



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

FÁBIO FERLA

**PERSPECTIVA HISTÓRICA, FILOSÓFICA E CULTURAL
SOBRE O QUE É O NÚMERO:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O TRABALHO EM SALA
DE AULA**

Londrina
2025

FÁBIO FERLA

**PERSPECTIVA HISTÓRICA, FILOSÓFICA E CULTURAL
SOBRE O QUE É O NÚMERO:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O TRABALHO EM SALA
DE AULA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.^a Dr.^a. Regina Celia Guapo Pasquini.

Londrina
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

F119p FERLA, FÁBIO FERLA.
PERSPECTIVA HISTÓRICA, FILOSÓFICA E CULTURAL SOBRE O QUE É O
NÚMERO : UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O TRABALHO EM SALA DE
AULA / FÁBIO FERLA FERLA. - Londrina, 2026.
137 f. : il.

Orientador: Regina Célia Guapo Pasquini Pasquini.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2026. Inclui
bibliografia.

1. Matemática - Tese. 2. Número - Tese. 3. História da Matemática - Tese. 4.
Filosofia da Matemática - Tese. I. Pasquini, Regina Célia Guapo Pasquini. II.
Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

CDU 51

FÁBIO FERLA

PERSPECTIVA HISTÓRICA, FILOSÓFICA E CULTURAL
SOBRE O QUE É O NÚMERO:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O TRABALHO EM SALA
DE AULA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof.^a Dr.^a. Regina Celia Guapo
Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Amarildo de Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná -
UNIOESTE

Prof.^a. Dr.^a. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 11 de dezembro de 2025.

A Prometeu.

AGRADECIMENTOS

Quero começar agradecendo à minha primeira professora, Tia Isabel, que plantou em mim a semente do aprendizado e despertou o interesse pelo conhecimento.

Sou igualmente grato a todos os professores que passaram pela minha vida. Cada um, à sua maneira, contribuiu de forma significativa para minha formação e trajetória. Em especial, agradeço aos professores do PROFMAT — todos excepcionais, cada um deixando sua marca, o que torna impossível destacar nomes sem cometer alguma injustiça.

Um agradecimento especial à minha orientadora, pelo apoio constante, paciência e pelas valiosas contribuições que me ajudaram a manter o foco, a refletir criticamente e a aprimorar este trabalho.

Aos meus alunos, que são fonte diária de motivação: são eles que me desafiam, me ensinam e me impulsionam a continuar aprendendo e buscando ser um professor melhor.

E, especialmente, à minha esposa, pela parceria de sempre, pelo apoio nos momentos difíceis e pela presença firme e constante ao meu lado durante toda esta jornada.

Adoramos a perfeição, porque a não podemos ter. (Fernando Pessoa)

RESUMO

FERLA, Fábio. **Perspectiva histórica, filosófica e cultural sobre o que é o número**: uma proposta didática para o trabalho em sala de aula. 2025. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

Neste trabalho investigamos a natureza da matemática e do número a partir de uma perspectiva histórica e filosófica, a fim de compreender como diferentes culturas e tradições formularam alguns dos conceitos essenciais da disciplina. O objetivo principal dessa investigação foi construir um produto educacional cujo conteúdo aproximasse a história da matemática da prática em sala de aula do professor permitindo que conceitos e ideias de povos e civilizações distintas pudessem ser explorados, a fim de contribuir para o ensino de matemática. Para isso realizamos uma pesquisa bibliográfica com refinamentos sucessivos, partindo de textos de referência em filosofia e história da matemática de autores diversos como Euclides, Platão, Aristóteles, Frege, Russell, Peano, Dedekind, Cantor e autores contemporâneos como Roque, Eves, Boyer, Caraça e Silva. Concentramos nossos estudos na conceituação de número e na relação entre entes matemáticos e as necessidades de tais entes. Para isso buscamos mostrar que a matemática não é fruto de um único povo, mas um produto cultural coletivo, incremental e multifacetado, resultado da contribuição de civilizações como sumérios, egípcios, gregos e povos originários das Américas. Ainda, os resultados mostram que o conceito de número, desde as marcas de um pastor neolítico até as formulações de Frege e os axiomas de Peano, não eliminam o conhecimento anterior, mas o complementam, revelando a permanência e a expansão da matemática ao longo dos séculos. Para o Produto Educacional, construímos o material intitulado O que é o número? Soma, subtração, multiplicação e divisão: ressignificando compreensões acerca do modo como civilizações antigas calculavam, em anexo, no qual relacionamos história, filosofia e alguns conceitos fundamentais da matemática, com o propósito de oferecer subsídios didáticos que possibilitem ao estudante perceber a matemática como ciência viva, cultural e humana. Concluímos que a abordagem histórico-filosófica amplia a compreensão dos conceitos matemáticos e enriquece o ensino, ao mostrar que a matemática é plural, fruto de diferentes contextos e essencial para pensar tanto o passado quanto o presente.

Palavras-chave: Matemática; Número; História da Matemática; Filosofia da Matemática; Produto educacional.

ABSTRACT

FERLA, Fábio. **A historical, philosophical, and cultural perspective on the nature of number**: a didactic proposal for use in the classroom. 2025. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

In this work, we investigate the nature of mathematics and of number from a historical and philosophical perspective, in order to understand how different cultures and traditions have formulated some of the essential concepts of the discipline. The main objective of this investigation was to develop an educational product whose content brings the history of mathematics closer to the teacher's classroom practice, allowing concepts and ideas from different peoples and civilizations to be explored, thus contributing to the teaching of mathematics. To this end, we conducted a bibliographical study with successive refinements, drawing on reference texts in the philosophy and history of mathematics by authors such as Euclid, Plato, Aristotle, Frege, Russell, Peano, Dedekind, Cantor, as well as contemporary authors such as Roque, Eves, Boyer, Caraça, and Silva. Our studies focused on the conceptualization of number and on the relationship between mathematical entities and the needs that give rise to such entities. In doing so, we sought to show that mathematics is not the product of a single people, but rather a collective, incremental, and multifaceted cultural construct, resulting from the contributions of civilizations such as the Sumerians, Egyptians, Greeks, and Indigenous peoples of the Americas. Furthermore, the results show that the concept of number—from the tally marks of a Neolithic shepherd to Frege's formulations and the Peano axioms—does not eliminate prior knowledge, but rather complements it, revealing the continuity and expansion of mathematics throughout the centuries. As the Educational Product, we developed the material entitled *What Is Number? Addition, Subtraction, Multiplication, and Division: Re-signifying Understandings of How Ancient Civilizations Calculated*, included as an appendix, in which we relate history, philosophy, and some fundamental concepts of mathematics, with the aim of providing didactic support that enables students to perceive mathematics as a living, cultural, and human science. We conclude that the historical–philosophical approach broadens the understanding of mathematical concepts and enriches teaching by showing that mathematics is plural, shaped by different contexts, and essential for thinking about both the past and the present.

