



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

MARCOS ANTONIO JARABA RODRIGUEZ

UM HAMILTONIANO LOCAL PARA ESPAÇOS
TEMPOS KERR-SCHILD COM APLICAÇÃO NA
TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS

Londrina
2024

MARCOS ANTONIO JARABA RODRIGUEZ

**UM HAMILTONIANO LOCAL PARA ESPAÇOS
TEMPOS KERR-SCHILD COM APLICAÇÃO NA
TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Departamento de Física da Universidade Estadual
de Londrina, como requisito parcial à obtenção do
título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Mario César Baldiotti.

Londrina

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Rodrigues, Marcos Antonio Jaraba.

Título do Trabalho: Um hamiltoniano local para espaços tempos Kerr-Schild com aplicação na Termodinâmica de Buracos Negros. / Marcos Antonio Jaraba Rodrigues.

-

Londrina, 2024.

200 f. : il.

Orientador: Mario César Baldiotti.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2024. Inclui bibliografia.

1. Hamiltoniano local- Teses. 2. Formalismo do Espaço de Fase Covariante- Teses. 3. Kerr-Schild- Teses. 4. Buraco negro Kerr-AdS₄ - Teses. I. Baldiotti, Mario César. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Un hamiltoniano local para espaços tempos Kerr-Schild com aplicação

MARCOS ANTONIO JARABA RODRIGUEZ

**UM HAMILTONIANO LOCAL PARA ESPAÇOS
TEMPOS KERR-SCHILD COM APLICAÇÃO NA
TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Mario César Baldiotti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Ronaldo C. Batista
Universidade Federal do Rio Grande do Norte-
UFRN

Prof. Dr. Carlos Andre Hernanski
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Rodrigo Fresneda
Universidade Federal do ABC- UFABC

Prof. Dr. Victor Ezequiel De La Hoz Coronell
Universidad del Atlantico (Colombia) - UA

Londrina, 2024.

À minha mãe Esther Rodriguez e meus queridos irmãos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Meus agradecimentos em especial:

- Ao professor Mario César Baldiotti, por ser meu orientador no doutorado. Imensa gratidão a ele.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Estadual de Londrina, por me permitir fazer parte da sua comunidade.
- Aos membros da banca, pela avaliação do trabalho.
- À minha família, pelo apoio constante em todo esse processo.

"A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro."

Albert Einstein.

JARABA, Marcos Antonio. **Um hamiltoniano local para espaos tempos Kerr-Schild com aplicao na Termodinâmica de Buracos Negros**. 2024. 89fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Doutor em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

Resumo

Exploramos o formalismo do Espao de Fase Covariante desde uma perspectiva local. Sob esta abordagem, propomos um hamiltoniano local para soluoes de vácuo das equaoes de Einstein que possuem a estrutura Kerr-Schild. Quando calculamos as cargas locais associadas a este hamiltoniano para o buraco negro Kerr-AdS₄, os nossos resultados coincidem com os obtidos por outros métodos. Além disso, a nossa proposta oferece uma nova forma de interpretar as quantidades conservadas associadas a estas soluoes de buracos negros. Utilizando este hamiltoniano, mostraremos que uma termodinâmica satisfria pode ser estabelecida para o caso do buraco negro Kerr-AdS₄.

Palavras-chave: Hamiltoniano local. Kerr-Schild. Formalismo do Espao de Fase Covariante. Buraco negro Kerr-AdS₄. Termodinâmica.

JARABA, Marcos Antonio. **A local Hamiltonian for Kerr-Schild spacetimes with application to Black Hole Thermodynamics**. 2024. 89p. Senior Thesis (Ph.D in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2024.

Abstract

We explore the Covariant Phase Space formalism from a local perspective. Under this approach, we propose a local hamiltonian for vacuum solutions of the Einstein equations that have the Kerr-Schild structure. When we calculate the local charges associated to this hamiltonian for the Kerr-AdS₄ black hole, our results coincide with those obtained by other methods. Furthermore, our proposal offers a new way to interpret the conserved quantities associated with these black hole solutions. Using this hamiltonian, we will show that a satisfactory thermodynamics can be established for the case of the Kerr-AdS₄ black hole.

Keywords: Local hamiltonian. Kerr-Schild. Covariant Phase Space formalism. Kerr-AdS₄ black hole. Thermodynamics.

Lista de ilustrações

Figura 1 - Gráfico de energia versus L	61
--	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
2	FORMALISMO DE LEE-WALD-IYER	27
2.1	Teorias lagrangianas difeomorficamente invariantes.....	27
2.1.1	Teorias com fundo métrico fixo	30
2.1.2	Relatividade Geral	32
2.2	Definição de hamiltoniano da teoria	35
3	DEFINIÇÕES CANÔNICAS DE QUANTIDADES CONSERVADAS NA RG	37
3.1	Método dos super-potenciais	37
3.2	Métodos hamiltonianos	39
3.2.1	Definições globais (ADM) para espaços tempos assintoticamente AdS	39
3.2.2	Definição quase local de Brown-York	44
4	UM HAMILTONIANO LOCAL PARA ESPAÇOS TEMPOS COM A FORMA KERR-SCHILD	47
4.1	Estrutura Kerr-Schild	48
4.1.1	Forma KS de Gibbons	50
4.2	A nova proposta	51
5	COMPARAÇÃO COM OUTRAS DEFINIÇÕES	55
5.1	ADM vs Hamiltoniano local	55
5.2	BY vs Hamiltoniano local.....	60
5.3	Super-potencial KBL vs Hamiltoniano local	64
6	TERMODINÂMICA DE KERR-ADS₄	67
6.1	Método canônico de Iyer-Wald	67
6.2	Termodinâmica de Kerr-AdS ₄ via método local.....	69
6.2.1	Formula de Smarr	70
6.2.2	Primeira lei	72
7	CONCLUSÕES	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICES	83

	APÊNDICE A – (3 + 1)-FORMALISMO	85
A.1	Equações de Gauss-Codazzi	86

1 Introdução

Quando temos qualquer sistema físico, talvez um dos conceitos mais sutis a definir seja o conceito de energia e/ou quantidades conservadas associadas a esse sistema. Da mecânica clássica sabemos que para sistemas físicos com graus de liberdade finitos, por exemplo, partículas, onde a dinâmica é governada por um lagrangiano, a energia é simplesmente dada pelo hamiltoniano, que é construído puramente a partir do lagrangiano por meio de uma transformação de Legendre (se não houver vínculos). Nestes sistemas, as quantidades conservadas são definidas como aquelas quantidades que comutam com o hamiltoniano sob os parenteses de Poisson. Essa mesma definição de quantidade conservada é levada para a mecânica quântica via quantização canônica, substituindo o parenteses de Poisson pelo comutador de operadores lineares.

Por outro lado, quando lidamos com sistemas com infinitos graus de liberdade, por exemplo, teorias de campos, a questão torna-se um pouco mais complicada, e já não é tão trivial definir um hamiltoniano para este tipo de teorias. Neste caso, o hamiltoniano é definido como um funcional sobre os campos, cujo domínio é determinado por condições de contorno impostas na fronteira do espaço tempo. Chamamos esta abordagem de hamiltoniano não local.

Existem diferentes maneiras de definir um hamiltoniano nas teorias de campos. No caso de teorias de campo com fundo métrico fixo, geralmente é possível estabelecer condições assintóticas nos campos, de modo que o hamiltoniano possa ser construído a partir da componente temporal do tensor energia-momento [1]. Um exemplo comum dessas teorias é o eletromagnetismo. Já para o caso de teorias onde a métrica passa a ser uma entidade dinâmica, a questão torna-se mais difícil, uma vez que não temos um “fundo” com respeito ao qual possamos “medir” as grandezas físicas. Além disso, até hoje não foi possível construir um tensor energia-momento para o campo gravitacional. Todos os candidatos propostos até agora são dados a partir de pseudo-tensores [1]. Isto significa que não podemos associar genuinamente uma densidade de energia ao campo gravitacional a partir de um tensor de energia-momento [2]. Costuma-se dizer que a energia gravitacional não pode ser “localizada” [2, 3]. Historicamente, por estas e outras razões, tem sido difícil ter uma definição satisfatória do conceito de energia e, em geral, de quantidades conservadas na Relatividade Geral (RG).

No contexto da RG, quase todas as definições de energia gravitacional encontradas na literatura podem ser classificadas em dois grandes grupos: canônicas e não canônicas. Estas últimas não necessitam da existência do lagrangiano da RG para serem definidas. Dentro das definições não canônicas, podem ser destacadas aquelas baseadas em espinores [4, 5, 6, 7]. Nessas definições (espinores), assume-se que existe uma representação espinorial do grupo de simetrias assintóticas geradas

por campos vetoriais tipo tempo (ou nulo) ξ^μ [7]. Para cada um desses vetores, um espinor ψ pode ser associado, tal que ξ^μ pode ser representado como: $\xi^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, onde γ^μ são as correspondentes das matrizes gamma do espaço tempo curvo [7]. A partir de ψ , é possível construir uma 2-forma conservada localmente, que é conhecida como: 2-forma espinorial de Nester-Witten [6, 7]. Também podemos encontrar definições não canônicas baseadas em pseudo-tensores. O caso mais relevante talvez seja aquele dado pelo pseudo-tensor de energia-momento para o campo gravitacional de Landau-Lifshitz [1]. Este objeto é construído puramente a partir da métrica e tem a propriedade de que quando é adicionado ao tensor energia-momento da matéria, o tensor total é conservado localmente [1]. No entanto, a dependência explícita deste objeto com relação à métrica dependerá do sistema de coordenadas escolhido. Isso obviamente vai contra do princípio de covariância da RG. Outra definição não canônica encontrada na literatura foi dada por Abbot e Deser [8]. Esta é uma definição perturbativa fundo-dependente, onde se assume que a métrica do espaço tempo é da forma: $g_{\mu\nu}^- + h_{\mu\nu}$, sendo $g_{\mu\nu}^-$ a métrica do espaço tempo de fundo e $h_{\mu\nu}$ a perturbação. Quando as equações de Einstein são expandidas em $h_{\mu\nu}$, a parte linear é separada formando um “tensor de Einstein linearizado” e os termos não lineares formam o que seria o “tensor energia-momento do campo gravitacional”.

Para o caso específico de espaços tempos assintoticamente AdS, existe uma definição formal e bem estabelecida de quantidades conservadas dada por Ashtekar e Magnon [9]. Esta definição é construída utilizando técnicas conformes, onde as grandezas conservadas são calculadas a partir da parte elétrica do tensor de Weyl, associada ao complemento conforme do espaço tempo em questão.

Por outro lado, temos as definições canônicas, que podem ser divididas em 3 sub-grupos: as baseadas em super-potenciais, as baseadas em métodos hamiltonianos e a definição quase local de Brown-York. As definições usando super-potenciais são dadas simplesmente a partir da carga de Noether, associada ao grupo de difeomorfismos que atua no lagrangiano. O super-potencial mais conhecido na literatura é aquele derivado do lagrangiano de Hilbert-Einstein, às vezes também chamado de carga de Komar, porque quando é integrado em uma 2-superfície tipo espaço, assume a forma de uma integral de Komar [10]. Este super-potencial representa uma boa definição de energia para espaços tempos estáticos e estacionários [2]. Prova disso é que, quando avaliado nas soluções de Schwarzschild e Kerr, fornece como resultado a metade da massa do buraco negro. Para compensar isso, este super-potencial é geralmente definido introduzindo um fator de 2 na carga de Noether [2, 11]. Com a motivação de construir um super-potencial que reproduzisse exatamente a massa dos buracos negros de Kerr e Schwarzschild, Katz [12] propôs “uma correção” para o super-potencial de Komar. Este novo super-potencial era derivado de um lagrangiano “bimétrico” (depende de duas métricas), previamente introduzido por Rosen [12].

Tomando uma das métricas como a do espaço de Minkowski e a outra do espaço tempo de Kerr, Katz conseguiu mostrar que esse super-potencial conseguia reproduzir corretamente a massa e o momento angular do espaço tempo de Kerr. Posteriormente, essa ideia de Katz foi formalizada no que hoje é conhecido na literatura como: o formalismo de super-potenciais KBL [13].

Ao contrário das definições com super-potenciais, onde as quantidades conservadas são derivadas de um objeto covariante (a carga de Noether), as definições baseadas em hamiltonianos são construídas a partir do formalismo ADM [14] da RG, o qual “quebra” a covariância manifesta da teoria. Normalmente, para construir um hamiltoniano adequado, começa-se com o hamiltoniano da RG derivado do formalismo ADM, que é “puramente vinculado” ($H = 0$). Em seguida, se acrescentam contra-termos de superfícies, de modo que a variação do hamiltoniano total seja determinada univocamente pelas equações de Hamilton da teoria. Obviamente, isso implica impor condições de contorno na métrica sobre a fronteira do espaço tempo. Os primeiros a usarem esta abordagem para calcular a massa E e o momento \mathbf{P} de espaços assintoticamente planos foram Regge e Teitelboim [15]. Eles assumiram condições assintóticas na métrica no infinito espacial, de modo que o 4-vetor (E, \mathbf{P}) , calculado a partir de integrais de superfície, fosse finito e invariante sob o grupo de simetrias de Poincaré [15]. Posteriormente, Teitelboim e Henneaux [16], calcularam essas mesmas quantidades para espaços tempos assintoticamente AdS, substituindo o grupo de simetrias assintóticas de Poincaré pelo grupo $O(3, 2)$. As definições hamiltonianas de Regge-Teitelboim-Henneaux têm a propriedade de serem definições globais, onde as quantidades conservadas são calculadas a partir de integrais de superfície avaliadas no infinito espacial. Porém, também existem definições globais obtidas avaliando integrais no infinito nulo do espaço tempo [17, 18, 19]. Estas definições no infinito nulo são usadas no formalismo de Bondi-Sachs, para calcular a energia gravitacional irradiada por uma fonte sem usar a aproximação linear [17, 20]. Esta energia é comumente conhecida como: Massa de Bondi [17].

Outro método canônico muito comum na literatura é o método quase local introduzido por Brown-York [21]. Ao contrário de outras definições canônicas que são derivadas do lagrangiano ou do hamiltoniano, este método é derivado da ação da teoria, que é construída a partir da ação usual de Hilbert-Einstein e do termo de superfície de Gibbons-Hawking-York [22]. Outra diferença desta definição, em relação aos demais métodos canônicos, é que esta permite calcular quantidades conservadas associadas a superfícies arbitrárias, daí o nome “quase local”. Contudo, um dos pontos fracos do método é que este precisa introduzir contra-termos na ação para regularizar as quantidades conservadas para valores finitos. Por isso também é conhecido como: método dos contra-termos.

Todas as definições canônicas citadas acima podem ser unificadas dentro do

contexto do formalismo do Espaço de Fase Covariante. Este formalismo foi introduzido por Lee, Wald e Iyer [23, 24, 25]. O formalismo generaliza e introduz a noção de hamiltoniano para teorias difeomorficamente covariantes, baseadas em lagrangianas que podem depender de segundas ou mais derivadas nos campos. Obviamente, isso não pode ser feito na formulação hamiltoniana usual, que só funciona para lagrangianos que dependem no máximo das primeiras derivadas nos campos. O hamiltoniano no formalismo de Lee-Wald-Iyer é construído a partir da corrente simplética da teoria, que é uma 3-forma covariante construída localmente a partir do lagrangiano. Esta ideia de definir o hamiltoniano desta forma é muito útil na termodinâmica de buracos negros. Conforme mostrado por Wald e Iyer [24, 25], a primeira lei da termodinâmica para buracos negros pode ser deduzida da lagrangiana, introduzindo o conceito de entropia canônica. Esta abordagem funciona para qualquer teoria da gravidade baseada em um lagrangiano difeomorficamente invariante, que admite uma solução estacionária assintoticamente plana de buraco negro.

Embora o formalismo de Lee-Wald-Iyer defina o hamiltoniano como um funcional no espaço de fase da teoria, o seu carácter covariante nos permite uma certa “vantagem” para tratar o hamiltoniano desde uma perspectiva local, em vez de uma perspectiva funcional. Entretanto, até onde podemos verificar, essa perspectiva local ainda não foi explorada na literatura. Este é o objetivo central deste trabalho: explorar o carácter local do formalismo de Lee-Wald-Iyer no contexto da RG. Mais especificamente, apresentar uma proposta para uma densidade hamiltoniana que permita calcular a energia numa região finita do espaço, sem a necessidade da adição de contra-termos, nem a exigência da fixação de condições de fronteira no infinito espacial. Veremos que, sob esta perspectiva local, é possível reproduzir resultados amplamente conhecidos na literatura de quantidades conservadas, associadas a soluções de determinados buracos negros. Além disso, veremos que desde esta perspectiva local, é possível estabelecer uma termodinâmica satisfatória para o caso de buracos negros girando no espaço tempo Anti De Sitter. Nossos resultados corroboram aqueles obtidos previamente por Kastor, Dollan e Cvetic [26, 27, 28], nos quais, a constante cosmológica é introduzida como uma variável termodinâmica adicional. Nosso formalismo permite justificar essa introdução sob um ponto de vista geométrico.

O texto está distribuído da seguinte forma: no capítulo 2, introduziremos o formalismo de Lee-Wald-Iyer, mostrando a partir de dois exemplos concretos, como o formalismo funciona e pode ser usado para encontrar pares de variáveis canonicamente conjugadas. No capítulo 3, examinaremos algumas definições de quantidades conservadas usadas na RG, desde o contexto do formalismo de Lee-Wald-Iyer. A partir do capítulo 4 começa o conteúdo original deste trabalho. Neste capítulo definiremos o conceito de hamiltoniano local, onde proporemos um hamiltoniano local para determinadas soluções das equações de Einstein. No quarto capítulo, compararemos nossa

proposta com algumas outras definições. E finalmente, no quinto capítulo, faremos uma análise termodinâmica, utilizando nossa proposta local, onde os resultados serão comparados com os obtidos em [26, 27, 28].

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, utilizaremos a assinatura para a métrica $(-, +, +, +)$, com letras gregas para denotar componentes espaço temporais e letras latinas para denotar componentes espaciais. Também, usaremos unidades naturais onde $\hbar = c = k_B = 1$.

2 Formalismo de Lee-Wald-Iyer

Neste capítulo, desenvolveremos as ideias expostas em [23, 24, 25], sobre um método geral para introduzir o carácter simpléctico numa teoria lagrangiana de campos. Este método é conhecido comumente na literatura como o formalismo de Lee-Wald-Iyer (LWI), ou também como formalismo do Espaço de Fase Covariante. O método concentra sua atenção nos termos de contorno que resultam quando a ação é variada, que muitas vezes não são levados em conta. O método formaliza a ideia de “variá-la ação”, permitindo construir sistematicamente quantidades conservadas associadas às simetrias do espaço tempo onde os campos são definidos. Estas quantidades conservadas são construídas a partir de uma 3-forma covariante, que carrega o carácter simpléctico da teoria, introduzindo e generalizando a noção de um hamiltoniano na teoria. Por simplicidade, aqui consideraremos apenas teorias baseadas em campos tensoriais definidos em um espaço tempo 4-dimensional com métrica $g_{\mu\nu}$ e com suas derivadas ∇ dadas pela conexão de Christoffel. Ademais, usaremos uma orientação onde a forma de volume é dada por: $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-g}}{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, sendo ϵ o símbolo de Levi-Civita. A generalização para dimensões arbitrárias pode ser encontrada em [24, 25].

2.1 Teorias lagrangianas difeomorficamente invariantes

Geralmente, diz-se que as equações de movimento de uma teoria local de campos tensoriais ϕ , são derivadas de um lagrangiano, se existe uma densidade escalar ou mais exatamente uma 4-forma¹ \mathbf{L} , tal que tomando sua primeira variação² em relação aos campos obtém-se [23, 24]

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi)\delta\phi + d\Theta(\phi, \delta\phi), \quad (2.2)$$

onde as equações de movimento são dadas por $\mathbf{E} = 0$ e Θ é uma 3-forma construída localmente de ϕ e $\delta\phi$, que é linear em $\delta\phi$ e suas derivadas. Normalmente \mathbf{L} , \mathbf{E} e Θ possuem a estrutura

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}\epsilon, \quad \mathbf{E} = E(\phi)\epsilon, \quad \Theta_{\nu\alpha\beta} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Theta^\mu, \quad (2.3)$$

¹ Usaremos negrito para denotar quantidades tensoriais.

