



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

**ONDAS ESTOCÁSTICAS DE SUPER-HORIZONTE E O RAIOS
DO UNIVERSO**

Londrina
2013

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

**ONDAS ESTOCÁSTICAS DE SUPER-HORIZONTE E O RAIOS
DO UNIVERSO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira

Londrina
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca
Central da Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S586o Silva, Luis Gustavo Tomaz.

Ondas estocásticas de super-horizonte e o raio do universo / Luis
Gustavo Tomaz
Silva. – Londrina, 2013.
104 f. : il.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de
Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação
em Física, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Cosmologia – Teses. 2. Universo em expansão – Teses. 3.
Radiação cósmica de fundo – Teses. 4. Astrofísica – Teses. 5.
Potencial gravitacional – Teses. 6. Estrutura em larga escala
(Astronomia) – Teses. I. Pereira, Thiago dos Santos. II.
Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas.
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 523.1

LUIS GUSTAVO TOMAZ SILVA

**ONDAS ESTOCÁSTICAS DE SUPER-HORIZONTE E O RAIOS DO
UNIVERSO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
UEL – Londrina - PR

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves
UEL – Londrina - PR

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes
USP – São Paulo - SP

Londrina, 2 de outubro de 2013.

Dedico esta dissertação a Deus e à minha família, por tudo que me fizeram ao longo do período do Mestrado.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer inicialmente ao meu orientador, Thiago S. Pereira, pelo constante acompanhamento, incentivo e orientação. Agradeço, também, ao apoio dos professores Veríssimo M. de Aquino e Sérgio A. Carias.

Aos amigos da pós-graduação da Física: Luiz Tiritan, Rodrigo Luna, Patrocínio Jr. e Flávio Franchello por sempre me ajudarem em tudo que precisava.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente agradeço à minha família pelo apoio e paciência.

Deve-se notar que, além do processo de mediação, a física tem necessidade de um tipo de procedimento empírico cujo término seja não o valor numérico de uma variável física, mas uma representação visual de algum tipo.

(Wolfgang Smith)

SILVA, Luiz Gustavo Tomaz. **Ondas estocásticas de super-horizonte e o raio do universo**. 2013. 104 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

O efeito Grishchuk -Zel'dovich (GZ) é um mecanismo através do qual uma onda com comprimento maior que o raio de Hubble produz um quadrupolo nas flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Uma vez que este quadrupolo não é integralmente observado, o quadrupolo efetivo extraído dos mapas de temperatura da RCF é utilizado para colocar um limite inferior no comprimento dessa onda e, conseqüentemente, no raio da região homogênea que contém o universo observável. Neste trabalho mostramos que um limite independente sobre o tamanho do universo homogêneo pode ser estimado usando um conjunto de ondas estocásticas gaussianas, cujas amplitudes são determinadas pelo espectro de potência dos modelos inflacionários modernos. Como consequência desta abordagem estocástica e multi-ondulatória, mostramos que o limite obtido é substancialmente mais conservador do que aquele encontrado por Grishchuk e Zel'dovich, além de apresentar uma dependência sensível com o índice escalar espectral n_s . Utilizando os dados recentes do satélite Planck encontramos que a região homogênea que contém o universo é pelo menos 87 vezes maior que o Universo visível.

Palavras-chave: Teoria de perturbações cosmológicas. Radiação cósmica de fundo. Efeito Grishchuk-Zel'dovich. Índice espectral escalar.

SILVA, Luiz Gustavo To maz. **Super-horizon stochastic waves and the radius of the universe**. 2013. 104 p. Dissertation (Master's degree in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

The Grishchuk-Zel'dovich (GZ) effect is a mechanism by means of which a wave with wavelength larger than the Hubble radius induces a quadrupole in the temperature fluctuations of the Cosmic Microwave Background (CMB) radiation. Given that this quadrupole is not fully observed, the effective quadrupole extracted from CMB data is used to put lower bounds in the length of this wave and, consequently, on the radius of the homogeneous patch containing the observable Universe. In this work we show that an independent limit on the size of the homogeneous universe can be estimated using a set of stochastic gaussian waves which amplitudes are determined by the power spectrum of modern inflationary models. As a consequence of this stochastic and multi-wave approach, we show that the limit obtained is substantially more conservative than the one found by Grishchuk and Zel'dovich, besides presenting a sensible dependence with the scalar spectral index n_s . Using recent data from the Planck satellite we found that the homogeneous patch containing our universe is at least 87 larger than our observable universe.

Keywords: Cosmological perturbation theory. Cosmic microwave background. Grishchuk-Zel'dovich effect. Scalar spectral index.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 –	Mapa da Radiação C3smica de Fundo	16
Figura 2.2 –	Mapa da distribui33o de gal3xias	16
Figura 2.3 –	Espectro de frequ3ncias da RCF em fun33o da intensidade.....	19
Figura 2.4 –	Horizonte de part3culas.....	21
Figura 2.5 –	Per3odos de dom3nio de diferentes fluidos na hist3ria do Universo	26
Figura 2.6 –	Evolu33o do potencial gravitacional em um universo dominado por radia33o em termos de k/H	36
Figura 2.7 –	Evolu33o da perturba33o de densidade em um universo dominado por radia33o em termos de k/H	37
Figura 2.8 –	Evolu33o do potencial gravitacional considerando diferentes comprimentos de onda em um universo dominado por mat3ria e radia33o.....	39
Figura 2.9 –	Evolu33o do potencial gravitacional em um universo constitu3do por um fluido composto por mat3ria e radia33o	39
Figura 2.10 –	Evolu33o do potencial gravitacional em um universo constitu3do por um fluido composto por mat3ria e constante cosmol3gica.....	41
Figura 2.11 –	Evolu33o do potencial gravitacional em um universo segundo o modelo Λ CDM	41
Figura 2.12 –	Per3odo inflacion3rio do Universo.....	50
Figura 3.1 –	Esquematziza33o dos efeitos envolvidos na f3rmula de Sachs-Wolfe	54
Figura 3.2 –	Desenho esquem3tico de dois f3tons emitidos no instante de desacoplamento a uma dist3ncia com3vel x_{dec} do observador medidos com uma separa33o angular de θ	57
Figura 3.3 –	Fun33o de correla33o em fun33o de θ	57
Figura 3.4 –	Espectro de pot3ncias	61
Figura 3.5 –	Formula de Sachs-Wolfe decomposta	62
Figura 4.1 –	Esquematziza33o da regi3o homog3nea que cont3m o Universo observ3vel.....	64
Figura 5.1 –	Fun33o de correla33o de dois pontos da RCF como fun33o da separa33o angular θ , incluindo o dipolo $C_1 = 3C_2$	68
Figura 5.2 –	Esquematziza33o da mudan3a de sinal na fun33o de correla33o.....	69
Figura 5.3 –	Fun33o de correla33o para diferentes valores do 3ndice espectral.....	72

Figura 5.4 – Evolução do potencial gravitacional em um universo segundo o modelo Λ CDM	77
Figura 5.5 – Contribuição dos multipolos na RCF para diferentes valores de n_s	78
Figura 5.6 – Contribuição dos efeitos SW, SWI e Doppler na RCF.....	81
Figura 5.7 – Limite imposto pelo quadrupolo à razão L/x_{dec} em função de n_s	83

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	12
Capítulo 2 – Evolução do Universo Segundo o Modelo ΛCDM	15
2.1 Universo homogêneo e isotrópico	15
2.1.1 O Modelo do Big Bang.....	18
2.1.2 Horizontes cosmológicos.....	20
2.1.3 Equações de Friedmann e lei de conservação	22
2.1.4 Soluções para diferentes fluidos.....	24
2.2 Teoria de Perturbações Cosmológicas.....	27
2.2.1 A equação de movimento do potencial gravitacional.....	27
2.2.2 Perturbação do fluido perfeito	31
2.2.3 Soluções da equação de movimento do potencial gravitacional	32
2.3 Inflação	42
2.3.1 O Inflaton.....	43
2.3.2 Campo teste no espaço de de Sitter	45
2.3.3 Considerações para um modelo mais realista.....	49
Capítulo 3 – A Radiação Cósmica de Fundo	52
3.1 Fórmula de Sachs-Wolfe	53
3.1.1 O Efeito Sachs-Wolfe.....	54
3.1.2 O Efeito Sachs-Wolfe Integrado.....	55
3.1.3 O Efeito Doppler	55
3.2 Estatística da RCF	56
3.2.1 Variância Cósmica.....	59
Capítulo 4 – O Efeito Grishchuk-Zel'dovich	63
Capítulo 5 – O Índice Espectral e a RCF	67
5.1 Função de correlação	67
5.2 Ondas estocásticas	73
5.3 Flutuações de temperatura em grandes escalas	76
5.4 Limites observacionais	79

Capítulo 6 – Conclusões e perspectivas	84
Referências Bibliográficas	86
APÊNDICES	90
APÊNDICES A – Resultados úteis	91
A.1 – Background.....	91
A.2 – Perturbações.....	92
APÊNDICES B – Relações úteis	95
APÊNDICES C – Cálculo da fórmula de Sachs-Wolfe.....	97
C.1 – A propagação de um fóton em um espaço-tempo perturbado	97
C.2 – A fórmula de Sachs-Wolfe	98
APÊNDICES D – O Cancelamento do dipolo no efeito Grishchuk-Zel'dovich	101

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia moderna, tal como a entendemos neste trabalho, teve início com a descoberta da radiação cósmica de fundo (RCF) por Arnold A. Penzias e Robert W. Wilson em 1965 [1]. As suas bases matemáticas - a Teoria da Relatividade Geral - foram desenvolvidas por Albert Einstein no início do século XX e, em 1929, Edwin Hubble [2] observa a principal característica do nosso Universo, ou seja, sua expansão. Entretanto foi somente com a RCF que se pode calcular os parâmetros cosmológicos com precisão considerável. As primeiras medidas precisas da RCF foram obtidas com o lançamento do satélite COBE (Cosmic Background Explorer) [3], no início da década de 1980 pela NASA. Aproximadamente vinte anos depois o satélite americano WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) foi lançado com o intuito de mapear a RCF com uma precisão ainda maior. O satélite operou por mais de uma década [4] e foi decisivo para estabelecer o modelo que melhor se ajusta às quantidades medidas do Universo, conhecido como *Modelo Cosmológico Padrão*. Nesse modelo, chamado também de *Modelo Λ CDM*, o Universo é considerado como uma estrutura espacialmente plana em expansão, cuja dinâmica é governada pela Relatividade Geral, e atualmente constituída de constante cosmológica¹ (Λ), matéria escura fria (CDM - Cold Dark Matter) e matéria ordinária (bárions).

Foi em maio de 2009 que a Agência Espacial Europeia (ESA - European Spatial Agency) colocou em órbita o satélite Planck que tem como principal objetivo construir o mapa mais preciso da RCF feito até hoje [5]. Segundo os dados fornecidos pelo satélite Planck [6] nosso Universo tem aproximadamente 13,8 bilhões de anos e é composto por 4,9% de matéria ordinária, 26,8% de matéria escura, 68,3% de constante cosmológica e apenas 0,01% de radiação².

O modelo Λ CDM recebeu esse nome por ser o modelo mais simples capaz de descrever o maior número de dados cosmológicos, além das anisotropias da RCF. Em grandes escalas, estas anisotropias são causadas em grande parte pelas perturbações do potencial gravitacional na era da formação da RCF. Essas perturbações são cruciais para entender a formação de estruturas de grandes escalas, como galáxias e aglomerados de galáxias, observadas hoje no Universo.

¹Chamada também de energia escura.

²Além de uma fração ainda menor de neutrinos primordiais.

Neste contexto, Leonid P. Grishchuk e Yakov B. Zel'dovich estudaram, em 1978, a influência de perturbações com comprimento maior que o raio de Hubble – conhecidas como ondas de super-horizonte – sobre a RCF [7]. Eles mostraram que essas perturbações produzem um quadrupolo na RCF, e hoje esse efeito é conhecido como efeito Grishchuk-Zel'dovich (GZ). Uma aplicação direta desse efeito é usar as medidas dos multipolos (dipolo, quadrupolo, octopolo...) da RCF e estimar a escala da região homogênea do Universo que se estende para além do Universo observável.

Na mesma época do primeiro trabalho do efeito GZ surge a ideia de que o universo, quando jovem, teve um período de expansão acelerada. Essa possibilidade foi proposta por vários autores [8–12], mas em um primeiro momento atraiu pouca atenção. Foi Alan Guth em 1981 [13] quem incentivou o interesse na inflação pelo fato dela resolver alguns problemas das condições iniciais do universo. Porém, o principal aspecto da inflação é fornecer um mecanismo quântico para a origem das flutuações cosmológicas observadas no universo [14], tornando explícita a importância de um período inflacionário para a formação de estruturas de grandes escalas.

É importante salientar que um entendimento mais concreto da inflação foi alcançado na década de 80, ou seja, depois da formulação do efeito GZ. Além disso, hoje temos uma grande quantidade de dados do Universo muito mais precisos do que se tinha quando foram feitos os primeiros trabalhos sobre esse efeito. Por esses motivos, uma revisão do efeito GZ torna-se necessária!

Para estimar a escala da região homogênea do Universo à luz da inflação, devemos considerar que as perturbações que induzem multipolos na RCF são ondas estocásticas gaussianas com fases e amplitudes aleatórias, ao invés de uma única onda plana, como feito no efeito GZ original. Devido à natureza aleatória das ondas adotadas, o índice escalar espectral³, n_s , desempenhará um papel importante, já que, no que tange o espectro de potências, o índice funciona como um filtro que amplifica ou bloqueia a potência em grandes escalas dependendo se n_s é azul ($n_s > 1$) ou vermelho ($n_s < 1$) respectivamente.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 apresentamos os fundamentos da cosmologia padrão, introduzindo indícios observacionais sobre a homogeneidade e isotropia do Universo e o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Em seguida investigamos os casos de maior interesse da Teoria de Perturbações Cosmológicas que mostra como as perturbações no potencial gravitacional evoluem para a formação de estruturas de grandes escalas no Universo. Esse capítulo termina com uma breve exposição sobre os principais

³Esse índice define a dependência de escala do espectro de potências, \mathcal{P} , devido à perturbações escalares. Dado que $\mathcal{P} \propto k^{n_s-1}$, se $n_s = 1$ temos um espectro invariante de escalas.

aspectos da Teoria Inflacionária do Universo, obtendo um espectro de potências dependente de escalas, onde introduzimos o índice escalar espectral. Esse espectro será de capital importância para modular as perturbações usadas na nossa abordagem do efeito GZ. No capítulo 3 discorremos sobre a radiação cósmica de fundo em grandes escalas e sobre como obter informações a partir do seu espectro de potências de temperatura. No capítulo 4 revisamos o efeito GZ original e a partir dele mostramos como é possível estimar um limite inferior no tamanho da região homogênea do Universo.

Finalmente, no capítulo 5 consideramos a Teoria do Universo Inflacionário e mostramos como n_s atua como um filtro na amplitude das perturbações. Em seguida utilizamos os resultados fornecidos pela inflação para deduzir as perturbações de grandes comprimentos de onda que irão induzir multipolos na RCF e, com os últimos dados fornecidos pelo satélite Planck, estimamos um novo limite inferior na região homogênea do Universo via efeito Grishchuk-Zel'dovich. Concluímos esse trabalho no capítulo 6 onde também é apresentado algumas perspectivas para as próximas investigações sobre o mesmo tema.

Ao longo desse trabalho adotamos a seguinte assinatura da métrica: $(-, +, +, +)$. Os índices gregos assumem valores de 0 a 3 e os índices romanos vão de 1 a 3. No cálculo tensorial usamos a notação de soma de Einstein, a vírgula (,) para indicar derivada usual e ponto e vírgula (;) para representar a derivada covariante. Os pontos sobrescritos ($\dot{}$) serão usados para representar a derivada com relação ao tempo físico (t), já as linhas (\prime) representam a derivada com relação ao tempo conforme (τ). Os índices zero (0) nas quantidades físicas indicam o valor dessas calculado hoje. Adotaremos também as unidades tais que $c = 1$.

Para o leitor que já se encontra familiarizado com a teoria cosmológica padrão e que esteja interessado apenas nos resultados originais do nosso trabalho aconselhamos que parta do capítulo 4.

Capítulo 2

Evolução do Universo Segundo o Modelo Λ CDM

2.1 Universo homogêneo e isotrópico

As observações da distribuição angular de temperatura da RCF - Fig. 2.1 - são um forte indício de que nosso Universo teve um início extremamente isotrópico em grandes escalas. Além disso, observações das distribuições de galáxias - Fig. 2.2 - sugerem que nosso Universo é homogêneo em escalas maiores que 100 Mpc¹ [15]. Isotropia do Universo implica que ele é o mesmo em todas as direções em torno de um ponto. Ou seja, o espaço tem o mesmo aspecto em todas as direções. A homogeneidade é uma hipótese segundo a qual essa isotropia é observada em todos os pontos do espaço. Esta hipótese é uma generalização do *Princípio Copernicano*, o qual assume que a Terra não ocupa um ponto privilegiado no Universo. Essas duas características do Universo constituem o conhecido *Princípio Cosmológico*.

Uma outra característica importante do nosso Universo foi descoberta por Hubble em 1929. Ele constatou, pela observação de galáxias distantes, que nosso Universo está em expansão. Dessa maneira a *distância física* \mathbf{s} entre dois objetos quaisquer depende do fator de escala $a(t)$ (que descreve a evolução temporal do Universo homogêneo e isotrópico) multiplicado pela *distância comóvel*² \mathbf{x} :

$$\mathbf{s} = a(t)\mathbf{x} . \quad (2.1)$$

Derivando a Eq. (2.1) com relação ao tempo e ignorando a velocidade dos objetos em relação ao referencial comóvel - *velocidade peculiar* -, ou seja, assumindo que \mathbf{x} não depende do tempo, obtêm-se

$$\dot{\mathbf{s}} = H(t)\mathbf{s} , \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} . \quad (2.2)$$

¹O parsec (pc) é a distância à qual se deve situar um observador para ver uma unidade astronômica (150×10^6 Km) sob o ângulo de um segundo de arco, de forma que $1\text{Mpc} = 30.857 \times 10^{18}\text{km} = 3.26 \times 10^5\text{ly}$.

²A distância comóvel é medida no referencial em “queda livre” com a expansão, portanto nesse referencial as distâncias não se alteram com a expansão do Universo.

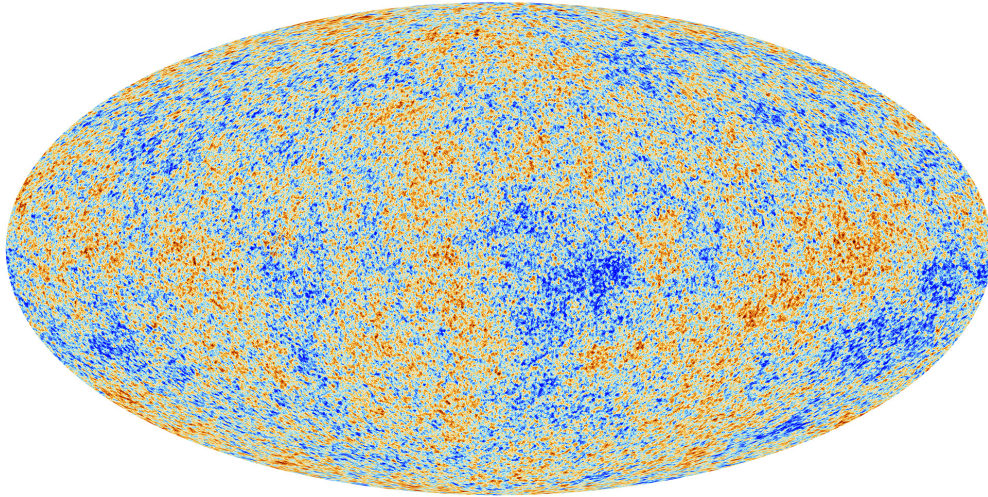


Figura 2.1 – Mapa da RCF gerado pelo satélite Planck [5]. As zonas com temperatura acima da média estão representadas em vermelho, as zonas abaixo da média são as azuis enquanto que as verdes são as zonas com a temperatura média de 2.75 K.

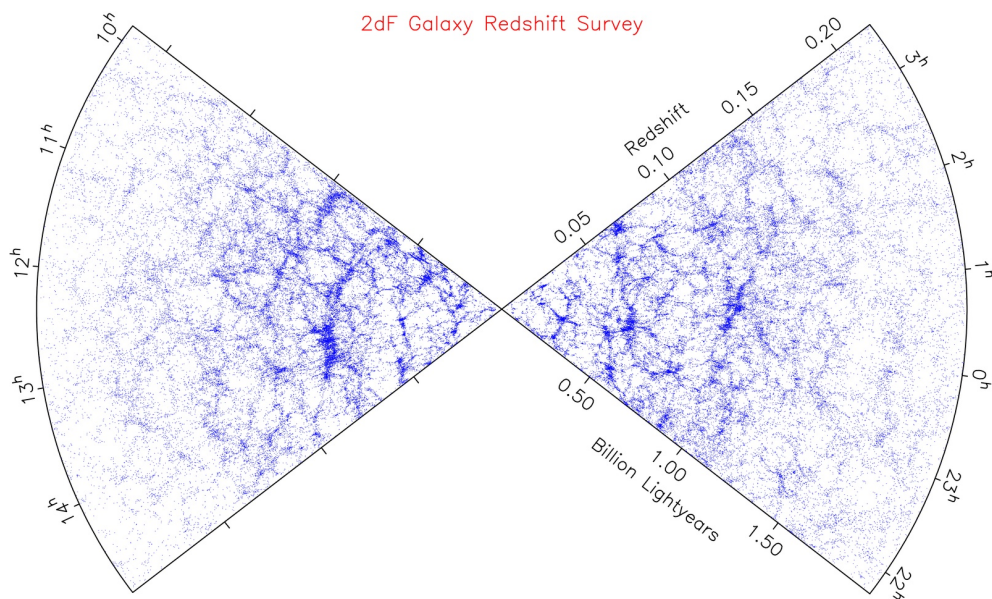


Figura 2.2 – Mapa da distribuição de galáxias fornecido pelo AAO (*Australian Astronomical Observatory*) [16].

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. O valor de melhor ajuste fornecido pelo satélite Planck [6] do parâmetro de Hubble é:

$$H_0 = 67,4 \pm 1,4 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} . \quad (2.3)$$

A Eq. (2.2) é a conhecida lei de Hubble, verificada com alto grau de precisão para objetos distantes (veja a referência [17] para mais detalhes). Basicamente essa lei diz que as galáxias afastam-se umas das outras com velocidade proporcional à distância entre elas. Essa velocidade pode ser inferida pelo *redshift* cosmológico (desvio para o vermelho) causado pelo movimento de recessão das galáxias devido à expansão. Esse parâmetro é definido como o desvio fracionário entre a frequência da onda emitida f_e e a frequência observada f_0 :

$$z \equiv \frac{f_e - f_0}{f_0} . \quad (2.4)$$

Devido à expansão do universo, uma onda emitida no instante t_e com comprimento $\lambda_e = a(t_e)\lambda_c$, onde λ_c é o comprimento comóvel, será medida em t_0 com comprimento $\lambda_0 = a(t_0)\lambda_c$. Da constância da velocidade da luz, segue que:

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{f_0}{f_e} = (1 + z)^{-1} . \quad (2.5)$$

Usando a Eq. (2.5), obtêm-se que

$$a(t_e) = a(t_0) \frac{1}{1 + z} . \quad (2.6)$$

Essa equação é muito útil, pois relaciona o redshift dos objetos observados com o instante $a(\tau)$ do Universo em que suas ondas foram emitidas.

Uma outra relação útil decorre do fato de que, num universo homogêneo e isotrópico em expansão, o espectro de corpo negro da RCF (Fig. 2.3) é preservado [18]. Disso, decorre que a temperatura da radiação eletromagnética deve se comportar cinematicamente como sua frequência. Consequentemente, a temperatura da radiação eletromagnética diminui conforme o universo se expande. Da lei de Wien sabemos que o produto da temperatura com o comprimento de onda máximo é constante para um corpo negro: $\lambda_{\text{máx}}T = \text{constante}$. Então das Eqs. (2.5) e (2.6) segue a equação

$$T(z) = T_0(1 + z) , \quad (2.7)$$

que é usada para parametrizar a história térmica do universo. O valor médio da temperatura da RCF medido hoje é de $T_0 = 2,7255 \pm 0,0006 \text{ K}$ [19].

2.1.1 O Modelo do Big Bang

Todas as relações obtidas até agora decorrem do fato de que o Universo está em expansão. Elas deixam claro que essa característica implica que o Universo era mais quente e denso em um passado distante. Segundo o *Modelo do Big Bang*³ a temperatura no início do Universo era tão alta que os núcleos atômicos não conseguiam se manter unidos e o que se tinha era uma “sopa” de partículas elementares. A medida que o Universo se expande, ele se esfria e com isso a energia típica de cada partícula também decresce a ponto de ser possível a formação de bárions, como prótons e nêutrons. A uma temperatura em torno de 0.05 Mev os prótons e nêutrons livres conseguem se juntar para formar núcleos de hélio e outros elementos leves. Somente em $T \sim 1$ eV que ocorre o instante de igualdade, τ_{eq} , entre a densidade de energia de matéria e radiação; e a partir desse instante a radiação deixa de ser predominante no Universo (Fig. 2.5). Em seguida os prótons e elétrons livres se **recombinam** para formar átomos (em sua maioria hidrogênio). Consequentemente nesse instante, τ_{dec} , a radiação se **desacopla** da matéria e temos a *superfície de último espalhamento* a partir da qual os fótons começam a viajar livremente pelo espaço [20]. Essa é a Radiação Cósmica de Fundo, a relíquia mais antiga do nosso Universo jovem.

Quando o Universo tinha se esfriado o suficiente a permitir a formação de núcleos, os fótons colidiam constantemente com os elétrons, de forma que nesse período havia um plasma de elétrons, núcleos e fótons [18]. Esse processo de colisões gera um equilíbrio térmico chamado de *espectro de corpo negro*. Segundo o Modelo do Big Bang o espectro de frequências da RCF deve ter a forma do corpo negro. Isso foi medido com extrema precisão pelo experimento FIRAS⁴ [21] do satélite COBE da NASA (Fig. 2.3).

A métrica de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW)

As hipóteses de simetria discutidas no começo desse capítulo limitam bastante a forma da geometria do universo. Para um Universo homogêneo e isotrópico em quatro dimensões, expandindo em função do tempo, a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ correspondente é a de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.8)$$

$$= -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j , \quad (2.9)$$

³O *Modelo do Big Bang* descreve a origem e evolução do universo primordial.

⁴Em inglês *Far Infrared Absolute Spectrophotometer*.

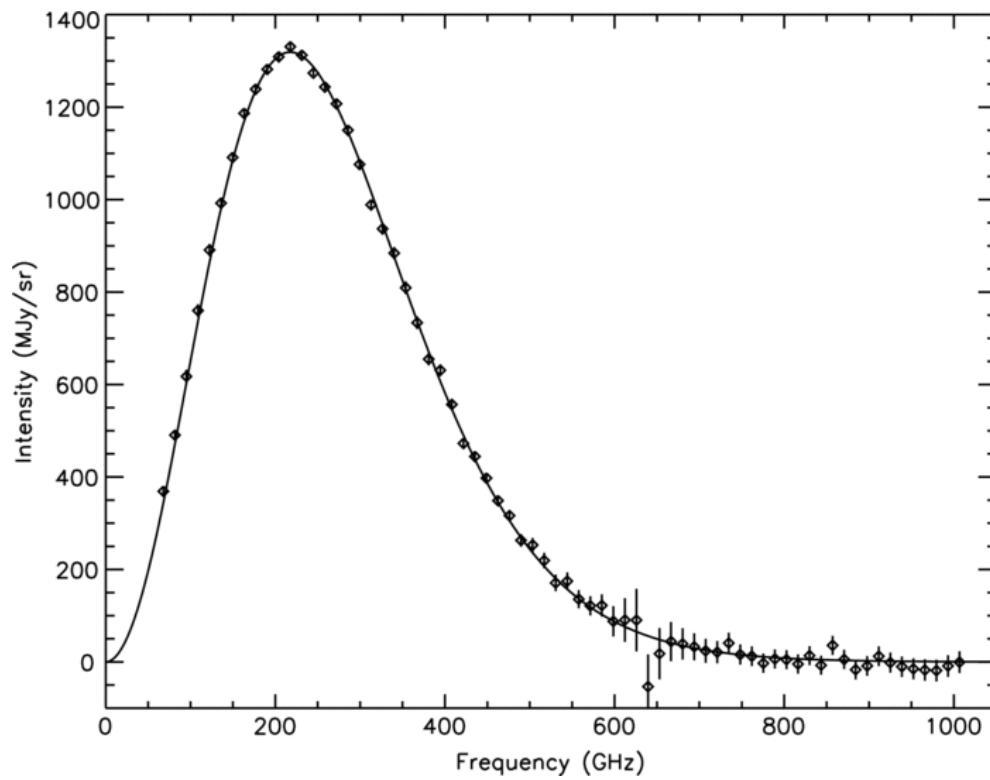


Figura 2.3 – Espectro de intensidade da RCF em função da frequência. A curva sólida mostra a intensidade esperada de uma única temperatura do espectro do corpo negro, como predita no Modelo do Big Bang. As incertezas são ruídos das medidas do experimento FIRAS [21]. (Gráfico retirado da Ref. [19].)

onde δ_{ij} é a métrica tridimensional de um espaço de curvatura nula⁵, visto que os dados atuais [6] sugerem que nosso Universo é plano⁶. Uma definição que simplifica bastante os cálculos é a do tempo conforme:

$$\tau(t) \equiv \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.10)$$

através da qual o elemento de linha pode ser reescrito como

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.11)$$

De forma compactada escreve-se

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.12)$$

onde

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(-1, \delta_{ij}), \quad \bar{g}^{\mu\nu} = a^{-2}(-1, \delta^{ij}). \quad (2.13)$$

2.1.2 Horizontes cosmológicos

Um dos conceitos mais fundamentais para estudar os modelos de FLRW é a existência de *horizontes*. Em linhas gerais, um horizonte cosmológico é uma hiper-superfície no espaço-tempo definida por um observador \mathcal{O} que divide eventos observáveis dos não observáveis. Esse conceito se mostrará importante no decorrer desse trabalho, pois iremos estimar a escala da homogeneidade do universo como múltiplo do raio do universo observável.