Key-words: Mathematics; Number; History of Mathematics; Philosophy of Mathematics; Educational Product.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------------------|---|----|
| Figura 1 | – Sistema de numeração Maia..... | 19 |
| Figura 2 | – Um sistema de contagem rápida (tally marks) | 20 |
| Figura 3 | – Exemplo de alguns números no sistema numérico Maia | 21 |
| Figura 4 | – Exemplo da Matemática de Pitágoras..... | 25 |
| Figura 5 | – Exemplo alternativo do paradoxo de Aquiles | 27 |
| Figura 6 | – Método da exaustão utilizado por Arquimedes para calcular π | 32 |
| Figura 7 | – Representação gráfica da sequência de Fibonacci..... | 34 |
| Figura 8 | – Versão reduzida do compasso de proporção de Galileu..... | 35 |
| Figura 9 | – Antifairese de dois segmentos de reta | 41 |
| Figura 10 | – Antifairese lado e diagonal de um quadrado | 42 |
| Figura 11 | – Teorema de Tales | 45 |
| Figura 12 | – Exemplos da multiplicação de retas..... | 55 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---------|---|
| AEC | Antes da Era Comum |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| EC | Era Comum |
| PEd | Produto Educacional |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática, |
| UEL | Universidade Estadual de Londrina |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 10 |
| 2 | JUSTIFICATIVA | 11 |
| 3 | METODOLOGIA | 13 |
| 4 | HISTÓRIA DA MATEMÁTICA | 15 |
| 4.1 | História do número | 15 |
| 4.1.1 | Do concreto ao abstrato | 15 |
| 4.1.2 | A civilização e o sistema numérico Maia | 18 |
| 4.1.3 | A civilização e o sistema numérico Sumério..... | 21 |
| 4.2 | Grécia | 22 |
| 4.2.1 | Tales | 23 |
| 4.2.2 | Pitágoras | 24 |
| 4.2.3 | Eudoxo | 25 |
| 4.2.4 | Zenão | 27 |
| 4.2.5 | Platão | 28 |
| 4.2.6 | Sócrates | 29 |
| 4.2.7 | Aristóteles | 30 |
| 4.2.8 | Euclides..... | 31 |
| 4.2.9 | Arquimedes..... | 31 |
| 4.3 | Matemática após Grécia | 33 |
| 4.3.1 | Fibonacci..... | 33 |
| 4.3.2 | Galileu | 34 |
| 4.3.3 | Era dos fundamentos e estruturas matemáticas | 36 |
| 5 | TEORIA MATEMÁTICA | 37 |
| 5.1 | Números, números naturais e números inteiros | 37 |
| 5.2 | Antifairese, comensurabilidade e incomensurabilidade | 40 |
| 5.3 | Números primos, números compostos e divisibilidade | 42 |
| 5.4 | Números racionais, números irracionais e números reais | 43 |
| 5.5 | Teorema de Tales | 44 |

| | | |
|-----|---|-----------|
| 5.6 | Infinito e infinitesimal | 45 |
| 5.7 | Matemática..... | 46 |
| 6 | TEORIA DIDÁTICA E O PRODUTO EDUCACIONAL | 49 |
| 6.1 | Diretrizes e caracterização do Produto Educacional | 49 |
| 6.2 | Contribuições da história da matemática para o ensino | 50 |
| 6.3 | Uma abordagem didática da história da matemática..... | 52 |
| 6.4 | Da dissertação ao Produto Educacional | 56 |
| 7 | CONCLUSÃO | 58 |
| 8 | REFERÊNCIAS | 59 |
| | PRODUTO EDUCACIONAL..... | 62 |

1 INTRODUÇÃO

Toda reflexão sobre a matemática pode começar com uma indagação aparentemente simples: o que afinal estuda essa ciência? Para Silva (2007), uma resposta comum seria dizer que a matemática trata de números, figuras e outros objetos abstratos. Mas o próprio autor nos conduz a uma provocação: o que são, de fato, esses números, figuras e objetos? Ao contrário de outras áreas do conhecimento, que possuem objetos de estudo claramente definidos — como a biologia, voltada aos seres vivos, ou a astronomia, dedicada aos corpos celestes —, a matemática não se ancora em entidades físicas concretas. Mesmo o número, considerado sua unidade mais elementar, mostra-se um conceito de grande complexidade e difícil definição.

Entre o concreto e o abstrato, a matemática ocupa um lugar singular: seu objeto não se confunde com a realidade, mas tampouco se afasta completamente dela. O ato de contar, medir ou representar uma forma nasce da experiência, mas adquire autonomia ao ser formalizado em linguagem simbólica. Essa duplicidade entre prática e ideia, entre gesto e conceito, acompanha toda a história da matemática e explica por que ela pode ser vista simultaneamente como ciência exata e construção cultural.

Retomando os ensinamentos de Silva (2007), percebe-se que a articulação entre história e filosofia permite compreender a matemática como um produto cultural, o que implica reconhecer a existência não de uma única, mas de várias matemáticas. Esse ponto de vista evidencia a complexidade de definir os conceitos que sustentam essa ciência. O número, por exemplo, pode variar desde a formulação formal de Frege (2021), no final do século XIX, até simples marcas gravadas em um osso por um pastor neolítico para contar seu rebanho. E é justamente aí que se revela a singularidade da matemática: enquanto boa parte do “saber” desse indivíduo foi superada ao longo dos milênios pela evolução das ciências, o conhecimento matemático permanece válido. Ainda hoje é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre um rebanho e marcas em um osso, pois os conceitos matemáticos, uma vez criados, não anulam os anteriores, mas os complementam.