² Aqui o símbolo δ denota a primeira variação e é definido atuando em qualquer campo tensorial $T(x)$ como [2]

$$\delta T(x) \equiv \frac{dT_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}, \quad (2.1)$$

onde T_λ é qualquer família 1-paramétrica de campos, tal que $T_{\lambda=0} = T(x)$.

onde L , $E_{(\phi)}$ e Θ^μ são quantidades tensoriais definidas a partir da ação e da sua respectiva variação [23], i.e.,

$$S \equiv \int d^4x \sqrt{-g} L \Rightarrow \delta S = \int d^4x \sqrt{-g} E_{(\phi)} \delta\phi + \nabla_\mu \Theta^\mu . \quad (2.4)$$

É fácil ver que se o lagrangiano sofre a transformação de calibre

$$L \rightarrow L' = L + df, \quad (2.5)$$

onde f é uma 3-forma arbitraria, então $E(\phi)$ não muda, no entanto [25]

$$\Theta \rightarrow \Theta' = \Theta + \delta f. \quad (2.6)$$

Quando um dos campos ϕ envolvidos é a própria métrica do espaço tempo, ou seja, a métrica como entidade dinâmica, dizemos que o lagrangiano descreve uma teoria da gravidade. Além disso, se o lagrangiano pode ser escrito de forma manifestamente covariante e não há nenhuma dependência explícita nas coordenadas, a teoria é **difeomorficamente invariante ou covariante** [24, 25], ou em palavras mais simples, as equações de movimento mostram covariância geral. Teorias difeomorficamente invariantes da gravidade, construídas localmente a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ e outros campos tensoriais $\Phi(x)$, mostraram ter a forma geral [24, 25]

$$L = L(g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\alpha\beta}, \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta}, \dots; \Phi, \nabla_\lambda \Phi, \dots) , \quad (2.7)$$

onde o número de derivadas ∇ nos campos é arbitrário, mas finito. No que segue, limitamo-nos apenas a este tipo de teorias. Por exemplo, a RG é uma dessas teorias, com seu lagrangiano dado por (sem constante cosmológica)

$$L_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{RG}} = \frac{1}{16\pi} R \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

sendo R o escalar de Richi. Voltando à equação (2.2), se a variação é produzida por um difeomorfismo 1-paramétrico gerado por um campo vetorial X^μ , então $\delta\phi = \mathcal{L}_X\phi$, onde \mathcal{L} é a derivada de Lie. Com isso, (2.2) fica [24]

$$\mathcal{L}_X L = E \mathcal{L}_X \phi + d\Theta(\phi, \mathcal{L}_X \phi). \quad (2.9)$$

Usando a identidade de Cartans

$$\mathcal{L}_X \alpha = X \cdot d\alpha + d(X \cdot \alpha), \quad (2.10)$$

onde “ \cdot ” significa contração do vetor X com o primeiro índice da forma, é fácil mostrar que $\mathcal{L}_X L = d(X \cdot L)$. Portanto, de (2.9) temos que

$$d(\Theta - X \cdot L) = -E \mathcal{L}_X \phi. \quad (2.11)$$

Se nos restringirmos ao caso onde os campos evoluem dinamicamente de acordo com as equações de movimento ($\mathbf{E} = 0$), obtém-se a corrente conservada

$$\mathbf{J} = \Theta(\phi, \mathcal{E}_x\phi) - X \cdot \mathbf{L}. \quad (2.12)$$

A corrente acima é a **corrente de Noether** associada às simetrias do grupo de difeomorfismos do espaço tempo. Dado que \mathbf{J} é fechada (quando $\mathbf{E} = 0$), então, pelo lema de Poincaré, existe uma 2-forma \mathbf{Q} , tal que \mathbf{J} é dada localmente por

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q}. \quad (2.13)$$

A quantidade \mathbf{Q} é a chamada de **carga Noether** [24]. Obviamente \mathbf{Q} não é única devido à arbitrariedade gerada pelo operador “d” agindo sobre \mathbf{Q} e também devido à arbitrariedade na definição de Θ . Apesar disso, sempre se pode escrever \mathbf{Q} na forma [25]

$$\mathbf{Q} = X^{\mu\nu} \nabla_{[\mu} X_{\nu]} + W_{\mu} X^{\mu} + \mathbf{Y} + d\mathbf{Z}, \quad (2.14)$$

onde o termo $X^{\mu\nu}$ depende apenas do lagrangiano (2.7) por meio de

$$(X^{\mu\nu})_{\sigma\rho} = - \frac{\delta_R \mathbf{L}}{\delta_R R_{\alpha\beta\mu\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho}, \quad (2.15)$$

onde δ_R é a variação considerando $g_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ como quantidades independentes [25]. Tomando uma segunda variação em (2.2), pode-se encontrar outra importante corrente conservada,

$$\delta_1 \delta_2 \mathbf{L} = \mathbf{E}(\phi) \delta_1 \delta_2 \phi + \delta_1 \mathbf{E}(\phi) \delta_2 \phi + d\delta_1 \Theta(\phi, \delta_2 \phi), \quad (2.16)$$

onde usamos o fato de que δ comuta com o operador d. Podemos formar outra equação a partir de (2.16) trocando $1 \leftrightarrow 2$, e subtraindo em (2.16), aproveitando o fato de que as variações sempre comutam, obtemos que

$$d(\delta_1 \Theta(\phi, \delta_2 \phi) - \delta_2 \Theta(\phi, \delta_1 \phi)) = \delta_2 \mathbf{E}(\phi) \delta_1 \phi - \delta_1 \mathbf{E}(\phi) \delta_2 \phi. \quad (2.17)$$

Portanto, se $\delta \mathbf{E}(\phi) = 0$, i.e., se as equações linearizadas do movimento forem satisfeitas, então temos a corrente conservada

$$\omega(\phi, \delta_1 \phi, \delta_2 \phi) \equiv \delta_1 \Theta(\phi, \delta_2 \phi) - \delta_2 \Theta(\phi, \delta_1 \phi), \quad (2.18)$$

que é conhecida como **corrente simplética** [23], a qual é invariante sob a transformação (2.5). Observe que ω foi derivada usando apenas (2.2) e, portanto, esta corrente pode ser definida mesmo para teorias que não são difeomorficamente invariantes.

A corrente simplética é de grande importância na teoria lagrangiana, pois a partir dela é possível construir a noção de hamiltoniano da teoria [24, 25, 29]. Isso

é feito a partir da construção da **forma pre-simplética** associada à uma achronal 3-superfície³ Σ , que é definida como [23, 25]

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) \equiv - \int_{\Sigma} n_{\mu} \omega^{\mu}(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi), \quad (2.19)$$

onde n_{μ} é o vetor normal unitário a Σ e ω^{μ} é o vetor dual de $\omega_{\mu\nu\alpha}$.

A integral acima é feita sobre qualquer elemento do espaço de configuração da teoria. No entanto, a pesar de possuir o carácter simplético, Ω ainda não define o espaço de fase da teoria. O espaço de fase da teoria é construído factorando o espaço de configuração definido em Ω [23, 19]. Portanto, se a teoria descrita pela lagrangiana (2.7) admite a construção de um espaço de fase, é possível introduzir um hamiltoniano H_X , com X sendo o campo vetorial gerador da evolução, onde sua primeira variação está completamente determinada por Ω da forma [23, 24, 25, 19]

$$\delta H_X = \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_X\phi). \quad (2.20)$$

Para uma teoria lagrangiana que admite uma formulação hamiltoniana é sempre possível escrever a forma simplética $\hat{\Omega}$ como [30, 29, 19]

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = - \int_{\Sigma} \delta_1\phi \delta_2 p_{\phi} - \delta_2\phi \delta_1 p_{\phi} \, d\mu(\Sigma), \quad (2.21)$$

onde p_{ϕ} é o momento canônico associado à ϕ e $\mu(\Sigma)$ é uma medida sobre Σ , a qual dependerá de como o momento canônico é definido. Portanto, o formalismo LWI fornece uma maneira de encontrar as variáveis canonicamente conjugadas de uma teoria, com base no conhecimento da corrente simplética ω . A seguir, examinaremos alguns exemplos de como isso pode ser feito para alguns lagrangianos específicos.

2.1.1 Teorias com fundo métrico fixo

Considere teorias de campo simples com fundo métrico fixo ($g_{\mu\nu}$ é fixo), onde o lagrangiano depende no máximo de primeiras derivadas dos campos dinâmicos ϕ . Por exemplo, a teoria de Maxwell em Minkowski com $\phi = A_{\mu}$, sendo A_{μ} o 4-vetor potencial. Embora essas teorias não sejam difeomorficamente invariantes, ainda é possível definir uma corrente simplética. O lagrangiano deste tipo de teorias é

$$L_{\mu\nu\alpha\beta} = L(\phi, \nabla\phi) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.22)$$

Tomando a primeira variação, obtemos

$$\Theta_{\nu\alpha\beta}(\phi, \delta\phi) = \epsilon \int_{\Sigma} \frac{\partial L}{\delta\phi_{\nu\alpha\beta}} \delta\phi_{\nu\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

³ Em princípio, a definição de Ω depende da escolha Σ . No entanto, supondo que Σ é uma superfície de Cauchy, e pela imposição de condições de contorno nos campos dinâmicos no infinito espacial, a definição de Ω será independente de Σ [25, 19].

a qual produz uma corrente simplética dada por

$$\omega_{\nu\alpha\beta}(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\delta_1 \frac{\partial L}{\partial \nabla^\mu \phi} \delta_2 \phi - \delta_2 \frac{\partial L}{\partial \nabla^\mu \phi} \delta_1 \phi \right). \quad (2.24)$$

Portanto, a forma simplética seria:

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \int_{\Sigma} n_\mu \left(\delta_1 \frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu \phi} \delta_2 \phi - \delta_2 \frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu \phi} \delta_1 \phi \right) d\Sigma. \quad (2.25)$$

Observe que se definirmos o momento canônico p_ϕ como

$$p_\phi = n^\mu \frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu \phi}, \quad (2.26)$$

e escolhendo como medida μ , o volume do próprio Σ , obtemos a forma dada em (2.21), onde usamos o fato de que n_μ independe da variação dos campos, dado que o espaço tempo é fixo.

Para este tipo de teorias, quando X é uma simetria do espaço tempo, i.e., X é um vetor de Killing, a corrente definida em (2.12) é conservada⁴

$$J_{\nu\alpha\beta} = J^\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad J^\mu = \frac{\partial L}{\partial \nabla^\mu \phi} \mathcal{L}_X \phi - X^\mu L, \quad (2.27)$$

a qual sempre pode ser escrita na forma

$$J^\mu = T^{\mu\nu} X_\nu + S^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha X_\beta, \quad (2.28)$$

onde as quantidades $T^{\mu\nu}$ e $S^{\mu\alpha\beta}$ são definidas via

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu \phi} \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} L, \quad (2.29)$$

$$S^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha X_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \nabla_\mu \phi} (\mathcal{L}_X - \nabla_X) \phi, \quad S^{\mu\alpha\beta} = -S^{\mu\beta\alpha}.$$

A quantidade $T^{\mu\nu}$ é o bem conhecido tensor canônico de energia momento e $S^{\mu\alpha\beta}$ é o tensor de momento angular (spin) associado ao campo. Usando o fato de que $\nabla_\mu J^\mu = 0$ e X ser um vetor de Killing, se encontra que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -R^\nu_{\mu\alpha\beta} S^{\mu\alpha\beta} \quad (2.30)$$

$$\nabla_\mu S^{\mu\alpha\beta} = -T^{[\alpha\beta]}.$$

Observe que no caso de uma teoria baseada num campo escalar real ($\phi = \Phi$), como a teoria de Klein-Gordon, a qual é descrita pelo lagrangiano

$$\underline{\mathbf{L}}_{KG} \equiv -\frac{1}{2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (2.31)$$

⁴ Para um X geral, isto não se cumpre. Isso ocorre porque a teoria não é difeomorficamente invariante.

temos que $S^{\mu\alpha\beta} = 0$ e, portanto, $T^{\mu\nu}$ é sempre simétrico e conservado. Por outro lado, no caso de uma teoria vetorial ($\phi = A_\mu$), como o eletromagnetismo descrito pelo lagrangiano

$$L_{e.m} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (2.32)$$

o tensor canônico de energia momento

$$T_{e.m}^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \nabla^\nu A_\alpha + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.33)$$

é conservado apenas para espaços tempos planos ($R_{\mu\alpha\beta}^{\nu} = 0$) [2]. Também, o tensor de momento angular

$$S_{e.m}^{\mu\alpha\beta} = -F^{\mu[\alpha} A^{\beta]}, \quad (2.34)$$

não é conservado, uma vez que $T_{e.m}^{\mu\nu}$ é claramente não simétrico. A não conservação de

$T^{\mu\nu}$ e $S^{\mu\alpha\beta}$ é explicada pelo fato de termos fixado o espaço de fundo, que em geral é uma entidade dinâmica com seus próprios graus de liberdade.

2.1.2 Relatividade Geral

Diferente do caso anterior, na RG a métrica é um campo dinâmico. Além disso, o lagrangiano desta teoria tem dependência de segundas derivadas na métrica e, portanto, isso leva a que não seja tão trivial encontrar pares canonicamente conjugados a partir de (2.21). O lagrangiano da RG (sem constante cosmológica) é dado em (2.8) e sua variação produz

$$\Theta_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\mu\lambda} g^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\rho}. \quad (2.35)$$

Com um pouco de esforço e cálculo, pode-se encontrar a corrente simplética $\omega_{\nu\alpha\beta}$, ou seu respectivo vetor dual ω^μ , que é dado por [30]

$$\omega^\mu = \frac{1}{16\pi} P^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\rho} \delta_2 g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \delta_1 g_{\sigma\rho} - \delta_1 g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \delta_2 g_{\sigma\rho}, \quad (2.36)$$

onde

$$P^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\rho} = g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} g^{\rho\alpha} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\rho} - \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} g^{\mu\sigma} g^{\rho\beta} + \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} g^{\sigma\rho}. \quad (2.37)$$

Portanto, a forma simplética seria:

$$\Omega = - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \delta_1 g_{\nu\alpha} \int_{\Sigma} n_\mu P^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\rho} \nabla_\beta \delta_2 g_{\sigma\rho} - \delta_2 g_{\nu\alpha} \int_{\Sigma} n_\mu P^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\rho} \nabla_\beta \delta_1 g_{\sigma\rho} d\Sigma. \quad (2.38)$$

Se houvesse um momento canônico conjugado a $g_{\mu\nu}$, ele deveria satisfazer

$$\delta p^{\alpha\nu} = n_{\mu} P^{\mu\nu\alpha\beta\sigma\rho} \nabla_{\beta} \delta g_{\sigma\rho}, \quad (2.39)$$

porém, não é tão “óbvio” (como no exemplo anterior) encontrar este momento sabendo apenas sua primeira variação. Veremos mais adiante que não existe tal momento

e, portanto, $g_{\mu\nu}$ não pode ser escolhida como uma variável canônica na formulação hamiltoniana da RG.

Uma questão relevante é se existe uma forma alternativa de escrever (2.38), onde seja “evidente” determinar qual é o momento canônico. Para tentar dar resposta à essa questão, podemos usar o fato de que as equações de uma teoria e a corrente simplética não são afetadas pela transformação (2.5). Desta forma, poderíamos encontrar uma nova lagrangiana via (2.5), e calcular sua respectiva corrente simplética, que terá o mesmo valor dado em (2.38). Para este fim, assumiremos que o espaço tempo pode ser foliado por hiper-superfícies Σ_t , que podem ser do tipo espaço ou do tipo tempo, onde t é uma função global. Assumiremos também que podemos introduzir coordenadas locais x^i em Σ_t , o qual permite construir um sistema de coordenadas global (t, x^i) adaptado à foliação. No apêndice A mostramos que o escalar Richi R está relacionado ao escalar Richi de Σ_t (${}^{(h)}R$) pela relação A.33. Assim, o lagrangiano da RG (2.8) pode ser expresso como

$$\mathbf{L}^{RG} = \mathbf{L}^{ADM} + \mathbf{dT}, \quad (2.40)$$

sendo

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM} &= \frac{N \sqrt{\mp h}}{16\pi} \left({}^{(h)}R \mp K_{\mu\nu} \pm K^2 \right) \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ T_{\nu\alpha\beta} &= \mp \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(2n^\mu \nabla_\rho n^\rho - 2n^\rho \nabla_\rho n^\mu \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $h = \text{Det}(h_{ij})$, N é a função lapso, n^μ é o vetor normal unitário de Σ_t e $K_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura extrínseca de Σ_t . Para maiores detalhes, veja o apêndice A. O sinal positivo (+) é usando quando Σ_t for de tipo espaço e o sinal negativo (-) é usando quando Σ_t for do tipo tempo.

Acima conseguimos encontrar um lagrangiano que está conectado a $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{GR}$ por uma divergência. O lagrangiano $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM}$ é o lagrangiano usado no formalismo⁵ ADM. Note que, apesar de $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM}$ ser construído a partir do tensor métrico, este não exhibe covariância geral como $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{GR}$, que além de ser covariante possui covariância manifesta.

Isso ocorre por causa do termo de fronteira \mathbf{T} , que não é covariante.

Para fazer a variação de $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM}$, sem perda de generalidade, tomaremos o caso em que Σ_t é de tipo espaço. Tomando a primeira variação de $L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM}$ em relação às

⁵ No formalismo ADM é necessário que Σ_t seja tipo espaço, i.e., $g^{tt} < 0$.

variáveis N , N^i e h_{ij} , definidas no apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned}
\delta L_{\mu\nu\alpha\beta}^{ADM} = & \sqrt{h}^{-1} ({}^{(h)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) \delta N + 2 \sqrt{h} \bar{D}_a (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta N_b \\
& - N \sqrt{h}^{-1} ({}^{(h)}R^{ab} - \frac{1}{2} ({}^{(h)}R) h^{ab}) + \frac{1}{2} N \sqrt{h}^{-1} (K_{ij}K^{ij} - K^2) h^{ab} \\
& \sqrt{h} D_i (K^{ab} - Kh^{ab}) N^i - 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) N^a - 2N \sqrt{h}^{-1} K^a K^{bi} - KK^{ab} \\
& + \sqrt{h} D^a D^b N - h^{ab} D_i D^i N - \partial_0 \sqrt{h}^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta h_{ab} \\
& + \partial_0 \sqrt{h}^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta h_{ab} + \sqrt{h} \bar{D}_i (N h^{ij} h^{kl} D_k \delta h_{jl} - D_j \delta h_{kl} \\
& - h^{il} D^j N \delta h_{jl} + D^i N h^{kl} \delta h_{kl} + 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) N^a \delta h_{ab} - (K^{ab} - Kh^{ab}) N^i \delta h_{ab} \\
& - 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) \delta N_b) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Portanto, as equações do movimento serão

$$({}^{(h)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) = 0, \quad D_a (K^{ab} - Kh^{ab}) = 0, \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
& - N \sqrt{h}^{-1} ({}^{(h)}R^{ab} - \frac{1}{2} ({}^{(h)}R) h^{ab}) + \frac{1}{2} N \sqrt{h}^{-1} (K_{ij}K^{ij} - K^2) h^{ab} \\
& \sqrt{h} D_i (K^{ab} - Kh^{ab}) N^i - 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) N^a - 2N \sqrt{h}^{-1} K^a K^{bi} - KK^{ab} \\
& + \sqrt{h} D^a D^b N - h^{ab} D_i D^i N - \partial_0 \sqrt{h}^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

As duas primeiras equações são vínculos e a última é a equação que rege a dinâmica. Estas 3 equações são equivalentes às equações de Einstein [2]. No entanto, nosso interesse por enquanto, é encontrar a corrente simplética. Comparando (2.42) com (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\Theta_{\nu\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^\mu = N \sqrt{h} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^\mu, \\
\theta^0 = N^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta h_{ab} \\
\theta^i = h^{ij} h^{kl} D_k \delta h_{jl} - D_j \delta h_{kl} - N^{-1} h^{il} D^j N \delta h_{jl} \\
+ N^{-1} (D^i N h^{kl} \delta h_{kl} + 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) N^a \delta h_{ab} - (K^{ab} - Kh^{ab}) N^i \delta h_{ab} \\
- 2 (K^{ib} - Kh^{ib}) \delta N_b).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A forma simplética Ω assume a forma simples

$$\Omega = \int_{\Sigma_t} N \omega^0 d\Sigma_t, \tag{2.46}$$

onde usamos o fato de que $n_\mu = (-N, 0, 0, 0)$. O cálculo de ω^0 dá como resultado

$$\omega^0 = N^{-1} h^{-1/2} \delta_1 \sqrt{h}^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta_2 h_{ab} - \delta_2 \sqrt{h}^{-1} (K^{ab} - Kh^{ab}) \delta_1 h_{ab}. \tag{2.47}$$

Portanto, se definirmos o momento canônico como

$$p^{ab} = \sqrt{-h} K^{ab} - Kh^{ab} , \quad (2.48)$$

obtemos a forma dada em (2.21), tomando como medida $d\mu = h^{-1/2}d\Sigma_t$ [30]. Vemos então que a variável canônica para o caso da RG é h_{ij} (não $g_{\mu\nu}$) e seu momento conjugado é dado por (2.48).

2.2 Definição de hamiltoniano da teoria

Existe uma relação entre a corrente \mathbf{J} obtida em (2.12) e o hamiltoniano da teoria. Como de costume nas teorias lagrangianas, o hamiltoniano é construído puramente a partir do lagrangiano. Por exemplo, dado um lagrangiano simples (não campos) $L(q, \dot{q})$, sabe-se que a energia: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$, corresponde ao hamiltoniano da teoria. Na linguagem da corrente simplética, isso significa que:

$$\delta \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) = \Omega(q, \delta q, \dot{q}). \quad (2.49)$$

No caso dos campos, o análogo de: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$, é a corrente \mathbf{J} definida em (2.12). Porém, neste caso, \mathbf{J} não representa o hamiltoniano da teoria. Para ver isso, pode-se tomar a primeira variação de \mathbf{J} mantendo X^μ fixo [24, 25, 7]

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{J} &= \delta \Theta - X \cdot \delta \mathbf{L} \\ &= \delta \Theta - (X \cdot \epsilon) E_{(\phi)} \delta \phi - X \cdot d\Theta \\ &= \delta \Theta - \mathcal{L}_X \Theta - (X \cdot \epsilon) E_{(\phi)} \delta \phi + d(X \cdot \Theta) \\ &= \omega(\phi, \delta \phi, \mathcal{L}_X \phi) - (X \cdot \epsilon) E_{(\phi)} \delta \phi + d(X \cdot \Theta). \end{aligned} \quad (2.50)$$

É claro a partir da equação acima que \mathbf{J} não é o hamiltoniano da teoria, pois, por causa do surgimento do termo de borda $d(X \cdot \Theta)$, não é satisfeita a equação (2.20). O hamiltoniano verdadeiro H_X , se existir para alguma solução das equações de movimento (“solução *on shell*”), deve satisfazer

$$\delta H_X = \delta \int_{\Sigma} \hat{\mathbf{J}} - \int_{\partial \Sigma} \hat{X} \cdot \Theta, \quad (2.51)$$

i.e., o hamiltoniano é composto por um termo dado por \mathbf{J} mais outro termo de borda. Porém, vimos que para soluções “on shell”, $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$, então a equação acima assume a forma

$$\delta H_X = \int_{\partial \Sigma} (\delta \mathbf{Q}(X) - X \cdot \Theta). \quad (2.52)$$

Portanto, a conclusão a que se chega é a seguinte: em qualquer teoria de campos baseada em uma lagrangiana difeomorficamente invariante, o hamiltoniano da teoria,

se existir, é puramente um termo de superfície [24, 25]. Observe que este hamiltoniano já carrega consigo a estrutura simplética da teoria dado que satisfaz (2.20). Isto é contrário ao que acontece na formulação hamiltoniana usual, onde às vezes acontece que o hamiltoniano construído a partir do lagrangiano, não carrega consigo a estrutura simplética da teoria. Um exemplo muito ilustrativo disso é fornecido pela formulação hamiltoniana da RG. Neste caso o hamiltoniano é puramente vinculado ($H_{RG} = 0$), e não satisfaz (2.20). Costuma-se dizer que H_{RG} define uma estrutura pré-simplética. Para conseguir a estrutura simplética, H_{RG} é complementado com um termo de superfície como é feito em [15, 16].

