Universidade Estadual de Londrina

DAIANY CRISTINY RAMOS

O RACIOCÍNIO ABDUTIVO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2017

DAIANY CRISTINY RAMOS

O RACIOCÍNIO ABDUTIVO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Ramos, Daiany Cristiny.
O raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática / Daiany Cristiny Ramos. - Londrina, 2016.
158 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem Matemática - Teses. 2. Semiótica Peirceana - Teses. 3. Raciocínio Abdutivo - Teses. 4. Criatividade - Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

DAIANY CRISTINY RAMOS

O RACIOCÍNIO ABDUTIVO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Prof.ª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof.º Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

____
Prof.ª Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina-UEL

Londrina, 23 de fevereiro de 2016.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares, em especial aos meus tios Luciano, Marcelo e a minha querida mãe Maria.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Drª Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de desenvolver essa pesquisa; por ter me acolhido tão bem no GRUPEMMAT; pela orientação; pelos puxões de orelha quando era necessário; por compartilhar comigo durante esses dois anos suas experiências e seus conhecimentos, aprendi muito durante esse período e espero aprender muito mais.

Aos amigos do GRUPEMMAT por me fazerem sentir em casa. Agradeço a todos pela companhia, pelos conselhos, pelas brincadeiras, pelo apoio durante esses dois anos. Aprendi muito com todos vocês.

À professora Regina Célia e ao professor Rodolfo pelas sugestões e críticas que contribuíram para o aprimoramento dessa pesquisa.

Aos amigos que fiz durante essa caminhada, em especial a Ana Carolina, a Hallynne, ao Cristiano, ao Marcelo, ao Leandro, a Mariany, a Anie pelo apoio nos momentos difíceis, pelas risadas em nossos almoços.

Ao Emerson, Bárbara e Ana Paula por terem me dado tantos conselhos, pelo apoio e por todos os momentos bons que passamos juntos.

À Angela por todo o apoio que me deu, por ter me incentivado a continuar quando a vontade era desistir, por todas as nossas noites estudando os textos dos seminários, pelos finais de semana escrevendo artigos e por todos os momentos bons que passamos. Obrigada por ter me dado o privilégio de conhecer o Gabriel, a quem eu tenho um carinho enorme.

Ao José Antônio, meu professor na faculdade, por ter me apresentado a Modelagem Matemática e por tudo que aprendi.

À Letícia e a Isabela por terem ouvido minhas lamentações, por terem me dado força, por terem suportado meu estresse nessa reta final e por todos os momentos divertidos que passamos juntas nesses dois anos.

Aos alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática por tudo que fizeram. Sem vocês essa pesquisa não seria possível.

À minha família, em especial a meu tio Luciano e Marcelo e a minha avó por terem me dado todo apoio em minhas decisões.

À minha mãe que enquanto pode se esforçou para que eu pudesse estudar e como ela dizia *ser alguém na vida*.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.
(Albert Einstein)

RAMOS, Daiany Cristiny. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.** 2016. 158 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. Nossa investigação está pautada em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e nos pressupostos da Semiótica Peirceana, mais especificamente, no que diz respeito aos tipos de raciocínios caracterizados por Peirce. Com o intuito de identificar relações entre raciocínio abdutivo e atividades de modelagem desenvolvemos com alunos do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de modelagem matemática de uma universidade pública do estado do Paraná atividades de modelagem matemática. As atividades foram desenvolvidas seguindo os momentos de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2012). A análise dos dados foi inspirada na Análise de Conteúdo baseada, principalmente, nas indicações Bardin (1974) e Moraes (1999). A análise dos dados permitiu reflexões sobre as relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo e dessa análise emergiram três categorias: *o raciocínio abdutivo dos alunos atua no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática; atividades de modelagem matemática desencadeiam o raciocínio abdutivo; habilidades criativas mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática.* Podemos concluir que atividades de modelagem matemática tem características que desencadeiam no aluno raciocínio abdutivo e atuam sobre o processo criativo. Ao mesmo tempo, as diferentes ações requeridas pelo desenvolvimento de atividades de modelagem matemática são fortalecidas pelos insights de raciocínio abdutivo dos alunos, estabelecendo-se assim uma relação que pode incrementar a aprendizagem e o desenvolvimento matemático dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semiótica Peirceana. Raciocínio Abdutivo. Criatividade.

RAMOS, Daiany Cristiny. **The abductive reasoning in mathematical modeling activities**. 2016. 158 p. Dissertation (Master's degree in Science Education and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

This research aims to investigate relations between mathematical modeling and abductive reasoning. Our research guided by theoretical assumptions of Mathematical Modeling in the perspective of mathematics education and assumptions of peircean semiotics, specifically regarding the triad of reasoning. In order to identify relations between abductive reasoning and modeling activities developed with students of the 4th year of the Mathematics Degree course in Mathematical Modeling discipline of a public university in the state of Paraná mathematical modeling activities. The activities developed following the moments of familiarizing students with mathematical modeling activities proposed by Almeida, Silva and Vertuan (2012). The analysis of the data was inspired by the content analysis based mainly on indications Bardin (1974) and Moraes (1999). Data analysis allowed reflections on the relations between mathematical modeling and abductive reasoning and this analysis three categories emerged: *abductive reasoning of students engaged in the development of the activity of mathematical modeling, mathematical modeling activities trigger the abductive reasoning, creative abilities mediated by abductive reasoning in mathematical modeling activities.* We can conclude that mathematical modeling activities has features that trigger the abductive reasoning student and act on the creative process. At the same time, the various actions required for the development of mathematical modeling activities are strengthened by abductive reasoning insights of students, thus setting up a relationship that can enhance learning and mathematical development of students.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Peircean Semiotics. Abductive reasoning. Creativity.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em Matemática grande parte dos resultados são estabelecidos por deduções a partir de axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Considerando essa característica, o seu ensino está, em grande medida, concentrado no tratamento de algoritmos e na algebrização. No entanto, "Matemática é pensar – sobre números e probabilidades, acerca de relações de lógica, ou sobre gráficos e variações – porém, acima de tudo, pensar" (PAULOS, 1993, p. 41-42).

Nesse contexto, tem se discutido no âmbito da Educação Matemática, o ensino por meio de atividades investigativas que, de algum modo, fazem referência ao cotidiano do aluno. Um grupo dessas atividades são as de modelagem matemática, que segundo Bassanezi (2011, p. 17), aliam teoria e prática, motivam "seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la".

No âmbito da Educação Matemática a modelagem matemática constitui uma alternativa pedagógica que aborda problemas não matemáticos por meio da Matemática (ALMEIDA, DIAS, 2004). Nessa perspectiva, a modelagem matemática é uma possibilidade para auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de construir o seu conhecimento matemático por meio da abordagem de situações-problema.

Quando o aluno desenvolve atividades de modelagem ele, geralmente, parte de uma situação inicial, problemática, e dirige-se para uma situação final, que corresponde a uma solução para a situação problemática. Nesse caminho o aluno formula hipóteses, faz simplificações, matematiza a situação, desenvolve um modelo matemático e analisa sua adequação para o problema em estudo.

Assim, atividades de modelagem matemática têm a característica de não possuir procedimentos pré-determinados e soluções previamente conhecidas. Almeida e Silva (2012) argumentam que essa característica da modelagem pode estimular o uso de certas inferências, como por exemplo aquelas caracterizadas por Peirce (2015) como dedução, indução e abdução.

Peirce (2015) entende que a inferência diz respeito à adoção controlada de uma crença, como consequência de outro conhecimento. Neste sentido, Cocchieri (2015, p. 81) argumenta que "a inferência pode ser entendida como um processo que possibilita o surgimento de uma crença desenvolvida em uma dinâmica de aceitação de crenças tidas como verdadeiras que, de uma à outra, fazem parte do processo de formação do raciocínio".

Cocchieri (2015) argumenta que esse processo

> exige provas e demonstrações que são conhecidas e investigadas, contextualizando-as em um modelo reconhecido de aplicação. São vários atos intelectuais concatenados formando um processo de conhecimento em que são adotados critérios lógicos de objetividade, generalidade e universalidade, desembocando na operação de tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo (COCCHIERI, 2015, p.81).

De acordo com Keske (2008), Peirce teria estabelecido que o raciocínio dedutivo “mostra de que forma, a partir de uma determinada regra, se estabelece um caso, obtendo-se um determinado resultado considerado “irrefutável” enquanto fenômeno lógico” (p.5). Peirce (2015) complementa que esse raciocínio parte de uma hipótese “cuja verdade ou falsidade, nada tem a ver com o raciocínio e, naturalmente, suas conclusões são igualmente ideias” (PEIRCE, 2015, p.207).

No que se refere ao raciocínio indutivo, Peirce (2015) argumenta que esse tipo de raciocínio se propõe a mostrar que alguma coisa é válida, pois, “consiste em partir de uma teoria e dela deduzir predições de fenômenos e observar esses fenômenos a fim de ver quão de perto concordam com a teoria” (PEIRCE, 2015, p. 219).

O raciocínio abdutivo, por sua vez, sugere que alguma coisa pode ser, pois a “abdução é o processo de formação de uma hipótese exploratória. É a única operação lógica que apresenta uma ideia nova” (PEIRCE, 2015, p. 220).

Segundo Manechine e Caldeira (2010), o raciocínio abdutivo tem papel importante na formação do pensamento matemático escolar. As autoras argumentam que as estratégias metodológicas de ensino de matemática “deveriam propiciar momentos para observações, apreciação de situações-problema e percepção do contexto utilizado. O aluno, como parte desse processo de conhecer, deveria experienciar a atividade de maneira que as suas opiniões e indagações fossem ouvidas e testadas” (MANECHINE; CALDEIRA, 2010, p. 892). Para as autoras, propiciar esses momentos, poderia proporcionar o desencadeamento dos três raciocínios (abdutivo, indutivo e dedutivo) no processo de aprendizagem.

A modelagem matemática, por seu caráter investigativo, pode ser uma alternativa para a promoção de momentos de observação e investigação de situações-problema. Almeida e Silva (2012) salientam que realizar uma atividade investigativa, como a modelagem matemática, requer diferentes tipos de raciocínio.

Tendo em vista esse aspecto da modelagem matemática e a importância do raciocínio abdutivo no processo de aprendizagem, o objetivo da nossa pesquisa consiste em investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo.

É importante ressaltar que, apesar do foco dessa pesquisa estar no raciocínio abdutivo, os raciocínios dedutivo e indutivo em atividades de modelagem matemática também são relevantes uma vez que, ao formular uma hipótese (raciocínio abdutivo), o aluno usa a indução ou a dedução para comprovar ou não a veracidade da mesma.

Para buscar evidências de relações entre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e os diferentes tipos de raciocínio desenvolvemos atividades de modelagem matemática com uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Paraná. A análise dessas atividades segue indicações da Análise de Conteúdo, conforme argumentam Bardin (1977) e Moraes (1999).

A dissertação de mestrado, como relato da pesquisa realizada, está estruturada em sete capítulos. O primeiro consiste na Introdução em que delineamos a nossa problemática de investigação.

No segundo capítulo, Aspectos Metodológicos da Pesquisa, descrevemos o contexto em que a pesquisa foi realizada, os alunos participantes da mesma. Além disso, descrevemos como ocorreu a coleta de informações bem como os instrumentos de coleta utilizados. Ao final, apresentamos elementos essenciais da metodologia Análise de Conteúdo.

A fundamentação teórica da pesquisa é apresentada em dois capítulos. No capítulo três, Modelagem Matemática na Educação Matemática, discutimos algumas considerações sobre a modelagem matemática, bem como um modo de se fazer modelagem[1] em sala de aula. Na sequência abordamos o que algumas pesquisas têm indicado a respeito do uso da modelagem na sala de aula.

O capítulo quatro, Semiótica Peirceana, está dividido em três seções. Na primeira discutimos aspectos gerais da semiótica. Na segunda abordamos algumas considerações sobre a semiótica peirceana e na terceira seção caracterizamos os três tipos de raciocínio definidos por Peirce: abdutivo, dedutivo e indutivo.

O capítulo Raciocínio Abdutivo em Atividades de Modelagem Matemática é o quinto desse texto. Nele descrevemos cinco atividades desenvolvidas e apresentamos a análise local dessas atividades. Ainda nesse capítulo apresentamos uma análise global das atividades.

No capítulo seis apresentamos nossas Considerações Finais e no capítulo sete constam as Referências Bibliográficas usadas na pesquisa. Finalmente constam os Anexos.

---

[1] O termo modelagem será usado ao longo do texto no sentido de modelagem matemática.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Nossa intenção nesse capítulo é descrever as opções metodológicas adotadas para investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. Visando essa investigação desenvolvemos atividades de modelagem matemática com alunos do quarto ano de um curso em Licenciatura em Matemática.

O capítulo compreende três seções. Na primeira seção apresentamos o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida bem como informações sobre os alunos participantes da pesquisa. Na seção seguinte descrevemos como se deu a coleta de informações e os instrumentos utilizados para a mesma. Ao final, apresentamos alguns elementos da Análise de Conteúdo relevantes para a nossa pesquisa.

2.1. CONHECENDO O CONTEXTO DA PESQUISA E OS PARTICIPANTES

Com o objetivo de investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo, desenvolvemos atividades de modelagem matemática com alunos de uma turma do quarto ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná. A turma possuía inicialmente doze alunos, porém dois desistiram da disciplina. Assim dez alunos participaram da pesquisa. As atividades foram desenvolvidas durante o primeiro semestre letivo de 2015 na disciplina de Modelagem Matemática.

Para o desenvolvimento das atividades a pesquisadora contou com a ajuda da professora regente da disciplina. Inicialmente foi entregue para cada aluno um questionário (Anexo A), que nos permitiu obter informações a respeito de suas experiências como professor de matemática, de seu contato com a modelagem, bem como a época de seu ingresso no curso. Levando em consideração as respostas dadas por esses alunos, no quadro a seguir (quadro 2.1), trazemos características de cada um dos dez alunos reveladas pelo questionário.

Quadro 2.1- Características dos participantes da pesquisa

Alunos	Características
A1	Iniciou o curso em 2012, tem experiência com alunos do Ensino Fundamental I desde 2000, participa do PIBID[2]. Teve um contato superficial com modelagem matemática em anos anteriores.
A2	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.
A3	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participou do PIBID por um ano. Seu primeiro contato com a modelagem foi no primeiro ano, em que participou de uma pesquisa para o trabalho de conclusão de curso de dois alunos de matemática relativo à modelagem matemática.
A4	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professor de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi no grupo de pesquisas da universidade.
A5	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.
A6	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.
A7	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.
A8	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e não participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem aconteceu em anos anteriores.
A9	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.

[2] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

A10	Iniciou o curso em 2012, não tem experiência como professora de matemática e participa do PIBID. Seu primeiro contato com a modelagem foi nessa disciplina em que se realizou a pesquisa.

Características identificadas no levantamento, tais como experiência no magistério e experiência com atividades de modelagem matemática, serão retomadas na análise da ocorrência de raciocínio abdutivo.

Nesse questionário também pedimos para que os alunos destacassem aspectos que consideram essenciais para a resolução de um problema. O quadro a seguir apresenta os aspectos indicados pelos alunos.

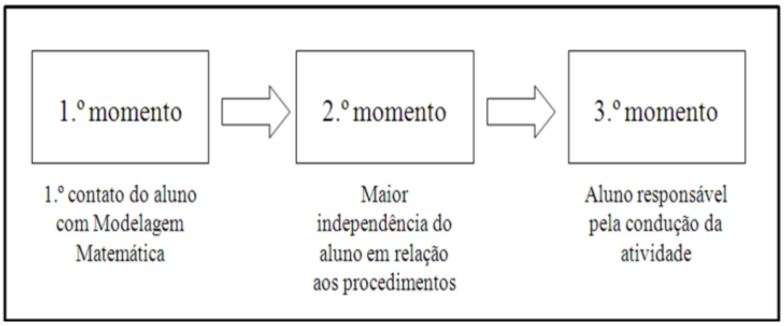
Quadro 2.2-Aspectos importantes para a resolução de um problema

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Formação de hipóteses exploratórias		X	X	X	X		X	X		X
Conhecimento dos conceitos matemáticos	X	X	X	X	X		X		X	X
Ter ideias diferentes para resolver o problema	X	X		X		X	X	X	X	
Usar diferentes representações para o problema				X					X	
A capacidade de identificar um problema a partir de informações dadas em um texto	X	X	X		X	X	X	X		X
A capacidade de identificar informações relevantes em um texto para a resolução do problema	X			X		X	X	X	X	X
A resposta deve ser algo original e novo										
Identificar possíveis padrões			X	X						X

Nossa intenção com esse questionário foi obter informações sobre cada um dos participantes da pesquisa e também capturar a maneira como encaram a resolução de um problema. Podemos conjecturar, a partir das informações obtidas, que os alunos não têm realizado nas aulas resoluções que desencadeiem respostas originais e novas, visto que nenhum dos dez alunos considera que a resposta de um problema deve ser nova e original. Esse fato nos permite inferir que o raciocínio abdutivo, necessário para a obtenção de respostas novas e originais, pouco tem figurado nas aulas comumente vivenciadas pelos alunos. O fato de apenas dois alunos considerarem importante ter diferentes representações para o problema evidencia que pouco têm se deparado com problemas que exigem mais de uma representação.

Conversamos com os alunos a respeito do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e pedimos que se dividissem em três grupos, na expectativa de que os participantes dos grupos fossem mantidos até o final das atividades. Como para muitos alunos o primeiro contato com atividades de modelagem seria na disciplina, nos apoiamos em Almeida e Dias (2004) e introduzimos as atividades de forma gradativa. Primeiro foram introduzidas atividades de modelagem onde a situação-problema e as informações necessárias para sua investigação foram levadas à sala de aula pela pesquisadora. Em um segundo momento foram desenvolvidas atividades em que os alunos definiram um problema a partir da situação-problema. Por fim, os alunos desenvolveram uma atividade em que eles escolheram a situação-problema, bem como o problema a ser resolvido. Esses três momentos são esquematizados por Almeida e Vertuan (2011) conforme indica a figura 2.1.

Figura 2.1- Diferentes momentos da modelagem matemática em sala de aula



Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p. 28)

Foram desenvolvidas duas atividades do primeiro momento referindo-se as temáticas *O volume da maçã* e *Dinâmica populacional de Cornélio Procópio*; duas atividades do segundo momento relativas ao tema *O chocolate* e *A emissão de* CO_2 *pelos veículos de uma família*; e cada grupo desenvolveu uma atividade do terceiro momento. Apresentamos a descrição dessas atividades no capítulo cinco deste texto.

2.2 A COLETA DE INFORMAÇÕES

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), em uma pesquisa deve haver um planejamento com relação aos aspectos do problema a serem observados, bem como uma observação e registro dos fenômenos. Assim, o pesquisador deve se atentar ao "o que" e "como observar". Lüdke e André (1986), ressaltam que

> a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que apresenta uma série de vantagens. Em primeiro lugar, a experiência direta é sem dúvida o melhor teste de verificação da ocorrência de um determinado fenômeno (LÜDKE; ANDRÉ 1986, p. 26).

Fiorentini e Lorenzato (2006) argumentam que a observação é uma estratégia que, além da observação direta, envolve técnicas metodológicas que ajudam a entender o fenômeno estudado. Essas técnicas podem ser a aplicação de questionários, as entrevistas, entre outras. A observação foi nossa principal estratégia na pesquisa para identificar *relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo.*

Da observação da pesquisadora resultaram anotações que descrevem o local, os sujeitos, os acontecimentos mais importantes e sobre as atividades. Essas anotações foram feitas em um diário de campo após momentos de interação com os grupos de alunos, bem como durante a apresentação das atividades realizada pelos grupos. Grande parte das anotações da pesquisadora têm caráter descritivo, sendo que algumas tiveram caráter descritivo e reflexivo. Na parte descritiva a pesquisadora procurou descrever os sujeitos, os locais, eventos especiais e alguns diálogos dos alunos. Já nas anotações reflexivas a pesquisadora apontou seus sentimentos, suas especulações, problemas, ideias e dúvidas.

Apesar do olhar atento da pesquisadora, muitas situações não puderam ser descritas no diário. Assim foram gravadas, tanto em vídeo quanto em áudio, todas as discussões entre os integrantes dos grupos, bem como as discussões com toda a turma. Essas gravações fornecem detalhes das discussões ocorridas durante o desenvolvimento das atividades.

Outra estratégia utilizada foi a aplicação de questionários (Anexos B e C) após o término de cada atividade. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) o questionário é um dos instrumentos de coleta de informações mais tradicional e pode ajudar o pesquisador a complementar as informações. No caso dessa pesquisa os questionários tiveram o intuito de explicitar procedimentos dos alunos durante o desenvolvimento das atividades cuja indicação não era revelada nos registros.

Os alunos foram orientados a escrever todas as ideias e resoluções em suas atividades, sendo recomendado que incluíssem nos registros a maior parte possível de cálculos e procedimentos realizados. Assim, os registros dos alunos nas atividades eram ricos em informações para a nossa pesquisa.

Outro procedimento usual na pesquisa qualitativa e que foi utilizado é a entrevista (Anexo D). Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 120) argumentam que a entrevista "trata-se de uma conversa a dois com propósitos bem definidos. Etimologicamente, a palavra entrevista é construída a partir de duas palavras: entre (lugar ou espaço que separa duas pessoas ou coisas) e vista (ato de ver, perceber) ". Esses autores ainda salientam que a entrevista permite uma obtenção mais direta e imediata dos dados, e pode ser um meio de aprofundar o estudo, complementando, por exemplo, respostas dos questionários. Nessa pesquisa foram feitas pequenas entrevistas após os questionários com o intuito de esclarecer algumas respostas dadas nos questionários. Ao final da última atividade foi feita uma entrevista com intuito de entender melhor o que os alunos fizeram na atividade e de saber qual foi sua opinião a respeito do trabalho desenvolvido ao longo do semestre.

As informações obtidas por esses instrumentos constituíram um conjunto de documentos, dentre os quais temos os registros escritos dos alunos, as transcrições das gravações de áudio, as transcrições das entrevistas e os questionários. Esse conjunto de documentos foi analisado segundo os pressupostos da Análise de Conteúdo.

2.3 A ANÁLISE DE CONTEÚDO

Bardin (1977, p. 38) define a Análise de Conteúdo "como um conjunto de técnicas de análise de comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens". Franco (2005) salienta que essas mensagens podem ser de natureza verbal (oral ou escrita), gestual, figurativa ou documental. Segundo a autora, a Análise de Conteúdo implica em comparações textuais, já que, ao analisar determinado conteúdo de uma mensagem, esse deve estar relacionado a pelo menos outro dado.

Moraes (1999) argumenta que a Análise de Conteúdo é uma metodologia de pesquisa que tem como foco descrever e interpretar o conteúdo de toda uma classe de documentos e textos. Nessa análise são feitas descrições sistemáticas que ajudam a reinterpretar as mensagens e “atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum” (MORAES, 1999, p. 9).

A Análise de Conteúdo

> é uma ferramenta, um guia prático para a ação, sempre renovada em função dos problemas cada vez mais diversificados que se propõe a investigar. Pode-se considerá-la como um único instrumento, mas marcado por uma grande variedade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto, qual seja a comunicação (MORAES, 1999, p. 8).

Segundo Bardin (1977), a Análise de Conteúdo envolve três momentos: *a pré-análise; a exploração do material; o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.*

A *pré-análise* consiste, de acordo com Bardin (1977), na organização dos dados, sendo que o primeiro passo é fazer uma leitura flutuante dos dados, ou seja, estabelecer um contato com os documentos a serem analisados para que assim se conheça o texto e consequentemente tenha impressões e orientações sobre o mesmo. A partir dessa leitura o pesquisador deve constituir o *corpus* da pesquisa. O *corpus* é entendido como “conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A sua constituição implica, muitas vezes, escolhas, seleções e regras” (BARDIN, 1977, p. 90)

Definido o *corpus* da pesquisa, tal material deve ser preparado, antes da análise. Por exemplo, as entrevistas gravadas e as discussões gravadas em áudio são transcritas, os registros bem como as respostas dos questionários são organizados.

O segundo momento da Análise de Conteúdo é a *exploração do material*, que segundo Bardin (1977), nada mais é do que a administração das decisões já tomadas. A autora destaca que essa fase é longa e consiste na operação de codificação. Segundo Holsti (1969) citado por Bardin (1977, p. 103-104), “a codificação é o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo”.

O primeiro passo dessa codificação é a escolha das unidades de análises, sendo que essas podem ser de dois tipos: unidades de registro e unidades de contexto. A unidade de registro “corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial” (BARDIN, 1977, p. 104).

Para Moraes (1999) a unidade de registro pode ter natureza variada, sendo que podem ser tanto as palavras, frases, temas ou mesmo os documentos em sua forma integral. Deste modo faz-se necessário que o pesquisador opte por uma dessas unidades, sendo que essa decisão depende da natureza do problema, dos objetivos da pesquisa e do tipo de materiais a serem analisados.

Após a identificação das unidades de registros procura-se identificar as unidades de contexto, que servem para a compreensão do significado das unidades de registro e correspondem ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registo) são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registo.

No último momento da Análise de Conteúdo, *tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação,* as unidades obtidas são tratadas de maneira a serem significativas, sendo que uma das maneiras de se atingir tal resultado é por meio da categorização. Segundo Bardin (1977, p. 117), "*a categorização é* uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com critérios previamente definidos".

A constituição dessas categorias pode seguir alguns critérios: exclusão mútua (as categorias devem ser construídas de tal forma que um elemento não tenha um aspecto ou dois susceptíveis de fazerem com que o elemento fosse classificado em duas ou mais categorias); homogeneidade (um único princípio deve orientar a organização das categorias); pertinência (as categorias devem refletir as intenções da investigação, e as questões do pesquisador); objetividade e a fidelidade (o pesquisador deve ter claro quais a variáveis são tratadas, assim como ter claro os índices que determinam a entrada de um elemento em uma categoria); produtividade **(**produzir resultados férteis fundamentados em hipóteses inovadoras).

Moraes (1999) destaca que após a definição das categorias e identificação do material constituinte de cada uma delas, é preciso comunicar o resultado deste trabalho, sendo que a descrição é o primeiro momento desta comunicação. Quando se trata de uma pesquisa numa abordagem qualitativa a descrição pode ser feita por meio da produção um texto síntese para cada categoria, e nesse texto é expresso o conjunto de significados presentes nas diversas unidades de análise incluídas em cada uma delas. O autor salienta ainda que é recomendável que se faça uso intensivo de "citações diretas" dos dados originais.

Para Moraes (1999) a Análise de Conteúdo não deve limitar-se à descrição, o pesquisador deve procure ir além, atingir uma compreensão mais aprofundada do conteúdo das mensagens através da inferência e interpretação. Assim, a inferência é a última etapa da Análise de Conteúdo, e as inferências são construídas com base nas categorias criadas anteriormente. Bardin (1977) salienta que a palavra inferência não passa de um termo elegante para designar a indução a partir de fatos. A autora argumenta que

> a Análise de Conteúdo constitui um bom instrumento de indução para se investigarem as causas (variáveis inferidas) a partir dos efeitos (variáveis de inferência ou indicadores, referências no texto), embora o inverso, predizer os

> efeitos a partir de fatores conhecidos, ainda esteja ao alcance das nossas capacidades (BARDIN, 1977, p. 137).

2.3.1 A Análise de Conteúdo na Nossa Pesquisa

Tendo em vista os pressupostos da Análise de Conteúdo e o volume de dados obtidos na pesquisa optamos por dividir as análises das atividades dessa pesquisa em dois momentos. No primeiro momento, denominado de análise local, fazemos a análise de cada atividade, em particular, olhando para o raciocínio abdutivo e as ações dos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Em um segundo momento fazemos uma análise global dessas atividades considerando nosso objetivo de investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. Essa análise global conduz à identificação de categorias com relação aos aspectos pertinentes ao objetivo investigado.

Apresentamos a análise local de cinco atividades cujas temáticas são: *o volume da maçã; o chocolate; a emissão de* CO_2 *por carros; o impacto ambiental das embalagens de desodorante convencional e comprimida; metas do milênio: mortalidade materna.* Essa análise local correspondente à pré-análise e à exploração do material, caracterizadas em Bardin (1977).

O tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, caracterizadas por Bardin (1997), são realizados nessa pesquisa pela análise global. Tal análise é pautada nas análises locais feitas anteriormente e consiste na categorização dos aspectos do raciocínio abdutivo associados a atividades de modelagem matemática que emergiram das análises locais.

Para fundamentar a análise das categorias nos apoiamos nas considerações sobre a modelagem matemática e na teoria semiótica peirceana. Assim, no capítulo três, discutimos aspectos relacionados à Modelagem Matemática na Educação Matemática e no capítulo quatro abordamos aspectos referentes à semiótica peirceana. Nossas análises são apresentadas no capítulo cinco.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Durante os últimos anos, as pesquisas em Educação Matemática têm crescido significativamente no Brasil, contribuindo para a difusão de tendências que podem ajudar na melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem nas escolas e universidades brasileiras. Uma alternativa pedagógica é a modelagem matemática que, apesar de ser um método originalmente voltado para a construção de modelos na Matemática Aplicada, tem sido usada como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática.

O capítulo, destinado a abordagem da modelagem matemática, compreende três seções. Na primeira apresentamos algumas considerações sobre a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática. Na segunda seção abordamos uma forma de familiarizar os alunos com atividades de modelagem matemática. Na terceira seção apresentamos o que algumas pesquisas têm mostrado a respeito do uso da modelagem matemática na sala de aula, bem como algumas relações com a semiótica.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O termo modelagem, de acordo com o dicionário Houaiss (2009), significa ato de modelar, ou seja, o ato de criar modelos. Segundo Biembengut (2009), a expressão *modelagem matemática* pode ser entendida como o processo de descrever, modelar e resolver uma problemática de determinada área do conhecimento. A autora ainda argumenta que essa expressão pode ser encontrada em trabalhos da área de Engenharia e Ciências Econômicas do início do século XX. Nesses trabalhos a modelagem matemática é um método científico que permite ao indivíduo fazer previsões para determinado fenômeno.

Bassanezi (2011) salienta que a modelagem matemática pode ser entendida tanto como um método científico de pesquisa, quanto como uma estratégia de ensino e aprendizagem de matemática. O debate sobre a modelagem matemática na Educação Matemática ganha espaço internacionalmente na década de 1960 “com um movimento chamado “utilitarista”, definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema” (BIEMBENGUT, 2009, p. 8).

No cenário nacional, de acordo com Malheiros (2012), as discussões ganharam força na década de 1980 e foram disseminadas, entre outros meios, por meio de cursos para professores.

As primeiras tentativas de utilizar a modelagem matemática em sala de aula tinham a característica de construção de modelos para explicar fatos de outras áreas do conhecimento.

Segundo Barbosa (2001), a inspiração para o movimento da modelagem na Educação Matemática foi o seu uso como método na Matemática Aplicada. Tal inspiração possibilita à modelagem na Educação Matemática “[...] diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12).

Nessa pesquisa, particularmente, entendemos que a modelagem matemática “viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos do mundo ou da vida, muitas vezes identificados fora do ambiente escolar, com o apoio da matemática” (ALMEIDA; SILVA; VERONEZ, 2015, p. 3). Assim, modelagem matemática

> refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenômeno, que pode ser matemático ou não. Neste sentido, trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 120).

A estrutura matemática a que as autoras se referem, é, em geral, denominada de modelo matemático e constitui “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13). Segundo Bassanezi (2011), um modelo matemático deve ter uma linguagem concisa que expressa as ideias de maneira clara e sem ambiguidade. Além disso, o modelo deve permitir a análise de aspectos relevantes, responder a perguntas formuladas sobre o problema e, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

Uma característica de atividades de modelagem matemática é o seu caráter investigativo pois “o ponto de partida é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação – de acordo com o conhecimento e os interesses do modelador – conduzem à formulação de um problema e de um modelo real da situação” (BLUM, 2002, p. 152). Na transição entre a situação inicial e o modelo podem acontecer procedimentos variados. Almeida e Vertuan (2014, p. 4) propõem “um conjunto de fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizam como: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação”.

A fase da Inteiração consiste no primeiro contato do aluno com a situação-problema que pretende estudar. Nessa fase o aluno coleta informações, tanto quantitativas quanto qualitativas, a respeito da situação. A inteiração conduz o aluno à elaboração de um problema, sendo que essa elaboração "requer que alguns aspectos já sejam conhecidos e é justamente esta a função da inteiração: tornar alguns aspectos conhecidos" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 4).

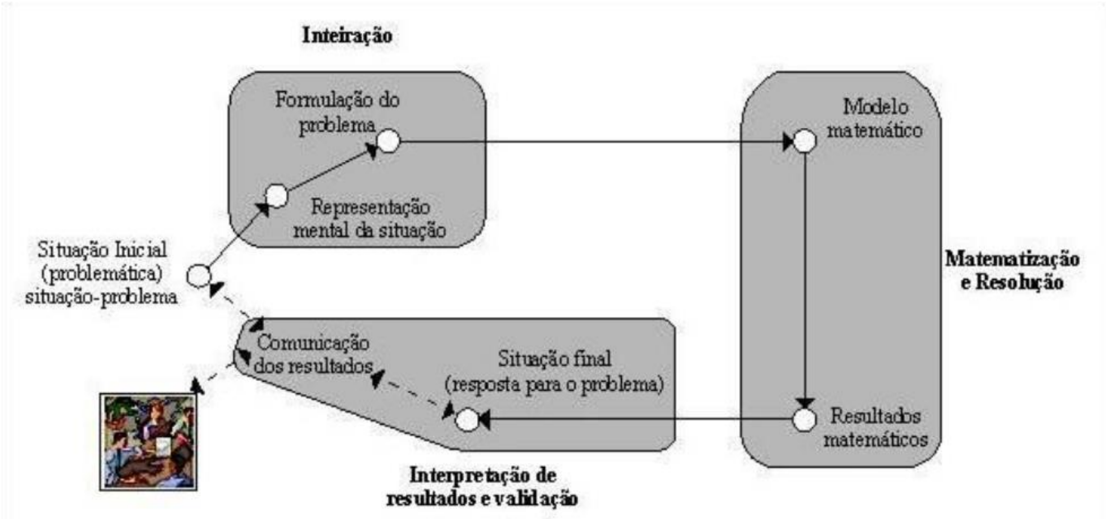
"A situação-problema identificada e estruturada na fase da Inteiração, de modo geral, se apresenta em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática" (ALMEIDA, VERTUAN, 2014, p. 5). Assim, faz-se necessário que haja uma transição da linguagem natural para a linguagem matemática, sendo que a linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido. Essa segunda fase é denominada Matematização. Essa transição requer que o aluno formule hipóteses, selecione variáveis e faça simplificações em relação às informações e ao problema já definido na fase anterior.

A importância da formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática é destacada por Skovsmose (2001), em que o autor pondera que

> é impossível iniciar a construção de um modelo sem hipóteses. Uma escolha especial deve ser feita acerca de como conceber a realidade econômica. Nossa concepção de realidade tem de ser estruturada de forma que padrões específicos possam ser identificados: temos de selecionar elementos da realidade que serão concebidos como importantes, e temos de decidir quais relações entre esses elementos são importantes. Essas duas seleções fundamentais constituem uma interpretação da "realidade". Um modelo não é um modelo da "realidade" em si, é um modelo de um sistema conceitual, criado por uma interpretação específica, baseado em um quadro teórico mais ou menos elaborado, e baseado em alguns interesses específicos (SKOVSMOSE, 2001, p. 42).

A terceira fase, Resolução, consiste na construção de um modelo matemático. Para essa construção são usadas diferentes estratégias e procedimentos matemáticos que são orientados por diferentes tipos de raciocínio. Após a construção do modelo, os alunos envolvidos na atividade fazem uma análise do mesmo, o que "implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação" (ALMEIDA, VERTUAN, 2014, p.5). A última fase, Interpretação de Resultados e Validação, consiste na análise da resposta do problema. Após essa análise ocorre a Comunicação dos Resultados em que os alunos que desenvolveram a atividade falam sobre seus resultados para colegas da turma, apresentando argumentações que subsidiam suas ações na atividade. A figura 3.1 ilustra as fases da modelagem matemática.

Figura 3.1- Fases da modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Almeida e Silva (2012)

Embora pareça que essas fases ocorrem de forma linear em uma atividade de modelagem matemática, isso pode não ocorrer, pois, às vezes se torna necessário que o aluno reformule ou analise a fase anterior. Assim, podem ocorrer ter constantes movimentos de idas e vindas nessas fases. Neste sentido, Bean (2012) argumenta que a não linearidade do pensamento, a intuição e a criatividade são algumas características presentes em uma atividade de modelagem matemática. Blum (1991) argumenta que a modelagem pode desenvolver a criatividade dos alunos e torná-los hábeis na resolução de problemas. Em consonância com esse autor, Pereira (2008), após fazer um estudo documental de uma série de trabalhos, conclui que a modelagem matemática, ao abordar situações da realidade dos alunos, pode despertar maior interesse pela Matemática e, consequentemente, pode proporcionar o desenvolvimento de habilidades relacionadas à criatividade.

Além da não linearidade do pensamento, outra característica de atividades de modelagem matemática é não ter procedimentos matemáticos pré-definidos, e isso pode ser um obstáculo para o desenvolvimento desse tipo de atividade em sala de aula, pois os alunos estão acostumados a repetir algoritmos nas resoluções de problemas.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA: FAMILIARIZAÇÃO DOS ALUNOS

Segundo Almeida e Vertuan (2014, p. 9) "qualquer tentativa de implementar atividades de Modelagem Matemática em sala de aula vem carregada do que se entende por uma 'aula de Matemática', acepção esta construída durante toda uma formação escolar, geralmente, vivenciada no paradigma do exercício". O paradigma do exercício tem como ponto central a repetição de algoritmos em questões matemáticas similares a outras dadas como exemplo.