Com base nessa compreensão da matemática como construção cultural, propõe-se a análise de algumas culturas que influenciaram sua formação, desde os sumérios e egípcios, que forneceram a base para a tradição grega, até a matemática desenvolvida pelos povos originários das Américas. Esse percurso mostra que a matemática não é fruto de um único povo, mas resultado de uma construção colaborativa e incremental. A matemática grega, no entanto, constitui um caso particular, pois não se limitava a problemas práticos do cotidiano: com essa civilização, a matemática passa a ser pensada em termos gerais, surgem os axiomas e, em suma, a disciplina transforma-se em ciência, etapa fundamental para o que se conhece hoje. Entretanto, como lembra Roque (2012), essa tradição grega foi apropriada como herança pelos colonizadores europeus, inclusive como forma de justificar sua dominação. Nesse processo, a matemática passou a ser vista como ciência superior, elitista e acessível a poucos, o que resultou também na negação das contribuições de outros povos não gregos.

2 JUSTIFICATIVA

Este texto inicia com uma pergunta: Como explicar no ensino fundamental a relação entre a quantidade de números racionais e irracionais? A princípio, a resposta parece ser trivial, podemos simplesmente fazer uma pequena lista de irracionais e a seguir multiplicar cada racional que o aluno pensar, por um dos irracionais de nossa lista. Porém, com isso, começam a surgir problemas, pois para podermos conduzir esta explicação devemos primeiro saber o que é um número irracional. O que implica em saber também o que é um número em sentido geral.

Segundo Russel (2006) a definição para número foi dada por Gottlob Frege. Podemos dizer por esta definição, que número está relacionado com coleções (agrupamentos) de objetos, número é o que duas coleções de entes de naturezas diversas têm em comum, por exemplo, 3 laranjas e 3 pensamentos, o que tem em comum entre esses conjuntos é o número 3. Da

definição de número chegamos nas definições dos naturais, inteiros e racionais, mas ainda pensando na definição de número, uma conclusão a que chegamos é que números (naturais¹, inteiros e racionais) precisam de uma referência para “existir”. Por exemplo, podemos pensar no nível do mar como referência zero, assim o mar morto teria uma altitude negativa, porém se colocarmos nossa referência zero na fronteira do núcleo da terra com o manto, a altitude do mar morto seria positiva.

Tendo isso em vista, é possível afirmar que os números naturais, inteiros e racionais derivam diretamente de contextos de contagem², medição e comparação, todos fortemente ancorados em referências do mundo real. Já os números irracionais apresentam um desafio diferente, a definição básica de um irracional³ é aquele número que não pode ser representado por uma divisão de números inteiros (a/b). Se pensarmos nesta definição ela é de pouca utilidade e digamos, circular. Definir algo como aquilo que não é outro algo pode não ser uma boa prática, pois se determina a existência de um ente a partir do outro, ou seja, não estou propriamente definindo uma coisa e sim a não coisa. Vamos a uma outra ideia presente na definição de irracional, o que não pode ser medido, o incomensurável. Dessa forma começamos a avançar na nossa temática. Pensemos em uma medida no mundo real, usando uma régua por exemplo, uma determinada medida seria quando o tamanho do objeto coincidir com um dos riscos da régua, porém, se formos analisar a fundo, isto nunca ocorre. Para que as medidas coincidam teríamos de analisar o objeto no nível subatômico, e aí seria necessário visitar o domínio da Física quântica e do princípio da incerteza⁴.

¹ Mesmo para números naturais devemos definir nossa unidade, por exemplo pensando em um cacho de uva, qual a unidade? O cacho inteiro ou cada uma das bagas? Qual o número de planetas?

² Embora este trabalho se concentre nos números de contagem, é importante lembrar que, na história da matemática, aos números está associada a noção de medida. Enquanto os primeiros lidam com entidades discretas que podem ser individualizadas e enumeradas, os segundos estão relacionados a quantidades contínuas, como comprimento, peso e tempo, exigindo operações mais complexas de comparação e subdivisão. Conforme destacam Crump (1990) e Mendes (2009), diferentes culturas elaboraram essas categorias de forma independente, a partir de suas práticas sociais, tecnológicas e simbólicas. A ênfase nos números de contagem aqui adotada se justifica pela sua centralidade no surgimento histórico do conceito de número e por sua maior acessibilidade didática.

³ Usualmente encontrado em livros didáticos do Ensino Fundamental.

⁴ Conforme EISBERG e RESNICK (1985), Planck afirma que a energia é quantizada, ou seja, não pode haver qualquer quantidade de energia, mas somente múltiplos de um valor mínimo

Neste ponto cabe fazer uma relação entre a matemática abstrata e a realidade. No artigo “A Desarrazoada Efetividade da Matemática nas Ciências Naturais” de Wigner (1960) observamos como a realidade física e a abstração matemática estão ligadas. e disto percebemos a necessidade da História e da Filosofia para estudar a Matemática. Buscando em Shapiro (2015) percebemos o âmago da Filosofia da Matemática no embate entre a visão de Platão, matemática como sendo perfeita somente no mundo das ideias e a visão de Aristóteles onde a matemática perfeita é a do mundo real “tudo é número”.

Concluindo, podemos considerar que por trás do objetivo principal deste trabalho está um olhar sobre alguns dos conceitos que definem o que é a matemática. Entre os quais: as definições de número, infinito e infinitesimal e em especial a construção histórica do número, desde suas raízes na pré-civilização até os tempos atuais.

3 METODOLOGIA

Como em todo trabalho científico, o presente estudo iniciou-se com uma pesquisa bibliográfica articulada à definição da temática, dos questionamentos e do produto educacional. A primeira etapa consistiu em buscas online de artigos relacionados à temática inicial, a partir dos quais foram identificados autores de destaque como Platão, Aristóteles, Pitágoras, Tatiane Roque, Shapiro, Russell e Jairo José.