3 Definições canônicas de quantidades conservadas na RG

Na RG podemos encontrar diferentes definições de quantidades conservadas. Algumas dessas definições não precisam da existência prévia da lagrangiana da teoria para serem definidas (as não canônicas). Outras, pelo contrário (as canônicas), são derivadas diretamente da lagrangiana ou da ação da teoria. Este capítulo tem como objetivo examinar essas definições canônicas sob a perspectiva do formalismo LWI, desenvolvido no anterior capítulo. Consideraremos a RG em $D = 4$ com constante cosmológica Λ não nula.

Como é bem sabido, a relatividade de Einstein com constante cosmológica é descrita por o lagrangiano

$$\mathbf{L}_\Lambda^{\text{RG}} = \frac{1}{16\pi} (-2\Lambda + R)\epsilon. \quad (3.1)$$

A variação deste lagrangiano produz as conhecidas equações de Einstein com constante cosmológica:

$$E_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

O termo de contorno Θ que surge da variação do (3.1) é independente da constante cosmológica, e é igual ao termo de contorno derivado do lagrangiano (2.8). Este termo de contorno é dado por [25]:

$$\theta^\mu = \frac{1}{16\pi} g^{\mu\lambda} g^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\lambda \delta g_{\sigma\rho}. \quad (3.3)$$

A partir deste termo de contorno, podemos construir a corrente de Noether \mathbf{J} ,

$$J_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\sigma \nabla^{[\sigma} X^{\mu]} + \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^\mu_\sigma + \Lambda \delta^\mu_\sigma X^\sigma, \quad (3.4)$$

e a sua respectiva carga

$$Q_{\mu\nu} = - \frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha X^\beta. \quad (3.5)$$

3.1 Método dos super-potenciais

Como visto no seção 2.1, a corrente de Noether J^μ é conservada localmente quando os campos são soluções das equações de movimento. Portanto, para tais soluções, podemos associar um bi-vetor $J^{\mu\nu}$, comumente chamado de **super-potencial**, tal que

$$J^\mu = \nabla_\nu J^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

ou, escrito na notação usada em [12, 13],

$$\hat{j}^\mu = \partial_\nu \hat{j}^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde o chapéu significa multiplicação por $\sqrt{-g}$. Não é difícil ver que o super-potencial é equivalente à carga dual de Noether, i.e.,

$$J^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}. \quad (3.8)$$

Para o lagrangiano da RG, com ou sem constante cosmológica, o super-potencial associado é

$$J_{Ko}^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} \nabla^{[\mu} X^{\nu]}, \quad (3.9)$$

que é conhecido como **super-potencial de Komar**. Este super-potencial tem a particularidade de que, quando é integrado no infinito espacial dos espaços tempos de Schwarzschild e Kerr, a integral fornece a metade da massa do buraco negro [12, 2]. Embora o super-potencial de Komar forneça apenas a metade da massa do buraco negro de Schwarzschild e Kerr, é possível construir um super-potencial que forneça exatamente a massa do buraco negro. Esta “correção” ao super-potencial de Komar foi proposta pela primeira vez por Katz [12], usando um lagrangiano bi-métrico¹, introduzido previamente por Rosen. Este lagrangiano é dado por [13]

$$L = -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu}^\rho \Delta_{\rho\sigma}^\sigma - \Delta_{\mu\sigma}^\rho \Delta_{\rho\nu}^\sigma - R \frac{\epsilon}{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

onde

$$\Delta_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \overline{\Gamma_{\mu\nu}^\rho}. \quad (3.11)$$

Não é difícil ver que este lagrangiano está conectado ao lagrangiano da RG (2.8) por meio de [12, 13]

$$L = L^{RG} + dK, \quad (3.12)$$

onde

$$K_{\nu\alpha\beta} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} K^\mu, \quad K^\mu = \frac{1}{16\pi} g^{\mu\rho} \Delta_{\rho\sigma}^\sigma - g^{\rho\sigma} \Delta_{\rho\sigma}^\mu. \quad (3.13)$$

Portanto, para este lagrangiano, a carga de Noether pode ser construída como

$$Q = Q^{RG} + X \cdot K, \quad (3.14)$$

e assim, o super-potencial associado será

$$J^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} \nabla^{[\mu} X^{\nu]} + 2K^{[\mu} X^{\nu]}. \quad (3.15)$$

Normalmente, é definido um super-potencial relativo à métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$, i.e.: $\hat{j}^{\mu\nu} - \overline{\hat{j}^{\mu\nu}}$ [13], que assume a forma simples na notação de chapéus [31, 13]

$$\hat{j}_{KBL}^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} \nabla^{[\mu} \hat{X}^{\nu]} - \nabla^{[\mu} \hat{X}^{\nu]} + 2K^{[\mu} \hat{X}^{\nu]}. \quad (3.16)$$

8π

Este super-potencial é conhecido na literatura como: **super-potencial KBL**, e fornece exatamente a massa dos buracos negros de Schwarchild, Kerr e Kerr-AdS.

¹ Lagrangianos que dependem de duas métricas: $g_{\mu\nu}$ e $\overline{g}_{\mu\nu}$. A métrica $\overline{g}_{\mu\nu}$ costuma ser a métrica de um espaço tempo de fundo de referencia.

3.2 Métodos hamiltonianos

Nos métodos hamiltonianos, a quantidade conservada é dada pelo gerador da simetria, ou seja, o hamiltoniano H_X definido em (2.20). Este hamiltoniano, se existir, deve satisfazer as equações (2.51) e (2.52). Wald e Zoupas [19] mostraram que uma condição suficiente e necessária para a existência destes hamiltonianos é [19]

$$\int_{\partial\Sigma} X \cdot \omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = 0, \quad (3.17)$$

onde ϕ é uma solução das equações de movimento e $\delta_1\phi, \delta_2\phi$, são qualquer par de soluções para as equações linearizadas de movimento.

Obviamente não é trivial achar um hamiltoniano a partir de (2.52), apenas conhecendo sua primeira variação. No entanto, se existir uma 3-forma \mathbf{B} construída localmente da métrica (não necessariamente covariante), tal que

$$\int_{\partial\Sigma} X \cdot \Theta(g, \delta g) = \delta \int_{\partial\Sigma} X \cdot \mathbf{B}(g), \quad (3.18)$$

o hamiltoniano terá a forma [25]

$$H_X = \int_{\partial\Sigma} (\mathbf{Q} - X \cdot \mathbf{B}). \quad (3.19)$$

Normalmente \mathbf{B} está ligado às condições de contorno que os campos devem satisfazer em $\partial\Sigma$ [32]. Obviamente isto restringe o domínio da variação em (3.18), ou seja, a igualdade (3.18) só é válida se a variação for feita no conjunto de campos que satisfazem estas condições de contorno em $\partial\Sigma$. Desta forma, cada condição de contorno dá origem a diferentes definições de quantidades conservadas [32]. Veremos a seguir algumas destas definições.

3.2.1 Definições globais (ADM) para espaços tempos assintoticamente AdS

Para o caso de espaços tempos assintoticamente AdS, podemos encontrar um \mathbf{B} compatível com (3.18) impondo condições de contorno na métrica no infinito espacial. Estas condições de contorno assintóticas foram estabelecidas em [16], onde, além disso, uma definição formal de espaços tempos assintoticamente AdS foi dada em termos destas condições de contorno. Concretamente, um espaço tempo é dito ser assintoticamente AdS, se existe um sistema de coordenadas globais $x^\mu(T, R, \Theta, \Phi)$, que chamaremos a partir de agora como: coordenadas de Teitelboim-Henneaux (TH), tal que a métrica que descreve o espaço tempo possa ser escrita como

$$ds^2 = ds^{-2} + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.20)$$

onde $d\bar{s}^2$ é a métrica de AdS dada por

$$d\bar{s}^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda R^2}{3} \right) dT^2 + \frac{1}{1 - \frac{\Lambda R^2}{3}} dR^2 + R^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2), \quad (3.21)$$

e $h_{\mu\nu}$ são quantidades invariantes sob o grupo de simetrias assintóticas. Para este caso, este grupo coincide com o grupo de simetria do espaço AdS $O(3, 2)$ [16], ou seja, $\xi^\mu h_{\mu\nu} = 0$, onde ξ^μ são os vetores Killing de AdS. Conforme mostrado em [16], os únicos $h_{\mu\nu}$ que satisfazem esses requisitos, possuem a forma assintótica [16]

$$\begin{aligned} h_{TT} &= R^{-1} f_{TT}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}), \\ h_{T\Theta} &= R^{-1} f_{T\Theta}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}), \\ h_{T\Phi} &= R^{-1} f_{T\Phi}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}), \\ h_{TR} &= R^{-4} f_{TR}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-5}), \\ h_{RR} &= R^{-5} f_{RR}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-6}), \\ h_{R\Theta} &= R^{-4} f_{R\Theta}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-5}), \\ h_{R\Phi} &= R^{-4} f_{R\Phi}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-5}), \\ h_{\Theta\Theta} &= R^{-1} f_{\Theta\Theta}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}), \\ h_{\Theta\Phi} &= R^{-1} f_{\Theta\Phi}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}), \\ h_{\Phi\Phi} &= R^{-1} f_{\Phi\Phi}(T, \Theta, \Phi) + O(R^{-2}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pode-se associar globalmente uma energia aos espaços tempos assintoticamente AdS, que é conhecida como: **massa de ADM** (m_{ADM}). Esta energia pode ser obtida usando a abordagem hamiltoniana de Teitelboim-Henneaux [16] acrescentando contra- termos de superfície ao hamiltoniano, de modo que o hamiltoniano total seja [16]

$$H = H_G + \int_{\infty} F d^2x, \quad (3.23)$$

onde H_G é o hamiltoniano da RG e “ ∞ ” é uma abreviatura para denotar o infinito espacial. No entanto, é possível encontrar m_{ADM} diretamente usando o formalismo LWI, achando um \mathbf{B} compatível com (3.18). Isso foi feito por Hollands em [7] usando técnicas conformes, onde obteve um hamiltoniano que se reduz à carga conforme de Ashtekar-Magnon [9]. Aqui, pelo contrário, pretendemos aplicar o formalismo LWI simplesmente utilizando as condições de contorno dadas em (3.22), onde obteremos uma fórmula para calcular m_{ADM} que, para fins práticos, resulta mais simples do que aquelas obtidas em [16, 9, 7]. Para fazer isso, pode-se definir m_{ADM} no formalismo LWI usando a equação (2.52), como sendo [25]

$$\delta m_{ADM} \equiv \delta H[t^\mu] = \int_{\infty} (\delta Q(t^\mu) - t \cdot \Theta), \quad (3.24)$$

onde t^μ é o vetor que corresponde ao vetor Killing de AdS gerador das translações temporais no infinito espacial. Nas coordenadas TH, este vetor possui componentes

$t^\mu = (1, 0, 0, 0)$ [16]. Introduzindo as respectivas quantidades \mathbf{Q} e Θ , dadas nas equações (3.3) e (3.5), podemos expressar a integral acima como²

$$\delta m_{ADM} = -\frac{1}{8\pi} \delta \int_{\infty} \nabla^{[\mu} t^{\nu]} n_{\mu\nu} - 2 \int_{\infty} \theta^{[\mu} t^{\nu]} n_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Esta integral “imprópria” pode ser calculada usando superfícies de tempo e raio constantes, i.e., superfícies com $T = cte.$ e $R = cte.$ Como o infinito espacial de espaços assintoticamente AdS é definido em coordenadas TH como $T = 0, R \rightarrow \infty$ [16], a integral acima pode ser expressa como

$$\delta m_{ADM} = \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{8\pi} \delta \int_R \nabla^{[\mu} t^{\nu]} n_{\mu\nu} - 2 \int_R \theta^{[\mu} t^{\nu]} n_{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

A vantagem de usar superfícies com T e R constantes, é que o único termo diferente de zero de $n_{\mu\nu}$ é $n_{TR} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}$. Portanto, a integral acima se reduz a

$$\begin{aligned} \delta m_{ADM} &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{4\pi} \delta \int_R \nabla^{[T} t^{R]} n_{TR} - 4 \int_R \theta^{[T} t^{R]} n_{TR} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{16\pi} \delta \int_R g^{\sigma T} \Gamma_{\sigma T}^R - g^{\sigma R} \Gamma_{\sigma T}^T \sqrt{-g} + \int_R \theta^R \sqrt{-g} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{16\pi} \delta \int_R g^{\sigma T} \Gamma_{\sigma T}^R - g^{\sigma R} \Gamma_{\sigma T}^T \sqrt{-g} \\ &\quad + \frac{1}{16\pi} \int_R g^{\sigma\rho} \delta \Gamma_{\sigma\rho}^R - g^{R\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\rho}^R \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para resolver a integral acima é necessário encontrar os comportamentos assintóticos em relação à variável R das quantidades envolvidas. Não é difícil mostrar a partir de (3.22) (com um pouco de esforço), que o determinante da métrica (g) tem o seguinte comportamento assintótico

$$\frac{g}{g^-} = 1 + \frac{3f_{TT}}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{3} f_{RR} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} R^{-3} + O(R^{-4}) \quad (3.30)$$

$$\Rightarrow \sqrt{-g} = \sqrt{-g^-} + \frac{\sin \Theta}{2} \left[\frac{3f_{TT}}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{3} f_{RR} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right] R^{-1} + O(R^{-2}).$$

Com isso, o termo $\Gamma_{\sigma\rho}^\rho$, que depende do determinante da métrica,

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\rho = \partial_\sigma \ln \sqrt{-g}, \quad (3.31)$$

² A integral de qualquer 2-forma \mathbf{F} sobre uma 2-superfície \mathbb{X} é definida como a integral do “pull-back” de \mathbf{F} sobre \mathbb{X} , i.e.,

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbf{F} \equiv \int_{\mathbb{X}} F^{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} dudv = \int_{\mathbb{X}} F^{\mu\nu} n_{\mu\nu} dudv, \quad (3.25)$$

onde u, v são as coordenadas que parametrizam Ξ , $n_{\mu\nu}$ é conhecido como 2-vetor normal (ou binormal) definido por:

$$n_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} \frac{\partial x^\beta}{\partial v}, \quad (3.26)$$

e $F^{\mu\nu}$ é o dual de $F_{\mu\nu}$ definido por: $F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu}$.

tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} &= \partial_{\sigma} \ln \sqrt{-g} \\
&= \partial_{\sigma} \ln \sqrt{-\bar{g}} + \partial_{\sigma} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{3f_{TT}}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{3} f_{RR} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right) R^{-3} + O(R^{-4}) \\
&= \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\rho} + \partial_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{3f_{TT}}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{3} f_{RR} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right) R^{-3} + O(R^{-4}) .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

As componentes da inversa da métrica $g^{\mu\nu}$ são mais difíceis de calcular, pois possuem uma dependência não polinomial em $h_{\mu\nu}$. No entanto, pode-se usar a matriz adjunta $g_{adj}^{\mu\nu}$ que é polinomial em $h_{\mu\nu}$. Observe que

$$g^{\mu\nu} = \frac{g_{adj}^{\mu\nu}}{g} \implies \frac{g^{\mu\nu}}{\bar{g}^{\mu\nu}} = \frac{\bar{g}^{\mu\nu} g_{adj}^{\mu\nu}}{g g_{adj}^{\mu\nu}}, \tag{3.33}$$

dessa forma, por exemplo, para o caso g^{RR} temos

$$\begin{aligned}
\frac{g^{RR}}{\bar{g}^{RR}} &= 1 - \frac{3f_{TT}}{\Lambda} - \frac{\Lambda}{3} f_{RR} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} R^{-3} + \dots \\
&= 1 + \frac{3f_{TT}}{\Lambda} + f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} R^{-3} + \dots \\
&= 1 + \frac{\Lambda f_{RR}}{3} R^{-3} + O(R^{-4}) \\
\implies g^{RR} &= \bar{g}^{RR} - \frac{\Lambda^2 f_{RR}}{9} R^{-1} + O(R^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

De forma análoga obtemos os comportamentos assintóticos das demais componentes

$$\begin{aligned}
g^{TT} &= \bar{g}^{TT} - \frac{9f_{TT}}{\Lambda^2} R^{-5} + O(R^{-6}), \quad g^{TR} = O(R^{-4}), \quad g^{T\Theta} = O(R^{-5}), \\
g^{T\Phi} &= O(R^{-5}), \quad g^{R\Theta} = O(R^{-4}), \quad g^{R\Phi} = O(R^{-4}), \\
g^{\Theta\Theta} &= \bar{g}^{\Theta\Theta} - f_{\Theta\Theta} R^{-5} + O(R^{-6}), \quad g^{\Theta\Phi} = O(R^{-5}),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$g^{\Phi\Phi} = \bar{g}^{\Phi\Phi} - \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^4 \Theta} R^{-5} + O(R^{-6})$$

Finalmente, uma vez que temos os comportamentos assintóticos de $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$, podemos calcular os comportamentos assintóticos das conexões Γ 's. Estes são dados

por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{TR}^T &= \bar{\Gamma}_{TR}^T - \frac{9f_{TT}}{2\Lambda} R^{-4} + O(R^{-5}), \\
\Gamma_{TT}^R &= \bar{\Gamma}_{TT}^R + \frac{\Lambda^2}{9} \frac{\Lambda f_{RR} - 3f_{TT}}{2\Lambda} + O(R^{-1}), \\
\Gamma_{RR}^R &= \bar{\Gamma}_{RR}^R + \frac{\Lambda f_{RR}}{2} R^{-4} + O(R^{-4}), \\
\Gamma_{\Theta\Theta}^R &= \bar{\Gamma}_{\Theta\Theta}^R + \frac{\Lambda}{3} \frac{\Lambda f_{RR} - f_{\Theta\Theta}}{3} + O(R^{-1}), \\
\Gamma_{\Phi\Phi}^R &= \bar{\Gamma}_{\Phi\Phi}^R + \frac{\Lambda}{3} \frac{\Lambda f_{RR}}{3} \sin^2 \Theta - \frac{f_{\Phi\Phi}}{2} + O(R^{-1}), \\
\Gamma_{T\Theta}^R &= -\frac{\Lambda}{6} f_{T\Theta} + O(R^{-1}), \quad \Gamma_{T\Phi}^R = -\frac{\Lambda}{6} f_{T\Phi} + O(R^{-1}), \\
\Gamma_{\Theta\Phi}^R &= -\frac{\Lambda}{6} f_{\Theta\Phi} + O(R^{-1}), \quad \text{resto} = O(R^{-n}), \quad n \geq 3.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Portanto, expandindo as integrais dadas em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta m_{ADM} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \delta \int_R \left[\frac{2\Lambda}{3} R^3 - 2f_{TT} + \frac{\Lambda^2}{9} f_{RR} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Lambda}{3} f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} + O(R^{-1}) \right] \sin \Theta \\
&\quad + \frac{1}{16\pi} \int_R \left[-2\delta f_{TT} + \frac{\Lambda^2}{3} \delta f_{RR} - \frac{2\Lambda}{3} \delta f_{\Theta\Theta} + \frac{\delta f_{\Phi\Phi}}{2} + O(R^{-1}) \right] \sin \Theta.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Observe que o termo $\sim R^3$, que aparece na contribuição de Komar, produz uma divergência³. Porém, observe que este termo não depende de $h_{\mu\nu}$, portanto não contribui para a variação. Tomando o limite, temos

$$\begin{aligned}
\delta m_{ADM} &= -\frac{1}{16\pi} \int \left[-2f_{TT} + \frac{\Lambda^2}{9} f_{RR} + \frac{\Lambda}{3} f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right] \sin \Theta d\Theta d\Phi \\
&\quad + \frac{1}{16\pi} \int \left[-2\delta f_{TT} + \frac{\Lambda^2}{3} \delta f_{RR} - \frac{2\Lambda}{3} \delta f_{\Theta\Theta} + \frac{\delta f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right] \sin \Theta d\Theta d\Phi,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

de onde finalmente obtemos m_{ADM} , que assume a forma simples

$$m_{ADM} = \frac{\Lambda}{16\pi} \int \left[\frac{2\Lambda}{9} f_{RR} - f_{\Theta\Theta} + \frac{f_{\Phi\Phi}}{\sin^2 \Theta} \right] \sin \Theta d\Theta d\Phi. \tag{3.39}$$

Esta fórmula é equivalente à obtida em [16, 9, 7]. Veremos mais tarde que ela é capaz

de reproduzir o resultado correto para a massa do buraco negro Kerr-AdS₄.