Ao relatar uma de suas experiências com a modelagem, Franchi (1993) relata que os alunos podem apresentar dificuldades.

> Eles estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimentos e, portanto, têm uma postura passiva em relação à aula. Esperam receber explicações e participar apenas fazendo perguntas ou resolvendo exercícios. Quando o trabalho coloca o centro do processo ensino-aprendizagem nos alunos, e quando os resultados dependem da ação deles, a aula passa a caminhar em ritmo lento, pois eles não estão acostumados a agir e nem sempre sabem o que fazer, ou por onde começar (FRANCHI, 1993, p. 102).

Silva, Almeida e Gerolomo (2011, p.30) sugerem que "o aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de "aprender" a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o "resolvedor" principal". Nesse contexto Almeida, Silva e Vertuan (2012) sugerem que a modelagem seja introduzida de forma gradativa em sala, por meio de três momentos.

> Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e hipótese, a simplificação, a transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor.
> Posteriormente, em um segundo momento, uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos e esses, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.
> Finalmente, no terceiro momento, os alunos divididos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a

> comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26).

As experiências vivenciadas nos dois primeiros momentos permitem que o aluno adquira confiança e autonomia para desenvolver por si só uma atividade, ou seja, vivenciem o terceiro momento. Os dois primeiros momentos ajudam o aluno a entender como é o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, fazendo com que eles se sintam menos perdidos em atividades futuras.

Os três momentos permitem que os alunos ainda não familiarizados com atividades de modelagem, desenvolvam de forma gradativa a *habilidade de fazer modelagem*. Esse desenvolvimento está em consonância com o que destaca Anastácio (1990):

> não é suficiente conhecer os passos na construção, análise e interpretação de um modelo matemático e suas diferentes aplicações. Faz-se necessário desenvolver nos alunos a capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de aplicação dos mesmos (ANASTÁCIO, 1990, p. 97).

Almeida e Vertuan (2014) complementam que o que importa não é apenas o que o aluno sabe, mas como ele usa o que sabe. Nesse sentido, inserir a modelagem de forma gradativa em sala de aula seguindo os três momentos de familiarização, parece ser adequado, pois viabiliza o desenvolvimento da autonomia do estudante no que tange à prática de desenvolver atividades de modelagem matemática.

Pesquisas desenvolvidas referindo-se à modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática têm mostrado que a autonomia não é a única habilidade desenvolvida em atividades de modelagem matemática. Nessa pesquisa interessam-nos particularmente, pesquisas que associam a modelagem matemática com aspectos da semiótica peirceana.

3.3 Modelagem matemática e Semiótica Peirceana

Pesquisas têm discutido relações entre a modelagem matemática e aspectos da semiótica peirceana. No âmbito nacional, as pesquisas de Silva (2008, 2013), Veronez (2013), Almeida e Silva (2012) e Almeida, Silva e Vertuan (2011) discutem tal relação. Já no âmbito internacional destacamos a pesquisa de Kehle e Lester Jr. (2003) e Kehle & Cunningham (2000).

Almeida, Silva e Vertuan (2011) discutem uma aproximação entre semiótica peirceana, em particular, entre as categorizações fenomenológicas[3] (primeiridade, secundidade e

---

[3] Esses conceitos serão apresentados no item 4.2.1.

terceiridade) e os níveis de relações dos signos estabelecidos por Peirce e a modelagem matemática. A análise de uma atividade de modelagem matemática permitiu aos autores inferir que há ações que são "primeiras", ações que são "segundas" e ações que são "terceiras" no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, em sintonia com as categorias Primeiridade, Secundidade e Terceiridade caracterizadas por Peirce.

Silva (2008) em sua pesquisa procurou estabelecer relações entre a Semiótica de Peirce e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Para tal, analisou atividades de modelagem matemática presentes na literatura e, a partir dessa análise, estabeleceu algumas relações entre modelagem matemática e semiótica, no que diz respeito à categorização dos signos estabelecida por Peirce, aos modos de inferência dos signos classificados por Kehle & Cunningham (2000) e aos registros de representação semiótica abordados por Duval.

Almeida e Silva (2012) explicitam reflexões, pautadas na semiótica peirceana, sobre o potencial das atividades de modelagem matemática para o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio e ações cognitivas. A partir da análise de uma atividade concluem que existe uma relação entre os modos de inferência e as ações cognitivas associadas a diferentes fases da modelagem matemática.

Kehle e Lester Jr. (2003) relacionam os três tipos de raciocínio a atividades de modelagem matemática. Segundo esses autores o fato de que atividades de modelagem matemática estão relacionadas a semiose favorecem a relação entre os tipos de raciocínio e a modelagem matemática. Isso quer dizer que "os signos associados a uma situação-problema geram signos associados a aspectos matemáticos associados a esta situação" (ALMEIDA e SILVA, 2012, p. 631). Kehle e Lester Jr. (2003) associam a transição do contexto não matemático para o contexto matemático, assim como a definição de hipóteses e as estratégias elaboradas pelos alunos para obtenção e interpretação do modelo matemático, com os raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo.

Veronez (2013) argumenta que em atividades de modelagem os alunos utilizam e/ou produzem signos durante suas ações cognitivas que são atrelados à situação, ao problema, aos objetos matemáticos e à resposta reconhecida como uma solução para o problema. A autora se baseia na teoria dos signos de Charles S. Peirce para investigar como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções dos signos. Ao final da pesquisa a autora conclui que a dinamicidade e complementaridade dos signos influenciam o encaminhamento que os alunos dão ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Ao investigar como emergem os signos interpretantes nas diferentes fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, Silva (2013), se baseia na teoria semiótica de Charles S. Peirce no que diz respeito à atribuição de significado para o objeto. A autora conclui que os signos interpretantes emergem com o envolvimento do aluno nas atividades e que se modificam de acordo com os momentos de familiarização.

Embora pesquisas tenham percebido o potencial das atividades de modelagem para a produção de signos, para atribuição de significado para o objeto matemático e para a produção de conhecimento matemático, parece ainda haver uma lacuna no que diz respeito aos tipos de raciocínio que orientam/realizam as ações dos alunos durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Portanto, nossa pesquisa procura avançar nessa direção, buscando relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo.

4. SEMIÓTICA PEIRCEANA

Nesse capítulo, inicialmente, apresentamos alguns aspectos gerais da semiótica. Posteriormente, abordamos aspectos gerais da semiótica peirceana e, mais especificamente, no que se refere aos diferentes raciocínios caracterizados por Peirce. Para finalizar, apresentamos especificidades relativas ao raciocínio abdutivo.

4.1 SOBRE A SEMIÓTICA

A palavra semiótica é derivada etimologicamente da palavra grega *semeion*, que significa signo. Assim, quando falamos em semiótica nos referimos à ciência dos signos, os signos da linguagem.

Santaella (1983) destaca que no século XX houve o crescimento de duas ciências da linguagem: a Linguística e a Semiótica. A primeira é a ciência da linguagem verbal e a segunda é a ciência de toda e qualquer linguagem. A autora destaca que quando falamos em linguagem

> queremos nos referir a uma gama incrivelmente intrincada de formas sociais de comunicação e de significação que inclui a linguagem verbal articulada, mas absorve também, inclusive, a linguagem dos surdos-mudos, o sistema codificado da moda, da culinária e tantos outros. Enfim, todos os sistemas de produção de sentido aos quais o desenvolvimento dos meios de reprodução de linguagem propicia hoje uma enorme difusão (SANTAELLA, 1983, p. 11-12).

Com base nessa caracterização de linguagem a autora considera que semiótica é "a ciência geral de todas as linguagens" (SANTAELLA, 1983, p. 7). A autora considera, entretanto, que a semiótica é a mais jovem ciência que despontou do campo das chamadas ciências humanas e que seu surgimento teve origem em três locais quase que simultaneamente: nos Estados Unidos da América, na União Soviética e na Europa Ocidental.

Segundo Nicolau et al. (2010), na União Soviética dois estudiosos, Potiebniá e Viesselovski, iniciaram descobertas no século XIX acerca do estruturalismo linguístico. E, apesar da influência negativa do regime stalinista[4], as pesquisas continuaram com a ajuda do psicólogo Lev Vygotski e do cineasta Eisenstein. Seus estudos eram sobre relações entre linguagem e ritos, linguagem e gestos etc. "Eisenstein se preocupava com questões como a

---

[4] Stalinismo designa o período em que o poder político na antiga União Soviética foi exercido por Josef Stalin.

origem dos sistemas de signos, o teatro, as relações entre pintura e cinema, a influência dos ideogramas japoneses, dentre outros” (NICOLAU et al., 2010, p. 5).

Vygotski, por sua vez, daria ênfase ao que caracterizou como mediação semiótica.

> Para Vygotski, o signo desempenha uma função mediadora entre a pessoa e seu contexto e permite seu desenvolvimento cultural. O signo é considerado por Vygotski uma ferramenta para o estudo do pensamento e de seu desenvolvimento e está relacionado com a transformação das funções psíquicas da pessoa (SILVA, 2008, p. 28).

O representante da tradição semiótica na Europa foi Ferdinand de Saussure que procurou “resolver o problema referente à compreensão da língua, distinta da linguagem e da palavra, que se constitui na oposição entre o social e o subjetivo” (SILVA, 2008, p. 27). O objeto de estudo de Saussure é a língua, sendo que ela é vista como fenômeno social, com regras arbitrárias. “A língua é vertical, regrada. Já a fala é a apropriação da língua de forma particular” (NICOLAU et al., 2010, p. 6). Nicolau et al. (2010) salientam que Saussure se prendeu à fundamentação de uma ciência da linguagem verbal e que não houve uma pretensão do linguista em construir conceitos voltados para uma ciência mais ampla e completa do que a linguística, apesar dele mesmo ter previsto a necessidade de tal ciência.

Charles S. Peirce foi o representante da semiótica nos Estados Unidos da América. Santaella (1983) destaca que Peirce tinha um interesse especial pela lógica das ciências e para entender essa lógica, era preciso em primeiro lugar entender seus métodos de raciocínio.

Segundo Santaella (1983), Peirce concebeu a lógica sendo originada dentro do campo de uma teoria geral dos signos, a Semiótica.

> Primeiramente, ele concebeu a lógica propriamente dita (aquilo que conhecemos como Lógica) como sendo um ramo da Semiótica. Mais tarde, ele adotou uma concepção muito mais ampla da Lógica que era quase coextensiva a uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signos. Na última década de sua vida, estava trabalhando num livro que se chamaria Um Sistema de Lógica, considerada como Semiótica (SANTAELLA, 1983, p. 20-21).

A semiótica peirceana, tem, portanto, um caráter bem geral, sendo entendida como teoria formal dos signos. O que Peirce entende por signo? Quais os outros aspectos podem ser destacados da semiótica Peirceana? Essas serão as perguntas que nortearão a próxima seção.

4.2 A SEMIÓTICA PEIRCEANA

Charles Sanders Peirce (1839-1914), cientista, matemático, historiador, filósofo e lógico norte-americano, é considerado o fundador da semiótica moderna. Segundo Fidalgo e Gradim (2005), na semiótica peirceana pode-se identificar duas áreas que estão estreitamente ligadas:

> uma taxonomia[5], que se ocupa da sistematização e classificação exaustiva dos diferentes tipos de signo possíveis; e uma lógica, que se ocupa do seu modo de funcionamento (como significam os signos) e do papel que estes desempenham na cognição humana e no acesso do homem ao mundo da experiência e do vivido" (FIDALGO; GRADIM, 2005, p. 142 apud ALMEIDA, SILVA, VERONEZ, 2015).

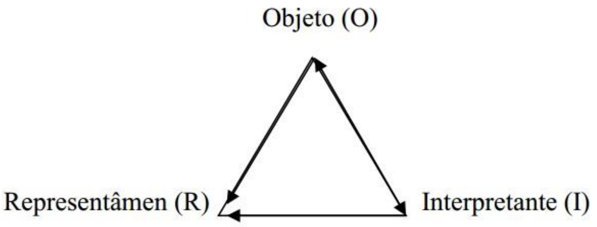
Segundo Fidalgo e Gradim (2005) a divisão e classificação dos signos elaborada por Peirce baseia-se no seu esquema categorial. A semiótica peirceana explora as potencialidades da relação triádica, segundo os autores isso ocorre mesmo quando se fala apenas de categorias. Nesse caso apresenta sempre como exemplo ideal de relação triádica o modo de funcionamento do signo, concebendo toda a semiose a partir dela.

4.2.1 A Relação Triádica do Signo

Peirce (2015) entende que um signo ou *representâmen* é aquilo que, em certa medida, representa algo para alguém. "Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez, um signo mais desenvolvido" (PEIRCE, 2015, p.46). A esse novo signo ele deu o nome de *interpretante* do primeiro signo. O signo então representa algo, seu *objeto*. Peirce (2015) nos adverte que o signo representa o objeto não em todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia, que ele denomina muitas vezes de *fundamento* do *representâmen*.

Segundo Paula e Otte (2013) o signo origina-se a partir de uma relação triádica, conforme ilustrado na figura 4.1.

Figura 4.1- Relação triádica do signo



Fonte: Paula e Otte (2013)

[5] Taxonomia: ciência ou técnica de classificação. (Dicionário Houaiss 2009)

O signo, portanto, não é o objeto, ele está no lugar do objeto, fazendo referência ao objeto e somente pode representar esse objeto de certo modo e em certa capacidade. No contexto matemático, por exemplo, a palavra integral, o símbolo da integral, são signos do objeto matemático ‘integral’. Eles não são o objeto matemático ‘integral’, somente o representam para um intérprete, num processo relacional que se cria na mente desse intérprete. Neste contexto, Santaella (2007) argumenta que

> Qualquer coisa que esteja presente à mente tem a natureza de um signo. Signo é aquilo que dá corpo ao pensamento, às emoções, reações etc. Por isso mesmo, pensamentos, emoções e reações podem ser externalizados. Essas externalizações são traduções mais ou menos fiéis de signos internos para signos externos (SANTAELLA, 2007, p. 10).

Segundo Santaella (1983), Peirce tentou estabelecer categorias sígnicas a partir da análise material dos fenômenos, por exemplo, como coisas de madeira, aço. Porém, como há uma diversidade infinita da materialidade das coisas, ele abandonou essa ideia. Peirce “conclui que tudo que aparece à consciência, assim o faz numa gradação de três propriedades que correspondem aos três elementos formais de toda e qualquer experiência” (SANTAELLA, 1983, p. 35). Esses elementos são qualidade, relação e representação. Esses elementos deram nome às três categorias fenomenológicas, que, para fins científicos, Peirce passou a denominar de Primeiridade, Secundidade, Terceiridade.

A primeiridade é uma primeira impressão indivisível e não analisável, está relacionada com um sentimento, com uma qualidade. Esse sentimento da primeiridade é algo imediato “de modo a não ser o segundo para uma representação. Ele é fresco e novo, porque, se velho, já é um segundo em relação ao estado anterior” (SANTAELLA, 1983, p. 45). Além disso, esse sentimento é original, espontâneo e livre, e não pode ser articuladamente pensado. Um exemplo referente a primeiridade, segundo Santaella (1983), é como o mundo é visto por uma criança em seus primeiros anos de vida, pois ela não estabelece relações entre as coisas, tudo para essa criança é imediato, novo, espontâneo e livre.

Na matemática podemos considerar que o primeiro contato do aluno com certo objeto matemático é primeiridade, lembrando que esse primeiro contato é sem que o aluno faça referência a algo já aprendido. Por exemplo, o aluno vê pela primeira vez o símbolo que representa a integral e não faz referência a nada, somente ao traçado que está a sua frente, nesse caso há uma primeira impressão.

Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 10) argumentam que "para cada fenômeno existe uma qualidade, ou seja, uma primeiridade". Porém, a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, pois, para que a qualidade exista ela tem de estar presente numa matéria.

> A factualidade do existir (secundidade) está nessa corporificação material. A qualidade de sentimento não é sentida como resistindo num objeto material. É puro sentir, antes de ser percebido como existindo num eu. Por isso, meras qualidades não resistem. É a matéria que resiste. Por conseguinte, qualquer sensação já é secundidade: ação de um sentimento sobre nós e nossa reação específica, comoção do eu para com o estímulo (SANTAELLA, 1983, p 47-48).

Qualquer relação de dependência entre dois termos, por exemplo qualidade e existência, é uma secundidade. Assim, a secundidade é caracterizada por ser uma relação diádica. Para Almeida, Silva e Vertuan (2011) a situação em que o aluno, ao visualizar o registro gráfico de uma parábola, associa este gráfico com o objeto matemático 'função do segundo grau', refere-se à secundidade.

A terceiridade diz respeito à generalidade, continuidade, difusão, crescimento e inteligência. Santaella (1983) enfatiza que a mais simples ideia de terceiridade é de um signo ou representação.

> Diante de qualquer fenômeno, isto é, para conhecer e compreender qualquer coisa, a consciência produz um signo, ou seja, um pensamento como mediação irrecusável entre nós e os fenômenos. E isto, já ao nível do que chamamos de percepção. Perceber não é senão traduzir um objeto de percepção em um julgamento de percepção, ou melhor, é interpor uma camada interpretativa entre a consciência e o que é percebido (SANTAELLA, 1983, p. 51).

O simples olhar para algo está carregado de interpretação, e é isso que permitiu ao homem conhecer o mundo, pois de alguma forma ele o representa e o interpreta, sendo que essa interpretação é feita por meio de outra representação. Portanto, a terceiridade corresponde a uma relação triádica existente entre o signo, o objeto e o interpretante.

> É porque o signo está numa relação a três termos que sua ação pode ser bilateral: de um lado, representa o que está fora dele, seu objeto, e de outro lado, dirige-se para alguém em cuja mente se processará sua remessa para um outro signo ou pensamento onde seu sentido se traduz. E esse sentido, para ser interpretado tem de ser traduzido em outro signo, e assim ad infinitum (SANTAELLA, 1983, p. 52).

Farias (2007) argumenta que um aluno está a caminho da terceiridade quando, ao olhar para um traçado no quadro, por exemplo, seu olhar está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, com a qual ele poderá interpretar o dado traçado que corresponde ao objeto matemático 'função do segundo grau', de acordo com uma suposta lei ou conceito matemático.

Segundo Silva (2008), o signo para Peirce estabelece três níveis de relações fundamentais: consigo mesmo (significação), com o objeto (objetivação) e com o intérprete (interpretação). A autora ainda argumenta que “esses níveis de relações associados às categorias fenomenológicas (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade) definem uma classificação estabelecida por Peirce para os signos” (SILVA, 2008, p.35).

Na significação, ou seja, na relação do signo consigo mesmo, é preciso levar em conta as propriedades que são consideradas: qualidade, existência e lei.

Para Peirce (2015) a qualidade “não pode realmente atuar como signo até que se corporifique; mas esta corporificação nada tem a ver com seu caráter como signo” (PEIRCE, 2015, p.52). Já a existência, segundo Silva (2008, p. 35-36), é uma propriedade que garante que algo ocupe lugar no espaço e no tempo e que esse algo tenha uma reação com outro existente. A lei, por sua vez, é estabelecida coletivamente e determina qual o objeto deve ser representado por aquele signo.

Na objetivação, ou seja, na relação do signo com seu objeto, são estabelecidos três tipos de relação entre o signo e o objeto: *índice, ícone e símbolo*.

Um *ícone* é um signo que representa o objeto por semelhanças. Peirce (2015) considera que uma qualidade, um existente individual ou uma lei pode ser um ícone de qualquer coisa, na medida em que indica semelhanças com o que representa. Um exemplo de ícone é uma fotografia de uma paisagem. Nesse caso a fotografia representa a paisagem por meio de semelhanças entre a paisagem e a fotografia da paisagem.

Um *índice* “é um signo que se refere ao Objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por esse objeto” (PEIRCE, 2015, p. 52). Um índice é, portanto, um signo que indica um objeto não por relação de semelhança, mas por relação de proximidade. Índices podem ser, por exemplo, nuvens negras no céu que indicam chuva, ou pegadas na lama que indicam que alguém passou por ali. Assim, o índice, fornece indícios do objeto representado.

Um *símbolo* é um signo que se refere ao objeto representado em virtude de uma lei, “normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto” (PEIRCE, 2015, p. 52). Quando observamos a figura 4.2, identificamos que essa imagem representa o Brasil, embora não haja nenhuma semelhança com o país. A bandeira nacional é, portanto, um símbolo.

Figura 4.2- Bandeira do Brasil: um símbolo do Brasil

Na interpretação, isto é, na relação do signo com o intérprete, caracteriza-se o efeito interpretativo que o signo produz na mente do intérprete. Esse efeito pode ser de três tipos: *rema, dicissigno e argumento*.

Um *rema* é um signo que para seu intérprete representa esta ou aquela espécie de objeto possível, ou seja, é um signo de possibilidade. Por exemplo, quando dizemos que uma figura desenhada no papel é um triângulo, essa afirmação não passa de conjectura, uma vez que o triângulo não apresenta dimensão nem espessura

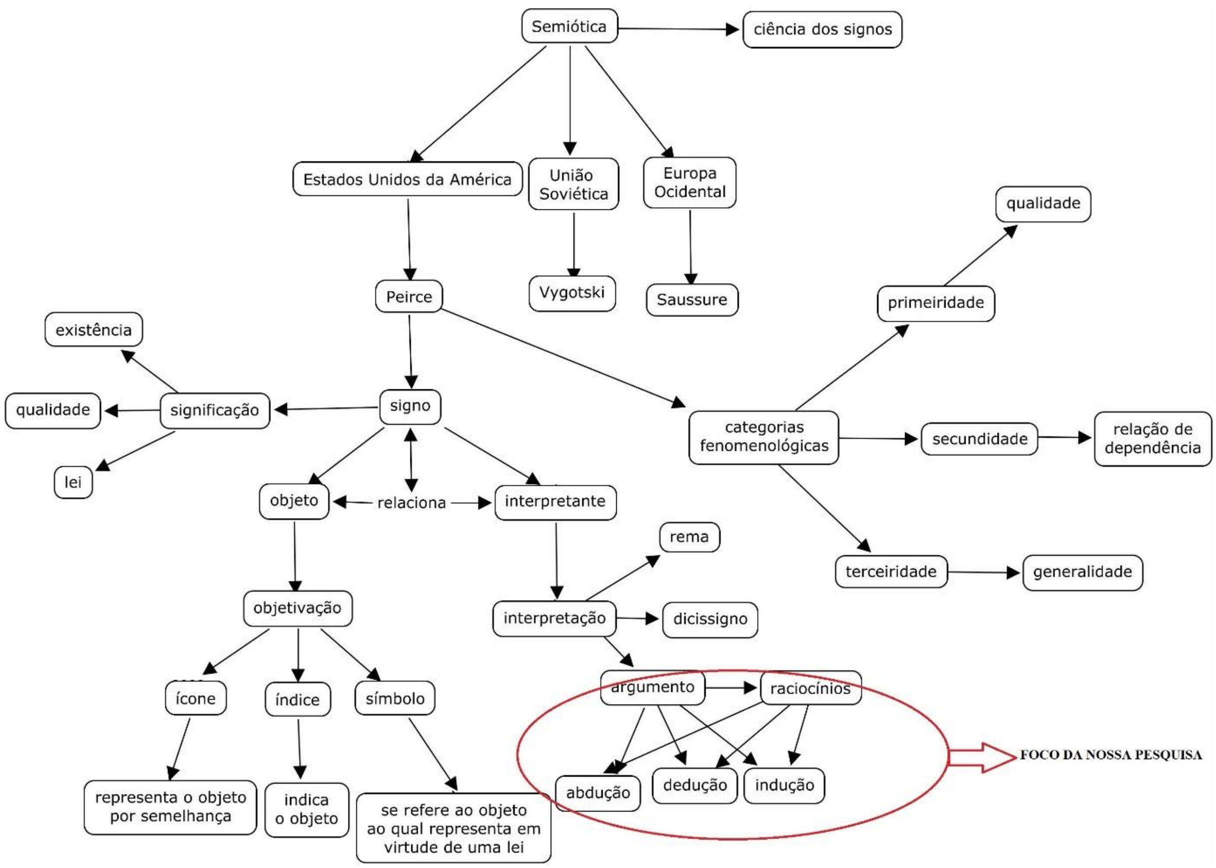
Um *dicissigno* é para seu intérprete, um signo de existência real. "Um dicissigno necessariamente envolve, como parte dele, um rema para descrever o fato que é interpretado como sendo por ela indicado. Mas este é um tipo especial de rema, e, embora seja essencial ao dicissigno, de modo algum o constitui" (PEIRCE, 2015, p. 53). Quando dizemos que uma régua está em cima da mesa temos um dicissigno, pois pode ser observado o lugar em que a régua deveria estar e se ela ali está.

Um *argumento* é para seu intérprete um signo lei, isto é, um argumento é entendido como um signo que representa seu objeto em seu caráter de signo. Peirce (2015, p. 59) salienta que, "um argumento sempre é entendido por seu intérprete como fazendo parte de uma classe geral de argumentos análogos, classe essa que, como um todo tende para a verdade". Um argumento pode ser, por exemplo, a representação gráfica de uma função exponencial. É reconhecido, entre os gráficos de funções reais, aquele que, por suas especificidades, representa uma função exponencial.

Para Peirce (2015) os argumentos podem ser de três tipos: deduções, induções e abduções. De acordo com Manechine e Caldeira (2010), o estudo sobre argumentos envolve o estudo sobre os estágios de ação mental, sendo esses estágios definidos em três inferências de raciocínios: abdução, indução e dedução.

A figura 4.3 apresenta um organograma com os principais aspectos da semiótica peirceana discutidos nas seções anteriores.

Figura 4.3-Organograma dos tópicos de Semiótica Peirceana abordados no capítulo



4.3 A TRÍADE DOS RACIOCÍNIOS

Segundo Manechine e Caldeira (2010), o significado de algo na teoria pragmática peirceana depende do quando e do como, e isso nos leva a caminhos de estágios de ação mental. Essa ação mental refere-se aos modos de inferência ou aos raciocínios caracterizados por Peirce (2015) como: raciocínio dedutivo, raciocínio indutivo e raciocínio abdutivo.

Esses três raciocínios têm papel importante na formação do pensamento matemático escolar e, segundo Manechine e Caldeira (2010), atividades investigativas podem propiciar o desenvolvimento desses raciocínios. O desenvolvimento desses raciocínios, particularmente o raciocínio abdutivo em atividades investigativas, nesse caso, atividades de modelagem matemática, constitui o foco da nossa pesquisa.

4.3.1 O Raciocínio Dedutivo

De acordo com Peirce (2015) a dedução é o raciocínio que

> examina o estado de coisas colocado nas premissas, que elabora um diagrama desse estado de coisas, que percebe, nas partes desse diagrama, relações não explicitamente mencionadas, que se assegura, através de elaborações mentais sobre o diagrama, de que essas relações sempre subsistiriam num certo número de casos, e que conclui pela necessária, ou provável, verdade dessas relações (PEIRCE, 2015, p.5).

Assim, considerando a caracterização de Peirce, podemos afirmar que na dedução observa-se certa premissa e identifica-se o que nela se encontra implicitamente suposto; parte-se de uma premissa maior para chegar a uma premissa menor. Peirce (2015, p. 215) argumenta que "a inferência[6] é válida apenas se houver realmente uma tal relação entre o estado de coisas suposto nas premissas e o estado de coisas enunciado na conclusão".

Segundo Peirce (2015) o raciocínio dedutivo é diagramático, possibilitando a construção de um ícone de nosso estado de coisas hipotético e sua observação. Nessa observação busca-se relações de partes que devem apresentar uma analogia completa com as partes do objeto de raciocínio, de experiências sobre esta imagem e de observar o resultado, a fim de descobrir relações despercebidas e escondidas entre as partes.

Keske (2008), argumenta que a dedução tem a característica de ser um raciocínio necessário "que mostrará de que forma, a partir de uma determinada regra, se estabelece um caso, obtendo-se um determinado resultado considerado "irrefutável" enquanto fenômeno lógico" (KESKE, 2008, p. 5).

O raciocínio dedutivo prova, portanto, que alguma coisa deve ser. Segundo Almeida e Silva (2012, p. 626), a inferência dedutiva "de modo geral, não requer muita criatividade, uma vez que não se acrescenta nada que já não seja o conhecimento do intérprete".

Eco (1989) explica o raciocínio dedutivo da seguinte forma

> suponhamos que sobre esta mesa eu tenha um saco cheio de feijões brancos. Eu sei que está cheio de feijões brancos (suponhamos que eu tenha comprado numa loja saquinhos de feijão branco e que eu confie no vendedor): portanto, eu posso afirmar como Lei que "todos os feijões deste saco são brancos". Uma vez que conheço a Lei, produzo um Caso; pego às cegas um punhado de feijões do saquinho (às cegas: não é necessariamente que os veja) e posso predizer o Resultado: "Os feijões que estão na minha mão são brancos". A Dedução de uma Lei (verdadeira), através de um Caso, prediz com absoluta certeza um Resultado (ECO, 1989, p.160).

---

[6] De acordo com o dicionário Houaiss (2009) inferir é deduzir algo a partir de certas premissas e raciocinar também é deduzir algo a partir de premissas. Visto essa definição e que nos escritos de Peirce essas palavras são usadas para dizer a mesma coisa, usamos as palavras inferência e raciocínio como sinônimos ao longo desse texto.

O raciocínio dedutivo é muito utilizado em atividades de matemática. Por exemplo, sabemos que todo cilindro tem a forma conforme descrito na figura 4.4 e que seu volume é calculado como o produto da área da base pela altura. Se temos, por exemplo, uma lata (figura 4.5) que tem o formato de um cilindro, podemos afirmar que o seu volume é calculado por área da base vezes a altura. Ou seja, calculamos o volume da lata mediados pelo raciocínio dedutivo.

Figura 4.4- Cilindro

$\boldsymbol{V = A_b . h}$ **ou** $\boldsymbol{V = \pi . R^2 . h}$

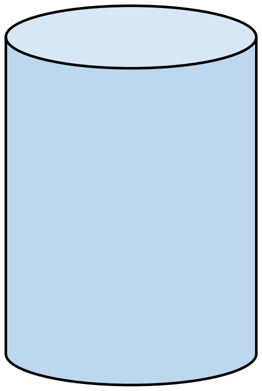


Figura 4.5- Lata com forma de cilindro

No que se refere à modelagem matemática, Kehle e Lester Jr. (2003), argumentam que a dedução pode ser percebida no momento da validação do modelo, pois esse deve se adequar a uma situação particular. De acordo com Kehle e Cunninhgham (2000) o raciocínio dedutivo acontece quando uma conclusão necessária é alcançada com base em regras formais. O modo de raciocínio dedutivo pode orientar as ações do aluno no desenvolvimento de uma atividade quando ele identifica no modelo o que nele está, implicitamente, suposto para a situação e verifica se determinada reposta é adequada ou não, o que pode orientar a definição de novas hipóteses ou de novos métodos ou técnicas para a obtenção de respostas.

4.3.2 O Raciocínio Indutivo

Para Peirce (2015) a indução é o raciocínio que assume uma conclusão a partir de uma série de inferências que, de modo geral, conduzem a uma conclusão verdadeira. O autor exemplifica assim a indução.

> Um navio carregado com café entra num porto. Subo a bordo e colho uma amostra do café. Talvez eu não chegue a examinar mais do que cem grãos, mas estes foram tirados da parte superior, do meio e da parte inferior do navio.

> Concluo, por indução, que a carga toda tem o mesmo valor, por grão, que os cem grãos de minha amostra. Tudo o que a indução pode fazer é determinar o valor de uma relação (PEIRCE, 2015, p.6).

Assim, ao contrário da dedução que parte de um caso de premissas geral para um caso específico, a indução parte de premissas específicas para chegar a uma conclusão geral, ou seja, as características dos grãos de café examinados, nos levam a inferir características de toda a carga de café.

Peirce salienta que o raciocínio indutivo é caracterizado pela experimentação, e entende "o raciocínio indutivo como um curso de investigação experimental" (PEIRCE, 2015, p. 218). O autor não toma "experimento" no sentido estrito de uma operação pela qual se varia as condições de um fenômeno quase à nossa vontade, mas entende experimento como uma pergunta feita à natureza.

Keske (2008) acredita que o raciocínio indutivo nos permite verificar determinada teoria a partir da experimentação. Esse autor entende que o raciocínio indutivo acontece quando se generaliza a partir de certos números de casos em que algo é verdadeiro, e então concluímos que determinada propriedade é válida.

Eco (1989) também explica o raciocínio indutivo a partir do exemplo do saquinho de feijões.

> Tenho um saquinho e não sei o que contém. Coloco a mão dentro dele, tiro um punhado de feijões e observo que são todos brancos. Coloco de novo a mão, e de novo são feijões brancos. Continuo por um número x de vezes (quantas sejam, às vezes, depende do tempo que eu tenho, ou do dinheiro que recebi da Fundação Ford para estabelecer uma lei científica a respeito dos feijões do saco). Depois de um número suficiente de provas, faço o seguinte raciocínio: todos os Resultados das minhas provas dão um punhado de feijões brancos. Posso fazer a razoável inferência de que todos esses resultados são Casos da mesma Lei, isto é, que todos os feijões do saco são brancos. De uma série de Resultados, inferindo que sejam Casos de uma mesma Lei, chego à formulação indutiva dessa Lei (provável). Como já dissemos, basta que numa última prova aconteça que um só dos feijões que tiro do saco seja preto para que todo o meu esforço indutivo se dissipe no nada. Eis o porquê da desconfiança dos epistemólogos em relação à Indução. (ECO, 1989, p. 160).

Esse exemplo indica que o raciocínio indutivo consiste em partir de uma teoria e dela fazer previsões de fenômenos e observar esses fenômenos a fim de ver quão de perto concordam com a teoria. Peirce (2015) salienta que a justificativa para acreditar nesse processo de experimentação, "será no futuro próximo sustentada quase tanto por verificações posteriores quanto o tem sido até agora, essa justificativa está em que seguindo firmemente esse método devemos descobrir, a longo prazo, como é que o problema realmente se apresenta" (PEIRCE, 2015, p. 219).

O raciocínio indutivo orienta nossas ações em muitas atividades matemáticas. Em algumas dessas atividades observamos que determinado comportamento acontece para casos particulares e generalizamos tais fatos. Por exemplo, observemos a seguinte sequência de operações:

$$1 = (2\,.\,0) + 1$$

$$3 = (2\,.\,1) + 1$$

$$5 = (2\,.\,2) + 1$$

$$7 = (2\,.\,3) + 1$$

Se continuarmos a realizar essa operação com os números naturais, chegamos à conclusão, a partir das premissas acima, que todo número ímpar pode ser escrito da seguinte forma: $número\ ímpar = (2\,.\,n) + 1,$ onde n é um número natural.

Com relação às atividades de modelagem matemática, Almeida e Silva (2012) destacam que o raciocínio indutivo orienta as ações dos alunos nessas atividades. Para as autoras o raciocínio indutivo orienta a "identificação das características do problema, a análise da plausibilidade das hipóteses e os procedimentos experimentais que viabilizam a construção do modelo matemático" (ALMEIDA e SILVA, 2012, p. 631).

A indução está associada a três tipos de ações em uma atividade de modelagem matemática: identificação, verificação das hipóteses e construção do modelo. Segundo Kehle e Cunninhgham (2000), a identificação busca uma generalização para o problema, por meio da verificação de uma possível regra usada ou definida. Essa ação está relacionada com a validação. A verificação das hipóteses por sua vez

> está relacionada com: a demonstração da necessidade das hipóteses; a análise das relações entre características do problema que conduzem às hipóteses e os procedimentos matemáticos usados na construção do modelo; a análise da relação entre a situação-problema inicial e os resultados gerados com o uso da hipótese (ALMEIDA, SILVA, 2012, p. 632).

4.3.3 O Raciocínio Abdutivo

A abdução, segundo Peirce (2015), é a adoção temporária de uma hipótese, sendo que suas consequências são passíveis de verificação experimental de tal modo que se pode esperar um desacordo com os fatos. Assim, a abdução é entendida por Peirce como o processo de formulação de uma hipótese explicativa para determinado fenômeno. Esse é o único raciocínio que produz uma ideia nova uma vez que "a indução nada faz além de determinar um valor e a dedução meramente desenvolve as consequências necessárias de uma hipótese pura" (PEIRCE, 2015, p. 220).

Peirce observa que esse raciocínio é o início de todas as descobertas científicas, "uma vez que existe a possibilidade de se encontrar uma Lei geral no mínimo curiosa e absolutamente diferente das "comprovações" anteriormente testadas" (KESKE, 2008, p. 7).

Para ilustrar a ideia de raciocínio abdutivo Eco (1989) apresenta o exemplo:

> há um saquinho sobre a mesa e, ao lado, sempre sobre a mesa, um grupo de feijões brancos. Não sei como estão ali, ou quem os colocou, nem de onde vêm. Consideremos este resultado um caso curioso. Agora eu deveria encontrar uma Lei tal que, se fosse verdadeira, e se o Resultado fosse considerado um Caso daquela Lei, o Resultado não seria mais curioso, mas sim, razoabilíssimo. Neste ponto eu faço uma conjectura: teorizo a Lei pela qual aquele saco contém feijões e todos os feijões daquele saco são brancos e tento considerar o resultado que tenho diante dos meus olhos como um Caso daquela Lei. Se todos os feijões do saquinho são brancos e esses feijões vêm daquele saco, é natural que os feijões da mesa sejam brancos. (ECO, 1989, p. 160).