Após o refinamento da ideia inicial, especificando os entes matemáticos e sua relação com o mundo real, realizou-se uma segunda pesquisa voltada para dissertações, artigos e teses que abordassem a temática em questão, com o objetivo de verificar a existência de trabalhos com

fundamental. A menor quantidade de radiação de energia é o quantum. Um quantum de energia (E) é diretamente proporcional à frequência (f) da radiação. Já o princípio de incerteza de Heisenberg é um dos pilares conceituais da física quântica. De acordo com esse princípio, em sistemas de escalas reduzidas, como nos átomos e moléculas, grandezas relacionadas, tais como quantidade de movimento e posição, não podem ser medidas simultaneamente com exatidão. Quando se conhece a medida de uma delas dessa forma, perde-se completamente a precisão sobre a medida da outra grandeza.

problemática semelhante, identificar os caminhos já percorridos, a bibliografia utilizada, entre outros aspectos. Com esse processo de delimitação, o foco deslocou-se da Matemática em geral para a investigação da natureza dos entes matemáticos, em especial o significado do número e da própria Matemática. Nesse estágio mais aprofundado, constatou-se a necessidade de incluir também a História da Matemática, uma vez que se revelou imprescindível relacionar os conceitos atuais da disciplina ao seu processo de criação. A título de exemplo, a definição de número mostra-se intimamente vinculada ao uso que dele se faz: desde a formulação lógica apresentada por Frege e Russell, passando pela concepção metafísica em Platão, pelo registro cultural expresso na repetição de mantras budistas, até simples riscos em um cajado marcando as cabras de um pastor neolítico.

Assim, a metodologia adotada consiste em pesquisa bibliográfica com refinamentos sucessivos voltados à delimitação da problemática. Em um primeiro momento, foram levantadas referências gerais sobre a temática, que serviram como base para uma busca inicial e para a identificação de autores e obras de maior relevância. A partir desse levantamento, as novas produções encontradas foram classificadas de acordo com a frequência de citações e com a pertinência em relação ao tema, o que permitiu ampliar a compreensão do campo de investigação e, ao mesmo tempo, delimitar o foco do trabalho. Esse processo de filtragem e organização resultou em um escopo mais consistente, no qual se destacaram os temas centrais que sustentam a presente dissertação.

O produto educacional desenvolvido recebeu o título “Perspectiva histórica, filosófica e cultural sobre o que é o número: “Uma proposta didática para o trabalho em sala de aula”. Sua proposta é articular diferentes dimensões do conhecimento matemático, reunindo aspectos históricos, conceituais e aplicados. A ideia é possibilitar ao estudante e ao professor uma visão mais ampla do que é a Matemática, apresentando não apenas como essa ciência se desenvolveu ao longo do tempo, mas também de que forma se relaciona com a experiência humana e com o mundo contemporâneo. Dessa forma, o material busca ser tanto um recurso de reflexão filosófica quanto um apoio didático, capaz de integrar a compreensão

abstrata da disciplina ao seu processo histórico e às práticas sociais que a moldaram.

4 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

4.1 HISTÓRIA DO NÚMERO.

4.1.1 Do Concreto ao Abstrato

Nossa primeira parada são os números naturais, de todas as classes numéricas é a que está mais instanciada no mundo real, ou seja, conseguimos claramente fazer uma analogia entre os números naturais estudados pela matemática e os números que existem na natureza, mais especificamente as coisas que podemos contar. Para isto vamos nos apoiar na história da matemática e ver como o conceito de número foi construído passando de algo concreto até chegar na classe dos números naturais. Mas antes disto é necessário tecer algumas considerações para que possamos delimitar este capítulo, em primeiro lugar de qual história da matemática estamos falando. Eves (2011) faz uma interessante consideração ao afirmar que certos animais⁵⁶ têm noção da matemática, logo podemos afirmar que parte da história da matemática nos antecede. No mesmo texto Eves (2011) cogita inclusive que a matemática existe em épocas pré-orgânicas como na cristalização de minerais.

Já Boyer e Merzbach (2012) tecem uma série de considerações sobre a matemática ancestral falando sobre como noções de número, grandeza e forma poderiam estar relacionadas com elementos da vida

⁵ Neste sentido temos o artigo de Goebel (2021), do qual extraímos o seguinte fragmento: “Desde os dez meses de idade os bebês humanos já estão se familiarizando com números. Mas há um limite para suas habilidades numéricas: eles só conseguem detectar mudanças numéricas entre um e três, como quando uma maçã é removida de um grupo de três maçãs. Essa habilidade é compartilhada por muitos animais com cérebros significativamente menores, como peixes e abelhas.” (Tradução nossa)

⁶ De fato, se formos pensar em uma humilde bactéria, é evidente que ela reage ao ambiente, respondendo a estímulos físico químicos, o que em última instância é quantificar os estímulos, ou seja, reagir por meio da matemática.

do homem primitivo, como, por exemplo, a diferença entre um lobo e muitos lobos, ou que certos grupos ou como as mãos podem ser emparelhadas com os pés, os olhos e as orelhas ou as narinas. Disto vamos conseguir uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos de “número”. Boyer e Merzbach (2012) salientam que é improvável que isso tenha sido descoberta de um indivíduo ou de uma dada tribo, desenvolvida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos. Boyer e Merzbach (2012) continuam seu raciocínio afirmando que este conceito primitivo de número poderia ser extrapolado para as mãos, associando o número de dedos ao número que se desejava ser contado e quando os dedos não fossem suficientes poderiam ser usados objetos, mas como bem disseram Boyer e Merzbach (2012), montes de pedras são efêmeros. E sendo efêmeros não nos deixariam registros.

E neste ponto podemos começar nossa jornada, delimitando seu marco temporal inicial. Para falarmos de história da matemática necessitamos de registros da ação matemática intencional. Partindo desta premissa podemos definir que os primeiros registros históricos surgem milhares de anos atrás na África, por intermédio de ossos entalhados com padrões matemáticos. Neste sentido temos as estimativas de Boyer e Merzbach (2012) com 30000 anos e Eves (2011) com 8000 anos atrás⁷. Na sequência temporal temos o processo pelo qual os agrupamentos humanos passam a ter uma vida sedentária, deixando de ser coletores/caçadores nômades e passando a ter morada fixa sendo agricultores. Estes processos geraram uma gama nova de interações sociais criando a necessidade de registros, em especial os matemáticos.

Eves (2011) nos dá um panorama geral da história da humanidade dividindo a pré-história (ou idade da pedra⁸) em 3 períodos: Idade da Pedra (5 milhões a 10000 AEC), Mesolítico (10000 a 7000 AEC) e por fim Neolítico (7000 a 3000 AEC), cada qual com suas características e evoluindo

⁷ Trata-se do osso de Ishango, onde números foram preservados por meio de grupos de entalhes.