Por outro lado, para um espaço tempo assintoticamente AdS com simetria axial, i.e., com um vetor de Killing tipo espaço φ^μ cujas órbitas são fechadas [2], é possível

³ Isto surge do fato de que as integrais de Komar não estão bem definidas em espaços tempos assintoticamente AdS, especialmente quando o vetor Killing é tipo tempo.

associar uma quantidade conservada a esta simetria conhecida como: **momento angular ADM** (J_{ADM}). Esta quantidade é definida como [25]

$$\delta J_{ADM} \equiv - \int_{\infty} (\delta Q(\varphi^\mu) - \phi \cdot \Theta) = \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \nabla^{[\mu} \varphi^{\nu]} n_{\mu\nu} + 2 \int_{\infty} \theta^{[\mu} \varphi^{\nu]} n_{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Porém, fazendo o mesmo desenvolvimento acima, verifica-se que o segundo termo da equação acima não contribui, dado que $\varphi^\mu = (0, 0, 0, 1)$ nas coordenadas TH, e portanto: $\varphi^T = \varphi^R = 0$. Dessa forma, J_{ADM} é simplesmente dado pela integral de Komar [25]:

$$J_{ADM} = \frac{1}{8\pi} \int_{\infty} \nabla^{[\mu} \varphi^{\nu]} n_{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

3.2.2 Definição quase local de Brown-York

No caso anterior definimos quantidades conservadas globalmente, que são obtidas avaliando integrais no infinito espacial de espaços assintoticamente AdS. Pode-se relaxar a condição de ser assintoticamente AdS e obter quantidades conservadas associadas a 2-superfícies arbitrárias tipo espaço “finitas”. Essas quantidades conservadas são chamadas de quantidades **quase locais**. Elas foram introduzidas pela primeira vez por Brown-York (BY) em [21], usando o método de Hamilton-Jacobi. No entanto, estas quantidades podem ser deduzidas e generalizadas a partir do formalismo LWI, como foi mostrado mais tarde em [32].

Seguindo o desenvolvimento feito em [32], pode-se assumir que o espaço tempo pode ser fatiado por famílias de 3-superfícies tipo espaço Σ_t , i.e., assumir uma topologia $\mathbb{R} \times \Sigma_t$, onde t é uma função escalar global. Essas 3-superfícies terão vetores tipo tempo unitários normais n^μ definidos por (A.7)

$$n^\mu = N^{-1}(\mathbf{e}_t)^\mu - N^{-1}N^\mu, \quad (3.42)$$

onde N é a função lapso e N^μ é o vetor de deslocamento. Considere agora uma 3-superfície M com vetor normal σ^μ e métrica induzida γ_{ij} . Definimos C_t como 2-superfícies tipo espaço C_t , tal que $C_t = M \cap \Sigma_t$. Seja $g_{\mu\nu}^{(0)}$ uma solução das equações de Einstein (3.2) com $\gamma_{ij}^{(0)}$ sendo sua métrica induzida sobre M e com $N_{(0)}^\mu \sigma_\mu = 0$. Considere o conjunto de métricas $g_{\mu\nu}$ (não necessariamente soluções das equações de Einstein) que satisfazem as seguintes condições de contorno [32]:

$$(i) \gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(0)} \quad (\text{condição de fixação da métrica induzida em } M), \quad (3.43)$$

$$(ii) \sigma_\mu N^\mu = 0 \quad (\text{condição de tangência de } N^\mu \text{ em } C_t).$$

Sob estas condições de contorno, e assumindo condições adicionais no campo gerador X^μ , Wald-Iyer [32] conseguiram mostrar que existe um \mathbf{B} compatível com (3.18), que tem a forma

$$B_{\nu\alpha\beta} = 8\pi \quad =$$

$$-\frac{1}{2} (K + K_0) \sigma^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad , \quad (3.44)$$

onde K é o traço do tensor de curvatura extrínseca de M definido como $K = \gamma^{ij}K_{ij}$ e K_0 é qualquer quantidade dependente da geometria intrínseca de M [32]. Uma vez tendo \mathbf{B} , podemos definir a energia e o momento angular quase local de BY associada a C_t usando (3.19) como sendo [32]

$$m_{BY} \equiv \int_{C_t} \mathbf{Q}(n^\mu) - n \cdot \mathbf{B}, \quad J_{BY} \equiv - \int_{C_t} \mathbf{Q}(N^\mu) - N \cdot \mathbf{B}. \quad (3.45)$$

As equações acima generalizam as definições usuais de BY, que são dadas a partir de [33]

$$Q_\xi = \int_M d^3x \sqrt{-\gamma} T_{\mu\nu}^{BY} n^\mu \xi^\nu, \quad (3.46)$$

onde ξ^μ é um vetor Killing e $T_{\mu\nu}^{BY}$ é conhecido como o tensor de tensão de BY definido como [34, 33]

$$T_{\mu\nu}^{BY} \equiv \frac{\sqrt{2}}{-\gamma} \frac{\delta S}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \quad (3.47)$$

sendo S a ação dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi} \int_M d^3x \sqrt{-\gamma} K + S_0. \quad (3.48)$$

O termo que depende de K é o usual termo de Gibbons-Hawking-York (GHY) e S_0 é a ação associada aos contra-termos necessários para “regularizar” as quantidades conservadas em valores finitos [33, 34]. Esses contra-termos estão relacionados ao K_0 que aparece na definição de \mathbf{B} dada em (3.44).

4 Um hamiltoniano local para espaços tempos com a forma Kerr-Schild

Apesar do evidente carácter local do método dos super-potenciais, as quantidades conservadas derivadas a partir do super-potencial $J^{\mu\nu}$, não representam o hamiltoniano da teoria. Isto foi visto na seção 2.2 quando foi mostrado que, em geral,

$\mathbf{J} \neq H_X$. Por outro lado, nos métodos hamiltonianos, as quantidades conservadas são dadas pelo gerador da simetria, ou seja, o hamiltoniano H_X . No entanto, o carácter local é perdido dado que H_X é definido como um funcional dos campos, cujo domínio é determinado por condições de contorno impostas na superfície de integração, i.e., H_X depende tanto de informação no volume quanto de informação na fronteira.

Contudo, é possível considerar uma definição que combine tanto o carácter local como o carácter hamiltoniano. Isto pode ser realizado observando que a equação (2.50), a qual é uma relação local entre os campos e suas variações, pode ser reescrita para o caso da RG como [30]

$$\delta\mathbf{J} + (X \cdot \epsilon) E_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + d(-X \cdot \Theta) = \omega(g, \delta g, \mathcal{L}_X g), \quad (4.1)$$

onde o termo $-X \cdot \Theta$ é dado por

$$\begin{aligned} (-X \cdot \Theta)_{\mu\nu} &= -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^\alpha X^\beta \\ &= -\frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\alpha\eta} g^{\sigma\rho} \nabla_\sigma \delta g_{\eta\rho} - \nabla_\eta \delta g_{\sigma\rho} X^\beta \\ &= -\frac{1}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} X^\beta g^{\alpha\eta} g^{\sigma\rho} \partial_{[\sigma} \delta g_{\eta]\rho} - \Gamma_{\rho[\sigma} \delta g_{\eta]\kappa} . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Agora, seja M_n uma família de métricas $g_{\mu\nu}$, parametrizadas por variáveis gerais f_A da forma

$$M_n : g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\psi, f_A(x)), \quad A = 1, 2, \dots, n \leq 10, \quad (4.3)$$

onde existe pelo menos um $f_A^{(0)}(x)$, tal que $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é uma solução das equações de Einstein, com ψ sendo quantidades fixas. Assumindo esta parametrização, temos que, para cada métrica neste conjunto,

$$\begin{aligned} \partial_\sigma g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \psi} \partial_\sigma \psi + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_A} \partial_\sigma f_A, \\ \delta g_{\mu\nu} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial f_A} \delta f_A. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Introduzindo estas quantidades em (4.2), e levando em conta a comutabilidade entre δ e ∂ , podemos expressar (4.2) como sendo

$$(-X \cdot \Theta)_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^{\sigma A} \delta(\partial_\sigma f_A) + G_{\mu\nu}^A \delta f_A. \quad (4.5)$$

Portanto, se houvesse um $\mathbf{B}(g, \partial g)$ tal que

$$-X \cdot \Theta = \delta \mathbf{B} \Big|_{f_A^{(0)}}, \quad (4.6)$$

as seguintes condições locais de integrabilidade (CLI) teriam que ser satisfeitas:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\sigma A}}{\partial \partial_\rho f_B} = \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\rho B}}{\partial \partial_\sigma f_A}, \quad \frac{\partial G_{\mu\nu}^A}{\partial f_B} = \frac{\partial G_{\mu\nu}^B}{\partial f_A}, \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\sigma A}}{\partial f_B} = \frac{\partial G_{\mu\nu}^B}{\partial (\partial_\sigma f_A)}. \quad (4.7)$$

Se \mathbf{B} existe para alguma solução das equações de Einstein com a forma paramétrica M_n , podemos associar um hamiltoniano local para esta solução. Este hamiltoniano seria a 3-forma

$$\mathbf{H} = d\mathbf{H}, \quad (4.8)$$

onde \mathbf{H} é a 2-forma¹:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} + \mathbf{B}. \quad (4.9)$$

Observe que em termos de \mathbf{H} , a equação (4.1) se reduz a

$$\delta \mathbf{H} = \omega, \quad (4.10)$$

a qual é a versão local de (2.20).

É possível, como será mostrado a seguir, obter um \mathbf{H} reduzindo os graus de liberdade na métrica. Ademais, mostraremos que tal redução pode ser introduzida na teoria se exigirmos que as soluções das equações de Einstein se restrinjam à métricas que possuem a estrutura Kerr-Schild. Antes de prosseguir com a derivação deste hamiltoniano local, vale a pena abordar alguns conceitos necessários sobre espaços tempos com a forma Kerr-Schild.

4.1 Estrutura Kerr-Schild

Uma forma de capturar as simetrias de um espaço tempo é usar as propriedades algébricas do tensor de Riemann (ou Weyl). Este trabalho foi feito por Petrov, que conseguiu classificar os espaços tempos em diferentes tipos, dependendo da degenerescência dos “vetores próprios” do tensor de Riemann. Quando existe multiplicidade de vetores próprios, diz-se que o espaço tempo é **algebricamente especial** [2]. Esses

¹ Obviamente há uma arbitrariedade na definição de \mathbf{H} gerada pelo operador “d” e pela definição de \mathbf{B} .

espaços tempos especiais têm propriedades simétricas importantes. O exemplo mais comum desses espaços são os do tipo II-D na classificação de Petrov, que descrevem sistemas físicos isolados. Dentro deste grupo estão quase todas as métricas conhecidas de buracos negros: espaço de Schwarzschild, Kerr, Reisner-Nordstrom, etc.

Considere um espaço tempo descrito por uma métrica $g_{\mu\nu}$, a qual pode ser levada (pelo menos localmente) para a forma: $g_{\mu\nu}^- +$ “perturbação” [35], onde $g_{\mu\nu}^-$ é chamada de métrica de fundo e a “perturbação” não precisa ser pequena. Se, além, a perturbação for da forma $k_\mu k_\nu$, onde k_ν é um campo vetorial nulo em relação à métrica de fundo ($\bar{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$), tal que a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^- + f(x)k_\mu k_\nu, \quad (4.11)$$

onde $f(x)$ é um escalar, é dito que o espaço tempo em questão, possui uma forma **Kerr-Schild** (KS) [36]. Conforme mostrado em [35] (Teorema 32.3), todo espaço tempo da forma (4.11) é algebricamente especial e possui propriedades simétricas importantes como [35]

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \bar{g}^{\mu\nu} - f(x)k^\mu k^\nu, \quad \text{Det}(g_{\mu\nu}) = \text{Det} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k^\alpha k^\beta = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu k^\alpha k^\beta, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k_\mu &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu k_\mu - \frac{1}{2} k^\lambda \nabla_\lambda f k_\alpha k_\beta, \quad \Gamma_{\mu\beta}^\alpha k^\mu = \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha k^\mu + \frac{1}{2} k^\lambda \nabla_\lambda f k^\alpha k_\beta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $k^\mu = g^{\mu\nu} k_\nu = \bar{g}^{\mu\nu} k_\nu$, Γ e $\bar{\Gamma}$ são as conexões associadas a $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ respectivamente. Usando as propriedades acima, pode-se demonstrar que

$$\nabla_\sigma k^\sigma = \bar{\nabla}_\sigma k^\sigma, \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = k^\mu \bar{\nabla}_\mu k^\nu, \quad \nabla_\alpha k^\beta = \bar{\nabla}_\alpha k^\beta + \frac{1}{2} k^\lambda \nabla_\lambda f k^\alpha k_\beta, \quad (4.13)$$

onde $\bar{\nabla}_\sigma$ é o operador derivada associado à métrica de fundo.

A importância da forma KS reside no fato de que quase todas as métricas de interesse físico podem ser levadas a esta forma. De fato, a métrica de Kerr [37] em $D = 4$, foi inicialmente derivada usando (4.11), como um ansatz nas equações de Einstein no vácuo, tomando $g_{\mu\nu}^-$ como o espaço de Minkowski. Esta forma KS em coordenadas lorentzianas (t, x, y, z) é [37]

$$ds^2 = (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} dt + \frac{rx + ay}{r^2 + a^2} dx + \frac{ry - ax}{r^2 + a^2} dy + \frac{z^2}{r} dz^2, \quad (4.14)$$

com r dado por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \\ \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mais tarde, seguindo o trabalho de Kerr, Myres [38] conseguiu generalizar esta solução para dimensões arbitrárias. Ambas as soluções de Kerr e Myers descrevem buracos negros assintoticamente planos na forma KS.

4.1.1 Forma KS de Gibbons

Quando a constante cosmológica é levada em conta, ainda pode-se obter uma forma KS com fundo minskowskiano para o caso de buracos sem rotação (SAdS). No entanto, até agora não há nenhuma forma KS desse tipo para buracos negros girando em AdS em qualquer dimensão. Gibbons [39] deu uma forma KS substituindo o fundo minskowskiano pelo espaço tempo AdS. Até a data de publicação do artigo de Gibbons [39], soluções de buraco negro com fundo AdS eram conhecidas apenas para $D = 3$ (buraco negro BTZ [40]), a solução de Hawking-Hunter em $D = 5$ [41] e a solução de Carter em $D = 4$ [42], cuja forma em coordenadas de Boyer-Lindquist (BL) $(\tau, \rho, \vartheta, \varphi)$ é

$$ds^2 = - \frac{\Delta_\rho - a^2 \Delta_\vartheta \sin^2 \vartheta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} d\tau^2 + 2 \frac{\Delta_\rho - \Delta_\vartheta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \Sigma} a \sin^2 \vartheta d\tau d\varphi$$

$$+ \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{\Delta_\rho} d\rho^2 + \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{\Delta_\vartheta} d\vartheta^2 + \frac{\rho^2 + a^2 \Delta_\vartheta - a^2 \Delta_\rho \sin^2 \vartheta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \Sigma^2} \sin^2 \vartheta d\varphi^2,$$
(4.16)

onde

$$\Sigma = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2, \quad \Delta_\rho = (\rho^2 + a^2) \left(1 - \frac{\Lambda}{3} \rho^2 - 2M\rho \right),$$

$$\Delta_\vartheta = 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \vartheta.$$
(4.17)

A primeira vista, estas 3 soluções não pareciam estar relacionadas. Influenciado pela ideia de Carter [39] de que (4.16) pode ser levada numa forma KS, Gibbons foi capaz de generalizar para dimensões arbitrárias essas 3 soluções em uma forma KS que substituiu o fundo Minkoskiano por AdS [39], i.e.,

$$ds^2 = ds_{AdS}^2 + \frac{2M}{U} (k_\mu dx^\mu)^2,$$
(4.18)

onde M é uma constante, U é um escalar e k_μ é um vetor nulo em relação à métrica AdS. Gibbons introduziu um novo tipo de coordenadas esferoidais (r, μ_i) , onde as coordenadas μ_i satisfazem o vínculo [39]

$$\sum_{i=1}^{(D-\chi)/2} \mu_i^2 = 1,$$
(4.19)

sendo $\chi = 0, 1$ se D for par ou ímpar respectivamente. Em termos dessas novas coordenadas, a métrica AdS assume a forma

$$ds_{AdS}^2 = -W(1 - \lambda r^2) dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{W} \left(d\tau^2 + \sum_{i=1}^{(D-\chi)/2} d\mu_i^2 \right)$$

)dt

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^D \frac{d\mu_i}{\mu_i} \phi_i^+ \\
 & + \frac{W(1 - \lambda r^2)}{\sum_{i=1}^{(D-X)/2} \frac{(r^2 + \mu_i^2) \mu_i^2 d\mu_i}{i}} \quad \text{!}^2
 \end{aligned}$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^{(D-\chi)/2} \frac{\mu_i^2}{1 + \lambda a_i}, \quad F = \frac{r^2}{r^2 - \lambda} \sum_{i=1}^{(D-\chi)/2} \frac{\mu_i^2}{r + a_i}, \quad \lambda = \Lambda/(D-1). \quad (4.21)$$

O escalar U e o vetor k_μ adquirem nestas coordenadas a forma

$$U = \sum_{i=1}^{(D-1)/2} \frac{\mu^2}{r^2 + a_i^2} \prod_{j=1}^{(D-1)/2} (r^2 + a_j^2), \quad \text{se } D \text{ for ímpar} \quad (4.22)$$

$$r \sum_{i=1}^{D/2} \frac{\mu_i}{r^2 + a_i^2} \prod_{j=1}^{(D-2)/2} (r^2 + a_j^2), \quad \text{se } D \text{ for par}$$

e

$$k_\mu dx^\mu = W dt + F dr - \sum_{i=1}^{(D-\chi)/2} \frac{a_i \mu^2}{1 + \lambda a_i} d\phi_i. \quad (4.23)$$

As constantes a_i são os respectivos parâmetros de rotação. Para o caso em que a dimensão D é ímpar, existem $(D-1)/2$ desses parâmetros. Para o caso em que D é par, há $(D-2)/2$ deles e, portanto, nas somas acima, tomamos $a_{(D-\chi)/2} = \phi_{(D-\chi)/2} = 0$. Gibbons também deu as expressões que relacionam suas coordenadas esferoidais com as coordenadas de BL. A relação entre essas coordenadas é dada por [39]

$$r = \rho, \quad \theta = \vartheta, \quad (4.24)$$

$$dt = d\tau + \frac{2MU}{(1 - \lambda\rho^2)(F - 2MU)} d\rho,$$

$$d\phi_i = d\varphi_i - \frac{\lambda a_i}{D-1} d\tau + \frac{2MU a_i}{(\rho^2 + q^2)(F - 2MU)} d\rho.$$

4.2 A nova proposta

Considere soluções das equações de Einstein com a forma KS (4.11). Em princípio, poderíamos considerar todas as quantidades que definem (4.11) como variáveis f_A de (4.3). Porém, fazer isso excederia os graus de liberdade permitidos na RG, pois seriam: 10 graus de $\bar{g}_{\mu\nu}$, mais 3 graus² de k_μ e 1 grau de f , dando um total de 14 graus de liberdade para a métrica. Uma maneira de evitar que isso aconteça, é fixar a métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$. Obviamente, ao fazer isso, a nossa teoria vira uma teoria fundo-dependente, onde as quantidades são medidas com relação ao espaço tempo de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$. Observe que, fixando $\bar{g}_{\mu\nu}$ na forma KS, temos apenas 4 graus de liberdade na métrica. Portanto, definimos a família M_4 (4.3) como sendo

$$g_{\mu\nu}(f, k_a) = \bar{g}_{\mu\nu} + f k_\mu k_\nu, \quad (4.25)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ seriam as quantidades fixas ψ . A primeira variação $\delta g_{\mu\nu}$ de cada métrica

neste domínio M_4 será

$$\delta g_{\mu\nu} = f k_\mu \delta k_\nu + f k_\nu \delta k_\mu + k_\mu k_\nu \delta f. \quad (4.26)$$

² Isso porque $k_\mu k^\mu = 0$.

Introduzindo (4.25) e (4.26) em (4.2) temos

$$\begin{aligned}
(-X \cdot \Theta)_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{16\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} X^\nu \nabla_\sigma (\delta(k^\sigma k^\mu f)) - \nabla^\mu g^{\sigma\rho} \delta(k_\sigma k_\rho f) \\
&= -\frac{1}{16\pi} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} X^\nu \partial_\sigma (\delta(k^\sigma k^\mu f)) + \Gamma_{\theta\lambda} (\delta(k^\lambda k^\mu f)) + \Gamma_{\theta\lambda}^\mu (\delta(k^\sigma k^\lambda f)) \quad (4.27) \\
&= -\frac{1}{16\pi} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} X^\nu \delta \bar{\nabla}_\sigma (k^\sigma k^\mu f) - f k^\sigma k^\lambda \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $k_\mu k^\mu = 0$ na primeira linha e, na ultima, as propriedades simétricas (4.12). Abrindo o simbolo de Christoffel do termo $f k^\sigma k^\lambda \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu$, usando as

propriedades simétricas (4.12), pode ser mostrado que este se reduz a

$$f k^\sigma k^\lambda \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu = -f^2 k^\mu k^\sigma \bar{\nabla}_\sigma k^\lambda \delta k_\lambda. \quad (4.28)$$

Agora, provaremos um teorema, que é uma generalização do teorema 32.1 de [35] para espaços tempos de fundo, diferentes de Minkowski.

Theorem 4.2.1. *Seja $g_{\mu\nu}$ uma métrica com a forma (4.25), tal que*

$$R_{\mu\nu} - \bar{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0, \quad (4.29)$$

sendo $\bar{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci associado a $\bar{g}_{\mu\nu}$. Então,

$$a^\mu \equiv k^\lambda \nabla_\lambda k^\mu = k^\lambda \bar{\nabla}_\lambda k^\mu = \alpha(x) k^\mu, \quad (4.30)$$

onde α é um campo escalar. Portanto, o campo vetorial nulo k^μ é geodésico.

