dicke states through the detection of cavity decay*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 485 (2006).

- [43] V. Bužek, G. Drobný, M. S. Kim, G. Adam e P. L. Knight, *Cavity QED with cold trapped ions*. Phys. Rev. A **56**, 2352 (1997).
- [44] F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J. A. Roversi, *Nonclassical effects in cold trapped ions inside a cavity*. Phys. Rev. A **66**, 063403 (2002).
- [45] S. S. Sharma, *Tripartite GHZ state generation with trapped ion in an optical cavity*. Phys. Lett. A **311**, 111 (2003).
- [46] E. T. Jaynes e F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*. Proc. IEEE **51**, 89 (1963).
- [47] J. H. Eberly, N. B. Narozhny e J. J. Sanchez-Mondragon, *Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model*. Phys. Rev. Lett. **44**, 1323 (1980).
- [48] G. Rempe, H. Walther e N. Klein, *Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser*. Phys. Rev. Lett. **58**, 353 (1987).
- [49] M. Tavis e F. W. Cummings, *Exact solution for an N -molecule-radiation-field Hamiltonian*. Phys. Rev. **170**, 379 (1968).
- [50] A. Kundu, *Quantum integrable multiatom matter-radiation models with and without the rotating-wave approximation*. Theor. Math. Phys. **144**, 975 (2005).
- [51] V. Hussin e L. M. Nieto, *Ladder operators and coherent states for the Jaynes-Cummings model in the rotating-wave approximation*. J. Math. Phys. **46**, 122102 (2005).
- [52] Y. Wen-Xing, Z. Zhi-Ming e L. Jia-Hua, *Generation of two-mode nonclassical states via dispersive interaction in trapped-ion cavity quantum electrodynamics*. Chin. Phys. Lett. **21**, 421 (2004).
- [53] G. X. Li, S. P. Wu e G. M. Huang, *Generation of entanglement and squeezing in the system of two ions trapped in a cavity*. Phys. Rev. A **71**, 063817 (2005).
- [54] L. S. de la Torre. *Aplicação das funções de quase probabilidade no estudo da dinâmica de emaranhamento*. Tese de doutorado (Instituto de Física Gleb Wataghin, 2003).

- [55] M. O. Scully e M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press 1997).
- [56] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [57] E. Schrödinger, *Discussion of probability relations between separated systems.* Proc. Camb. Phil. Soc. **31**, 555 (1935).
- [58] E. Schrödinger, *Probability relations between separated systems.* ibid. **32**, 446 (1936).
- [59] M. S. Hussein e S. R. A. Salinas, *100 anos de física quântica.* (Livraria da Física, São Paulo 2001). Ver artigo de A. F. R. de Toledo Piza, *Schrödinger, Emaranhamento e Decoerência.*
- [60] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox.* Physics 1, 195 (1964).
- [61] J. S. Bell, *On the problem of hidden variables in quantum theory.* Rev. Math. Phys. **86**, 447 (1966).
- [62] M. S. Hussein e S. R. A. Salinas, *100 anos de física quântica.* (Livraria da Física, São Paulo 2001). Ver artigo de J. C. A. Barata, *Desigualdades de Bell.*
- [63] A. Aspect, *Proposed experiment to test the non-separability of quantum mechanics.* Phys. Rev. D **14**, 1944 (1976).
- [64] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, *Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem.* Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [65] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities.* Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [66] A. Aspect, J. Dalibart e G. Roger, *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers.* Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [67] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King e D. J. Wineland, *A "Schrödinger cat" superposition state of an atom.* Science **272**, 1131 (1996).