A separação entre efeitos observáveis e não observáveis é feita por meio de sinais luminosos, para os quais $ds^2 = 0$. Em termos da Eq. (2.11), segue que

$$d\tau = d\chi,$$

onde $d\chi \equiv \sqrt{\delta_{ij}dx^i dx^j}$.

Chamamos de *horizonte de partículas*, ou apenas *horizonte*, a máxima distância física que um fóton pode percorrer num universo temporalmente finito. Supondo que um fóton foi emitido em um instante inicial t_i , em um instante

⁵Nesse caso essa métrica se identifica com o delta de Kronecker.

⁶A barra sobrescrita, \bar{g} , indica as quantidades referentes ao espaço de fundo (homogêneo e isotrópico) tratado nessa seção. Usamos essa notação para diferenciar das quantidades perturbadas tratadas adiante onde uma quantidade será descrita por uma parte de fundo mais outra parte perturbada, $g = \bar{g} + \delta g$.

posterior t ele terá percorrido uma distância $d_p(t)$ dada por

$$d_p(t) \equiv a(t)\chi_p(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})}. \quad (2.14)$$

Veja a figura 2.4. Por simplicidade, vamos supor que o observador \mathcal{O} esteja posicionado na origem do seu sistema de coordenadas, $\chi_p = 0$. Note que ele não tem, no instante $\tau = \tau_1$, acesso à partículas que seguem a linha de mundo B . Este observador terá acesso à essas partículas somente a partir de $\tau = \tau_0$.

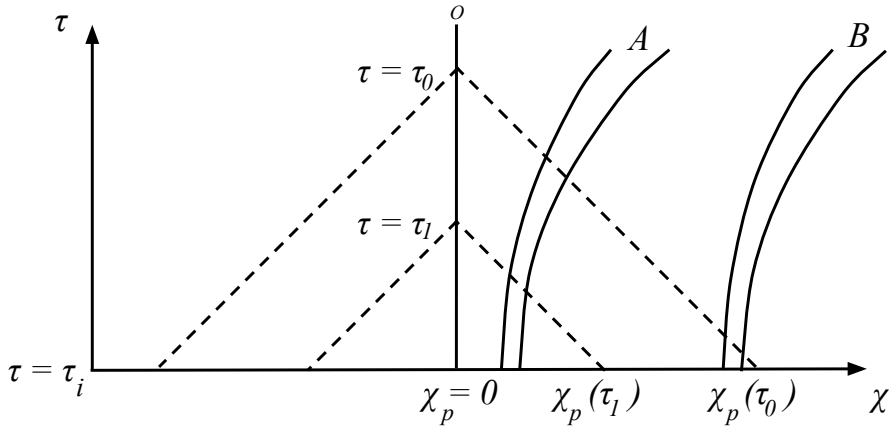


Figura 2.4 – Horizonte de partículas. Um observador em $\tau = \tau_1$ não observa as partículas com a linha de mundo B até que $\tau = \tau_0$.

Como veremos na seção 2.1.4, para um universo típico, o fator de escala se comporta como $a(t) \propto t^\nu$, onde $\nu \lesssim 1$. Nesse caso, o horizonte de partículas é dado por

$$d_p(t) = \frac{t}{1 - \nu}, \quad (2.15)$$

onde adotamos $t_i = 0$ como o instante da singularidade inicial. Fisicamente, este horizonte delimita a região observável de \mathcal{O} no instante t . Na prática, porém, as observações da RCF são limitadas pelo *horizonte ótico*, que é definido como a distância percorrida pelos fótons após a recombinação (Seç. 2.1.1) entre prótons e elétrons [20]:

$$d_o(t) \equiv a(t) \int_{t_{dec}}^t \frac{d\tilde{t}}{a(\tilde{t})}. \quad (2.16)$$

Usando novamente um fator de escala da forma $a(t) \propto t^\nu$, vemos que a diferença entre $d_p(t)$ e $d_o(t)$ é da ordem de

$$t_{dec} \propto a(t_{dec})^{1/\nu} \propto \frac{1}{(1 + z_{rec})^{1/\nu}}. \quad (2.17)$$

No modelo Λ CDM o redshift da recombinação é da ordem de 10^3 , portanto, a diferença entre estas duas distâncias é tipicamente menor que 0,001%. O processo de formação da RCF será tratado em mais detalhes no capítulo 3.

Finalmente, é importante introduzir a noção de *raio de Hubble*:

$$d_H(t) \equiv H^{-1}. \quad (2.18)$$

A rigor, o raio de Hubble não define um horizonte, pois esta distância tem uma origem dinâmica que segue diretamente das equações de Einstein. No entanto, se $a(t) \propto t^\nu$, as distâncias $d_p(t)$ e $H^{-1}(t)$ se confundem. Por essa razão, iremos ao longo deste trabalho usar indiscriminadamente os termos horizonte de Hubble, raio de Hubble e horizonte de partículas para nos referirmos ao raio do universo observável, ou seja, o horizonte ótico.

2.1.3 Equações de Friedmann e lei de conservação

O modelo Λ CDM assume que a dinâmica do Universo obedece a Relatividade Geral. As equações que relacionam a dinâmica do fator de escala à densidade de energia total do Universo são conhecidas como Equações de Friedmann e são obtidas a partir das equações de Einstein,

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \kappa \bar{T}_{\mu\nu}, \quad \kappa \equiv 8\pi G, \quad (2.19)$$

onde $\bar{G}_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}$ é o tensor de Einstein, $\bar{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $\bar{T}_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento e $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ é a constante gravitacional. O escalar de Ricci, \bar{R} , é obtido contraindo-se o tensor de Ricci com a métrica do espaço-tempo, $\bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}$. O tensor de Einstein descreve os aspectos geométricos do Universo enquanto o tensor de energia-momento trata de seu conteúdo energético.

Em grandes escalas cosmológicas, pode-se aproximar o conteúdo energético do Universo como um fluido perfeito, pois espera-se que a microfísica de efeitos dissipativos seja diluída em escalas iguais ou maiores que a escala de curvatura do universo. Essa é a aproximação do *Modelo de Fluido Perfeito* onde toda a matéria e energia contida no Universo é descrita por uma constante cosmológica (Λ) e duas componentes flutuantes: a matéria escura fria⁷ junto com os bárions e a radiação (fótons e neutrinos). Para esse tipo de fluido o tensor de energia-momento é caracterizado pela densidade de energia $\bar{\rho}(\tau)$, pressão $\bar{p}(\tau)$ e

⁷Em inglês Cold Dark Matter - CDM.

quadrivelocidade \bar{v}_μ de um observador comóvel com a expansão,

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho}(\tau) + \bar{p}(\tau)) \bar{v}_\mu \bar{v}_\nu + \bar{p}(\tau) \bar{g}_{\mu\nu} , \quad v_\mu = -a(1, 0, 0, 0) . \quad (2.20)$$

Com o resultado do cálculo das quantidades acima, calculadas para a métrica (2.13) - apêndice A.1 - e substituindo nas equações de Einstein (Eq. (2.19)), duas equações independentes são obtidas,

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa}{6} a^2 (\bar{\rho} + 3\bar{p}) , \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 \bar{\rho} , \quad (2.22)$$

onde

$$\bar{\rho} = \sum_i \bar{\rho}_i , \quad \bar{p} = \sum_i \bar{p}_i , \quad (2.23)$$

são, respectivamente, as somas da densidade e da pressão de todas as espécies de fluidos que constituem o universo em questão. A quantidade $\mathcal{H} \equiv aH = a'/a$ é o parâmetro de Hubble conforme, onde a linha denota derivada com relação ao tempo conforme τ . As equações (2.21) e (2.22) são as conhecidas equações de Friedmann que descrevem a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico em expansão.

Na teoria da relatividade massa e energia são equivalentes, por isso a imposição da conservação dessas quantidades se resume na conservação do tensor de energia-momento, ou seja,

$$\nabla_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.24)$$

Usando a métrica (2.13) e o tensor (2.20), essa equação nos leva à equação de continuidade:

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) = 0 . \quad (2.25)$$

Essa equação não é independente das Eqs. (2.21) e (2.22), mas ela é necessária por consistência. Até agora nós temos duas equações independentes, no entanto temos três variáveis: o fator de escala $a(\tau)$, a densidade de energia $\bar{\rho}$ e a pressão \bar{p} . Para resolver o sistema é necessário uma informação adicional entre duas dessas quantidades. Essa informação pode ser encontrada com base na Termodinâmica através do uso de uma equação de estado do tipo $p = p(\rho, S)$. Mas para um fluido homogêneo e isotrópico a variação da entropia, S , é negligenciada⁸, de forma que:

$$\bar{p} = \omega \bar{\rho} , \quad (2.26)$$

⁸Entraremos com mais detalhes nessa questão na Seq. 2.2.1.

onde ω é um parâmetro conhecido como equação de estado cujo valor depende da microfísica do fluido em questão. Através dessa relação, uma variável de estado pode ser eliminada, fornecendo

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(1 + \omega)\bar{\rho} = 0. \quad (2.27)$$

Da Mecânica Estatística sabe-se que um gás de fótons exerce uma pressão igual a um terço de sua densidade de energia [22], ou seja, para a radiação $\omega = 1/3$. Além do gás de fótons, outro fluido muito utilizado neste trabalho é a “poeira”, ou matéria escura fria (sem pressão). Nesse caso, $\omega = 0$. Com um certo abuso de linguagem, a constante cosmológica Λ também pode ser vista como um “fluido” perfeito com densidade de energia constante. Para ela, a Eq. (2.27) implica numa equação de estado negativa, $\omega = -1$. Trataremos desse fluido com mais detalhes na seção 2.3. Em resumo, portanto, os três tipos de fluidos utilizados neste trabalho podem ser resumidos da seguinte forma

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{radiação,} \\ 0 & \text{poeira,} \\ -1 & \text{constante cosmológica.} \end{cases} \quad (2.28)$$

2.1.4 Soluções para diferentes fluidos

A fim de analisar a contribuição desses diferentes fluidos na evolução do Universo vamos considerá-los separadamente. Supondo que as diferentes espécies de fluidos que compõem o Universo estão desacopladas umas das outras, a Eq. (2.24) deve ser válida para cada espécie ρ_i separadamente. Então tomamos inicialmente a solução da Eq. (2.27):

$$\bar{\rho}(a) = \bar{\rho}_0 a(\tau)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.29)$$

onde, por conveniência, adota-se $a(\tau_0) = 1$. Portanto, segue que para o caso de um universo dominado somente por matéria ou radiação ou constante cosmológica, temos as respectivas evoluções da densidade de energia em função do fator de escala,

$$\bar{\rho}_i(a) = \begin{cases} \bar{\rho}_0^r/a^4 & \text{radiação,} \\ \bar{\rho}_0^m/a^3 & \text{poeira,} \\ \Lambda/\kappa = \text{cte.} & \text{constante cosmológica,} \end{cases} \quad (2.30)$$

onde o índice zero indica o valor da quantidade hoje. Considerando todas componentes, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r + \bar{\rho}_\Lambda$, na Eq. (2.22) obtêm-se uma equação de vínculo,

$$\sum_i \bar{\rho}_i = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.31)$$

onde $\Omega_i \equiv \bar{\rho}_i/\rho_c$ é a densidade fracionária de energia de cada espécie relativa à densidade crítica, ρ_c , definida como a densidade necessária para que o universo tenha uma curvatura nula:

$$\rho_c(a) \equiv \frac{3\mathcal{H}^2}{\kappa a^2}. \quad (2.32)$$

Usando o valor do parâmetro de Hubble atual (2.3) e da constante gravitacional, a densidade crítica atual é $\rho_0^c \approx 8,56 \times 10^{-27} h^2 \text{ kg/m}^3$, onde h é a constante de Hubble em unidades de $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Sob essas considerações as Eqs. (2.30) podem ser reescritas na forma

$$\Omega_i(a) = \begin{cases} \Omega_0^r/a^4 & \text{radiação,} \\ \Omega_0^m/a^3 & \text{poeira,} \\ \Lambda/\kappa\rho_0^c = \text{cte.} & \text{constante cosmológica,} \end{cases} \quad (2.33)$$

Os valores de melhor ajuste fornecidos pelo satélite Planck são:

$$\Omega_0^m h^2 = 0,1423 \pm 0,0029, \quad \Omega_\Lambda = 0,686 \pm 0,020. \quad (2.34)$$

Note que cada componente $\Omega_i(a)$ depende do fator de escala por uma potência diferente. Isso indica que na evolução do Universo existem épocas de domínio de diferentes fluidos como mostra a figura 2.5.

Usando agora as Eqs. (2.33) juntamente com as equações de Friedmann encontra-se o fator de escala em função do tempo conforme:

$$a_i(\tau) = \begin{cases} (\mathcal{H}_0 \Omega_0^r)^{1/2} \tau & \text{radiação,} \\ \left(\frac{\mathcal{H}_0}{2}\right)^2 \Omega_0^m \tau^2 & \text{poeira,} \\ -(H_\Lambda \tau)^{-1} & \text{constante cosmológica,} \end{cases} \quad (2.35)$$

onde $H_\Lambda \equiv \sqrt{\kappa\rho_\Lambda/3}$. De fato, as equações de Friedman podem ser combinadas (veja a Eq. (B.2)) e obtêm-se a relação

$$a \propto \tau^{2/(1+3\omega)}, \quad (2.36)$$

válida para qualquer valor de ω . Essa relação deixa claro que o fator de escala

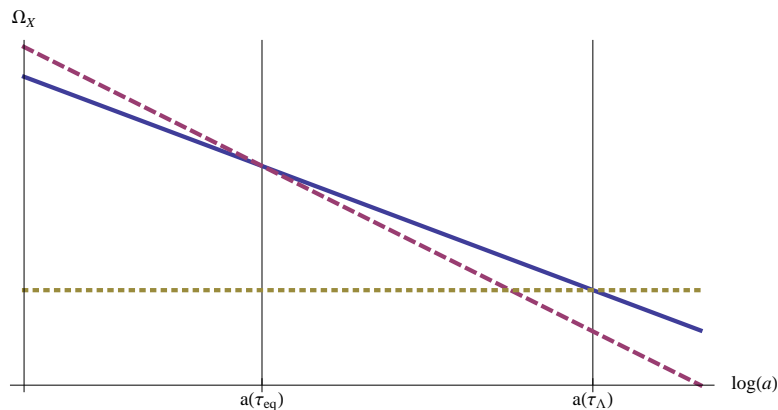


Figura 2.5 – Períodos de domínio de diferentes fluidos na história do Universo. No gráfico está plotada a densidade de energia de cada fluido separadamente em função do logaritmo do fator de escala. Inicialmente o Universo era dominado pela radiação que tem sua densidade de energia (linha tracejada) caindo com a^4 . No instante $a(\tau_{eq})$ há o instante de igualdade entre a densidade de matéria e radiação e em seguida a matéria (linha contínua) torna-se dominante, pois decai com a^3 . Em $a(\tau_\Lambda)$ ocorre a igualdade entre a matéria e a constante cosmológica (linha pontilhada) que se torna predominante.

evolui com o tempo de maneira diferente para cada fluido.

Matéria e radiação

A título de ilustração, vamos analisar quantitativamente a primeira transição de domínio dos fluidos que ocorreu no Universo. Considera-se, então, um universo dominado somente por matéria e radiação. Com isso, a Eq. (2.22) se torna

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} a^2 (\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_r) , \quad (2.37)$$

usando as Eqs. (2.32) e (B.5),

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_0^2 \frac{\Omega_0^m}{a^2} (a_{eq} + a) , \quad (2.38)$$

onde $a_{eq} \equiv a(\tau_{eq})$ é o valor do fator de escala no instante de igualdade de matéria e radiação. Resolvendo para a ,

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_m(a_{eq} + a)}} = \int_0^\tau \mathcal{H}_0 d\tau . \quad (2.39)$$

Com um pouco de álgebra encontra-se a relação

$$\frac{a(\tau)}{a_{eq}} = \left(\frac{\tau}{\tilde{\tau}} \right)^2 + 2 \frac{\tau}{\tilde{\tau}} , \quad (2.40)$$

onde $\tilde{\tau} \equiv 2(a_{eq}/\Omega_0^m)^{1/2}\mathcal{H}_0^{-1} = 9,07 \times 10^{-4} \text{ Mpc s km}^{-1}$. Para $\tau \ll \tau_{dec}$ a radiação domina e $a \propto \tau$. À medida que o Universo se expande, a densidade de energia da radiação decresce mais rápido que da matéria (figura 2.5). Então, para $\tau \gg \tau_{dec}$ a matéria é predominante e $a \propto \tau^2$.

2.2 Teoria de Perturbações Cosmológicas

Como mencionamos anteriormente, existem boas evidências para crermos que o universo jovem era altamente homogêneo e isotrópico. A previsão da abundância de elementos leves pelo modelo do Big Bang e a isotropia da RCF, por exemplo, são compatíveis com a ideia de um universo jovem altamente simétrico. Porém, a mera existência de galáxias e seus aglomerados sugere que a homogeneidade do universo deixa de ser válida abaixo de uma certa escala espacial (Fig. 2.2).

Para além dos mapas de galáxias a RCF é a melhor evidência da isotropia do Universo jovem. No entanto sabemos hoje que a RCF não é perfeitamente isotrópica, mas apresenta desvios de isotropia de uma parte em 10^5 [3, 4, 23]. No modelo Λ CDM essas flutuações estão diretamente relacionadas com as perturbações de densidade na era da recombinação, proporcionando assim um limite superior na amplitude das perturbações de densidade naquela época [24]. Em vista disso, o que se faz é perturbar o modelo de FLRW do universo. Esse método foi primeiramente desenvolvido por Lifshitz em 1946 [25], e revisado por ele e Khalatnikov em 1963 [26].

Nesse capítulo descreveremos os rudimentos da teoria linear de perturbações escalares num universo em expansão. Do ponto de vista matemático, descrever o crescimento de pequenas perturbações no contexto da Relatividade Geral equivale a linearizar as equações de Einstein sobre um espaço-tempo em expansão.

2.2.1 A equação de movimento do potencial gravitacional

A fim de descrever um modelo mais realista para o Universo, e compatível com a existência das estruturas observadas, uma perturbação na métrica (2.13) é inserida,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} , \quad |\delta g_{\mu\nu}| \ll 1 , \quad (2.41)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo (2.11) e $\delta g_{\mu\nu}$ é a perturbação. Por consistência, a métrica inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu} , \quad \delta g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma} . \quad (2.42)$$

Com base nas simetrias do universo de FLRW sob rotações, podemos classificar as perturbações em três tipos diferentes: perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Num universo de FLRW em expansão as **perturbações vetoriais** decaem cinematicamente, não apresentando modos de crescimento. As **perturbações tensoriais** produzem as ondas gravitacionais que em primeira ordem não se acoplam à densidade de energia. Além disso essas ondas ainda não foram detectadas. Por outro lado, as **perturbações escalares** resultam no crescimento de inhomogeneidades que, por sua vez, têm um importante efeito na formação de estruturas. Por isso, neste trabalho, estaremos interessados somente nas perturbações escalares. Nesse caso, a perturbação mais geral possível da métrica de FLRW pode ser implementada por meio de uma função escalar Φ [27],

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j] . \quad (2.43)$$

Se a métrica é perturbada, as quantidades envolvidas nas equações de Einstein que, por sua vez, também dependem da métrica podem ser decomposta em uma parte de fundo e outra perturbada. Então, das equações de Einstein perturbadas,

$$\delta G^\mu{}_\nu = \kappa \delta T^\mu{}_\nu , \quad (2.44)$$

tira-se a equação de evolução do potencial gravitacional Φ . As quantidades necessárias para desenvolver esse cálculo estão apresentadas no apêndice A.2. As componentes do tensor de Einstein estão apresentadas a seguir:

$$\delta G^0{}_0 = -2a^{-2} [\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')] , \quad (2.45a)$$

$$\delta G^0{}_i = -2a^{-2} (\mathcal{H}\Phi + \Phi')_{,i} , \quad (2.45b)$$

$$\delta G^i{}_j = 2a^{-2} [\Phi'' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + 3\mathcal{H}\Phi'] \delta_j^i . \quad (2.45c)$$

Para calcular o tensor de energia-momento é necessário normalizar a perturbação de velocidade usando a métrica total $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = v^\mu v_\mu = -1 , \quad (2.46)$$

de maneira que

$$v_\mu = -a(1 + \Phi, -v_i), \quad v^\mu = a^{-1}(1 - \Phi, v^i). \quad (2.47)$$

Com isso as componentes do tensor de energia-momento são obtidas,

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho(t, \mathbf{x}), \quad (2.48a)$$

$$\delta T^0_i = (\bar{\rho}(t, \mathbf{x}) + \bar{p}(t, \mathbf{x})) v_i, \quad v_i = -\partial_i V, \quad (2.48b)$$

$$\delta T^i_j = \delta p(t, \mathbf{x}) \delta^i_j, \quad (2.48c)$$

onde a $v_i = \delta_{ij} dx^j / d\tau$ é a 3-velocidade normalizada do fluido não-relativístico, V é o potencial de velocidade e $\delta\rho$ e δp são as variações da densidade e da pressão respectivamente. Perceba que a densidade de energia, $\bar{\rho}$, e a pressão, \bar{p} , no espaço de fundo (homogêneo e isotrópico) dependem somente do tempo enquanto suas respectivas flutuações são temporalmente e espacialmente dependentes. Agora, a partir das Eqs. (2.45) e (2.48), temos as equações que descrevem a evolução do potencial gravitacional

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 [\delta\rho + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})V], \quad (2.49)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})V, \quad (2.50)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' - \kappa a^2 \bar{p}\Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta p, \quad (2.51)$$

onde foi usado as equações de Friedmann - Eqs. (2.21) e (2.22). As duas primeiras equações, (2.49) e (2.50), podem ser combinadas para obter

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\kappa a^2}{2} \delta\rho + 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi). \quad (2.52)$$

Usando a Eq. (2.22) na equação acima encontra-se uma expressão para a quantidade definida como contraste de densidade $\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$,

$$\delta = \frac{2}{3\mathcal{H}^2} [\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)], \quad (2.53)$$

que mostra como a densidade do fluido cresce com o passar do tempo devido às flutuações do potencial gravitacional Φ .

Assim como na Sec. 2.1.3, onde foi preciso introduzir uma equação de estado para fechar o sistema de equações, precisamos agora de uma informação adicional que conecte $\delta\rho$ e δp . A teoria da termodinâmica nos garante que a pressão pode ser expressa numa equação de estado do tipo $p = p(\rho, S)$. Então,

segue que

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \delta \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \delta S , \quad (2.54)$$

onde δS é a perturbação de entropia.

Como descrevemos na Seç. 2.1 o mapa da RCF indica que o Universo era altamente isotrópico. Ou seja, antes do desacoplamento da radiação com a matéria, o fluido que constituía o Universo era composto por uma distribuição uniforme de fótons e bárions. A forma mais simples de perturbar a densidade desse fluido seria comprimir ou expandir um conjunto de elementos de volume adiabaticamente. Essas **perturbações adiabáticas** irão mudar a densidade de energia da radiação e da matéria pelo mesmo fator. Esse tipo de perturbação é caracterizado pelo primeiro termo da Eq. (2.54). O segundo termo refere-se à **perturbação de isocurvatura**, onde a densidade total de energia permanece homogênea e, nesse caso, não há variações na curvatura espacial [28]. Entretanto os dados observacionais nos indicam uma preferência nas perturbações adiabáticas [6] e por isso iremos ignorar o termo de isocurvatura da Eq. (2.54).

Para explicar melhor o efeito das perturbações adiabáticas usamos a relação [20]

$$S \propto \frac{\rho_r^{3/4}}{\rho_m} . \quad (2.55)$$

A perturbação da entropia então será dada por

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{3}{4} \delta_r - \delta_m , \quad (2.56)$$

onde $\delta_i \equiv \delta \rho_i / \bar{\rho}_i$. Entretanto, perturbações adiabáticas implicam em $\delta S = 0$ e, pela Eq. (2.56), temos que essas perturbações afetam a densidade de matéria e radiação de maneiras diferentes:

$$\delta_r = \frac{4}{3} \delta_m . \quad (2.57)$$

A consideração de perturbações adiabáticas também simplificam a Eq. (2.54):

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho , \quad (2.58)$$

onde c_s^2 é a velocidade do som das perturbações do fluido em questão definida por:

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{p'}{\rho'} . \quad (2.59)$$

Derivando a equação de estado (2.26) com relação ao tempo conforme e combi-

nando com a equação de continuidade (2.27) a seguinte relação é encontrada

$$\omega' = -3\mathcal{H}(1 + \omega)(c_s^2 - \omega), \quad (2.60)$$

de onde tira-se uma importante informação: se for considerado um único fluido, a equação de estado ω é constante e temos que $c_s^2 = \omega$ para esse fluido.

Voltando às equações do potencial gravitacional, a Eq. (2.52) pode ser combinada com as Eqs. (2.51), (2.58), (2.26) e (B.2), e encontramos finalmente uma única equação de movimento para Φ :

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2) - c_s^2\nabla^2]\Phi = 0. \quad (2.61)$$

Essa é uma das principais equações na teoria de perturbações cosmológicas, pois com ela pode-se observar o comportamento do potencial gravitacional para diversos fluidos.

Para resolver a Eq. (2.61) é necessário definir as condições iniciais do sistema. Elas são fixadas na era de domínio da radiação e para perturbações com grandes comprimentos de onda. Como dissemos acima, vamos adotar as condições iniciais de perturbações adiabáticas, onde assume-se que os modos de super-horizonte são constantes e, por definição, têm-se que [29]

$$\Phi(0) = \Phi_P, \quad \Phi'(0) = 0, \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 0. \quad (2.62)$$

Agora que definimos as condições iniciais podemos finalmente resolver a Eq. (2.61) para os casos de maior interesse do nosso trabalho. Mas antes disso vamos apresentar as equações do fluido perfeito perturbado.