Demonstração. Pode-se relacionar os tensores Richi, associados a $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$, por

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu &= k^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu k^\mu - k^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu k^\mu \\
&= \nabla_\mu (k^\nu \nabla_\nu k^\mu) - \nabla_\mu k^\nu \nabla_\nu k^\mu - k^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu k^\mu \\
&= \bar{\nabla}_\mu k^\nu \bar{\nabla}_\nu k^\mu - \nabla_\mu k^\nu \nabla_\nu k^\mu - k^\nu \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu k^\mu \\
&= \bar{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu - \nabla_\mu k^\nu \nabla_\nu k^\mu - \bar{\nabla}_\mu k^\nu \bar{\nabla}_\nu k^\mu,
\end{aligned} \quad (4.31)$$

onde usamos as propriedades (4.13). Usando essas propriedades mais uma vez, pode-se mostrar que

$$\nabla_\mu k^\nu \nabla_\nu k^\mu - \bar{\nabla}_\mu k^\nu \bar{\nabla}_\nu k^\mu = f a^\mu a_\mu. \quad (4.32)$$

Portanto, a equação (4.31) se reduz a

$$R_{\mu\nu} - \bar{R}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -f a^\mu a_\mu. \quad (4.33)$$

Assumindo a condição (4.29), a equação acima implica que a^μ é nulo. No entanto, como a^μ é ortogonal a k^μ ($a^\mu k_\mu = 0$), então a^μ só pode ter a forma

$$a^\mu = \alpha(x) k^\mu. \quad (4.34)$$

A partir da relação (4.33), fica evidente que o oposto também é verdadeiro, ou seja, se k^μ é geodésico, então a condição (4.29) é satisfeita. —

Sob a condição (4.29) do teorema acima, o termo dado na equação (4.28) é nulo para soluções “on shell” e, assim, a equação (4.27) fica

$$(-X \cdot \Theta)_{\alpha\beta} = \delta \frac{-1}{16\pi} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} X^\nu \nabla_\sigma \bar{g}^{\sigma\mu} , \quad (4.35)$$

onde usamos (4.12) e (4.13). Dessa maneira, um \mathbf{B} compatível com (4.6) será

$$B_{\mu\nu} = - \frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\sigma \bar{g}^{\sigma\alpha} X^\beta + C_{\mu\nu}(\bar{g}), \quad (4.36)$$

onde $C_{\mu\nu}$ é qualquer 2-forma construída localmente de $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Portanto, pelo que foi visto anteriormente, temos que para soluções das equações de Einstein com a forma KS (4.25), satisfazendo a condição (4.29), podemos definir o seguinte hamiltoniano local:

$$H_{\mu\nu}(X) = - \frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha X^\beta + \nabla_\sigma \bar{g}^{\sigma\alpha} X^\beta + C_{\mu\nu}(\bar{g}). \quad (4.37)$$

Apesar de que a expressão (4.37) foi derivada reduzindo os graus de liberdade na métrica ($n = 4$), existem alguns argumentos a favor para acreditar que o hamiltoniano (4.37) representa uma definição local satisfatória de quantidades conservadas para espaços tempos com a forma KS na relatividade de Einstein. O primeiro fato a favor é que, quando o primeiro termo do lado direito de (4.37), que denotaremos a partir de agora por

$$\Delta H_{\mu\nu} \equiv - \frac{1}{16\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha X^\beta + \nabla_\sigma \bar{g}^{\sigma\alpha} X^\beta , \quad (4.38)$$

é calculado nas soluções de Schwarzschild e Kerr, a contribuição: $\nabla_\sigma \bar{g}^{\sigma\alpha} X^\beta$, fornece a outra metade da massa que faltava ao termo de Komar (3.5). Para mostrar isso, observe que a métrica de Kerr pode ser escrita na forma³ KS (em coordenadas BL) como

$$\begin{aligned} ds^2 = & -d\tau^2 - \frac{4M\rho}{\rho^2 - 2M\rho + a^2} d\tau d\rho + \frac{(\rho^2 - 4M\rho + a^2)(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)}{(\rho^2 - 2M\rho + a^2)^2} d\rho^2 \\ & + \frac{4aM\rho \sin^2 \vartheta}{\rho^2 - 2M\rho + a^2} d\rho d\varphi + (\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) d\vartheta^2 + (\rho^2 + a^2) \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \\ & + \frac{2M\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} d\tau + \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{\rho^2 - 2M\rho + a^2} d\rho - a \sin^2 \vartheta d\varphi , \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde o termo no colchete é o espaço de fundo, que neste caso é Minkowski. Integrando ΔH sobre a 2-superfície definida por: $\tau = cte.$, $\rho = cte.$, tomando o vetor de Killing $X^\mu = (1, 0, 0, 0)$, obtemos que

$$\hat{\Delta H}[X]_{\tau, \rho = cte.} = \hat{\Delta H}^{\mu\nu} n_{\mu\nu} d\vartheta d\varphi = M. \quad (4.40)$$

³ Isso é conseguido tomando $\Lambda = 0$ em (4.18) e usando (4.24) para transformar a forma KS de coordenadas esferoidais nas coordenadas de BL.

Portanto, a contribuição de ΔH , fornece exatamente a massa M do buraco negro. Este fato nos sugere definir a quantidade ΔH como sendo:

$$\Delta H \equiv \text{Hamiltoniano local relativo ao espaço de fundo.} \quad (4.41)$$

A palavra “relativo” significa que a quantidade é “medida” em relação ao espaço de fundo, ou melhor, o espaço de fundo é um “nível de referência” para esta quantidade. O segundo fato a favor é que, se assumirmos como certa a definição acima, e calcularmos a contribuição de ΔH para soluções de buracos negros com $\Lambda \neq 0$, nossos resultados concordam com os resultados obtidos por definições globais [16, 9, 43], com o método de BY [33, 34] e com o método de super-potenciais KBL [31, 13], com a diferença de que nossos resultados são independentes da superfície de integração. Por último e em terceiro lugar, quando examinamos a termodinâmica do buraco negro para $\Lambda < 0$, a nossa expressão de energia local relativa (4.38) nos permite derivar a formula de Smarr desde uma perspectiva geométrica em vez de uma puramente termodinâmica. Isto será visto mais adiante no capítulo 6.

5 Comparação com outras definições

Neste capítulo pretendemos comparar a nossa proposta local com as definições de quantidades conservadas vistas no capítulo 3. Para fazer isso precisamos definir um espaço tempo que satisfaça simultaneamente todos os requisitos de cada definição. O candidato mais plausível para isso é o buraco negro Kerr-AdS₄ definido pela métrica (4.16). Observe que este espaço tempo satisfaz todos os requisitos de cada definição: primeiramente, é assintoticamente AdS, além disso, satisfaz a condição quase local (ii) em (3.43) (para superfícies com $\tau = cte.$, $\rho = cte.$) e, finalmente, tem uma forma KScm AdS como espaço tempo de fundo, o que obviamente satisfaz (3.2).

Definimos a energia e o momento angular local associados a uma 2-superfície tipo espaço \mathfrak{E} , como as cargas locais dadas por

$$\Delta_g E \equiv \int_{\mathfrak{E}} \Delta_g \mathbf{H}[t^\mu] = - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{E}} \nabla^{[\alpha} t^{\beta]} + \nabla_{\sigma} \bar{g}^{\sigma[\alpha} t^{\beta]} n_{\alpha\beta}, \quad (5.1)$$

$$\Delta_g J \equiv - \int_{\mathfrak{E}} \Delta_g \mathbf{H}[\varphi^\mu] = - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{E}} \nabla^{[\alpha} \varphi^{\beta]} + \nabla_{\sigma} \bar{g}^{\sigma[\alpha} \varphi^{\beta]} n_{\alpha\beta}, \quad (5.2)$$

onde t^μ e φ^μ são os respectivos vetores de Killing geradores da simetria temporal e axial do espaço tempo.

5.1 ADM vs Hamiltoniano local

Pode-se encontrar a massa m_{ADM} de Kerr-AdS₄ usando a fórmula obtida em (3.39). Para fazer isso, primeiro é necessário transformar a métrica Kerr-AdS₄ (4.16) em coordenadas TH. Isso é feito usando a seguinte transformação [16]:

$$\tau = T, \quad \rho \cos \vartheta = R \cos \Theta, \quad \varphi = \Phi - \frac{\Lambda a}{3} T, \quad \Sigma R^2 = \rho^2 \left(1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \vartheta}{3} \right) + a^2 \sin^2 \vartheta \quad (5.3)$$

Fazendo esta transformação, encontra-se que [16]

$$\begin{aligned} h_{RR} &= \frac{18M}{\Lambda^2} \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-3/2} R^{-5} + O(R^{-7}), \\ h_{\Theta\Theta} &= 2Ma^4 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-7/2} R^{-3} + O(R^{-5}), \\ h_{\Phi\Phi} &= 2Ma^2 \sin^4 \Theta \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-5/2} R^{-1} + O(R^{-3}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Portanto, usando (3.39), temos

$$\begin{aligned}
m_{ADM} &= \frac{\Lambda}{16\pi} \left[\frac{2\Lambda}{9} \frac{18M}{\Lambda^2} \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-3/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2Ma^2 \sin^4 \Theta}{\sin^2 \Theta} \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-5/2} \right] \sin \Theta d\Theta d\Phi. \\
&= \frac{M}{4\pi} \left(1 + \frac{\Lambda a}{3} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta d\Theta d\Phi \\
&\quad - \frac{M\Lambda a^2}{8\pi} \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3} \sin^2 \Theta \right)^{-5/2} \sin \Theta d\Theta d\Phi \\
&= \frac{M}{\Sigma^2},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

que é a mesma massa obtida em [16]. Analogamente, usando a fórmula (3.41), se encontra que o momento angular J_{ADM} é [16]

$$J_{ADM} = \frac{1}{8\pi} \nabla^{[\mu} \varphi^{\nu]} n_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \nabla^{[T} \varphi^{R]} n_{TR} = \frac{aM}{\Sigma^2}. \tag{5.6}$$

Agora, vamos calcular essas mesmas quantidades usando as fórmulas locais dadas em (5.1) e (5.2). Vimos na seção 4.1.1 que a métrica Kerr-AdS₄ pode ser levada numa forma KS com AdS como espaço de fundo. Nas coordenadas esferoidais de Gibbons, esta forma KS pode ser expressa como [39]

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \frac{(1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3})(1 - \frac{\Lambda r^2}{3})}{\Sigma} dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2)(1 - \frac{\Lambda r^2}{3})} dr^2 \\
&\quad + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3}} d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi^2 \\
&\quad + \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \right) dt + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2)(1 - \frac{\Lambda r^2}{3})} dr - \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} d\phi.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Poderíamos transformar esta forma KS em coordenadas TH, porém a expressão resultante é muito complexa. Felizmente, podemos calcular essas quantidades trabalhando nas coordenadas esferoidais de Gibbons. Isso ocorre porque os vetores de Killing responsáveis por essas quantidades, mantêm a mesma forma em ambos os sistemas de coordenadas, i.e.,

$$t^\mu = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\varphi^\mu = \frac{\partial T}{\partial \Phi} = \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi} . \quad (5.8)$$

Isso é fácil de verificar usando juntamente as transformações (4.24) e (5.3).

Para calcular as quantidades locais, tomaremos Ξ como 2-superfícies de tempo e

raio constante, i.e., $t = cte.$, $r = L$. Temos, então, que para a quantidade conservada associada a $\sqrt{-g}$:

$$n_{tr} = \frac{-g}{2\Sigma} = -\frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta,$$

$$\Delta_{AdS} H^{tr} = \frac{6r^4 + a^2 r^2 (3 - \Lambda r^2 + 3(1 + \Lambda r^2) \cos^2 \theta) - a^4 \cos^2 \theta (3 - \Lambda r^2 - (3 + \Lambda r^2) \cos^2 \theta)}{24\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3 \Sigma} M - \frac{r(r^2 + a^2)}{24\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \Lambda. \quad (5.9)$$

Portanto, usando a equação (5.1), obtemos

$$\Delta_{AdS} E = \int \Delta_{AdS} H^{\mu\nu} n_{\mu\nu} d\theta d\phi = \frac{M}{\Sigma^2} - \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda. \quad (5.10)$$

Observe que se $L \rightarrow \infty$, então $\Delta_{AdS} E \rightarrow \infty$. Isso à primeira vista parece contraditório, pois se espera que a energia relativa a AdS seja finita, já que a divergência deveria estar contida na contribuição de AdS para a energia total¹. No entanto, não há nada de contraditório como mostraremos a seguir. Para fazer isso, vamos calcular a contribuição de AdS medida em relação ao espaço de fundo de Minkowski. Observe que a métrica AdS nas coordenadas esferoidais de Gibbons é descrita pelo elementode linha no colchete de (5.7). Podemos usar as seguintes transformações:

$$t = T, \quad \varphi = \Phi, \quad r \cos \theta = R \cos \Theta, \quad \Sigma R^2 = r^2 \left(1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \right) + a^2 \sin^2 \theta, \quad (5.11)$$

para trazê-la para a forma padrão dada nas coordenadas TH (3.21). Assim que tivermos a métrica AdS nas coordenadas TH, podemos introduzir uma nova coordenada temporal T^* dada por

$$T^* = T - R + R^*, \quad (5.12)$$

onde R^* é a coordenada *tortoise* de AdS definida por

$$R^* \equiv \int \frac{1}{\Lambda} dR = -\frac{3}{\Lambda} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} R. \quad (5.13)$$

$$1 - \frac{\Lambda}{3} R^2$$

A métrica AdS nesta nova coordenada assume a forma

$$ds^2 = -dT^{*2} + dR^2 + R^2 d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2 + \frac{\Lambda R^2}{3} (dT^* + dR)^2, \quad (5.14)$$

que é uma forma KS com Minkowski sendo o espaço tempo de fundo. Invertendo todas as mudanças de variáveis feitas, transformando separadamente o espaço de fundo na

-
- ¹ Isso porque sabemos que a densidade de energia de AdS é Λ e, portanto, a energia contida em um volume V seria $\sim \Lambda V$, que diverge se $V \rightarrow \infty$.

equação acima, obtemos finalmente a forma KS de AdS com fundo minkowskiano em coordenadas esferoidais de Gibbons:

$$\begin{aligned}
ds_{AdS}^2 = & - dt^2 - \frac{2\Lambda r R}{\frac{\Lambda r}{3}} dt dr - \frac{\Lambda a^2 R \sin 2\theta}{3 \frac{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{3} \Lambda}} dt d\theta \\
& + \frac{r^2 \frac{1 - \frac{2r^2 + a^2}{3} \Lambda}{(r^2 + a^2)} + a^2 \frac{1 - \Lambda r^2}{1 - \Lambda r^2} \cos^2 \theta}{(r^2 + a^2) \frac{1 - \Lambda r^2}{1 - \Lambda r^2}} dr^2 - \frac{\Lambda a^2 r \sin 2\theta}{3 \frac{1 - \Lambda r^2}{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{3} \Lambda}} dr d\theta \\
& + \frac{r^2 + \frac{a^4 \cos^2 \theta \cos 2\theta}{3} \Lambda + a^2 \frac{1 + \frac{\Lambda r^2}{3} \cos^2 \theta}{2}}{3} d\theta^2 + \frac{(r + a)^2 \sin^2 \theta}{(r + a)^2} d\phi^2 \\
& + \frac{\Lambda R^2}{r} \frac{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{3} \Lambda}{a^2 \sin 2\theta} dt + \frac{1}{1 - \Lambda r^2} \frac{dr}{R} + \frac{1}{2} \frac{d\theta}{1 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{3} \Lambda} + \frac{d\phi}{R} ,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde R é dado como função de r e θ . Portanto, calculando a energia local desta contribuição, tomando Ξ como no caso anterior, obtemos que

$$\Delta_{Mink} H^{tr} = \frac{r(r^2 + a^2)}{24\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \Lambda, \tag{5.16}$$

e assim, a energia de AdS medida em relação a Minkowski será

$$\Delta_{Mink} E = \int_{\Xi} \Delta_{Mink} H^{\mu\nu} n_{\mu\nu} d\theta d\phi = \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda. \tag{5.17}$$

Considerando o fato de que a energia é uma quantidade aditiva, a energia local de Kerr-AdS₄ medida em relação a Minkowski, que denotaremos simplesmente como E , é

$$E = \Delta_{AdS} E + \Delta_{Mink} E = \frac{M}{\Sigma^2} = m_{ADM}. \tag{5.18}$$

Calculamos acima a energia local de Kerr-AdS₄, E , usando 2-superfícies com alguma simetria (“esferas de raio constante”). Porém, vale a pena perguntar, se teríamos obtido o mesmo resultado para E , usando qualquer outra 2-superfície fechada Ξ . Sabe-se que a contribuição Komar de (5.1) é independente de Ξ quando o vetor t^μ é de Killing [2]. Seria de se esperar que a outra contribuição de (5.1) também possuísse esta característica, dado o caráter local de (4.38). Vamos mostrar, usando diretamente a fórmula (5.1), que a energia local E do buraco negro Kerr-AdS₄ é independente de

Ξ , ou pelo menos, para o tipo de superfícies consideradas a seguir. Mostraremos esta independência usando superfícies Ξ que podem ser descritas genericamente nas coordenadas esferoidais de Gibbons como²:

$$t = \text{cte.}, \quad r = f(\theta, \phi), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad (5.19)$$

² Isto seria análogo à “equação paramétrica polar” da superfície.

onde f é qualquer função diferenciável, que é periódica em ϕ . Observe que para este caso temos que as únicas componentes diferentes de zero de $n_{\mu\nu}$ são

$$n_{tr} = \frac{\sqrt{-g}}{2}, \quad n_{t\theta} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \frac{\partial r}{\partial \theta}, \quad n_{t\phi} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \frac{\partial r}{\partial \phi}. \quad (5.20)$$

Usando a fórmula (5.1), temos então que

$$\begin{aligned} E &= \Delta_{\text{AdS}} E + \Delta_{\text{Mink}} E \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \nabla^{[\alpha} t^{\beta]} + \nabla_{\sigma} g_{\text{ads}}^{\sigma[\alpha} t^{\beta]} + \nabla_{\text{ads}}^{[\alpha} t^{\beta]} + \nabla_{\sigma} g_{\text{mink}}^{\sigma[\alpha} t^{\beta]} n_{\alpha\beta} d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde g_{ads} e g_{mink} são as métricas AdS e Minkowski dadas nos colchetes (5.7) e (5.15) respectivamente, e ∇_{ads} é a conexão associada a g_{ads} . Desenvolvendo a integral acima, temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{M}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \frac{2r^4 + a^2 r^2}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{1 - \Lambda r^2 + (1 + \Lambda r^2) \cos^2 \theta}{3} \sin \theta \\ &\quad - \frac{a^4}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{1 - \Lambda r^2 - 1 + \Lambda r^2 \cos^2 \theta}{3} \cos^2 \theta \sin \theta \\ &\quad + \frac{a^2 r}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \frac{1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \sin^2 \theta \cos \theta}{\partial r} \frac{a \Sigma}{3} \frac{1 + \frac{\Lambda r^2}{3} \sin \theta}{\partial r} \\ &\quad + \frac{4\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}{8\pi} \frac{\partial \theta}{(r^2 + a^2) \frac{1 - \Lambda r^2}{3}} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} d\theta d\phi \\ &= \frac{M}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \frac{a^2}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \frac{1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \cos \theta \sin^2 \theta}{\partial \theta} \frac{\Lambda a^2 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta}{8\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{(3 - \Lambda a^2) \tan^{-1} \frac{r}{a} - 2a \sqrt{-3\Lambda} \tan^{-1} \frac{r}{r - \frac{\Lambda}{3}}}{24\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{M}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \frac{a^2}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \frac{1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \cos \theta \sin^2 \theta}{\partial \theta} \frac{\Lambda a^2 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta}{8\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} d\phi \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{(3 - \Lambda a^2) \tan^{-1} \frac{r}{a} - 2a \sqrt{-3\Lambda} \tan^{-1} \frac{r}{r - \frac{\Lambda}{3}}}{24\pi} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{M}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \frac{a^2}{8\pi(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \frac{1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \cos \theta \sin^2 \theta}{\partial \theta} \frac{\Lambda a^2 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta}{8\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} d\phi \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{(3 - \Lambda a^2) \tan^{-1} \frac{r}{a} - 2a \sqrt{-3\Lambda} \tan^{-1} \frac{r}{r - \frac{\Lambda}{3}}}{24\pi} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde usamos a periodicidade de 2π na variável ϕ e o fato de que $\sin \pi = \sin 0 = 0$.

Vemos então que o resultado obtido acima é independente da função f e portanto de Ξ . Esta é uma das grandes diferenças entre a nossa proposta e métodos globais, os quais estão obrigados a avaliar integrais necessariamente no infinito espacial

para obter m_{ADM} . Em nossa proposta local interpretamos m_{ADM} simplesmente como a energia local de Kerr-AdS₄ medida em relação ao espaço de Minkowski. Esta interpretação faz sentido dado que o espaço de Minkowski (“o nível de referência”), é o espaço tempo onde todas as quantidades ADM são nulas. Observe que a divergência na quantidade $\Delta_{AdS}E$, comentada anteriormente, é perfeitamente compreensível nesta perspectiva, pois a energia de AdS torna-se cada vez mais negativa a medida que L cresce, ou seja, “o nível de referência” é cada vez mais negativo. Na figura (1), se observa bem este comportamento.

Muitos autores consideram E como a energia “correta” do buraco negro de Kerr-AdS₄, já que o vetor de Killing gerador da simetria temporal concorda (a menos de um fator) com um dos geradores da álgebra de Lie do grupo de simetria $O(3, 2)$ [16]. Como veremos na próximo capítulo, esta energia tem certa vantagem quando Kerr-AdS₄ é analisado termodinamicamente, pois a partir dela é possível obter a primeira lei.