Keske (2008) ao falar sobre o exemplo de Eco, questiona o porquê dentre tantas possibilidades, se relacionar aqueles feijões com o saquinho que está em cima da mesa, e não com o fato de que ele poderia ter vindo de uma gaveta, ou talvez, ter sido colocado ali por alguém enquanto não se estava presente. A explicação para isso decorre da definição do raciocínio abdutivo, pois como esse realiza a formulação de hipóteses, escolhemos uma dentre as outras e verificamos por meio da experimentação se tal hipótese é adequada para a situação. A abdução, ao contrário dos outros dois raciocínios, nos mostra se determinada conclusão pode ou não ser válida.

Segundo Shanahan (1986) citado por Pavani (2010, p. 19) a formulação das hipóteses "possui um caráter intuitivo, em que prevalece a imaginação e especulação sobre a pertinência de hipóteses levantadas sem critérios lógicos. Nesta etapa impera a vontade e as experiências vividas pela mente especulativa". Magnani (2014) argumenta que existe uma forma especial de abdução não verbal, em que as hipóteses são instantaneamente derivadas de uma série de experiências similares armazenadas anteriormente, a qual ele denomina de abdução visual. O autor salienta que esse tipo de abdução abrange um processo mental que se enquadra na categoria chamada percepção.

De acordo com Magnani (2014), Peirce considera a percepção como um processo rápido e descontrolado de produção de conhecimento, constituindo um veículo para a recuperação instantânea do conhecimento que foi previamente organizado em nossa mente por meio de processos de inferência. Segundo Santaella (1998), a percepção é determinada pelo percepto e esse, por sua vez, é definido por Peirce como aquilo que percebemos. “ O percepto é aquilo que tem realidade própria no mundo que está fora de nossa consciência e que é aprendido pela consciência no ato perceptivo” (SANTAELLA, 1998, p. 54).

Santaella (1998, p. 64-65) enfatiza que

> A percepção é determinada pelo percepto, mas o percepto só pode ser conhecido através da mediação do signo, que é o julgamento da percepção. Para que esse conhecimento se dê, o percepto deve, de algum modo, estar representado no signo. Aquilo que representa o percepto, dentro do julgamento perceptivo, é o *percipuum*, meio mental de ligação entre o que está fora e o juízo perceptivo, que já é fruto de uma elaboração mental (SANTAELLA, 1998, p. 64-65).

Os julgamentos de percepção são inferências lógicas que fazem com que o *percipuum* se acomode a esquemas mentais e interpretativos mais ou menos habituais (SANTAELLA, 1998). Embora sejam inferências lógicas, os julgamentos de percepção são algo incontrolável. Peirce (1893–1913) citado por Magnani (2014) argumenta que não é possível exercer qualquer controle sobre o julgamento de percepção ou submetê-lo a crítica.

> Se podemos criticá-lo em tudo, tanto quanto eu posso ver, a crítica seria limitada a realizá-lo novamente e ver se com mais atenção nos aproximamos do mesmo resultado. Mas quando nós assim realizamos novamente, prestando atenção agora mais perto, a percepção, presumivelmente, não é como era antes. Eu não vejo o que os outros meios que temos de saber se é o mesmo que era antes ou não, exceto comparando o juízo perceptivo antigo ao que será mais tarde. Eu gostaria absolutamente de desconfiar de qualquer outra forma de avaliar o que foi o caráter da percepção. Por conseguinte, até que eu estar melhor aconselhado, considerarei o juízo perceptivo para ser totalmente além do controle (PEIRCE, 1893, p. 191 apud MAGNANI, 2014).

Peirce (2015) define o juízo perceptivo como uma proposição de existência determinada pelo percepto, e que fornece o direcionamento das inferências lógicas. Para Peirce (2015) os juízos perceptivos podem ser inconscientes e incontrolados, além de serem imunes a crítica, pois são sentenças verdadeiras. Santaella (1998) entende que é graças aos juízos perceptivos que sabemos que o cheiro que estamos sentindo é de chocolate e que aquilo que estamos vendo é uma cadeira, por exemplo.

Nesse sentido, Magnani (2014) argumenta que percepções podem ser vistas como hipóteses sobre os dados que podemos aceitar (geralmente isso acontece espontaneamente) ou, cuidadosamente avaliar.

Peirce (1966) ilustra com um exemplo da azaleia o raciocínio abdutivo.

> Olhando para fora da minha janela esta linda manhã de primavera eu vejo uma azaleia em plena floração. Não! Eu não vejo isso; no entanto, que é a única maneira que posso descrever o que eu vejo. Essa é uma proposição, uma frase, um fato; mas o que eu percebo não é proposição, sentença, verdade, mas apenas uma imagem, que eu torno inteligível em parte por meio de uma

> declaração de fato. Esta declaração é abstrata; mas o que eu vejo é concreto. Eu realizo uma abdução quando quanto muito eu expresso em uma frase tudo que eu vejo. (PEIRCE, 1966, p.692).

Eco (1991), ao se referir a esse exemplo, diz que a enunciação é abstrata, porém o que se vê é algo concreto. Para esse autor o raciocínio é abdutivo quando se procura expressar em uma sentença o que se vê. “A verdade é que todo o edifício de nosso conhecimento é uma estrutura emaranhada de puras hipóteses, confirmadas e refinadas pela indução. O conhecimento não pode avançar nem um pouco além do estágio do olhar que observa despreocupadamente se não se fizer, a cada passo, uma abdução” (ECO, 1991, p. 20).

Além da percepção, Peirce também associa o instinto ao raciocínio abdutivo. O autor percebeu que o homem tem uma capacidade de elaborar hipóteses explicativas a partir de um insight.

> Seja como for que o homem tenha adquirido sua faculdade de adivinhar os caminhos da Natureza, certamente não o foi através de uma lógica crítica e autocontrolada. Parece-me que a formulação mais clara que podemos fazer a respeito da situação lógica — a mais livre de toda a mescla questionável de elementos — consiste em dizer que o homem tem uma certa Introvisão (Insight), não suficientemente forte para que ele esteja com mais frequência certo do que errado, mas forte o suficiente para que esteja, na esmagadora maioria das vezes com mais frequência certo do que errado, uma Introvisão da Terceiridade, os elementos gerais, da Natureza (PEIRCE, 2015, p. 221).

O autor salienta que o instinto, ou os insights, nortearão a elaboração das hipóteses, e essas, por sua vez, estão relacionadas ao juízo perceptivo.

Peirce argumenta que o raciocínio abdutivo é o início de toda descoberta científica, assim tal raciocínio orienta nossas ações na resolução de problemas matemáticos. Por exemplo, quando temos diante de nós um conjunto de dados dispostos em gráfico de dispersão e formulamos a hipótese de que esses dados se comportam de acordo com determinada função, essa formulação foi feita a partir da percepção de que os dados dispostos no gráfico se comportavam de acordo com alguma função já conhecida por nós.

Manechine e Caldeira (2011) argumentam que ao resolver um problema matemático, uma das primeiras ações é formular hipóteses com o intuito de resolver o problema. Corroborando com essas autoras, Almeida e Silva (2012) argumentam que em uma atividade de modelagem matemática o raciocínio abdutivo orienta as ações dos alunos na identificação das características do problema, na análise da plausibilidade das hipóteses e nos procedimentos experimentais que viabilizam a construção do modelo matemático (ALMEIDA e SILVA, 2012).

Kehle e Cunningham (2000) argumentam que o raciocínio abdutivo pode se manifestar de diferentes modos. Os autores caracterizam esses modos como: palpite, sintoma, analogia, pista, diagnóstico e explicação.

O modo palpite lida com a identificação de possíveis semelhanças, que afloram das nossas observações iniciais e que podem levar a possíveis evidências para a identificação do problema. O modo sintoma manifesta-se na transição entre a situação-problema e a identificação do problema. Nesse modo informações que parecem pouco importantes, passam a ser consideradas necessárias para o desenvolvimento do modelo após uma análise da situação (ALMEIDA, SILVA, 2012).

Quando os alunos fazem comparações para criarem ou descobrirem uma possível regra ou para a identificação de possíveis padrões, o que os orienta é o modo de raciocínio abdutivo denominado de analogia. Por outro lado, quando esses alunos percebem certas evidencias que sinalizam regras ou procedimentos para a resolução do problema, temos o modo pista.

Ao levantar hipóteses plausíveis fundamentadas nas informações e nos seus conhecimentos sobre o fenômeno em estudo os alunos evidenciam o entendimento da informação e tal ação sinaliza o modo diagnóstico. O modo explicação está relacionado com

> o uso das hipóteses para fundamentar a construção do modelo, o uso de métodos e técnicas para a construção do modelo, bem como a interpretação dos resultados obtidos. Em termos de explicação de resultados, diferentes representações podem ser apresentadas pelos alunos. Revela a tradução de conhecimento para novo contexto, interpretação de dados, comparação (ALMEIDA, SILVA, 2012, p. 632).

A tabela 4.1 sintetiza os modos do raciocínio abdutivo bem como suas caracterizações em atividades de modelagem matemática.

Tabela 4.1-Modos do raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática

Modo do raciocínio abdutivo	Caracterização
Palpite	Realização de aproximações ou idealizações sobre as informações iniciais para orientar a identificação do problema.
Sintoma	A partir de uma análise, informações que, embora pareçam pouco importantes, passam a ser consideradas necessárias para o desenvolvimento da situação. Manifesta-se na transição entre a situação-problema e a identificação do problema.
Analogia	Os alunos manipulam comparações para criarem ou descobrirem uma possível regra ou a identificação de possíveis padrões. A percepção de algumas evidências que sinalizam regras ou procedimentos para a investigação do problema.
Pista	A percepção de algumas evidências que sinalizam regras ou procedimentos para a investigação do problema.
Diagnóstico	Levantamento de hipóteses plausíveis fundamentadas nas informações e no conhecimento dos alunos sobre o fenômeno em estudo. Evidencia o entendimento da informação, a construção de significado.
Explicação	Está relacionada com: o uso das hipóteses para fundamentar a construção do modelo, o uso de métodos e técnicas para a construção do modelo, bem como a interpretação dos resultados obtidos. Em termos de explicação de resultados, diferentes representações podem ser apresentadas pelos alunos. Revela a tradução de conhecimento para novo contexto, interpretação de dados, comparação.

Fonte: adaptado de Almeida e Silva (2012)

Os alunos quando desenvolvem atividades de modelagem podem acionar esses diferentes modos, fazendo inferências criativas que são necessárias para a investigação e interpretação da situação-problema. Segundo Keske (2008), Peirce entende a abdução justamente como uma “lei da liberdade”, no sentido de que existe uma grande quantidade de ideias que poderão ser associadas de forma criativa, na obtenção, conclusão e estabelecimento de uma determinada conclusão. Magnani (2014) afirma que o raciocínio abdutivo tem o seu lado criativo e que esse está relacionado aos juízos perceptivos formados.

Visto que a abdução possui um lado criativo, podemos caracterizar e identificar a criatividade durante uma atividade de modelagem matemática. Assim, na próxima subseção abordamos algumas definições de criatividade bem como algumas dessas características.

4.3.3.1 A criatividade e o raciocínio abdutivo

Um consenso entre os autores que tem como objeto de estudo a criatividade é que é difícil definí-la. Diante de tal dificuldade de definição, a criatividade tem sido estudada de acordo com diferentes abordagens. Sternberg (2000) em seu livro *Handbook of Creativity* faz uma revisão da literatura sobre criatividade e sugere que as diferentes abordagens podem ser incluídas em algumas categorias como mística, pragmática, psicodinâmica, psicométrica, cognitiva e personalidade social.

Apesar dessas diferentes abordagens para a criatividade, Feldman, Csikszentmihalyi e Gardner (1994) argumentam que a criatividade pode ser estudada por várias perspectivas. Segundo os autores, é comum entendê-la sob a perspectiva da pessoa (características cognitivas), sob a perspectiva do produto que surge (verifica-se se esse é novo), sob a perspectiva do processo (as etapas do desenvolvimento do produto criativo) e sob a perspectiva do ambiente.

Segundo Tardif e Sternberg (1988), os trabalhos que focam a criatividade sob a perspectiva da pessoa, normalmente, abordam características cognitivas que focalizam traços como originalidade e fluência verbal, habilidades como lidar com novidades, pensar metaforicamente e o modo como os indivíduos criativos abordam o problema e aspectos de personalidade e motivação, como curiosidade e atitude inquisitiva.

Ao enfatizar o produto do pensamento criativo inclui-se soluções para um problema, novas ideias. Tardif e Sternberg (1988) argumentam que existe certa concordância entre os autores da área de que esse produto deve ser novo e útil à sociedade, ou pelo menos ao domínio em que ele está sendo formado.

A terceira perspectiva, o processo, focaliza "nos limites de tempo envolvidos na criação de um produto, nas oportunidades de nutrir os resultados produzidos, no papel do processo mais longo de evolução no produto final e na posição do *insight* no processo criativo" (VIRGOLIM, 2007, p. 21). Por fim, quando o foco são os elementos que podem promover o desenvolvimento ou a inibição da criatividade, temos a perspectiva do ambiente.

Para Gontijo (2007), é preciso que haja uma preocupação em realizar pesquisas que integrem essas perspectivas por meio da conjugação de uma ou mais perspectivas. Autores, como por exemplo, Sternberg e Lubart (1999), argumentam que estudos isolados da criatividade resultam em uma visão parcial e incompleta do fenômeno, sendo assim necessária uma abordagem multidisciplinar para a compreensão da criatividade.

Gontijo (2007) elabora uma definição de criatividade em Matemática que leva em consideração algumas dessas perspectivas. De acordo com esse autor, criatividade em Matemática diz respeito à

> (...) capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos

> e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações (GONTIJO, 2007, p. 2).

Alencar (1990) argumenta que a capacidade criativa em Matemática também pode ser caracterizada pela sensibilidade do aluno em reconhecer problemas; pela quantidade de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto (fluência); pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas (flexibilidade); pela capacidade de obter respostas infrequentes ou incomuns (originalidade); pela capacidade de manifestar detalhes sobre uma ideia (elaboração).

Essas habilidades podem ser identificadas se o professor cria um ambiente favorável ao desenvolvimento da criatividade. Fleith e Alencar (2005) ressaltam algumas características desse ambiente: a) propiciar o desenvolvimento da habilidade de pensar em termos de possibilidades do aluno, a exploração das consequências, modificações e aperfeiçoamentos para as próprias ideias, b) permitir que o aluno reflita sobre o que ele gostaria de conhecer melhor, c) envolver o aluno na solução de problemas não matemáticos, d) propiciar a escolha dos problemas a serem investigados pelos alunos, e) encorajar o aluno a elaborar soluções originais.

Pereira (2008) salienta que atividades de modelagem matemática têm potencial para o desenvolvimento de habilidades criativas desde que os alunos levantem hipóteses sobre o tema em estudo, pensem em soluções e as coloquem em prova.

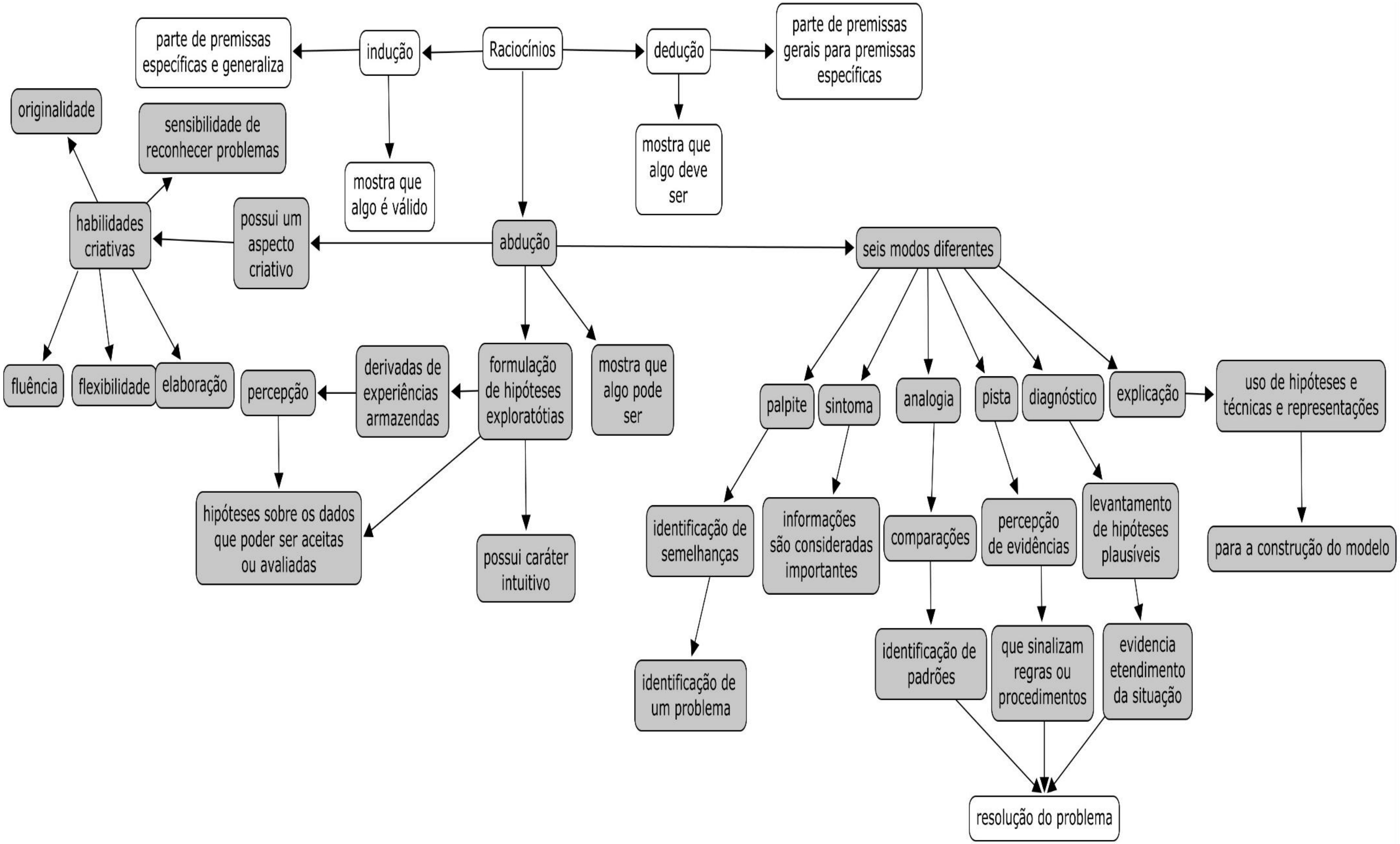
Segundo Ferraz (2010), Peirce entende que a criatividade se manifesta no raciocínio abdutivo. Santaella (2000) argumenta que a abdução, enquanto um processo lógico de criação de hipóteses, é uma atividade criativa.

Visto que o processo de formulação de hipóteses é uma atividade criativa e que para desenvolver uma atividade de modelagem matemática a formulação de hipóteses tem papel fundamental, na nossa pesquisa também investigamos se o uso do raciocínio abdutivo implica no desenvolvimento de habilidades criativas para desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A figura 4.6 apresenta os principais aspectos discutidos nesse texto a respeito dos três tipos de raciocínio.

Apoiados nas discussões realizadas nesse capítulo buscamos identificar aspectos do raciocínio abdutivo no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. As análises das atividades, com base nesses aspectos, nos possibilitam um olhar mais atento às atividades desenvolvidas pelos alunos, o que nos proporciona investigar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. Essas análises são apresentadas no capítulo seguinte.

Figura 4.6- Caracterização dos raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo



4.4 CONSTRUINDO UM QUADRO DE REFERÊNCIAS PARA A REALIZAÇÃO DAS ANÁLISES

Com base nas discussões feitas nesse capítulo construímos um quadro de referência que nos norteará na condução das análises locais. Nesse quadro sistematizamos aspectos do raciocínio abdutivo e da criatividade.

Quadro 4.1- Quadro de referências para as análises

Aspectos do raciocínio abdutivo e da criatividade	**Caracterização**
Palpite	Realização de aproximações ou idealizações sobre as informações iniciais para orientar a identificação do problema.
Sintoma	A partir de uma análise, informações que, embora pareçam pouco importantes, passam a ser consideradas necessárias para o desenvolvimento da situação. Manifesta-se na transição entre a situação-problema e a identificação do problema.
Analogia	Os alunos manipulam comparações para criarem ou descobrirem uma possível regra ou a identificação de possíveis padrões. A percepção de algumas evidências que sinalizam regras ou procedimentos para a investigação do problema.
Pista	A percepção de algumas evidências que sinalizam regras ou procedimentos para a investigação do problema.
Diagnóstico	Levantamento de hipóteses plausíveis fundamentadas nas informações e no conhecimento dos alunos sobre o fenômeno em estudo. Evidencia o entendimento da informação, a construção de significado.
Explicação	Está relacionada com: o uso das hipóteses para fundamentar a construção do modelo, o uso de métodos e técnicas para a construção do modelo, bem como a interpretação dos resultados obtidos. Em termos de explicação de resultados, diferentes representações podem ser apresentadas pelos alunos. Revela a tradução de conhecimento para novo contexto, interpretação de dados, comparação.
Fluência	Quantidade de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto.
Flexibilidade	Capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas
Originalidade	Capacidade de obter respostas infrequentes ou incomuns
Elaboração	Capacidade de manifestar detalhes sobre uma ideia.
Reconhecer problemas	Capacidade de reconhecer problemas a partir de uma situação dada.

5. RACIOCÍNIO ABDUTIVO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Levando em consideração elementos do raciocínio abdutivo e características de atividades de modelagem matemática a que nos referimos no decorrer da nossa abordagem teórica-metodológica especificada nos capítulos anteriores, apresentamos no presente capítulo nossa análise visando identificar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo.

A análise, alinhada às indicações e aos encaminhamentos da Análise de Conteúdo, é realizada à luz dos pressupostos da semiótica peirceana e da modelagem matemática.

5.1 O CONTEXTO E AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Para subsidiar nossas reflexões analisamos atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de uma turma do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná. As atividades foram desenvolvidas na disciplina de Modelagem Matemática, por dez alunos, em encontros semanais com duração de duas aulas, no período de 22 de abril à 30 de setembro de 2015.

Os dez alunos da turma, identificados como A1, A2, A3,..., A10, formaram três grupos (G1, G2, G3), sendo a distribuição dos alunos nos grupos conforme indica a tabela 5.1.

Tabela 5.1- Integrantes de cada grupo

Grupos	Alunos
G1	A1, A2 e A5
G2	A3, A7 e A9
G3	A4, A6, A8 e A10

As atividades foram desenvolvidas considerando os três momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática, conforme apresentamos no capítulo três deste texto. As temáticas das atividades, os alunos que participaram do seu desenvolvimento bem como os momentos a que se refere cada atividade estão especificados na tabela 5.2.

Tabela 5.2-Informações sobre as atividades

Data	Grupo	Atividade	Momento
22/04	G1, G2, G3	O volume da maçã	Primeiro
29/04	G1, G2, G3	O volume da maçã	Primeiro
01/07	G1, G2, G3	Dinâmica populacional de Cornélio Procópio	Primeiro
08/07	G1, G2, G3	Dinâmica populacional de Cornélio Procópio	Primeiro
29/07	G1, G2, G3	Discussão trabalho final	Terceiro
26/08	G1, G2, G3	O chocolate	Segundo
02/09	G1, G2, G3	O chocolate	Segundo
02/09	G1, G2, G3	A emissão de CO_2 dos carros de uma família	Segundo
09/09	G1, G2, G3	A emissão de CO_2 dos carros de uma família	Segundo
09/09	G1	Apresentação primeira versão do trabalho final	Terceiro
	G2	Apresentação primeira versão do trabalho final	
	G3	Apresentação primeira versão do trabalho final	
23/09	G1	A força desempenhada pelo peão em um rodeio	Terceiro
	G2	As embalagens de desodorante convencional e comprimida	
30/09	G3	Metas do milênio: mortalidade materna	Terceiro

5.2 A COLETA DAS INFORMAÇÕES E A CONDUÇÃO DAS ANÁLISES

As informações analisadas foram coletadas por meio de entrevistas, questionários e gravações em áudio e vídeo no decorrer do desenvolvimento das atividades. Além disso, os registros dos alunos produzidos nesse desenvolvimento eram recolhidos após o término de cada atividade. Para atividades do terceiro momento os grupos de alunos produziram e entregaram um relatório escrito, bem como realizaram uma apresentação do seu trabalho para todos os alunos da disciplina. Os registros escritos foram digitalizados e, posteriormente, foram entregues aos alunos as versões originais. As gravações de áudio foram transcritas.

As análises das atividades são caracterizadas como local e global, sendo a local relativa à cada atividade em particular e a análise global referente ao conjunto de todas as atividades desenvolvidas.

A análise local descrita neste texto refere-se a cinco das atividades desenvolvidas, conforme especifica a tabela 5.3. Por termos em mãos uma quantidade grande de dados, visto que todos os dez alunos desenvolveram todas as atividades, optamos por escolher um ou dois grupos para as análises. A escolha de dois grupos na primeira atividade se deu pelo fato de que analisamos apenas uma atividade do primeiro momento. A escolha desses grupos, bem como dos demais grupos analisados nas outras atividades, levou em consideração a qualidade dos registros dos alunos bem como o detalhamento observado nas discussões dos alunos quanto à transcrição e análise de áudio e vídeo.

Tabela 5.3-Descrição das atividades analisadas

Atividade	Grupo
O volume da maçã	G1/G2
O chocolate	G2
A emissão de CO_2 dos carros de uma família	G1
As embalagens de desodorante convencional e comprimida	G2
Metas do milênio: mortalidade materna	G3

Primeiramente todos os dados coletados foram organizados. Posteriormente foram selecionadas as atividades bem como os grupos que teriam suas produções e manifestações analisadas. Essa fase de organização e constituição do *corpus* está em consonância com o que Bardin (1977) denomina de pré-análise.

Após a organização do material e seleção das atividades buscamos aprofundar o conhecimento sobre os documentos. Essa é a fase de exploração do material e a ela estão associados os procedimentos de codificação dos dados. Primeiramente buscamos identificar ações referentes ao raciocínio abdutivo que orientaram os alunos no contexto de suas atividades, à luz dos referenciais teóricos adotados. Essas ações foram codificadas. Ao longo do texto, usamos códigos do tipo D.1ou D.2, que significa descritor 1, descritor 2.

Tendo em vista as análises locais apresentamos uma descrição de cada atividade e, em seguida, a análise local da mesma.

5.2.1 A Atividade: *O volume da maçã*

O tema O *volume da maçã* foi indicado aos três grupos pela pesquisadora. As informações sobre a situação-problema apresentadas aos alunos são ilustradas no quadro 5.1. Também foi entregue a cada grupo uma maçã[7], um pedaço de barbante, uma régua e uma faca. Esses instrumentos poderiam ser úteis aos alunos para a resolução do problema. O problema proposto foi elaborar estratégias para determinar o volume da maçã.

[7] A pesquisadora escolheu maçãs com tamanhos e pesos semelhantes, porém cada fruta pode ter tido medidas específicas.

Quadro 5.1- Informações para a atividade *o volume da maçã*

Atividade: O volume da maçã
Ficha BEC da maçã (BEC- Bolsa Eletrônica de Compras)

As maçãs são frutas amplamente comercializadas nos diferentes estados brasileiros. Os maiores consumidores são os estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Paraná. As frutas são classificadas, em geral, em função de seu tamanho.

Segundo a BEC da maçã, o tamanho da maçã é identificado considerando a quantidade de frutas contidas na embalagem, caixa de 18 kg.

Com relação ao tamanho, as maçãs são classificadas em: graúda, média, miúda e solto.


O tamanho Graúdo abrange lotes de peso médio superior a 200 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 72 e 100.

O tamanho Médio abrange lotes de peso médio entre 133 gramas e 164 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 110 e 135.

O tamanho Miúdo abrange lotes de peso médio entre 91 gramas e 120 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 150 e 198.

O tamanho Solto abrange lotes de peso médio entre 72 gramas e 83 gramas por fruto e de número de frutos por caixa de 18 kg entre 68 e 79.

Hoje vamos propor um desafio: calcular o tamanho de uma maçã!

Fonte: elaborado pela autora

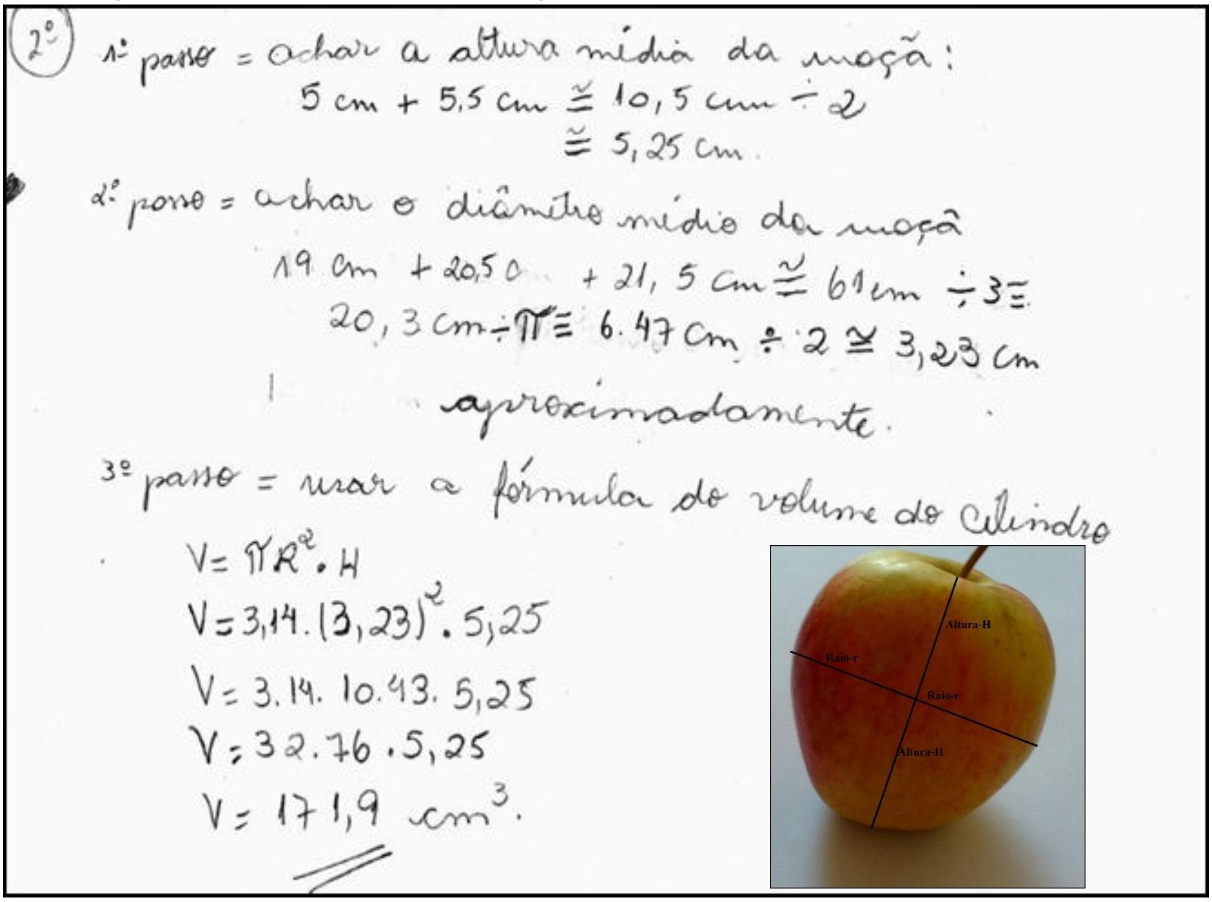
A partir da leitura do texto e usando a maçã que possuíam, cada grupo se propôs a resolver o problema: Como determinar o volume de uma maçã?

Os alunos do grupo G1 definiram então a hipótese:

H_1: A maçã tem formato de cilindro.

Tendo em vista essa hipótese, os integrantes do grupo foram em busca das medidas necessárias para o cálculo do volume como mostra a figura 5.1. Como a maçã é irregular, os alunos optaram por encontrar uma altura média e um diâmetro médio.

Figura 5.1- Modelo construído pelo grupo G1



Fonte: registro dos alunos

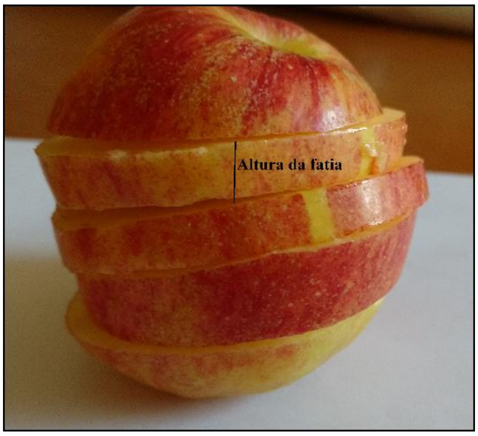
Esse grupo também tentou resolver o problema assumindo que o volume da maçã podia ser obtido calculando o volume de um sólido de revolução. Porém, os alunos não conseguiram determinar adequadamente a região que deveria girar em torno de um eixo de rotação e acabaram abandonando essa estratégia.

Os integrantes do grupo G2 cortaram a fruta em fatias e para cada fatia, assumiram a hipótese:

H_1: a fatia tem a forma de um cilindro circular reto.

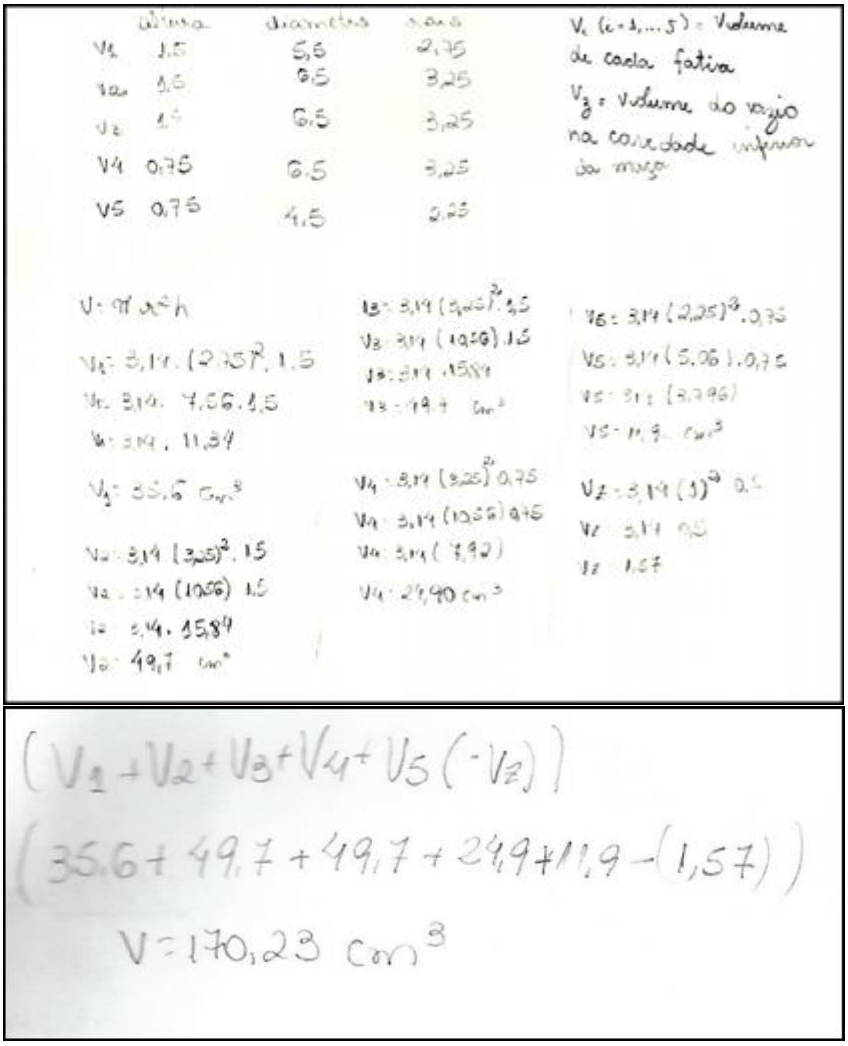
Assim, a soma do volume desses cilindros (fatias) seria o volume total da maçã. Definida a hipótese, os alunos fizeram as medidas de cada fatia, calcularam o seu volume e, posteriormente, fizeram a soma do volume de todas as fatias. O modelo matemático construído pelos alunos é ilustrado na figura 5.3. A notação usada V_i $(i = 1, \dots, 5)$ refere-se a cada uma das cinco fatias da maçã, já a notação V_z refere-se ao vazio da cavidade na parte inferior da maçã.

Figura 5.2- Maçã cortada em fatias pelos alunos de G2



Fonte: arquivo da pesquisadora

Figura 5.3- Modelo matemático construído pelos alunos de G2 com as medidas das fatias



Fonte: registro dos alunos

5.2.1.1 O raciocínio abdutivo na atividade

A análise local com relação ao raciocínio abdutivo na atividade *o volume da maçã* utiliza registros escritos e em áudio do desenvolvimento da atividade realizada pelos alunos de dois grupos, G1 e G2. Nessa atividade utilizamos os diálogos[8] realizados entre os alunos ou com a professora da turma e com a pesquisadora e registros escritos produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Os diálogos são trechos transcritos de gravações em áudio.