⁸ Cabe destacar que o conceito Idade da Pedra, está mais relacionado com o desenvolvimento de um determinado grupo do que a uma idade cronológica, assim a maioria dos povos nativos americanos ainda estavam na Idade da Pedra quando da chegada dos Europeus pois não haviam desenvolvido a metalurgia.

a organização social e, conseqüentemente, a capacidade tecnológica e por conseguinte a capacidade de comunicação entre os membros de cada grupo. Neste sentido, segundo Boyer e Merzbach (2012), o desenvolvimento das linguagens foi fundamental para a criação do pensamento matemático abstrato, ele usa como exemplo algumas unidades de medida ainda em uso atualmente, como por exemplo o pé, que de uma medida concreta passou a uma medida abstrata.

De fato, se pensarmos nestas sociedades em cada um dos momentos históricos havia demandas matemáticas, os caçadores precisavam indicar a quantidade de presas em uma determinada direção, e se fossem dois caçadores seria necessária uma comparação para a grupo decidir para qual direção os demais deveriam ir. Do mesmo modo podemos pensar que um Pastor deveria ter algum modo de estimar se seu rebanho estava completo (talvez pedras ou marcas na madeira) e se um coletor conseguisse frutos, deveria haver alguma forma de partilha, ou seja uma divisão⁹ e todas estas ações, eventualmente, teriam de ser informadas a outros membros do grupo.

Diante destas afirmações é natural que a matemática ancestral tenha deixado rastros nos nossos idiomas atuais. Boyer e Merzbach (2012) nos dão alguns exemplos como o número treze (dez e três) que tem uma construção comum em praticamente todos os idiomas, o que indica que os homens primitivos utilizavam uma base dez para suas contagens (os dedos das mãos). Boyer e Merzbach (2012) também nos falam em como os numerais passaram do concreto para o abstrato. Um exemplo seria o de uma sociedade primitiva utilizar o vocabulário par de cajados, par de peixes, par de frutas. Ao perguntar sobre quantos bois existem, um falante responde: tantos quantos um par de cajados e se essa sempre for a comparação usada, em um dado momento da evolução desta cultura, “par de cajados” será o nome usado para indicar dois objetos, sempre indo do concreto para o abstrato.

Ainda em prol dessa discussão, consideramos importante tecer alguns apontamentos sobre o número zero. Silva (2007) nos diz que o número zero só começa a aparecer na civilização ocidental com a difusão

⁹ Deve-se imaginar que haveria algum tipo de divisão igualitária, ao menos parcialmente, nestes grupos, ou ficar no grupo não seria vantajoso a seus membros e conseqüentemente os grupos não se formariam e logo não haveria história.

pelos Árabes, da Matemática Hindu, porém, se faz necessário diferenciar o numeral zero do resultado zero. Necessitamos do numeral zero para uma representação posicional, por exemplo o número 308 e já o resultado zero indica ausência, por exemplo $4 - 4 = 0$. Diante disto fica fácil entender que, apesar do numeral zero ser uma invenção relativamente recente, o conceito de zero é bem mais antigo. Certamente se um pastor tem três ovelhas e as três fogem ele tem a cognição que lhe sobraram zero ovelhas, isto independente da época em que o pastor tenha vivido.

4.1.2 A Civilização e o Sistema Numérico Maia


Agora que sabemos como os números passaram de algo concreto a algo abstrato, dedicamo-nos à próxima fase de nossa análise. Uma vez que os grupos humanos se fixaram e uma complexa teia de relações sociais foram criadas, o passo seguinte foi a criação da língua escrita e dos sistemas de numeração. Este processo ocorreu em diversas partes do mundo e em diversas épocas. Para ilustrar os números naturais escolhemos a civilização Maia, por três motivos: é um sistema numérico pouco conhecido; tem uma base não usual (20 e 5) e, principalmente, porque torna muito fácil a visualização entre o concreto e o abstrato.

Em Silva (2007) vemos que a civilização Maia se desenvolveu por cerca de 3000 anos na península de Yucatán, no que é hoje parte do México e da América Central. A sociedade Maia era dividida em cidades estado, com um governante responsável também pela religião, e suas crenças eram fortemente baseadas na astronomia. Possuíam uma agricultura sofisticada, cultivavam principalmente milho, mas também abóbora, feijão e tomate, inclusive com sistemas de irrigação, que certamente envolviam técnicas para isso. Tecnicamente, além de construções monumentais, os Maias tinham profundo conhecimento de astronomia, possuíam calendários precisos e conseguiam prever eclipses com exatidão, o que, é claro, implica em uma matemática bem avançada.

Segundo Boyer e Merzbach (2012) os Maias utilizavam um sistema de base 20 juntamente com um sistema de base 5, sendo a base 20

posicional e a base 5 incremental, com somente três símbolos: concha (ou olho) representa o zero, ponto (ou um seixo)¹⁰ representa a unidade e o traço (ou bastão) representa o cinco, sendo a escrita feita na vertical, do maior ao menor número de cima para baixo, veja a Figura 1, apresentada a seguir para maior entendimento. O'Connor (2000) nos dá a explicação de que a base 20 tem relação ao uso dos dedos das mãos e dos pés, e que também que o sistema Maia não era de base 20 pura, sendo usada a base 18 na segunda casa numérica¹¹. Ao menos nos textos remanescentes, porém, ele também afirma que muito provavelmente havia um segundo sistema de base 20 pura para cálculos do dia a dia. Neste trabalho partiremos desta premissa: base 20 pura.

Figura 1 - Sistema de numeração Maia

| | | | | |
|--|------------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
|  0 | • 1 | •• 2 | ••• 3 | •••• 4 |
| — 5 | • — 6 | •• — 7 | ••• — 8 | •••• — 9 |
| — — 10 | • — — 11 | •• — — 12 | ••• — — 13 | •••• — — 14 |
| — — — 15 | • — — — 16 | •• — — — 17 | ••• — — — 18 | •••• — — — 19 |

¹²

Fonte: Desenho elaborado pelo autor

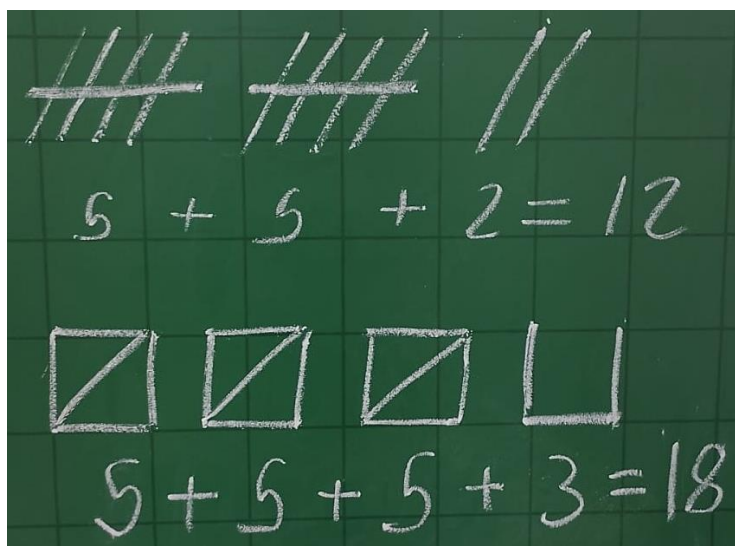
¹⁰ Pedra de rio arredondada.