Por outro lado, para calcular o momento angular local do buraco negro, tomamos \mathfrak{K} como nos casos anteriores. Usando a equação (5.2) obtemos que o momento angular de Kerr-AdS₄ medido em relação a AdS, é

$$\Delta_{AdS}J = - \int_{\mathfrak{K}} \Delta_{AdS} H^{\mu\nu} n_{\mu\nu} d\theta d\phi = \frac{aM}{\Sigma^2}. \quad (5.23)$$

O cálculo simples de $\Delta_{Mink}J$, a partir de (5.15), mostra que o momento angular local de AdS em relação a Minkowski é zero (“AdS não gira”) e, portanto, o momento angular total de Kerr-AdS₄ medido com relação a Minkowski, que denotaremos por J , será

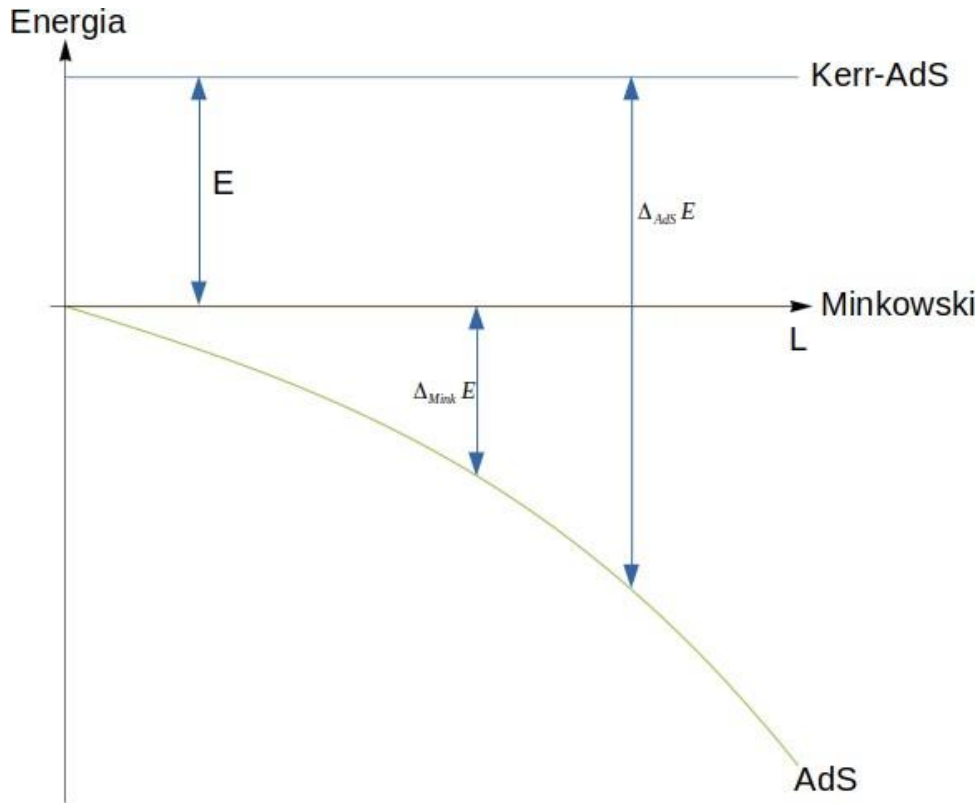
$$J = \Delta_{AdS}J + \Delta_{Mink}J = \frac{aM}{\Sigma^2} = J_{ADM}. \quad (5.24)$$

Analogamente, como foi feito para o caso de E , pode-se também mostrar a independência de J com respeito à \mathfrak{K} .

5.2 BY vs Hamiltoniano local

Para comparar nosso método local com o método BY usaremos as coordenadas BL, pois nessas coordenadas é mais fácil satisfazer a condição (ii) de (3.43) usando 2-superfícies com $\tau = cte.$, $\rho = cte.$ Para fazer isso, vamos fatiar o espaço tempo Kerr-AdS₄ usando 3-superfícies de tempo constante $\tau = cte.$, e tomaremos como coordenadas espaciais: ρ, ϑ, ϕ . Observe que o vector de deslocamento N_i , neste caso será

$$N_i \equiv g_{0i} = \begin{pmatrix} 0, 0, \frac{\Delta_\rho - \Delta_\vartheta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)\Sigma} a \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Figura 1 – Gráfico de energia versus L .

Tomaremos M como 3-superfícies de raio constante, ou seja, $\rho = cte.$. Portanto, o C_t serão 2-superfícies com $\tau = cte.$, $\rho = cte.$, onde o vetor normal é dado por

$$\sigma^\mu \equiv (\nabla_\nu \rho)^{\mu} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}} \quad 0, \quad \frac{\Delta_\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \quad 0_{\pm 0} \quad . \quad (5.26)$$

Observe que $\sigma^i N_i = 0$, portanto a condição (ii) de (3.43) é automaticamente satisfeita. Precisamos encontrar o K da 3-superfícies M , que é dado por

$$K = \gamma^{ij} \frac{1}{2N^M} D_j N^M_i + D_i N^M_j \gamma^{ij} \quad (5.27)$$

onde N^M e N^M_i são a função lapso e o vector de deslocamento de M respectivamente. Observe que $N^M_i = \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{\Delta_\rho} \delta^i_j$ e $N^M = 0$. Portanto K é simplesmente dado por

$$K = - \frac{1}{2N^M} \gamma^{ij} \partial_\rho \gamma_{ij} \\ = \frac{2\Lambda \rho a^4 \cos^2 \vartheta + 6\rho^2}{2\sqrt{3} \sqrt{\rho(6M - 3\rho + \Lambda \rho^2) + a^2(\Lambda \rho^2 - 3)(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^3}} \quad (5.28)$$

Com esses resultados, temos então que \hat{m}_{BY} será dado por

$$m_{BY} = \int_{C_t} Q(n^\mu) - n \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{8\pi} \int_{C_t} \nabla^{[\mu} n^{\nu]} + 2K \sigma^{[\mu} n^{\nu]} \quad n_{\mu\nu} + m_0, \quad (5.29)$$

onde

$$\alpha = 1 - \frac{a^2 \Lambda}{3}, \quad \beta = 1 - \frac{2M}{\rho} - \frac{\Lambda}{3} \rho^2. \quad (5.34)$$

Tomaremos $\Xi = C_t$, com raio $\rho = L$. Temos então que para o vector de Killing t^μ :

$$n_{\tau\rho} = \frac{\sqrt{-g}}{2} = \frac{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta}{2\Sigma},$$

$$\Delta_{AdS} H^{\tau\rho} = \frac{M}{8\pi(\rho^2 + a^2 \cos^2 \vartheta)^3} \frac{\rho^2 (2\rho^2 + a^2 \sin^2 \vartheta) + a^2 \cos^2 \vartheta (2\rho^2 - a^2 \sin^2 \vartheta)}{\rho(\rho^2 + a^2)\Lambda}. \quad (5.35)$$

Portanto, a energia local de Kerr-AdS₄ medida em relação a AdS é

$$\Delta_{AdS} E' = \int_{\rho=L}^{\hat{}} \Delta_{AdS} H^{\mu\nu} n_{\mu\nu} d\vartheta d\varphi = \frac{M}{\Sigma} - \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda. \quad (5.36)$$

Da mesma forma que fizemos na seção anterior, podemos calcular a energia de AdS medida em relação a Minkowski. O resultado obtido para este caso é

$$\Delta_{Mink} E' = \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda. \quad (5.37)$$

Portanto, a energia total que denotaremos por E' , seria

$$E' = \Delta_{AdS} E' + \Delta_{Mink} E' = \frac{M}{\Sigma}. \quad (5.38)$$

Observe que se tomarmos a normalização de Caldarelli [33] para o vector Killing t^μ , o resultado para E' seria exatamente m_{ADM} , isso porque $\Delta H[t^\mu]$ é linear em t^μ . Contudo, considerar esta normalização é um tanto “arbitrária” no sentido de que não há nenhuma razão “física” para fazê-lo. Como sugerido por Gibbons [44, 41], é possível interpretar E' desde uma perspectiva fisicamente mais razoável, considerando o referencial descrito pelas coordenadas de BL como um referencial que “gira” em relação ao referencial descrito pelas coordenadas esferoidais. Neste referencial que “gira”, a energia de Kerr-AdS₄ é dada por E' , enquanto que no outro referencial (“estático”) a energia é E . Isto é fácil de ver usando as transformações (4.24). Note que o vector de Killing ∂_τ está relacionado aos vetores Killing ∂_t e ∂_ϕ via [44]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\Lambda a}{3} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.39)$$

onde $a\Lambda/3$ é interpretado como a “velocidade angular” entre os referenciais. A partir desta relação entre os vetores Killing, pode-se expressar E' em função de E e J . Isso é fácil de encontrar em nosso método local, usando a linearidade de ΔH em seu

argumento,

$$\begin{aligned}
E' &= \widehat{\Delta}_{AdS} E' + \widehat{\Delta}_{Mink} E' \\
&= \Delta_{AdS} \mathbf{H}[\partial_\tau] + \Delta_{Mink} \mathbf{H}[\partial_\tau] \\
&= \widehat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\partial_t] - \frac{\Lambda a}{3} \widehat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\partial_\phi] + \widehat{\Delta}_{Mink} \mathbf{H}[\partial_t] - \frac{\Lambda a}{3} \widehat{\Delta}_{Mink} \mathbf{H}[\partial_\phi] \quad (5.40) \\
&= E - \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda - \frac{\Lambda a}{3} (-J) + \frac{L(L^2 + a^2)}{6\Sigma} \Lambda \\
&= E + \frac{\Lambda a}{3} J,
\end{aligned}$$

que é o mesmo resultado obtido em [44].

Por outro lado, para o momento angular local J' temos que $\partial_\varphi = \partial_\phi$, e portanto, J' teria o mesmo valor obtido em (5.23).

Vemos então que uma grande diferença entre nosso método local e o método BY é que nosso método não precisa adicionar contra-termos para obter a energia de Kerr-AdS₄. Além disso, o método BY só pode obter a energia de Kerr-AdS₄, tomando o limite $\rho \rightarrow \infty$, diferente do nosso caso, onde E' pode ser obtido usando qualquer 2-superfície \mathbb{F} .

5.3 Super-potencial KBL vs Hamiltoniano local

É claro que tanto o super-potencial KBL (3.16), quanto o hamiltoniano local (4.38), representam correções ao super-potencial de Komar (3.9). Isso pode ser visto observando que as expressões para $J_{KBL}^{\mu\nu}$ e $\Delta H_{\mu\nu}$ são construídas a partir de $J_{Ko}^{\mu\nu}$ acrescentando uma correção em cada caso. Também foi visto que ambos são métodos métrico fundo dependentes, onde as quantidades conservadas são relativas a um espaço de fundo definido. No entanto, apesar destas semelhanças, existem duas grandes diferenças a destacar entre o nosso método local e o método KBL. A primeira diferença clara é que a massa m_{ADM} tem uma interpretação diferente no método KBL. Por exemplo, no caso do buraco negro Kerr-AdS, esta massa é conseguida com um super-potencial relativo ao espaço tempo de AdS, ou seja, m_{ADM} é relativa a AdS, não a Minkowski, como em nosso método. Isto é fácil de ver usando as coordenadas esferoidais de Gibbons e calculando a integral [31]

$$E_{KBL} = \int_{\infty}^{\widehat{\mathbb{F}}} d^{D-2} x \hat{J}^{tr}, \quad (5.41)$$

onde \hat{J}^{tr} é dado em (3.16) tomando $\overline{g_{\mu\nu}}$ como AdS e $g_{\mu\nu}$ como a métrica de Kerr-AdS. Estes cálculos foram feitos para dimensão arbitrária em [31], onde obteve-se que

$$\hat{J}^{tr} = \frac{M}{8\pi\mathbb{F}} - \frac{1}{(D-1)} \frac{W}{r}$$

$$\sqrt{g_{(D-2)+}} \quad O \quad M^2, \quad (5.42)$$

onde $g^{(D-2)}$ é o determinante da métrica da $(D - 2)$ -esfera e

$$\Xi = \prod_{i=1}^n \Xi_i, \quad W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu^2}{\Xi_i}, \quad \Xi_i = 1 + \frac{\Lambda a^2}{3}. \quad (5.43)$$

Calculando a integral (5.41) com \hat{J}^{tr} dada pela expressão (5.42), obtém-se para o caso $D = 4$, que [31]

$$E_{KBL} = \frac{M}{\Sigma^2} = m_{ADM}. \quad (5.44)$$

A segunda diferença entre nosso método local e o método KBL é que, assim como no método BY, a massa de ADM no método KBL, só é conseguida se a superfície de integração for uma esfera de raio infinito $r \rightarrow \infty$. Se, por outro lado, usássemos esferas de raio finito $r = L$, seria fácil ver integrando a expressão \hat{J}^{tr} que

$$E_{KBL}|_{r=L} = \int_{r=L}^{\infty} d^{D-2}x \hat{J}^{tr} = \frac{M}{\Sigma^2} + O(M^2), \quad (5.45)$$

i.e., a energia E_{KBL} dependeria de termos de segunda ordem em M , o que não acontece com nosso método local, já que a contribuição $\Delta_{\text{AdS}E}$ (5.10) evidentemente contém apenas termos de primeira ordem em M .

Uma análise análoga para o momento angular pode ser feita, chegando os mesmos resultados acima.

6 Termodinâmica de Kerr-AdS₄

Ao contrário da termodinâmica usual, que trata com sistemas finitos (sem levar em conta sua origem mecânico-estatística), para sistemas como buracos negros, as variáveis termodinâmicas são definidas a priori, ou seja, dependem de objetos geométricos que definem a geometria do buraco negro. Portanto, para se ter uma boa termodinâmica, é necessário que essas grandezas estejam bem definidas. As quais normalmente são: a energia, o momento angular e a entropia que está relacionada com a área do horizonte de eventos. Essas quantidades podem depender do observador, pois na RG, os observadores estão ligados à sistemas de coordenadas, ou mais exatamente, aos chamados: *frames*. No entanto, o que não pode depender do observador são as leis da termodinâmica. No caso do buraco negro de Kerr, sabe-se que uma boa termodinâmica pode ser estabelecida, onde as variáveis que entram na primeira lei são as grandezas medidas por um observador inercial localizado no infinito espacial. Porém, quando a constante cosmológica é levada em conta, não é mais tão simples estabelecer uma termodinâmica satisfatória. Isto porque não temos uma “receita” para identificar as quantidades conservadas de um buraco Kerr-AdS que sejam compatíveis com a primeira lei [44]. Atualmente, a ideia que tem sido mais aceita pelos autores é a de introduzir Λ como uma variável termodinâmica adicional. O resultado mais satisfatório foi obtido por Kastor [26] para buracos negros SAdS. Ele usou integrais de Komar com potenciais Killing, para obter uma lei de Smarr e uma primeira lei, onde a massa cumpria o papel de entalpia e a constante cosmológica, como uma pressão de vácuo. Uma generalização do trabalho de Kastor foi posteriormente feita por Dolan [27] considerando rotação.

Neste capítulo pretendemos deduzir os resultados obtidos em [27, 28], utilizando nosso método local desenvolvido nas seções anteriores. Veremos que a lei de Smarr, pode ser estabelecida desde uma perspectiva puramente geométrica. Além disso, propomos uma solução para o problema da independência de entropia e do volume para buracos negros sem rotação [27].

6.1 Método canônico de Iyer-Wald

Para o caso de buracos negros estacionários assintoticamente planos, existe um método bastante geral para provar a primeira lei da termodinâmica de buracos negros a partir da introdução do conceito de entropia canônica. O método foi desenvolvido por Wald e Iyer [25, 24]. Esta abordagem é baseada no lagrangiano da teoria e vale para qualquer solução de buraco negro que satisfaça as equações de movimento derivadas do lagrangiano. Mostraremos a seguir, as ideias centrais do método. Para

simplificar, tomaremos o caso $D = 4$. Considere uma teoria da gravidade descrita por um lagrangiano difeomorficamente invariante da forma (2.7), com ϕ sendo uma solução de buraco negro estacionário para suas equações de movimento. Um buraco negro estacionário é descrito por dois vetores de killing t^μ (translações temporais no infinito espacial) e ϕ^μ (rotações aximétricas no infinito espacial). Os dois combinados formam um horizonte de Killing descrito por [2, 45]

$$K^\mu = t^\mu + \Omega\phi^\mu, \quad (6.1)$$

onde Ω é uma constante, conhecida como a velocidade angular do horizonte. É bem conhecido que o horizonte de eventos H de um buraco negro estacionário é um horizonte de Killing [2, 45], i.e., é uma 3-superfície nula, tal que $K_\mu K^\mu|_H = 0$. Esse horizonte tem a estrutura: $H = H^+ \cup B \cup H^-$ [45], onde H^\pm são 3-superfícies chamadas horizonte de eventos futuro (passado) e B é uma 2-superfície, que tem a topologia de uma 2-esfera, conhecida como: ponto de bifurcação do horizonte [45]. Como ϕ é uma solução estacionária de buraco negro, ϕ deve ser invariante sob as isometrias geradas por t^μ e ϕ^μ e, portanto, também de K^μ , i.e., $\mathcal{L}_K\phi = 0$ [25]. Se $\mathcal{L}_K\phi = 0$, então $\Theta(\phi, \mathcal{L}_K\phi) = 0$ e, portanto, $\omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_K\phi) = 0$. Segue então das equações (2.50) e (2.52) que [25, 30]

$$0 = \int_{\partial\Sigma} (\delta Q(K) - K \cdot \Theta) = - \int_B (\delta Q(K) - K \cdot \Theta) + \int_\infty (\delta Q(K) - K \cdot \Theta), \quad (6.2)$$

onde Σ é a 3-superfície limitada por B e ∞ é o infinito espacial. Dada a linearidade da derivada de Lie e o fato de que $\Theta(\phi, \delta\phi)$ é linear em $\delta\phi$, temos que \mathbf{J} e, portanto \mathbf{Q} , são lineares em seus argumentos. Então, usando (6.1) na integral \int_∞ da equação acima, obtemos

$$\int_\infty (\delta Q(K) - K \cdot \Theta) = \int_\infty (\delta Q(t) - t \cdot \Theta) + \Omega \int_\infty (\delta Q(\phi) - \phi \cdot \Theta). \quad (6.3)$$

A energia (ou massa) canônica \mathbf{M} e o momento angular canônico \mathbf{J} de um buraco negro estacionário são definidos como quantidades, cuja primeira variação é dada por [24, 25, 30]

$$\delta\mathbf{M} = \int_\infty (\delta Q(t) - t \cdot \Theta), \quad \delta\mathbf{J} = - \int_\infty (\delta Q(\phi) - \phi \cdot \Theta). \quad (6.4)$$

Veremos a seguir que essas definições fazem sentido quando consideramos o caso do lagrangiano da RG. Por outro lado, em [24, 25] é mostrado em detalhes que

$$\int_B (\delta Q(K) - K \cdot \Theta) = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S_w, \quad (6.5)$$

onde κ é a gravidade superficial do buraco negro e S_w é a entropia canônica, comumente conhecida como **Entropia de Wald**, a qual é definida por [45]

$$S_w \equiv -2\pi \int_B \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} n_{\mu\nu} n_{\alpha\beta} dB, \quad (6.6)$$

onde L é a densidade lagrangiana usual e $n_{\mu\nu}$ é o bi-vetor normal de B , normalizado na forma $n_{\mu\nu}n^{\mu\nu} = -2$. Com todas essas definições, a equação (6.2) se torna

$$\delta\mathbf{M} = \frac{K}{2\pi}\delta S_w + \Omega\delta\mathbf{J}, \quad (6.7)$$

que é conhecida como **primeira lei da mecânica dos buracos negros**, a qual é válida para qualquer teoria da gravidade baseada em um lagrangiano difeomorficamente invariante, que admite uma solução estacionária de buraco negro.

Para o caso da RG \mathbf{M} , \mathbf{J} e S_w se reduzem a quantidades bem conhecidas. A energia canônica é reduzida à massa ADM usual [25]

$$\mathbf{M} = m_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \int_{\infty}^{\hat{}} dS r^k h^{ij} \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}. \quad (6.8)$$

Para o caso do momento angular, mostra-se que o termo $\varphi \cdot \Theta$ é nulo no infinito espacial [25] e, portanto,

$$\mathbf{J} = J_{ADM} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\infty}^{\hat{}} dS_{\mu\nu} \nabla^{\mu} \phi^{\nu}. \quad (6.9)$$

Por último, observe que a entropia de Wald, no caso da RG, se reduz a

$$S_w = -2\pi \int_B \frac{\delta L_{RG}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} n_{\mu\nu} n_{\alpha\beta} dB = -\frac{1}{8} \int_B n^{\mu\nu} n_{\mu\nu} dB = \frac{1}{4} \int_B dB = \frac{A_B}{4}, \quad (6.10)$$

onde A_B denota a área do B . O resultado acima é a bem conhecida entropia de um buraco negro assintoticamente plano.

6.2 Termodinâmica de Kerr-AdS₄ via método local

Poderíamos estender o método canônico de Iyer-Wald, para incluir o caso de espaços tempos assintoticamente AdS, como Kerr-AdS₄. Porém, mesmo que a entropia de Wald esteja perfeitamente definida para esses espaços, o método falha porque as quantidades \mathbf{M} e \mathbf{J} divergem [26]. Além disso, o formalismo não é capaz de fornecer uma lei de Smarr compatível com a primeira lei da termodinâmica. Veremos que, usando o nosso método local, desenvolvido nas seções anteriores, estes problemas podem ser superados.