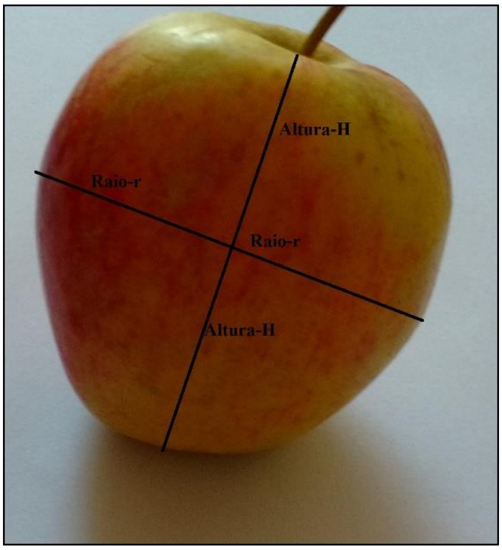
5.2.1.1.1 O grupo 1- G1

Os integrantes de G1 elaboraram a hipótese:

H_1: a maçã tem formato de cilindro.

A elaboração dessa hipótese se deu pela observação da fruta (figura 5.4), o que resultou na percepção da semelhança da fruta com o sólido geométrico cilindro.

Figura 5.4- Imagem da maçã usada pelos alunos de G1



Fonte: arquivo da pesquisadora

Podemos inferir que a elaboração dessa hipótese se deu pelo fato dos alunos já terem familiaridade com o cálculo de volume de cilindros, assim, a elaboração da hipótese pode ter se dado a partir de experiências similares e anteriores dos alunos. Os alunos, ao resgatarem esses conhecimentos já armazenados, sinalizam que a abdução visual esteve presente na atividade. Segundo Magnani (2014), a abdução visual é um tipo de abdução onde o sujeito cria

[8] Segundo o dicionário Houaiss (2009) diálogo refere-se a fala em que há a interação entre dois ou mais indivíduos; colóquio, conversa, troca de ideias.

hipóteses que são derivadas de experiências vividas. A elaboração de hipóteses baseada em conhecimentos dos alunos sobre o fenômeno em estudo, indica o que Kehle e Cunningham (2000) denominaram de modo diagnóstico do raciocínio abdutivo.

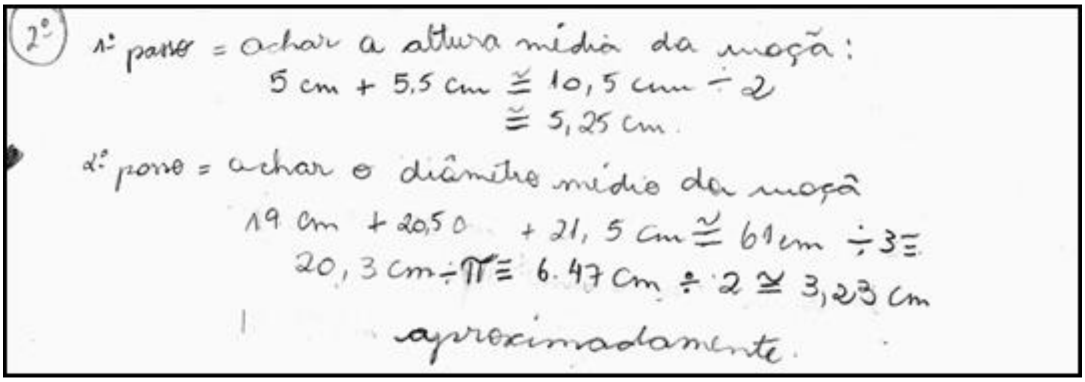
Já a comparação da maçã com um objeto matemático já conhecido por eles, caracteriza o modo analogia do raciocínio abdutivo que, segundo Kehle e Cunningham (2000), consiste na percepção de pistas que auxiliem na resolução do problema. Nesse caso, a pista é a comparação do formato da fruta a um sólido já conhecido.

Considerando a hipótese da semelhança da maçã com o cilindro circular reto cujo volume é determinado por $V = \pi r^2 h$ em que r é medida do raio e h a medida da altura do cilindro, os alunos investiram na obtenção dessas medidas para a fruta cujo volume pretendiam determinar. Os alunos perceberam que dependendo de onde se mede a maçã, ela possui medidas diferentes. Então o aluno A1 sugere uma estratégia conforme indica o trecho a seguir.

> A1: *a gente fez uma média para achar a altura, comprimento da circunferência e diâmetro. A altura medimos em dois lugares e a circunferência medimos na parte superior, no meio e na parte inferior.*

A fala de A1 indica que os alunos, ao se depararem com o problema da irregularidade da maçã, decidem fazer uma média das medidas. Para encontrar o raio eles, primeiramente, mediram o comprimento das circunferências, fizeram a média e depois usaram $C = 2\pi r$, onde C é comprimento e r o raio da maçã, conforme indica a figura 5.5.

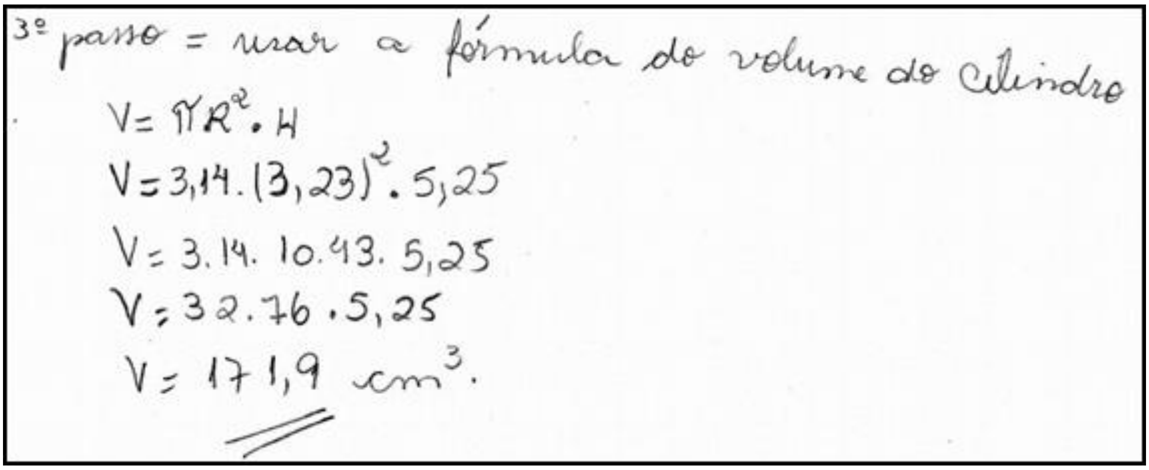
Figura 5.5- Encaminhamentos realizados pelos alunos de G1


1º
1º passo = achar a altura média da maçã:
5 cm + 5,5 cm ≅ 10,5 cm ÷ 2
≅ 5,25 cm.
2º passo = achar o diâmetro médio da maçã
19 cm + 20,50 + 21,5 cm ≅ 61 cm ÷ 3 ≅
20,3 cm ÷ π ≅ 6.47 cm ÷ 2 ≅ 3,23 cm
aproximadamente.

Fonte: Registro dos alunos

Ao perceberem que a maçã possuía alturas e circunferências diferentes e elaborarem uma estratégia para encontrar um único valor, para a circunferência e para a altura, os alunos demonstraram a percepção das informações relevantes para o problema. Tal ação sinaliza o modo sintoma do raciocínio abdutivo, que segundo Kehle e Cunningham (2000), é caracterizado pela percepção de informações relevantes ao problema. Além disso, o fato de terem feito uma média, tanto para a altura quanto para a circunferência, sinaliza o modo pista do raciocínio abdutivo, pois o cálculo da média é uma estratégia encontrada que ajudaria na resolução do problema. Com as medidas definidas, o volume da maçã foi calculado conforme indica a figura 5.6.

Figura 5.6- Resposta ao problema inicial formulada pelo grupo G1



3º passo = usar a fórmula do volume do cilindro

$V = \pi R^2 . H$

$V = 3{,}14 . (3{,}23)^2 . 5{,}25$

$V = 3.14 . 10.43 . 5{,}25$

$V = 32.76 . 5{,}25$

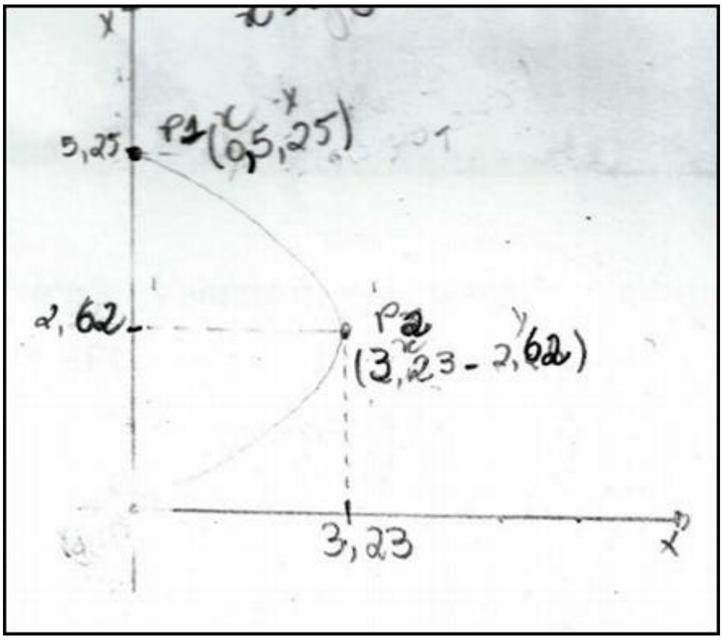
$V = 171{,}9 \ cm^3.$

Fonte: registro dos alunos

Para encontrar a resposta ao problema, os alunos tiveram suas ações orientadas pelo raciocínio dedutivo, partindo de uma premissa geral para uma premissa específica. Nesse caso, os alunos partiram do fato de que o volume de qualquer cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ e com as medidas da fruta e pela hipótese de que a maçã possuía o formato de um cilindro, obtiveram o volume da maçã.

Os alunos do G1 definiram uma segunda hipótese para calcular o volume da maçã. Por se tratar de um sólido irregular, eles concluíram que seu volume poderia ser obtido pelo cálculo de uma integral definida. O volume poderia ser obtido pela rotação de uma região R em torno de um eixo, tratando-se de um sólido de revolução. A definição dessa hipótese é um indício de raciocínio abdutivo, mais especificamente, de uma analogia. Para construir o sólido de revolução, os alunos construíram a região a ser rotacionada usando medidas da maçã, conforme indica a figura 5.7.

Figura 5.7- Construção da região a ser rotacionada na atividade desenvolvida pelos alunos de G1



Fonte: registro dos alunos

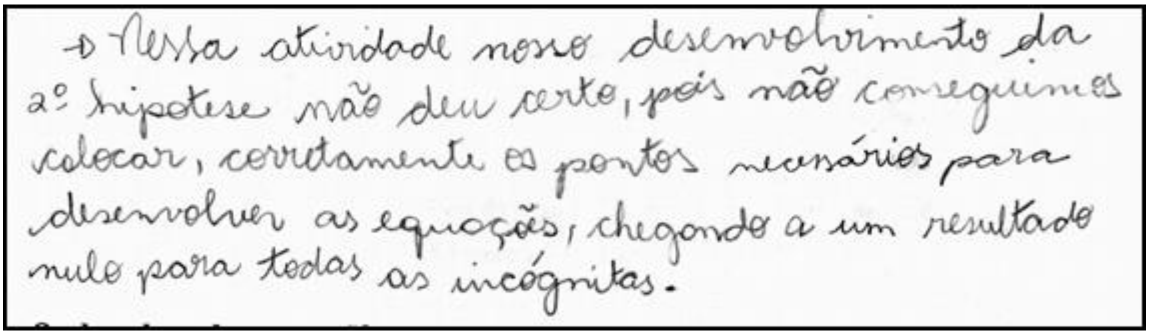
Apesar de terem escolhido os pontos, esses parecem não ter sido uma boa escolha, conforme indica o diálogo dos alunos.

P: o que vocês estão tentando encontrar?
A1: essa curva aqui (faz referência a curva indicada na figura 9)
P: vocês têm que achar essa equação.
A1: Nós achamos o ponto 1, ponto 2 e ponto 3.
P: qual é o ponto 3?
A2: zero
P: e o ponto 2?
A2: é a metade do raio e da altura.
P: aqui está tendo um problema. Aqui no ponto zero, se é zero o c da equação está dando?
A1: zero
P: mas aqui ele também deu 5,25.
A1: tem alguma coisa errada!!!

Esse diálogo sinaliza o modo do raciocínio abdutivo sintoma, pois a partir das informações que possuíam, os alunos selecionaram aquelas que eles julgaram importantes para a solução do problema, e segundo Kehle e Cunningham (2000), a seleção de informações relevantes é uma característica desse modo.

Como visto no diálogo os alunos não realizaram adequadamente as medidas da maçã para construir a região R no plano xy. Os alunos de G1 então concluíram que algum ponto estava errado, porém, como mediram esses pontos na fruta e não estavam mais com ela em mãos, não evoluíram com esse procedimento para determinar o volume da maçã. Justificaram isso no texto conforme indica a figura 5.8.

Figura 5.8- Explicação para o não desenvolvimento da segunda hipótese


→ Nessa atividade nosso desenvolvimento da 2º hipótese não deu certo, pois não conseguimos colocar, corretamente os pontos necessários para desenvolver as equações, chegando a um resultado nulo para todas as incógnitas.

Fonte: registro dos alunos

Além dessas duas hipóteses, os alunos elaboraram uma terceira conforme indica a fala de A1:

A1: sabe do outro jeito que eu tinha falado? A gente podia seccionar ela em várias fatias cilíndricas, e depois calcular o volume de cada uma. No final a gente somava todos os volumes, aí a gente teria o volume da maçã.

Apesar de terem elaborado tal hipótese, os alunos também não seguiram adiante com ela. Ainda que não tenham conseguido resolver o problema usando estas diferentes hipóteses, a própria definição delas é um indicativo da habilidade fluência, que segundo Alencar (1990), é a capacidade de gerar várias ideias sobre determinada situação.

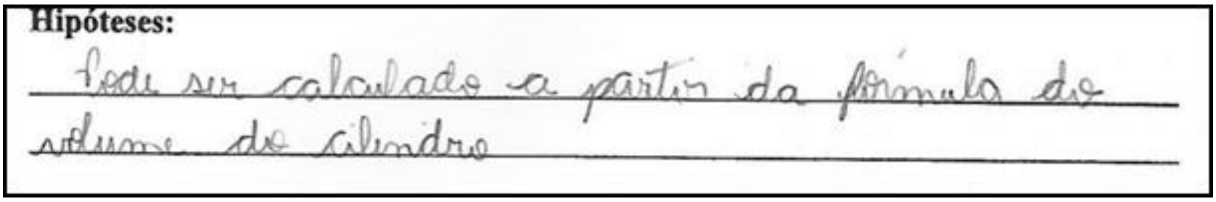
5.2.1.1.2 O grupo 2- G2

Os integrantes de G2 iniciaram uma discussão a respeito de como calcular o volume da maçã, conforme podemos observar no diálogo.

A9: qual a fórmula do volume?
P: podem pesquisar na internet, mas volume do que vocês estão procurando?
A9: do que? Da maçã.
A7: mas a maçã tem que forma?
P: isso!
A9: cilindro!!
A7: acho que é quase isso...
A9: é pode ser cilindro!

Os alunos formularam a hipótese de que o volume poderia ser calculado usando o volume de um cilindro, conforme indica a figura 5.9.

Figura 5.9-Hipótese formulada pelos alunos de G2


Hipóteses:
Pode ser calculado a partir da fórmula do volume do cilindro

Fonte: registro dos alunos

Esse diálogo e a figura 5.9 sinalizam o papel da percepção na formulação de hipóteses, visto que aquilo que os alunos percebem está carregado de interpretação, e a interpretação do fenômeno em estudo os conduz à formulação da hipótese. O fato dos alunos relacionarem a maçã ao cilindro regular indica que recorreram a um conhecimento armazenado previamente. Magnani (2014) ressalta que a recuperação de conhecimentos prévios em nossa mente é realizada por meio da percepção, e essa por sua vez, segundo o autor, é associado ao raciocínio abdutivo.

Além disso, o diálogo indica que os alunos comparam o formato da maçã a outro sólido conhecido por eles em busca de evidências que os ajudassem a resolver o problema. Assim, inferimos que a elaboração da hipótese é guiada pela analogia enquanto modo de inferência definido por Kehle e Cunningham (2000).

Formulada a hipótese, entretanto, os alunos se deparam com o fato da maçã não constituir um sólido regular, conforme indica o diálogo a seguir.

A9: tem diferença entre um cilindro regular e um irregular? Esse daqui não é regular, então a fórmula tem que ser irregular. Tem, será?
A7: não daí tem que resolver o negócio do professor L de cálculo... Mas aqui você vai ter perdas, dá para fazer por aproximação. Aqui ó... área da base vezes altura ou pi vezes o raio ao quadrado vezes altura. A gente tem pi, tem o raio e tem a altura.
A9: então esse é do cilindro regular, como que a gente faz?
A7: a gente faz por aproximação.
A9: como que faz daí?
A7: vamos cortar!
A9: pode cortar.
A7: a gente pode dividir ela assim ó...
A9: aí faz três volumes?
A7: é e depois junta.
A9: ah! Daí a altura, desse, desse e desse.
A7: é tem altura.
A9: ah!! Vai trabalhar por partes.
A7: por aproximação.
A9: entendi agora. Daí a gente faz desse volume, circunferência, raio e altura; desse volume, circunferência, raio e altura e desse volume, circunferência, raio e altura.

A7: volume desse, volume desse, volume desse e volume desse.
A9: ai junta!
A7: vai dar certinho!
A9: ah!! Entendi! Legal.

A percepção de que a maçã é um sólido irregular e que fariam aproximações para usar conceitos de volume de sólido regular sinaliza o modo pista do raciocínio abdutivo definido por Kehle e Cunningham (2000). De fato, os alunos encontram evidências de que é preciso fazer aproximações para calcular o volume da maçã usando propriedades de um cilindro regular.

Ao decidirem cortar a maçã em pequenas fatias, os alunos mudam a sua hipótese conforme ilustra a fala do aluno A7: *o volume da maçã pode ser calculado pela soma do volume de algumas fatias.* A mudança da hipótese inicial acarreta uma mudança na abordagem do problema, bem como na sua resolução, e tal fato sinaliza uma flexibilidade das ideias, ou seja, uma mudança na abordagem do problema. Alencar (1990) considera essa mudança de abordagem como sendo uma habilidade criativa.

A elaboração dessa hipótese foi fundamentada nas informações e no conhecimento dos alunos sobre o volume de sólidos. Kehle e Cunningham (2000) discutem que, quando os alunos elaboram hipóteses com base em seus conhecimentos, fica evidenciado o entendimento da situação. Assim, podemos inferir que os alunos entenderam a situação-problema que estavam estudando, uma vez que elaboraram hipóteses plausíveis. Esse fato, por sua vez, sinaliza que o modo diagnóstico do raciocínio abdutivo orientou os alunos na elaboração das hipóteses.

Após cortarem a maçã em cinco fatias eles buscam as medidas de cada uma dessas fatias. Inicialmente eles medem as circunferências, e deixam o diâmetro de lado, pois julgam que não é uma informação importante. Porém, conforme ilustra o diálogo a seguir, esses alunos percebem que a informação relevante para o problema é a medida do diâmetro e do raio, e não a medida da circunferência.

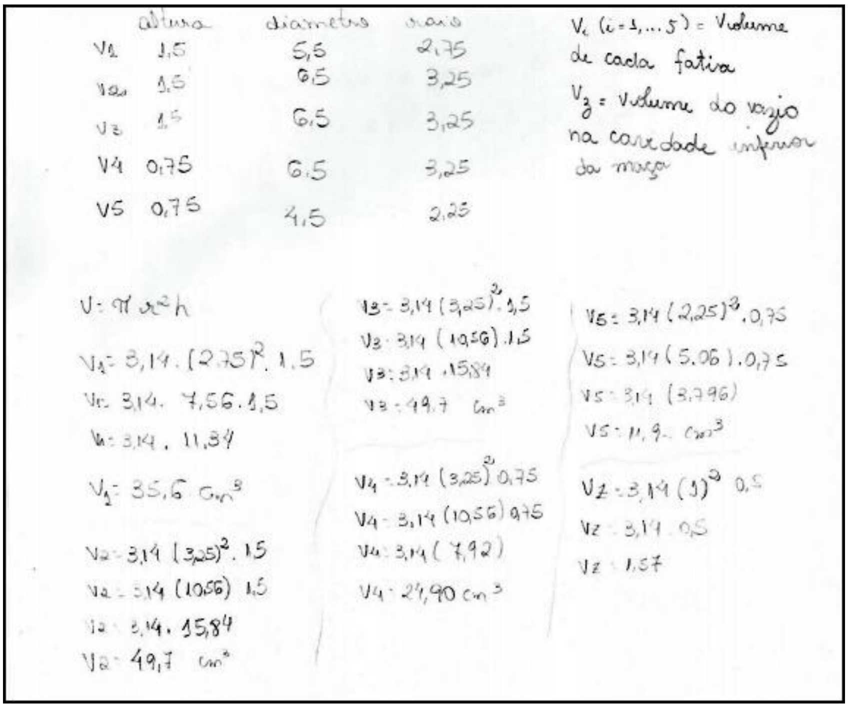
A7: põe a régua para eu medir.
A3: então está desigual aqui ó.
A9: 1,5 de cada.
A7: dá para gente pensar e fazer assim ó...
A9: o que é isso?
A7: porque está pedindo o raio, r é o raio. Não precisa de a gente ficar envolvendo assim com o barbante. Precisa?
A7 e A9: não! (Risos)
A9: quanto deu esse?
A7: 17, mas aqui a gente achou a medida da circunferência.
A9: do que a gente precisa?
A7: do raio.
A9: ah! Do diâmetro e do raio.
A7: vai, então volta aqui ó.

A9: altura, diâmetro.
A7: 5,5 é o diâmetro.
A9: e o raio?
A7: o raio é metade.
A9: 2,25

Ao responder para A9 que eles precisam é das mediadas do raio, A7 sinaliza um entendimento de quais informações eram importantes para o cálculo do volume. Outro fato que esse diálogo sinaliza é que, em princípio, a medida do raio não era uma informação relevante para o problema, o que era relevante era a medida da circunferência. De acordo com Kehle e Cunningham (2000), a percepção dos alunos de informações relevantes que em princípio pareciam irrelevantes, sinaliza o raciocínio abdutivo e seu modo sintoma.

Após todas as medições os alunos usaram a fórmula do volume do cilindro para calcular o volume de cada uma das fatias, conforme indica a figura 5.10

Figura 5.10- Procedimentos matemáticos realizado pelos alunos de G2



Fonte: Registro dos alunos

Partir da ideia de uma premissa geral, o cálculo do volume de qualquer cilindro, e chegar em uma premissa específica, nesse caso o volume das fatias da maçã, sinaliza que o raciocínio dedutivo orientou os alunos durante o desenvolvimento da atividade. O raciocínio dedutivo, nesse caso, possibilitou verificar se as hipóteses elaboradas poderiam ou não serem válidas.

Esse fato corrobora com ideia de Peirce (2015) de que a dedução desenvolve as consequências necessárias de uma hipótese.

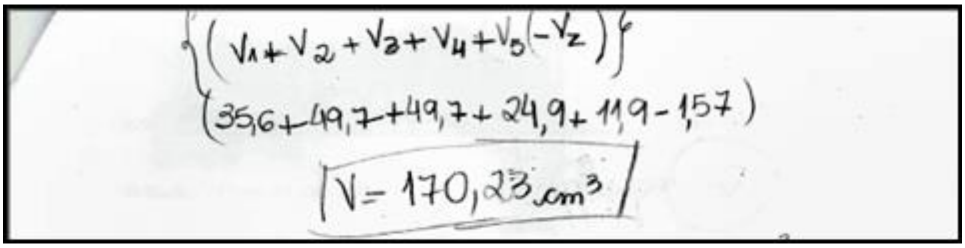
Na figura 5.10, além dos cinco volumes de cada fatia, existe um sexto volume denominado de V_z. Ao serem questionados a respeito desse volume os alunos explicam que se refere a uma fatia fictícia, como fica ilustrado no diálogo.

P: em quantas partes vocês dividiram?
A7: 5 mais ai...
A9: a gente fez um fictício.
P: por que?
A7: porque esse daqui ó, é diferente aqui em baixo. Daí a gente dividiu.
A9: para ficar mais aproximado.
A7: a gente vai fazer total e descontar o fundo aqui.
P: entendi.

Os alunos se referem à parte inferior da maçã que apresenta uma pequena cavidade. Essa informação só foi considerada pelos alunos mais tarde, quando já estavam finalizando o cálculo do volume. A percepção de uma informação importante para a elaboração do modelo indica que o modo sintoma do raciocínio abdutivo pode ter orientado as ações dos alunos.

Por fim, os alunos somaram os cinco volumes e diminuíram o volume da fatia fictícia, conforme indica a figura 5.11.

Figura 5.11- Volume da maçã



Fonte: registro dos alunos

5.2.1.2 Elementos indicativos do raciocínio abdutivo na atividade O *volume da maçã*

A seção anterior apresentou uma descrição e análise da atividade *O volume da maçã*. A partir dessa análise, e tendo como fundamento os pressupostos da Análise de Conteúdo, identificamos elementos que são indicativos de raciocínio abdutivo, conforme indica a tabela 5.4.

Tabela 5.4-Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *O volume da maçã*

O raciocínio abdutivo em atividade de modelagem matemática está associado:	**Código**	**Indícios**
à interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas	D.1	Comparação da maçã com outros sólidos, como o cilindro ou sólido de revolução.
à capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência)	D.2	Várias hipóteses diferentes sobre o assunto, como sólido de revolução ou vários cilindros.
à mudança de abordagem para o problema (flexibilidade)	D.3	Mudar de hipótese ou de abordagem durante a resolução do problema.
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4	Percepção de que era necessário o uso das medidas do raio para a resolução do problema
a demonstrações de entendimento da situação	D.5	Elaboração de hipóteses.
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6	Desenvolvimento de estratégias para a resolução do problema.
ao raciocínio dedutivo ou ao indutivo	D.7	Uso do raciocínio dedutivo, partiram da premissa do cálculo do volume de cilindro para calcular o volume da maçã.

A interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas refere-se às comparações realizadas pelos alunos para a elaboração de suas hipóteses. Essas comparações foram feitas na tentativa de aproximar o formato da maçã a um sólido já conhecido por eles.

A capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência) refere-se à quantidade de ideias que os alunos tiveram para calcular o volume da maçã. Os alunos, tanto de G2 quanto de G1, conjecturaram mais de uma maneira para o cálculo do volume da maçã. Ambos os grupos pensaram na hipótese de que o volume seria calculado por meio de um sólido de revolução ou fatiando a maçã e somando o volume das diferentes fatias.

A mudança de abordagem para o problema (flexibilidade) refere-se à mudança de abordagem do problema, ou seja, os alunos mudam de estratégia após perceberem que algo está errado, ou que a estratégia escolhida inicialmente não é a mais adequada. Um exemplo dessa mudança foi o fato dos alunos de G2 criarem a hipótese de que o volume pode ser calculado pelo volume do cilindro e depois de discussões com o grupo decidirem que o volume da maçã pode ser calculado pela soma dos volumes de algumas fatias.

A percepção de informações relevantes para o problema está associada à percepção dos alunos de quais informações são relevantes para o encaminhamento da atividade. Tal indicativo pode ser percebido quando os alunos de G2 percebem que para calcular o volume a medida que precisavam era a do raio e não a da circunferência.

As demonstrações de entendimento da situação diz respeito aos indícios que os alunos dão de que entenderam a situação-problema. Um desses indícios é o levantamento de hipóteses plausíveis para a situação. Ao levantarem hipóteses para resolver o problema, tanto os alunos de G2 quanto os alunos de G1 demonstram entendimento da situação.

A percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema diz respeito à percepção dos alunos de pistas e padrões que os auxiliassem na interpretação e resolução do problema. Uma evidência encontrada pelos alunos é a percepção de que o sólido era irregular e que seria necessário fazer aproximações para calcular o volume da maçã.

O raciocínio dedutivo ou indutivo refere-se ao uso do raciocínio dedutivo ou indutivo para comprovar ou não as hipóteses elaboradas. Nessa atividade houve indícios de que os alunos usaram o raciocínio dedutivo. Ao assumirem que a maçã era um sólido de revolução e que seu volume seria calculado tendo em vista o sólido de revolução referente à maçã, os alunos partem da premissa geral de que todos os sólidos de revolução têm tais características e chegam a conclusão que o objeto que tem em mãos era um sólido de revolução.

5.2.2 A Atividade: *O chocolate*

O tema dessa atividade foi indicado pela pesquisadora aos três grupos. As informações referentes ao tema constam no quadro 5.2. Ao contrário da atividade *O volume da maçã*, nesse momento os alunos definiram um problema a partir das informações que lhes foram fornecidas.

Quadro 5.2- Informações sobre o chocolate

Atividade: O chocolate
O chocolate é um alimento consumido no mundo inteiro. De acordo com Santiago[9] os primeiros a consumir chocolate regularmente foram os membros da civilização Olmeca, habitantes dos atuais México e Guatemala, por volta de 1500 a.C. Posteriormente, Maias e Astecas povos da mesma área, desenvolvem o costume de beber chocolate, produto considerado sagrado. As sementes eram torradas e misturadas a iguarias, como por exemplo, pimenta. Nas cerimônias religiosas, o cacau torrado era servido com especiarias e mel. O chocolate é um alimento derivado do cacau. Segundo Mindel[10], lar original do cacau ficava nas florestas da região do Amazonas no Brasil, ou na região do Orinoco, na Venezuela. Ambos são rios famosos na América do Sul. Colombo, que descobriu a América, teve a oportunidade, durante sua 4ª viagem à América, de conhecer os grãos de cacau, mas não lhes deu atenção. Segundo a Associação Internacional do Cacau o Brasil é o maior produtor de cacau da América.

Fonte: elaborado pela autora

Além dessas informações a pesquisadora levou uma reportagem (quadro 5.3) cuja temática era a possível extinção do chocolate.

Quadro 5.3-Reportagem sobre o chocolate

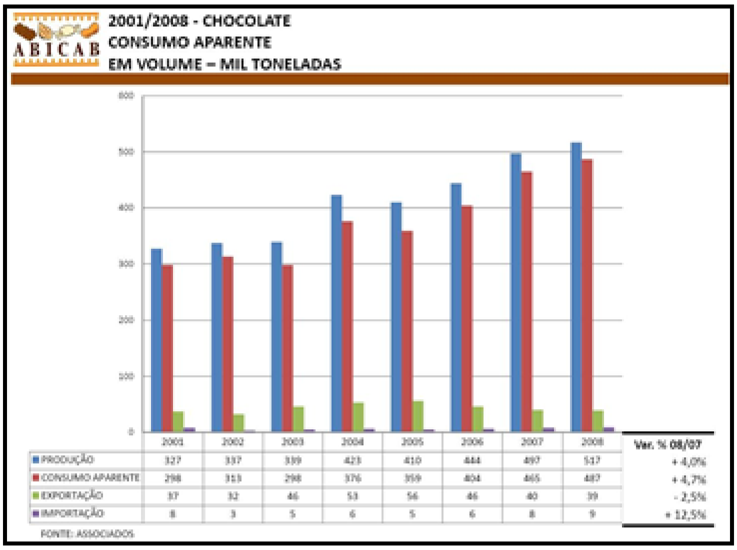
Fabricantes alertam que chocolate pode acabar em 2020
Escassez de cacau e aumento da demanda explicam o alerta. Crise começou em 2012, quando o preço do cacau subiu 60%.
Grandes fabricantes de chocolate alertam que o produto pode sumir das prateleiras. O principal motivo é a escassez de cacau. O oeste da África, que abastece a indústria do chocolate, tem sofrido muito com a seca nos últimos anos. Para piorar, houve uma praga que destruiu 40% das plantações. Sem dinheiro, muitos fazendeiros, em vez de insistirem no cacau, decidiram apostar em outros produtos, como o milho. Mas a escassez não é o único motivo. As pessoas estão comendo muito mais chocolate do que a indústria consegue produzir. Na China e no Brasil, particularmente, o consumo tem aumentado demais a cada ano. Um terceiro motivo é ligado ao paladar. A demanda por chocolate amargo também está em alta. Enquanto uma barra de chocolate ao leite tem 10% de cacau, o chocolate amargo tem 70%. A crise com o chocolate começou em 2012, quando o preço do cacau subiu 60%. Nesta semana, dois grandes fabricantes alertaram que vai faltar chocolate em 2020, se não houver nenhuma grande mudança ou revolução. Na África, há um grupo de pesquisa de agricultura que está desenvolvendo uma nova espécie de árvore capaz de produzir sete vezes mais cacau do que uma árvore comum, mas o gosto não vai ser exatamente o mesmo.
19/11/2014 15h19 - Atualizado em 19/11/2014 15h24 <disponível em http://g1.globo.com/globo-news/noticia/2014/11/fabricantes-alertam-que-chocolate-pode-acabar-em-2020.html acessado dia 29/03>

Fonte: elaborado pela autora

[9] Disponível em: http://www.infoescola.com/alimentos/chocolate/ acessado dia 30/03/2015
[10] Disponível em: http://www.chabad.org.br/biblioteca/artigos/chocolate/home.html acessado dia 30/03/2015

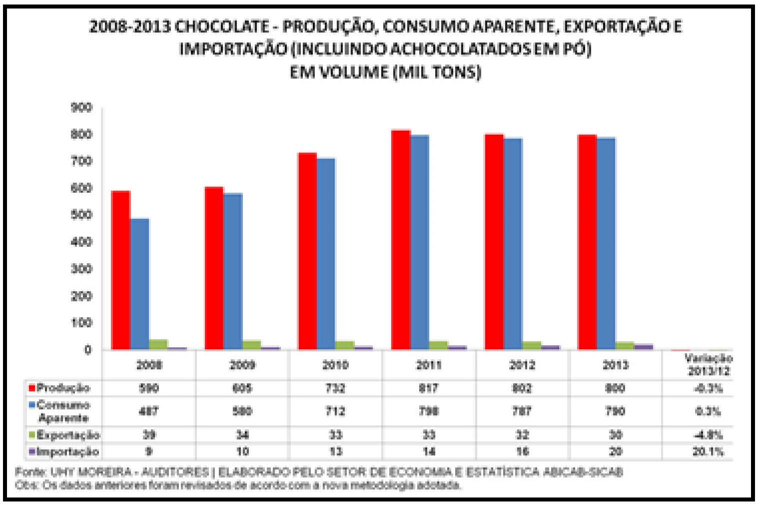
Gráficos da Associação Brasileira da Indústria de Chocolates, Cacau, Amendoim, Balas e Derivados –ABICAB que mostram o consumo e produção de chocolate no Brasil no período de 2001-2013 compuseram o conjunto de informações que foram entregues aos alunos. As figuras 5.12 e 5.13 correspondem aos gráficos que foram incluídas nessas informações.

Figura 5.12- Consumo de chocolate 2001/2008



Fonte: http://www.abicab.org.br/associado-chocolate-e-cacau/estatisticas/

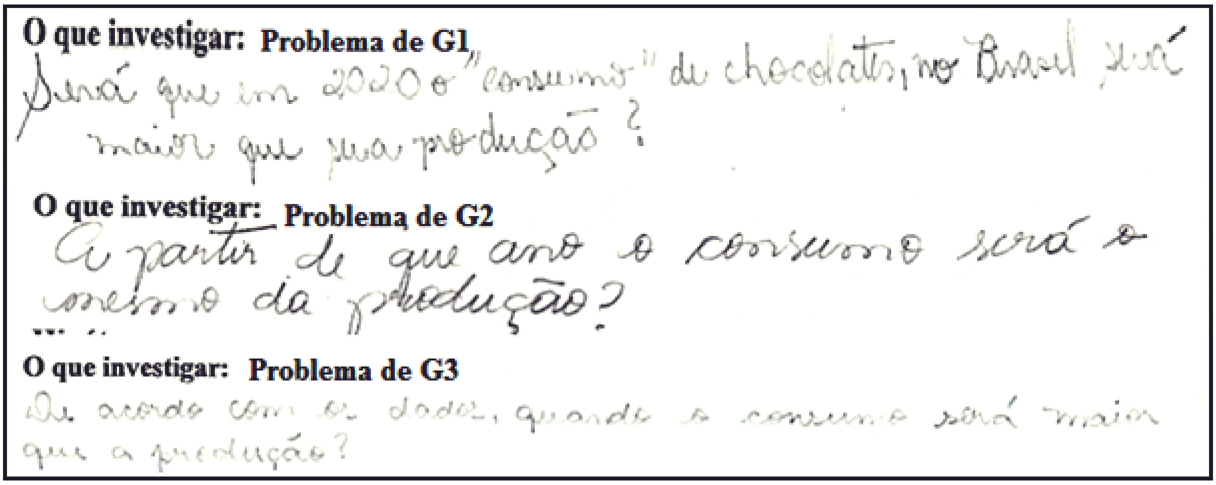
Figura 5.13- Consumo de chocolate 2008/2013



Fonte: http://www.abicab.org.br/associado-chocolate-e-cacau/estatisticas/

Após lerem as informações G1, G2 e G3 elaboraram problemas, hipóteses, e estratégias de resolução diferentes. Os problemas elaborados por cada grupo são ilustrados na figura 5.14

Figura 5.14- Problemas propostos pelos três grupos



O que investigar: **Problema de G1**

Será que em 2020 o "consumo" de chocolate, no Brasil será maior que sua produção?