¹¹ Os textos sobreviventes a Inquisição Espanhola são de natureza sacerdotal, chamados códices, e neles existem referências a calendários, o que explica o uso da base 18/20 mista, já que $18 \times 20 = 360$ é bem próximo da duração do ano. Códices refere-se a manuscritos produzidos por escribas, em geral organizados em páginas, no formato de livro ou de folhas dobradas, que registravam conhecimentos e práticas religiosas e administrativas.

¹² Foram inseridas caixas para a separação e organização dos numerais.

Observando a Figura 1 podemos notar que os números são formados por pontos e barras. Começamos com o número um, que é um ponto, e vamos adicionando pontos até chegar ao número cinco, quando trocamos os 5 pontos por uma barra. Aí começamos a adicionar pontos até chegarmos a um novo conjunto de 5 pontos, que substituiremos por outra barra, e assim sucessivamente. O número 19, por exemplo, é formado por 3 barras e 4 pontos ($3 \times 5 + 4 \times 1$). Um outro exemplo seria o número 12, formado por duas barras e dois pontos. Esta regra é válida até o numeral 20 quando passamos a ter um sistema posicional. Note-se que o sistema de numeração Maia guarda grande similaridade com o modo que utilizamos para contagens rápidas (Figura 2).

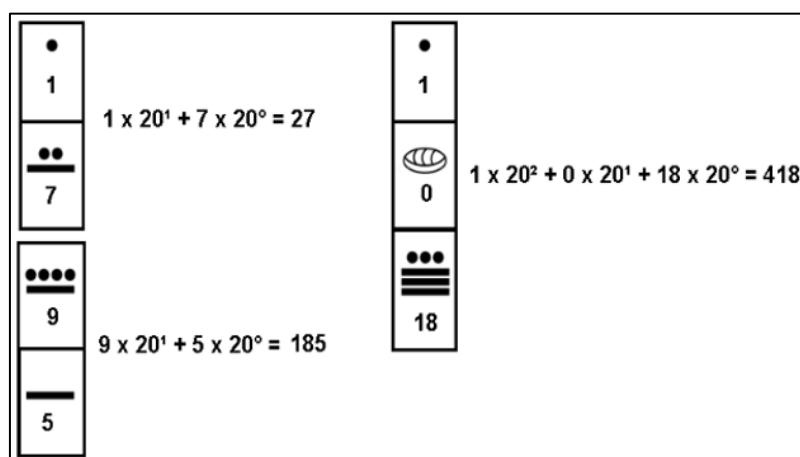
Figura 2 - Um sistema de contagem rápida (tally marks)



Fonte: foto do autor

Já para escrever o número 20, devemos colocar um ponto e logo abaixo uma concha, assim teremos $20^1 \times 1 + 0$, e assim, sucessivamente, até o número 39 quando acrescentamos um ponto na primeira casa, o processo continua até chegar a 399 quando passamos para a terceira casa vigesimal. Na Figura 3 temos alguns exemplos de numerais representando números maiores no sistema Maia e sua transliteração para o nosso sistema de base 10.

Figura 3 - Exemplo de alguns números no sistema numérico Maia.



Fonte: desenho do autor¹³.

4.1.3 A Civilização e o Sistema Numérico Sumério

Outra civilização a ser considerada é a dos sumérios ou acadianos ou ainda babilônicos¹⁴, identificada como um dos primeiros povos a promover a transição de caçadores-coletores para agricultores. Segundo Roque (2012), esses povos se estabeleceram entre os rios Tigre e Eufrates, região correspondente ao atual território do Iraque. Desenvolveram uma civilização com mais de quatro mil anos de história, caracterizada por grandes obras arquitetônicas e por vasto conhecimento de geometria e astronomia. É importante destacar que, embora sumérios e Egípcios tenham fornecido a base matemática para os Gregos, sua utilização era eminentemente prática e voltada para problemas do cotidiano, diferentemente da matemática grega, que assumiu caráter mais abstrato.

Conforme aponta Roque (2012), os Sumérios utilizavam um sistema numérico posicional de base 60, no qual uma espécie de cone era empregada para representar os diferentes números. Esse sistema legou à

¹³ Foram inseridas caixas para a separação e organização dos numerais.

¹⁴ Os Sumérios são reconhecidos como a primeira grande civilização da Mesopotâmia, tendo desenvolvido a escrita cuneiforme e o sistema numérico sexagesimal. Os Acádios, povo semita, sucederam-nos ao estabelecer o Império Acádio por volta de 2300 AEC, incorporando grande parte da cultura suméria. Posteriormente, os Babilônios herdaram e sistematizaram esses conhecimentos, dando continuidade e maior sofisticação às práticas matemáticas. Para uma análise detalhada, ver Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011).

humanidade a estrutura utilizada até hoje no sistema horário. Inicialmente, não havia o conceito de zero posicional, sendo empregado apenas um espaço vazio; posteriormente, esse recurso passou a ser incorporado de forma mais sistemática. Destaca-se, ainda, que apesar da aparente estranheza, a base sexagesimal revela-se bastante prática para cálculos envolvendo divisões e frações, uma vez que o número 60 possui grande quantidade de divisores, permitindo, por exemplo, a representação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ sem a necessidade de dízimas periódicas¹⁵.