Examinaremos a termodinâmica para o caso específico do buraco negro estacionário Kerr-AdS₄, sob a perspectiva de dois referenciais. O primeiro destes, é o referencial estático não rotativo (RENr) [44], que é descrito pelas coordenadas esferoidais de Gibbons (t, r, θ, ϕ) , onde a métrica de Kerr-AdS₄ assume a forma dada em (5.7) e os vetores de Killing t^{μ} e φ^{μ} são dados por

 t^{μ}

RENr

R

ENR

∂_t, t^μ

=

 $\partial_\phi.$

(6.11

)

O segundo, é o referencial estacionário rotativo (RER) [44], descrito pelas coordenadas de BL $(\tau, \rho, \vartheta, \varphi)$, onde a métrica de Kerr-AdS₄ é dada por (4.16) e os vetores de Killing t^μ e φ^μ são

$$t_{\text{RER}}^\mu = \partial_\tau, \quad \varphi_{\text{RER}}^\mu = \partial_\varphi. \quad (6.12)$$

A energia e o momento angular de Kerr-AdS₄ medidos por esses referenciais foram calculados no capítulo anterior. A energia e o momento angular do RENR são dados pelas grandezas ADM (5.18) e (5.24). Para o caso do RER, a energia e o momento angular são dados pelas quantidades E' e J' obtidas na seção 5.2

$$\text{RENR} \Rightarrow \begin{cases} \square E = \frac{M}{\Sigma^2} \\ \square J_{\text{RENR}} = \frac{aM}{\Sigma^2} \end{cases}, \quad \text{RER} \Rightarrow \begin{cases} \square E = \frac{M}{\Sigma} \\ \square J_{\text{RER}} = \frac{aM}{\Sigma^2} \end{cases}. \quad (6.13)$$

6.2.1 Formula de Smarr

É bem sabido que para o caso da termodinâmica com constante cosmológica nula (Kerr), as grandezas que participam da primeira lei satisfazem uma relação análoga à equação de homogeneidade da termodinâmica usual. Essa relação tem a forma

$$\frac{E}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A - \Omega J = 0, \quad (6.14)$$

que é conhecida como **fórmula de Smarr**. Para o caso de um buraco negro Kerr-AdS₄, um termo não homogêneo aparece na equação anterior, como será mostrado a seguir, usando as definições de energia e momento angular dadas em (5.1) e (5.2).

Como ocorre no caso $\Lambda = 0$, o horizonte de eventos de um buraco negro Kerr-AdS₄ é um horizonte de Killing descrito pelo vetor Killing nulo

$$\xi^\mu = t_{\text{RENR}}^\mu + \Omega_{\text{RENR}} \varphi_{\text{RENR}}^\mu = t_{\text{RER}}^\mu + \Omega_{\text{RER}} \varphi_{\text{RER}}^\mu, \quad (6.15)$$

onde

$$\varphi_{\text{RENR}}^\mu = \varphi_{\text{RER}}^\mu, \quad t_{\text{RENR}}^\mu = t_{\text{RER}}^\mu + \frac{\Lambda a}{3} \varphi_{\text{RER}}^\mu. \quad (6.16)$$

Note que as variáveis Ω 's de ambos os referenciais estão relacionadas via

$$\Omega_{\text{RER}} = \Omega_{\text{RENR}} + \frac{\Lambda a}{3}, \quad (6.17)$$

onde

$$\Omega_{\text{RENR}} = \frac{\frac{\lambda_r}{3} a}{a^2 + r_+^2}, \quad \text{e} \quad \Omega_{\text{RER}} = \frac{a\Sigma}{a^2 + r_+^2}, \quad (6.18)$$

sendo r_+ o horizonte de eventos, definido como a maior raiz que satisfaz a equação

$$(r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\Lambda}{r^2} \right) - 2Mr_+ = 0. \quad (6.19)$$

Com nossa fórmula de energia local (4.38), podemos encontrar a quantidade conservada associada a ξ^μ . Não é difícil mostrar, usando quer seja coordenadas esferoidais ou coordenadas BL, tomando o horizonte de eventos r_+ como superfície de integração Ξ , que

$$\hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\xi^\mu] = \frac{\kappa}{8\pi} A_B + \frac{M}{2\Sigma}, \quad (6.20)$$

onde

$$A_B \equiv \text{área da superfície de bifurcação} = \frac{4\pi(r_+^2 + a^2)}{\Sigma} \quad (6.21)$$

$$\kappa \equiv \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\nabla \xi}{\xi} \right) = \frac{3r_+^2(1 - \Lambda r_+^2) - a^2(3 + \Lambda r_+^2)}{6r_+(r_+^2 + a^2)}$$

Observe que κ e A_B são quantidades escalares e, portanto, valem o mesmo para ambos os referenciais¹. Por outro lado, usando (6.15) e dada a linearidade de $\Delta \mathbf{H}$ em seu argumento, obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\xi^\mu] &= \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[t_{\text{RENR}}^\mu] + \Omega_{\text{RENR}} \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\varphi_{\text{RENR}}^\mu] \\ &= \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[t_{\text{RER}}^\mu] + \Omega_{\text{RER}} \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\varphi_{\text{RER}}^\mu]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

As contribuições das integrais dos membros direitos da equação acima podem ser calculadas colocando $L = r_+$ em (5.10), (5.36) e (5.23)

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[t^\mu] &= \frac{M}{2} - \frac{r_+(r_+^2 + a^2)\Lambda}{2} = E_{\text{RENR}} - E_{AdS}(r_+) \\ \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\varphi_{\text{RENR}}^\mu] &= -\frac{aM}{\Sigma^2} = -J_{\text{RENR}} \\ \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[t_{\text{RER}}^\mu] &= \frac{M}{\Sigma} - \frac{r_+(r_+^2 + a^2)\Lambda}{6\Sigma} = E_{\text{RER}} - E_{AdS}(r_+) \\ \hat{\Delta}_{AdS} \mathbf{H}[\varphi_{\text{RER}}^\mu] &= -\frac{aM}{\Sigma^2} = -J_{\text{RER}}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde $E_{AdS}(r_+)$ é a energia de AdS “contida” no horizonte de eventos definida a partir de (5.17) como

$$E_{AdS}(r_+) \equiv \hat{\Delta}_{\text{Mink}} \mathbf{H}[t^\mu] = \hat{\Delta}_{\text{Mink}} \mathbf{H}[t^\mu] = \frac{r_+(r_+^2 + a^2)\Lambda}{6\Sigma} \quad (6.24)$$

Introduzindo os resultados das equações (6.23) e (6.20) em (6.22) temos

$$\frac{\kappa}{8\pi} A_B + \frac{M}{2\Sigma} = E_{\text{RENr}} - \Omega_{\text{RENr}} J_{\text{RENr}} - E_{\text{AdS}}(r_+) = E_{\text{REr}} - \Omega_{\text{REr}} J_{\text{REr}} - E_{\text{AdS}}(r_+). \quad (6.25)$$

¹ De agora em diante manteremos a convenção de que quantidades sem rótulos significam que valem o mesmo para ambos os referenciais: REr ou RENr.

Pode-se eliminar M da equação acima, expressando-a em termos das variáveis E , J e Λ . Para o caso do referencial RER temos que $M = E_{\text{RER}}\Sigma$ e, portanto, obtemos a seguinte formula de Smarr não homogênea

$$\frac{E_{\text{RER}}}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RER}} J_{\text{RER}} = E_{\text{AdS}}(r_+). \quad (\text{RER}) \quad (6.26)$$

Por outro lado, para o caso do referencial RENR, temos

$$M = E_{\text{RENR}}\Sigma^2, \quad a = \frac{J_{\text{RENR}}}{E_{\text{RENR}}} \implies \frac{J_{\text{RENR}}^2}{3E_{\text{RENR}}^2\Sigma} = 1 +$$

e assim, (6.25) se reduz a

$$\frac{E_{\text{RENR}}}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RENR}} J_{\text{RENR}} = E_{\text{AdS}}(r_+) + \frac{J^2}{6E_{\text{RENR}}}\Lambda, \quad (\text{RENR}) \quad (6.28)$$

a qual é também uma formula de Smarr não homogênea.

6.2.2 Primeira lei

Obviamente, quando se examinam as fórmulas de Smarr não homogêneas dadas em (6.26) e (6.28), em ambos os casos, a própria formula sugere que deve existir um par conjugado de variáveis termodinâmicas (P, V) responsáveis pelo termo não homogêneo, tal que este pode ser expresso como: $-PV$. A escolha mais adequada e natural que se pode fazer é introduzir Λ (em ambos os casos), como uma pressão de vácuo [28, 27], i.e.,

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (6.29)$$

Uma vez definido P dessa forma, V estaria dado por

$$V_{\text{RER}} = V_{\text{geo}} \equiv -\frac{8\pi E_{\text{AdS}}(r_+)}{2\Lambda} = \frac{4\pi(r^2 + a^2)r_+}{3\Sigma}, \quad (6.30)$$

$$V_{\text{RENR}} = V_{\text{geo}} + \frac{4\pi}{3} \frac{J_{\text{RENR}}}{E_{\text{RENR}}},$$

onde V_{geo} é o “volume geometrico” do buraco negro. Introduzidas estas novas variáveis, as fórmulas de Smarr (6.26) e (6.28) se tornam

$$\frac{E_{\text{RER}}}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RER}} J_{\text{RER}} + PV_{\text{RER}} = \frac{E_{\text{RENR}}}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RENR}} J_{\text{RENR}} + PV_{\text{RENR}} = 0. \quad (6.31)$$

Com as definições (6.29) e (6.30), espera-se que a primeira lei da termodinâmica seja satisfeita, a qual deveria em ambos casos ter a forma²

$$\frac{dE}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} dA_B - \Omega dJ = V dP. \quad (6.34)$$

² Em princípio, também se poderia considerar uma primeira lei da forma

$$dE - \frac{\kappa}{8\pi} dA_B - \Omega dJ = -P dV. \quad (6.32)$$

Caso RER

Para este caso, é fácil verificar calculando os diferenciais das variáveis termodinâmicas (expressos em função de: r_+ , a , Λ), que a primeira lei não é satisfeita. Pode-se pensar que fomos muito restritivos na definição da variável pressão P em (6.29). Observe que se considerarmos P como uma função não apenas de Λ , mas também de a , verifica-se

$$\frac{\partial E_{\text{RER}}}{\partial r_+} - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\partial A_B}{\partial r_+} - \Omega_{\text{RER}} \frac{\partial J_{\text{RER}}}{\partial r_+} = V_{\text{RER}} \frac{\partial P(\Lambda, a)}{\partial r_+}. \quad (6.35)$$

Portanto, se existir uma $P(a, \Lambda)$ tal que a primeira lei seja satisfeita, esta função deve satisfazer

$$\frac{\partial \ln P(\Lambda, a)}{\partial a} = -E_{\text{AdS}}(r_+)^{-1} \left[\frac{\partial E_{\text{RER}}}{\partial a} - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\partial A_B}{\partial a} - \Omega_{\text{RER}} \frac{\partial J_{\text{RER}}}{\partial a} \right], \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial \ln P(\Lambda, a)}{\partial \Lambda} = -E_{\text{AdS}}(r_+)^{-1} \left[\frac{\partial E_{\text{RER}}}{\partial \Lambda} - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\partial A_B}{\partial \Lambda} - \Omega_{\text{RER}} \frac{\partial J_{\text{RER}}}{\partial \Lambda} \right]. \quad (6.37)$$

Porém, é fácil mostrar que

$$\frac{\partial^2 \ln P(\Lambda, a)}{\partial a \partial \Lambda} \neq \frac{\partial^2 \ln P(\Lambda, a)}{\partial \Lambda \partial a}. \quad (6.38)$$

Concluimos então que é impossível obter uma primeira lei na forma (6.34), usando as definições de energia e momento angular para o caso RER.

Caso RENR

Ao contrário do caso anterior, para o referencial RENR, é possível obter uma primeira lei com as definições dadas em (6.29) e (6.30). Esta primeira lei é

$$dE_{\text{RENR}} = \frac{\kappa}{8\pi} dA_B + \Omega_{\text{RENR}} dJ_{\text{RENR}} + V_{\text{RENR}} dP. \quad (6.39)$$

A primeira lei acima foi obtida por Dolan [27] a partir de argumentos puramente termodinâmicos. Nesta primeira lei, a variável V_{RENR} (6.29) é interpretada como o “volume termodinâmico” [28] e, E_{RENR} como a “entalpia termodinâmica” [27].

Embora seja possível estabelecer uma lei de Smarr (6.31) e uma primeira lei (6.39) para o buraco negro de Kerr-AdS, onde a constante cosmológica é introduzida como um cabelo na teoria, há uma inconsistência observada primeiramente em [27] nesta termodinâmica. Note que para um processo com $J_{\text{RENR}} = 0$, o volume termodinâmico V_{RENR} reduz a

$$V_{\text{RENR}}(a=0) = \frac{4\pi}{3} r_+^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{A_B}{4\pi}^{3/2}, \quad (6.40)$$

Contudo, esta forma é descartada, pois em ambos os referenciais verifica-se que

$$\frac{\partial E}{\partial r_+} - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\partial A_B}{\partial r_+} - \Omega \frac{\partial J}{\partial r_+} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r_+} \neq 0. \quad (6.33)$$

portanto, a energia termodinâmica seria

$$U \equiv E_{\text{RENR}} - PV_{\text{RENR}} = f(A_B), \quad (6.41)$$

i.e., U dependeria apenas da variável A_B . Além disso, a formula de Smarr (6.31), fixaria estas duas variáveis e, assim, não haveria nenhuma dinâmica neste caso.

Uma maneira de evitar esta inconsistência apresentada é redefinir a variável P como veremos a seguir. Considere uma lei de Smarr da forma

$$\frac{E_{\text{RENR}}}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RENR}} J_{\text{RENR}} + \alpha PV = 0, \quad (6.42)$$

sendo α um número adimensional, P uma função desconhecida que só depende de Λ e V o volume conjugado a P , o qual estaria determinado a partir de

$$V = -\frac{E_{\text{AdS}}(r_+) + \frac{J_{\text{RENR}}^2}{6E_{\text{RENR}}} \Lambda}{\alpha P(\Lambda)}. \quad (6.43)$$

Queremos encontrar uma $P(\Lambda)$, tal que a primeira lei (6.39) seja satisfeita nestas novas variáveis. Observe que isso só é verdade se

$$\frac{d \ln P}{d\Lambda} = -\frac{\frac{dE_{\text{RENR}}}{d\Lambda} - \frac{\kappa}{8\pi} \frac{dA_B}{d\Lambda} - \Omega_{\text{RENR}} \frac{dJ_{\text{RENR}}}{d\Lambda}}{E_{\text{AdS}}(r_+) + \frac{J_{\text{RENR}}^2}{6E_{\text{RENR}}} \Lambda} \alpha = \frac{\alpha}{\Lambda}, \quad (6.44)$$

cuja solução geral é

$$P(\Lambda) = C(-\Lambda)^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (6.45)$$

onde C é uma constante e, nos restringimos apenas a α positivos, para evitar divergência em P , ao tomar o limite $\Lambda \rightarrow 0$. Com P dado acima, o volume termodinâmico seria então

$$V = \frac{V_{\text{RENR}}}{8\pi\alpha C} (-\Lambda)^{1-\alpha}, \quad \alpha \leq 1, \quad (6.46)$$

onde novamente restringimos $\alpha \leq 1$, para evitar divergências. Observe que para o caso $\alpha = 1$, P e V reduzem às variáveis da termodinâmica do Dolan. Note também que, usando essas novas variáveis, a inconsistência termodinâmica ocorrida quando $J_{\text{RENR}} = 0$ é superada, pois

$$V(a=0) = \frac{r_+^3}{6\alpha C} (-\Lambda)^{1-\alpha} = f(A_B). \quad (6.47)$$

Um possível candidato para o valor de α é fornecido pelas teorias gauge da super-gravidade e teorias das cordas, onde a constante cosmológica Λ e a constante de gauge de acoplamento g , estão relacionadas via [28, 16]

$$\Lambda = -3g^2. \quad (6.48)$$

Note que se tomarmos $\alpha = 1/2$ e $C = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ em (6.45), obtemos

$$P(\Lambda) = -\frac{\Lambda}{3} = g, \quad (6.49)$$

i.e., a “pressão termodinâmica” acaba sendo precisamente a constante de gauge de acoplamento g . O volume termodinâmico seria neste caso

$$V = \frac{V_{\text{RENR}}}{4\pi} \sqrt{-3\Lambda}. \quad (6.50)$$

A lei de Smarr e a primeira lei seriam

$$\frac{E_{\text{RENR}} + gV}{2} - \frac{\kappa}{8\pi} A_B - \Omega_{\text{RENR}} J_{\text{RENR}} = 0, \quad (6.51)$$

$$dE_{\text{RENR}} = \frac{\kappa}{8\pi} dA_B + \Omega_{\text{RENR}} dJ_{\text{RENR}} + V dg.$$

7 Conclusões

Exploramos a possibilidade de obter hamiltonianos locais no contexto do formalismo LWI para o caso da Relatividade Geral. Assumindo uma parametrização arbitrária da métrica, demos condições de integrabilidade local para a existência destes hamiltonianos. Vimos que ao reduzirmos os graus de liberdade na métrica, é possível associar um hamiltoniano local para o caso de soluções das equações de Einstein que possuem a forma KS. A estrutura geral deste hamiltoniano consiste de uma parte completamente determinada pelo lagrangiano de Hilbert-Einstein, mais uma “constante de integração”, gerada pela arbitrariedade na definição de \mathbf{B} e o operador “d”. A parte resultante do lagrangiano de Hilbert-Einstein foi interpretada como um hamiltoniano local relativo ao espaço de fundo da forma KS.

Embora tenhamos reduzido os graus de liberdade da métrica para obter este hamiltoniano, quando calculamos as quantidades conservadas a partir deste e comparamos com os resultados obtidos por outros métodos, para certas soluções de buracos negros, os nossos resultados estão de acordo com os resultados dos demais métodos. Além disso, mostramos, para o caso particular do buraco negro Kerr-AdS₄, que as cargas calculadas a partir deste hamiltoniano são independentes da forma da superfície de integração, o que é um fato que reflete e confirma o caráter local do método. Ressaltamos que este é um caráter que só a nossa proposta possui.

Finalmente, a termodinâmica do buraco negro Kerr-AdS₄ foi examinada desde a perspectiva do nosso método local. Conseguimos deduzir com sucesso a lei de Smarr, a partir de argumentos puramente geométricos. Ao introduzir Λ como uma variável termodinâmica adicional na teoria, conseguimos reproduzir os resultados obtidos previamente por Dolan. Além disso, demos uma solução para o problema da dependência do volume com a entropia, para o caso particular de buracos negros sem rotação, surgido na termodinâmica de Dolan. Vimos que esse problema pode ser superado redefinindo as variáveis de pressão e volume, onde a pressão pode ser interpretada como a constante de gauge de acoplamento das teorias das cordas e de super gravidade.

Embora neste trabalho nos concentremos no caso $D = 4$, tudo indica que o nosso método local funciona bem para o caso de dimensões maiores. Alguns cálculos foram realizados para o caso $D = 5$, e constatou-se que nosso hamiltoniano local é capaz de reproduzir a energia e o momento angular corretos do buraco negro Kerr-AdS.

Referências

- [1] L.D. Landau and E.M. Lifshits. *Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics. Volume 2, 1975.* Course in theoretical physics V.2. Pergamon Press, 1975.
- [2] R.M. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation.* Number pt. 1 in Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [4] Gary W Gibbons, Stephen W Hawking, Gary T Horowitz, and Malcolm J Perry. Positive mass theorems for black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 88:295–308, 1983.
- [5] GW Gibbons, CM Hull, and NP Warner. The stability of gauged supergravity. *Nuclear Physics B*, 218(1):173–190, 1983.
- [6] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80(3):381–402, 1981.
- [7] Stefan Hollands, Akihiro Ishibashi, and Donald Marolf. Comparison between various notions of conserved charges in asymptotically ads spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(14):2881, 2005.
- [8] Larry F Abbott and Stanley Deser. Stability of gravity with a cosmological constant. *Nuclear Physics B*, 195(1):76–96, 1982.
- [9] Abhay Ashtekar and Anne Magnon. Asymptotically anti-de sitter space-times. *Classical and Quantum Gravity*, 1(4):L39, 1984.
- [10] Arthur Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Physical Review*, 113(3):934, 1959.
- [11] S. Carroll, S.M. Carroll, and Addison-Wesley. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Addison Wesley, 2004.
- [12] Joseph Katz. A note on komar’s anomalous factor. *Classical and Quantum Gravity*, 2(3):423, 1985.
- [13] Joseph Katz, Jir’ı Bicák, and Donald Lynden-Bell. Relativistic conservation laws and integral constraints for large cosmological perturbations. *Physical Review D*, 55(10):5957, 1997.

- [14] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. The dynamics of general relativity, gravitation: An introduction to current research. *Chap*, 7:227–265, 1962.
- [15] Tullio Regge and Claudio Teitelboim. Role of surface integrals in the hamiltonian formulation of general relativity. *Annals of physics*, 88(1):286–318, 1974.
- [16] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. Asymptotically anti-de sitter spaces. *Communications in Mathematical Physics*, 98:391–424, 1985.
- [17] Hermann Bondi, M Gr J Van der Burg, and AWK Metzner. Gravitational waves in general relativity, vii. waves from axi-symmetric isolated system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 269(1336):21–52, 1962.
- [18] Stefan Hollands and Alexander Thorne. Bondi mass cannot become negative in higher dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 333:1037–1059, 2015.
- [19] Robert M Wald and Andreas Zoupas. General definition of “conserved quantities” in general relativity and other theories of gravity. *Physical Review D*, 61(8):084027, 2000.
- [20] Abhay Ashtekar and Michael Streubel. Symplectic geometry of radiative modes and conserved quantities at null infinity. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 376(1767):585–607, 1981.
- [21] J David Brown and James W York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407, 1993.
- [22] Stephen W Hawking and Gary T Horowitz. The gravitational hamiltonian, action, entropy and surface terms. *Classical and Quantum Gravity*, 13(6):1487, 1996.
- [23] Joohan Lee and Robert M Wald. Local symmetries and constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 31(3):725–743, 1990.
- [24] Robert M Wald. Black hole entropy is the noether charge. *Physical Review D*, 48(8):R3427, 1993.
- [25] Vivek Iyer and Robert M Wald. Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical review D*, 50(2):846, 1994.
- [26] David Kastor, Sourya Ray, and Jennie Traschen. Enthalpy and the mechanics of ads black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(19):195011, 2009.
- [27] Brian P Dolan. Pressure and volume in the first law of black hole thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 28(23):235017, 2011.