O que investigar: **Problema de G2**

A partir de que ano o consumo será o mesmo da produção?

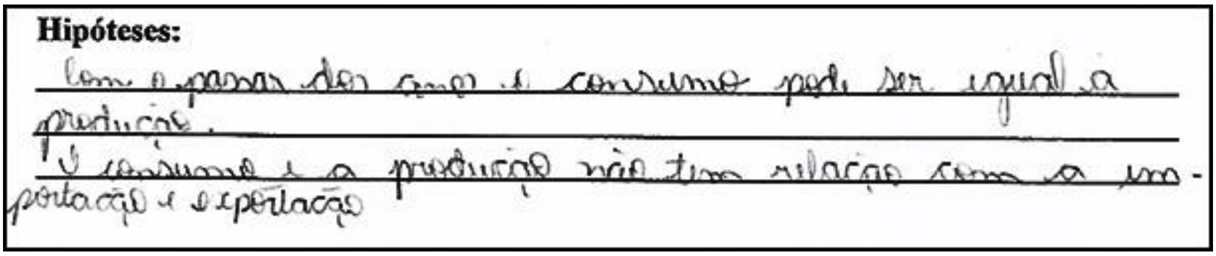
O que investigar: **Problema de G3**

De acordo com os dados, quando o consumo será maior que a produção?

Fonte: registro dos alunos

Apresentamos aqui a descrição da resolução de G2. Os alunos desse grupo definiram as hipóteses conforme mostra a figura 5.15.

Figura 5.15- Hipóteses elaboradas pelo grupo G2



Hipóteses:

Com o passar dos anos o consumo pode ser igual à produção.

O consumo e a produção não tem relação com a importação e exportação

Fonte: registro dos alunos

Para determinar o consumo e a produção de chocolate, os alunos definiram as variáveis:

t = tempo (anos);

n = *t*-2008 (variável auxiliar);

P(n) = produção;

C(n) = consumo.

Os alunos então usaram a estratégia de construir duas funções, uma para o consumo em relação ao tempo e outra para a produção em relação ao tempo. Primeiramente eles decidiram observar as razões $\left(\frac{\Delta P}{\Delta n}\right)$ e $\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$ e $(\frac{C_{n+1}}{C_n})$. A figura 5.16 ilustra os procedimentos dos alunos para encontrar as funções que representam os dados referentes ao consumo e à produção, sendo que nessa figura a razão $\left(\frac{\Delta P}{\Delta n}\right)$ é representado na terceira coluna, a razão $\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$ na quarta coluna e a razão $(\frac{C_{n+1}}{C_n})$ na última coluna.

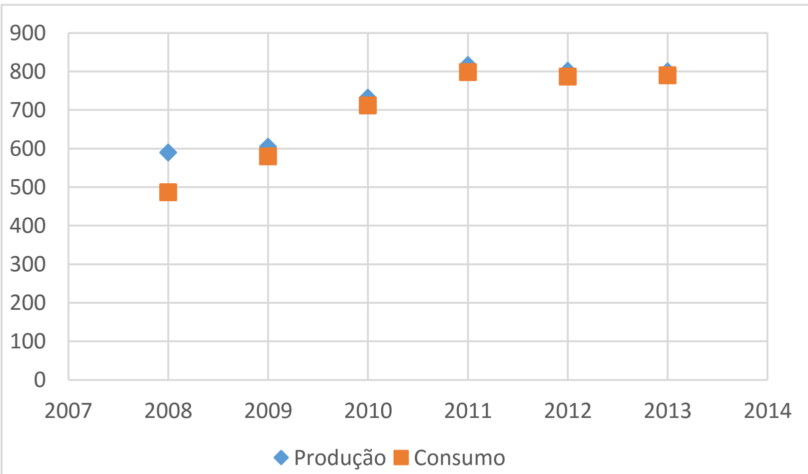
Figura 5.16- Procedimentos para encontrar as funções de consumo e produção em relação ao tempo

Ano (t)	Produção (p)	Variação	Razão (q)	Consumo (c)	Razão
2008	590	15	1,02	487	1,19
2009	605	127	1,21	580	1,23
2010	732	85	1,12	712	1,12
2011	817	-15	0,98	798	0,98
2012	802	2	1,0	787	1,00
2013	800			790	

Fonte: registro dos alunos

Além do cálculo das razões indicadas na figura 5.16 os alunos também fizeram uma representação gráfica com a ajuda do Excel, conforme indica figura 5.17. Os alunos optaram por representar os dados por meio de uma função exponencial, levando em consideração as colunas quatro e seis da figura 5.16 e a representação gráfica. Decidiram que uma função exponencial poderia ser construída, tanto para o consumo quanto para a produção.

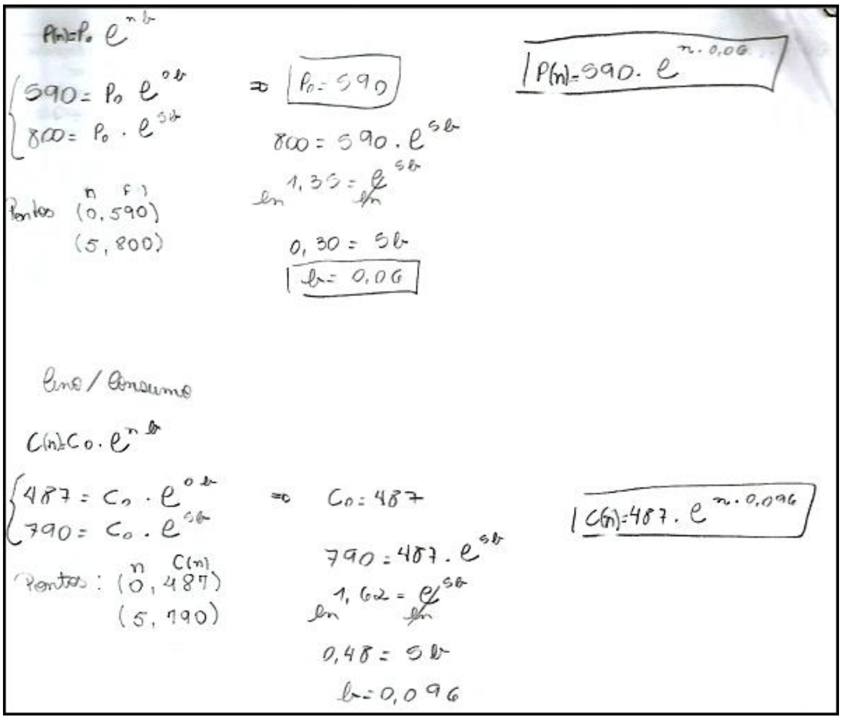
Figura 5.17- Representação gráfica dos dados referentes ao consumo e à produção



Fonte: registro dos alunos

Para construir a função os alunos escolheram dois pontos representados na figura 5.13, tanto para a função do consumo quanto para a função da produção. Foi sugerido que usassem o método dos mínimos quadrados, para o ajuste das funções, porém os alunos não acataram essa sugestão. A figura 5.18 ilustra a construção do modelo matemático realizado por G2.

Figura 5.18- Construção do modelo matemático realizado pelos alunos de G2



Fonte: registro dos alunos

Como o problema dos alunos era determinar a partir de qual ano o consumo seria igual à produção, eles igualaram as duas funções *C(n)* e *P(n)* e concluíram que em $n = 5{,}30$ o consumo é igual a produção. Concluíram então que no ano de 2014 o consumo havia sido igual à produção de chocolate no Brasil.

Para validar os modelos, compararam os dados observados com os dados obtidos pelo modelo, conforme ilustra a figura 5.19. A comparação desses dados foi feita com a ajuda do software Excel.

Figura 5.19- Validação do modelo matemático construído pelos alunos de G2

=590*(EXP(0,06*(A10-2008)))

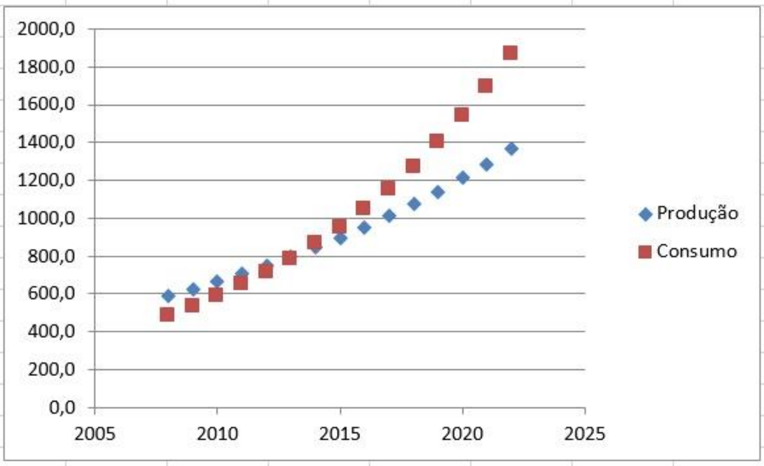
A	B	C	D	E
Tempo	Produção	Validação	Consumo	Validação
2008	590	590,0	487	487,0
2009	605	626,5	580	536,1
2010	732	665,2	712	590,1
2011	817	706,4	798	649,5
2012	802	750,0	787	715,0
2013	800	796,4	790	787,0

Fonte: registro dos alunos

De acordo com o modelo encontrado, em 2014 o consumo já havia sido igual à produção. De posse dessas informações os alunos resolveram verificar o que havia acontecido depois de 2014, ou seja, o consumo teria ultrapassado a produção no ano de 2015, ou vice-e-versa. Para fazerem essa verificação eles usaram software Excel. A partir do modelo matemático construído os alunos fizeram uma previsão até 2022 para ver o que acontece com as duas curvas (figura 5.20). Eles então percebem que o consumo vai continuar superando a produção até 2022.

Figura 5.20- Previsão para o que vem acontecendo a partir de 2014

Ano	Produção	Consumo
2008	590,0	487,0
2009	626,5	536,1
2010	665,2	590,1
2011	706,4	649,5
2012	750,0	715,0
2013	796,4	787,0
2014	845,7	866,3
2015	898,0	953,6
2016	953,5	1049,7
2017	1012,4	1155,5
2018	1075,1	1271,9
2019	1141,5	1400,1
2020	1212,1	1541,1
2021	1287,1	1696,4
2022	1366,7	1867,3



Fonte: registro dos alunos

É importante lembrar que o gráfico representado na figura 5.20 é referente ao consumo e produção brasileiros. Como o consumo já vem ultrapassando a produção, uma possibilidade é que a quantidade de chocolate importado tenha aumentado.

5.2.2.1 O raciocínio abdutivo na atividade

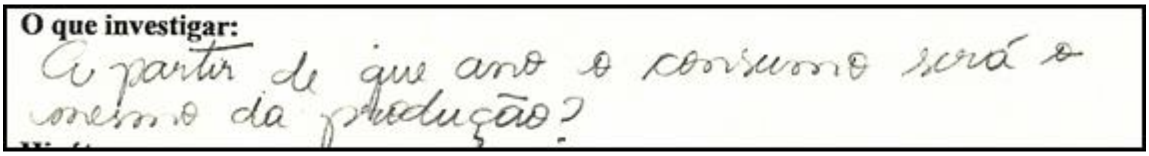
A análise local com relação ao raciocínio abdutivo dos alunos na atividade *O chocolate* utiliza registros escritos e em áudio do desenvolvimento da atividade realizada por G2.

Após a leitura das informações contidas nos quadros, os alunos de G2 iniciaram uma discussão a respeito do que investigar, conforme indica o diálogo a seguir.

> *P2: Aqui o que vocês acham que dá para investigar?*
> *A7: eu acho que dá para investigar em relação a produção, só que eu não sei. Com relação a produção o consumo, aqui ó está ficando quase igual, está vendo?*
> *P2: se vai igualar?*
> *A7: foi igualando, igualando, será que vai... Não tem jeito do consumo aumentar uma coisa que não tem, se não produz né.*
> *A9: daí o que acontece que vai faltar. Vai chegar um momento que vai faltar porque o que foi produzido não foi o suficiente.*
> *P2: Então aparentemente está tendendo a se aproximar o consumo da produção...*
> *A9: vai chegar uma hora que o consumo e a produção vai ser o mesmo e depois um vai ser maior que o outro.*
> *P2: então vocês conseguiriam descobrir também quando que vai começar a faltar.*

Magnani (2014) argumenta que as percepções são inferências que podemos aceitar ou cuidadosamente avaliar. A fala de A9 (*vai chegar uma hora que o consumo e a produção vai ser o mesmo e depois um vai ser maior que o outro)* ilustra tal inferência uma vez que o aluno infere sobre o comportamento da produção e do consumo a partir dos gráficos (figuras 5.12 e 5.13) que possuíam, e avaliar se tal inferência pode ser aceita ou não é o que instiga os alunos a formularem um problema, conforme indica a figura 5.21. A percepção de evidências para identificação do problema é uma característica do modo palpite do raciocínio abdutivo. Assim inferimos que tal modo orientou as ações dos alunos nesse momento da atividade.

Figura 5.21- Problema proposto pelos alunos de G2


O que investigar:
A partir de que ano o consumo será o mesmo da produção?

Fonte: registro dos alunos

O problema proposto pelos alunos sinaliza a habilidade criativa de reconhecer problemas, que segundo Alencar (1990), é caracterizada pela elaboração de problemas a partir de informações sobre uma situação-problema.

Em outro diálogo os alunos de G2 discutem quais informações levar em consideração para resolver o problema.

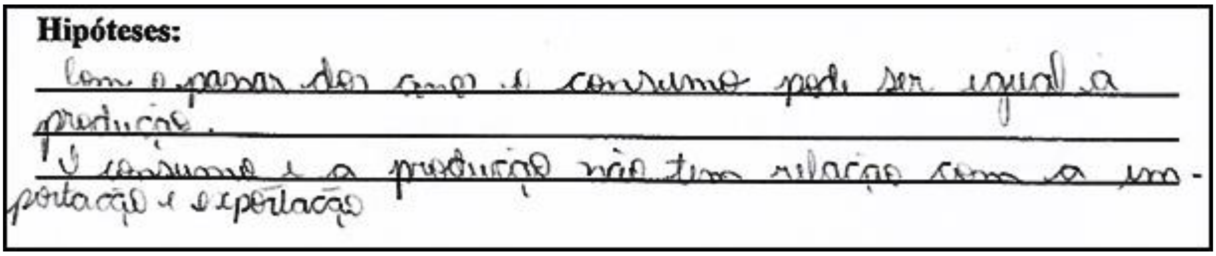
A9: e daí a exportação e importação a gente vai ignorar?
A3: produção e consumo só brasileiro, então a gente ignora a importação?
P2: é ai teria que ser as simplificações né. Eu penso que vocês poderiam ignorar a importação e exportação ou acrescentar no consumo, porque eles são consumidos.
A7: mas ai se eu aumentar no consumo, já vai passar ou quase que igualar.
A3: mas aumenta muito pouquinho né, 8, 3...

As discussões sobre a relevância dos dados referentes à exportação e importação para o problema proposto sinaliza o modo sintoma do raciocínio abdutivo, pois segundo Kehle e Cunningham (2000), esse modo é caracterizado pela seleção de informações relevantes ao problema após uma análise das informações referentes à situação-problema. As discussões acima foram feitas durante a elaboração do problema, o que corrobora com as argumentações de Kehle e Cunningham (2000) de que o modo sintoma, geralmente, se manifesta durante a transição da situação-problema para a identificação do problema.

Definido o problema os alunos partiram para a elaboração de hipóteses que orientariam a construção de um modelo matemático para a situação, conforme indicam as argumentações a seguir e a figura 5.22.

A7: Qual a hipótese?
A3: eu coloquei que uma hipótese é que o consumo vai ser maior que a produção.
A3: o que a gente está procurando?
A7: a partir de qual ano o consumo vai ser o mesmo que a produção?
A9: com o passar dos anos o consumo se iguala a produção é uma hipótese.
A9: a gente vai analisar dois, a produção e o consumo.
A3: não, a gente vai analisar, a produção, o consumo e o ano, é três.

Figura 5.22- Hipóteses elaboradas pelos alunos de G2


Hipóteses:
Com o passar dos anos o consumo pode ser igual a produção.
O consumo e a produção não tem relação com a importação e exportação

Fonte: registro dos alunos

O diálogo acima evidencia o entendimento da situação, uma vez que os alunos elaboraram hipóteses a partir da interpretação dos dados que possuíam. Essa formulação de hipóteses é um indício de raciocínio abdutivo no desenvolvimento da atividade uma vez que representa um processo criativo que, na verdade, vai orientar o desenvolvimento da atividade.

As assertivas de A3 e A9 no diálogo anterior indicam a compreensão da situação por esses alunos e também evidenciam pistas sobre como resolver o problema, uma vez que entendem que identificar quando o consumo e a produção são iguais requer analisar o consumo e a produção em relação ao tempo. Tal fato nos permite inferir que o modo pista do raciocínio abdutivo orientou os alunos nesse momento, pois, de acordo com Kehle e Cunningham (2000), esse modo é caracterizado pela percepção de evidências que auxiliem na resolução do problema.

A definição das variáveis no problema também foi mediada por uma discussão entre os participantes de G2, conforme mostra o diálogo a seguir.

P: e ai, qual é o problema de vocês?
A7:a partir de qual ano, o consumo vai ser o mesmo ou próximo da produção?
P: o que vocês vão levar em consideração?
A7: o ano e a produção.
P: só isso?
A9: e o consumo.
P: vocês vão levar em consideração a exportação e a importação?
A7 e A9: Não!!
P: então o que vocês me falaram, que vão ter produção ano e consumo. Três variáveis.
A9: sim
P: uma função só para as três?
A7: Não.
A3: vai ser uma função para a produção e uma função para o consumo.
A9: ano para produção e ano para consumo.

O aluno A3, ao falar que será preciso construir uma função para a produção e outra para o consumo, indica um possível procedimento para a resolução do problema. Kehle e Cunningham (2000) entendem que quando os alunos identificam possíveis padrões ou procedimentos para a resolução do problema, o modo pista do raciocínio abdutivo orienta suas ações. O fato de definirem três variáveis também indica a percepção de informações relevantes para o problema, visto que, as funções que os alunos vão ajustar os dados dependem dessas variáveis. Tal fato é indício do modo sintoma do raciocínio abdutivo.

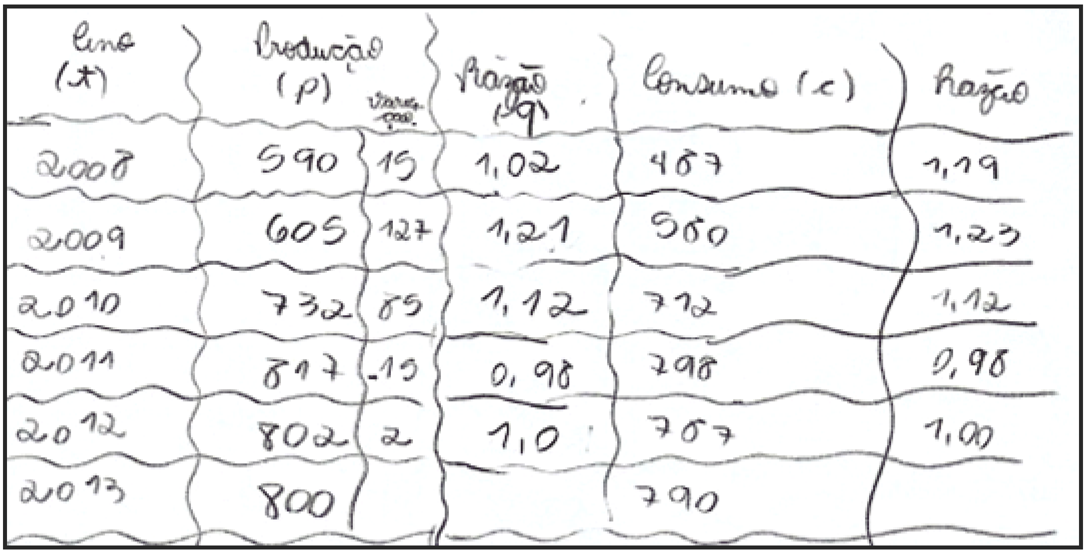
Ao decidirem que seria preciso fazer duas funções os alunos precisavam decidir qual tipo de função usariam para representar os dados que possuíam; o trecho a seguir ilustra uma discussão dos alunos a respeito disso.

P2: vocês vão encontrar uma função da produção em relação ao tempo e uma função do consumo em relação tempo?
A7: é duas! Não sei como.
A9: também não.
P2: claro que sabe.
A9: a gente tem esses dados e agora o que a gente analisa?
P2: exatamente isso. Vocês vão encontrar uma função desse em função desse (refere-se aos dados nos gráficos do consumo e do tempo). Você precisa saber se essa função vai ser linear, exponencial, logística. Naquela atividade que a gente fez, nós analisamos se a variação seria linear e se a variação seria exponencial. Então vocês sabem fazer essa análise..

A9: Mesmo que estiver aumentando eu tenho que analisar para ver se é exponencial ou linear?
P2: sim, porque as duas aumentam.
A9: porque a exponencial, aumenta rápido. E a linear?
P2: aumenta também, mais devagar do que a exponencial.
A9: a única diferença é isso?
P2: a linear vai aumentar o mesmo tanto toda vez, e exponencial vai multiplicar o mesmo tanto, então ela aumenta mais rápido. Tem exponencial que tem, que chega em um limite, ou seja, ela se estabiliza, tipo exponencial assintótica.
A9: pode ser linear ou exponencial.

O diálogo entre os alunos e a professora da turma nos permite inferir que o modo analogia do raciocínio abdutivo orientou os alunos, pois identificaram uma forma para decidir qual função seria usada para descrever o fenômeno. Além disso, os alunos fizeram uma comparação do que aprenderam em outras atividades com aquela situação que possuíam, e tal fato, segundo Kehle e Cunningham (2000), indica o modo analogia. A figura 5.23 ilustra o procedimento utilizado para construir as funções referentes à produção e ao consumo.

Figura 5.23- Procedimento utilizado para construir as funções



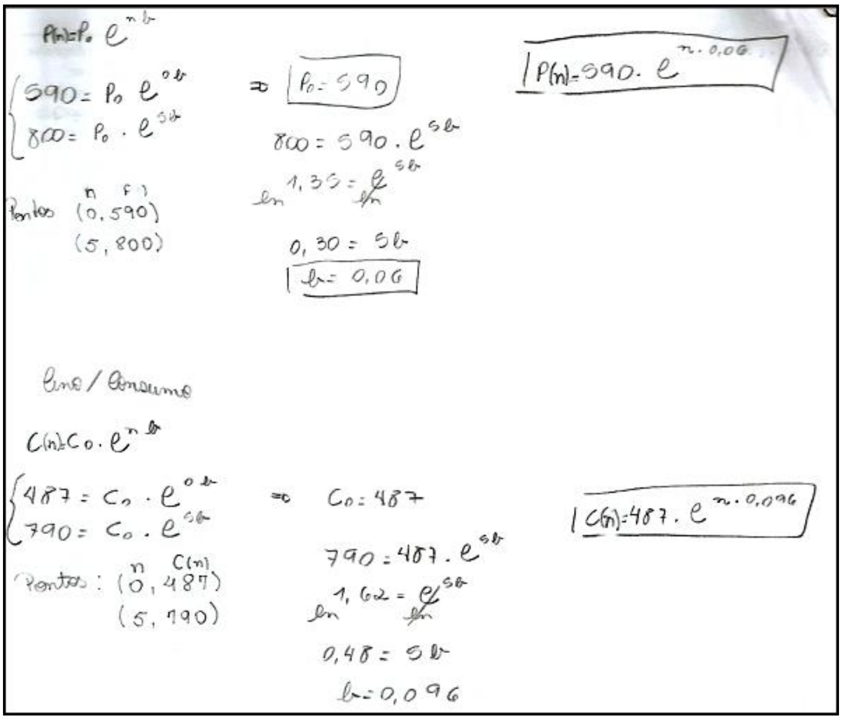
Ano (t)	Produção (p)	variação	Razão (q)	Consumo (c)	Razão
2008	590	15	1,02	487	1,19
2009	605	127	1,21	580	1,23
2010	732	85	1,12	712	1,12
2011	817	-15	0,98	798	0,98
2012	802	2	1,0	787	1,00
2013	800			790	

Fonte: registro dos alunos

Ao utilizarem a variação para verificar se a função seria linear e para verificar se a função seria exponencial, os alunos de G2 partiram da premissa geral que todas as funções do tipo linear possuem uma variação constante e que todas as funções do tipo exponencial possuem uma razão constante para, nos dados específicos, usar essa premissa. Isso é um indicativo de que o raciocínio dedutivo orientou as ações dos alunos.

Para a resolução do problema os alunos optaram por escolher entre duas funções para representar o fenômeno, ou a função exponencial ou a função linear. Após fazerem verificações, conforme indica a figura 5.23, os alunos decidem usar a função exponencial. Os cálculos feitos pelos alunos são ilustrados na figura 5.24. Esses alunos decidiram encontrar a expressão que representasse os dados por meio de um sistema de equações exponenciais e para isso foram escolhidos dois pontos da figura 5.13. Apesar de terem a opção de encontrar a função por meio do método dos mínimos quadrados, para usar todos os pontos no intervalo de tempo definido, optaram pela utilização de apenas dois pontos.

Figura 5.24- Construção do modelo matemático realizado pelos alunos de G2



Fonte: registro dos alunos

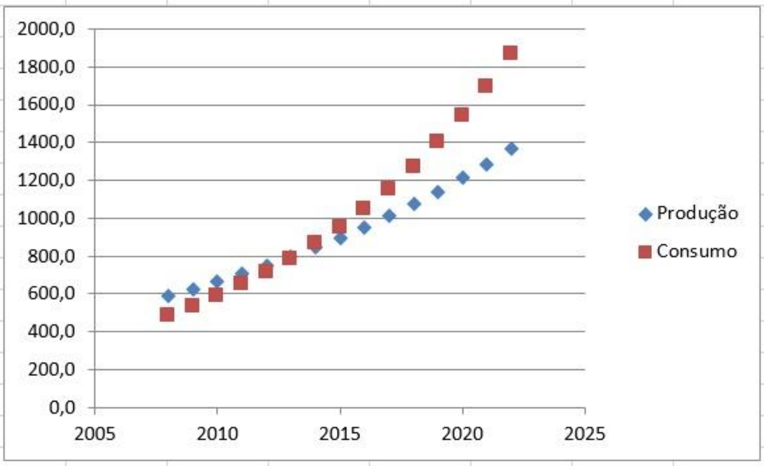
O diálogo a seguir ilustra as discussões dos alunos com relação à interpretação das duas funções construídas.

P: qual a sua pergunta?
A7: A partir de qual ano o consumo vai ser o mesmo ou próximo da produção?
P: então como você vai fazer isso?
A3: ah então, a gente tem que achar as duas e igualar depois.
A7: vai ser no ano 5.30. Ai meu deus está mais perto do que a gente imaginava.
A9: meus filhos não verão chocolate.
P: não é que eles não vão ver, qual a pergunta de vocês?
A9: Em que ano o consumo vai ser igual a produção?
P: em que ano gente?
A7: 2014!! Já foi!!
P: e o que vai acontecer depois?

O trecho acima e a figura 5.24 nos permitem inferir que os alunos usaram as hipóteses para fundamentar a construção do modelo, usaram métodos e técnicas para a construção do modelo, bem como interpretaram os resultados obtidos. Segundo Kehle e Cunningham (2000), essas ações caracterizam o modo explicação do raciocínio abdutivo. Outra característica desse modo é o uso de diferentes representações, e tal fato pode ser observado nos registros dos alunos, uma vez que usaram registro tabular, registro algébrico e registro gráfico (figura 5.25). O registro gráfico teve a intenção de observar o que aconteceria depois do ano de 2014, ou seja, na verdade, o que já vem acontecendo.

Figura 5.25- Previsão para o que vem acontecendo a partir de 2014

Ano	Produção	Consumo
2008	590,0	487,0
2009	626,5	536,1
2010	665,2	590,1
2011	706,4	649,5
2012	750,0	715,0
2013	796,4	787,0
2014	845,7	866,3
2015	898,0	953,6
2016	953,5	1049,7
2017	1012,4	1155,5
2018	1075,1	1271,9
2019	1141,5	1400,1
2020	1212,1	1541,1
2021	1287,1	1696,4
2022	1366,7	1867,3



Fonte: registro dos alunos

Alencar (1990) argumenta que existe uma habilidade criativa denominada elaboração, e esta diz respeito aos detalhes com que determinada ideia é explicitada. Nesse sentido, a construção de diferentes representações pelos alunos é um indício dessa habilidade criativa.

A figura 5.25, mostra que o consumo a partir de determinado ano ultrapassa a produção, o que confirma a hipótese inicial de que, com o passar dos anos, o consumo pode ser igual a produção. Porém o gráfico vai além dessa hipótese e mostra que não só é igual em determinado ano, mas que o consumo ultrapassa a produção.

Nesse contexto, Peirce (2015) entende que o raciocínio abdutivo mostra que alguma coisa pode ser, ou seja, cria possibilidades que são avaliadas. Tendo em vista essa argumentação de Peirce e os registros de áudio e escrito dos alunos inferimos que o raciocínio abdutivo esteve presente no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

5.2.2.2 Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *O chocolate*

A seção anterior apresentou uma descrição e análise da atividade *O chocolate*. A partir dessa análise e, tendo como fundamento os pressupostos da Análise de Conteúdo, identificamos elementos que são indicativos de raciocínio abdutivo na atividade, conforme indica a tabela 5.5.

Tabela 5.5-Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *O chocolate*

O raciocínio abdutivo em atividade de modelagem matemática está associado:	Código	Indícios
à interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas	D.1	Uso da razão para descobrir qual função representava os dados.
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4	A ideia de descartar a exportação e importação para resolver o problema.
a demonstrações de entendimento da situação	D.5	Elaboração das hipóteses.
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6	Elaborarem duas funções para resolver o problema.
ao raciocínio dedutivo ou ao raciocínio indutivo	D.7	Uso do raciocínio dedutivo é evidenciado ao construírem uma função exponencial para representar os dados que possuíam.
à percepção de evidências para a formulação do problema	D.8	Uma evidência encontrada pelos alunos para a identificação do problema foram os gráficos que representavam o consumo e produção de chocolate no Brasil.
à habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema	D.9	Formulação do problema.
à capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração)	D.10	Uso de registro algébrico, tabular e gráfico para resolver o problema.

A interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas refere-se ao uso de comparações da situação estudada com alguma outra situação já experienciada. Por exemplo, os alunos G2 fazem uso razão $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ para descobrir qual função representava os dados que possuíam. Tal estratégia havia sido utilizada em atividades anteriores.

A percepção de informações relevantes para o problema diz respeito à seleção de informações que auxiliassem na resolução do problema, por exemplo, o fato de deixarem de lado os dados referentes à exportação e importação de chocolate.

As demonstrações de entendimento da situação referem-se aos indícios que os alunos manifestam de que entenderam o problema. Um desses indícios é a elaboração das hipóteses para o problema.

A percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema diz respeito às evidências encontradas pelos alunos para auxiliar na resolução do problema. Nessa atividade uma das evidências é a elaboração de duas funções para resolver o problema proposto.

O raciocínio dedutivo ou o raciocínio indutivo refere-se a indícios que um desses dois raciocínios orientaram as ações dos alunos. No caso dessa atividade identificamos indícios de que o raciocínio dedutivo orientou as ações dos alunos.

A percepção de evidências para a formulação do problema refere-se à percepção de evidências e de informações que auxiliam os alunos na identificação do problema, por exemplo, os gráficos ilustrados nas figuras 5.12 e 5.13.

A habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema refere-se à habilidade do aluno de reconhecer um problema dada uma situação-problema. Tal habilidade fica evidente na definição do problema a partir das informações que possuíam.

A capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração) refere-se à variedade de detalhes sobre uma ideia. No caso dessa atividade esses detalhes são os vários tipos de representação usados pelos alunos durante a atividade.

Nessa atividade não identificamos indícios dos seguintes elementos indicativos de raciocínio abdutivo: *a capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência)* e *a mudança de abordagem para o problema (flexibilidade).*

5.2.3 A atividade: *A emissão de CO_2 dos carros de uma família*

Assim como na atividade anterior, o tema dessa atividade foi sugerido pela pesquisadora aos três grupos. Os alunos eram responsáveis pela elaboração e resolução do problema. Primeiramente foi entregue aos alunos uma reportagem sobre a emissão de gases por veículos, conforme indica o quadro 5.4.

Quadro 5.4 -Informações sobre emissões de gases

Atividade: A emissão de CO_2 pelos veículos de uma família

Emissões brasileiras de gases estufa aumentaram 7,8% em 2013

Novo estudo constatou que as mudanças de emissões estão relacionadas ao desmatamento e à geração de energia, com o maior uso de termelétricas.

As emissões brasileiras de gases do efeito estufa aumentaram 7,8% em 2013, comparado ao ano anterior. Os dados, divulgados nesta quarta-feira, são do Seeg (Sistema de Estimativa de Emissões de Gases do Efeito Estufa), sistema paralelo ao do governo federal. Isso significa que a quantidade emitida aumentou de 1,45 bilhão de toneladas de CO_2 equivalente (medida usada para comparar emissões de gases do efeito estufa, com base no dióxido de carbono) para 1,56 bilhão.

O novo estudo constatou que as mudanças de emissões estão relacionadas ao desmatamento e à geração de energia, com o maior uso de termelétricas, que necessitam de combustíveis fósseis. O total de emissões por pessoa atingiu 7,8 toneladas de CO_2, ante 7,5 toneladas em 2012.

Na divisão por Estado, o Pará é o líder das emissões, com 175,8 milhões de toneladas de CO_2 equivalente, a maior parte vinda do desmatamento da Amazônia. Em segundo lugar ficou o Mato Grosso, com 147 milhões de toneladas, também decorrentes principalmente pela destruição da vegetação.

Reportagem de 19/11/2014 disponível em: http://veja.abril.com.br/noticia/ciencia/emissoes-brasileiras-de-gases-estufa-aumentaram-78-em-2013 acessado dia 30/03/2015

Fonte: elaborado pela autora

Além das informações contidas no quadro 5.4 também entregamos outras informações sobre o dióxido de carbono, que é um dos principais gases emitidos pelos carros, conforme ilustra o quadro 5.5.

Quadro 5.5- Informações sobre o dióxido de carbono

Além das formas citadas na reportagem, os automóveis também são responsáveis pela emissão de CO_2 (Dióxido de carbono) e esse é resultante da combustão completa do carbono presente no combustível. O dióxido de carbono é um dos grandes responsáveis pelo efeito estufa. A quantidade de CO_2 emitida depende do tipo de combustível do automóvel (quadro 5.6).

Fatores de emissão de CO_2 por tipo de combustível

Combustível	Valor do INEA	Quilometragem média por litro de combustível	Fator de emissão
	kg de $CO_2.L^{-1}$	km rodado.L^{-1}	g de $CO_2.km^{-1}$
Gasolina	2,269	10	227
Etanol	1,233	7	176
Diesel	2,671	6	445
GNV	1,999	7	286

Fonte: baseado no INEA.

Uma alternativa para diminuir os efeitos do CO_2 na atmosfera é a neutralização da emissão desse poluente, e a alternativa é conhecida como "Carbono Neutro" ou "Carbono Zero". Essa alternativa consiste no plantio de árvores a cada quantidade de CO_2 emitida. O Instituto Brasileiro de Florestas recomenda que sejam plantadas 6 árvores para cada uma tonelada de gás emitido.

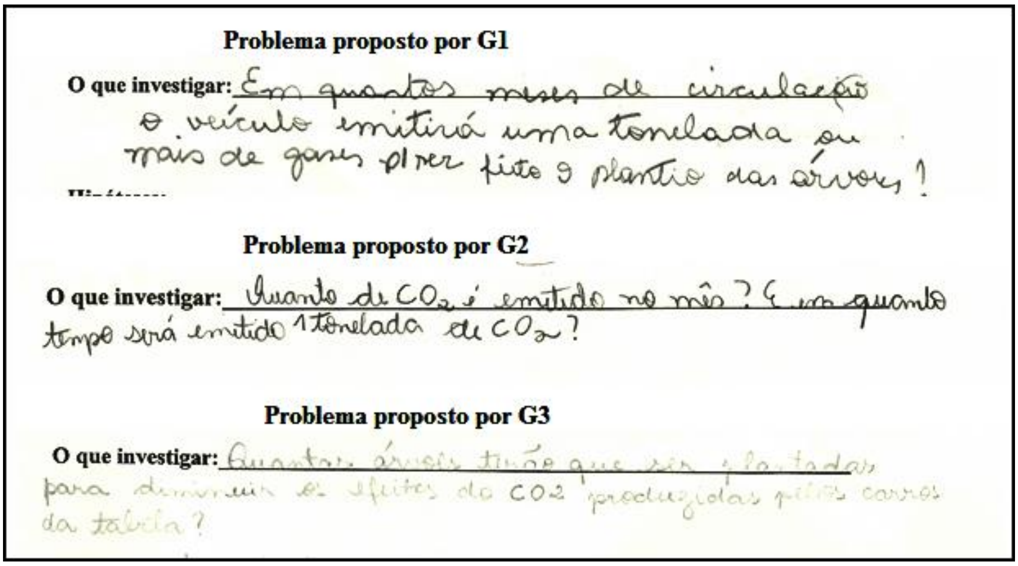
Para estudar a emissão de CO_2 de veículos de uma família é preciso fazer um levantamento de quantos veículos, o tipo de combustível dos mesmos e qual a quilometragem percorrida por eles. Com esses dados em mão preencha o quadro abaixo.