4.2 GRÉCIA

Pelos escritos de Boyer e Merzbach (2012) e Roque (2012) vemos que Heródoto atribui aos Egípcios a criação da geometria¹⁶ pela necessidade prática de medir as áreas alagadas do Nilo e que existe uma tendência de se achar que a matemática é um desenvolvimento contínuo em que os Gregos são Herdeiros da Matemática do Egito e Suméria e, por conseguinte, que os Europeus são herdeiros dos Gregos¹⁷. Porém, como muito

¹⁵ Uma fração $\frac{a}{b}$ possui representação finita em uma base n apenas quando, após simplificação, o denominador b divide alguma potência de n . Em outras palavras, o numerador a “se ajusta” ao sistema quando contém, de forma compatível, os fatores primos do denominador. Na base decimal, se $n = 10$, teremos $10 = 2 \times 5$, ou seja somente denominadores compostos por fatores 2 e/ou 5 produzem decimais terminantes, como: $\frac{1}{2} = 0,5$ e $\frac{1}{5} = 0,2$. De modo intuitivo, pode-se imaginar a base como uma “caixa” de tamanho igual ao valor da base — por exemplo, “uma” caixa com 10 compartimentos. Dividir essa “caixa” em 2 ou 5 partes é possível, pois 10 é múltiplo desses números. No entanto, ao tentar dividi-la em 3 ou 23 partes, o resultado é impossível de encaixar de forma exata: sempre resta um fragmento que nunca desaparece. Esse resto se repete indefinidamente, originando a dízima periódica. Assim, $\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$ e $\frac{8}{23} = 0,3478 \dots$ produzem infinitas repetições porque nem 3 nem 23 dividem potências de 10. Em contraste, na base 60, $n = 60$ teremos $2 \times 2 \times 3 \times 5$, o denominador é compatível com um conjunto maior de denominadores. Ou seja, a “caixa” de 60 pode ser dividida de formas que a “caixa” do 10 não consegue. Por isto, $\frac{1}{3} = 0,2_{60}$, é expresso de modo finito em notação sexagesimal. Essa característica explica, em parte, a escolha histórica dos babilônios pela base 60, já que nela várias frações comuns do cotidiano $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$, possuem representações terminantes, facilitando cálculos e medições. Para uma exposição formal dessa propriedade, ver Niven (1991) e Hardy & Wright (2008), que tratam do critério aritmético das expansões finitas em bases numéricas.

¹⁶ Geometria pode ser traduzido como “medida da terra”

¹⁷ Usualmente utilizado como suporte moral na dominação europeia durante o colonialismo

bem explicam os autores, não é bem claro quando houve (e a que nível) esta transferência¹⁸ de conhecimentos, bem como não há documentação sobre como era a matemática grega nos seus primórdios, mas por certo houve uma matemática prática, antes e durante a criação da matemática teórica pela qual conhecemos os gregos. A seguir estão relacionados alguns nomes de destaques da Grécia antiga, mas esta pequena amostra está longe de totalizar o saber desta época.

4.2.1 Tales

Conforme Roque (2012), pode-se dizer que a matemática grega tradicional tem em Tales de Mileto um de seus primeiros expoentes. Ele teria vivido entre os séculos VII e VI AEC, e uma de suas realizações foi medir a altura de pirâmides no Egito utilizando a semelhança entre triângulos. Também lhe é atribuída a previsão de um eclipse, provavelmente baseada em conhecimentos babilônicos. Além de matemático, é considerado o primeiro filósofo. Já segundo Boyer e Merzbach (2012), as fontes sobre Tales são escassas e geralmente aparecem como referências em outras obras. Seu famoso teorema teria sido desenvolvido durante suas viagens à Babilônia, e é consenso que Tales pode ser considerado o primeiro matemático teórico por ter demonstrado esse e mais quatro teoremas, conforme destacam os autores (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 55):

1. Um círculo é bissectado por um diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais.
4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

¹⁸ Transferência no sentido de uso da matemática egípcia e suméria na construção da matemática grega.

4.2.2 Pitágoras

Um próximo matemático a ser citado é Pitágoras, que segundo Boyer e Merzbach (2012) trata-se de personagem envolto em lendas, enquanto Tales era conhecido principalmente pelas atividades práticas. Pitágoras tinha uma áurea mística, sendo considerado uma espécie de profeta¹⁹. Da mesma forma que Tales, ele viajou pelo Egito e Babilônia, e eventualmente até a Índia, durante essas viagens ele aprendeu não só conhecimentos científicos matemáticos como também religiosos. Pitágoras fundou uma seita comunitária e coletivista de caráter secreto, de modo que não devemos falar em obras de Pitágoras e sim em obras Pitagóricas²⁰, já que o sigilo de seus seguidores não nos permite atribuir a autoria de cada contribuição advinda deste grupo. De Boyer e Merzbach (2012, p. 56), destacamos:

Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras “filosofia” (ou “amor à sabedoria”) e matemática (ou “o que é aprendido”) supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Para eles, a matemática se relacionava mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática. Que Pitágoras foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, sejam iludidos, sejam inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. As harmonias e mistérios da filosofia e da matemática eram partes essenciais dos rituais pitagóricos. Nunca, antes ou depois, a matemática teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos. Dizia-se que o lema da escola pitagórica era “Tudo é número”.

Boyer e Merzbach (2012) nos dizem que o teorema de Pitágoras, muito provavelmente, venha da tradição suméria²¹. Já Roque (2012) nos ensina que a matemática de Pitágoras era de pontos (veja Figura 4), e

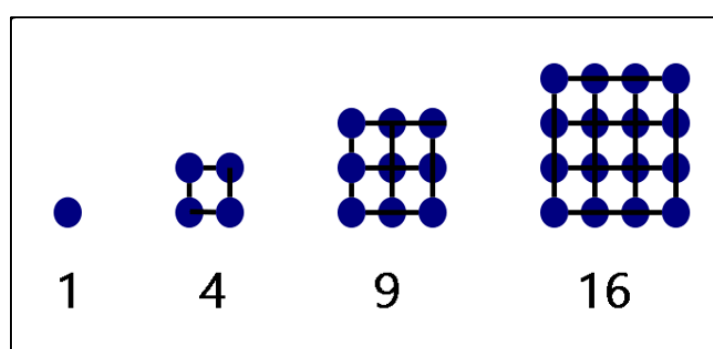
¹⁹ Pitágoras (c. 570–495 AEC) foi praticamente contemporâneo de Buda (c. 563–483 AEC), Confúcio (c. 551–479 AEC) e Lao Zi (século VI AEC), o que evidencia a simultaneidade de movimentos filosóficos e espirituais em diferentes partes do mundo nesse período Eves (2011) e Boyer e Merzbach (2012).