2.2.2 Perturbação do fluido perfeito

Mesmo tratando de perturbações no fluido a conservação local de energia e momento (Eq. (2.24)) ainda é preservada:

$$\delta(\nabla_\mu T^\mu{}_\nu) = 0. \quad (2.63)$$

Essa relação nos leva a duas equações. A primeira para $\nu = 0$:

$$\delta\rho' - 3\Phi'(\bar{\rho} + \bar{p}) + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) + \nabla_i[(\bar{\rho} + \bar{p})v_i] = 0;$$

e a segunda para $\nu = i$:

$$[(\bar{\rho} + \bar{p})v_i]_{,0} + 4\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p})v_i + \nabla_i(\delta p) + (\bar{\rho} + \bar{p})\nabla_i\Phi = 0.$$

Usando as Eqs. (2.58) e (2.53), as duas equações acima podem ser reescritas respectivamente como

$$\delta' + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = (1 + \omega)(\nabla^2 V + 3\Phi') , \quad (2.64)$$

$$V' + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)V = \Phi + \frac{c_s^2}{1 + \omega}\delta . \quad (2.65)$$

Elas são válidas tanto para a radiação ($\omega = 1/3$),

$$\delta'_r = \frac{4}{3}\nabla^2 V_r + 4\Phi' , \quad V'_r = \frac{1}{4}\delta_r + \Phi , \quad (2.66)$$

como para a matéria ($\omega = 0$),

$$\delta'_m = \nabla^2 V_m + 3\Phi' , \quad V'_m = -\mathcal{H}V_m + \Phi . \quad (2.67)$$

2.2.3 Soluções da equação de movimento do potencial gravitacional

Vamos agora apresentar alguns resultados da equação de movimento do potencial gravitacional para os casos de maior interesse, a fim de descrever o comportamento do potencial para o domínio de cada componente do fluido do Universo. Iremos também analisar a influência dos diferentes comprimentos de onda em Φ . Para isso vamos expandir as perturbações nos modos de Fourier,

$$f(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{f}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} , \quad (2.68)$$

onde \mathbf{x} é a distância comóvel e $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda comóvel característico de um comprimento de onda λ . Dessa maneira a Eq. (2.61) se torna

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1 + 3c_s^2) + c_s^2 k^2] \Phi = 0 . \quad (2.69)$$

Essa expansão simplifica as equações, pois no espaço de Fourier o Laplaciano é transformado em número de onda, ou seja, $\nabla^2 \rightarrow -k^2$. Com isso pode-se facilmente resolver as equações para dois regimes, os de comprimentos de onda maiores que o raio de Hubble, $k \ll \mathcal{H}$, conhecidos como modos de super-horizonte, e o regime de comprimentos de onda menores que o raio de Hubble, $k \gg \mathcal{H}$, são os modos de sub-horizonte. Note que para grandes comprimentos de onda o último termo da Eq. (2.69) torna-se desprezível, de modo que resulta numa equação diferencial dependente somente do tempo.

Formulação geral da equação de movimento de Φ e o efeito da variação da equação de estado

A Eq. (2.61) não tem solução exata para uma equação de estado arbitrária. No entanto, tanto no regime de grandes como de pequenos comprimentos de onda a Eq. (2.61) pode ser resolvida analiticamente para um único fluido. Essas soluções são desejáveis para verificar a evolução de um Universo dominado por um fluido composto por matéria e radiação. Pensando nisso introduz-se a função auxiliar [20]

$$\theta \equiv \frac{1}{a} \left(\frac{\rho}{\rho + p} \right)^{1/2} = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.70)$$

e a variável auxiliar

$$u \equiv \frac{2 a^2 \theta}{3 \mathcal{H}} \Phi = (\rho + p)^{-1/2} \Phi. \quad (2.71)$$

Usando essas duas equações é possível mostrar que a Eq. (2.69) toma a forma reduzida

$$u'' - \left(\frac{\theta''}{\theta} - c_s^2 k^2 \right) u = 0. \quad (2.72)$$

Note que de maneira geral, para qualquer fluido que satisfaça $p = \omega\rho$,

$$\theta \propto \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{\theta''}{\theta} \propto \mathcal{H}^2, \quad (2.73)$$

onde usamos as equações de Friedmann. Então a Eq. (2.72) deixa claro que podemos definir os regimes de *grandes comprimentos de onda* - super-horizonte - e de *pequenos comprimentos de onda* - sub-horizonte - respectivamente como

$$c_s^2 k^2 \ll \mathcal{H}^2, \quad c_s^2 k^2 \gg \mathcal{H}^2. \quad (2.74)$$

No limite de *grandes comprimentos de onda* o último termo do parêntese pode ser omitido. Nesse limite a Eq. (2.71) fica

$$u'' - \frac{\theta''}{\theta} u = 0, \quad (2.75)$$

cuja solução é

$$u \simeq C_- \theta + C_+ \theta \int \frac{d\tau}{\theta^2}. \quad (2.76)$$

As definições de θ e u - Eqs. (2.70) e (2.71) - nos permitem agora escrever o potencial como

$$\Phi = \frac{\mathcal{H}}{a} \left(C_- + C_+ \int a^2 (1 + \omega) d\tau \right), \quad (2.77)$$

onde C_- e C_+ são duas constantes que caracterizam os modos de decaimento e crescimento, respectivamente.

Agora podemos mostrar o comportamento do potencial quando há uma mudança de equação de estado, que é o que acontece quando o universo passa de um certo período de domínio do seu conteúdo energético para outro. Vamos supor que o Universo atravessa uma era cujo fluido dominante tem uma equação de estado $\omega = \omega_1$, para outra na qual $\omega = \omega_2$. Definindo que a transição ocorrem em τ_* , a equação de estado ω_1 valerá para $\tau < \tau_*$ e ω_2 para $\tau > \tau_*$. Como vimos na Eq. (2.36), o fator de escala evolui como $a \propto \tau^{\nu_i}$ onde $\nu_i \equiv 2/(1 + 3\omega_i)$. Então, assumindo que o modo de decaimento teve tempo o suficiente para se tornar desprezível na primeira era, o potencial gravitacional antes da transição fica

$$\Phi(\tau \ll \tau_*) \sim C_+ \frac{\nu_1(1 + \omega_1)}{2\nu_1 + 1} = C_+ \frac{2(1 + \omega_1)}{5 + 3\omega_1}. \quad (2.78)$$

Da mesma maneira, o potencial Φ para a era de domínio do fluido com equação de estado ω_2 é dado por

$$\Phi(\tau \gg \tau_*) \sim C_+ \frac{2(1 + \omega_2)}{5 + 3\omega_2}, \quad (2.79)$$

e temos

$$\frac{\Phi(\tau \gg \tau_*)}{\Phi(\tau \ll \tau_*)} = \frac{1 + \omega_2}{1 + \omega_1} \frac{5 + 3\omega_1}{5 + 3\omega_2}. \quad (2.80)$$

Se admitirmos que esses dois fluidos são radiação ($\omega_1 = 1/3$) e matéria ($\omega_2 = 0$), na fase de transição, $\tau_* = \tau_{eq}$, teremos

$$\frac{\Phi(\tau \gg \tau_{eq})}{\Phi(\tau \ll \tau_{eq})} = \frac{9}{10}. \quad (2.81)$$

Isso significa que para perturbações adiabáticas com grandes comprimentos de onda a transição de domínio da radiação para matéria faz com que o potencial gravitacional decaia por um fator de 9/10 do valor inicial. Obteremos esse resultado novamente quando resolvermos numericamente a equação de movimento do potencial gravitacional para perturbações de super-horizonte em um fluido composto por matéria e radiação (Fig. 2.9) e também o usaremos como condição inicial para descrever o potencial Φ num fluido constituído de matéria e constante cosmológica (Fig. 2.10).

Matéria ultra-relativística

Agora vamos verificar o comportamento do potencial gravitacional sob a influência de perturbações de diferentes comprimentos de onda para

um universo dominado por radiação, em seguida por matéria e, por último, pelo fluido constituído pela mistura matéria-radiação. Para fazer isso, inicialmente vamos considerar um universo dominado por uma matéria relativística com equação de estado $p = \omega\rho$, onde ω é uma constante positiva. Nesse caso a Eq. (2.60) implica que $c_s^2 = \omega$. E das equação de Friedmann tira-se a relação (ver apêndice B)

$$a \propto \tau^{2/(1+3\omega)} \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{2}{1+3\omega} \tau^{-1} . \quad (2.82)$$

Usando a função auxiliar $\Phi = f x^{-\nu}$, onde definimos $x \equiv k\tau$ e $\nu \equiv 2/(1+3\omega)$, a Eq. (2.69) toma a forma

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx} + \left[\omega - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} \right] f = 0 . \quad (2.83)$$

A solução dessa equação nos dá o potencial gravitacional,

$$\Phi = x^{-\nu} [C_+ j_\nu(c_s x) + C_- n_\nu(c_s x)] , \quad (2.84)$$

onde j_ν e n_ν são as funções esféricas de Bessel e de Newman respectivamente. Como as funções esféricas de Newman no limite de pequenos argumentos tendem a infinito, $n_\nu(x \rightarrow 0) = \infty$, e visto que estamos procurando soluções finitas nesse limite, o modo de decaimento será desconsiderado, então

$$\Phi = \Phi_P x^{-\nu} j_\nu(c_s x) , \quad (2.85)$$

onde Φ_P é o valor primordial de Φ . A Eq. (2.53) nos fornece a perturbação de densidade que, para o potencial, (2.85) fica

$$\delta = -\frac{2x^2}{3\nu^2} \Phi - 2\frac{x}{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2\Phi . \quad (2.86)$$

Para as perturbações de super-horizonte, onde $x \rightarrow 0$, e usando o comportamento assintótico das funções esféricas de Bessel,

$$j_\nu(x \sim 0) = x^\nu \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1} \Gamma\left[\frac{3}{2} + \nu\right]} , \quad (2.87)$$

o potencial (2.85) se torna constante e consequentemente

$$\delta \simeq -2\Phi . \quad (2.88)$$

Ou seja, a perturbação de densidade equivale a duas vezes o potencial gravitacional para qualquer equação de estado constante positiva.

Radiação

Em um universo dominado pela radiação a equação de estado correspondente é $\omega = 1/3$. Lembre-se que para um único fluido a Eq. (2.60) fornece $c_s^2 = \omega$. Além disso, pela Eq. (2.36), para a radiação $a \propto \tau$, então $\mathcal{H} = \tau^{-1}$ e $x = k/\mathcal{H}$. Sob essas considerações a função de Bessel na Eq. (2.85) fica de ordem $\nu = 1$,

$$\Phi_r = \Phi_P x^{-1} j_1\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right), \quad (2.89)$$

enquanto que a respectiva perturbação de densidade de energia é dada por

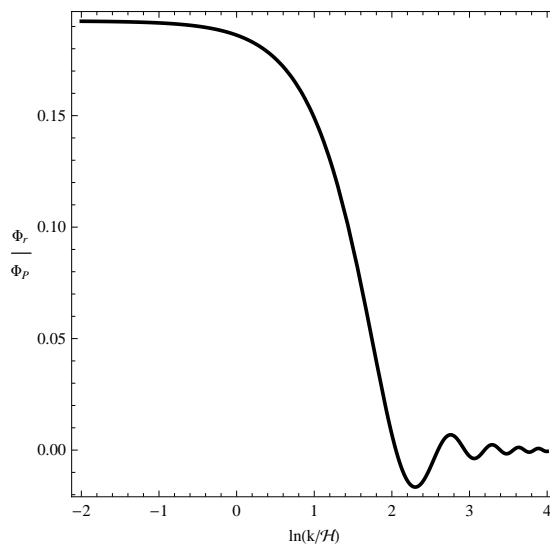


Figura 2.6 – Evolução do potencial gravitacional em um universo dominado por radiação em termos de k/\mathcal{H} . Para perturbações de comprimentos de onda pequenos, $k/\mathcal{H} \gg 1$, o potencial gravitacional é constante, e assim que as perturbações ficam da ordem do raio de Hubble o potencial gravitacional de cai e desenvolve uma oscilação amortecida.

$$\delta_r = -\frac{2x^2}{3}\Phi_r - 2x\frac{\partial\Phi_r}{\partial x} - 2\Phi_r. \quad (2.90)$$

Note que tanto Φ_r (Fig. 2.6) quanto δ_r (Fig. 2.7) são inicialmente constantes para os comprimentos de onda maiores que raio de Hubble ($k/\mathcal{H} < 1$), começando a oscilar tão logo quanto as ondas ficam menores ($k/\mathcal{H} > 1$). No entanto, note que conforme as ondas vão diminuindo ($k/\mathcal{H} \gg 1$) o potencial gravitacional desenvolve uma oscilação amortecida, enquanto que a perturbação de densidade continua oscilando com amplitude constante. Essa oscilação ilustra o fato de que é impossível formar uma estrutura gravitacional em um universo contendo apenas radiação eletromagnética.

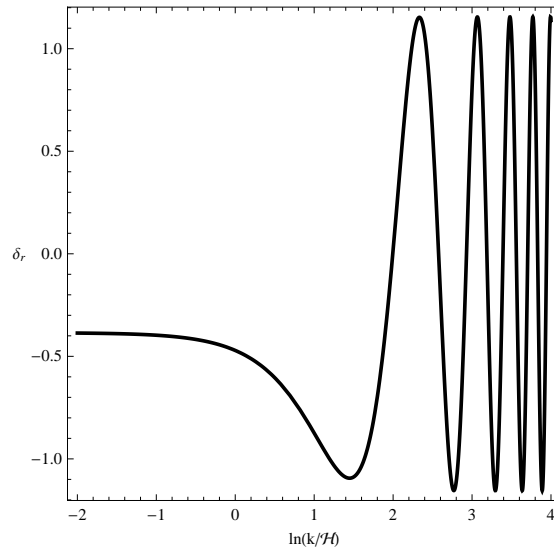


Figura 2.7 – Evolução da perturbação de densidade em um universo dominado por radiação em termos de k/H .

Matéria

Considere, agora, o caso de um universo dominado apenas por poeira ($\omega = 0$). Como foi mostrado na seção 2.1.4, o fator de escala desenvolve-se de maneira proporcional a τ^2 , o que leva a $\mathcal{H} = 2/\tau$. Sendo assim, a Eq. (2.83) é simplificada para

$$\Phi'' + \frac{6}{\tau}\Phi' = 0, \quad (2.91)$$

cuja solução nos fornece o potencial gravitacional na era da matéria,

$$\Phi_m = C_+(\mathbf{x}) + \frac{C_-(\mathbf{x})}{\tau^5}, \quad (2.92)$$

onde $C_{+,-}(\mathbf{x})$ são função arbitrárias das coordenadas espaciais comóveis. O interessante desse caso é que não foi feita nenhuma aproximação, ou seja, para um universo dominado por um fluido com equação de estado $\omega = 0$ esse resultado é válido para todas as escalas de perturbações. A Eq. (2.53) fornece agora a perturbação de densidade na fase de domínio da matéria

$$\delta_m = -\frac{1}{6} \left[(12 - \tau^2 \nabla^2) C_+ - \frac{1}{\tau^5} (18 + \tau^2 \nabla^2) C_- \right]. \quad (2.93)$$

Para analisar a influência de perturbações com números onda k na densidade aplica-se a transformada de Fourier na Eq. (2.93) ($\nabla^2 \rightarrow -k^2$). Então para perturbações com grandes comprimentos de onda δ_m pode ser aproximado para

$$\delta_m \simeq -2C_+ + 3\frac{C_-}{\tau^5}. \quad (2.94)$$

Ignorando os modos decrescentes, conclui-se que, para a matéria, a flutuação de densidade é aproximadamente duas vezes o potencial gravitacional no regime de grandes comprimentos de onda,

$$\delta_m \simeq -2\Phi_m , \quad (2.95)$$

o mesmo resultado encontrado para um fluido com equação de estado constante positiva (Eq. 2.88).

Mistura de matéria e radiação

Já vimos como as perturbações influenciam o potencial gravitacional em um universo dominado por radiação e matéria separadamente. Resta saber qual o comportamento de Φ na transição de domínio desses dois fluidos. Com vimos na seção 2.1.4 o universo jovem era dominado pela radiação. Conforme ele foi se desenvolvendo a densidade de energia da radiação foi diminuindo até que, em $a(\tau_{eq})$, a densidade de energia de matéria e radiação são iguais. Após esse período de equivalência a matéria passa a governar. Considerando esses dois fluidos define-se a variável $y = a/a_{eq}$. Com isso as equações Friedmann e as quantidades ω e c_s^2 podem ser escritas como (veja o apêndice B):

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_{eq}^2 \left(\frac{1+y}{2y^2} \right) , \quad \omega = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+y} \right) \quad \text{e} \quad c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4}y \right)^{-1} , \quad (2.96)$$

onde \mathcal{H}_{eq} é o parâmetro de Hubble conforme calculado no instante de igualdade entre matéria e radiação, $\tau = \tau_{eq}$. Com isso a equação de movimento do potencial gravitacional no espaço de Fourier - Eq. (2.69) - toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{1}{2y} \left(7 - \frac{1}{1+y} + \frac{8}{4+3y} \right) \frac{d\Phi}{dy} + \frac{1}{y(1+y)(4+3y)} \Phi \\ + \frac{8}{3(1+y)(4+3y)} \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 \Phi = 0 , \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde k_{eq} é o valor do número de onda correspondente ao modo de entrada no horizonte de Hubble no tempo de igualdade ($k_{eq}\mathcal{H}(\tau_{eq}) = 1$).

A solução numérica dessa equação está apresentada na figura 2.8 para perturbações de diferentes comprimentos de onda. Note que perturbações de pequenos comprimentos de onda, se comparados com o raio de Hubble no instante de igualdade τ_{eq} , decaem antes de chegar a era de domínio da matéria, $y = 1$. Por outro lado quanto maior for o comprimento de onda da perturbação, maior é o tempo de sua influência no potencial na era da matéria, $y > 1$. Nesse

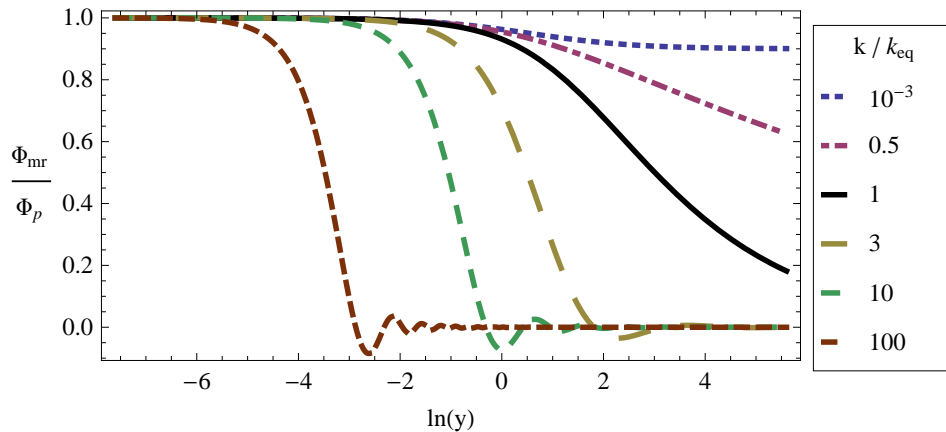


Figura 2.8 – Evolução do potencial gravitacional considerando diferentes comprimentos de onda em um universo dominado por matéria e radiação, onde, da direita para a esquerda, $k/k_{eq} = 10^{-3}, 0.5, 1, 3, 10, 100$.

regime ($k\mathcal{H} \ll 1$) a Eq. (2.2.3) tem solução exata [29],

$$\Phi_{mr} = \frac{\Phi_P}{10y^3} \left(16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right). \quad (2.98)$$

Note que no regime de domínio de matéria, $y \rightarrow \infty$, o valor de Φ_{mr} decai por um fator de $(9/10)\Phi_P$, como está explícito na Fig. 2.9 e em acordo com a solução analítica da Eq. (2.81).

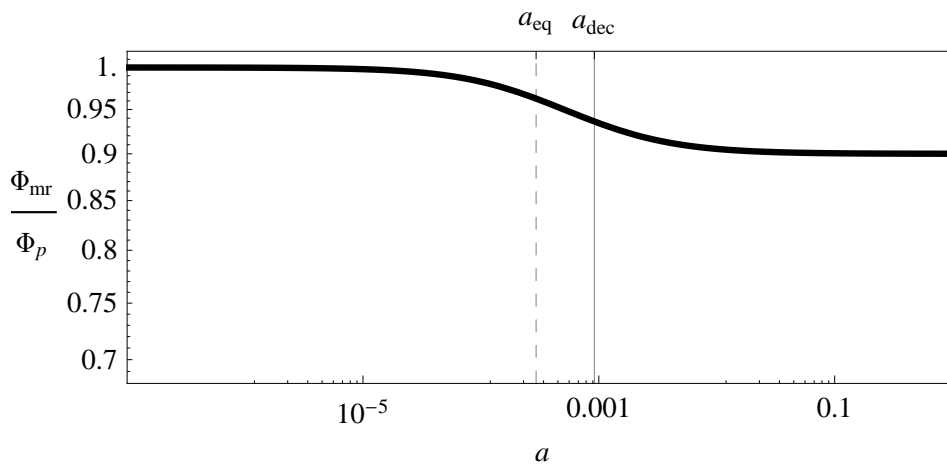


Figura 2.9 – Evolução do potencial gravitacional em um universo constituído por um fluido composto por matéria e radiação. A linha vertical tracejada marca o valor do instante de desacoplamento $a(\tau_{dec})$, enquanto a contínua marca o instante da transição matéria radiação $a(\tau_{eq})$. Foram usado os valores de melhor ajuste fornecidos pelo satélite Planck $z_{eq} = 3402$ e $z_{dec} = 1090.43$ [6].

Constante cosmológica e matéria

Como vimos no capítulo sobre o universo homogêneo e isotrópico - seção 2.1 - depois da transição matéria-radiação a matéria passa a ser predominante no universo, mas sua densidade continua a evoluir com o inverso do cubo do fator de escala (Eq. (2.33)), enquanto a constante cosmológica permanece constante. Portanto, em um certo instante $a(\tau_\Lambda)$ a constante cosmológica domina o conteúdo energético do universo - figura 2.5. Para estudar essa situação uma nova variável é definida,

$$y_\Lambda \equiv \frac{a}{a_\Lambda} = \left(\frac{\Lambda}{\kappa\rho} \right)^{1/3}, \quad (2.99)$$

onde $a_\Lambda \equiv a(\tau_\Lambda)$ é o valor do fator de escala na era de igualdade matéria-constante cosmológica. As equações de Friedmann e a equação de estado ω , em função dessa nova variável y_Λ , ficam

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_\Lambda^2 \left(\frac{1}{y_\Lambda} + y_\Lambda^2 \right), \quad \omega_\Lambda = -\frac{y_\Lambda^3}{1 + y_\Lambda^3}, \quad (2.100)$$

onde \mathcal{H}_Λ é o valor do parâmetro de Hubble calculado em a_Λ . Dadas essas quantidades a Eq. (2.69) é reescrita na forma

$$\frac{d^2\Phi}{da^2} + \frac{1}{2a} \frac{7 + 10y_\Lambda^3}{1 + y_\Lambda^3} \frac{d\Phi}{da} + \frac{3y_\Lambda^3}{a^2(1 + y_\Lambda^3)} \Phi = 0. \quad (2.101)$$

A solução numérica dessa equação está representada na figura 2.10. Note que para esse tipo de fluido a velocidade do som c_s é nula (ver apêndice B), então o termo $c_s^2 k^2$ da equação de movimento (2.69) não existe nesse caso. Por isso o potencial gravitacional terá o mesmo comportamento independente do comprimento de onda das perturbações.

Como já dissemos, a Eq. (2.98) mostra, no limite $y \rightarrow \infty$, que o potencial decai por um fator de 9/10, assim como demonstrado pela Eq. (2.81). Consequentemente, a condição inicial para a solução da Eq. (2.101) deve ser

$$\Phi_{m\Lambda}(0) = \frac{9}{10}, \quad \Phi'_{M\Lambda}(0) = 0. \quad (2.102)$$

Agora é interessante comparar estes resultados com a solução numérica da equação de movimento do potencial gravitacional considerando um universo dominado pela mistura de matéria, radiação e constante cosmológica. Para isso plotamos a solução numérica da Eq. (2.69) para grandes comprimentos de onda considerando esse três fluidos junto com os gráficos da solução do potencial para os fluidos matéria-radiação e matéria-constante cosmológica na figura 2.11.

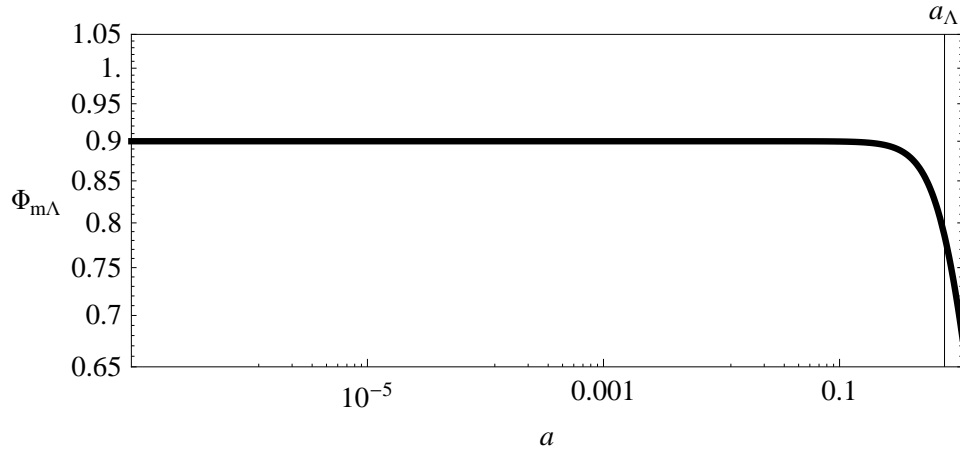


Figura 2.10 – Evolução do potencial gravitacional em um universo constituído por um fluido composto por matéria e constante cosmológica. A linha vertical marca o valor do instante de igualdade $a(\tau_\Lambda)$.

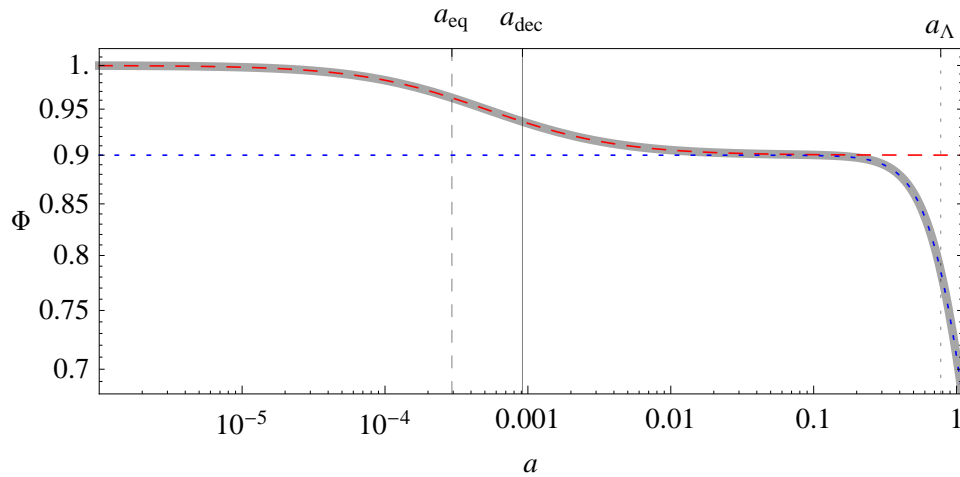


Figura 2.11 – Evolução do potencial gravitacional em um universo previsto pelo modelo Λ CDM. A curva sólida é solução numérica da Eq. (2.69), a tracejada é a solução analítica para matéria e radiação (Φ_{mr}), e a pontilhada é solução para Λ e matéria ($\Phi_{m\Lambda}$) somente. As linhas verticais tracejada, contínua e pontilhada correspondem respectivamente a $a(\tau_{eq})$, $a(\tau_{dec})$ e $a(\tau_\Lambda)$. Usamos os valores de melhor ajuste fornecidos pelo satélite Planck $\Omega_m = 0.3175$, $z_{eq} = 3402$ e $z_{dec} = 1090.43$ [6].

Em resumo, as soluções assintóticas da Eq. (2.69) para grandes escalas foram encontradas para o caso de um Universo dominado por matéria e radiação, Eq. (2.98), e para o caso do domínio de matéria e constante cosmológica, Eq. (2.101), verificando assim o comportamento do potencial na transição de domínio desses fluidos. Isso foi feito separadamente porque a equação de evolução do potencial não tem solução exata, no entanto o resultado obtido concorda com a solução numérica⁹, considerando os três tipos de fluidos, da Eq. (2.69) para grandes escalas (figura 2.11).

2.3 Inflação

Discutimos no começo desse capítulo (seção 2.1) a evolução de um universo homogêneo e isotrópico. Observações da distribuição de matéria em escalas maiores que algumas centenas de megaparsecs são compatíveis com essa aproximação [15]. Além disso, medidas do espectro de temperatura da radiação cósmica de fundo [30] indicam que nosso Universo, quando jovem, apresentava um alto grau de isotropia. Vimos, também que Universo evolui de acordo com a lei de Hubble (2.2) e que isso implica que o Universo teve um início quente e denso. Em vista dessas propriedades, é natural se perguntar quais são as condições iniciais que levaria o Universo a ter essas características que observamos hoje.

Para responder a essa questão é necessário investigar sobre a evolução do Universo primordial. Nesse contexto surgem os modelos de universo inflacionário. Esses modelos postulam que antes da era da radiação houve um período de expansão acelerada do Universo onde o fator de escala cresce quase exponencialmente.