Tipo de automóvel	Combustível	Quantidade	Quilometragem rodada
Carro			
Ônibus			
Van			
Motocicleta			
Caminhonete			

Fonte: elaborado pela autora

O acesso a essas informações desencadeou a elaboração de um problema, a formulação de hipóteses e estratégias para a resolução do problema. A figura 5.26 ilustra os problemas proposto por G1, G2 e G3 nessa atividade.

Figura 5.26-Problemas propostos pelos três grupos



Problema proposto por G1

O que investigar: Em quantos meses de circulação o veículo emitirá uma tonelada ou mais de gases p/ ser feito o plantio das árvores!

Problema proposto por G2

O que investigar: Quanto de CO_2 é emitido no mês? E em quanto tempo será emitido 1 tonelada de CO_2?

Problema proposto por G3

O que investigar: Quantas árvores terão que ser plantadas para diminuir os efeitos do CO2 produzidas pelos carros da tabela?

Descrevemos nessa seção os encaminhamentos dos alunos do grupo G1 durante o desenvolvimento da atividade. Os alunos desse grupo dirigiram sua atenção especialmente ao que se refere ao plantio de árvores como alternativa de controle do CO_2, conforme indicam as informações do quadro 5.5.

Os alunos elaboraram duas hipóteses e definiram variáveis.

Hipóteses:

H_1: Quanto mais o veículo circular, menor será o tempo para plantio das árvores.

H_2: Dependendo do tipo de combustível, o tempo necessário para o plantio das árvores irá variar.

Variáveis:

t = tempo (em dias)

d = distância (quilômetros)

$E_{CO2}(d,t)$ = quantidade emitida de CO_2 (quilogramas)

Para resolver o problema, cada aluno de G1 preencheu o quadro com informações referentes a um carro particular, como tipo de combustível e quantidade de quilômetros rodados. A figura 5.27 ilustra as informações de cada aluno do grupo G1.

Figura 5.27-Informações referentes aos carros dos alunos A1, A2 e A5

Tipo de automóvel	Combustível	Quantidade	Quilometragem rodada
Carro			
Ônibus	**Informações de A1**		
Van			
Motocicleta			
Caminhonete	Diesel	1	18 Km/d

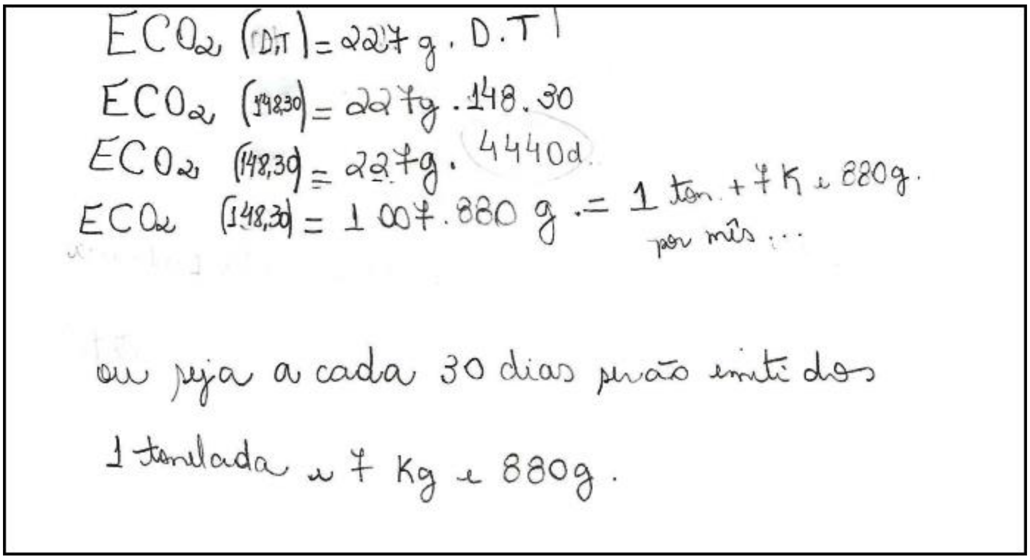
Tipo de automóvel	Combustível	Quantidade	Quilometragem rodada
Carro	gasolina	1	148 Km por dia
Ônibus			
Van	**Informações de A2**		
Motocicleta			
Caminhonete			

Tipo de automóvel	Combustível	Quantidade	Quilometragem rodada
Carro	Etanol	1	30 Km p/d L 9,3L
Ônibus			
Van	**Informações de A5**		
Motocicleta			
Caminhonete			

Fonte: registro dos alunos

Com essas informações os alunos de G1 desenvolveram um modelo visando responder o problema formulado. Eles resolveram que cada um faria um modelo de acordo com as informações de seu carro. Para isso levaram em consideração o fator de emissão de gás conforme informações do quadro 5.5. Assim, cada um dos integrantes do grupo calculou a quantidade de CO_2 emitida em 30 dias e, posteriormente, determinou quantos meses seriam necessários para a emissão de uma tonelada de CO_2. A figura 5.28 ilustra o modelo desenvolvido por A2, cujo carro tem como combustível a gasolina. Tal combustível tem como fator de emissão 227 g CO_2/ Km e o veículo roda cerca de 148 km por dia.

Figura 5.28- Modelo desenvolvido pelo aluno A2



ECO_2 (D.T) = 227 g . D.T
ECO_2 (148,30) = 227g . 148 . 30
ECO_2 (148,30) = 227g . 4440d.
ECO_2 (148,30) = 1 007 . 880 g .= 1 ton. + 7 K e 880g.
por mês . . .

ou seja a cada 30 dias serão emitidos
1 tonelada e 7 Kg e 880g.

Fonte: registro dos alunos

5.2.3.1 O raciocínio abdutivo na atividade

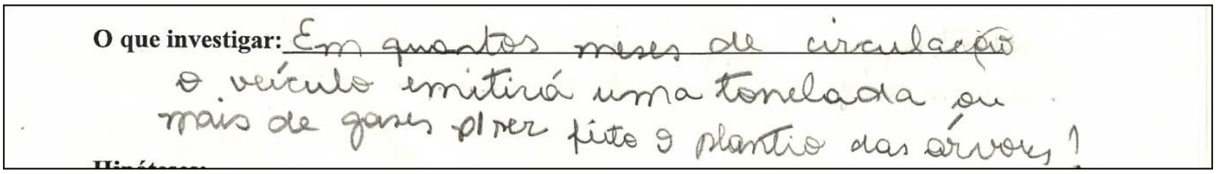
A análise local com relação ao raciocínio abdutivo na atividade *a emissão de CO_2 dos carros de uma família* utiliza registros escritos e áudio do desenvolvimento da atividade por G1.

Após a leitura das informações dos quadros 5.4 e 5.5 os alunos de G1 iniciaram uma discussão a respeito do que investigar. O trecho a seguir ilustra essa discussão.

A5: e eu quero investigar quantas árvores a gente teria que plantar por mês, pelo tanto de combustível que ela gasta.
A1: então é isso que nós vamos fazer. Não é eu quero é nós queremos.
A5: pode fazer uma florestinha ai perto de casa!!kkkkk
A1: variáveis agora!
A5: sabe porque eu achei muito legal isso, porque você vai plantar seis árvores por cada tonelada emitida.
A1: nossa eu não tinha chegado nisso não.
A2: eu ando o que 148 km por dia
A5: é A2 pode comprar um terreno lá e começar a plantar.

O trecho nos permite inferir que o modo palpite do raciocínio abdutivo orientou as ações dos alunos, visto que o fato de se plantar seis árvores por cada tonelada de gás emitido foi o que levou os alunos a formular o problema (figura 5.29). Além disso, podemos inferir que os alunos tiveram a habilidade de reconhecer um problema a partir de informações dadas, e tal habilidade é caracterizada por Alencar (1990) como uma habilidade criativa.

Figura 5.29-Problema proposto pelos alunos de G1


O que investigar: Em quantos meses de circulação o veículo emitirá uma tonelada ou mais de gases p/ ser feito o plantio das árvores!

Fonte: registro dos alunos

Inicialmente A5 tem interesse em investigar quantas árvores teria que plantar por mês, tendo como base o combustível que é gasto nesse período. Mas depois o problema que propõe é investigar em quantos meses o carro emitiria uma tonelada de gás, ou seja, quanto tempo será necessário plantar seis árvores. Nesse grupo houve uma mudança em relação ao interesse e definição do problema, a partir da exploração das informações sobre a situação. Essa mudança é indício de flexibilidade com relação à compreensão e interpretação do problema. Essa flexibilidade, segundo Alencar (1990), é também uma habilidade criativa.

Os alunos tinham que tomar uma decisão a respeito de quais informações usariam para resolver o problema. O trecho abaixo ilustra a decisão que tomaram.

P2: como que vocês vão fazer? Cada um vai ter um conjunto de carros? (Se refere ao fato de fazerem um conjunto com todos os carros do grupo e assim calcular quantas árvores o grupo teria que plantar)
A1: não, não professora, eu acho cada um tem um conjunto de dados é melhor. (optam por cada um fazer os cálculos para o seu carro)
A2: para ver qual se aproxima mais.
A1: e outra, faz o dela, e a gente vai olhando o dela, faz o meu e a gente vai olhando o meu.

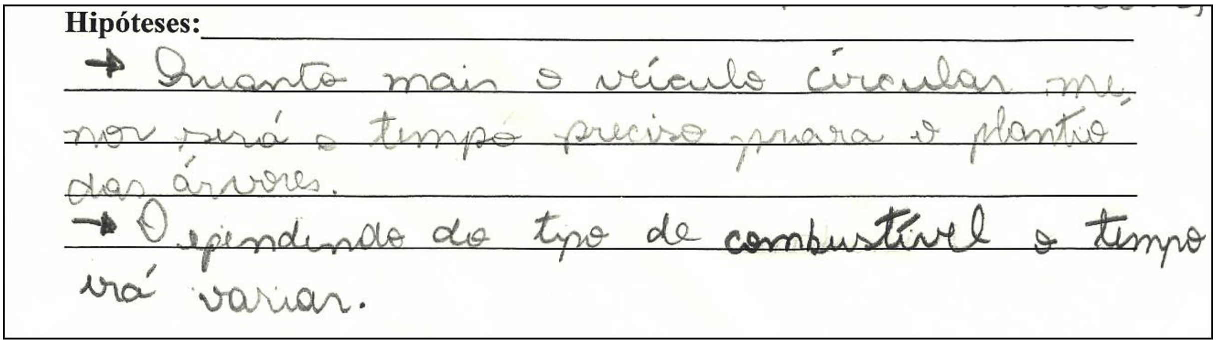
Ao decidirem que usariam as informações do carro de cada um dos integrantes, os alunos evidenciam a seleção de informações que eles consideram importantes para o problema. Kehle e Cunningham (2000) argumentam que uma característica do modo sintoma do raciocínio abdutivo é a seleção de informações importantes para o problema, assim inferimos que tal modo orientou os alunos nesse momento da atividade. Nessa atividade cada aluno optou por selecionar as informações referentes ao seu automóvel, visto que tinham interesse de saber quantas árvores cada um teria que plantar.

Avançando no desenvolvimento da atividade os alunos iniciaram uma discussão sobre as hipóteses, conforme indica o trecho abaixo e a figura 5.30.

A2: as hipóteses vão ter que ser, por exemplo. Ele gasta mais gasolina ou álcool dependendo da quilometragem. Mas por exemplo, se eu for de carro vou gastar um tanto, se eu for de moto vou gastar outro tanto. Então a gente vai ter que analisar por exemplo, quando for... vai depender do carro.

A1: não porque assim ó, se eu ando 18 km com gasolina, ou vamos supor com diesel que é o que emite mais e você anda 140 com etanol que é o que emite menos, você vai estar emitindo a mesma quantidade.
A2: entendi, mas olha se o meu for 18 km se eu for com diesel quanto vai ser de gás, e se for de gasolina quanto vai ser, a mesma quilometragem.

Figura 5.30- Hipóteses elaboradas pelos alunos de G1



Hipóteses:
→ Quanto mais o veículo circular me
nor será o tempo preciso para o plantio
das árvores.
→ Dependendo do tipo de combustível o tempo
irá variar.

Fonte: registro dos alunos

A elaboração das hipóteses e as discussões dos alunos enunciadas acima sinalizam o entendimento da situação, pois, as hipóteses elaboradas foram criadas a partir da interpretação das informações que lhes foram entregues e a partir das suas experiências sobre o assunto. Esses fatos corroboram com as características definidas por Kehle e Cunningham (2000) para o modo diagnóstico do raciocínio abdutivo. Segundo esses autores, a elaboração de hipóteses plausíveis indica não só o entendimento da situação, mas também a construção do significado.

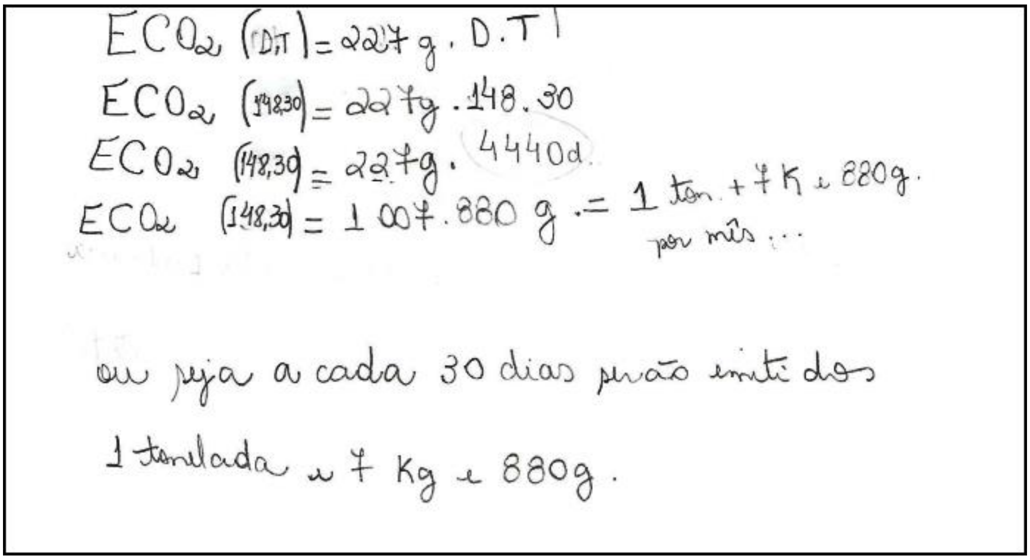
Em outro momento da atividade os alunos discutem com a pesquisadora sobre o que precisavam para conseguir responder o problema proposto. O trecho a seguir ilustra essas discussões.

P: o que vocês precisam levar em consideração para resolver o problema?
A5: quantos litros por dia e depois por mês, e quanto de gás ele vai emitir.
A1: a gente vai ter que descobrir a tonelada de gás que ele vai emitir, para saber quanto de árvores ele vai ter que plantar, porque são seis árvores para cada tonelada de gás emitido.
A5: e para gente saber a tonelada de gás...
P: o que é importante para saber isso?
A5: o número de quilômetros rodados.
P: só?
A2: o tipo de combustível
P: e o que mais? Eu sei quanto de gás é emitido em alguma quantidade?
A1: aqui ó, ele tem o quilo de CO_2 por litro.
P: ah! Então aqui eu tenho o valor do CO_2 por litro, certo?
A1: ah tá, então aqui eu tenho um litro de gasolina eu tenho isso aqui de CO_2. Entendi.
A5: e esse fator de emissão aqui, é o gás emitido por quilômetro.

Ao destacarem que era necessário saber a quilometragem, o tipo de combustível e a quantidade de gás emitida os alunos demonstram ter encontrado evidências para prosseguir com o desenvolvimento da atividade. Sem tais evidências a construção do modelo estaria comprometida. Para Kehle e Cunningham (2000) a percepção de evidências ou padrões que ajudem na resolução do problema indica o modo pista do raciocínio abdutivo, assim inferimos que ao destacar o que era necessário para resolver o problema o modo pista orientou as ações dos alunos.

Após destacarem o que seria necessário, cada aluno criou um modelo para determinar a quantidade de CO_2 emitida para cada tipo de carro. A figura 5.31 ilustra o modelo desenvolvido pelo aluno A2.

Figura 5.31- Modelo desenvolvido pelo aluno A2 do grupo G1



ECO_2 (D.T) = 227 g . D.T
ECO_2 (148,30) = 227g . 148.30
ECO_2 (148,30) = 227g . 4440d
ECO_2 (148,30) = 1 007.880 g = 1 ton + 7 K e 880g.
por mês ...

ou seja a cada 30 dias serão emitidos
1 tonelada e 7 Kg e 880g.

Fonte: registro dos alunos

O modelo desenvolvido por A2 indica que dentro de um mês será necessário plantar seis árvores. Por outro lado, o aluno A5 encontrou que após sete meses deve-se plantar seis árvores. O fato de ter dado quantidade de meses diferentes, confirma a hipótese de que a quantidade de gás emitido vai depender da quilometragem rodada.

Os alunos de G1, após encontrarem o modelo que respondesse ao problema, consideraram a atividade concluída. Entretanto, poderiam ter avançado visando a generalização para uma expressão que forneceria a quantidade de gás emitida para o veículo com determinado tipo de combustível. Essa generalização seria um indício de raciocínio indutivo. Assim, ainda que os alunos não tenham avançado nessa ideia, podemos conjecturar que atividades de modelagem matemática podem propiciar também o raciocínio indutivo.

5.2.3.2 Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade A *emissão de CO_2 dos carros de uma família*

A seção anterior apresentou uma descrição e análise da atividade *A emissão de CO_2 dos carros de uma família*, realizada por G1. A partir dessa análise e, tendo como fundamento os pressupostos da Análise de Conteúdo, identificamos elementos indicativos de raciocínio abdutivo. Os elementos identificados nessa atividade já foram identificados nas outras atividades.

Tabela 5.6-Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *A emissão de CO_2 dos carros de uma família*

O raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática está associado:	**Código**	**Indícios**
à mudança na abordagem para o problema	D.3	O problema inicial era descobrir quantas árvores e depois passou a ser em quantos meses
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4	Decisão de usar as informações de cada carro
a demonstrações de entendimento da situação	D.5	Elaboração das hipóteses
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6	O uso da quilometragem, fator de emissão e tempo para resolver o problema
à percepção de evidências para a formulação do problema	D.8	Leitura e interpretação das informações dadas o que resultou na elaboração do problema
à habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema	D.9	Formulação do problema

A mudança na abordagem para o problema refere-se à mudança de abordagem do problema, ou seja, os alunos mudam de estratégia após perceberem que algo está errado, ou que a estratégia escolhida inicialmente não é a mais adequada diante de suas intenções. No caso dessa atividade, os alunos de G1 mudam o problema a ser investigado. Inicialmente gostariam de estudar quantas árvores deveriam ser plantadas considerando a emissão de CO_2 de seus veículos, posteriormente resolveram investigar em quantos meses será emitido uma tonelada de CO_2 e consequentemente, gerar a necessidade do plantio de seis árvores.

A percepção de informações relevantes para o problema diz respeito à seleção de informações para o desenvolvimento do problema. Por exemplo, a opção de usarem os dados dos automóveis de cada integrante do grupo para descobrir a quantidade de gás emitido pelo veículo de cada integrante do grupo.

As demonstrações de entendimento da situação referem-se aos indícios de que os alunos entenderam o problema. Um desses indícios é a elaboração das hipóteses para orientar o estudo da situação.

A percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema diz respeito aos padrões e evidências encontrados pelos alunos que os auxiliaram na resolução do problema. Nessa atividade, uma das evidências é a definição adequada das variáveis quilometragem, fator de emissão específico de cada combustível e sua relação adequada para determinar a quantidade de CO_2 emitida em um intervalo de tempo.

A percepção de evidências para a formulação do problema refere-se à percepção de evidências e de informações que auxiliam os alunos na identificação do problema, por exemplo, as informações contidas no quadro 5.5.

A habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema refere-se à habilidade do aluno de reconhecer um problema dada uma situação-problema. Tal habilidade fica evidente na definição do problema a partir das informações que possuíam.

Nessa atividade não identificamos indícios dos seguintes elementos indicativos de raciocínio abdutivo: *a capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência), a interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas* e *a capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração).*

5.2.4 A Atividade: *As embalagens de desodorante convencional e comprimida*

Essa atividade faz parte do terceiro momento de inserção de atividades da modelagem matemática e foi desenvolvida somente pelo grupo 2. Nessa atividade os alunos foram responsáveis por todas as escolhas realizadas, desde o tema até a interpretação dos resultados matemáticos obtidos. A professora e a pesquisadora apenas orientaram e auxiliaram os alunos quando solicitadas.

O tema escolhido por esses alunos foi a embalagem de desodorante convencional e comprimida. O interesse tema por esse foi manifestado pelos alunos conforme indica o quadro 5.6.

Quadro 5.6-Justificativa dos alunos para a escolha do tema

O interesse por esse tema tem como base a propaganda da empresa Unilever com relação à diminuição da emissão de CO_2, com a redução da embalagem em 30%, comprimindo o gás no interior da embalagem.

Fonte: trabalho final do grupo G2

A propaganda da empresa visa divulgar o produto com a nova embalagem (comprimida) pela televisão e internet. A empresa faz o anúncio conforme indica o quadro 5.7

Quadro 5.7-Propaganda do desodorante

Apresentamos os novos antitranspirantes comprimidos, que rendem igual aos regulares, mas com menos material e gás em suas embalagens.

Frascos dos Antitranspirantes

Fonte: trabalho final do grupo G2

A partir desse anúncio, os alunos formularam duas questões a serem investigadas: *1) quanto é gasto de alumínio com a embalagem convencional e a comprimida?* 2) *com a embalagem comprimida, quantas unidades a mais podem ser incluídas no caminhão para o transporte?* Para a análise da situação relativa à primeira questão, os alunos definiram as varáveis e as hipóteses conforme indica o quadro 5.8.

Quadro 5.8- Variáveis e hipóteses definidas pelos alunos de G2

Variáveis:

Da embalagem do desodorante:

$h =$ altura (cm)

$c =$ circunferência (cm)

$d =$ diâmetro (cm)

$A =$ área (cm²)

Hipóteses:

- A embalagem de desodorante comprimida usará menos alumínio do que a embalagem de desodorante convencional;
- Os fundos das embalagens dos desodorantes, tanto dos convencionais quanto dos comprimidos, têm a mesma espessura de alumínio que as laterais da embalagem.

Fonte: trabalho final do grupo G2

Definidas as hipóteses os alunos fizeram as medições necessárias nas embalagens de cada tipo e usaram o cálculo de área do cilindro para calcular a área, tanto da embalagem comprimida quanto da embalagem convencional. As medições e cálculos dos alunos foram realizadas conforme mostra o quadro 5.9.

Quadro 5.9-Modelo encontrado pelos alunos de G2 para a primeira questão

Embalagem convencional

Área da Base inferior:
$A = R^2 . \pi$
$A = 2{,}25^2 . 3{,}14$
$A = 15{,}89\ cm^2$

Área da Base superior:
$A = R^2 . \pi$
$A = 1{,}75^2 . 3{,}14$
$A = 9{,}62\ cm^2$

Área da parte estreita:
$A = C . h$ $\qquad A = 13{,}3$
$A = 39\ cm^2$

Área lateral:
$A = C . h$
$A = 14{,}12$
$A = 168\ cm^2$

Área total:
$A = 168 + 39 + 15{,}89 + 6{,}27$
$\underline{A = 229{,}16\ cm^2}$

Embalagem comprimida

Área da base inferior:
$A = R^2 . \pi$
$A = 1{,}75^2 . 3{,}14$
$A = 9{,}62\ cm^2$

Área da parte estreita:
$A = C . h$
$A = 10 . 1$
$A = 10\ cm^2$

Área da lateral:
$A = C . h$
$A = 12 . 10{,}5$
$\underline{A = 126\ cm^2}$

Área total:
$A = 126 + 10 + 9{,}62$
$\underline{A = 145{,}62\ cm^2}$

Fonte: trabalho final do grupo G2

Para determinar o percentual da redução na quantidade de alumínio para a fabricação das embalagens os alunos procederam conforme mostra o quadro 5.10. Concluíram que a quantidade de alumínio na embalagem comprimida é 36% menor do que na embalagem convencional, que é é 6% superior àquela anunciada pela empresa no comercial de televisão.

Quadro 5.10- Análise da redução na quantidade de alumínio

$$229{,}16\_\_\_100\%$$
$$145{,}62\_\_\_\ x$$
$$x = 36\%$$

Fonte: trabalho final do grupo G2

Em relação à segunda questão, *com a embalagem comprimida, quantas unidades a mais podem ser incluídas no caminhão para o transporte?*, os alunos definiram as variáveis e hipóteses que constam no quadro 5.11.

Quadro 5.11- Variáveis e hipóteses para o segundo problema do grupo G2

Variáveis:

Do caminhão:

$H =$ altura (m)

$C =$ comprimento (m)

$L =$ largura (m)

$V =$ volume (m³)

Das caixas das embalagens

$h =$ altura (cm)

$c =$ comprimento (cm)

$l =$ largura c(m)

$v =$ volume (m³)

Hipótese:

-Cabem mais embalagens comprimidas do que as de tamanho convencional nos caminhões usados para transporte.

Fonte: trabalho final do grupo G2

A partir das medidas das embalagens de desodorante, os alunos buscaram as informações com uma transportadora sobre o tamanho de um baú de caminhão. As informações obtidas constam na tabela 5.7.

Tabela 5.7- Informações relativas ao caminhão de transporte

	Caixa da embalagem convencional	**Caixa da embalagem comprimida**	**Transporte (baú do caminhão)**
Altura	20 cm	17 cm	2,65 m
Largura	20 cm	16 cm	2,48 m
Comprimento	15 cm	12 cm	7,90 m

Fonte: trabalho final de G2

De posse dessas informações os alunos calcularam o volume das caixas das embalagens convencionais e comprimidas e o volume do baú do caminhão. Para encontrar quantas caixas caberiam no caminhão, considerando os dois tamanhos de embalagens, os alunos dividiram o volume do caminhão pelo volume da caixa. Por fim usaram regra de três para calcular quantas caixas a mais caberiam no caminhão para o caso das embalagens comprimidas.

Quadro 5.12- Modelo desenvolvido pelos alunos de G2 para a segunda questão

Volume da caixa convencional

$v = h.c.l$

h = altura

c = comprimento

l = largura

$v = 20.20.15$

$v = 6000\ cm^3 = 0{,}006 m^3$

Volume da caixa comprimida

$v = h.c.l$

$v = 17.16.12$

$v = 3264\ cm^3 = 0{,}003264\ m^3$

Volume do caminhão

$V = H.C.L$

$V = 2{,}65 \,.\, 2{,}48 \,.\, 7{,}90$

$V = 51{,}918\ m^3$

$$\frac{51{,}918}{0{,}006} = 8653\ caixas\ das\ embalagens\ convencionais$$

$$\frac{51{,}918}{0{,}003254} = 15906\ caixas\ das\ embalgens\ comprimidas$$

8653___100%

15906___ x

$x = 183{,}8\%$

Fonte: trabalho final do grupo G2

Assim, os alunos chegaram à conclusão de que caberiam 83,8% a mais de caixas da embalagem comprimida em relação às caixas da embalagem convencional.

5.2.4.1 O raciocínio abdutivo na atividade

A análise local com relação ao raciocínio abdutivo nessa atividade utiliza registros escritos e em áudio, bem como alguns trechos da entrevista realizada com os integrantes de G2 ao final do trabalho.

O tema das embalagens de desodorante convencional e comprimida não foi o primeiro tema a ser pensado pelos alunos de G2, conforme indica um trecho da entrevista de A7:

> *a gente tinha pensado inicialmente em fazer sobre os imóveis, mas ai a gente viu que não ia dar certo. A gente ia estudar o crescimento das vendas de imóveis, porém os dados que tínhamos quando jogamos no Excel, não deram em nada. Então abandonamos a ideia e resolvemos estudar esse tema.*

A mudança de tema dos alunos sinaliza a habilidade criativa flexibilidade, que segundo Alencar (1990), é caracterizada pela mudança de abordagem sobre determinado assunto. Nesse caso os alunos, ao perceberem que a escolha inicial do tema não traria resultados, optaram por mudá-lo.

Segundo os alunos, o que os instigou a pesquisar o novo tema foi a propaganda que a empresa Unilever está fazendo para diminuir a emissão de CO_2. A empresa alega que reduzir a embalagem em 30% e comprimir o gás que contém dentro de cada desodorante, diminuirá a emissão do gás. Tendo em vista essa informação, os alunos decidiram investigar duas questões: *1) quanto é gasto de alumínio com a embalagem convencional e a comprimida?* 2) *com a embalagem comprimida, quantas unidades a mais podem ser incluídas no caminhão para o transporte?*

A decisão dos alunos em investigar o primeiro problema sinaliza que o modo do raciocínio abdutivo palpite orientou as ações dos alunos, visto que as informações da propaganda os encorajaram a investigar se realmente há essa diminuição de alumínio na fabricação das novas embalagens. Além disso, a formulação de um problema a partir de uma situação geral sinaliza a habilidade criativa de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema.

Após definirem o primeiro problema os alunos elaboram as hipóteses que constam no quadro 5.13.

Quadro 5.13-Hipóteses para o primeiro problema do grupo G2

Hipóteses: - A embalagem de desodorante comprimida usará menos alumínio do que a embalagem de desodorante convencional; - Os fundos das embalagens dos desodorantes, tanto dos convencionais quanto dos comprimidos, tem a mesma espessura de alumínio que que as laterais da embalagem.

Fonte: trabalho final do grupo G2

Ao serem questionados sobre o que eles levaram em consideração para a elaboração da primeira hipótese, o aluno A9 responde: *foi elaborada de acordo com as informações que encontramos no site da Unilever* transcritas no quadro 5.14.

Quadro 5.14-Informações do site da Unilever

Ao comprimir nossas latas de tamanho regular e torná-las menores, estamos usando, em média, 30% menos alumínio como material de embalagem e menos da metade de gás propelente, que é responsável pela saída do produto de dentro da lata para aplicação na sua pele.

Fonte: trabalho final do grupo G2

Kehle e Cunningham (2000) argumentam que o modo diagnóstico do raciocínio abdutivo é caracterizado pela elaboração de hipóteses plausíveis, e que essas indicam um entendimento da situação. Tendo em vista as argumentações dos autores inferimos que esse modo orientou as ações dos alunos nesse momento da atividade, pois os alunos elaboraram hipóteses após a interpretação das informações contidas no site da empresa. Além de indicar o entendimento da situação, a elaboração dessas hipóteses sinaliza que esses alunos estão construindo significado para o problema em estudo.

Para responder às questões propostas, os alunos utilizaram embalagens, convencional e comprimida, para fazer as medições necessárias, conforme apresenta a tabela 5.8.

Tabela 5.8-Informações sobre as embalagens

Medidas	**Embalagem convencional**	**Embalagem comprimida**
Altura total	15 cm	11,5 cm
Circunferência da parte superior	11,5 cm	12 cm
Circunferência da parte estreita	13 cm	10 cm
Circunferência da base inferior	14 cm	12 cm
Altura da parte estreita	3 cm	1 cm
Diâmetro superior	3,5 cm	3,5 cm
Diâmetro inferior	4,5 cm	3,5 cm

Fonte: trabalho final do grupo G2

A seleção de informações relevantes para o problema é, segundo Kehle e Cunningham (2000), uma característica do modo sintoma do raciocínio abdutivo. A construção dessa tabela considerando uma parte estreita da embalagem nos sinaliza o modo sintoma, visto que tal informação poderia ter sido facilmente descartada pelos alunos, porém eles a consideraram e a julgaram uma informação importante para o problema.

Ao construir a tabela com as medidas da circunferência, altura e diâmetro esses alunos sinalizam que perceberam evidências do que seria necessário para a investigação do problema. Tal ação nos permite inferir que o modo pista orientou as ações dos alunos, pois esses tiveram a percepção de procedimentos para a investigação do problema.

Os alunos recorreram às suas experiências e compararam o sólido que possuíam a um sólido já conhecido por eles, nesse caso o cilindro. Tal comparação levou os alunos a descobrirem um modo de resolver o problema proposto. A comparação do objeto com o objeto matemático, é de acordo com Kehle e Cunningham (2000), uma característica do modo analogia do raciocínio abdutivo.

Ao calcularem o volume da embalagem usando seu conhecimento sobre volume de um cilindro, os alunos demonstram que partiram de uma premissa maior, o formato característico de todos os cilindros, e concluíram que aquele objeto que possuíam em mãos tem as características de um cilindro. A transição de uma premissa geral para uma específica é caracteriza por Peirce (2015) como raciocínio dedutivo. Assim inferimos que tal raciocínio orientou os alunos na atividade. Além disso, esse raciocínio auxiliou os alunos na comprovação das hipóteses criadas anteriormente. Tal raciocínio permitiu-lhes concluir que houve uma redução de 36% de alumínio na embalagem comprimida em relação à embalagem convencional.

Além de resolverem o problema em relação à quantidade de alumínio gasto nas novas embalagens os alunos também investigaram o quanto se pode carregar a mais no transporte de caixas das embalagens comprimidas. Os alunos criaram o seguinte problema: *com a embalagem comprimida, quantas unidades a mais podem ser incluídas no caminhão para o transporte?*

O fato dos alunos de G2 terem elaborado dois problemas diferentes sobre a situação-problema, sinaliza a habilidade criativa fluência. Tal habilidade, segundo Alencar (1990), é caracterizada pela variedade de ideias diferentes sobre o mesmo assunto.

Quando questionados sobre quais informações foram levadas em consideração para a formulação do problema o aluno A3 responde: *quando se fala em transporte fala-se em transporte rodoviário, e nesse tipo de transporte há emissão de CO_2. A empresa alega que haverá uma diminuição de CO_2 com as embalagens comprimidas, então a gente queria saber se eles vão conseguir transportar mais caixas, porque assim diminuiria os caminhões usados no transporte, o que diminuiria a emissão de CO_2.*

A fala de A3 sinaliza que as informações contidas na propaganda e no site da Unilever os instigaram a investigar o novo problema, o que nos permite inferir que o modo palpite do raciocínio abdutivo orientou as ações dos alunos.

Formulado o problema, os alunos criaram outras hipóteses que os auxiliaram na resolução do novo problema, conforme indica o quadro 5.15.

Quadro 5.15-Hipóteses para a segunda questão do grupo G2

Hipóteses:
-Cabem mais embalagens comprimidas do que as de tamanho convencional nos caminhões usados para transporte.

Fonte: trabalho final do grupo G2

A elaboração das duas hipóteses sinaliza um entendimento da situação, uma vez que a primeira hipótese é decorrente do fato de que as embalagens diminuíram, consequentemente, eles economizariam em espaço. Além de demonstrar o entendimento da situação, a elaboração das hipóteses sinaliza que os alunos estão construindo significado sobre a situação que estavam estudando. De acordo com Kehle e Cunningham (2000), essas ações sinalizam o modo diagnóstico do raciocínio abdutivo.

Após elaborarem as hipóteses os alunos partiram para a matematização do problema, e utilizaram o cálculo do volume de sólidos geométricos para encontrarem o volume tanto da caixa das embalagens convencionais quanto das embalagens comprimidas. A comparação dos objetos que possuíam com objetos matemáticos já conhecidos por eles, sinaliza o modo analogia do raciocínio abdutivo.

Nessa atividade, considerando as ideias de Peirce (2015) podemos inferir que o raciocínio dedutivo orientou as ações dos alunos, visto que partiram da premissa das características gerais de um paralelepípedo e concluíram que o objeto que possuíam tinham as mesmas características. Assim, eles usaram tal premissa e calcularam o volume das caixas das embalagens convencional e comprimida. Posteriormente dividiram o volume do baú de um caminhão pelo volume de cada caixa e encontraram que o aumento na quantidade de caixas seria de cerca de 84%.

5.2.4.2 Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *As embalagens de desodorante convencional e comprimida*

A seção anterior apresentou uma descrição e análise da atividade *As embalagens de desodorante convencional e comprimida*, desenvolvida por G2. A partir dessa análise e, tendo como fundamento os pressupostos da Análise de Conteúdo, identificamos elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade que constam na tabela 5.9. Na análise dessa atividade não foram identificados novos elementos além daqueles já citados nas atividades anteriores. Além disso, os elementos *a mudança na abordagem para o problema* e *a capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração)* não foram identificados na análise dessa atividade.

A interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas refere-se às comparações realizadas pelos alunos para a elaboração de suas hipóteses. Essas comparações foram feitas para calcular o volume da embalagem do desodorante por meio do volume do cilindro.

A elaboração de dois problemas diferentes é um indicativo do elemento *a capacidade de expressar uma variedade de ideias (fluência).* Ao levarem em consideração a parte estreita das embalagens os alunos dão indícios do elemento do raciocínio abdutivo *percepção de informações relevantes para o problema.*

As demonstrações de entendimento da situação referem-se aos indícios que os alunos dão de que entenderam o problema. Um desses indícios é a elaboração das hipóteses para o problema.

A percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema diz respeito aos padrões e evidências encontrados pelos alunos que os auxiliem na resolução do problema. Nessa atividade, um indício desse elemento é o uso das medidas necessárias para calcular o volume.