- [68] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*. Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [69] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, *Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions*. Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [70] K. Nagata, *Necessary and sufficient condition for full N -partite entanglement*. quant-ph/0709.1306 (2007).
- [71] D. Bruß, *Characterizing entanglement*. J. Math. Phys. **43**, 4237 (2002).
- [72] S. Abe e A. K. Rajagopal, *Nonadditive conditional entropy and its significance for local realism*. Physica A **289**, 157 (2001).
- [73] M. B. Plenio e S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*. quant-ph/0504163 (2006).
- [74] G. Vidal e R. F. Werner, *Computable measure of entanglement*. Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [75] S. S. Sharma e N. K. Sharma, *Quantum coherences, K -way negativities and multipartite entanglement*. Phys. Rev. A **77**, 042117 (2008).
- [76] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, NJ (1955).
- [77] F. A. A. El-Orany, *Relationship between the linear entropy the von neumann entropy and the atomic wehrl entropy for the Jaynes Cummings model*. quant-ph/0705.4373 (2007).
- [78] A. Olaya-Castro, N. F. Johnson e L. Quiroga, *Dynamics of quantum correlations and linear entropy in a multi-qubit-cavity system*. quant-ph/0311181 (2004).
- [79] C. Tsallis, *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [80] A. Kuhn, M. Hennrich e G. Rempe, *Deterministic single-photon source for distributed quantum networking*. Phys. Rev. Lett. **89**, 067901 (2002).

- [81] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins e H. J. Kimble, *The atom-cavity microscope: single atoms bound in orbit by single photons*. *Science* **287**, 1457 (2000).
- [82] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J. M. Raimond e S. Haroche, *Quantum Rabi oscillation: a direct test of field quantization in a cavity*. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996).
- [83] C. J. Hood, H. J. Kimble e J. Ye, *Characterization of high-finesse mirrors: Loss, phase shifts, and mode structure in an optical cavity*. *Phys. Rev. A* **64**, 033804 (2001).
- [84] A. B. Mundt, *Cavity QED with single trapped Ca^+ -ions*. Tese de doutorado. (Universidade de Innsbruck, 2003).
- [85] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. B. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, E. Jacques, P. Bosland e B. Visentin, *Ultrahigh finesse Fabry-Perot superconducting resonator*. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 164101 (2007).
- [86] R. Miller, T. E. Northup, K. M. Birnbaum, A. Boca, A. D. Boozer e H. J. Kimble, *Trapped atoms in cavity QED: coupling quantized light and matter*. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, S551 (2005).
- [87] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [88] T. Binnewies, G. Wilpers, U. Sterr, F. Riehle, J. Helmcke, T. E. Mehlstäubler, E. M. Rasel e W. Ertmer, *Doppler cooling and trapping on forbidden transitions*. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 123002 (2001).
- [89] E. A. Curtis, C. W. Oates e L. Hollberg, *Quenched narrow-line laser cooling of ^{40}Ca to near the photon recoil limit*. *Phys. Rev. A* **64**, 031403(R) (2001).
- [90] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King e D. M. Meekhof, *Experimental issues in coherent quantum state manipulation of trapped atomic ions*. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology* **103**, 3, (1998).

- [91] S. Fujiwara, H. Osaki, I. M. Buluta e S. Hasegawa, *Efficient quantum logic with cold trapped ions for maximally entangled states*. Phys. Rev. A **75**, 012301 (2007).
- [92] A. Retzker, E. Solano e B. Reznik, *Tavis-Cummings model and collective multiqubit entanglement in trapped ions*. Phys. Rev. A **75**, 022312 (2007).
- [93] S. Shelly Sharma, E. de Almeida e N. K. Sharma, *Decoherence of tripartite states - a trapped ion coupled to an optical cavity*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 695 (2006).
- [94] Kevin M. Fortier, *Individual trapped atoms for cavity qed quantum information applications*. Tese de doutorado (Georgia Institute of Technology, 2007).
- [95] Kevin M. Fortier, Soo Y. Kim, Michael J. Gibbons, Peyman Ahmadi e Michael S. Chapman, *Deterministic loading of individual atoms to a high-finesse optical cavity*. Phys. Rev. Lett. **98**, 233601 (2007).
- [96] R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
- [97] L. Davidovich, *Sub-poissonian processes in quantum optics*. Rev. Mod. Phys. **68**, 1 (1996).
- [98] C. K. Hong e L. Mandel, *Generation of higher-order squeezing of quantum electromagnetic fields*. Phys. Rev. A, **32**, 974 (1985).
- [99] C. K. Hong e L. Mandel, *Higher-order squeezing of quantum field*. Phys. Rev. Lett. **54**, 323 (1985).
- [100] H. Prakash e D. K. Mishra, *Higher order sub-Poissonian photon statistics and their use in detection of Hong and Mandel squeezing and amplitude-squared squeezing*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, 2291 (2006).
- [101] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke e A. LaPorta, *Squeezed-Light-Enhanced polarization interferometer*. Phys. Rev. Lett. **59**, 2153 (1987).