Os primeiros modelos inflacionários foram propostos independentemente no final da década de 1970. Nesse período vários autores propuseram modelos inflacionários do universo [8, 13, 31–33]. Esses modelos tinham como objetivo solucionar problemas de condições iniciais no Modelo do Big Bang, tais como o problema da planura (por que nosso universo é espacialmente plano?) e o problema do horizonte (por que regiões causalmente desconexas do universo parecem ter as mesmas condições iniciais?). Em 1981, V. Mukhanov e G. Chibisov mostraram que a teoria quântica das perturbações do universo primordial pode explicar a origem microscópica das grandes estruturas do universo [14]. Tal ideia foi logo desenvolvida em uma gama de detalhes que evidenciaram a importância

⁹Para resolver as equações diferenciais numericamente usamos o software Mathematica 7, o qual escolhe dentre os métodos de sua biblioteca o mais adequado para resolver a equação que lhe é implementada. No caso da Eq. (2.69) o Mathematica empregou o método de Newton para resolvê-la. Como os métodos numéricos podem apresentar erros, nós comparamos as soluções numéricas com as soluções analíticas encontrada para alguns limites da Eq. (2.69).

do período inflacionário para a origem de estruturas de grandes escalas [34–36].

Embora plausível, a ideia de inflação continua a ser uma especulação e seus detalhes ainda são desconhecidos. Por outro lado além aliviar os problemas do Big Bang ela prediz algumas das propriedades estatísticas das flutuações de temperatura da RCF e das estruturas de grandes escalas, previsões essas que foram confirmadas observacionalmente pelos satélites COBE, WMAP e Planck. Uma dessas propriedades é o índice escalar espectral, que mede a dependência da amplitude das perturbações com a escala espacial. Nesse capítulo vamos deduzir essa propriedade qualitativamente, mas no capítulo 5 ficará explícito a importância dessa quantidade no nosso trabalho.

2.3.1 O Inflaton

A maneira mais simples de se implementar a inflação é através de um campo escalar real ψ , conhecido como *Inflaton*, que evolui sob a ação de uma função potencial $V(\psi)$. Nos modelos mais simples a ação do campo é dada por

$$S[\psi] = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \psi \partial_\mu \psi + V(\psi) \right]. \quad (2.103)$$

Variando a ação com relação à métrica inversa ($g^{\mu\nu}$) encontra-se o tensor de energia-momento do campo

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \psi \partial_\nu \psi - \left[\frac{1}{2} \partial^\lambda \psi \partial_\lambda \psi + V(\psi) \right] \delta^\mu{}_\nu. \quad (2.104)$$

Numa primeira aproximação supomos que o Inflaton é um campo homogêneo ($\psi = \psi(t)$) e que atua efetivamente como um fluido perfeito. Então, comparando o tensor (2.104) com o tensor de energia momento para um fluido perfeito definido na Eq. (2.20), a densidade de energia e pressão do Inflaton são dadas respectivamente por

$$\rho_\psi = \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + V(\psi), \quad p_\psi = \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - V(\psi). \quad (2.105)$$

Regime de rolagem lenta

Tratando-se o Inflaton como um fluido perfeito, sua densidade de energia e pressão obedecem as equações de Friedmann:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\psi}^2 + V(\psi) \right), \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{3} \left(\dot{\psi}^2 - V(\psi) \right). \quad (2.106)$$

Vamos trabalhar brevemente com as equações de Friedmann no tempo físico, pois os efeitos físicos da inflação ficam mais transparentes em termos desta variável. Então a Eq. (2.106) fornece

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_\psi + 3p_\psi) = H^2(1 - \varepsilon), \quad (2.107)$$

onde o *parâmetro de rolagem lenta* ε é definido como

$$\varepsilon \equiv \frac{3}{2}(\omega_\psi + 1) = \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\psi}^2}{H^2}, \quad (2.108)$$

e pode ser relacionado com a evolução do parâmetro de Hubble:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.109)$$

Um período de expansão acelerada só irá ocorrer se $\varepsilon < 1$. Assumindo o caso limite em que nosso Universo se aproxima ao universo de de Sitter, ou seja, $H \approx \text{cte.}$, obtemos, da Eq. (2.109) que $\varepsilon \approx 0$. Então a Eq. (2.108) nesse caso nos fornece que $\omega_\psi = p_\psi/\rho_\psi \approx -1$. Nessa situação a energia potencial domina sobre a energia cinética e temos a relação que define o regime de rolagem lenta do campo ψ :

$$\dot{\psi}^2 \ll V(\psi). \quad (2.110)$$

Entretanto a inflação só será sustentada por um período de tempo suficientemente grande se a segunda deriva de ψ for pequena o suficiente [37],

$$\ddot{\psi} \ll 3H\dot{\psi}. \quad (2.111)$$

Isso exige um segundo parâmetro de rolagem lenta:

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\psi}}{H\dot{\psi}}. \quad (2.112)$$

Na prática, os modelos de campos escalares possuem soluções atratoras que garantem que $\varepsilon, \eta \ll 1$ durante boa parte da evolução do campo [27].

Uma quantidade importante no contexto da inflação é o *número de e-folds*¹⁰ definido por

$$N \equiv \ln \left(\frac{a_f}{a_i} \right), \quad (2.113)$$

onde a_i e a_f são os respectivos valores do fator de escala no começo e no final do

¹⁰O número de e-folds recebe esse nome por ser expresso em unidades da exponencial de base “e”.

período inflacionário. O número de e-folds fornece uma estimativa da duração do período inflacionário. Dentro do modelo padrão, a condição necessária (mas não suficiente) para a solução dos problemas do Big Bang é que $N \gtrsim 60$ [29].

2.3.2 Campo teste no espaço de de Sitter

Apesar de suas motivações originais, um dos maiores sucessos da inflação está em promover uma maneira de relacionar a origem das estruturas de largas escalas no Universo às flutuações quânticas do inflaton que são amplificadas durante a inflação. Para se ter uma ideia desse ponto central da cosmologia primordial vamos considerar um campo teste no espaço-tempo de de Sitter e, por meio de uma análise qualitativa, apresentaremos o resultado que condiz com o Universo que observamos.

O comprimento das ondas das perturbações no espaço de de Sitter crescem exponencialmente. Quando elas se tornam maiores que o raio de Hubble, $(aH)^{-1}$, a amplitude dessas flutuações são “congeladas” como se elas não oscilassem mais, e isso rapidamente converge para uma solução de amplitude constante. Para ver como isso acontece, vamos considerar um campo escalar canônico e de massa m :

$$V(\psi) = \frac{m^2\psi^2}{2}, \quad (2.114)$$

evoluindo sobre um espaço-tempo descrito pela métrica

$$g_{\mu\nu} = a^2(\tau)(-1, \delta_{ij}), \quad a(\tau) = -(H\tau)^{-1}, \quad (2.115)$$

onde $H = \text{constante}$ e $\tau \in (-\infty, 0)$. Nesse caso estamos implicitamente assumindo que a massa do campo é suficientemente pequena a ponto de não contribuir para a dinâmica do fator de escala. Para simplificar o tratamento das equações do campo ψ introduz-se uma função auxiliar

$$v \equiv a\psi. \quad (2.116)$$

Dessa maneira a ação (2.103) pode ser reescrita em termos de v como

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[(v')^2 - (\partial_i v)^2 - \left(m^2 a^2 - \frac{a''}{a} \right) v^2 \right]. \quad (2.117)$$

Variando a ação (2.117) com respeito a v obtêm-se a seguinte equação de movimento,

$$v'' - \nabla^2 v - m_{ef}^2 v = 0, \quad m_{ef}^2 \equiv \frac{a''}{a} - m^2 a^2. \quad (2.118)$$

Aplicando a transformada de Fourier encontra-se a equação de um oscilador

harmônico dependente do tempo,

$$v_k'' + f^2(\tau)v_k = 0, \quad f^2(\tau) = k^2 - m_{ef}^2. \quad (2.119)$$

Para um espaço-tempo de de Sitter a massa efetiva se reduz a

$$m_{ef}^2 = \frac{2 - m^2/H^2}{\tau^2} \propto \mathcal{H}^2.$$

Nesse caso a solução da equação acima é dada por funções de Hankel [29]. Porém, os detalhes qualitativos da dinâmica inflacionária pode ser compreendido através dos limites assintóticos, como veremos agora.

Tratamento clássico

No limite de pequenos comprimentos de onda, dado por $k^2 \gg m_{ef}^2$, a equação de movimento (2.119) se reduz a

$$v_k'' + k^2 v_k = 0, \quad (2.120)$$

que tem como solução ondas planas,

$$v_k = C_+ e^{ik\tau} + C_- e^{-ik\tau}, \quad (2.121)$$

onde $C_{+,-}$ representam duas constantes de integração. Essa solução ilustra o fato de que, localmente, o espaço-tempo é plano, e, portanto, os campos se comportam como uma coleção de infinitos osciladores harmônicos, como é de se esperar.

Para grandes comprimentos de onda, onde $k^2 \ll m_{ef}^2$, a Eq. (2.119) passa a ser escrita como

$$v_k'' - \frac{2\beta}{\tau^2} v_k = 0, \quad \beta \equiv 1 - \frac{m^2}{2H^2}. \quad (2.122)$$

Assumindo que $m \ll H$, a solução da equação acima será dada por

$$v_k = C_+ a + C_- a^{-2}, \quad (2.123)$$

Ignorando o modo decrescente desta solução ($C_- = 0$), temos que $v_k \propto a$. Pela definição (2.116) temos que:

$$\psi_k = \frac{a}{v_k} \rightarrow \text{cte.} \quad (2.124)$$

Ou seja, em grandes escalas os modos ψ_k permanecem constantes. Esses dois

resultados - Eqs. (2.124) e (2.121) - sugerem que existe uma região comóvel, definida por $k \simeq m_{ef}$, que distingue a física dos modos ψ_k que estão dentro ($k/m_{ef} \gg 1$) dos modos que estão fora ($k/m_{ef} \ll 1$) da mesma.

Para efeito de ilustração vamos supor que a massa do campo é nula. Nesse caso a região física seria dada por $ak = 2a/|\tau| = 2H$. Podemos fazer uma analogia com o raio de Hubble (Eq. (2.18)). Essa região seria, por assim dizer, o “diâmetro de Hubble”. Sendo assim, flutuações que habitam essa região obedeceriam à equação de onda plana (2.121). Como o comprimento de onda físico cresce proporcionalmente com o fator de escala ele irá ultrapassar o tamanho do horizonte eventualmente. Uma vez fora do horizonte, as perturbações se comportarão segundo a Eq. (2.124). Ou seja, nessa região as ondas se “congelam” e permanecem constantes [38]. Isso é o que basicamente acontece no período inflacionário. Entretanto para explicar a origem das perturbações cosmológicas a quantização do campo ψ é necessária.

Quantizando o campo ψ

Para quantizar um campo escalar em um espaço-tempo em expansão promove-se o mesmo à condição de operador

$$v \rightarrow \hat{v} = \int \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^{3/2}} \left[v_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (2.125)$$

onde os operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação que satisfazem as propriedades de comutação

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad , \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] \quad . \quad (2.126)$$

As funções v_k estarão normalizadas se e somente se

$$\langle v_k, v_k \rangle \equiv \frac{i}{\hbar} (v_k^* v_k' - (v_k')^* v_k) = 1 \quad . \quad (2.127)$$

Essa equação fornece as condições de contorno para solução da Eq. (2.119). A segunda condição de contorno que fixa v_k completamente vem da *escolha do vácuo*. Então, escolhemos o estado de vácuo para as flutuações,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \quad . \quad (2.128)$$

A escolha padrão é o vácuo de Minkowski de um observador em um passado distante:

$$\tau \rightarrow -\infty, \quad \text{ou} \quad |k\tau| \gg 1, \quad \text{ou} \quad k \gg aH, \quad (2.129)$$

onde todas as escalas de interesse estavam dentro do horizonte de Hubble. Nesse limite vimos que a Eq. (2.119) se torna uma equação do oscilador harmônico simples com uma frequência independente do tempo, cujas soluções são ondas planas, $v_k \propto e^{\pm ik\tau}$ – Eq. (2.121).

Dado que para um passado suficientemente distante todos os modos têm frequências independentes do tempo, pode-se evitar a ambiguidade em definir a condição de vácuo inicial para as flutuações de modo que aparecem no tratamento do caso mais geral, com o espaço-tempo dependente do tempo [39]. Na prática, isso significa resolver a Eq. (2.119) com a condição inicial

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (2.130)$$

Isso define uma preferência no conjunto de funções v_k e um vácuo físico, conhecido como *vácuo de Bunch-Davies*. Devido a essa condição inicial a Eq. (2.119) para um universo de de Sitter,

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) v_k = 0, \quad (2.131)$$

tem a seguinte solução exata,

$$v_k(\tau) = \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right). \quad (2.132)$$

Essa expressão determina a evolução das funções v_k , inclusive a dinâmica de super-horizonte, onde

$$\lim_{k\tau \rightarrow 0} v_k(\tau) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{k^{3/2}\tau}. \quad (2.133)$$

O Espectro de potências

Agora que conhecemos as soluções clássicas para campos canonicamente normalizados no espaço de de Sitter, pode-se calcular a função de correlação de dois pontos, ou função de Green, que no espaço real é dada por

$$\langle \hat{v}(\tau, \mathbf{x}) \hat{v}(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \rangle \equiv \langle 0 | \hat{v}(\tau, \mathbf{x}) \hat{v}(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) | 0 \rangle. \quad (2.134)$$

Entretanto, é mais conveniente tratar a definição acima no espaço de Fourier. Então usando a Eq. (2.125) na Eq. (2.134)

$$\begin{aligned} \langle \widehat{v}(\tau, \mathbf{x}) \widehat{v}(\tilde{\tau}, \tilde{\mathbf{x}}) \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} G(k, \tau, \tilde{\tau}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})}, \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} G(k, \tau, \tilde{\tau}) \frac{\text{sen}kr}{kr}, \end{aligned} \quad (2.135)$$

onde a isotropia do espaço-tempo de fundo foi usada para integrar sobre os ângulos. Na equação acima a função

$$G(k, \tau, \tilde{\tau}) = v_k(\tau) v_k^*(\tilde{\tau}), \quad (2.136)$$

é a função de Green no espaço de Fourier. O espectro de potências das perturbações é definido em termos da função de Green calculada nos instantes em que correspondem o cruzamento dos modos k no horizonte de Hubble

$$\frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_v(k) \equiv \lim_{\tau \rightarrow \tau^*} G(k, \tau, \tilde{\tau}) = |v_k(\tau)|^2|_{\tau^*}, \quad (2.137)$$

onde τ^* é o instante em que os modos k cruzam o horizonte definido por $k = m_{\text{ef}}$. Com isso, para o campo original Eq. (2.116) temos que

$$\mathcal{P}_\psi = \frac{k^3}{2\pi^2} |\psi_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{a^2}. \quad (2.138)$$

Usando a Eq. (2.133) encontra-se finalmente o espectro de potências invariante de escalas:

$$\mathcal{P}_\psi(k) = \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2. \quad (2.139)$$

2.3.3 Considerações para um modelo mais realista

O que fizemos até agora foi inserir um campo escalar no espaço de de Sitter considerando que sua massa é muito pequena para alterar a métrica do espaço-tempo. Logicamente esse modelo é válido somente em primeira aproximação. Um método mais rigoroso deve levar em conta perturbações causadas por um campo escalar massivo. Tais perturbações alteram os dois lados das equações de Einstein e é necessário, nesse caso, fazer teoria de perturbações lineares para a inflação [27]. Além disso, o Universo no período inflacionário não evolui exponencialmente como o universo de de Sitter, mas sim quase-exponencialmente, de modo que o raio de Hubble adquire uma pequena dependência temporal. De fato, supondo que o regime de rolagem lenta é alcançado, de modo que $\varepsilon \approx$ constante,

a integração da equação (2.109) fornece imediatamente

$$H^{-1} \approx H_0^{-1} + \varepsilon t, \quad (2.140)$$

onde H_0^{-1} representa o raio (constante) de Hubble no caso exato de de Sitter. Uma vez que o raio de Hubble varia lentamente com o tempo (pois $\varepsilon \ll 1$), ondas que “saem” do horizonte em instantes diferentes encontrarão um horizonte ligeiramente maior (veja a Fig. 2.12). Por conta dessa pequena variação espacial, as amplitudes das perturbações terão uma ligeira dependência com a escala, o que, conseqüentemente, se traduz num espectro de potências ligeiramente dependente da escala.

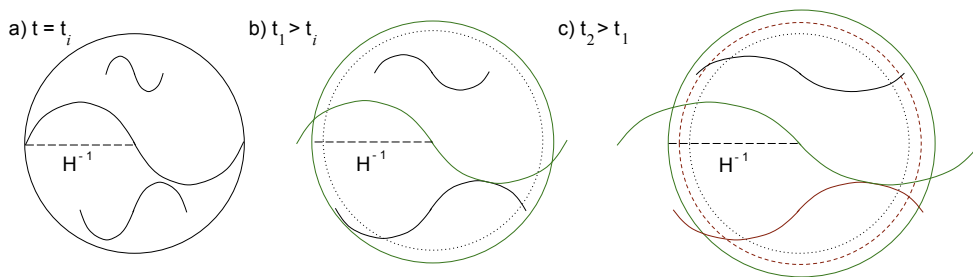


Figura 2.12 – Período inflacionário do Universo. O fator de escala evolui quase exponencialmente com o tempo de forma que o raio de Hubble tem uma pequena dependência temporal. Enquanto isso o comprimento de onda físico, que evolui proporcionalmente com o fator de escala, eventualmente ultrapassa o tamanho do raio de Hubble. Em a), no começo da inflação $t = t_i$, as ondas estão dentro do horizonte, e conforme o tempo evolui, em b) e c) as ondas se tornam maiores que o horizonte com diferentes escalas de comprimento. Esse processo gera uma pequena dependência de escala no espectro de potências da RCF, parametrizada pelo índice escalar espectral n_s .

De maneira bastante geral, essa característica do espectro de potências pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$\mathcal{P}(k) \equiv Ak^{n_s-1}, \quad (2.141)$$

onde A é a amplitude do espectro e n_s é o chamado *índice espectral escalar*, que especifica a dependência das perturbações com a escala. Para o universo de de Sitter o espectro de potências é invariante de escala, de modo que devemos ter $n_s = 1$, com amplitude $A = (H/2\pi)^2$. Assim, é razoável supor que em um cenário mais realista o índice escalar espectral deve ser muito próximo da unidade, sendo a diferença devida ao caráter quase-exponencial da inflação e caracterizada, portanto, pelos parâmetros de rolagem lenta (2.109) e (2.112). De fato, cálculos realistas nos levam a [29]

$$n_s = 1 - 4\varepsilon + 2\eta \lesssim 1, \quad (2.142)$$

pois, por hipótese, ε e η são parâmetros pequenos. Observacionalmente, o valor de n_s que melhor ajusta os dados fornecidos pelo satélite Planck é [6]

$$n_s = 0.9616 \pm 0.0094. \quad (2.143)$$

Esse resultado é tido como um dos principais triunfos do paradigma inflacionário.

No Cap. 5 iremos explicitar a influência de n_s na RCF usando a função de correlação de dois pontos e usaremos o valor acima para estimar a escala da homogeneidade do Universo observável via efeito Grishchuk-Zel'dovich (GZ). Antes disso precisamos descrever a física da RCF e entender como ela pode ser usada para se extrair informação de seu espectro de potências.

Capítulo 3

A Radiação Cósmica de Fundo

Em 1965 Penzias e Wilson detectaram acidentalmente uma radiação em seus radiotelescópios que parecia não ter origem em nenhuma galáxia ou aglomerados [1]. Seja qual fosse a direção em que o radiotelescópio fosse apontado a mesma radiação na faixa das micro-ondas com temperatura próxima a 3 K era detectada. O que se concluiu, baseado nos resultados de vários trabalhos desenvolvidos no final dos anos de 1940 por diversos autores como H. Bethe, G Gamow, R. A. Alpher, R. C. Herman [40, 41] é que essa radiação é uma “fotografia” do passado denso, e conseqüentemente quente, do nosso Universo.

Observações minuciosas mostraram que essa radiação apresenta pequenas flutuações de temperatura que correspondem a regiões com densidades ligeiramente diferentes. No contexto do modelo padrão, essas flutuações deram origem à estruturas de grandes escalas observadas hoje no Universo [28], como galáxias e seus aglomerados, e essa radiação ficou conhecida como Radiação Cósmica de Fundo (RCF).

Como dissemos brevemente na Seç. 2.1.1 a RCF tem origem na superfície de último espalhamento ($z \simeq 1000$) e conseqüentemente fornece informações sobre nosso Universo primordial nos permitindo, com isso, estimar alguns parâmetros do mesmo. Dessa maneira ela é a principal ferramenta da cosmologia moderna e em vista disso telescópios cada vez mais precisos são desenvolvidos para detectá-la.

O telescópio mais recente é o Planck e foi lançado no espaço pela Agência Espacial Europeia (ESA - European Spatial Agency) em maio de 2009. Em março de 2013 ele disponibilizou o mapa mais detalhado da radiação cósmica fundo feito até hoje (Fig. 2.1).

Visto que nosso trabalho pretende investigar o impacto na RCF de perturbações de comprimentos de ondas maiores ou iguais ao raio de Hubble na fase do desacoplamento, apresentaremos a seguir uma revisão da RCF apenas em grandes escalas angulares. Na referência [42] se encontra um tratamento mais geral da física da radiação de fundo em pequenas escalas.

3.1 Fórmula de Sachs-Wolfe

Um método direto de estudar a física da RCF é calculando o redshift total (entre o instante do desacoplamento e hoje) de um fóton se propagando em um espaço-tempo cosmológico perturbado da forma (2.43). Os principais mecanismos físicos que causam essas anisotropias estão ilustrados na Fig. 3.1. Em primeiro lugar, devemos considerar que no momento do desacoplamento, o plasma fóton-bárion que compõe a RCF possui uma velocidade intrínseca \mathbf{v} em relação ao observador. Essa velocidade peculiar irá causar um desvio na frequência do fóton emitido e, por conseguinte, uma flutuação na temperatura da RCF. Esse fenômeno é chamado de efeito Doppler. Paralelamente a este efeito existem flutuações no potencial gravitacional na superfície de último espalhamento que podem contribuir para aumentar ou diminuir a temperatura da RCF. Tal fenômeno é conhecido como efeito Sachs-Wolfe (SW) e é o que mais contribui para as anisotropias da RCF. Em seguida o fóton viaja pelo espaço-tempo até ser detectado pelos nossos telescópios. Possíveis variações do potencial gravitacional que aconteça no decorrer dessa viagem são consideradas pelo efeito Sachs-Wolfe Integrado (SWI). A fórmula de Sachs-Wolfe considera todos esses fenômenos, relacionando a frequência (e, portanto, a temperatura de corpo negro) do fóton observado com a sua frequência no instante do seu desacoplamento com a matéria [24] (veja também o Ap. C):

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \left[\frac{1}{4}\delta_r + \Phi \right] (\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + 2 \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{\partial \Phi(\tau, \mathbf{x}(\tau))}{\partial \tau} d\tau + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\tau_{dec}}^{\tau_0}, \quad (3.1)$$

onde

$$\mathbf{x}(\tau) \equiv (\tau_0 - \tau)\mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_{dec} \equiv \mathbf{x}(\tau_{dec}) \quad (3.2)$$

e onde $\left[\frac{1}{4}\delta_r + \Phi \right] (\tau_0, \mathbf{x}_0)$ foi desconsiderado, já que se trata de um termo constante que produzirá apenas um monopolo nas flutuações de temperatura.

De maneira mais compacta a Eq. (3.1) pode ser escrita como

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \Delta T_{SW} + \Delta T_{ISW} + \Delta T_D, \quad (3.3)$$

onde o primeiro termo da equação é o efeito Sachs-Wolfe (SW), o segundo é o efeito Sachs-Wolfe Integrado (SWI) e o terceiro é a contribuição do efeito Doppler (Fig. 3.1). O método de tratamento da Eq. (3.1) que descreveremos adiante implica em escrever essa fórmula em função do potencial Φ . Por isso vamos mostrar rapidamente como isso é feito para cada termo antes de entrar nos detalhes das anisotropias da RCF na Sec. 3.2.

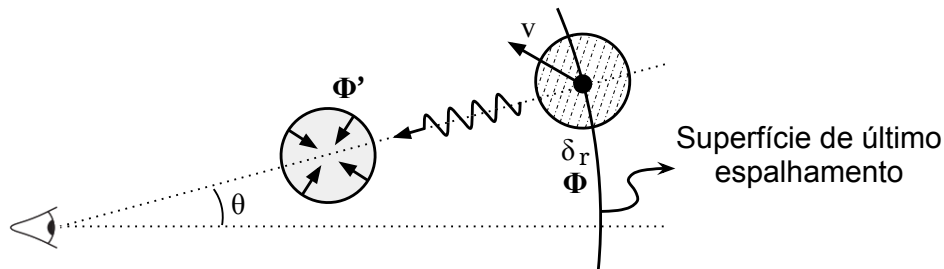


Figura 3.1 – Esquemática dos efeitos envolvidos na fórmula de Sachs-Wolfe. Por causa da variação de densidade do plasma primordial existe flutuações do potencial gravitacional na superfície de último espalhamento caracterizando o efeito Sachs-Wolfe. O fóton desacoplado da matéria nessa superfície viaja pelo espaço tempo sendo, possivelmente, perturbado durante seu percurso até o observador - efeito Sachs-Wolfe Integrado. Além disso o efeito Doppler surge por causa da diferença de velocidade entre o plasma da superfície de último espalhamento e o observador.

3.1.1 O Efeito Sachs-Wolfe

O efeito SW é calculado no instante de desacoplamento e constitui-se de dois termos. O primeiro termo é o contraste de densidade da radiação δ_r no instante do desacoplamento. Esse termo pode ser expresso em função do potencial gravitacional com o auxílio da Eq. (2.66). Como estamos tratando de grandes comprimentos de onda ($k \approx 0$) temos que

$$\delta_r - 4\Phi = \text{cte} . \quad (3.4)$$

A constante de integração pode ser obtida considerando a condição inicial adiabática $\delta_r(0, \mathbf{x}) = -2\Phi(0, \mathbf{x})$ - Seq. 2.2.3 - e com isso o termo SW se torna

$$\Delta T_{SW}(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) = \Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \mathcal{N} , \quad (3.5)$$

onde $\mathcal{N} = 2 - 3\phi(0)/2\phi(\tau_{dec})$ é uma constante que pode ser avaliada numericamente. Supondo que a radiação cósmica de fundo foi formada na era de domínio de matéria essa fórmula se altera. Como vimos, a transição do período de domínio da radiação para a matéria faz com que o potencial decaia de um fator de 9/10 do valor inicial (veja a Seq. 2.2.3 e a Fig. 2.9). Nesse caso o termo SW se torna

$$\Delta T_{SW}(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) = \frac{1}{3}\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) . \quad (3.6)$$

No entanto, a fórmula (3.5) é mais geral, e por isso será mantida ao longo do restante deste trabalho.

3.1.2 O Efeito Sachs-Wolfe Integrado

O efeito SWI leva em conta a possibilidade de que uma variação na frequência da radiação possa ser causada pela variação temporal do potencial gravitacional após a formação da RCF. Usando o fato de que

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi , \quad (3.7)$$

o termo SWI pode ser reescrito como

$$\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) = -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + 2 \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi d\tau . \quad (3.8)$$

Note, em particular, que em um universo dominado exclusivamente por matéria (universo de Einstein-de Sitter) a contribuição do efeito SWI é nula, pois o potencial gravitacional permanece constante, como mostra a Eq. (2.92).

3.1.3 O Efeito Doppler

O efeito Doppler é consequência do fato de que o observador não está com a mesma velocidade do plasma primordial no momento da formação da RCF. Para escrevê-lo em função Φ é necessário usar uma expressão que relacione a velocidade do fluido e o potencial gravitacional. Essa equação é a componente do tipo tempo-espaço ($\delta G^0_i = \kappa\delta T^0_i$) da equação de Einstein,

$$\begin{aligned} \Phi' + \mathcal{H}\Phi &= \frac{\kappa}{2}a^2(\bar{\rho} + \bar{p})V , \\ &= \frac{3(H_0a)^2\rho}{2\rho_c} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+y} \right) \right] V , \\ &= \frac{H_0^2\Omega_0^m}{2a} \frac{4+3y}{y} V , \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde foram usadas as Eqs. (2.32), (B.5) e (B.7). Resolvendo para velocidade, onde $\mathbf{v} = -\nabla V$, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{2a^2H}{H_0^2\Omega_0^m} \frac{y}{4+3y} \nabla \left(\Phi + \frac{1}{aH}\Phi' \right) , \\ \mathbf{v} &= x_{dec}\mathcal{V}(\tau)\nabla\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde definimos

$$\mathcal{V}(\tau) \equiv -\frac{2a^2H}{x_{dec}H_0^2\Omega_0^m} \frac{y}{4+3y} \left(\frac{\phi(a)}{\phi(\tau_{dec})} + a \frac{d}{da} \frac{\phi(a)}{\phi(\tau_{dec})} \right) . \quad (3.11)$$

Agora o termo Doppler pode ser reescrito como

$$\Delta T_D(\tau_0, \mathbf{n}) = x_{dec} \mathcal{V}(\tau) \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}) \Big|_{\tau_{dec}}^{\tau_0} . \quad (3.12)$$

Finalmente a equação da perturbação da temperatura - Eq. (3.1) - pode ser expressada em termos do potencial gravitacional somente, isso se mostrará útil nos capítulos seguintes quando analisaremos a influência das perturbações do potencial gravitacional na temperatura da RCF.