Ao raciocínio dedutivo ou ao raciocínio indutivo refere-se ao uso de um desses dois raciocínios durante a atividade. No caso dessa atividade o raciocínio dedutivo orientou as ações dos alunos, visto que para calcular o volume das caixas e do baú do caminhão partiram da premissa das características gerais de um paralelepípedo e concluíram que o objeto que possuíam tinham as mesmas características.

A percepção de evidências para a formulação do problema refere-se à percepção de evidências e de informações que auxiliam os alunos na identificação do problema, por exemplo, a propaganda realizada pela empresa de desodorantes.

A habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema refere-se à habilidade do aluno de reconhecer um problema dada uma situação-problema. Tal habilidade fica evidente na definição do problema a partir das informações que possuíam.

Tabela 5.9- Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *As embalagens de desodorante convencional e comprimida*

O raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática está associado	Código	Indícios
à interpretação do fenômeno a partir das experiências vividas	D.1	Cálculo do volume das embalagens por meio do volume do cilindro.
à capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência)	D.2	Elaboração de dois problemas diferentes.
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4	Levar em consideração a parte estreita da embalagem.
à demonstrações de entendimento da situação	D.5	Elaboração das hipóteses.
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6	Uso das medidas necessárias para calcular o volume.
ao raciocínio dedutivo ou indutivo	D.7	Uso do raciocínio dedutivo é evidenciado ao usarem a formula de volume de paralelepípedo para calcular o volume das caixas.
à percepção de evidências para a formulação do problema	D.8	Leitura e interpretação das informações dadas o que resultou na elaboração do problema.
à habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema	D.9	Formulação do problema

5.2.5 A Atividade: *Metas do milênio: mortalidade materna*

A atividade *Metas do milênio: mortalidade materna* [11]é caracterizada como uma atividade de modelagem matemática do terceiro momento, pois, os alunos escolheram o tema, elaboram um problema, o matematizaram e encontraram um modelo que respondesse ao problema. O tema metas do milênio foi escolhido depois de muita discussão conforme indica o quadro 5.16.

Quadro 5.16- Justificativa da escolha do tema pelo grupo G3

Para a escolha do tema foi preciso várias discussões e exposições de ideias até chegar a um consenso. Após as plenárias o tema escolhido foi mortalidade materna. Justifica-se essa escolha por ser um tema pouco abordado em atividades de modelagem matemática e por ser uma meta a ser reduzida do milênio.

Fonte: trabalho final do grupo G3

Definido o tema os alunos delinearam o problema: *Será possível atingir a meta estabelecida em relação a taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em 2015, no Brasil?* Segundo a Organização Panamericana de Saúde (OPAS) a taxa de mortalidade materna recomendada é que exista no máximo 20 casos a cada cem mil nascidos vivos e para o Brasil a meta é de 35 casos.

Com o objetivo de responder o problema os alunos definiram dois objetivos. O primeiro foi coletar os dados (taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em relação ao ano) de todos os estados; e o segundo era prever qual será a taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em cada estado. Visando facilitar os cálculos, os alunos de G3 resolveram dividir os estados por regiões e para cada região eles procuraram responder à pergunta: *A região irá atingir a meta prevista para 2015?*

Para desenvolver o modelo para cada estado os alunos definiram as variáveis conforme indica o quadro 5.17.

[11] A mortalidade materna pode ser definida como os óbitos maternos que ocorrem durante a gestação ou 42 dias após o nascimento (tempo de recuperação da mulher após o parto). Essa mortalidade pode decorrer de qualquer causa ou medida feita na gestação.

Quadro 5.17-Variáveis definidas pelos alunos de G3

$M(n)$= *taxa de mortalidade materna a cada* cem *mil nascidos vivos*
t = *ano*
$n = t - 1996$, *tempo em anos* (variável auxiliar)

Fonte: trabalho final do grupo G3

Para cada uma das regiões e para cada um dos estados foram elaboradas hipóteses bem como modelos. Apresentamos o desenvolvimento do modelo para o estado do Acre. Inicialmente os alunos buscaram informações referentes à mortalidade materna do estado, conforme indicam a tabela 5.10 e a figura 5.33.

Tabela 5.10- Dados do Estado do Acre

Ano (t)	Tempo (n)	Taxa de mortalidade a cada cem mil nascidos vivos (M)
1996	0	63,2
1997	1	13,5
1998	2	67,7
1999	3	40,2
2000	4	52,5
2001	5	13,4
2002	6	37,9
2003	7	43,8
2004	8	30,1
2005	9	45,8
2006	10	30,4
2007	11	49,4
2008	12	33,3
2009	13	41,4
2010	14	36,4
2011	15	33,7
2012	16	53,9
2013	17	58,8

Fonte: Portal ODM (Acompanhamento Brasileiro dos objetivos do Milênio)

Figura 5.32- Gráfico da taxa de mortalidade materna no Acre a cada cem mil nascidos vivos (Acre)

Fonte: Portal ODM (Acompanhamento Brasileiro dos objetivos do Milênio)

Com base nesses dados os alunos definiram três hipóteses, conforme consta no quadro 5.18.

Quadro 5.18-Hipóteses elaboradas pelos alunos de G3

Hipóteses: -A taxa de mortalidade, de acordo com o gráfico em relação ao tempo, compreende uma função crescente. -A função é do tipo logística. -A taxa de mortalidade em 2015 será menor que a de 2013.

Fonte: trabalho final do grupo G3

Elaborada a hipótese de que a função é do tipo logística, cuja fórmula geral é

$M(n) = \frac{k}{be^{-an}+1}$, os alunos iniciaram o ajuste encontrando o valor de k pelo método de Ford-Walford e, posteriormente, linearizaram a função conforme indica a figura 5.33.

Figura 5.33- Encontrando o valor de K e linearizando a função

Valor de K:

Tabela 3 - Pares ordenados da assíntota (Acre)

M_n	M_{n+1}
13,5	40,2
40,2	43,8
43,8	45,8
45,8	49,4
49,4	53,9
53,9	58,8
58,8	

Fonte – Os autores

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{58{,}8 - 40{,}2}{53{,}9 - 13{,}5} = 0{,}4604$$

$$y - 40{,}2 = 0{,}4604(x - 13{,}5)$$

$$y = 0{,}4604x + 33{,}9846$$

$$M_{n+1} = 0{,}4604M_n + 33{,}9846$$

Considerando que:

$$\lim_{n \to \infty} M = \lim_{n \to \infty} M_n = k = M = M_n$$

O valor de K é:

$$k = 0{,}4604k + 33{,}9846$$

$$0{,}5396k = 33{,}9846$$

$$k = 62{,}98$$

Linearização do modelo logístico:

$$M(n) = \frac{k}{be^{-an} + 1}$$

$$M(n) = \frac{k}{be^{-an} + 1}$$

$$M\,be^{-an} + M = k$$

$$\left(\frac{1}{e^{an}}\right).\,b = \frac{k - M}{M}$$

$$\frac{M}{K - M} = e^{an}.\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\ln\frac{M}{K - M} = an\ln e + \ln\frac{1}{b}$$

$$\ln\frac{M}{62{,}98 - M} = an + \ln\frac{1}{b}$$

Fonte: trabalho final do grupo G3

Os alunos recorreram ao método dos mínimos quadrados para ajustar uma função logística aos pontos. O modelo, bem como os procedimentos, é ilustrado na figura 5.34.

Figura 5.34- Modelo desenvolvido pelos alunos de G3 para o estado do Acre

$$\begin{cases} A\sum n^2 + B\sum n = \sum Fn \\ A\sum n + BN = \sum F \end{cases}$$

$$A = a, \qquad B = \ln\frac{1}{b}, \qquad F = \ln\frac{M}{62{,}98 - M}$$

Tabela 4 - Valores das Somatórios para a resolução do sistema (Acre)

t	n	M	$F = \ln\frac{M}{62{,}98 - M}$	n^2	$F.n$
1997	1	13,5	-1,298878862	1	-1,298878862
1999	3	40,2	0,567984037	9	1,703952111
2003	7	43,8	0,825765747	49	5,780360229
2005	9	45,8	0,980538174	81	8,824843566
2007	11	49,4	1,291352302	121	14,20487532
2012	16	53,9	1,781056285	256	28,49690056
2013	17	58,8	2,643830608	289	44,94512034
$\sum$	64	305,4	6,791648291	806	102,6572

Fonte – Os autores.

$$\begin{cases} a806 + B64 = 102{,}6572 \\ a64 + B7 = 6{,}7916 \end{cases}$$

Desenvolvimento do modelo matemático:

Tabela 5 - Solução do sistema

A	0,183659
B	-0,708946
B	2,031755

Fonte – Os autores

Modelo desenvolvido:

$$M(n) = \frac{62{,}98}{2{,}031755e^{-0{,}183659n} + 1}$$

Fonte: trabalho final do grupo G3

Usando o modelo encontrado os alunos previram qual a taxa de mortalidade materna para 2015. O resultado encontrado foi de 59,3032, isto é, a cada cem mil nascidos vivos haverá uma mortalidade de 59,30 bebês.

Os alunos de G3 fizeram a previsão da taxa de mortalidade materna para os 26 estados e o Distrito Federal, conforme consta o quadro representado na figura 5.35. Neste quadro também é apresentada a média da taxa de mortalidade materna por região, bem como a matemática utilizada para encontrar os modelos dos estados de cada região.

Figura 5.35- Média da taxa de mortalidade materna prevista para 2015

Região	Taxa de mortalidade materna por Estado prevista para 2015	Taxa de mortalidade materna obtida por meio da média aritmética das taxas de cada estado em 2015	Matemática utilizada
Norte	Acre (59,3032)	59,9567	Ajuste de curvas: Função Logística, método dos mínimos quadrados.
	Amapá (40,28)		
	Pará (67,76)		
	Rondônia (54,27)		
	Roraima (40,67)		
	Tocantins (92,44)		
	Amazonas (64,9742)		
Nordeste	Maranhão (62,5295)	68,008	Ajuste de curvas: funções Polinomiais.
	Piauí (91,5413)		
	Ceará (77,7046)		
	Rio Grande do Norte (63,6152)		
	Paraíba (74,3932)		
	Pernambuco (43,9805)		
	Alagoas (59,2657)		
	Sergipe (72,3975)		
	Bahia (66,6513)		
Centro-Oeste	Distrito federal (47,3253)	53,5412	Ajuste de curvas: Funções Polinomiais
	Mato Grosso (42,7657)		
	Mato Grosso do Sul (48,4511)		
	Goiás (75,623)		
Sudeste	São Paulo (31,3963)	29,6369	Ajuste de Curvas: Função Polinomial
	Rio de Janeiro (44,0212)		
	Espírito Santo (7,1442)		
	Minas Gerais (35,986)		
Sul	Paraná (26,44)	34,203	Ajuste de curva: Função Polinomial
	Santa Catarina (51,128)		
	Rio Grande do Sul (25,0427)		

Fonte: trabalho final do grupo G3

A partir dos dados da tabela os alunos concluíram que no âmbito nacional, o Brasil não atingirá a meta de 35 casos a cada cem mil nascidos vivos, pois fazendo uma média aritmética entre as previsões por região tem-se e a estimativa para 2015 de 49,06916 a cada cem mil nascidos vivos. Os alunos acreditam que vários fatores influenciaram os resultados, conforme ilustra o quadro 5.19.

Quadro 5.19- Interpretação da resposta encontrada

Por fim, vários fatores podem influenciar nessa taxa de mortalidade, como o tratamento de saúde dos estados, os tratamentos de pré-natais entre outros, o foco mais importante para que as metas sejam alcançadas é que cada estado possa trabalhar para melhorar os atendimentos, saúde, propostas para que as metas possam ser alcançadas futuramente

Fonte: trabalho final do grupo G3

5.2.5.1 O raciocínio abdutivo na atividade

A análise local com relação ao raciocínio abdutivo desenvolvido na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna*, utiliza registros escritos e em áudio, bem como alguns trechos da entrevista feita ao final do trabalho dos integrantes de G3.

Após várias discussões os alunos de G3 chegaram ao consenso de estudar uma das oito metas do milênio, a mortalidade materna. A justificativa para estudar esse tema encontra-se no quadro 5.20.

Quadro 5.20-Justificativa da escolha do tema pelos alunos de G3

Após as plenárias o tema escolhido foi mortalidade materna. Justifica-se essa escolha por ser um tema pouco abordado em atividades de modelagem matemática e por ser uma meta a ser reduzida do milênio.

Fonte: trabalho final do grupo G3

As pesquisas a respeito do tema mostraram que a meta a ser atingida pelo Brasil é de 35 casos a cada cem mil nascidos vivos. Tendo como base essas informações os alunos delinearam o seguinte problema: *será possível atingir a meta estabelecida em relação a taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em 2015, no Brasil?*

O delineamento do problema ocorreu após uma leitura e interpretação das informações pesquisadas a respeito da mortalidade materna. Tal fato sinaliza o modo palpite do raciocínio abdutivo, que segundo Kehle e Cunningham (2000), tem como característica a seleção de informações que auxiliem na elaboração do problema, no caso dessa atividade a informação selecionada foi a meta a ser alcançada pelo Brasil. Além disso, a formulação do problema a partir das informações nos indica a habilidade criativa de reconhecer problemas a partir de uma situação-problema.

Visando responder ao problema os alunos delinearam objetivos conforme indica o quadro 5.21.

Quadro 5.21- Objetivos delineados pelos alunos de G3

- Coletar os dados (taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em relação ao ano) de todos os estados.
- Prever qual será a taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em cada estado.

Fonte: trabalho final do grupo G3

Kehle e Cunningham (2000) argumentam que uma característica do modo sintoma do raciocínio abdutivo é a seleção de informações relevantes ao problema. O primeiro objetivo delineado pelos alunos sinaliza tal característica, pois, os dados referentes as taxas anuais são informações relevantes para o problema. Assim, inferimos que o modo sintoma orientou as ações dos alunos.

O segundo objetivo indica um dos procedimentos que os alunos tinham que fazer para resolver o problema proposto. Prever a taxa de mortalidade materna para cada estado em determinado ano é uma ação dos alunos que sinaliza o modo pista do raciocínio abdutivo, pois, segundo Kehle e Cunningham (2000), tal modo é caracterizado pela percepção de evidências ou procedimento para a resolução do problema proposto.

Assim como indicado no segundo objetivo os alunos procuraram fazer uma previsão para cada estado incluindo o Distrito Federal. Apresentamos uma análise do modelo criado para o estado do Acre.

Para prever qual seria a taxa de mortalidade materna em 2015 no Acre os alunos criaram as hipóteses ilustradas no quadro 5.22.

Quadro 5.22- Hipóteses elaboradas pelos alunos de G3

A taxa de mortalidade de acordo com o gráfico em relação ao tempo compreende uma função crescente. A função é do tipo logística. A taxa de mortalidade em 2015 será menor que a de 2013.

Fonte: trabalho final do grupo G3

A primeira hipótese elaborada pelos alunos de G3 indica uma interpretação das informações contidas no gráfico representado na figura 5.32. Tal fato sinaliza o entendimento da situação e a construção de significado da situação. Segundo Kehle e Cunningham (2000), a elaboração de hipóteses plausíveis é uma característica do modo diagnóstico do raciocínio abdutivo e tal característica evidencia o entendimento da situação.

A hipótese de que os dados teriam o comportamento de uma função logística se deu pela interpretação da situação, uma vez que, segundo A4 *os dados não podem crescer sempre, tem que ter um limite para eles chegarem.* Tal hipótese foi baseada em seus conhecimentos prévios sobre esse tipo de função, pois já se havia trabalhado em sala de aula com dados que possuíam o mesmo comportamento. De acordo com Pavani (2010) a elaboração de hipóteses tem como suporte as experiências já vivenciadas pelos alunos. Essa hipótese sinaliza um procedimento matemático a ser feito para solucionar o problema proposto, e segundo Kehle e Cunningham (2000), a percepção de evidências ou procedimentos que ajudem a solucionar o problema é uma característica do modo analogia do raciocínio abdutivo, assim inferimos que tal modo orientou as ações dos alunos na atividade.

A segunda hipótese indica que a função procurada pelos alunos era uma função do tipo $M(n) = \frac{k}{be^{-an}+1}$. Nessa função o valor de k corresponde a assíntota, e tal valor foi encontrado pelo método de Ford Walford, conforme ilustra a figura 5.36.

Figura 5.36- Encontrando o valor de K e linearizando a função

Valor de K:

Tabela 3 - Pares ordenados da assíntota (Acre)

M_n	M_{n+1}
13,5	40,2
40,2	43,8
43,8	45,8
45,8	49,4
49,4	53,9
53,9	58,8
58,8	

Fonte – Os autores

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{58{,}8 - 40{,}2}{53{,}9 - 13{,}5} = 0{,}4604$$

$$y - 40{,}2 = 0{,}4604(x - 13{,}5)$$

$$y = 0{,}4604x + 33{,}9846$$

$$M_{n+1} = 0{,}4604M_n + 33{,}9846$$

Considerando que:

$$\lim_{n\to\infty} M = \lim_{n\to\infty} M_n = k = M = M_n$$

O valor de K é:

$$k = 0{,}4604k + 33{,}9846$$

$$0{,}5396k = 33{,}9846$$

$$k = 62{,}98$$

Linearização do modelo logístico:

$$M(n) = \frac{k}{be^{-an} + 1}$$

$$M(n) = \frac{k}{be^{-an} + 1}$$

$$M\,be^{-an} + M = k$$

$$\left(\frac{1}{e^{an}}\right).b = \frac{k - M}{M}$$

$$\frac{M}{K - M} = e^{an}.\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\ln\frac{M}{K - M} = an\ln e + \ln\frac{1}{b}$$

$$\ln\frac{M}{62{,}98 - M} = an + \ln\frac{1}{b}$$

Fonte: trabalho final do grupo G3

O fato de k ser uma assíntota evidencia a necessidade de um método para encontrar seu valor, e ao usar o método de Ford-Walford conforme indicado nas figuras acima, os alunos sinalizam ter visto tal necessidade. Inferimos que o modo pista do raciocínio abdutivo orientou as ações dos alunos, pois, de acordo com Kehle e Cunningham (2000) a percepção de evidências que sinalizem procedimentos a serem feitos é uma característica de tal modo.

Para encontrar os outros parâmetros da função os alunos optaram por usar o método dos mínimos quadrados, por ser um método que aproxima um conjunto de dados a uma função com o menor erro possível. Para usar esse método os alunos optaram por linearizar a função logística, permitindo assim o uso do método para uma função linear. A linearização da função é outra evidência que sinaliza a utilização de um determinado método. Assim, inferimos que o modo pista orientou as ações dos alunos.

Após linearizarem a função os alunos usaram o método dos mínimos quadrados e encontraram a função ilustrada na figura 5.37.

Figura 5.37- Modelo desenvolvido pelos alunos de G3 para o Estado do Acre

$$M(n) = \frac{62{,}98}{2{,}031755e^{-0{,}183659(t-1996)} + 1}$$

$$M(n) = \frac{62{,}98}{2{,}031755e^{-0{,}183659(2015-1996)} + 1}$$

$$M(2015) = 59{,}3032$$

Fonte: trabalho final do grupo G3

As hipóteses definidas fundamentaram a construção do modelo, conforme ilustra a figura 5.37, e sua construção se deu pelo uso de métodos matemáticos já conhecidos pelos alunos. O modelo desenvolvido revela a tradução de conhecimento para novo contexto, interpretação de dados, comparação. Estas características vão ao encontro das características definidas por Kehle e Cunningham (2000) para o modo explicação do raciocínio abdutivo.

Os alunos construíram um modelo para cada estado brasileiro bem como para o Distrito Federal. Os resultados obtidos são ilustrados na figura 5.38.

Figura 5.38- Média da taxa de mortalidade materna prevista para 2015

Região	Taxa de mortalidade materna por Estado prevista para 2015	Taxa de mortalidade materna obtida por meio da média aritmética das taxas de cada estado em 2015	Matemática utilizada
Norte	Acre (59,3032) Amapá (40,28) Pará (67,76) Rondônia (54,27) Roraima (40,67) Tocantins (92,44) Amazonas (64,9742)	59,9567	Ajuste de curvas: Função Logística, método dos mínimos quadrados.
Nordeste	Maranhão (62,5295) Piauí (91,5413) Ceará (77,7046) Rio Grande do Norte (63,6152) Paraíba (74,3932) Pernambuco (43,9805) Alagoas (59,2657) Sergipe (72,3975) Bahia (66,6513)	68,008	Ajuste de curvas: funções Polinomiais.
Centro-Oeste	Distrito federal (47,3253) Mato Grosso (42,7657) Mato Grosso do Sul (48,4511) Goiás (75,623)	53,5412	Ajuste de curvas: Funções Polinomiais
Sudeste	São Paulo (31,3963) Rio de Janeiro (44,0212) Espírito Santo (7,1442) Minas Gerais (35,986)	29,6369	Ajuste de Curvas: Função Polinomial
Sul	Paraná (26,44) Santa Catarina (51,128) Rio Grande do Sul (25,0427)	34,203	Ajuste de curva: Função Polinomial

Fonte: trabalho final do grupo G3

Com base nos resultados mostrados na figura os alunos fizeram uma interpretação dos mesmos, conforme consta no quadro 5. 23.

Quadro 5.23- Interpretação dos resultados

No âmbito nacional, fazendo uma média entre as previsões por região tem-se a estimativa para 2015 de 49,06916 a cada cem mil nascidos vivos. Neste contexto, o Brasil não atingirá a meta prevista para 2015 de 35 casos a cada cem mil nascidos vivos. Por fim, vários fatores podem influenciar nessa taxa de mortalidade, como o tratamento de saúde dos estados, os tratamentos de pré-natais entre outros, o foco mais importante para que as metas sejam alcançadas é que cada estado possa trabalhar para melhorar os atendimentos, saúde, propostas para que as metas possam ser alcançadas futuramente.

Fonte: trabalho final do grupo G3

A interpretação dos alunos dos resultados desencadeia a elaboração de hipóteses sobre os possíveis fatores que influenciam na taxa de mortalidade, essas hipóteses são elaboradas com base nas informações que obtiveram durante a pesquisa sobre o tema. A elaboração dessas hipóteses na interpretação dos resultados mostra que o raciocínio abdutivo não está presente apenas no início de uma atividade de modelagem.

Ao final do trabalho os alunos sugeriram outras problemáticas a serem estudadas conforme ilustra o quadro 5.24.

Quadro 5.24-Outras problemáticas que podem ser estudadas

É possível estabelecer uma relação matemática entre a mortalidade materna e o ano, levando em conta o tipo de parto e o percentual de pré-natais com mais de 7 consultas ou nenhuma consulta? Em que ano o Brasil atingirá a taxa de mortalidade materna de 35 casos a cada cem mil nascidos vivos? Qual é a região que possui a maior e a menor taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos?

Fonte: trabalho final do grupo G3

A indicação de outras possibilidades a serem estudadas sinaliza a habilidade criativa fluência, que segundo Alencar (1990), é a capacidade de ter várias ideias sobre o mesmo assunto. Além dessa habilidade Alencar (1990) define a habilidade criativa elaboração que é a capacidade de dar detalhes sobre suas ideias. Esses detalhes podem ser sinalizados por vários tipos de representações. Os alunos de G3 usaram representações tabular, algébrica e gráfica, o que sinaliza a habilidade criativa elaboração.

5.2.5.2 Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna*

A seção anterior apresentou uma descrição e análise da atividade *metas do milênio: mortalidade materna*, desenvolvida por G3. A partir dessa análise e tendo como fundamento os pressupostos da Análise de Conteúdo, identificamos elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade, que constam na tabela 5.11. Nessa atividade não foram identificados novos elementos além daqueles já citados nas atividades anteriores, além disso os elementos *a mudança na abordagem para o problema* e *o raciocínio dedutivo ou indutivo* não foram identificados nessa atividade.

Tabela 5.11- Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna*

O raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática está associado:	Código	Indícios
à interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas	D.1	Percepção de que os dados deveriam possuir uma assíntota
à capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência)	D.2	Indicação de outros problemas a serem estudados
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4	Buscar os dados referentes as taxas de mortalidade materna dos estados
a demonstrações de entendimento da situação	D.5	Elaboração das hipóteses
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6	Uso do método de Ford-Walford e da linearização da função
à percepção de evidências para a formulação do problema	D.8	Informações referentes a meta a ser atingida para a mortalidade materna
à habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema	D.9	Formulação do problema
à capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração)	D.10	Uso de registro algébrico, tabular e gráfico para resolver o problema

A interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas refere-se às comparações realizadas pelos alunos para a elaboração de suas hipóteses. Os alunos de G3 compararam a situação em estudo com uma situação já estudada e ao fazerem essa comparação os alunos perceberam que os dados possuíam um limite, isto é, os dados não cresceriam sempre. Assim perceberam a necessidade de uma função logística, visto que, essa possui um limitante.

A capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência) refere-se à quantidade de ideias que os alunos expressaram sobre o tema. Nesse caso, os alunos sugeriram vários outros problemas que poderiam ser investigados sobre a mortalidade materna.

A percepção de informações relevantes para o problema diz respeito à seleção de informações que auxiliassem na resolução do problema, por exemplo, a busca pelos dados referentes às taxas de mortalidade materna de cada estado.

As demonstrações de entendimento da situação referem-se aos indícios de que os alunos compreenderam o problema, sendo que um desses indícios é a elaboração de hipóteses.

A percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema diz respeito às evidências encontradas pelos alunos para auxiliar na resolução do problema. Nessa atividade uma das evidências foi a utilização do método de Ford-Walford para encontrar a assíntota da função e a linearização da função que acarretou o uso do método dos mínimos quadrados para encontrar a função logística.

A percepção de evidências para a formulação do problema refere-se à percepção de evidências e de informações que auxiliam os alunos na identificação do problema, por exemplo, a informação referente a meta a ser atingida para a mortalidade materna pelo Brasil.

A habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema refere-se à habilidade do aluno de reconhecer um problema dada uma situação-problema. Tal habilidade fica evidente na definição do problema a partir das informações que possuíam.

A capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração) refere-se à variedade de detalhes sobre uma ideia. No caso dessa atividade esses detalhes são os vários tipos de representação usados pelos alunos durante a atividade.

5.3 ANÁLISE GLOBAL DAS ATIVIDADES

Nas seções anteriores apresentamos a descrição e análise de cinco atividades desenvolvidas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática. A partir dessa análise, à luz das nossas considerações sobre o raciocínio abdutivo, identificamos elementos indicativos de raciocínio abdutivo nas atividades de modelagem matemática, conforme consta na tabela 5.12.

Tabela 5.12-Elementos indicativos de raciocínio abdutivo nas cinco atividades

O raciocínio abdutivo em atividade de modelagem matemática está associado:	Código
à interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas	D.1
à capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência)	D.2
à mudança de abordagem para o problema (flexibilidade)	D.3
à percepção de informações relevantes para o problema	D.4
a demonstrações de entendimento da situação	D.5
à percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema	D.6
ao raciocínio dedutivo ou indutivo	D.7
à percepção de evidências para a formulação do problema	D.8
à habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema	D.9
à capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração)	D.10

As nossas reflexões referentes a relações entre raciocínio abdutivo e o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser delineadas a partir da identificação dos elementos indicativos apontados nas análises locais de cada atividade. Além disso, essas reflexões também levam em consideração aspectos relativos ao contexto em que essas atividades foram desenvolvidas, tais como características dos alunos, já apresentadas nos quadros 2.1 e 2.2 (páginas 21 e 22).

Assim pontuamos que relações entre raciocínio abdutivo e desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, considerando os elementos identificados, podem ser agrupadas em três categorias, conforme explicita a tabela 5.13

Tabela 5.13- Categorias: relações entre raciocínio abdutivo e modelagem matemática

Categorias: relações entre raciocínio abdutivo e modelagem matemática	**Elementos indicativos de raciocínio abdutivo na atividade de modelagem matemática**
O raciocínio abdutivo dos alunos atua no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática	D.1, D.7 e D.8
Atividades de modelagem matemática desencadeiam o raciocínio abdutivo	D.4, D.5 e D.6
Habilidades criativas são mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática	D.2, D.3, D.9 e D.10

A categoria *O raciocínio abdutivo dos alunos atua no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática* refere-se aos indicativos de que o raciocínio abdutivo desempenha um papel relevante no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Nesse sentido a interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas, o raciocínio dedutivo e a percepção de evidências para a formulação do problema têm papel importante no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A categoria *Atividades de modelagem matemática desencadeiam o raciocínio abdutivo* refere-se aos indicativos de que atividades de modelagem matemática têm potencial para ações que desenvolvem esse raciocínio. Esse é o caso da necessidade de percepção de informações relevantes para o problema, de demonstrações de entendimento da situação, da percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema.

A categoria *Habilidades criativas são mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática* indica que habilidades criativas como as caracterizadas por Alencar (1990) são mediadas por ações como aquelas proporcionadas pelas atividades de modelagem matemática e associadas ao raciocínio abdutivo.

5.3.1 O Raciocínio Abdutivo dos Alunos Atua no Desenvolvimento da Atividade de Modelagem Matemática

A partir das análises locais observamos que o raciocínio abdutivo atua no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ele atua desde a definição de um problema à criação do modelo matemático. A percepção de evidências para a formulação do problema, interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas e o raciocínio dedutivo, são elementos que atuam no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

O raciocínio abdutivo em atividade de modelagem matemática está associado à percepção de evidências para a formulação do problema nas atividades. Essa ação pode ser observada na fase Inteiração de uma atividade de modelagem matemática. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) é nessa fase que ocorre uma busca de informações sobre a situação-problema a ser estudada e tal busca resulta na elaboração de um problema, sendo que esses, geralmente, são reconhecidos a partir da percepção de informações que instiguem os alunos a procurar respostas.

Há indícios desse elemento do raciocínio abdutivo nas atividades do segundo e terceiro momento de familiarização. Na atividade *O volume da maçã*, que é considerada do primeiro momento, não se percebe tal característica e isso pode ser decorrência da proposição do problema pela pesquisadora.

Na atividade *O chocolate*, por exemplo, o que instiga os alunos a investigar sobre o consumo e a produção de chocolates no Brasil são as informações contidas no quadro 5.3 e nas figuras 5.12 e 5.13. Já na atividade M*etas do milênio: mortalidade materna* os alunos de G3 delineiam o problema após uma leitura e interpretação das informações pesquisadas a respeito da mortalidade materna. A informação que esses alunos julgaram importante foi a meta a ser cumprida pelo Brasil, e a seleção dessa informação os levou ao problema a ser investigado*: será possível atingir a meta estabelecida em relação a taxa de mortalidade materna a cada cem mil nascidos vivos em 2015, no Brasil?*

Todos os problemas formulados pelos alunos nas atividades de segundo e terceiro momento de familiarização decorrem da percepção de evidências nas informações fornecidas sobre o tema. Portanto, o raciocínio abdutivo atua no delineamento dos problemas a serem estudados.

O raciocínio abdutivo em atividade de modelagem matemática também está associado à interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas e essa interpretação atua na elaboração de hipóteses para a resolução do problema. Assim, entendemos que atividades de modelagem matemática viabilizam uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos do mundo ou da vida, conforme argumentam Almeida, Silva e Veronez (2015). Além disso, o raciocínio abdutivo atua no modo como essa leitura ou interpretação é realizada pelos alunos.

Nas atividades desenvolvidas pelos alunos a definição do problema vem seguida da necessidade de elaboração de hipóteses que auxiliem os alunos no desenvolvimento de um modelo que responda ao problema definido inicialmente. Segundo Pavani (2010), as hipóteses são decorrentes das experiências já vivenciadas, assim tais experiências influenciam diretamente na elaboração das hipóteses.

De acordo com Peirce (2015), o raciocínio abdutivo é a formulação de hipóteses explicativas para o fenômeno, assim, ao formularem hipóteses nas atividades desenvolvidas, os alunos fazem uso do raciocínio abdutivo, sendo que essas hipóteses foram fundamentadas nas experiências vivenciadas anteriormente. Magnani (2014) argumenta que as hipóteses derivadas de experiências similares armazenadas anteriormente correspondem a uma forma especial de abdução não verbal a qual ele denomina de abdução visual. Portanto, a abdução visual atua na fase de elaboração das hipóteses.

Na atividade *O volume da maçã,* por exemplo, os alunos formularam hipóteses que relacionam a fruta a sólidos geométricos e a sólidos de revolução. Suas hipóteses foram ancoradas em experiências decorrentes de estudos já feitos sobre sólidos geométricos e volume de sólidos de revolução.

Ressaltamos que a interpretação do fenômeno a partir de experiências vividas não atua apenas na elaboração de hipóteses, mas também em seu desenvolvimento. Não basta apenas que o aluno tenha vivenciado a experiência, mas tem que ter aprendido algo significativo. Portanto, inferimos que o raciocínio abdutivo influencia no desenvolvimento da atividade, porém, esse está condicionado ao que os alunos “sabem” ou “pensam que sabem” sobre o conteúdo matemático necessário.

Os alunos de G1, por exemplo, elaboram a hipótese de que o volume da maçã seria dado pelo volume do sólido de revolução, e apesar de terem visto o cálculo de volume de um sólido de revolução, não sabiam os procedimentos matemáticos adequados para o desenvolvimento de tal hipótese, conforme ilustra a figura 5.39.

Figura 5.39- Explicação dos alunos de G1 para o desenvolvimento equivocado de uma hipótese

→ Nessa atividade nosso desenvolvimento da 2º hipótese não deu certo, pois não conseguimos colocar, corretamente os pontos necessários para desenvolver as equações, chegando a um resultado nulo para todas as incógnitas.

Fonte: registro dos alunos

O raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática também está associado aos raciocínios dedutivo e indutivo, pois o raciocínio abdutivo é, segundo Peirce (2015), a criação de hipóteses que são passíveis de experimentação. Tal experimentação é feita por meio dos raciocínios indutivo ou dedutivos. Assim, o uso do raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática está numa estreita relação com os raciocínios indutivo e dedutivo.

Na atividade *O volume da maçã* os alunos dos três grupos fazem uso do raciocínio dedutivo para explorarem suas hipóteses. Os alunos de G3, por exemplo, elaboram diferentes hipóteses para determinar o volume da maçã (figura 5.40). Nesse caso, na verdade, o que os alunos referiram como hipóteses, constituem possíveis encaminhamentos para o desenvolvimento da atividade.

Figura 5.40- Hipóteses elaboradas pelos alunos de G3 para a atividade *O volume da maçã*

Hipóteses:

1º → Sólido de revolução;

2º → Tronco de cone

3º → Diversos cilindros (maçã em rodelas)

Fonte: registro dos alunos

Apesar de identificar possíveis encaminhamentos para a atividade, investiram, no desenvolvimento da atividade, apenas naquele que visava determinar o volume da maçã mediante o uso que conheciam sobre sólido de revolução.

Nesse sentido, ainda que as experiências tenham, provavelmente, conduzido ao raciocínio dedutivo, especificidades da atividade (calcular o volume da maçã) requereram a inovação, a abdução, transferindo para situações completamente novas algo já experienciado em aulas de cálculo diferencial e integral.

Isso parece ser um indicativo de que o contexto, nesse caso, a disciplina de Modelagem Matemática, também é um fator relevante para a ocorrência do raciocínio abdutivo.

Já a atividade *a emissão de CO_2 dos carros de uma família* possuía a possibilidade de que, ao final, o modelo fosse generalizado. Na atividade dos alunos de G1 tal generalização não ocorreu, porém, os alunos de G3 a fizeram.

O fato dos alunos de G1 não terem feito a generalização pode estar associado às experiências dos alunos de G1 com a modelagem matemática. De acordo com o quadro 2.1, o integrante A1 do grupo G1 teve um contato superficial com a modelagem matemática, enquanto que o aluno A5 do grupo G3 teve um contato maior com a modelagem matemática, visto que faz parte de um grupo de pesquisa nessa área. Tendo como base essas informações, inferimos que a necessidade de generalização percebida em G3 pode estar associada ao fato de um aluno estar trabalhando com modelagem matemática há um tempo. Assim, experiências anteriores com atividades de modelagem matemática podem ser um fator relevante para a ocorrência do raciocínio abdutivo e do raciocínio indutivo e dedutivo.

Diante do exposto, inferimos que o raciocínio abdutivo atua nos diferentes momentos de familiarização e em diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática. Esse raciocínio atua na fase Inteiração onde ocorre a formulação do problema a partir da seleção de informações relevantes para o delineamento do problema. Atua também, na Matematização, onde os alunos formulam hipóteses que são ancoradas nas suas experiências. Por fim, o raciocínio abdutivo atua na fase de Resolução, pois os alunos buscam estratégias para a resolução do problema criado e essas estratégias estão associadas aos raciocínios dedutivo e indutivo, que por sua vez, são associados ao raciocínio abdutivo.

As abduções feitas pelos alunos durante o desenvolvimento da atividade influenciarão diretamente na criação do modelo matemático, isso pode explicar o fato de que uma mesma atividade pode gerar modelos diferentes.

5.3.2 Atividades de Modelagem Matemática Desencadeiam o Raciocínio Abdutivo

Pautados nas análises locais e no contexto em que as atividades foram desenvolvidas constatamos que as atividades de modelagem matemática ajudam no desenvolvimento de elementos referentes ao raciocínio abdutivo. Elementos como a percepção de informações relevantes para o problema, as demonstrações de entendimento da situação, a percepção de evidências e padrões matemáticos para a resolução do problema são desenvolvidos durante a atividade de modelagem matemática.