- [102] H. Vahlbruch, M. Mehmet, N. Lastzka, B. Hage, S. Chelkowski, A. Franzen, S. Goßler, K. Danzmann e R. Schnabel, *Observation of squeezed light with 10 dB quantum noise reduction*. quant-ph/0706.1431 (2007).
- [103] H. P. Yuen e J. H. Shapiro, *Optical communication with two-photon coherent states - part I: Quantum-state propagation and quantum-noise*. IEEE Transactions on information theory, **24**, 657 (1978).
- [104] L. G. Lutterbach e L. Davidovich, *Production and detection of highly squeezed states in cavity QED*. Phys. Rev. A **61**, 023813 (2000).
- [105] S. B. Zheng, *Generation of strongly squeezed states for a cavity field with a single atom*. Opt. Comm. **273**, 460 (2007).
- [106] P. Li, *Generation of two-mode field squeezing through selective dynamics in cavity QED*. quant-ph/0710.4408v1 (2007).
- [107] V. Josse, A. Dantan, L. Vernac, A. Bramati, M. Pinard e E. Giacobino, *Polarization squeezing with cold atoms*. Phys. Rev. Lett. **91**, 103601 (2003).
- [108] R. E. Slucher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz e J. F. Valley, *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity*. Phys. Rev. Lett. **55**, 2409 (1985).
- [109] J. Gea-Banacloche, *Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus*. Phys. Rev. Lett. **65**, 3385 (1990).
- [110] V. Bužek, H. Moya-Cessa e P. L. Knight, *Schrödinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution*. Phys. Rev. A **45**, 8190 (1992).
- [111] S. L. Braunstein e H. J. Kimble, *Teleportation of continuous quantum variables*. Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).
- [112] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble e E. S. Polzik, *Unconditional quantum teleportation*. Science **282**, 706 (1998).

- [113] N. H. Abdel-Wahab, *A three-level atom interacting with a single mode cavity field: different configurations*. Phys. Scr. **76**, 244 (2007).
- [114] S. B. Zeng e G. C. Guo, *Generation of superpositions of coherent states of a cavity field with a driven atom*. Phys. Lett. A **244**, 512 (1998).
- [115] J. Li-Juan e F. Mao-Fa, *Entanglement in a system of two two-level atoms interacting with a single-mode field*. Chin. Phys. **15**, 2012 (2006).
- [116] P. P. Munhoz, F. L. Semião, A. Vidiella-Barranco e J. A. Roversi, *Cluster-type entangled coherent states*. quant-ph/0705.1549v1 (2007).
- [117] G. X. Li, S. P. Wu e G. M. Huang, *Generation of entanglement and squeezing in the system of two ions trapped in a cavity*. Phys. Rev. A **71**, 063817 (2005).
- [118] R. Eijnisman e P. Nussenzveig, *Átomos de Rydberg: estudos quânticos com átomos quase-clássicos*. Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 90 (1997).
- [119] M. Nauenberg, C. Stroud e J. Yeazell, *The classical limit of an atom*. Scientific American **270**, 44 (1994).
- [120] W. H. Zurek, *Pointer basis of quantum apparatus - into what mixture does the wave packet collapse?*. Phys. Rev. D **24**, 1516 (1981).
- [121] W. H. Zurek, *Environment-induced super-selection rules*. Phys. Rev. D **26**, 1862 (1982).
- [122] W. H. Zurek, *Decoherence and the transition from quantum to classical*. Phys. Today **44**, 36 (1991). Revisado e comentado pelo autor em Los Alamos Science 27 (2002).
- [123] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Quantum switches and nonlocal microwave fields*. Phys. Rev. Lett. **71**, 15 (1993).
- [124] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, *Mesoscopic quantum coherences in cavity QED: Preparation and decoherence monitoring schemes*. Phys. Rev. A **53**, 3 (1996).