3.2 Estatística da RCF

Uma vez que, de acordo com a inflação, as perturbações cosmológicas se comportam como variáveis aleatórias gaussianas, as propriedades estatísticas das flutuações de temperatura podem ser completamente caracterizadas pela função de correlação de dois pontos definida como [18]:

$$C(\theta) \equiv \langle \Delta T(\tau_0, \mathbf{n}_1) \Delta T(\tau_0, \mathbf{n}_2) \rangle . \quad (3.13)$$

Em um universo isotrópico esta equação deve depender apenas do ângulo θ entre as duas direções de observação, \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 ; onde $\cos \theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ (Fig. 3.2). Por essa razão, a Eq. (3.13) pode ser expandida em polinômios de Legendre

$$C(\theta) = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) , \quad (3.14)$$

que define o espectro de potência angular C_{ℓ} (Fig. 3.3).

Na prática, porém, temos acesso a um mapa bidimensional de temperatura. Por isso é conveniente relacionar os C_{ℓ} s com os coeficientes multipolares das flutuações de temperatura. Para isso, expandimos as flutuações de temperatura $\Delta T(\tau_0, \mathbf{n})$ em harmônicos esféricos

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(\tau_0) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) , \quad (3.15)$$

com

$$a_{\ell m}(\tau_0) = \int d^2 \mathbf{n} \Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}) , \quad (3.16)$$

onde $a_{\ell m}^* = (-1)^m a_{\ell, -m}$, pois ΔT é real. Usando a decomposição (3.15) juntamente com a identidade [43]:

$$\sum_m Y_{\ell m}(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_2) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_{\ell}(\cos \theta) , \quad (3.17)$$

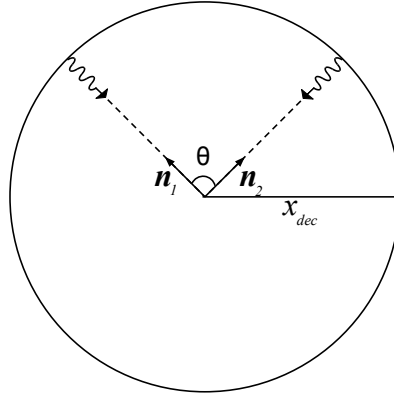


Figura 3.2 – Desenho esquemático de dois fótons emitidos no instante de desacoplamento a uma distância comóvel x_{dec} do observador medidos com uma separação angular de θ .

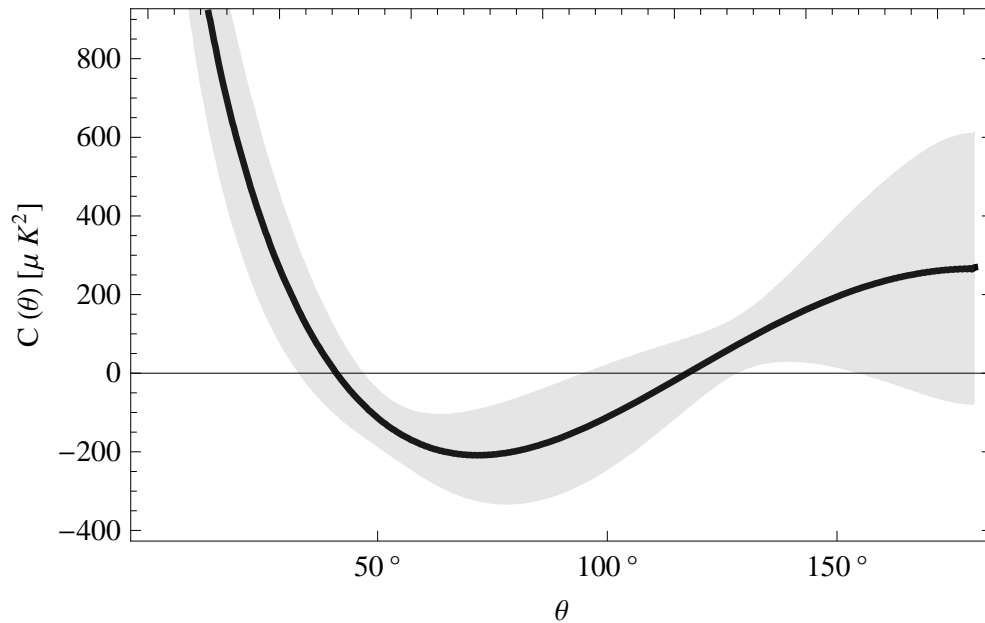


Figura 3.3 – Função de correlação de dois pontos no modelo Λ CDM. Para plotar o gráfico acima foram utilizados os valores de melhor ajuste do espectro de potência angular fornecidos pelo satélite Planck [5].

pode-se mostrar que,

$$(2\ell + 1)C_\ell = \sum_m \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle . \quad (3.18)$$

Essa equação será útil na Seq. 5.4 onde iremos relacionar os coeficiente de quadrupolo a_{20} encontrado teoricamente com o valor medido do espectro de potências angular C_ℓ pelo satélite Planck.

Como as perturbações adiabáticas de grandes comprimentos de onda influenciam os baixos multipolos da RCF, precisamos encontrar uma equação que relacione os C_ℓ s com as flutuações de temperatura ΔT dada pela Eq. (3.3). A título de ilustração, e também levando em conta que o efeito Sachs-Wolfe contribui com cerca de 90% das flutuações de temperatura em baixos multipolos [29] (veja também a Fig. (3.5)), vamos considerar neste cálculo apenas o termo (3.6). Para fazer isso é conveniente trabalhar com as perturbações no espaço de Fourier, onde as simetrias do espaço-tempo de fundo são melhor aproveitadas. Então, no espaço de Fourier, a combinação das Eqs. (3.16) e (3.6) resultará em

$$a_{\ell m}(\tau_0) = \frac{1}{3} \int d^2 \mathbf{n} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \Phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{dec}} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}), \quad (3.19)$$

onde, por simplicidade, omitimos a dependência em τ_{dec} do potencial gravitacional. A exponencial complexa, por sua vez, pode ser expandida em harmônicos esféricos através da expressão

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{dec}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(k\Delta\tau) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad (3.20)$$

onde $\Delta\tau = \tau_0 - \tau_{dec}$. Colocando esta expressão em (3.19) e usando a ortogonalidade dos harmônicos esféricos encontramos, após algumas simplificações, que

$$a_{\ell m}(\tau_0) = \int d^3 \mathbf{k} \Phi(\mathbf{k}) f_\ell(k) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \quad (3.21)$$

sendo que $f_\ell(k) = \frac{4\pi i^\ell}{3(2\pi)^{3/2}} j_\ell(k\Delta\tau)$ é uma função puramente geométrica, conhecida na literatura como função de transferência.

O próximo passo envolve o cálculo da média (3.18) usando a expressão acima. Essa passagem requer, por sua vez, o conhecimento da função de dois pontos do potencial gravitacional no instante do desacoplamento. Em um universo homogêneo e isotrópico, a função de correlação mais geral possível é dada por

$$\langle \Phi(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{q}) \rangle = P(k) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad P(k) \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}(k). \quad (3.22)$$

Nesta expressão, a homogeneidade do universo está representada pela função

delta de Dirac, $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Já a isotropia advém do fato de que o espectro de potências \mathcal{P} não depende do vetor de onda \mathbf{k} , mas apenas do seu módulo k . Finalmente, podemos calcular a média definida na Eq. (3.18), utilizando para isso as expressões (3.21) e (3.22). Temos:

$$(2\ell + 1)C_\ell^{SW} = \sum_m \int d^3\mathbf{k} |f_\ell(k)|^2 P(k) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})^* . \quad (3.23)$$

Passando agora o vetor \mathbf{k} para coordenadas esféricas, de modo que $d^3\mathbf{k} = k^2 dk d^2\hat{\mathbf{k}}$, e usando novamente a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, chegamos finalmente em

$$C_\ell^{SW} = A \frac{4}{9} \int j_\ell^2(k\Delta\tau) k^{n_s-2} dk , \quad (3.24)$$

e usando uma tabela de integrais [44] obtemos,

$$C_\ell^{SW} = A \frac{2^{n_s-2}\pi}{9(\Delta\tau)^{n_s-1}} \frac{\Gamma(3-n_s)}{\Gamma^2\left(\frac{4-n_s}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{2\ell+n_s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\ell-n_s+5}{2}\right)} . \quad (3.25)$$

Para o caso de um espectro invariante de escala ($n_s = 1$) temos

$$\ell(\ell + 1)C_\ell^{SW} = \text{cte} , \quad (3.26)$$

que é a famosa fórmula do efeito Sachs-Wolfe. Em particular, segue dessa expressão que o termo de dipolo é diretamente proporcional ao quadrupolo:

$$C_1^{SW} = 3C_2^{SW} . \quad (3.27)$$

3.2.1 Variância Cósmica

Do ponto de vista teórico, os dados fornecem os coeficientes multipolares $a_{\ell m}$, que são uma única realização de uma variável aleatória gaussiana. Porém, os C_ℓ s não são variáveis aleatórias, mas precisamos estimá-los a partir de dados aleatórios. Para isso, um estimador estatístico para C_ℓ s é construído. Esse estimador, sim, é uma variável aleatória que obedece uma distribuição do tipo χ^2 . Para definir o estimador \widehat{C}_ℓ note que os coeficiente $a_{\ell m}$ são campos estocásticos independentes e de valor médio nulo, ou seja,

$$\langle a_{\ell m} \rangle = 0 , \quad \langle a_{\ell m} a_{\ell m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell , \quad (3.28)$$

com isso define-se o estimador,

$$\widehat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m a_{\ell m} a_{\ell m}^* , \quad (3.29)$$

que obedece a relação $\langle \widehat{C}_\ell \rangle = C_\ell$. A variância de \widehat{C}_ℓ mede o quanto ele é bom para estimar o valor de C_ℓ , e é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{C}_\ell] &= \left\langle \left(\widehat{C}_\ell - \langle \widehat{C}_\ell \rangle \right) \left(\widehat{C}_{\ell'} - \langle \widehat{C}_{\ell'} \rangle \right) \right\rangle , \\ &= \langle \widehat{C}_\ell \widehat{C}_{\ell'} \rangle - \langle \widehat{C}_\ell \rangle \langle \widehat{C}_{\ell'} \rangle , \\ &= \frac{1}{(2\ell + 1)(2\ell' + 1)} \sum_{mm'} \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* \rangle - C_\ell C_{\ell'} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Visto que os $a_{\ell m}$ s são, por hipótese, variáveis gaussianas, podemos aplicar o teorema de Wick [45]:

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* \rangle &= \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle \langle a_{\ell' m'} a_{\ell' m'}^* \rangle + \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle \langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'}^* \rangle \\ &+ \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle \langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle , \\ &= C_\ell C_{\ell'} + C_\ell^2 \delta_{\ell\ell'} \delta_{m,-m'} (-1)^{m'+m} + C_\ell^2 \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} , \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde foi usado as Eqs. (3.28) e (3.29) além da propriedade $a_{\ell m} = (-1)^m a_{\ell, -m}^*$. Assim, essa *variância cósmica* pode ser escrita como

$$\text{Var}[\widehat{C}_\ell] = \frac{2}{2\ell + 1} C_\ell^2 \delta_{\ell\ell'} . \quad (3.32)$$

Assim como feito acima para os C_ℓ s, a variância da função de correlação de dois pontos (Eq. (3.14)) pode ser obtida usando um estimador calculado a partir da (3.29),

$$\widehat{C}(\theta) = \sum_\ell \frac{2\ell + 1}{4\pi} \widehat{C}_\ell P_\ell(\cos \theta) . \quad (3.33)$$

Assumindo as mesmas hipóteses adotadas para encontrar a Eq. (3.32), obtêm-se [46]:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{C}(\theta)] &= \left\langle \left(\widehat{C}(\theta) - \langle \widehat{C}(\theta) \rangle \right) \left(\widehat{C}'(\theta) - \langle \widehat{C}'(\theta) \rangle \right) \right\rangle , \\ &= \sum_\ell \frac{2\ell + 1}{8\pi^2} C_\ell^2 P_\ell^2(\cos \theta) . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Agora que descrevemos a radiação cósmica de fundo junto com suas propriedades estatísticas estamos aptos a tirar informações acerca dos pa-

rômetros do Universo a partir das medidas da RCF [30]. Como resultado dessas medidas obtêm-se o gráfico do espectro de potências C_ℓ s que apresentamos na figura 3.4. Os pontos são os valores medidos ($D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$) junto com as barras de erro, a curva sólida representa o melhor ajuste do modelo cosmológico padrão aos dados fornecidos pelo satélite Planck e a área sombreada é a variância cósmica (Eq. (3.32)).

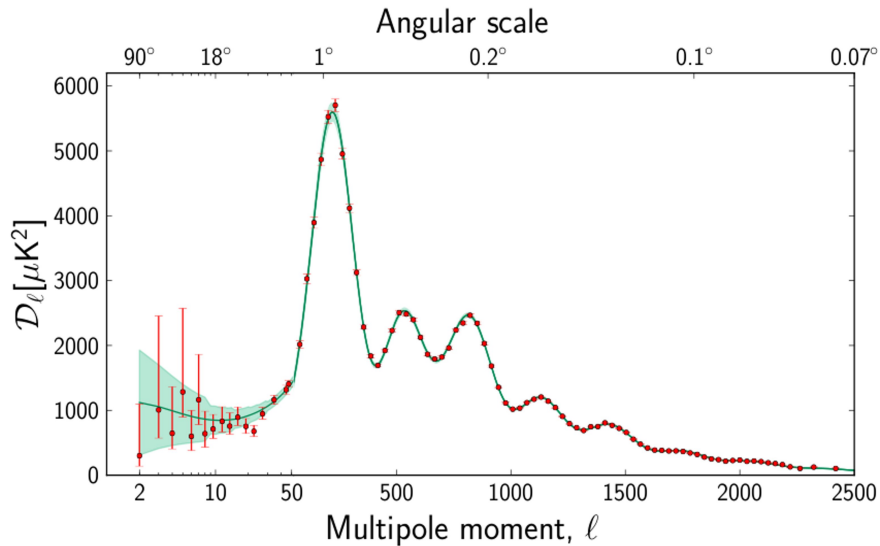


Figura 3.4 – Espectro de potências ($D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$) gerado a partir dos dados do satélite Planck [47]. A curva contínua representa o melhor ajuste do modelo cosmológico padrão aos dados do satélite Planck. A área sombreada ao redor da curva ilustra a variância cósmica e os pontos são os dados medidos junto com as barras de erro.

A título de ilustração, usamos um programa numérico conhecido como CAMB [48] para decompor a fórmula de Sachs-Wolfe - Eq. (3.1) - e apresentar cada efeito separadamente na figura 3.5. É importante enfatizar que nesta figura está inclusa toda a física da RCF, e não apenas a física de grandes escalas discutidas neste trabalho. Na prática, os resultados apresentados aqui são válidos até multipolos $\ell \lesssim 100$.

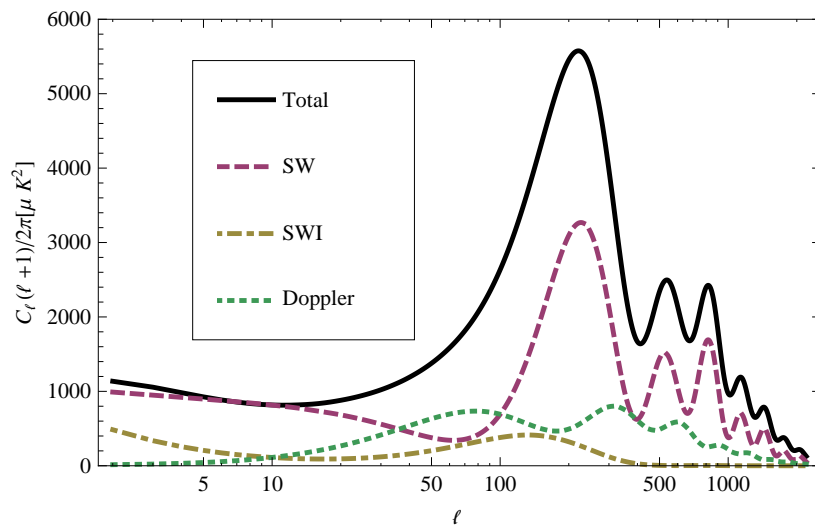


Figura 3.5 – Espectro angular de temperatura da RCF. A figura representa uma solução numérica completa obtida através do software CAMP [48]. Os efeitos considerados neste trabalho afetam apenas os baixos multipolos da RCF ($l \lesssim 100$).

Capítulo 4

O Efeito Grishchuk-Zel'dovich

O efeito Grishchuk-Zel'dovich (GZ) descreve o impacto na RCF de perturbações adiabáticas do potencial gravitacional descritas por ondas maiores que o raio de Hubble. O efeito leva as iniciais dos físicos que o investigaram inicialmente em 1978 [7]. Como originalmente demonstrado por Grishchuk e Zel'dovich, tais perturbações podem, dependendo do tamanho da região homogênea que contém o universo, dar origem a uma flutuação quadrupolar na distribuição angular de temperatura da RCF. Uma vez que não é possível saber exatamente qual é tamanho de tal região, visto que não sabemos exatamente quanto durou o período de inflação, podemos reverter a lógica e usar o quadrupolo medido para colocar limites inferiores no raio desta região.

Como dissemos na seção 2.3, os modelos de universo inflacionário, criados no começo da década de 1980, representam os melhores modelos para explicar a origem das estruturas de grandes escalas do universo. Supondo que a inflação durou um pouco mais que o mínimo de tempo necessário para resolver os problemas do Big Bang, relíquias cósmicas da era pré-inflacionária, que estão além do nosso horizonte de partículas, poderiam ser detectadas pelos baixos multipolos que elas produzem na RCF [49]. Pensando no sentido contrário, as medidas das amplitudes dos baixos multipolos da RCF podem ser usadas para fixar a duração mínima da inflação, o que é equivalente à estimar um limite inferior no tamanho possível da parte homogeneizada do Universo durante esse período.

Em 1984 Mukhanov e Chibisov investigaram o efeito de perturbações lineares de super-horizonte de um campo escalar e obtiveram que o universo linear é pelo menos 45 vezes maior que o universo observável [50]. De maneira similar, Grishchuk, em 1992, obteve que a escala de homogeneidade cósmica é pelo menos 200 vezes o tamanho do Universo observável [51]. Recentemente Erickcek, Carroll e Kamionkowski [52] usaram uma onda sinusoidal para representar as perturbações de grandes escalas. Eles encontraram uma razão de 65 entre o tamanho da região homogênea que contém o universo e o horizonte de partículas que, como vimos, é aproximadamente igual ao horizonte ótico (universo visível) e ao raio de Hubble.

No trabalho original do efeito GZ [51], bem como nas outras referências citadas acima, o tamanho da região homogênea que contém nosso

universo observável foi estimada usando uma única onda plana do tipo $\exp(i\mathbf{k}_{GZ} \cdot \mathbf{x})$ com um número de onda característico ($k_{GZ} = 2\pi/L$) da porção homogênea do universo L - Fig. 4.1. Dado que o trabalho original do efeito GZ foi publicado em 1978, alguns anos antes do advento das teorias inflacionárias, a ideia de usar uma onda plana é um bom ansatz, pois expõe as características básicas do universo linear em grandes escalas.

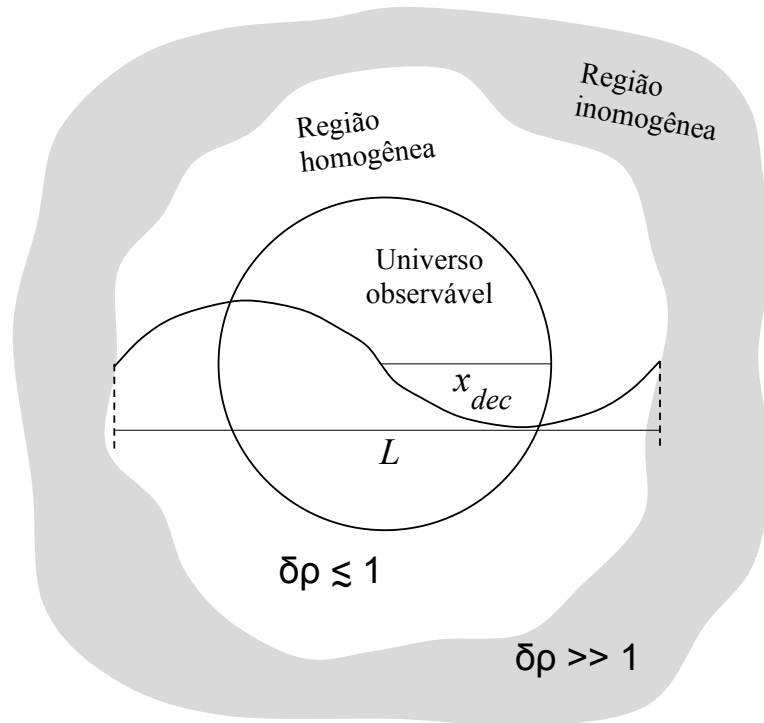


Figura 4.1 – Esquemática da região homogênea que contém o Universo observável. A informação mais distante e antiga que podemos observar do nosso universo é a radiação cósmica de fundo proveniente do instante de desacoplamento (τ_{dec}) a uma distância comóvel x_{dec} . Na imagem ilustramos uma onda de comprimento da ordem do espaço homogêneo L .

Efeito GZ como estimador de grandes escalas

Por causa da maior influência do efeito SW (fig. 3.5), uma primeira análise qualitativa do efeito GZ pode ser feita desconsiderando a contribuição dos efeitos SWI e Doppler. Para tal análise vamos supor um universo de Einstein-de Sitter, o qual constitui-se somente de matéria. Nesse caso o potencial gravitacional é constante - Seção 2.2.3 - e a anisotropia da temperatura da RCF é dada pela equação (3.6).

Originalmente, o efeito GZ foi estudado analisando a influência de uma única onda plana com comprimento da ordem da região homogênea, ou

seja, $k_{GZ} \ll \mathcal{H}$ [7]. Isso equivale a escrever

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\Phi_0}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_{GZ} \cdot \mathbf{x}} . \quad (4.1)$$

Ou, no espaço de Fourier,

$$\Phi(\mathbf{k}) = \Phi_0(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{GZ}) . \quad (4.2)$$

Aqui, como a parte temporal do potencial $\phi(\tau)$ é constante, ela foi absorvida na definição da amplitude dependente de \mathbf{k} , Φ_0 . A perturbação na temperatura nesse caso é

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \frac{\Phi_0}{3(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}_{GZ} \cdot \mathbf{x}_{dec}} . \quad (4.3)$$

Para expandir a exponencial em harmônicos esféricos aplica-se a equação (3.20),

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \frac{4\pi\Phi_0}{3(2\pi)^{3/2}} \sum_{lm} i^\ell j_\ell(k_{GZ} x_{dec}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_{GZ}) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) , \quad (4.4)$$

de onde segue imediatamente que

$$a_{\ell m}(\tau_0) = \frac{4\pi\Phi_0}{3(2\pi)^{3/2}} i^\ell j_\ell(k_{GZ} x_{dec}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_{GZ}) . \quad (4.5)$$

Por se tratar de grandes comprimentos de onda, o efeito GZ é mais proeminente nos baixos multipolos. No entanto o monopolo não pode ser medido, pois estamos tratando de flutuações com média nula. Já o dipolo induzido pelo efeito SW, no universo de Einstein-de Sitter, é exatamente cancelado pelo diplo Doppler [7, 49, 53], e como o efeito SWI é nulo, pois o potencial é constante, as perturbações de grandes escalas não induzem dipolo algum na RCF. No Ap. D mostramos, seguindo a Ref. [52], que o cancelamento do dipolo ocorre também para o modelo Λ CDM. Em resumo, o mais baixo multipolo relevante no efeito GZ será o quadrupolo.

Assumindo que a linearidade dessa abordagem é mantida em todas as escalas onde $\Phi_0 \lesssim 1$, e tomando o valor assintótico das funções esféricas de Bessel para pequenos argumentos (pois $kx_{dec} \ll 1$ por hipótese), $j_2 = x^2/15$, o quadrupolo é expresso por

$$|a_{20}| \approx 0,4 \left(\frac{x_{dec}}{L} \right)^2 , \quad (4.6)$$

onde, nessa passagem, o vetor \mathbf{k}_{GZ} foi alinhado ao longo do eixo z da RCF. Assumindo que o quadrupolo da radiação cósmica é totalmente devido a esse

efeito, então, usando $a_{20} \lesssim 10^{-5}$, encontramos [51]

$$L \gtrsim 200x_{dec} . \quad (4.7)$$

Note que a hipótese de que todo o quadrupolo medido se deve ao efeito GZ leva a um resultado bastante conservador. Na prática, o efeito GZ deve contribuir com apenas uma pequena fração do quadrupolo medido, de modo que o limite acima deve ser ainda maior.

Capítulo 5

O Índice Espectral e a RCF

No capítulo anterior exploramos as características básicas do universo linear em grandes escalas pelo efeito Grishchuk-Zel'dovich aplicando uma única onda plana do tipo $\exp(i\mathbf{k}_{GZ} \cdot \mathbf{x})$.

Publicado em 1978, o efeito GZ original não considerava a inflação, desenvolvida alguns anos depois. Entretanto o período inflacionário do universo tem extrema importância para a física de grandes escalas da RCF, como mostramos na Sec. 2.3. Uma previsão típica dos modelos inflacionários é que nosso universo deve ser permeado por ondas estocásticas gaussianas¹. Portanto, é razoável se imaginar que uma estimativa do tamanho da região homogênea do universo pode ser obtido por meio destas ondas, e não através de uma única onda plana (e não estocástica) como no efeito original.

Como iremos tratar de ondas estocásticas, o índice espectral escalar n_s - Eq. (2.141) - deverá também desempenhar um papel importante, já que ele funciona como um filtro que diminui ou aumenta a influência de grandes comprimentos de onda dependendo se ele for azul ($n_s > 1$) ou vermelho ($n_s < 1$) respectivamente. Em outras palavras, ondas com comprimento de onda maior que L exercerão maior influência nos multipolos da RCF se $n_s < 1$ do que se $n_s > 1$. Consequentemente, a estimativa na escala L deverá ser mais fraca para um espectro de potências vermelho, e mais forte se o espectro for azul.

Nesse capítulo chegaremos ao objetivo do nosso trabalho. Discutiremos inicialmente como o índice espectral escalar n_s age como um filtro de comprimentos de onda que entram no horizonte de partículas, evidenciando assim a importância dessa quantidade. Em seguida, por meio de ondas estocásticas precisamente definidas, estimaremos o tamanho da região homogênea que contém nosso Universo observável e mostramos como o valor de n_s pode influenciar essa estimativa.

5.1 Função de correlação

O gráfico dos coeficientes do espectro angular de temperatura da radiação cósmica de fundo, os C_ℓ s, em função dos multipolos ℓ - Fig. 3.4

¹Por ondas estocásticas nos referimos a ondas planas com fases e amplitudes aleatórias.

- é uma das imagens mais famosas da cosmologia moderna. Esses coeficientes são suficientes para caracterizar a morfologia da RCF num regime gaussiano e estatisticamente isotrópico. Embora não seja tão conhecido, o gráfico da função de correlação no espaço real - (Fig. 3.3) - é equivalente ao gráfico no espaço harmônico, contendo exatamente as mesmas informações. Entretanto, estudos no espaço harmônico são mais utilizados para extrair informações cosmológicas porque, nesse regime, os C_ℓ s se desacoplam uns dos outros, permitindo que a análise realizada nesse espaço seja muito mais transparente. A função de correlação angular, $C(\theta)$, segue um caminho oposto pois, ao invés de dividir a informação em vários multipolos, comprime a informação de praticamente todas as escalas multipolares para fornecer a física em uma única separação angular θ . (Para entender melhor basta comparar as equações (3.14) e (3.18)). Entretanto, a teoria da RCF sob uma abordagem no espaço real não é impossível, e de fato resultados não-triviais podem resultar dessa abordagem [54, 55, 52].