Segundo Blum (2002), o ponto de partida de uma atividade de modelagem matemática é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação conduzem à formulação de um problema e de um modelo matemático que possibilite responder ao problema criado. Entre a formulação do problema e o modelo matemático ocorrem um conjunto de procedimentos aos quais Almeida, Silva e Vertuan (2012), denominaram de Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação.

Inferimos que aspectos de algumas dessas fases desencadeiam o raciocínio abdutivo na atividade. A fase da Matematização é caracterizada pela transição da linguagem, do problema, natural para a matemática. Nessa transição o aluno identifica informações relevantes para o desenvolvimento de um modelo matemático, sendo que essa ação é um aspecto do raciocínio abdutivo. As informações identificadas pelos alunos irão influenciar diretamente no modelo matemático.

Na atividade *O chocolate*, por exemplo, os alunos precisam fazer simplificações, que nesse caso, referem-se ao uso ou não das informações referentes à importação e exportação do chocolate. Essas simplificações são importantes, pois influenciam o desenvolvimento de todo o modelo. Por exemplo, os alunos de G2 decidiram não usar tais informações para a construção do modelo, assim chegaram à conclusão de que o consumo de chocolate no Brasil já é maior que sua produção desde 2014. Por outro lado, os alunos de G3 consideraram tanto as informações referentes à exportação quanto à importação para construir funções que representassem os dados. Após encontrar essas funções eles chegaram à conclusão que o consumo não irá ultrapassar a produção de chocolate no Brasil.

Nesse sentido, as simplificações desempenham papel importante no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e essa ação é requerida devido ao fato de que atividades desse tipo fazem uma leitura parcial do fenômeno em estudo. Portanto, as atividades de modelagem matemática propiciam o desenvolvimento de inferências abdutivas no que diz respeito à seleção de informações para o problema.

Outro procedimento realizado durante a fase de Matematização é a elaboração de hipóteses, sendo que esse procedimento é considerado por Skovsmose (2001) como primordial na construção do modelo matemático. Segundo Kehle e Cunningham (2000), a elaboração de hipóteses em uma atividade de modelagem matemática evidencia o entendimento da situação, e esse por sua vez, é um elemento indicativo do raciocínio abdutivo. Nesse sentido, inferimos que os procedimentos realizados na fase da Matematização, geralmente, propiciam o desenvolvimento do raciocínio abdutivo.

Para resolver o problema de quanto é gasto com alumínio nas embalagens de desodorante convencional e comprimida, por exemplo, os alunos de G3 elaboram a hipótese de que seria gasto menos alumínio na embalagem comprimida do que na embalagem convencional. Tal hipótese evidencia o entendimento da situação que estavam estudando, uma vez que a proposta da empresa responsável pela fabricação do desodorante era justamente diminuir o alumínio gasto na fabricação das embalagens.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) a fase Resolução consiste na construção de um modelo matemático e, para isso, são usados procedimentos e estratégias diferentes pelos alunos. Assim, nessa fase faz-se necessário que o aluno busque evidências e padrões que os auxiliem na elaboração de uma estratégia ou no uso de determinado procedimento para resolver o problema definido. Essa busca, segundo Kehle e Cunningham (2000), é uma característica do raciocínio abdutivo.

O fato de que as atividades de modelagem possuem um caráter aberto, isto é, não existem procedimentos pré-determinados para desenvolver o modelo matemático, pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, uma vez que, os alunos são requeridos a buscar padrões e evidências na resolução dos problemas.

Na atividade *O chocolate*, por exemplo, os alunos dos três grupos foram em busca de algum procedimento matemático que os auxiliassem a construir uma função para representar os dados que possuíam. Todos recorreram ao uso da razão $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ para verificar se a função exponencial poderia ser usada para representar os dados do consumo. Identificamos essa busca por evidências e padrões matemáticos em todas as atividades de modelagem matemática desenvolvidas.

Na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna* os alunos do grupo G3 recorreram ao método de Ford-Walford para encontrar a assíntota da função logística, e posteriormente usaram a linearização da função para usar o método dos mínimos quadrados. O uso desses métodos os auxiliaram na construção da função logística para representar os dados referentes ao estado do Acre.

Uma das evidências encontradas pelos alunos de G1, na atividade *A emissão de CO_2 dos carros de uma família,* é a definição adequadas das variáveis quilometragem, fator de emissão específico de cada combustível e a sua relação para determinar a quantidade de CO_2 emitida em um intervalo de tempo. A definição dessas variáveis auxiliou os alunos de G1 na busca pela resposta ao problema. Tal evidência pode ser encontrada no desenvolvimento dessa atividade dos outros dois grupos.

Na atividade, *O volume da maçã,* a percepção de que o sólido era irregular e que seria necessário fazer aproximações é uma evidência encontrada pelos alunos de todos os grupos que auxiliaram na resolução do problema.

Por fim, inferimos que as atividades de modelagem matemática proporcionam o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, visto que ao resolver uma atividade de modelagem matemática partimos de hipóteses, ou seja, inferências abdutivas e pela observação, criamos dúvidas sobre o que está sendo observado, suspeitamos sobre a veracidade das hipóteses elencadas sobre o fenômeno estudado, selecionamos informações, fazemos simplificações e buscamos evidências matemáticas para a construção do modelo matemático.

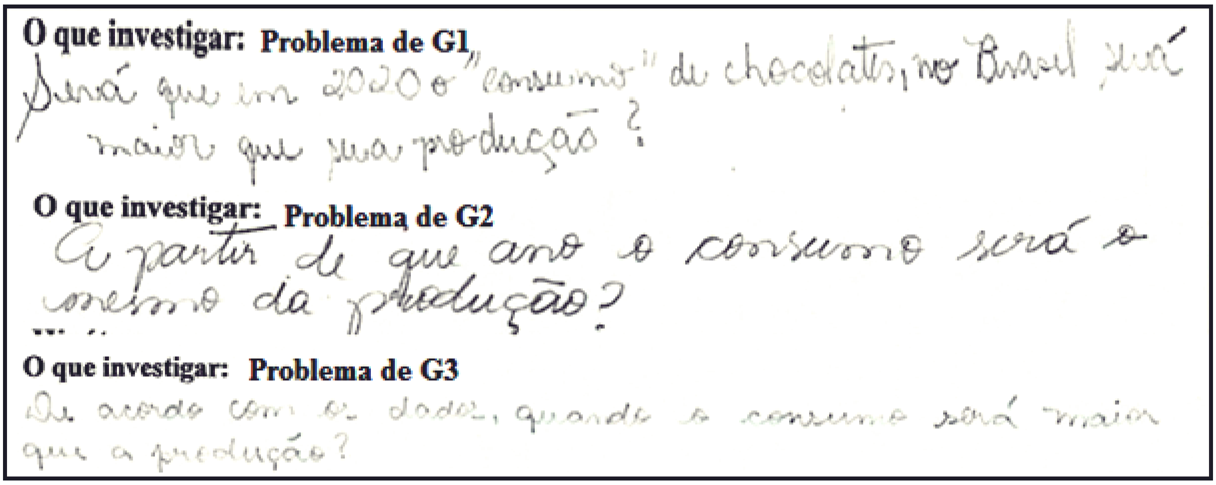
5.3.3 Habilidades Criativas são Mediadas pelo Raciocínio Abdutivo em Atividades de Modelagem Matemática

A categoria H*abilidades criativas são mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática* refere-se às habilidades criativas evidenciadas nas atividades. No desenvolvimento dessas atividades identificamos as habilidades criativas capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto (fluência), mudança de abordagem para o problema (flexibilidade), a habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema, a capacidade de expressar detalhes sobre uma ideia (elaboração).

A identificação dessas habilidades no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática nos permite inferir que a modelagem matemática propicia o desenvolvimento dessas habilidades. Além disso, essas habilidades são mediadas pelo raciocínio abdutivo. A habilidade de reconhecer um problema a partir de uma situação-problema está associada à percepção de evidências para a formulação do problema, que é considerada um indicativo de raciocínio abdutivo. Portanto, a habilidade de formular um problema está diretamente relacionada ao raciocínio abdutivo.

Na atividade O *chocolate*, por exemplo, a partir das informações referentes ao chocolate, conforme indicado nos quadros 5.2 e 5.3, os alunos dos três grupos elaboram problemas, conforme ilustra a figura 5.41.

Figura 5.41- Problemas propostos pelos três grupos



Fonte: registro dos alunos

A capacidade de expressar uma variedade de ideias sobre o assunto, é considerada por Alencar (1990) como a habilidade criativa fluência. Inferimos que essa habilidade está associada ao raciocínio abdutivo, uma vez que indicativos dessa habilidade foram observados na elaboração de vários problemas sobre o mesmo assunto. Esses problemas surgiram a partir da percepção de informações que instigaram os alunos a investigar, que segundo Kehle e Cunningham (2000) é uma característica do raciocínio abdutivo. A fluência de ideias esteve presente não só na elaboração de vários problemas como também, na elaboração de várias hipóteses. Portanto, o desenvolvimento dessa habilidade é mediado pelo raciocínio abdutivo durante o as atividades de modelagem.

Indicativos dessa habilidade estão presentes na atividade *O volume da maçã*, por exemplo. Nessa atividade todos os grupos pensaram em pelo menos duas maneiras de resolver o problema proposto, seja por meio do cálculo do volume do cilindro circular reto representado pela fruta, seja pela secção da maçã em fatias (formato de cilindros circulares), ou pelo cálculo do volume do sólido de revolução.

Na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna* também encontramos indicativos dessa habilidade, visto que os alunos ao final da atividade sugerem outros problemas que poderiam ser estudados sobre o tema mortalidade materna.

A análise das atividades nos permitiu inferir que o contexto[12] em que os alunos estão inseridos interferem no desenvolvimento da habilidade criativa fluência. O quadro 2.2 mostra os resultados de um questionário feito aos alunos. Os alunos A5 e A10 quando questionados se consideram importante ter ideias diferentes para resolver um problema, respondem que isso não é algo importante. Tal resposta pode estar relacionada ao fato de que esses alunos são acostumados com atividades que não requerem discussões sobre as ideias para o problema, uma vez que as resoluções dos problemas, geralmente, estão condicionadas a um algoritmo previamente determinado.

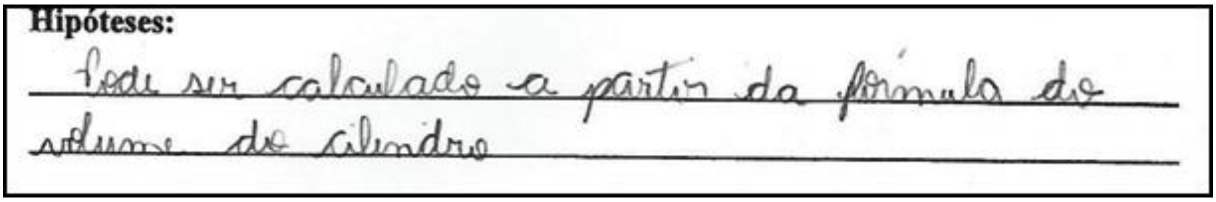
Mas, podemos observar ao longo das atividades de modelagem matemática que esses dois alunos tiveram ideias diferentes para resolver os seus problemas. Nesse sentido, o desenvolvimento de atividades abertas, como ocorreu na disciplina de Modelagem Matemática propiciou momentos de discussões sobre as várias ideias a respeito do assunto estudado. Assim, um aspecto que inicialmente não era importante, se tornou recorrente nas atividades de modelagem matemática.

A habilidade criativa flexibilidade é caracterizada por Alencar (1990) como a capacidade de mudar de abordagem ou estratégia. Peirce (2015) entende que o raciocínio abdutivo indica que alguma coisa pode ser, o que mostra que as inferências abdutivas podem ser mudadas a qualquer momento. Tal mudança depende da avaliação das mesmas e cabe ao aluno decidir por seguir esta ou aquela inferência. Portanto, inferimos que a habilidade flexibilidade é mediada pelo raciocínio abdutivo e que as atividades de modelagem matemática, por não terem procedimentos pré-determinados, permitem o desenvolvimento dessa habilidade.

Na atividade O *volume da maçã* os alunos de G2 criam inicialmente a hipótese de que o volume pode ser calculado a partir da fórmula do volume do cilindro, conforme ilustra a figura 5. 42. Tal hipótese sofre uma mudança após uma discussão entre os alunos, o que gera a criação da hipótese que $H1$: a fatia tem a forma de um cilindro circular reto. A primeira hipótese fazia referência à maçã como um todo e a mudança da hipótese considerando fatias da maçã acarreta uma mudança nas estratégias que serão adotadas para a solução do problema.

[12] Inter-relação de circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação, ambiente. (HOUAISS, 2009)

Figura 5.42- Hipótese inicial criada pelos alunos de G2 para o problema do volume da maçã


Hipóteses:
Pode ser calculado a partir da fórmula do volume do cilindro

Fonte: registro dos alunos

Ao mudarem o problema a ser investigado na atividade *A emissão de CO_2 dos carros de uma família* os alunos de G1 sinalizam a habilidade flexibilidade. Inicialmente eles gostariam de estudar quantas árvores deveriam ser plantadas considerando a emissão de CO_2, posteriormente resolveram investigar em quantos meses será emitido uma tonelada de CO_2 e consequentemente, gerar a necessidade do plantio de seis árvores.

A habilidade criativa elaboração é, segundo Alencar (1990), caracterizada pela quantidade de detalhes sobre uma ideia. Esses detalhes podem ser explicitados pelos diferentes tipos de representação usados. Kehle e Cunningham (2000) argumentam que o raciocínio abdutivo é caracterizado pelo uso de diferentes representações, o que evidencia o entendimento das hipóteses criadas. Portanto, inferimos que a habilidade criativa elaboração está relacionada ao raciocínio abdutivo.

Um aspecto que se mostrou relevante na análise dessas atividades é que o contexto em que os alunos estão inseridos também influencia no desenvolvimento da habilidade criativa elaboração. Quando questionados a respeito de quais aspectos consideram essenciais para a resolução de um problema, a maioria dos alunos não considerou o uso de diferentes representações como um desses aspectos, conforme indica o quadro 2.2. Porém, no desenvolvimento das atividades de todos os grupos eles utilizaram representações além da algébrica. Nesse sentido, acreditamos que as atividades de modelagem matemática propiciam o uso de diferentes representações, o que caracteriza a habilidade criativa de elaboração.

Na atividade *Metas do milênio: mortalidade materna*, por exemplo, os alunos de G3 utilizaram representações tabulares para organizar os dados encontrados; representações gráficas para representar os dados encontrados e representações algébricas.

Diante das assertivas explicitadas inferimos que as atividades de modelagem matemática proporcionam o desenvolvimento de habilidades criativas que estão relacionadas ao raciocínio abdutivo. Além disso, o raciocínio abdutivo proporciona o desenvolvimento de tais habilidades, sendo que essas habilidades são observadas durante toda a atividade. Tal fato implica que o raciocínio abdutivo pode ocorrer em qualquer momento da atividade e não apenas na fase inicial de elaboração de hipóteses.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início da pesquisa a busca por indícios que nos permitissem **identificar relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo** norteou nossa investigação. Na busca desses indícios, considerando o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de forma gradativa, procuramos identificar ações referentes ao raciocínio abdutivo que orientaram/realizaram os alunos no contexto de suas atividades.

A partir das reflexões que fizemos, retornamos aqui, de modo geral, as compreensões construídas ao longo da pesquisa, que são advindas de reflexões realizadas com base na análise empreendida.

Visando alcançar o nosso objetivo de pesquisa analisamos atividades de modelagem matemática, desenvolvidas por alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná. A análise dessas atividades foi feita segundo os pressupostos da Análise de Conteúdo, sendo que as reflexões derivadas dessa análise foram embasadas teoricamente nas considerações da semiótica peirceana sobre os tipos de raciocínio e nas considerações sobre a modelagem matemática.

A utilização da Análise de Conteúdo como opção de análise nos possibilitou analisar o conjunto de todas as atividades, bem como o contexto em que foram desenvolvidas. Essa análise resultou na categorização de elementos indicativos do raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática. As categorias que emergiram da nossa análise indicam relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. Assim consideramos ao final dessa pesquisa três categorias: *o raciocínio abdutivo dos alunos atua no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática; atividades de modelagem matemática desencadeiam o raciocínio abdutivo; habilidades criativas mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática.*

A categoria *o raciocínio abdutivo dos alunos atua no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática* explicita o uso do raciocínio abdutivo nas diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática. Esse raciocínio atua na formulação do problema, na formulação de hipóteses que são ancoradas nas experiências vivenciadas pelos alunos, e por fim, o raciocínio abdutivo atua na matematização do problema, uma vez, que associado a ele, estão os raciocínios dedutivo e indutivo.

A categoria *atividades de modelagem matemática desencadeiam o raciocínio abdutivo* nos permite inferir que atividades de modelagem matemática proporcionam o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, pois, essas atividades requerem dos alunos ações que estão associadas ao raciocínio abdutivo. Para realizar uma atividade de modelagem matemática partimos de hipóteses, ou seja, inferências abdutivas e pela observação, criamos dúvidas sobre o que está sendo observado, fazemos simplificações, suspeitamos sobre a veracidade das hipóteses elencadas sobre o fenômeno estudado, buscamos evidências para a construção do modelo matemático que nos permita fazer uma leitura do fenômeno em estudo.

A categoria *habilidades criativas mediadas pelo raciocínio abdutivo em atividades de modelagem matemática* sinaliza que atividades de modelagem matemática proporcionam o desenvolvimento de habilidades criativas (sensibilidade de reconhecer problemas, fluência, flexibilidade e elaboração) e essas são relacionadas ao raciocínio abdutivo. Por outro lado, o raciocínio abdutivo proporciona o desenvolvimento de tais habilidades que podem ser observados durante toda a atividade.

Inferimos que características das atividades de modelagem matemática como o estudo da matemática por meio de problemas não matemáticos e o fato de que os problemas a serem investigados podem ser escolhidos pelos alunos, são algumas das características que tornam o trabalho com a modelagem matemática em sala de aula propício para o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio abdutivo.

Com essa pesquisa, acrescentamos conhecimento à área de Modelagem Matemática na Educação Matemática no que diz respeito às implicações do raciocínio abdutivo para atividades de modelagem matemática e em como atividades de modelagem matemática proporcionam o desenvolvimento do raciocínio abdutivo. Reconhecemos que as atividades de modelagem matemática possibilitam o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, sendo esse o responsável pelo desenvolvimento do raciocínio dedutivo e indutivo. Além disso, o raciocínio abdutivo favorece o desenvolvimento de habilidades criativas em atividades de modelagem matemática.

Embora essa pesquisa contribua para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática reconhecemos algumas limitações. É possível que outras relações possam ser identificadas, considerando outros contextos ou outros alunos. Entretanto, mesmo encontrando limitações nossa pesquisa pode nortear a realização de outras pesquisas que possam identificar estas e/ou outras relações, contribuindo assim para o ensino da matemática.

Propiciar momentos para observações, apreciação da situação-problema e percepção do contexto utilizado, bem como ter suas opiniões e indagações ouvidas e testadas propicia o desencadeamento dos raciocínios abdutivo, dedutivo e indutivo no processo de aprendizagem, e tais raciocínios têm papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático.

7. REFERÊNCIAS

ALENCAR, E. M. L. S. de. **Como desenvolver o potencial criador**: um guia para a liberação da criatividade em sala de aula. Petrópolis: Editora Vozes, 1990.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, 2(2), p. 117-134, 2009.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M.W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. In VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis, 2015. **Anais** do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015, p. 1-13.

ALMEIDA, L. M. W; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.

ALMEIDA, L. M. W; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na Educação Matemática. In ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. P. **Modelagem matemática em Foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias** (En línea), v. 6, p. 8-17, 2011.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação**, v.11, n. 3, p. 483- 498, 2005.

ANASTÁCIO, M. Q. A. **Considerações sobre Modelagem Matemática e a educação matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- UNESP, Rio Claro, 1990.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: Concepções e Experiências de Futuros Professores. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNESP- Rio Claro, 2001.

BARDIN. L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Editora Edições 70, 1977.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. Ed. São Paulo: Contexto Editora, 2011.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos**.** In V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012. **Anais** do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2012, p. 1-13.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais, **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.7-32, 2009.

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

BLUM, W. Applications and modelling in Mathematics teaching: A review of arguments and instructional aspects. In: NISS, Mogens et al (eds). **Teaching of mathematical modelling and applications**. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1991.

COCCHIERI, T. Conceito de Abdução: Modalidades de Raciocínio Contidas no Sistema Lógico Peirceano. **Clareira: Revista de Filosofia da região Amazônica.** V. 2, p. 75-92, 2015.

ECO, U. **Sobre os espelhos e outros ensaios**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

FARIAS, M. M. R. **As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica:** uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de Matemática**.** 2007. Dissertação (Pós-graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

FELDMAN, D. H.; CSIKSZENTMIHALYI, M.; GARDNER, H. A framework for the study of creativity. In FELDMAN, D. H.; CSIKSZENTMIHALYI, M.; GARDNER, H. **Changing the world:** a framework for the study of creativity. Westport, CT: Praeger, 1994.

FIDALGO, A; GRADIM, A. **Manual de Semiótica**. UBI – PORTUGAL: UBI – PORTUGAL. www.ubi.pt. 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLEITH, D. S.; ALENCAR, E. M. L. S. Escala sobre o Clima para a Criatividade em sala de aula. **Revista Psicologia: teoria e pesquisa.** Brasília, v. 21, p. 85-91, 2005.

FRANCHI, R. H. de O. L. **A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia.** 1993. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1993.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de Conteúdo**. Brasília: Liber Livro Editora, 2ª Edição, 2005.

GOMES, G. F.; SILVA, K. A. P. . Registros de representação semiótica em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida no 1.º ano do ensino médio. In: XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba - PR. **Anais** Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Paraná, 2013.

GONTIJO, C. H. Criatividade em Matemática: identificação e promoção de talentos criativos. **Revista Educação**. Santa Maria, v. 32, p. 481-494, 2007.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, Vol. 38 n. 3, pp. 302-310, 2006.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and mathematical modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, Madison, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KEHLE, P.; LESTER JR., F. K. A semiotic look at modeling behavior. In: LESH, D.; DOERR, H. **Beyond constructivism**: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Hillsdale: Erlbaum, 2003. p. 97-122.

KESKE, H. I. Incidentes Peirceanos: a lógica do constante do jogo das abduções. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Comunicação e Linguagens** Universidade Tuiuti do Paraná, 2008.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAGNANI, L. Understanding Abduction: Inference, Perception, and Instinct IN MAGNANI, L.(ed) **Model-Based Reasoning in Science and Technology, Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,2014.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de Modelagem**. 2004. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. **BOLEMA,** Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 861-882, 2012.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A.M. A. Construção de Conceitos Matemáticos na Educação Básica numa Abordagem Peirceana. **Bolema.** Rio Claro, p. 887-904, 2010.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

NICOLAU, M. et al. Comunicação e Semiótica: visão geral e introdutória à Semiótica de Peirce. **Revista eletrônica Temática.** Ano VI, n. 08, 2010.

PAULA, J. B.; OTTE, M. F. Semiótica com enfoque interpretativo ao desenvolvimento do conhecimento matemático In: 4º VII CIBEM, 2013, Montevidéu, 2013.

PAULOS, J. A. **Mas allá de los números**. Barcelona: Tusquets Editores. 1993.

PAVANI, N. Juízos perceptivos como fundamento do conhecimento. ***In*** anais 5º Encontro de Pesquisa na Graduação em Filosofia da Unesp, 2010, Marília.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 2 reimpressão da 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2015. (Estudos, 46).

PEREIRA, E. **A modelagem matemática e suas implicações para o desenvolvimento da criatividade.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2008.

ROSA, C. C. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA, L. **Percepção.** São Paulo**:** Editora Experimento, 1998.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SILVA, K.A.P. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.** (Dissertação de mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina,2008.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. **Educação Matemática em Revista,** p. 28-36, 2011

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica** - A questão da democracia. São Paulo: Editora Papirus, 2001.

STERNBERG, R. J.; LUBART, T. I. The concept of creativity: prospects and paradigms. In: STERNBERG, S. J. (Org.). **Handbook of creativity**. New York:Cambridge University, 1999. p. 3-15.

TARDIF, T. Z.; STERNBERG, R. J. What do we know about creativity? In: STERNBERG, R. J. (Ed.) **The nature of creativity:** contemporary psychological perspectives. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 175p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VIRGOLIM, A. M. R. **Talento criativo:** expressão em múltiplos contextos**.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2007.

ANEXOS

ANEXO A

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

E PERFIL DO ACADÊMICO

Londrina, abril de 2015.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa de mestrado, sob responsabilidade de Daiany Cristiny Ramos, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante as aulas de Introdução à Modelagem Matemática, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-lo em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	RG	Assinatura
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

PERFIL DO ACADÊMICO

1. Nome: ____

2- Idade: _________

3. Ano em que iniciou o curso: ______

4. Você já tem experiência como professor de Matemática? Quanto tempo? Em que nível de escolaridade?

5. Você participa do PIBID? Quanto tempo?

6. Você já teve algum contato com a Modelagem Matemática? Quando? Como foi essa experiência?

7. Assinale aspectos que considera essenciais na abordagem na resolução de um problema que envolve a matemática:

( ) A formação de hipóteses explicativas para o problema.

( ) O conhecimento dos conceitos matemáticos.

( ) Ter ideias diferentes para resolver o problema.

( ) Conceber diferentes representações para o problema.

( ) A capacidade de identificar um problema a partir de informações dadas em um texto.

( ) A capacidade de identificar informações relevantes em um texto para a resolução do problema.

( ) A resposta deve ser algo original e novo.

( ) Identificar possíveis padrões.

8. Você considera importante que suas ideias para a resolução de um problema possuam uma variedade de detalhes? Justifique.

9. Ao resolver um problema você muda de abordagem, ou estratégia com facilidade? Justifique.

10. O que você entende por criatividade? Quais características você acredita que uma pessoa criativa possui?

ANEXO B

QUESTIONÁRIOS DAS ATIVIDADES: O VOLUME DA MAÇÃ E DINÂMICA POPULACIONAL DE CORNÉLIO PROCÓPIO

Aluno:____ Data 01/07/15

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE "DINÂMICA PPOPULACIONAL DE CORNÉLIO PROCÓPIO" E VOLUME DA MAÇÃ RESPONDA:

1) Quais os conteúdos matemáticos que você identificou durante o desenvolvimento atividade de modelagem? Esses conteúdos já haviam sido aprendidos?
2) Você consegue identificar outro estudo de situação prática que recaia no mesmo conteúdo que utilizamos nessa atividade? Se sim, descreva-a brevemente.
3) Em algum momento da atividade você pensou em mudar sua estratégia de resolução? Justifique.
4) Você resolveria o problema de outras maneiras? Se sim, quais? Se não, por que?
5) Com base na sua atividade, quais características estão presentes:

   ( ) ideias diferentes para a resolução do problema.

   ( ) as ideias foram detalhadas ao longo do desenvolvimento da atividade.

   ( ) seu modelo é algo original, ou seja, as ideias utilizadas para o desenvolvimento do modelo, foram algo novo para você.

   ( ) várias representações foram usadas no desenvolvimento da atividade.

   ( ) Outras. Quais? ______________________________________

Justifique cada item assinalado:

6) O uso de Modelagem Matemática em sala de aula:

   ( ) Facilita a compreensão do conteúdo matemático;

   ( ) Dificulta a compreensão do conteúdo matemático;

   ( ) Não vale a pena, pois o mesmo é confuso;

   ( )Desenvolve a criatividade;

   ( )Inibe o desenvolvimento da criatividade;

   ( )Favorece o desenvolvimento da autonomia do aluno;

   ( ) Inibe o desenvolvimento da autonomia do aluno;

   ( )Outros:____

7) Quais informações foram levadas em consideração para a elaboração das hipóteses?
8) Para a elaboração das hipóteses você fez alguma analogia com alguma situação já conhecida? Se sim, qual?

9) Na realização dessa atividade, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes. Descreva essas ações, explicando o que te levou a realizá-las.

ANEXO C

QUESTIONÁRIOS DAS ATIVIDADES: O CHOCOLATE E A EMISSÃO DE CO_2 DOS CARROS DE UMA FAMÍLIA

Aluno:____ Data _______

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE "EMISSÃO DE CO_2" E "O CHOCOLATE" RESPONDA:

1) Para a criação do problema você levou em consideração alguma das informações contidas no texto? Se sim, quais? Se não, por quê?
2) Quais informações foram levadas em consideração para a elaboração das hipóteses?
3) Para a elaboração das hipóteses você fez alguma analogia com alguma situação já conhecida? Se sim, qual?
4) Em algum momento da atividade você pensou em mudar sua estratégia de resolução? Justifique.
5) Você resolveria o problema de outras maneiras? Se sim, quais? Se não, por que?
6) Com base na sua atividade, quais características estão presentes:

   ( ) ideias diferentes para a resolução do problema.
   ( ) as ideias foram detalhadas ao longo do desenvolvimento da atividade.
   ( ) seu modelo é algo original.
   ( ) várias representações foram usadas no desenvolvimento da atividade.
   ( ) Outras. Quais? ______________________________________

Justifique cada item assinalado.

7) O uso de Modelagem Matemática em sala de aula:
   ( ) Facilita a compreensão do conteúdo matemático;
   ( ) Dificulta a compreensão do conteúdo matemático;
   ( ) Não vale a pena, pois o mesmo é confuso;
   ( )Desenvolve a criatividade;
   ( )Inibe o desenvolvimento da criatividade;
   ( )Favorece o desenvolvimento da autonomia do aluno;
   ( ) Inibe o desenvolvimento da autonomia do aluno;
   ( )Outros:____
8) Quais os conteúdos matemáticos que você identificou durante o desenvolvimento atividade de modelagem? Esses conteúdos já haviam sido aprendidos?

9) Na realização dessa atividade, você desenvolveu várias ações para atingir um objetivo, teve que pensar em várias coisas diferentes. Descreva essas ações, explicando o que te levou a realizá-las.

ANEXO D

ENTREVISTA

Entrevista 3º momento

1) Fale sobre o desenvolvimento da atividade.
2) Em algum momento da atividade você pensou em desistir do tema e procurar outro? Por que?
3) O que foi levado em consideração para a identificação e formulação do problema?
4) Quais informações vocês consideraram para a elaboração das hipóteses?
5) Com base em que evidências vocês construíram o modelo?
6) Com o modelo criado é possível fazer algum tipo de generalização?
7) Quais as dificuldades sentidas por você durante o desenvolvimento da atividade?
8) Os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade eram coisas já aprendidas ou foi necessário algum tipo de suporte?
9) O que você considera mais importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática? Por que?
10) Você gostou das atividades desenvolvidas? Por que?

ANEXO E

DESCRIÇÃO ABREVIADA DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

E1- ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PRIMEIRO MOMENTO

Dinâmica populacional de Cornélio Procópio

Essa atividade foi proposta pela pesquisadora e desenvolvida pelos alunos com a ajuda da professora da turma e da pesquisadora. Inicialmente foi entregue aos alunos a situação-problema, conforme consta no quadro a seguir.

Quadro: descrição do tema dinâmica populacional

De acordo com Pedroso[13], o estudo sobre a dinâmica populacional do mundo não é algo recente. Remonta-se a um período anterior ao século XVIII, em que se formularam teorias sobre o crescimento populacional, utilizadas até os dias atuais. Cada uma dessas teorias correspondia a uma visão de sociedade e do próprio movimento histórico que se seguia. Embora houvesse essas distinções, todas as teorias formuladas até então se preocupavam em explicar o crescimento da população e seus impactos sobre a natureza e a organização da sociedade.

Segundo Santiago[14], pode-se entender dinâmica populacional como o estudo da variação na quantidade dos indivíduos de determinada população. Já o conceito população pode ser definido como o conjunto de pessoas que residem em determinado território, que pode estar constituído em uma cidade, um estado, um país ou mesmo o planeta como um todo.

Esse autor ainda destaca que é fundamental ao se analisar dinâmica populacional que não se confunda população com nação, conceito que é definido como o conjunto de pessoas que repartem a mesma história, estando, por isso, inseridas em um mesmo panorama cultural. De acordo com essa orientação, a população de um país pode estar dividida em várias nações, ao mesmo tempo em que uma nação pode estar dividida entre dois ou mais países.

No passado, a dinâmica populacional foi muito associada às ideias de explosão populacional, recebendo grande atenção os trabalhos de Thomas Maltus relacionados à problemática, que procuravam alertar sobre o crescimento desordenado da população e a inevitável escassez de alimentos e recursos que tal crescimento traria.

No Brasil o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é responsável pela produção e análise de informações estatísticas relacionadas a população, a geografia, e também é responsável pela coordenação dos sistemas estatístico e cartográfico nacionais.

O site do IBGE[15] disponibiliza informações de todas as cidades do Brasil. As tabelas a seguir mostram os dados referentes a Cornélio Procópio:

Ano	População em Cornélio Procópio
1991	46.644
1996	46.313
2000	46.861
2007	46.931
2010	46.928

[13] Artigo de Isabella Vitória Castilho Pimentel Pedroso disponível em: http://educacao.globo.com/geografia/assunto/dinamica-populacional/populacao.html

[14] Artigo disponível em: http://www.infoescola.com/geografia/dinamica-populacional/

[15] http://www.ibge.gov.br/home/

Problema: Qual é a população estimada de Cornélio Procópio em 2015?

Hipóteses:

O crescimento de uma população é proporcional a população em cada instante.

As taxas de fertilidade (n) e mortalidade (m) são constantes

Variáveis:

P(n)= população

T= tempo

N= variável auxiliar

Modelo:

Seja P o número de indivíduos da população de Cornélio, este número é dependente do tempo e assim podemos escrever:

$$\frac{dP}{dt} = P(t) \qquad (1)$$

P(t) assume somente valores inteira sendo assim uma função discreta de t. Porém quando o número de indivíduos é suficientemente grande, P(t) pode ser aproximado por uma função contínua, variando continuamente com o tempo. Como assumimos que a taxa de natalidade e mortalidade são constantes temos que $k = n - m$, onde k é a constante de crescimento. Assim temos que

$$k = (n - m) = \frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)}$$

O modelo discreto é dado por:

$$P(t+1) - P(t) = kP(t)$$

Se considerarmos dada a população inicial $P(0) = P_0$, a solução da igualdade acima é obtida por recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P(t+1) = P(t)(1+k) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Temos então: $P(t) = (k+1)^t P_0$. Dessa expressão temos que $k = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$

Vamos calcular a taxa de crescimento da população de Cornélio no período de 1991 a 2010.

$k = \sqrt[19]{\frac{46928}{46644} - 1 =} 0{,}032\%$ ao ano nestes 19 anos.

Assim a população de Cornélio pelo modelo discreto será: $P(t) = (0{,}00032 + 1)^{24}46644 = 47003.$

O modelo contínuo para a taxa de crescimento é dado por $\beta = \ln(1 + k)$, temos então que $\beta = \ln(1 + 3{,}2x10^{-4}) = 3{,}1948x10^{-4}$

Voltando a equação (1), se $P = P(t)$ mede a população num determinado instante de tempo t, temos o seguinte modelo contínuo que é dado por: $\frac{dP}{dt} = \beta p$ onde a taxa β é a taxa de crescimento. O β calculado acima mostra que houve um crescimento de 0,032% ao ano, caso β fosse menor que zero teríamos decrescimento.

A equação diferencial pode ser resolvida pelo Método de Separação de Variáveis. Assim temos, que: $\frac{dP}{dt} = \beta p$, pode ser escrito como, $\frac{dp}{p} = \beta dt.$

Aplicando o Método de solução, temos:

$$\int \frac{dp}{p} - \int \beta dt = c$$

O modelo Malthusiano, devido á curva exponencial de P(t) pode ser denominado como modelo de crescimento exponencial, obtendo-se a solução dada pela expressão: $P(t) = P_0 e^{\beta t}$. Com essa expressão podemos calcular a população estimada para 2015 de Cornélio Procópio. Para facilitar os cálculos usaremos uma variável auxiliar $n = t - 1991$, assim o modelo contínuo é $P(n) = P_0 e^{\beta(t-1991)}$. Portanto a população de Cornélio em 2015 será aproximadamente:

$$P(24) = 46644e^{3{,}2x10^{-4}(2015-1991)} = 47003\, mil\ habitantes$$

Validação:

Ano	Variável auxiliar	População	Modelo(contínuo)
1991	0	46.644	46644
1996	5	46.313	46719
2000	9	46.861	46779
2007	16	46.931	46883
2010	19	46.928	46928
2015	24	-	47003

Portanto a população de Cornélio Procópio em 2015 será de 47003 habitantes.

E3-- ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO TERCEIRO MOMENTO

A FORÇA DESEMPENHADA PELO PEÃO EM UMA MONTARIA DE TOUROS

Problema

Qual a força desempenhada pelo peão quando o touro o Agressivo atinge a altura máxima em um pulo?

Inteiração

Pesquisa sobre os rodeios, sobre os touros, sobre os peões e sobre os tipos de pulo que um touro pode dar durante um rodeio.

Matematização

Definição de hipóteses:

- O boi atinge a altura máxima em 3 segundos.
- A força desempenhada pelo peão dependerá do peso do boi.

Definição de Variáveis

- P- Peso
- t- Tempo
- I - Impulso
- F- Força

Matemática do problema

Para a resolução do problema os alunos recorreram a conteúdos físicos como o cálculo do impulso e a terceira lei de Newton.

Situação final

Usando a terceira lei de Newton os alunos concluíram que a força que o peão desempenha para se manter no boi quando ele atinge sua altura máxima deve ser a mesma que boi faz para dar o pulo, ou seja, o impulso que o boi desempenha para pular.