- [125] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, *Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement*. Phys. Rev. Lett. **77**, 24 (1996).
- [126] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe e D. J. Wineland, *Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs*. Nature **403**, 269 (2000).
- [127] K. Jujii, *An approximate solution of the master equation with the dissipator being a set of projectors*. quant-ph/07084047 (2007).
- [128] A. Isar, *Quantum decoherence in the theory of open systems*. quant-ph/07043415 (2007).
- [129] M. Ban, *Decoherence of qubit entanglement caused by transient environments*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **40**, 689 (2007).
- [130] D. Mozyrsky e V. Privman, *Adiabatic decoherence*. J. Stat. Phys. **91**, 787 (1998).
- [131] M. Žnidarič e T. Prosen, *Decoherence in regular systems*. J. Opt. B: Quantum Semi-class. Opt. **7**, 306 (2005).
- [132] M. B. Plenio e P. L. Knight, *The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics*. Rev. Mod. Phys. **70**, 1 (1998).
- [133] A. O. Caldeira e A. J. Legget, *Quantum integral approach to quantum brownian motion*. Physica A **121**, 587 (1983).
- [134] A. O. Caldeira e A. J. Legget, *Quantum tunnelling in a dissipative system*. Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
- [135] F. Schmidt-Kaler, S. Gulde, M. Riebe, T. Deuschle, A. Kreuter, G. Lancaster, C. Becher, J. Eschner, H. Häffner e R. Blatt, *The coherence of qubits based on single Ca^+ ions*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **36**, 623 (2003).
- [136] P. A. Barton, C. J. Donald, D. M. Lucas, D. A. Stevens, A. M. Steane e D. N. Stacey, *Measurement of the lifetime of the $3d^2D_{5/2}$ state in $^{40}Ca^+$* . Phys. Rev. A **62**, 032503 (2000).

- [137] A. Kreuter, C. Becher, G. P. T. Lancaster, A. B. Mundt, C. Russo, H. Häffner, C. Roos, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Spontaneous emission lifetime of a single trapped Ca^+ ion in a high finesse cavity*. Phys. Rev. Lett. **92**, 203002 (2004).
- [138] A. Kreuter, C. Becher, G. P. T. Lancaster, A. B. Mundt, C. Russo, H. Häffner, C. Roos, W. Hänsel, F. Schmidt-Kaler e R. Blatt, *Experimental and theoretical study of the $3d^2D$ -level lifetimes of $^{40}Ca^+$* . Phys. Rev. A **71**, 032504 (2005).
- [139] L. Fedichkin e V. Privman, *Quantitative treatment of decoherence*. cond-mat/0610756 (2006).
- [140] V. V. Dodonov, S. S. Mizrahi e A. L. de Souza Silva, *Decoherence and thermalization dynamics of a quantum oscillator*. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, 271 (2000).
- [141] L. Fedichkin, A. Fedorov e V. Privman, *Measures of decoherence*. cond-mat/0303158v2 (2004).
- [142] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics*. (Addison-Wesley Longman 1994).