- [28] Mirjam Cvetič, Gary W Gibbons, D Kubizňák, and Christopher N Pope. Black hole enthalpy and an entropy inequality for the thermodynamic volume. *Physical Review D*, 84(2):024037, 2011.
- [29] Robert M Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. University of Chicago press, 1994.
- [30] Stefan Hollands and Robert M Wald. Stability of black holes and black branes. *Communications in Mathematical Physics*, 321(3):629–680, 2013.
- [31] Nathalie Deruelle and Joseph Katz. On the mass of a kerr–anti-de sitter spacetime in d dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 22(2):421, 2005.
- [32] Vivek Iyer and Robert M Wald. Comparison of the noether charge and euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes. *Physical Review D*, 52(8):4430, 1995.
- [33] Marco M Caldarelli, Guido Cognola, and Dietmar Klemm. Thermodynamics of kerr-newman-ads black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, 17(2):399, 2000.
- [34] Vijay Balasubramanian and Per Kraus. A stress tensor for anti-de sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2):413–428, 1999.
- [35] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein’s field equations*. Cambridge university press, 2009.
- [36] Roy P Kerr and Alfred Schild. Some algebraically degenerate solutions of einstein’s gravitational field equations. *Applications of nonlinear partial differential equations in mathematical physics*, 17:199–209, 1965.
- [37] Roy P Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237, 1963.
- [38] Robert C Myers and Michael J Perry. Black holes in higher dimensional spacetimes. *Annals of Physics*, 172(2):304–347, 1986.
- [39] Gary W Gibbons, Hong Lü, Don N Page, and CN Pope. The general kerr–de sitter metrics in all dimensions. *Journal of Geometry and Physics*, 53(1):49–73, 2005.
- [40] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical review letters*, 69(13):1849, 1992.
- [41] Stephen W Hawking, Christian J Hunter, and Marika M Taylor-Robinson. Rotation and the ads-cft correspondence. *Physical Review D*, 59(6):064005, 1999.

-
- [42] Brandon Carter. Hamilton-jacobi and schrodinger separable solutions of einstein's equations. *Communications in Mathematical Physics*, 10:280–310, 1968.
- [43] Stanley Deser, Inanc Kanik, and Bayram Tekin. Conserved charges of higher d kerr-ads spacetimes. *arXiv preprint gr-qc/0506057*, 2005.
- [44] Gary W Gibbons, Malcolm J Perry, and Christopher N Pope. The first law of thermodynamics for kerr–anti-de sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(9):1503, 2005.
- [45] Robert M Wald. Black holes and thermodynamics. *Black holes and relativistic stars*, pages 155–176, 1998.
- [46] Bernard F Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge university press, 1980.

Apêndices

APÊNDICE A – (3 + 1)-Formalismo

Considere um espaço tempo 4-dimensional M com métrica $g_{\mu\nu}$, equipado com a conexão de Christoffel ∇ . Suponha que em M existe um campo vetorial diferenciável não nulo n_μ . O teorema de Frobenius nos diz que se [2, 46]

$$n_{[\mu}\nabla_\nu n_{\alpha]} = 0, \quad (\text{A.1})$$

então n_μ define uma família de hipersuperfícies Σ_t , as quais são normais às linhas de fluxo geradas por n^μ . O teorema garante que essas hipersuperfícies geram uma **foliação** de M [46]. As folhas Σ_t são descritas por uma função global t da forma

$$\Sigma_t : f(\xi^\mu) = t, \quad (\text{A.2})$$

onde assumimos que M é parametrizado por coordenadas globais ξ^μ . Se n^μ for de tipo tempo (tipo espaço), as folhas Σ_t , terão métrica riemaniana (lorentziana). O caso quando n^μ é nulo, a métrica induzida em Σ_t é degenerada. No desenvolvimento que se segue abaixo excluiremos este último caso.

Pode-se introduzir coordenadas locais x^a nas folhas, ou seja, “parametrizá-las”, de modo que a equação acima possa ser resolvida por

$$\xi^\mu = F^\mu(t, x^a). \quad (\text{A.3})$$

Obviamente, como qualquer processo de parametrização, este é não único. Na verdade, essas parametrizações são determinadas pelo grupo de difeomorfismos gerados por um campo vetorial [2].

A equação acima define um sistema de coordenadas global (t, x^a) , adaptado à foliação. A base de coordenadas deste sistema satisfaz:

$$\mathbf{e}_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \mathbf{e}_t(\nabla t) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi^\mu} = 1, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{e}_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \rightarrow \mathbf{e}_a(\nabla t) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial t}{\partial \xi^\mu} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Os vetores \mathbf{e}_a são normais a ∇t . Por outro lado, o vetor \mathbf{e}_t é denominado vetor de evolução, o qual gera o difeomorfismo entre as folhas. Em geral, o vetor de evolução não é paralelo ao vetor normal unitário \mathbf{n} das folhas. Por convenção o vetor \mathbf{n} é sempre tomado apontando na direção de crescimento de t , i.e.,

$$n_\mu \equiv \pm (\pm \nabla_\nu t \nabla^\nu t)^{-1/2} \nabla_\mu t, \quad (\text{A.6})$$

onde (+) se n_μ for de tipo espaço e (–) se n_μ for de tipo tempo.

Pode-se decompor o vetor normal unitário n^μ na base de coordenadas $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_a\}$ convenientemente na forma

$$\mathbf{n} = N^{-1}\mathbf{e}_t - N^{-1}N^a\mathbf{e}_a. \quad (\text{A.7})$$

Observe que N é independente da parametrização x^a , e depende apenas da escolha da função global t , i.e., da foliação. Isso pode ser visto contraindo a equação acima com $\nabla_\mu t$, usando (A.4),

$$N = \pm \nabla_\mu t \nabla^\mu t^{-1/2} = (\pm g^{00})^{-1/2}. \quad (\text{A.8})$$

A função N é obviamente um escalar e é conhecida como: **função lapso**. O 3-vetor N^a é conhecido como: **vetor de deslocamento**. Observe que o vetor de deslocamento depende da escolha da parametrização das folhas Σ_t . Como existe arbitrariedade na escolha da foliação e na parametrização de Σ_t , as variáveis N e N^a são consideradas graus de liberdade de gauge.

As componentes da métrica na base $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_a\}$, podem ser expressos em termos das quantidades: N , N^a e da métrica induzida na folha, a qual é definida como

$$h_{ab} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b). \quad (\text{A.9})$$

Em termos de N , N^a e h_{ab} , as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ são dadas por

$$g^{tt} = \pm N^{-2}, \quad g^{ti} = \mp N^{-2} h^{ij} N_j, \quad g_{tt} = \pm N^2 + h^{ij} N_i N_j, \quad g_{ti} = N_i, \quad (\text{A.10})$$

$$g_{ij} = h_{ij}, \quad g^{ij} = h^{ij} \pm N^{-2} h^{ia} h^{ib} N_a N_b. \quad (\text{A.11})$$

O elemento de linha pode ser escrito de forma compacta como sendo

$$ds^2 = \pm N^2 dt^2 + h_{ab} (N^a dt + dx^a) (N^b dt + dx^b). \quad (\text{A.12})$$

A.1 Equações de Gauss-Codazzi

Considere uma folha fixa $\tilde{\Sigma}$ de M parametrizada pelas coordenadas \tilde{x}^i . Os vetores $\{\mathbf{n}(\tilde{x}^i), \mathbf{e}_a(\tilde{x}^i)\}$ formam uma base para vetores definidos em $\tilde{\Sigma}$ (não simplesmente aqueles que vivem no espaço tangente de $\tilde{\Sigma}$). Assim, pode-se decompor a derivada direcional dos vetores de base \mathbf{e}_a da forma

$$\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{e}_b = \tilde{K}_{ab} \mathbf{n} + (\tilde{\Sigma}) \Gamma_{ab}^d \mathbf{e}_d. \quad (\text{A.13})$$

A quantidade \tilde{K}_{ab} é um tensor simétrico de $\tilde{\Sigma}$, e é chamado de tensor de curvatura extrínseca, também conhecido como a segunda forma fundamental de curvatura. Este tensor contém toda a informação sobre a curvatura da folha $\tilde{\Sigma}$ do ponto de vista

extrínseco. A quantidade $(\tilde{\Sigma}) \Gamma_{ab}^d$ é a conexão Christoffel de $\tilde{\Sigma}$.

Tomando o produto interno¹ de (A.13) com o vetor normal unitário \mathbf{n} , se encontra uma expressão explícita para calcular o tensor de curvatura extrínseca

$$\tilde{K}_{ab} = \pm \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{e}_b = \mp \mathbf{e}_b \cdot \nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{n}. \quad (\text{A.14})$$

¹ Denotamos o produto interno em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ por “.”

Por outro lado, a derivada direcional de \mathbf{n} não tem componente normal, i.e.,

$$\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{n} = \mp \tilde{K}_a^b \mathbf{e}_b, \quad \tilde{K}^b = \tilde{h}^{bc} \tilde{K}_{ca}. \quad (\text{A.15})$$

Em geral, a derivada direcional de um campo vetorial $\tilde{\mathbf{Z}} \in \tilde{\Sigma}$ em relação a outro campo vetorial $\tilde{\mathbf{Y}} \in \tilde{\Sigma}$ é dado em termos de \tilde{K}_{ab} e da conexão de $\tilde{\Sigma}$, que denotaremos daqui em diante por \tilde{D}_a . Esta derivada direcional é dada por

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{Y}}} \tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{Y}^a \tilde{D}_a \tilde{Z}^b \mathbf{e}_b + \tilde{K}_{ab} \tilde{Y}^a \tilde{Z}^b \mathbf{n}. \quad (\text{A.16})$$

A equação acima relaciona as conexões ∇ e \tilde{D} . Portanto, se as conexões estão relacionadas, os tensores de curvatura também estarão relacionados. Observe que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Z}} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{Z}} = & \tilde{X}^c \tilde{D}_c \tilde{Y}^a \tilde{D}_a \tilde{Z}^b \mp \tilde{K}_{ad} \tilde{K}^b \tilde{X}^c \tilde{Y}^a \tilde{Z}^d \mathbf{e}_b \\ & + \tilde{X}^c \tilde{Y}^a \tilde{D}_a \tilde{Z}^b \tilde{K}_{bc} + \tilde{X}^c \partial_c \tilde{K}_{ab} \tilde{Y}^a \tilde{Z}^b \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Invertendo $\tilde{\mathbf{X}} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}$ na equação acima, temos o comutador

$$\begin{aligned} (\nabla_{\tilde{\mathbf{X}}} \nabla_{\tilde{\mathbf{Y}}} - \nabla_{\tilde{\mathbf{Y}}} \nabla_{\tilde{\mathbf{X}}}) \tilde{\mathbf{Z}} = & \overset{\text{h}}{(\tilde{\Sigma})} R_{dca}^b \mp \tilde{K}_{ad} \tilde{K}_c^b \pm \tilde{K}_{cd} \tilde{K}_a^b \tilde{Z}^d \tilde{X}^c \tilde{Y}^a + \tilde{D}_a \tilde{Z}^b \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}^a \mathbf{e}_b \\ & + \overset{\text{h}}{\tilde{K}_{ab} \tilde{Z}^b \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}^a} + \tilde{D}_c \tilde{K}_{ab} - \tilde{D}_a \tilde{K}_{bc} \tilde{X}^c \tilde{Y}^a \tilde{Z}^b \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde $(\tilde{\Sigma}) R_{dca}^b$ é o respectivo tensor de Riemann de $\tilde{\Sigma}$. Tomando $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{Z}}$ como vetores de

base de coordenadas, chegamos a uma expressão mais simples

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha(\mathbf{e}_c)^\mu(\mathbf{e}_a)^\nu(\mathbf{e}_d)^\beta = (\tilde{\Sigma}) R_{dca}^b \mp \tilde{K}_{ad} \tilde{K}_c^b \pm \tilde{K}_{cd} \tilde{K}_a^b (\mathbf{e}_b)^\alpha + \tilde{D}_c \tilde{K}_{ad} - \tilde{D}_a \tilde{K}_{dc} n^\alpha. \quad (\text{A.19})$$

Dado que \mathbf{n} é normal a \mathbf{e}_b , a equação vetorial acima é totalmente equivalente às equações

$$\tilde{D}_a \tilde{K}_{bc} - \tilde{D}_b \tilde{K}_{ac} = \pm R_{\alpha\beta\mu\nu} n^\alpha (\mathbf{e}_c)^\beta (\mathbf{e}_a)^\mu (\mathbf{e}_b)^\nu \quad (\text{A.20})$$

$$(\tilde{\Sigma}) \tilde{R}_{abcd} = R_{\alpha\beta\mu\nu} (\mathbf{e}_b)^\alpha (\mathbf{e}_c)^\beta (\mathbf{e}_d)^\mu (\mathbf{e}_a)^\nu \mp \tilde{K}_{ad} \tilde{K}_{bc} \pm \tilde{K}_{ac} \tilde{K}_{bd}. \quad (\text{A.21})$$

Este par de equações são as chamadas equações de **Gauss-Codazzi**. Estas equações relacionam as geometrias intrínsecas de M e $\tilde{\Sigma}$, a partir do tensor \tilde{K}_{ab} .

As equações de Gauss-Codazzi são construídas com quantidades tensoriais de M e $\tilde{\Sigma}$. É conveniente evitar esta mistura e trabalhar com um par de equações equivalentes, mas construídas apenas com quantidades tensoriais de M . Para isso, pode-se associar a cada tensor em $\tilde{\Sigma}_t$, um tensor equivalente em M que contenha toda a informação do

tensor definido na folha. Para ver como isso pode ser feito, considere o caso simples de um vetor $\tilde{X}^a \in \Sigma_t$. Define-se seu vetor equivalente em M (X^μ) pelo *pushforward*

$$X^\mu \equiv \tilde{X}^a (\mathbf{e}_a)^\mu. \quad (\text{A.22})$$

Para o caso de vetores covariantes (1-formas), $\tilde{X}_a \in \Sigma_t$, a 1-forma equivalente (X_μ) é encontrada, primeiro obtendo o seu vetor equivalente em Σ_t , ou seja, $\tilde{X}^a = \tilde{h}^{ab} \tilde{X}_b$. Em seguida, usamos (A.22) para encontrar X^μ , e logo usando $g_{\mu\nu}$, podemos baixar o índice. Em geral para qualquer tensor $\tilde{T} \in \Sigma_t$, definimos seu tensor equivalente em M por

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \tilde{T}^{a_1 \dots a_p} (\mathbf{e}_{a_1})^{\mu_1} \dots (\mathbf{e}_{a_p})^{\mu_p}. \quad (\text{A.23})$$

Observe que todas as componentes de $T^{\mu_1 \dots \mu_p}$ associadas ao vetor base \mathbf{e}_i , são nulas por definição. No caso da métrica da folha \tilde{h}_{ab} , o seu tensor equivalente em M será dado por

$$h^{\mu\nu} = \tilde{h}^{ab} (\mathbf{e}_a)^\mu (\mathbf{e}_b)^\nu. \quad (\text{A.24})$$

Observe que $h^{ab} = \tilde{h}^{ab} = g^{ab} \mp n^a n^b$, o qual segue de (A.11) e (A.7). Como \mathbf{g} e \mathbf{n} são quantidades tensoriais, temos

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \mp n^\mu n^\nu. \quad (\text{A.25})$$

Usando (A.10) e (A.7), mostra-se que: $h^{tt} = 0$, $h^{ta} = 0$, o qual confirma que (A.25) é a forma correta de o tensor que representa a métrica da folha em M .

Por outro lado, o tensor de curvatura extrínseca \tilde{K}_{ab} foi obtido na equação (A.14), a qual pode ser escrita como

$$\tilde{K}_{cd} = \mp (\mathbf{e}_c)^\alpha (\mathbf{e}_d)^\beta \nabla_\alpha n_\beta. \quad (\text{A.26})$$

Portanto, o tensor que representa a curvatura extrínseca em M é dado por

$$K^{\mu\nu} = \mp \tilde{K}^{ab} (\mathbf{e}_a)^\mu (\mathbf{e}_b)^\nu = \mp \nabla_\alpha n_\beta (\mathbf{e}_c)^\alpha (\mathbf{e}_d)^\beta \tilde{h}^{ac} \tilde{h}^{bd} (\mathbf{e}_a)^\mu (\mathbf{e}_b)^\nu = \mp h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta} \nabla_\alpha n_\beta. \quad (\text{A.27})$$

Estamos agora em condições de encontrar a forma equivalente em M das equações de Gauss-Codazzi. Para a primeira equação (A.20) temos que

$$\begin{aligned} D^\mu K^{\nu\alpha} - D^\nu K^{\mu\alpha} &= \tilde{h}^{ai} \tilde{h}^{bj} \tilde{h}^{ck} (\tilde{D}_a \tilde{K}_{bc} - \tilde{D}_b \tilde{K}_{ac}) (\mathbf{e}_i)^\mu (\mathbf{e}_j)^\nu (\mathbf{e}_k)^\alpha \\ &= \tilde{h}^{ai} \tilde{h}^{bj} \tilde{h}^{ck} \pm R_{\sigma\rho\lambda\beta} n^\sigma (\mathbf{e}_c)^\rho (\mathbf{e}_a)^\lambda (\mathbf{e}_b)^\beta (\mathbf{e}_i)^\mu (\mathbf{e}_j)^\nu (\mathbf{e}_k)^\alpha \\ &= \pm h^{\mu\lambda} h^{\beta\nu} h^{\rho\alpha} R_{\sigma\rho\lambda\beta} n^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Para a segunda equação (A.21), temos que

$$\begin{aligned} (\Sigma) R^{\mu\nu\alpha\beta} &= \tilde{h}^{ai} \tilde{h}^{bj} \tilde{h}^{ck} \tilde{h}^{dl} (\Sigma) \tilde{R}_{abcd} (\mathbf{e}_i)^\mu (\mathbf{e}_j)^\nu (\mathbf{e}_k)^\alpha (\mathbf{e}_l)^\beta \\ &= \tilde{h}^{ai} \tilde{h}^{bj} \tilde{h}^{ck} \tilde{h}^{dl} R_{\sigma\rho\lambda\eta} (\mathbf{e}_a)^\sigma (\mathbf{e}_b)^\rho (\mathbf{e}_c)^\lambda (\mathbf{e}_d)^\eta \mp \tilde{K}_{ad} \tilde{K}_{bc} \pm \tilde{K}_{ac} \tilde{K}_{bd} (\mathbf{e}_i)^\mu (\mathbf{e}_j)^\nu (\mathbf{e}_k)^\alpha (\mathbf{e}_l)^\beta \\ &= h^{\mu\sigma} h^{\nu\rho} h^{\alpha\lambda} h^{\beta\eta} R_{\sigma\rho\lambda\eta} \mp K^{\mu\beta} K^{\nu\alpha} \pm K^{\mu\alpha} K^{\nu\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Pode-se contrair as equações de Gauss-Codazzi e obter expressões mais simples.

Observe que a ação de baixar ou subir índices de tensores de Σ_t com $g_{\mu\nu}$ é equivalente

a fazê-lo com $h_{\mu\nu}$. Contraindo a equação (A.28) com $h_{\mu\alpha}$ e utilizando o fato de que $D_\alpha h_{\mu\nu} = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} D_\mu K^{\nu\mu} - D^\nu K &= \pm h_{\mu\alpha} h^{\mu\lambda} h^{\beta\nu} h^{\rho\alpha} R_{\sigma\rho\lambda\beta} n^\sigma \\ &= \mp R_{\sigma\beta} h^{\beta\nu} n^\sigma = \mp R_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} R g_{\sigma\beta} h^{\beta\nu} n^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Para a segunda equação (A.29), contraindo com $h_{\alpha\mu}$ temos

$$\begin{aligned} {}^{(\Sigma)} R^{\nu\beta} &= h_{\alpha\mu} h^{\mu\sigma} h^{\nu\rho} h^{\alpha\lambda} h^{\beta\eta} R_{\sigma\rho\lambda\eta} \mp K_\mu^\beta K^{\nu\mu} \pm K K^{\nu\beta} \\ &= h^{\nu\rho} h^{\beta\eta} R_{\rho\eta} \mp R_{\sigma\rho\lambda\eta} n^\sigma n^\lambda \mp K^\mu_\beta K^{\nu\mu} \pm K K^{\nu\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

onde $K = h_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$. Contraindo novamente com $h_{\nu\beta}$, finalmente obtém-se que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \mp \frac{1}{2} {}^{(\Sigma)} R \mp K^2 \pm K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (\text{A.32})$$

A partir desta equação pode-se expressar o escalar de Ricci como

$$\begin{aligned} R &= {}^{(\Sigma)} R \mp K^2 \pm K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \pm 2 R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \\ &= {}^{(\Sigma)} R \mp K^2 \pm K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \pm 2 K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \mp 2 \nabla_\beta n^\beta \nabla_\sigma n^\sigma \pm 2 \nabla_\sigma n^\beta \nabla_\beta n^\sigma \\ &= {}^{(\Sigma)} R \mp K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \pm K^2 \mp \nabla_\sigma n^\sigma \nabla_\rho n^\rho - 2 n^\rho \nabla_\rho n^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$