Na Fig. 5.1 apresentamos a função de correlação de dois pontos da RCF em função da separação angular θ incluindo o dipolo $C_1 = 3C_2$ (Eq. (3.27)). O que mais nos chama a atenção nessa curva é que $C(\theta)$ tem uma raiz em $\theta \simeq 75^\circ$.

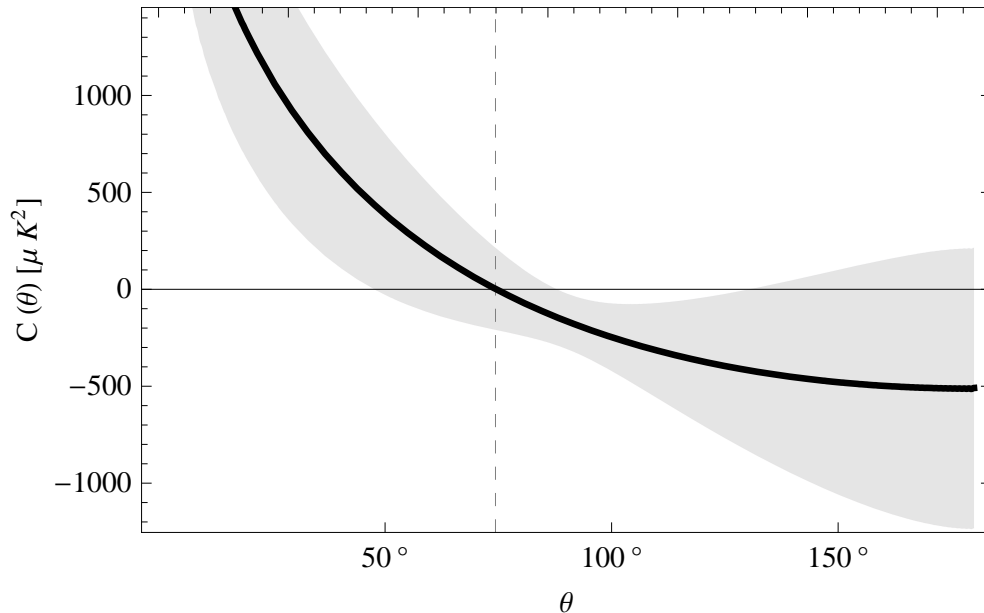


Figura 5.1 – Função de correlação de dois pontos da RCF como função da separação angular θ (linha sólida) no modelo Λ CDM. Esta curva inclui o dipolo primordial $C_1 = 3C_2$, de acordo com o efeito Sachs-Wolfe, o que faz aparecer uma única raiz em $\theta \simeq 75^\circ$. A remoção desse multipolo recupera o gráfico da Fig. 3.3. Este gráfico foi feito com os valores melhor ajuste dos C_ℓ s fornecidos pelo Planck [5]. O envelope ao redor da curva representa a variância cósmica.

Desse comportamento surge uma questão imediata: Por que

existe uma escala angular a partir da qual a função de correlação da RCF troca de sinal? A resposta está nos comprimentos das ondas das perturbações. Nesses ângulos, os fótons detectados são essencialmente devidos às perturbações do potencial gravitacional através do efeito Sachs-Wolfe. Visto que essas ondas têm comprimentos comparáveis ao nosso horizonte de partículas, suas cristas estarão separadas por um leque de aproximadamente 90° na esfera celeste, enquanto que as ondas maiores terão apenas uma fração de suas cristas dentro do horizonte. Então, fótons com distâncias angulares $\theta' \gtrsim 90^\circ$ serão, em média, provenientes de diferentes cristas dessas ondas (Fig. 5.2). Uma vez que esta onda mede uma flutuação de temperatura (visto que $\Delta T_{SW} \sim \Phi$), isso resulta na região angular anti-correlacionada que vemos na figura 5.1, pois $C(\theta') = \langle + - \rangle < 0$, enquanto que fótons separados por um ângulo $\theta < 90^\circ$ estarão, em média, correlacionados, $C(\theta) = \langle ++ \rangle = \langle -- \rangle > 0$. Perturbações com comprimentos maiores que o horizonte de partículas deslocadas para direita ou para a esquerda da esfera celeste, terão apenas suas cristas positivas ou negativas dentro do horizonte. Os fótons referentes a essas ondas estarão em média correlacionados, $C(\theta'') = \langle ++ \rangle = \langle -- \rangle > 0$, qualquer que seja a distância θ'' .

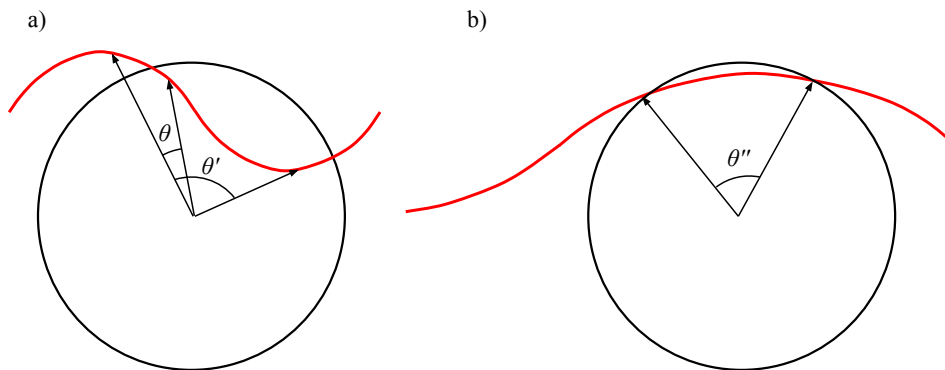


Figura 5.2 – Esquematização da mudança de sinal na função de correlação. Em a) o comprimento da onda é da ordem do horizonte e os fótons separados por uma distância angular maior que 90° sempre estarão anti-correlacionados por originarem de cristas de sinais opostos da onda. Em b) a onda é da ordem de duas vezes o horizonte, o que faz com que todos os fótons estejam correlacionados, independente do ângulo θ .

Não há motivos para que um limite superior nos comprimentos de ondas seja fixado. Então é plausível dizer que a função de correlação receberá uma contribuição infinita dessas ondas, possivelmente divergindo. A não ser que elas sejam pesadas com proporção inversa a seus comprimentos de onda; nesse caso a contribuição de grandes ondas em $C(\theta)$ poderá, em princípio, saturar em um número finito.

Vamos analisar essa questão mais de perto usando a função de correlação de dois fótons oriundos da superfície de último espalhamento com separação angular de $\theta = \arccos \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ no espaço real (Eq. (3.13)). Em grandes escalas o efeito Sachs-Wolfe é o mais influente - Fig. 3.5 - e a flutuação de temperatura é dada pela Eq. (3.6). Conforme vimos anteriormente (Eq. (3.22)), para um universo homogêneo e isotrópico com simetria gaussiana temos que

$$\langle \Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{q}) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}(k) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) , \quad (5.1)$$

no espaço de Fourier. Então, a função de correlação se torna

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \langle \Delta T(\tau_0, \mathbf{n}_1) \Delta T(\tau_0, \mathbf{n}_2) \rangle , \\ &= \frac{1}{9(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{dec} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_{dec})] \langle \Phi(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{q}) \rangle , \\ &= \frac{1}{9} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\text{sen}kr}{kr} \mathcal{P}(k) . \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{x}_{dec} = \Delta\tau_{dec}\mathbf{n}_1$ é a distância da superfície de último espalhamento na direção \mathbf{n}_1 , e onde definimos

$$\begin{aligned} r(\theta) &\equiv |\mathbf{x}_{dec} - \mathbf{y}_{dec}| , \\ &= \Delta\tau_{dec} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Essencialmente todos os modelos do universo jovem predizem um *espectro de potencia primordial* $\mathcal{P}(k)$ que é uma potência de k . Por isso tomamos o espectro geral dado pela Eq. (2.141) e, assim, encontramos a integral

$$C(\theta) = \frac{A}{9r(\theta)^{n_s-1}} \int_0^\infty du u^{n_s-3} \text{sen}u , \quad u \equiv rk . \quad (5.4)$$

Para $1 < n_s < 2$ essa integral converge [44], resultando em:

$$C(\theta) \propto (1 - \cos\theta)^{\frac{1-n_s}{2}} , \quad (5.5)$$

sendo a constante de proporcionalidade dada por $-\frac{A}{9}\Gamma(n_s - 2) \text{sen}(n_s\pi/2)$. Entretanto, essa integral diverge para $n_s \leq 1$ - justamente os valores previstos pelos modelos inflacionários e que são, também, os valores de melhor ajuste dos dados observacionais. Contudo, podemos mostrar que, embora a amplitude C_0 seja infinita neste caso, a dependência em θ da função de correlação está bem definida. Como a divergência surge no limite infravermelho, podemos fixar um limite superior no comprimento das ondas e, posteriormente, tomarmos o limite

de comprimentos de onda infinitamente grandes. Por simplicidade, vamos considerar aqui apenas o caso invariante de escala, $n_s = 1$, conhecido como espectro de Harrison-Zel'dovich. Então temos:

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \frac{A}{9} \lim_{k_0 \rightarrow 0} \int_{k_0 r}^{\infty} du \frac{\text{sen } u}{u^2} \\ &= \frac{A}{9} \lim_{k_0 \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen } k_0 r}{k_0 r} - \text{Ci}(k_0 r) \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $\text{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} t^{-1} \cos t dt$ é conhecida como integral cosseno. Expandindo o termo entre colchetes em série de Taylor, encontramos:

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \frac{A}{9} \lim_{k_0 \rightarrow 0} [1 - \gamma - \ln(k_0 r) + \mathcal{O}((k_0 r)^2)], \\ &= \frac{A}{9} \left[1 - \gamma - \ln r(\theta) - \lim_{k_0 \rightarrow 0} \ln k_0 \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $\gamma \simeq 0,577$ é a constante de Euler. Note que o último termo entre colchetes apresenta uma divergência logarítmica. Essa divergência deve-se ao fato de que, para $n_s = 1$, o espectro de potências é constante (invariante de escala), dando assim o mesmo peso para todas as ondas com comprimentos maiores que o horizonte de partículas. Porém, a dependência em θ é finita e, a menos de uma amplitude divergente, temos

$$C(\theta) \propto \ln \left(\frac{1}{1 - \cos \theta} \right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Em resumo, o comportamento geral da função de correlação $C(\theta)$ como função de n_s pode ser esquematizado da seguinte forma:

$$C(\theta) \propto \begin{cases} (1 - \cos \theta)^{(1-n_s)/2} & 1 < n_s < 2, \\ -\frac{1}{2} \ln(1 - \cos \theta) & n_s = 1. \end{cases} \quad (5.9)$$

Existem dois aspectos importantes a serem notados nessa expressão. Primeiramente, se $n_s > 1$ a amplitude da função de correlação é finita, enquanto a mesma diverge se $n_s = 1$ ². De fato, esse comportamento concorda com nossa discussão precedente, já que para $n_s > 1$ ($n_s = 1$) o espectro de potências filtra (amplifica) os valores mais baixos de k , fazendo com que a função $C(\theta)$ convirja (divirja). Segundo, e muito importante, a função de correlação acima não tem raiz no intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ se $n_s > 1$, mas apresenta uma raiz em $\theta = 90^\circ$ quando $n_s = 1$ - veja a figura 5.3. Tanto a existência de raízes como o

²O caso $n_s < 1$ também apresenta divergências. Porém, a integral nesse caso é matematicamente mais elaborada, sem contudo oferecer novas informações cosmológicas.

comportamento da amplitude corroboram nossa interpretação de que o espectro de potência $\mathcal{P}(k)$ atua como um filtro sobre ondas arbitrariamente grandes.

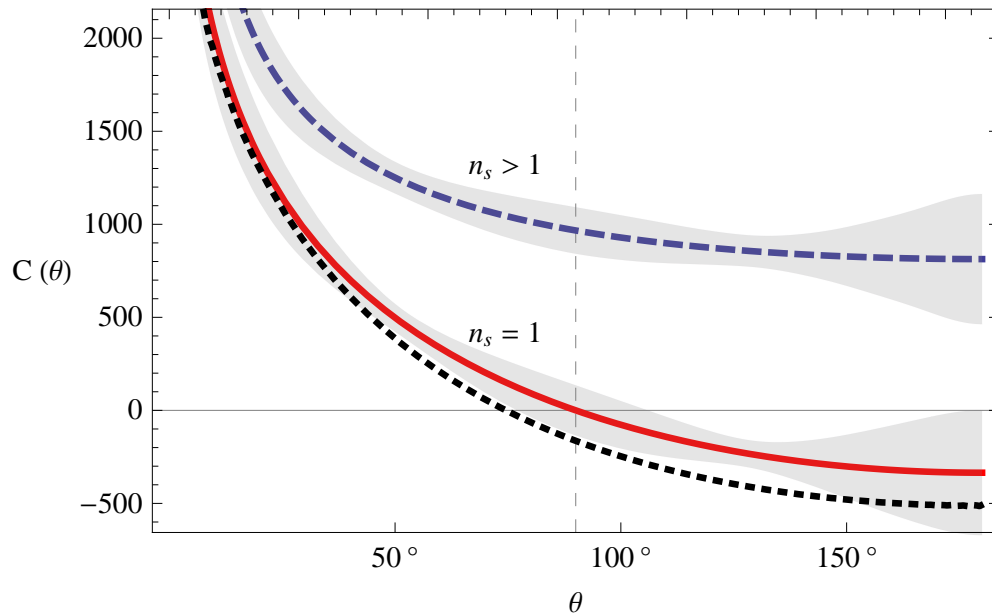


Figura 5.3 – Função de correlação da temperatura em grandes escalas angulares para diferentes valores de n_s . A curva contínua refere-se ao espectro de potência de Harrison-Zel’dovich ($n_s = 1$) e a tracejada refere-se a um espectro “azul” com $n_s = 1.2$. A curva pontilhada resulta de um cálculo numérico feito com o software CAMB com $n_s = 1$. Note que a concordância com nosso cálculo analítico é grande, sendo a diferença atribuída a fenômenos de pequenas escalas angulares que não incluímos aqui. As áreas cinzas são as respectivas barras de erro de variância cósmica de 1σ . As curvas foram normalizadas em $\theta = 1^\circ$ para equiparar com a função de correlação do modelo Λ CDM.

Frente à essa discussão sobre a influência de n_s na função correlação uma outra pergunta surge: Para um certo índice espectral, o quão além do raio de observação do Universo uma onda pode afetar na RCF? Desde que o espectro seja azul ($n_s > 1$), ondas arbitrariamente grandes irão contribuir cada vez menos para as flutuações de temperatura e espera-se que a contribuição irá saturar em um comprimento de onda máximo, ao contrário do espectro vermelho ($n_s < 1$). Além do mais, pela restrição da amplitude dessas ondas no regime da teoria de perturbações lineares, esse efeito fornece um mecanismo natural para fixar um limite inferior na extensão do universo homogêneo. Essas características são a principal razão pela qual devemos esperar que o índice escalar espectral deve ter uma influência importante na estimativa da região homogênea do universo por meio de ondas estocásticas.

5.2 Ondas estocásticas

Como vimos, a principal característica da inflação é a possibilidade de associar flutuações clássicas do universo observável às flutuações quânticas do universo primordial. Em primeira ordem no tratamento quântico, as perturbações do inflaton se comportam como um oscilador harmônico no estado de vácuo, para o qual a função de onda é uma gaussiana. Dentro do regime linear da dinâmica cosmológica, essa propriedade estatística se transfere para as perturbações clássicas, razão pela qual dizemos que o universo é, em primeira ordem, gaussiano.

Nosso objetivo agora é construir um ansatz para as perturbações cosmológicas que possuam as mesmas propriedades estatísticas das perturbações inflacionárias. Em seguida, tomaremos o limite de super-horizonte dessas ondas para estimar, através dos dados da RCF, o tamanho da região homogênea que contém o universo. Para tanto, começaremos nossa abordagem separando o potencial gravitacional no espaço de Fourier em duas partes,

$$\Phi(\tau, \mathbf{k}) = \phi(\tau, k)\psi(\mathbf{k}) . \quad (5.10)$$

Aqui $\phi(\tau, k)$ depende apenas da evolução do potencial devido à gravidade e obedece à equação de movimento (2.69), enquanto que $\psi(\mathbf{k})$ depende das condições iniciais fornecidas pela inflação - Sec. 2.3. Note, entretanto, que para grandes comprimentos de onda, $k \ll 1$, a equação (2.69) depende apenas do tempo, pois o último termo, proporcional a k^2 , pode ser desprezado nesse caso. Sendo assim, suporemos que em grandes escalas vale a seguinte relação

$$\Phi(\tau, \mathbf{k}) = \phi(\tau)\psi(\mathbf{k}) . \quad (5.11)$$

Ou, equivalentemente no espaço real:

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau)\psi(\mathbf{x}) , \quad (5.12)$$

Novamente, é importante enfatizar que toda a aleatoriedade do potencial gravitacional está agora contida na função $\psi(\mathbf{x})$, enquanto que $\phi(\tau)$ é sensível apenas à dinâmica (determinística) do universo. Por conveniência, $\psi(\mathbf{x})$ será expandido em multipolos através de

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell m} \varpi_{\ell m}(x) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) , \quad \mathbf{x} = x\mathbf{n} . \quad (5.13)$$

onde os coeficientes de multipolo são, por construção, variáveis gaussianas com-

plexas que satisfazem as condições

$$\varpi_{\ell m}(x) = \varpi_{\ell}(x)\varphi_{\ell m} \quad (5.14)$$

$$\langle \varphi_{\ell m} \rangle = 0 , \quad (5.15)$$

$$\langle \varphi_{\ell m} \varphi_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} , \quad (5.16)$$

garantindo, dessa forma, que o potencial (5.12) tenha uma distribuição de probabilidade gaussiana. Feitas essas considerações, o potencial que usaremos será

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau) \sum_{\ell m} \varpi_{\ell} \varphi_{\ell m}(x) Y_{\ell m}(\mathbf{n}) . \quad (5.17)$$

É importante notar a diferença entre o potencial proposto aqui (Eq. (5.17)) e o utilizado pelos trabalhos precedentes (Eq. (4.1)). Essa comparação deixa claro o caráter multi-ondulatório da nossa abordagem, em contraste ao efeito GZ original, que se vale de uma única onda plana.

Precisamos agora relacionar o espectro $\varpi_{\ell}(x)$ ao índice espectral escalar n_s que segue do espectro de potências (2.141). Para fazer isso o potencial gravitacional no espaço de Fourier deve ser expandido de maneira análoga à equação (5.17). Porém, devemos antes fazer algumas observações. Por hipótese a inflação gerou, para cada número de onda \mathbf{k} , diferentes condições iniciais com diferentes fases e amplitudes. A mera existência de flutuações na distribuição espacial de galáxias e aglomerados em diferentes escalas demonstra isso. Por isso um cálculo analítico para obter uma expressão de $\psi(\mathbf{k})$ em função do índice espectral é, a rigor, impossível, visto que $\psi(\mathbf{k})$ é uma variável aleatória, ao passo que estamos interessados em descrever uma *única realização* dessa variável. Portanto, a saída é simular uma *realização típica*, $\psi_{\mathbf{k}}$, das condições iniciais. Como nos interessa fixar um limite no tamanho da escala da homogeneidade, L , que contém o universo observável, especulamos que uma realização típica das condições iniciais na escala \mathbf{k} é dada por uma onda estacionária ao longo de \mathbf{L} cuja amplitude é filtrada pela raiz quadrada da variância $P(k) = (2\pi^2/k^3)\mathcal{P}(k)$. Ou seja,

$$\psi_{\mathbf{k}} = \sqrt{P(k)} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}} . \quad (5.18)$$

onde \mathbf{L} é um parâmetro livre nesse modelo. Fisicamente falando, essa expressão é motivada pelo fato de que $|\psi_{\mathbf{k}}|^2$ deve ser proporcional a $P(k)$, e a média do produto $e^{-i\mathbf{L}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})}$ deve se comportar como uma função delta

$$\langle e^{-i\mathbf{L}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})} \rangle \rightarrow \int d^3\mathbf{L} e^{-i\mathbf{L}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q})} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{q}) . \quad (5.19)$$

Na referência [49] um ansatz semelhante foi proposto em conexão com a capacidade de detectar os remanescentes do período pré-inflacionário.

É importante ter em mente que a equação (5.18) é um ansatz de *uma única realização* de ψ para um número de onda \mathbf{k} fixo, e não um ansatz do campo gaussiano $\psi(\mathbf{k})$ para qualquer \mathbf{k} . Evidentemente, o fato de que diferentes ondas têm diferentes fases e amplitudes tem que ser levado em conta. Isso pode ser mais facilmente implementado no espaço harmônico (do que no espaço de Fourier) definindo $\varpi_\ell(k)$ como a média angular de $\psi_{\mathbf{k}}$

$$\varpi_\ell(k) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d(\cos \theta) \psi_{\mathbf{k}} P_\ell(\cos \theta) . \quad (5.20)$$

Usando a equação (5.18) segue que

$$\varpi_\ell(k) = (-i)^\ell \sqrt{P(k)} j_\ell(kL) . \quad (5.21)$$

Então, como esse desenvolvimento está sendo feito sob a hipótese de isotropia estatística, a aleatoriedade das fases e amplitudes pode ser obtida multiplicando $\varpi_\ell(k)$ pela uma variável gaussiana $\varphi_{\ell m}$ definida em (5.14).

De posse da relação (5.21), podemos usar a transformada de Hankel para relacionar $\varpi_\ell(x)$ com $\varpi_\ell(k)$ e, conseqüentemente, com n_s :

$$\varpi_\ell(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^\ell \int dk k^2 j_\ell(kx) \varpi_\ell(k) . \quad (5.22)$$

Um pouco de álgebra nos leva agora a

$$\varpi_\ell(x) = \sqrt{\frac{A\pi^3}{Lx}} \int dk k^{\frac{n_s}{2}-1} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) J_{\ell+\frac{1}{2}}(kL) , \quad (5.23)$$

onde foi usada a relação $j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x)$. O resultado da integral acima pode ser encontrado numa tabela de integrais [44],

$$\begin{aligned} \varpi_\ell(x) = & \sqrt{\frac{A}{L^{n_s+2}}} \sqrt{\frac{\pi^3}{2^{-n_s+2}}} \frac{\epsilon^\ell}{\sqrt{(1+\epsilon)^{(n_s+4\ell+2)}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_s+4\ell+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\ell+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-n_s+4}{4}\right)} \\ & \times F\left(\frac{n_s+4\ell+2}{4}, \ell+1; 2\ell+2; \frac{4\epsilon}{(1+\epsilon)^2}\right) , \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde $\epsilon \equiv x/L$ e $-6 < n_s < 4$. Note que o intervalo de n_s que garante a validade da equação é bem maior do que o necessário aqui, onde o interesse está em valores de n_s próximos da unidade. Por hipótese $x \ll L$, então podemos expandir a Eq.

(5.24) e obtemos que

$$\varpi_\ell(x) = g_\ell(n_s)\epsilon^\ell + \mathcal{O}(\epsilon^{\ell+2}) , \quad (5.25)$$

onde

$$g_\ell(n_s) \equiv \sqrt{2^{n_s-2}\pi^3} \frac{\Gamma\left(\frac{n_s+4\ell+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\ell+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-n_s+4}{4}\right)} . \quad (5.26)$$

Temos finalmente uma expressão com aproximação de primeira ordem em ϵ para o potencial gravitacional em grandes escalas:

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau) \sum_{\ell m} g_\ell(n_s) \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \epsilon^\ell . \quad (5.27)$$

A amplitude que aparece na equação (5.24) foi fixada em $A \equiv L^{n_s+2}$. Essa escolha garante que o potencial seja uma função homogênea de ordem zero em x e L , ou seja, $\Phi(x; L) = \Phi(\lambda x; \lambda L)$ para qualquer λ real. Essa normalização é necessária porque x e L são coordenadas comóveis, e não faz sentido elas terem escalas. No entanto, isso não fixa a amplitude completamente, pois a escolha $A = BL^{n_s+2}$ também valerá para qualquer B . Porém, essa nova constante pode ser absorvida pelo valor inicial de $\phi(\tau)$ entrando na equação (5.27), que será normalizada apropriadamente adiante na era do desacoplamento da RCF.

5.3 Flutuações de temperatura em grandes escalas

Agora que o potencial devido a perturbações gaussianas de grandes escalas foi moldado (Eq. (5.27)) em função do índice espectral n_s é possível calcular a contribuição dessas ondas nos baixos multipolos da RCF pela fórmula de Sachs-Wolfe (3.1). Como no desacoplamento da RCF o potencial gravitacional é $\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})$, os resultados serão apresentados em potências de

$$\epsilon_{dec} \equiv \frac{x_{dec}}{L} \ll 1 , \quad (5.28)$$

onde $x_{dec} \equiv |\mathbf{x}_{dec}|$. A fim de escrever a decomposição da equação (3.1) é necessário resolver a equação de evolução do potencial (2.61) para grandes comprimentos de onda numericamente, junto com as equações de Friedmann (equações (2.21) e (2.22)). Para isso usamos as condições iniciais adiabáticas - Eq. (2.62):

$$\phi(0) = \phi_P , \quad \phi'(0) = 0 , \quad (5.29)$$

e o que obtemos está apresentado na Fig. 5.4.

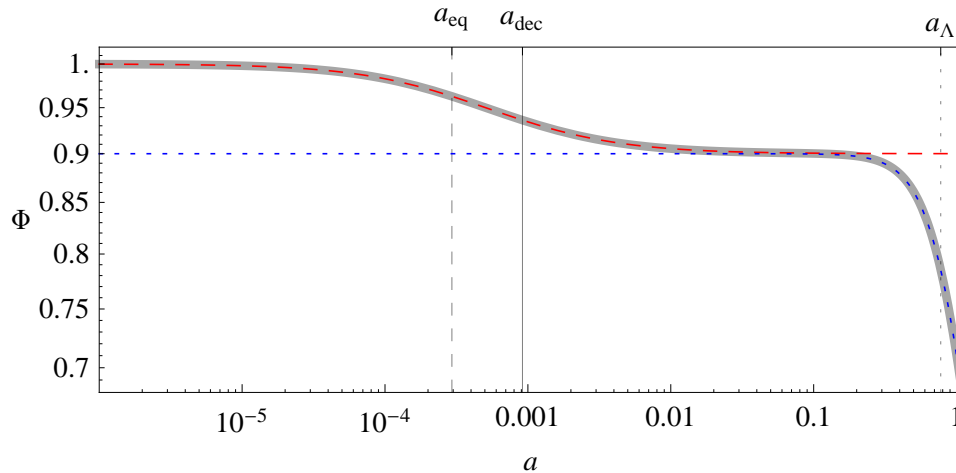


Figura 5.4 – Evolução do potencial gravitacional em um universo previsto pelo modelo Λ CDM. A curva sólida é solução numérica da equação (2.69), a tracejada é a solução analítica para matéria e radiação (Φ_{mr}), e a pontilhada é solução para Λ e matéria ($\Phi_{m\Lambda}$) somente. As linhas verticais tracejada, contínua e pontilhada correspondem respectivamente a $a(\tau_{eq})$, $a(\tau_{dec})$ e $a(\tau_{\Lambda})$. Usamos os valores de melhor ajuste fornecidos pelo satélite Planck: $\Omega_m = 0.3175$, $z_{eq} = 3402$ e $z_{dec} = 1090.43$ [6].

Ficará explícito adiante que todas as contribuições em $\Delta T/\phi(\tau_{dec})$ dependem da razão $\phi(\tau)/\phi(\tau_{dec})$ que, em grandes escalas, é independente da escolha de ϕ_P . Por outro lado, o valor absoluto de $\phi(\tau_{dec})$ influencia a estimativa de ΔT , e por isso deve ser fixado. Como a análise que está sendo feita nesse trabalho está no domínio da teoria de perturbações lineares no desacoplamento da RCF, a seguinte condição é imposta sobre as perturbações de densidade no momento do desacoplamento:

$$\left| \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right|_{\tau_{dec}} \lesssim 1. \quad (5.30)$$

Usando a equação do contraste de densidade (Eq. (2.53)) para grandes comprimentos de onda, encontramos

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = -\frac{2}{\mathcal{H}}(\phi' + \mathcal{H}\phi), \quad (5.31)$$

onde foi usada a condição de separação da equação (5.12) para isolar a dependência espacial em $\delta\rho$. Mudando da variável τ para a e usando a Eq. (2.22), a dependência do contraste de energia se torna

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = -2\frac{d}{da}(a\phi). \quad (5.32)$$

Definindo $\phi(a) = \phi_P f(a)$ de modo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$, encontra-se, nume-

ricamente, a relação

$$\left| \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right|_{\tau_{dec}} = 1,828\phi_P . \quad (5.33)$$

A condição (5.30) pode então fixar $\phi(\tau_{dec})$ como

$$\phi(\tau_{dec}) = 0,512 , \quad (5.34)$$

que, por sua vez, fixa a razão L/x_{dec} , como será mostrado. Cabe aqui um último cometário sobre a normalização acima. Note que, uma vez que estamos considerando o índice espectral escalar como constante em todas as escalas, ou seja,

$$\frac{dn_s}{dk} = 0 , \quad (5.35)$$

a liberdade na amplitude do potencial gravitacional, que se relaciona diretamente com as perturbações de densidade pela equação (5.32), é completamente independente de n_s . Portanto, ambos os parâmetros podem ser fixados de maneira independentemente.

Efeito Sachs-Wolfe

Fixados os parâmetros numéricos é possível calcular o coeficiente do efeito de Sachs-Wolfe (3.5) numericamente,

$$\mathcal{N} \equiv 2 - \frac{3\phi(0)}{2\phi(\tau_{dec})} = \frac{1}{3} + 0,0644 \approx 0,4 . \quad (5.36)$$

Usando o potencial (5.27), a contribuição do efeito Sachs-Wolfe nas flutuações da temperatura é escrita como

$$\Delta T_{SW}(\tau_0, \mathbf{n}) = \phi(\tau_{dec}) \sum_{\ell m} \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \mathcal{S}_\ell \epsilon_{dec}^\ell , \quad (5.37)$$

onde

$$\mathcal{S}_\ell \equiv g_\ell(n_s) \mathcal{N} . \quad (5.38)$$

Efeito Sachs-Wolfe Integrado

Partindo da equação encontrada para o efeito Sachs-Wolfe Integrado na seção 3.1.2, se \mathbf{L} for alinhado ao eixo z e \mathbf{x} escrito em coordenadas esféricas, então $\mathbf{n} \cdot \nabla = \partial/\partial x$ e

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(\tau, \mathbf{x}_{dec}) = \phi(\tau) \sum_{\ell m} g_\ell \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \frac{d}{dx} \epsilon^\ell . \quad (5.39)$$

Juntando todos esses termos e ignorando o monopolo $2\Phi(\tau_0, \mathbf{0})$, encontra-se

$$\begin{aligned}\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) &= -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + 2 \sum_{\ell m} g_\ell \varphi_{\ell m} Y_{\ell m} \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \phi(\tau) \frac{d\epsilon^\ell}{dx} d\tau, \\ &= \phi(\tau_{dec}) \sum_{\ell m} \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \mathcal{I}_\ell \epsilon_{dec}^\ell,\end{aligned}\quad (5.40)$$

onde

$$\mathcal{I}_\ell \equiv -2g_\ell(n_s) \left[1 - \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{\phi(\tau)}{\phi(\tau_{dec})} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x_{dec}} \right)^\ell d\tau \right]. \quad (5.41)$$

Efeito Doppler

A equação (3.12) relaciona a perturbação de super-horizonte no potencial gravitacional com os desvios de temperatura da RCF devido ao efeito Doppler. Aplicando o potencial (5.27) na equação (3.12), tem-se que

$$\begin{aligned}\Delta T_D(\tau_0, \mathbf{n}) &= x_{dec} \mathcal{V}(\tau) \mathbf{n} \cdot \nabla \left(\phi(\tau_{dec}) \sum_{\ell m} g_\ell \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \epsilon^\ell \right) \Big|_{\tau_{dec}}^{\tau_0}, \\ &= \phi(\tau_{dec}) \sum_{\ell m} \varphi_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \mathcal{D}_\ell \epsilon_{dec}^\ell,\end{aligned}\quad (5.42)$$

onde foi definido,

$$\mathcal{D}_\ell \equiv \frac{g_\ell(n_s)}{\phi(\tau_{dec})} [\mathcal{V}(\tau_0) \delta_{\ell 1} - \mathcal{V}(\tau_{dec}) \ell]. \quad (5.43)$$

5.4 Limites observacionais

Agora que todos os efeitos relevantes foram calculados é possível usar os dados do satélite Planck para fixar um limite na razão L/x_{dec} . Isso será feito usando a fórmula de Sachs-Wolfe (Eq. (3.1)) que considera os efeitos SW (Eq. (5.37)), SWI (Eq. (5.40)) e Doppler (Eq. (5.42)):

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}(\tau_0) Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (5.44)$$

Aqui os coeficiente de multipolos são dados por

$$a_{\ell m}(\tau_0) = \phi(\tau_{dec}) \varphi_{\ell m} (\mathcal{S}_\ell + \mathcal{I}_\ell + \mathcal{D}_\ell) \epsilon_{dec}^\ell. \quad (5.45)$$

Essa expressão mostra que os limites mais fortes na razão L/x_{dec} está nos menores valores de ℓ , ou seja, nos multipolos mais baixos. Entretanto o monopolo não é observável e o dipolo induzido por perturbações de super-horizonte é nulo

(veja o apêndice D). Consequentemente o menor multipolo influente no efeito GZ deve ser o quadrupolo.

Para demonstrar a influencia do índice escalar espectral e dos efeitos SW, SWI e Doppler na anisotropia da RCF definimos uma flutuação de temperatura da seguinte forma

$$\Delta T_\ell(\theta; n_s) \equiv (\mathcal{S}_\ell + \mathcal{I}_\ell + \mathcal{D}_\ell)Y_{\ell 0}(\theta). \quad (5.46)$$

Os gráficos da Eq. (5.46) para o dipolo, quadruplo e octopolo estão apresentado na Fig. 5.5 considerando diferentes valores de n_s . No primeiro gráfico vemos claramente a irrelevância das perturbações de grandes escalas no dipolo da RCF. Observe, pelos outros dois gráficos, como n_s influencia na amplitude das perturbações no espectro de temperatura.

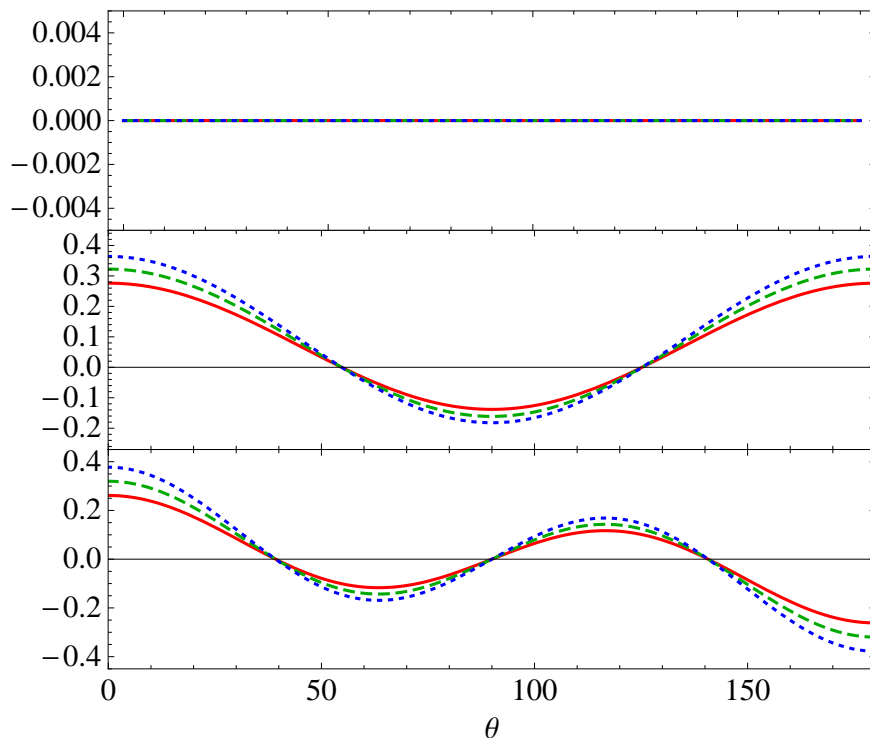


Figura 5.5 – Contribuição dos baixos multipolos na RCF em função de θ devido às ondas de super-horizonte. De cima pra baixo está o dipolo ΔT_1 , quadrupolo ΔT_2 e o octopolo ΔT_3 . As curvas contínuas, tracejadas e pontilhadas representam os valores $n_s = 0.5$, 1 e 1.5, respectivamente.

A Fig. 5.6 mostra a contribuição dos efeitos SW, SWI e Doppler separadamente para os primeiros multipolos da RCF. O primeiro gráfico nos mostra que o efeito SW é anulado pelo SWI e Doppler. (Mostramos isso analiti-

camente no Ap. D). Os outros dois gráficos tornam evidente a maior relevância do efeito SW nos baixos multipolos da RCF.

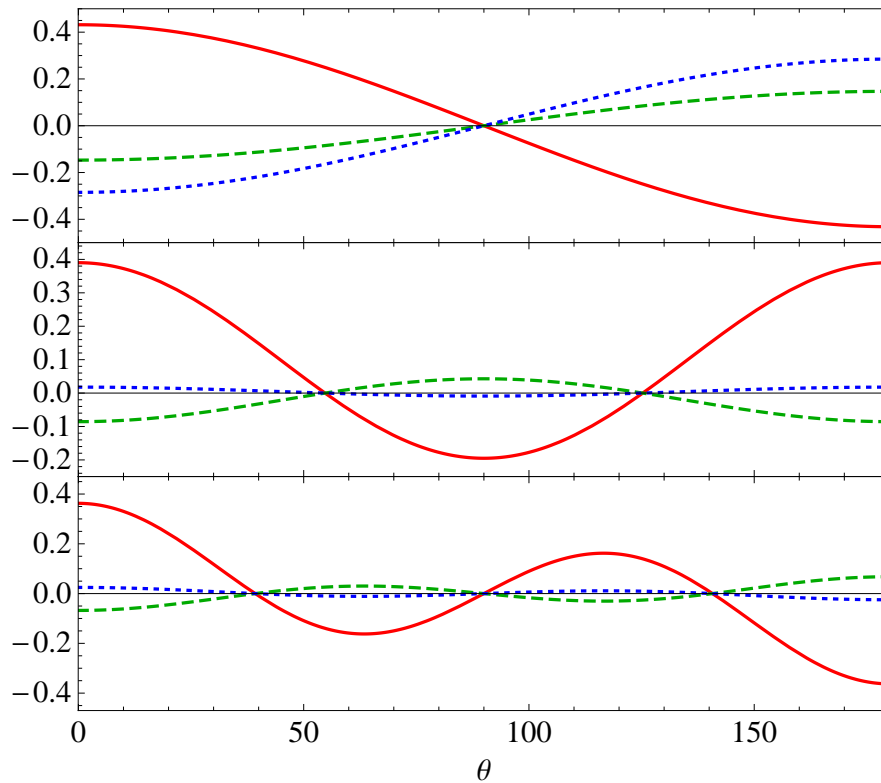


Figura 5.6 – Contribuição dos efeitos SW (curva contínua), SWI (pontilhada) e Doppler (tracejada) em função de θ . O primeiro gráfico mostra o efeito SW sendo anulado pelo SWI e Doppler. Veja o primeiro gráfico da figura 5.5. Os gráficos foram feitos para $n_s = 1$, e de cima para baixo está o dipolo, quadrupolo e octopolo para cada termo da equação (5.46).

Prosseguindo, lembre-se que $\varphi_{\ell m}$ são variáveis gaussianas, então a variância dos coeficientes de multipolos na equação (5.45) é dada pela Eq. (3.18), de modo que

$$C_\ell \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \phi(\tau_{dec})^2 (\mathcal{S}_\ell + \mathcal{I}_\ell + \mathcal{D}_\ell)^2 \epsilon_{dec}^{2\ell}. \quad (5.47)$$

Usando o valor de melhor ajuste do satélite Planck, $n_s = 0,9624$, e a equação (5.34), a amplitude do quadruplo é calculada:

$$C_2 = 0,067 \left(\frac{x_{dec}}{L} \right)^4. \quad (5.48)$$

O valor de melhor ajuste do quadrupolo medido pelo Planck foi de

$$\frac{2(2+1)}{2\pi}C_2 = 299,495 \times 10^{-12} . \quad (5.49)$$

Se considerarmos a hipótese, pouco provável, de que todo o quadrupolo medido pelo Planck foi causado pela onda de super-horizonte definida aqui, encontra-se o limite inferior $L/x_{dec} \lesssim 120$. Dado que qualquer aumento no valor medido do quadrupolo irá diminuir o valor da razão L/x_{dec} , uma atitude mais conservadora seria tomar o valor de C_2 considerando a barra de erro superior. A equipe do satélite Planck mostrou, com um grau de confiança de 68%, que o quadrupolo é

$$\frac{2(2+1)}{2\pi}C_2 = (299,495^{+797,980}_{-159,596}) \times 10^{-12} . \quad (5.50)$$

Tomando a barra de erro superior, a Eq. (5.48) nos fornece o limite

$$L \gtrsim 87x_{dec} , \quad (5.51)$$

que é menor que o obtido originalmente, Eq. (4.7). Visto que foram várias ondas de diferentes fases e amplitudes que influenciaram a formação das estruturas de grandes escalas observadas hoje, nossa estimativa tem um apelo mais coerente com o modelo Λ CDM, uma vez que usamos uma perturbação do potencial gravitacional devido a uma distribuição de ondas estocástica, no lugar de uma única onda plana.

A fim de obter intuição sobre esse resultado, vamos ver como seria uma estimativa puramente teórica desse limite inferior. Usamos o CAMB [48] para calcular o quadrupolo para os parâmetros fiduciais adotados nesse trabalho e encontramos

$$\frac{2(2+1)C_2}{2\pi} \simeq 1136 \times 10^{-12} . \quad (5.52)$$

Substituindo esse valor na Eq. (5.48) obtemos

$$L \gtrsim 86x_{dec} , \quad (5.53)$$

que é essencialmente o mesmo valor obtido na Eq. (5.51). Adicionando uma barra de erro de variância cósmica de 1σ a esse valor, o limite inferior vai para $L/x_{dec} \gtrsim 76$, que, novamente, não é um valor tão distante do que nós obtivemos pelos limites observacionais.

Finalmente, voltando a questão original levantada nesse trabalho, nós podemos checar que o limite no tamanho do trecho homogêneo do Universo é uma função do índice espectral. Essa característica é um resultado direto do nosso método onde usamos uma combinação linear de ondas gaussianas aleató-

rias, Eq. (5.17), no lugar de uma onda plana, Eq. (4.1). Além do mais, por causa da relação $P(k) \propto L^{4-n_s}$, essas ondas recebem pesos diferentes em diferentes escalas. Esse comportamento está ilustrado na figura 5.7. Para um índice espectral vermelho ($n_s < 1$) o espectro de potências amplia o peso das perturbações de grandes comprimentos de onda gerando uma maior influência dessas perturbações e uma estimativa mais fraca do tamanho da escala de homogeneidade. Já para o índice azul ($n_s > 1$) o espectro de potências filtra as ondas com comprimento arbitrariamente grandes, dessa maneira a estimativa de L/x_{dec} se torna mais forte. Note, então, que em um nível mais fundamental L/x_{dec} é constante, dependendo apenas da duração da inflação. O que varia com n_s é nossa habilidade de usar os dados atuais para impor um limite nessa razão, e não a razão por si mesma.

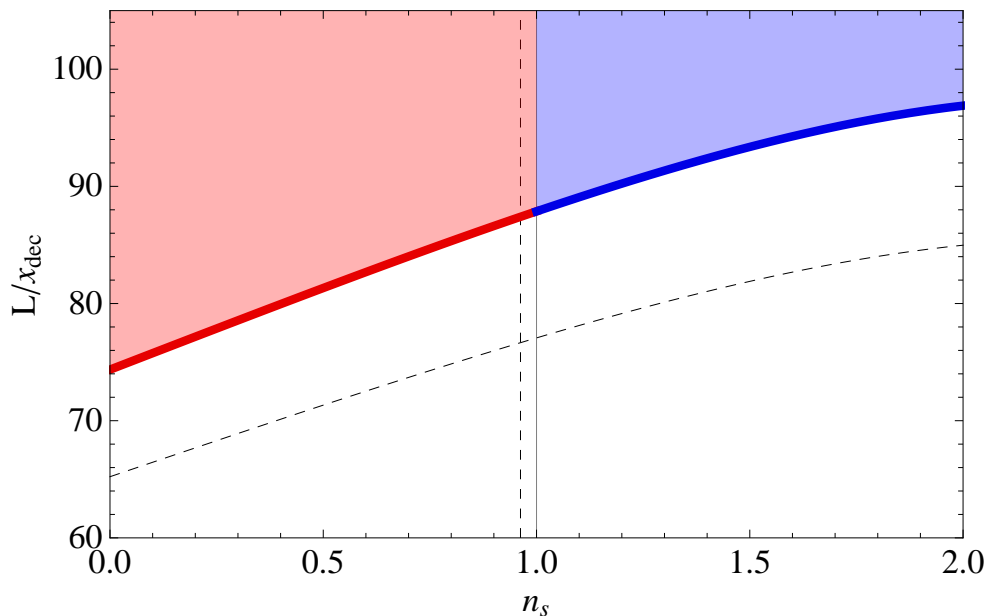


Figura 5.7 – Limite imposto pelo quadrupolo à razão L/x_{dec} em função de n_s segundo os dados do satélite Planck com erro (inferior) de 1σ .

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesse trabalho apresentamos os conceitos básicos da física de formação de estruturas do Universo via perturbações do modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Em seguida introduzimos a quantidade n_s (índice espectral escalar) que mede a dependência da amplitude das perturbações com a escala. Apresentamos também as principais características da física da Radiação Cósmica de Fundo em grandes escalas e mostramos como se extrai informação do seu mapa de flutuações de temperatura. Essa introdução foi necessária para se fazer uma revisão do efeito Grishchuk-Zel'dovich (GZ), cuja aplicação – a estimativa do raio do Universo homogêneo – é o foco deste trabalho.

Todos esses conceitos nos deram suporte para cumprir nosso objetivo de revisar o efeito GZ levando em conta o período de evolução quase-exponencial do universo, o que nos remete ao valor de n_s . Pela análise da função de correlação de dois pontos da RCF no espaço real explicitamos a influência de n_s na distribuição dos comprimentos de onda no espectro de potências. Aqui encontramos um comportamento nas equações do qual não entramos em muito detalhes. A função de correlação de dois pontos apresenta uma descontinuidade com relação aos valores de n_s . Para $n_s \leq 1$ a função apresenta raiz em alguma escala angular. Entretanto para $n_s > 1$ a curva deixa de cortar o eixo zero, não apresentado, com isso, escalas anti-correlacionadas. Além disso, a função de correlação de dois pontos encontrada analiticamente é válida somente nos intervalos $1 < n_s < 2$ e $2 < n_s < 3$. A causa dessas descontinuidades encontradas pode ser objeto de investigações futuras.

Prosseguindo, o que nós fizemos foi construir um potencial gravitacional que leva em consideração que todas as ondas que reentram no horizonte têm amplitudes e fases diferentes. Obtemos, assim um potencial gravitacional proveniente de ondas estocásticas gaussianas.

Uma vez que nosso método envolve várias ondas, as potências de multipolos da RCF serão compartilhados com diferentes comprimentos de onda, o que implica em limites observacionais mais fracos sobre o tamanho do universo em comparação aos limites obtidos nos trabalhos do efeito GZ original. Além disso, uma vez que a potência compartilhada com as escalas maiores que o raio de Hubble dependem de n_s , a contribuição na escala L para o quadrupolo da RCF

também dependerá de n_s . Usando o valor de melhor ajuste do satélite Planck para n_s e o quadrupolo C_2 , encontramos que o universo homogêneo estende-se a uma distância de pelo menos 87 vezes o nosso horizonte ótico. Esse limite é aproximadamente a metade do limite original em [51]. Esse resultado é compatível com as estimativas analíticas encontradas nos trabalhos precedentes [49, 56, 52], e uma ordem de magnitude menor que a análise estatística conduzida em [57], onde o efeito GZ padrão foi empregado.

A principal incógnita que encontramos nos cálculos do efeito GZ foi a inexistência de dipolo induzido por perturbações de grandes comprimentos de onda. Embora o dipolo medido seja dado principalmente pelo movimento da terra através espaço, na direção do aglomerado de Virgo, parte desse dipolo pode ter sido induzido devido a física do universo primordial. Entretanto, demonstramos numericamente (Fig. 5.5) que perturbações de grandes comprimentos de onda em um modelo Λ CDM não induzem dipolo na RCF. A origem dessa peculiaridade do modelo, no entanto, ainda não é completamente conhecida. Além disso, assumimos intrinsecamente que a região homogênea do universo tem simetria esférica. Porém não há motivos físicos para tal suposição e uma investigação a respeito da forma da homogeneidade seria uma extensão do nosso trabalho.

Como comentário final, gostaríamos de ressaltar que se por um lado nossa abordagem do efeito GZ leva a limites observacionais mais fracos quando comparado com as abordagens precedentes, por outro lado, nossa abordagem é mais fiel ao status da cosmologia atual.

Referências Bibliográficas

- [1] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys.J.*, v. 142, p. 419–421, 1965.
- [2] HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proc.Nat.Acad.Sci.*, v. 15, p. 168–173, 1929.
- [3] MATHER, J. C.; CHENG, E.; SHAFER, R.; BENNETT, C.; BOGGESS, N. et al. A Preliminary measurement of the Cosmic Microwave Background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite. *Astrophys.J.*, v. 354, p. L37–L40, 1990.
- [4] BENNETT, C. et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. 2012.
- [5] ESA. http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck.
- [6] ADE, P. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. 2013.
- [7] GRISHCHUK, L. P.; ZELDOVICH, I. B. Long-wavelength perturbations of a Friedmann universe, and anisotropy of the microwave background radiation. *Soviet Astronomy*, v. 22, p. 125–129, 1978.
- [8] BROUT, R.; ENGLERT, F.; GUNZIG, E. The Creation of the Universe as a Quantum Phenomenon. *Annals Phys.*, v. 115, p. 78, 1978.
- [9] STAROBINSKY, A. A. Relict Gravitation Radiation Spectrum and Initial State of the Universe. (In Russian). *JETP Lett.*, v. 30, p. 682–685, 1979.
- [10] STAROBINSKY, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys.Lett.*, v. B91, p. 99–102, 1980.
- [11] KAZANAS, D. Dynamics of the Universe and Spontaneous Symmetry Breaking. *Astrophys.J.*, v. 241, p. L59–L63, 1980.
- [12] SATO, K. First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, v. 195, p. 467–479, 1981.
- [13] GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys.Rev.*, v. D23, p. 347–356, 1981.
- [14] MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. (In Russian). *JETP Lett.*, v. 33, p. 532–535, 1981.

- [15] YADAV, J. K.; BAGLA, J.; KHANDAI, N. Fractal Dimension as a measure of the scale of Homogeneity. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, v. 405, p. 2009, 2010.
- [16] AAO. <http://www2.aao.gov.au/2dfgrs/>.
- [17] FREEDMAN, W. L. The hubble constant and the expansion age of the universe. *Physics Reports*, v. 333–334, n. 0, p. 13 – 31, 2000.
- [18] WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [19] FIXSEN, D. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. *Astrophys.J.*, v. 707, p. 916–920, 2009.
- [20] MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. Capmbridge University Press, 2005.
- [21] NASA. http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/firas_overview.cfm.
- [22] PATHRIA, R. K. *Statistical mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1996.
- [23] ADE, P. et al. Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and Statistics of the CMB. 2013.
- [24] SACHS, R.; WOLFE, A. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys.J.*, v. 147, p. 73–90, 1967.
- [25] LIFSHITZ, E. On the Gravitational stability of the expanding universe. *J.Phys.(USSR)*, v. 10, p. 116, 1946.
- [26] LIFSHITZ, E.; KHALATNIKOV, I. Investigations in relativistic cosmology. *Adv.Phys.*, v. 12, p. 185–249, 1963.
- [27] MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys.Rept.*, v. 215, p. 203–333, 1992.
- [28] PEACOCK, J. A. *Cosmological phyciscs*. Cambridge University Press, 1999.
- [29] PETER, P.; UZAN, J.-P. *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2009.

- [30] ADE, P. et al. Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood. 2013.
- [31] LINDE, A. D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys.Lett.*, v. B108, p. 389–393, 1982.
- [32] ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys.Rev.Lett.*, v. 48, p. 1220–1223, 1982.
- [33] HAWKING, S.; MOSS, I.; STEWART, J. Bubble Collisions in the Very Early Universe. *Phys.Rev.*, v. D26, p. 2681, 1982.
- [34] HAWKING, S. The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe. *Phys.Lett.*, v. B115, p. 295, 1982.
- [35] STAROBINSKY, A. A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys.Lett.*, v. B117, p. 175–178, 1982.
- [36] BARDEEN, J. M.; STEINHARDT, P. J.; TURNER, M. S. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe. *Phys.Rev.*, v. D28, p. 679, 1983.
- [37] BAUMANN, D. TASI Lectures on Inflation. 2009.
- [38] PEREIRA, T. S. *Teoria inflacionária em universos anisotrópicos*. 2008. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de São Paulo, 2008.
- [39] MUKHANOV, V.; WINITZKI, S. *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [40] ALPHER, R.; BETHE, H.; GAMOW, G. The origin of chemical elements. *Phys.Rev.*, v. 73, p. 803–804, 1948.
- [41] ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. On the relative abundance of the elements. *Phys. Rev.*, v. 74, p. 1737–1742, Dec 1948.
- [42] HU, W. *Wandering in the background: A cosmic microwave background explorer*. 1995. Tese (Doutorado em Física) - University of California at Berkeley, 1995.
- [43] BUTKOV, E. *Física matemática*. LTC, 2008.

- [44] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier, 2007.
- [45] ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. Princenton University Press, 2010.
- [46] COPI, C. J.; HUTERER, D.; SCHWARZ, D. J.; STARKMAN, G. D. Large angle anomalies in the CMB. *Adv.Astron.*, v. 2010, p. 847541, 2010.
- [47] ADE, P. et al. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. 2013.
- [48] LEWIS, A.; CHALLINOR, A.; LASENBY, A. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Astrophys.J.*, v. 538, p. 473–476, 2000.
- [49] TURNER, M. S. A Tilted universe (and other remnants of the preinflationary universe). *Phys.Rev.*, v. D44, p. 3737–3748, 1991.
- [50] Mukhanov, V. F.; Chibisov, G. V. The microwave background anisotropy and the homogeneity of the universe. *Soviet Astronomy Letters*, v. 10, p. 374–376, 1984.
- [51] GRISHCHUK, L. Duration of inflation and possible remnants of the preinflationary universe. *Phys.Rev.*, v. D45, p. 4717–4719, 1992.
- [52] ERICKCEK, A. L.; CARROLL, S. M.; KAMIONKOWSKI, M. Superhorizon Perturbations and the Cosmic Microwave Background. *Phys.Rev.*, v. D78, p. 083012, 2008.
- [53] BRUNI, M.; LYTH, D. H. Peculiar velocity, cosmic perturbation theory and the CMB anisotropy. *Phys.Lett.*, v. B323, p. 118–123, 1994.
- [54] BASHINSKY, S.; BERTSCHINGER, E. Dynamics of cosmological perturbations in position space. *Phys.Rev.*, v. D65, p. 123008, 2002.
- [55] ABRAMO, L. R.; REIMBERG, P. H.; XAVIER, H. S. CMB in a box: causal structure and the Fourier-Bessel expansion. *Phys.Rev.*, v. D82, p. 043510, 2010.
- [56] CHIBISOV, G.; MUKHANOV, V. F. Theory of relativistic potential: cosmological perturbations. 1983.
- [57] CASTRO, P. G.; DOUSPIS, M.; FERREIRA, P. G. Scale of homogeneity of the universe from WMAP. *Phys.Rev.*, v. D68, p. 127301, 2003.

Apêndices

Apêndice A

Resultados úteis

Para quem quiser seguir os cálculos das seções 2.1 e 2.2, vamos apresentar neste apêndice o resultado dos cálculos das quantidades necessárias para deduzir as equações de Einstein.

A.1 Background

A métrica de Friedman-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(-1, \delta_{ij}) , \quad \bar{g}^{\mu\nu} = a^{-2}(1, \delta^{ij}) , \quad a = a(\tau) , \quad (\text{A.1})$$

onde a barra sobrescritas indicam que são quantidades de fundo e δ_{ij} é o delta de Kronecker. A partir dessa métrica obtêm-se as componentes do símbolo de Christoffel,

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\lambda\mu,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}) , \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\Gamma}_{00}^0 = \frac{a'}{a} , \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^0 = \frac{a'}{a}\delta_{ij} , \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\Gamma}_{0j}^i = \frac{a'}{a}\delta_j^i , \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \delta_{0i}^0 = \delta_{00}^i = 0 , \quad (\text{A.6})$$

onde $a' = \partial a / \partial \tau$. Então, as componentes do tensor de Ricci serão,

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\rho\lambda}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\mu\rho}^{\lambda} , \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{R}_{00} = -3 \left[\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] = -3\mathcal{H}' , \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{R}_{0i} = 0 , \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{R}_{ij} = \left[\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] \delta_{ij} = (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\delta_{ij} , \quad (\text{A.10})$$

onde $\mathcal{H} = a'(\tau)/a(\tau)$ é o parâmetro de Hubble conforme. Essas são as quantidade que descrevem o espaço. O conteúdo material do Universo, na Relatividade Geral, é descrito pelo tensor de energia-momento, que para um fluido perfeito é dado por

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{v}_\mu\bar{v}_\nu + \bar{p}\bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{v}_\mu = -a(1, 0, 0, 0), \quad (\text{A.11})$$

e pela métrica de FLRW (A.1) as componentes do tensor de energia-momento são obtidas:

$$\bar{T}_{00} = a^2\bar{\rho}, \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{T}_{0i} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{T}_{ij} = a^2\bar{p}\delta_{ij}. \quad (\text{A.14})$$

Consequentemente o traço será

$$\bar{T} = -\bar{\rho} + 3\bar{p}. \quad (\text{A.15})$$

A.2 Perturbações

Inserindo uma pequena perturbação na métrica (A.1),

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad \delta g_{\mu\nu} \ll 1, \quad (\text{A.16})$$

obtêm-se

$$\delta g_{\mu\nu} = -2a^2(\Phi, \Phi\delta_{ij}), \quad \delta g^{\mu\nu} = -2a^{-2}(\Phi, \Phi\delta^{ij}). \quad (\text{A.17})$$

Considerando as perturbações, as conexões serão

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho, \\ \Gamma\delta_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda}(\delta g_{\nu\lambda,\mu} + \delta g_{\lambda\mu,\nu} - \delta g_{\mu\nu,\lambda}) - \frac{1}{2}\delta g^{\rho\lambda}(\bar{g}_{\nu\lambda,\mu} + \bar{g}_{\lambda\mu,\nu} - \bar{g}_{\mu\nu,\lambda}), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

com as componentes,

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}(\bar{g}^{00}\delta g_{00,0} - \delta g^{00}\bar{g}_{00,0}) \\ &= \Phi'\end{aligned}\tag{A.19a}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}[\bar{g}^{00}\delta g_{00,i} - \delta g^{00}\bar{g}_{00,i}] \\ &= \Phi_{,i}\end{aligned}\tag{A.19b}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}[\bar{g}^{00}(-\delta g_{ij,0}) - \delta g^{00}(-\bar{g}_{ij,0})] \\ &= -\left(\Phi' + 4\frac{a'}{a}\Phi\right)\delta_{ij}\end{aligned}\tag{A.19c}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}[\bar{g}^{ij}(-\delta g_{00,i}) - \delta g^{ij}(-\bar{g}_{00,i})] \\ &= \Phi_{,i}\delta^{ij}\end{aligned}\tag{A.19d}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}[\bar{g}^{ik}\delta g_{ij,0} - \delta g^{ik}\bar{g}_{ij,0}] \\ &= -\Phi'\delta_j^i\end{aligned}\tag{A.19e}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}[\bar{g}^{il}(\delta g_{jl,k} + \delta g_{kl,j} - \delta g_{jk,l}) - \delta g^{il}(\bar{g}_{jl,k} + \bar{g}_{kl,j} - \bar{g}_{jk,l})] \\ &= -(\Phi_{,k}\delta_{jl} + \Phi_{,j}\delta_{lk} - \Phi_{,l}\delta_{jk})\delta^{il}.\end{aligned}\tag{A.19f}$$

Análogo às conexões, a perturbação no tensor de Ricci é dada por

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} ,\tag{A.20}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)_{,\lambda} - (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\nu)_{,\nu} + \bar{\Gamma}_{\rho\lambda}^\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\rho\lambda}^\rho\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\rho\delta\Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\rho\bar{\Gamma}_{\mu\rho}^\lambda ,\tag{A.21}$$

com as seguintes componentes expressas com índices mistos (covariantes-contravariantes):

$$\delta R^0_0 = -a^{-2} [\nabla^2\Phi + 3(\Phi' + 2\mathcal{H}'\Phi + 2\mathcal{H}\Phi')]\tag{A.22a}$$

$$\delta R^0_i = -2a^{-2}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')_{,i}\tag{A.22b}$$

$$\delta R^i_j = -a^{-2} [\Phi'' - \nabla^2\Phi + 4(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 6\mathcal{H}\Phi] \delta_j^i .\tag{A.22c}$$

Da métrica total (Eq. (A.16)) calcula-se o escalar de Ricci,

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R ,\tag{A.23}$$

que tem sua parte perturbada dada por

$$\delta R \equiv \delta R^0_0 + \delta R^i_i ,\tag{A.24}$$

$$\delta R = -2a^{-2} [3\Phi'' - \nabla^2\Phi + 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + 12\mathcal{H}\Phi'] .\tag{A.25}$$

Todas essas quantidades são utilizadas no tensor de Einstein, que tem sua parte perturbada dada por

$$\delta G^\mu{}_\nu = \delta R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} [(\bar{g}^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} - \delta g^{\mu\lambda}\bar{g}_{\lambda\nu})\bar{R} + \delta^\mu{}_\nu\delta R] , \quad (\text{A.26})$$

onde $\delta^\mu{}_\nu$ é o delta de Kronecker. As componentes desse tensor são

$$\delta G^0{}_0 = -2a^{-2} [\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')] \quad (\text{A.27a})$$

$$\delta G^0{}_i = -2a^{-2}(\mathcal{H}\Phi + \Phi')_{,i} \quad (\text{A.27b})$$

$$\delta G^i{}_j = 2a^{-2} [\Phi'' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + 3\mathcal{H}\Phi'] \delta^i{}_j . \quad (\text{A.27c})$$

Para o cálculo das perturbações das quantidades referentes ao conteúdo material do Universo, temos que, inicialmente normalizar a velocidade $v_\mu = \bar{v}_\mu + \delta v_\mu$ usando a métrica (A.16):

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = v^\mu v_\mu = -1 , \quad (\text{A.28})$$

Dessa maneira se obtêm

$$v_\mu = -a(1 + \Phi, -v_i) , \quad v^\mu = a^{-1}(1 - \Phi, v^i) , \quad (\text{A.29})$$

E, finalmente, o tensor de energia-momento

$$\delta T^\mu{}_\nu = (\bar{\rho} + \bar{p})(\bar{v}^\mu\delta v_\nu + \delta v^\mu\bar{v}_\nu) + (\delta\rho + \delta p)\bar{v}^\mu\bar{v}_\nu + \delta p\delta^\mu{}_\nu . \quad (\text{A.30})$$

que possui as seguintes componentes,

$$\delta T^0{}_0 = -\delta\rho , \quad (\text{A.31a})$$

$$\delta T^0{}_i = (\bar{\rho} + \bar{p})v_i , \quad v_i = -\nabla_i V , \quad (\text{A.31b})$$

$$\delta T^i{}_j = \delta p\delta^i{}_j , \quad (\text{A.31c})$$

onde V é o potencial de velocidade.

Apêndice B

Relações úteis

Fizemos este apêndice para apresentar as deduções das relações usadas constantemente para expressar simplificar as fórmulas expostas na descrição da evolução do universo pelo modelo Λ CDM - Cap. 2.

Começemos pelas equações de Friedman (Eqs. (2.21) e (2.22)), que podem ser combinadas para se obter

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = -\kappa a^2 \bar{p} . \quad (\text{B.1})$$

Usando equação de estado $\omega = \bar{p}/\bar{\rho}$ a seguinte relação é encontrada

$$\mathcal{H}' = -\frac{\mathcal{H}^2}{2}(1 + 3\omega) , \quad (\text{B.2})$$

de onde segue que

$$a \propto \tau^{2/(1+3\omega)} , \quad (\text{B.3})$$

para qualquer ω .

Matéria e Radiação

Considerando, então, um universo dominado por um fluido constituído de matéria e radiação, da equação (2.40) do fator de escala usualmente defini-se

$$y \equiv \frac{a}{a_{eq}} , \quad (\text{B.4})$$

que, da Eq. (2.29) normalizada no instante de igualdade, tira-se a relação

$$y = \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} . \quad (\text{B.5})$$

Nessa variável y , a equação de Friedmann (B.2) toma a forma

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_{eq}^2 \frac{1+y}{2y^2} , \quad (\text{B.6})$$

onde \mathcal{H}_{eq} é o valor de \mathcal{H} em a_{eq} . Também a equação de estado pode ser reescrita em termos da razão $\bar{\rho}_m/\bar{\rho}_r$:

$$\omega = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+y} \right). \quad (\text{B.7})$$

Derivando a Eq. (B.7) com relação ao tempo conforme e substituindo na Eq. (2.60) pode-se encontrar

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4}y \right)^{-1}. \quad (\text{B.8})$$

Matéria e Constante Cosmológica

A segunda transição de domínio de fluidos ocorre entre a matéria e a constante cosmológica Λ . Da equação (2.29) resulta que

$$\frac{\bar{\rho}_\Lambda}{\bar{\rho}_m} = \left(\frac{a}{a_\Lambda} \right)^3, \quad (\text{B.9})$$

onde usualmente se define

$$y_\Lambda \equiv \frac{a}{a_\Lambda} = \left(\frac{\Lambda}{\kappa \bar{\rho}_\Lambda} \right), \quad (\text{B.10})$$

e $a_\Lambda \equiv a(\tau_\Lambda)$ é o valor do fator de escala na era de igualdade entre matéria e constante cosmológica que da Eq. (B.9) é dada por

$$a_\Lambda = \left(\frac{\Omega_0^m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}. \quad (\text{B.11})$$

Nessa nova variável as equações de Friedmann podem ser combinadas para obter

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_\Lambda^2 \left(\frac{1}{y_\Lambda} + y_\Lambda^2 \right), \quad (\text{B.12})$$

onde \mathcal{H}_Λ é o valor de \mathcal{H} em a_Λ . A equação de estado desse fluido é escrita como

$$\omega = -\frac{y_\Lambda^3}{1+y_\Lambda^3}. \quad (\text{B.13})$$

Note que a Eq. (2.60) é válida para todo fluido com ω dependente do tempo. Sendo assim é possível aplicar a equação de estado (B.13) na Eq. (2.60). Entretanto, o que se obtêm é que a velocidade do som no fluido matéria-constante cosmológica é nula, $c_s = 0$.

Apêndice C

Cálculo da fórmula de Sachs-Wolfe

Em grandes escalas angulares ($\theta \gtrsim 1^\circ$) a RCF pode ser entendida pela fórmula de Sachs-Wolfe. A RCF que medimos hoje é devida a fótons que foram emitidos no momento do desacoplamento e viajaram pelo espaço-tempo descrito pela métrica do tipo (2.43) chegando até nossos satélites hoje [24]. Neste apêndice vamos mostrar a dedução da fórmula de Sachs-Wolfe detalhadamente. Para isso, vamos inicialmente descrever brevemente o tratamento de um fóton viajando em um espaço-tempo perturbado. Em seguida trataremos da fórmula de Sachs-Wolfe efetivamente.

C.1 A propagação de um fóton em um espaço-tempo perturbado

Um observador que segue uma trajetória com a quadrivelocidade tangente v^μ irá medir uma energia do fóton dada por

$$E = \hbar f = -k^\mu v_\mu, \quad (\text{C.1})$$

onde f é a frequência e, no espaço-tempo de Minkowski, $k^\mu = (-E, \mathbf{k})$. Aqui \mathbf{k} é o momento do fóton. O quadrimomento do fóton é um vetor do tipo luz que satisfaz as duas equações

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0. \quad (\text{C.2})$$

Note que se dois espaços-tempo conforme têm a mesma estrutura causal então suas geodésicas nulas (do tipo luz) serão idênticas (desde que essas geodésicas definam o cone de luz). Por simplicidade, definimos uma métrica como $g_{\mu\nu} \equiv a^2 \hat{g}_{\mu\nu}$. Então segue que se k^μ é o vetor tangente da geodésica do tipo luz da métrica g , então $\hat{k}^\mu = a^2 k^\mu$ será o vetor tangente da geodésica nula da métrica \hat{g} , ou seja,

$$\hat{g}_{\mu\nu} \hat{k}^\mu \hat{k}^\nu = 0, \quad \hat{k}^\mu \hat{\nabla}_\mu \hat{k}^\nu = 0, \quad (\text{C.3})$$

onde $\widehat{\nabla}_\mu$ é a derivada covariante compatível com $\widehat{g}_{\mu\nu}$.

Nosso objetivo nesse capítulo é descrever o comportamento geodésico de um fóton em um universo perturbado cuja métrica é dada pela Eq. (2.43). Por isso é necessário perturbar também o quadrimomento do fóton. Implementa-se essa perturbação da seguinte maneira:

$$\widehat{k}^\mu = \widehat{k}^\mu + \delta\widehat{k}^\mu, \quad (\text{C.4})$$

$$= E(1 + M, \widehat{n}^i + \delta\widehat{n}^i), \quad (\text{C.5})$$

onde E é constante e o índice pode ser baixado pela métrica total (2.43):

$$\widehat{k}_\mu = \widehat{g}_{\mu\nu}\widehat{k}^\nu = E(-1 - M - 2\Phi, \widehat{n}_i + \delta\widehat{n}_i - 2\Phi\widehat{n}_i). \quad (\text{C.6})$$

Da Eq. (C.3) tiramos que

$$\begin{aligned} \widehat{k}^\mu\widehat{k}_\mu &= 0, \\ &= (-1 + \delta_{ij}\widehat{n}^i\widehat{n}^j, -2M + 2\delta_{ij}\widehat{n}^i\delta\widehat{n}^j - 2\Phi - 2\Phi\delta_{ij}\widehat{n}^i\widehat{n}^j) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

ou seja,

$$\delta_{ij}\widehat{n}^i\widehat{n}^j = 1, \quad \widehat{n}_j\delta\widehat{n}^j = \Phi + M + \Phi\delta_{ij}\widehat{n}^i\widehat{n}^j. \quad (\text{C.8})$$

Para perturbações de primeira ordem a geodésica de \widehat{k}^μ é escrita

$$\frac{d\delta\widehat{k}^\mu}{d\lambda} \equiv \widehat{k}^\mu\partial_\mu\delta\widehat{k}^\nu = -\widehat{\Gamma}_{\mu\rho}^\nu\widehat{k}^\mu\widehat{k}^\rho. \quad (\text{C.9})$$

Usando a decomposição (C.4) a componente do tipo tempo ($\nu = 0$) fornece

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\widehat{k}^0}{d\lambda} &= \frac{dM}{d\lambda} = \widehat{n}^i\partial_i M + \partial_0 M, \\ &= -2\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - 2\widehat{n}^i\partial_i\Phi. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

C.2 A fórmula de Sachs-Wolfe

O fóton observado hoje da RCF tem energia dada por $E(\tau_0, \mathbf{n})$ medida por um observador comóvel com quadri-velocidade v^μ , enquanto ele foi emitido na era do desacoplamento com energia $E(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})$. Então, da Eq. (C.1), temos que

$$\frac{E(\tau_0, \mathbf{n})}{E(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})} = \frac{f_0}{f_{dec}} = \frac{(k^\mu v_\mu)_0}{(k^\mu v_\mu)_{dec}}. \quad (\text{C.11})$$

Como o fóton viaja numa geodésica do tipo luz, onde

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dx^2 = d\tau^2, \quad (\text{C.12})$$

o ponto do desacoplamento é dado por

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{dec} = -\mathbf{n}(\tau_0 - \tau_{dec}), \quad (\text{C.13})$$

onde alinhou-se \mathbf{n} ao longo da direção de observação. Em uma primeira análise usaremos a chamada *aproximação de Born*, onde as quantidades perturbadas são entendidas como campos sobre o espaço-tempo de fundo [29]. Das Eqs. (C.11) e (2.7) pode-se inferir que a temperatura do fóton emitido se relaciona com a temperatura do fóton observado da seguinte maneira

$$\frac{T(\tau_0, \mathbf{n})}{T(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})} = \frac{a(\tau_{dec})}{a(\tau_0)} \left\{ 1 + [M + \Phi + n^i v_i]_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \right\}, \quad (\text{C.14})$$

onde usamos $v_\mu = (-1, v_i)$. Inserindo uma perturbação na temperatura $T(\tau, \mathbf{n}) = \bar{T}(\tau, \mathbf{n})(1 + \Delta T(\tau, \mathbf{n}))$, onde $\Delta T \equiv \delta T / \bar{T}$, temos

$$\frac{T(\tau_0, \mathbf{n})}{T(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})} = \frac{1 + \Delta T(\tau_0, \mathbf{n})}{1 + \Delta T(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})}, \quad (\text{C.15})$$

comparando com a Eq. (C.14) encontramos

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \Delta T(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + [M + \Phi + n^i v_i]_{\tau_{dec}}^{\tau_0}, \quad (\text{C.16})$$

para perturbações de primeira ordem. Por se tratar de uma radiação com espectro de corpo negro, a temperatura da radiação do instante de desacoplamento, $\Delta T(\mathbf{x}_{dec})$, se relaciona com a densidade de energia através da lei de Stefan-Boltzmann,

$$\rho_r = \sigma T^4 \quad (\text{C.17})$$

onde $\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Levando em conta que as perturbações na densidade de energia da radiação estão sujeitas às flutuações na sua temperatura, temos que:

$$\begin{aligned} \rho_r &= \sigma T^4, \\ \bar{\rho}_r + \delta \rho_r &= \sigma (\bar{T} + \delta T)^4, \\ \rho_r (1 + \delta_r) &= \sigma T^4 (1 + 4\Delta T), \quad \delta_r \equiv \frac{\delta \rho_r}{\rho_r}, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

logo,

$$\Delta T(\mathbf{x}_{dec}, \tau_{dec}) = \frac{1}{4}\delta_r . \quad (\text{C.19})$$

O cálculo de $[M]_{\tau_{dec}}^{\tau_0}$ pode ser feito com auxílio da equação (C.10),

$$[M]_{\tau_{dec}}^{\tau_0} = -2[\Phi]_{\tau_{dec}}^{\tau_0} - 2 \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} ds . \quad (\text{C.20})$$

Finalmente é possível escrever

$$\Delta T(\tau_0, \mathbf{n}) = \left[\frac{1}{4}\delta_r + \Phi \right] (\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + 2 \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{\partial \Phi(\tau, \mathbf{x}(\tau))}{\partial \tau} d\tau + \mathbf{n} \cdot \nabla v|_{\tau_{dec}}^{\tau_0} , \quad (\text{C.21})$$

onde $\Phi(\mathbf{x}_0, \tau_0)$ foi descartado por não ser mensurável já que se trata de um termo de monopolo na flutuação de temperatura. A integração foi feita ao longo da geodésica

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}(\tau) = -\mathbf{n}(\tau_0 - \tau) . \quad (\text{C.22})$$

A Eq. (C.21) é a conhecida fórmula de Sachs-Wolfe. O primeiro termo representa o efeito Sachs-Wolfe (SW) que considera flutuações do potencial gravitacional na superfície de último espalhamento. O segundo termo é o efeito Sachs-Wolfe Integrado (SWI) devido ao fato de que o fóton, na viagem de \mathbf{x}_{dec} até o observador, pode sofrer variação em sua frequência causada pela vibração temporal do potencial gravitacional. O último termo é decorrente do fato de que o observador não está com a mesma velocidade do plasma elétron-núcleo-fóton no momento da formação da RCF, o que gera o efeito Doppler.

Apêndice D

O Cancelamento do dipolo no efeito Grishchuk-Zel'dovich

Conforme mencionamos no Cap. 4, uma consequência do efeito de perturbações adiabáticas de grandes escalas num universo Λ CDM com radiação sub-dominante é que o dipolo induzido pelo efeito Sachs-Wolfe Integrado anula-se exatamente pelos dipolos induzidos nos efeitos Sachs-Wolfe e Doppler [52]. Para ver como isso ocorre vamos considerar o dipolo do potencial para os modos de super-horizonte, $kH^{-1} \ll 1$. Então, por simplicidade, tomamos uma perturbação do potencial gravitacional causada por uma única onda sinusoidal

$$\Phi = \phi(\tau) \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}). \quad (\text{D.1})$$

Da expansão em potências de $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau) \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^3}{6} + \mathcal{O}(k^4 x^4) \right], \quad (\text{D.2})$$

tomamos somente o dipolo:

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) \simeq \phi(\tau) \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{D.3})$$

Assumindo que o desacoplamento ocorreu muito tempo depois da era de igualdade entre matéria e radiação, o potencial é expresso por

$$\phi(\tau) = \frac{9\phi(0)}{4a} \Omega_0^m H_0^2 \tilde{H} \int_0^a \frac{da'}{[a' \tilde{H}(a')]^3}, \quad (\text{D.4})$$

onde \tilde{H} é o valor do parâmetro de Hubble durante o domínio de matéria e constante cosmológica, ou seja, para $y \gg 1$ em

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0^m}{a^3} \left(\frac{1}{y} + 1 \right) + \Omega_\Lambda \right] \Rightarrow \tilde{H}^2 = H_0^2 \left[\frac{\Omega_0^m}{a^3} + \Omega_\Lambda \right]. \quad (\text{D.5})$$

Contribuição do efeito Sachs-Wolfe

A contribuição do efeito Sachs-Wolfe para o dipolo é facilmente encontrada usando a equação (3.5),

$$\begin{aligned}\Delta T_{SW}(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) &= \phi(\tau_{dec}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} x_{dec} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\phi(0)}{\phi(\tau_{dec})} \right), \\ &\simeq \Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\phi(0)}{\phi(\tau_{dec})} \right),\end{aligned}\quad (\text{D.6})$$

com $\phi(\tau_{dec}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} x_{dec} \simeq \Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec})$.

Contribuição do efeito Sachs-Wolfe Integrado

Usando o dipolo do potencial na Eq. (3.8)

$$\begin{aligned}\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) &= 2 \left[-\phi(\tau_{dec}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} x_{dec} + \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \phi(\tau) d\tau \right] \\ &= -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \left[1 - \frac{1}{x_{dec}} \int_{\tau_{dec}}^{\tau_0} \frac{\phi(\tau)}{\phi(\tau_{dec})} d\tau \right].\end{aligned}\quad (\text{D.7})$$

Passando a variável de integração para o fator de escala e usando a equação (D.4) tem-se

$$\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) = -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \left[1 - \frac{9\phi(0)}{4\phi(\tau_{dec})} \frac{\Omega_0^m}{H_0 x_{dec}} \int_{a_{dec}}^1 \frac{G(a)}{a^3} da \right], \quad (\text{D.8})$$

onde

$$G(a) \equiv H_0^3 \int_0^a \frac{da'}{[a' \tilde{H}(a')]^3} = \int_0^a \frac{da'}{[a' \sqrt{\Omega_0^m a'^{-3} + \Omega_\Lambda}]^3}. \quad (\text{D.9})$$

Integrando a equação (D.8) por partes

$$\begin{aligned}\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) &= -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \left[1 - \frac{9\phi(0)}{4\phi(\tau_{dec})} \frac{\Omega_0^m}{H_0 x_{dec}} \left(\frac{G(a_{dec})}{2a_{dec}^2} - \frac{G_0}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{a_{dec}}^1 \frac{H_0^3 da}{a^5 \tilde{H}^3} \right) \right],\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

onde $G_0 \equiv G(a = 1)$. Note que nosso cálculo é geral, pois não precisamos assumir que o desacoplamento não ocorreu na era de domínio de matéria onde $\phi(\tau_{dec}) \simeq (9/10)\phi(0)$.

O próximo passo é o mais importante para a demonstração do cancelamento do dipolo, pois a integral sobre o parâmetro de Hubble da equação

(D.10), que depende da composição do universo, será calculada:

$$\begin{aligned}
\int_{a_{dec}}^1 \frac{H_0^3 da}{a^5 \tilde{H}^3} &= \int_{a_{dec}}^1 \frac{da}{a^5 (\Omega_0^m a^{-3} + \Omega_\Lambda)^{3/2}}, \\
&= \frac{2}{3\Omega_0^m} \int_{a_{dec}}^1 \frac{1}{a} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_0^m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} \right) da, \\
&= \frac{2}{3\Omega_0^m} \left(\frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0^m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} \Big|_{a_{dec}}^1 + \int_{a_{dec}}^1 \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0^m a^{-3} + \Omega_\Lambda}} da \right), \\
&= \frac{2}{3\Omega_0^m} \left(\frac{H_0}{a\tilde{H}} \Big|_{a_{dec}}^1 + \int_{a_{dec}}^1 \frac{H_0}{a^2 \tilde{H}} da \right), \\
&= \frac{2}{3\Omega_0^m} \left(1 - \frac{1}{a_{dec}} \frac{H_0}{\tilde{H}(a_{dec})} + H_0 x_{dec} \right). \tag{D.11}
\end{aligned}$$

Então, voltando na equação (D.10),

$$\begin{aligned}
\Delta T_{SWI}(\tau_0, \mathbf{n}) &= -2\Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \left[1 - \frac{3\phi(0)}{4\phi(\tau_{dec})} - \frac{1}{H_0 x_{dec}} \frac{9\phi(0)}{4\phi(\tau_{dec})} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{H_0}{\tilde{H}(a_{dec}) a_{dec}^2} D(a_{dec}) - D_0 + \frac{1}{3} - \frac{H_0}{3a_{dec} \tilde{H}(a_{dec})} \right) \right], \tag{D.12}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$D(a) \equiv \frac{\Omega_0^m}{2} \frac{\tilde{H}(a)}{H_0} G(a). \tag{D.13}$$

Note que já temos parte do cancelamento, pois os dois primeiros termos anulam-se exatamente com o termo do efeito SW, equação (D.6).

Contribuição do efeito Doppler

A componente de dipolo induzido pelo efeito Doppler, usando a (3.12), será

$$\Theta_D(\tau_0, \mathbf{n}) = \phi(\tau_{dec}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} x_{dec} [\mathcal{V}(\tau_0) - \mathcal{V}(\tau_{dec})]. \tag{D.14}$$

Onde \mathcal{V} é dado pela equação (3.11) e para $y \gg 1$ se torna

$$\mathcal{V}(\tau) = -\frac{2a^2 H}{3x_{dec} H_0^2 \Omega_0^m} \left(\frac{\phi(a)}{\phi(\tau_{dec})} + a \frac{d}{da} \frac{\phi(a)}{\phi(\tau_{dec})} \right). \tag{D.15}$$

Pela definição (D.13) encontra-se a relação $\phi(a) = (9\phi(0)/2a)D(a)$, então

$$\mathcal{V}(\tau) = -\frac{3\phi(0)}{\phi(\tau_{dec})} \frac{a^2 \tilde{H}}{x_{dec} H_0^2 \Omega_0^m} \frac{dD}{da}. \tag{D.16}$$

Usando a definição de $D(a)$ novamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{da} &= \frac{d}{da} \left(\frac{\Omega_0^m H_0^2 \tilde{H}}{2} \int_0^a \frac{da}{(a\tilde{H})^3} \right), \\
&= \frac{\Omega_0^m H_0^2}{2} \left[\frac{\tilde{H}}{(a\tilde{H})^3} + \frac{d}{da} \left(H_0 \sqrt{\Omega_0^m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \right) \frac{G}{H_0^3} \right], \\
&= -\frac{3\Omega_0^m}{2a^3} \left(\frac{H_0}{\tilde{H}} \right)^2 \left(\frac{D}{a} - \frac{1}{3} \right), \tag{D.17}
\end{aligned}$$

obtendo

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{9\phi(0)}{2\phi(\tau_{dec})} \frac{1}{\tilde{H}x_{dec}} \left(\frac{D}{a} - \frac{1}{3} \right). \tag{D.18}$$

Agora a componente de dipolo do efeito Doppler é escrita como

$$\begin{aligned}
\Theta_D(\tau_0, \mathbf{n}) &= \Phi(\tau_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) \frac{1}{H_0 x_{dec}} \frac{9\phi(0)}{2\phi(\tau_{dec})} \left(D_0 - \frac{1}{3} - \frac{H_0 D(a_{dec})}{\tilde{H}(a_{dec}) a_{dec}^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{H_0}{3a_{dec} \tilde{H}(a_{dec})} \right), \tag{D.19}
\end{aligned}$$

que se anula com os termos restantes do dipolo induzido pelo efeito SWI - Eq. (D.12). Finalmente, o dipolo do efeito Doppler e do efeito Sachs-Wolfe anulam-se exatamente com o dipolo do efeito Sachs-Wolfe Integrado. Com isso mostramos que as perturbações de grandes comprimentos de onda não induzem dipolo na anisotropia de temperatura da RCF.