²⁰ É comum nas sociedades antigas, que os escritos dos discípulos sejam atribuídos ao mestre, não somente no caso de Pitágoras, mas como caso extremo neste devido à natureza secreta de suas comunidades.

²¹ Existe ao menos um tablete de argila dos sumérios com um problema aritmético semelhante ao Teorema de Pitágoras.

também observamos que entre Pitágoras (ou os Pitagóricos) e Euclides, o teorema e sua demonstração geométrica surgiram na Grécia. Na mesma seara, Russel (2012) atribui a Pitágoras a origem da teoria musical, da proporção Áurea e da incomensurabilidade. O que de fato é real quanto a Pitágoras (e os Pitagóricos) parece ter se perdido na história, mas a conclusão a que se chega é que sua obra foi de tal monta que gerou reminiscências até a nossa época.

Figura 4 - Exemplo da Matemática de Pitágoras.



Fonte: desenho do autor

4.2.3 Eudoxo

Em Eves (2011) vemos que a descoberta dos incomensuráveis²² causou uma grande crise²³ entre os estudiosos da matemática à época, inclusive havendo uma lenda que o matemático descobridor (indicado por alguns como Hipaso) tenha sido lançado ao mar por revelar tal descoberta. Tem certo sentido a ideia de crise porque o entendimento dos Pitagóricos era que tudo podia ser explicado através de números inteiros e a existência de um número irracional ia contra tudo que

²² O conceito de incomensurável será discutido em maior profundidade adiante; em termos gerais, designa aquilo que não pode ser expresso por meio de uma medida comum. Tal noção surge em oposição direta à crença pitagórica de que “tudo pode ser explicado por números”, constituindo um dos maiores desafios à visão de mundo dos pitagóricos.

²³ Há divergências a respeito dessa crise, discutidas por diversos autores, entre os quais Roque (2012), que apresenta considerações críticas sobre o tema.

acreditavam. Após este evento, na sequência do desenvolvimento teórico dos Gregos, coube a Eudoxo resolver tal celeuma por meio de uma nova ideia de proporção²⁴. A definição de Eudoxo encontra-se na obra de Euclides (2009, p.205).

Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.

Em termos modernos, essa definição pode ser descrita assim: dadas quatro magnitudes a, b, c, d , diz-se que estão na mesma razão, isto é: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Quando, para quaisquer inteiros positivos m e n , valem as seguintes correspondências:

$$m \cdot a > n \cdot b \rightarrow m \cdot c > n \cdot d$$

$$m \cdot a = n \cdot b \rightarrow m \cdot c = n \cdot d$$

$$m \cdot a < n \cdot b \rightarrow m \cdot c < n \cdot d$$

Esse enunciado é a forma como Euclides, seguindo a teoria de Eudoxo, conseguiu lidar com razões envolvendo grandezas contínuas, evitando a necessidade de frações ou irracionais, ainda inexistentes como conceito formal. Trata-se, portanto, de um artifício lógico que permitiu preservar a comparação entre magnitudes mesmo diante dos incomensuráveis.

Outra grande contribuição de Eudoxo é o método da exaustão segundo o qual podemos relacionar grandezas de natureza diferentes, por exemplo uma circunferência e um quadrado através de aproximações sucessivas²⁵. Este método também é conhecido como axioma de Arquimedes²⁶ e pode-se dizer que foi o embrião do cálculo infinitesimal. No Livro X de Euclides (2009), na proposição 1, temos que:

24 O raciocínio de Eudoxo foi utilizado como inspiração por Dedekind em 1872 para a construção da moderna teoria do conjunto dos números reais, ou seja, criando uma definição para número irracional.

25 Eves (2011) cita este método como resposta dos Platônicos aos paradoxos de Zenão

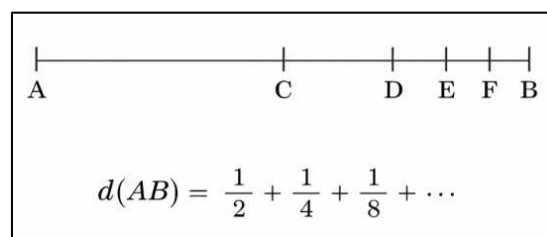
26 Boyer e Merzbach (2012, p. 80): "Isto é essencialmente um enunciado do chamado "axioma de Arquimedes", uma propriedade que o próprio Arquimedes atribuiu a Eudoxo".

Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.

4.2.4 Zenão

Zenão foi um filósofo que viveu na Grécia no século V AEC e se dedicava a provar a tese do monismo²⁷. Para isto se valia de raciocínios lógicos envolvendo paradoxos, visando negar por absurdo a tese contrária que pregava o movimento e a duplicidade. Um exemplo de paradoxo de Zenão (paradoxo de Aquiles) pode ser exemplificado com uma caminhada. Se formos de um ponto A até um ponto B, primeiro temos de passar pelo ponto médio de AB que chamaremos de C, depois pelo ponto médio de CB, que chamaremos de D, depois pelo ponto médio de DB e assim sucessivamente (Figura 5), de tal forma que este raciocínio conduz a ideia de que a distância AB nunca será completada²⁸.

Figura 5 - Exemplo alternativo do paradoxo de Aquiles.



Fonte: desenho do autor

Segundo Roque (2012) estes paradoxos têm, provavelmente, motivação somente filosófica, pois Zenão era ligado a Parmênides que concebia o mundo como imutável, sem movimento, sem mudança, ou mais precisamente, indivisível e os paradoxos foram uma forma de refutar os

²⁷ Concepção segundo a qual a realidade é constituída por um princípio único, não havendo movimento e divisibilidade de entes físicos.

²⁸ Uma analogia a este paradoxo é obtida na física com o paradoxo de Zenão quântico: um sistema não pode mudar enquanto é observado.

Pitagóricos. Porém o que cabe destacar matematicamente é que este tipo de raciocínio serve para embasar o cálculo infinitesimal e que, de fato, são a solução atual dos paradoxos de Zenão. Também cabe ressaltar que estes paradoxos foram resolvidos, à sua época, pelo método da exaustão de Eudoxo.

4.2.5 Platão

Para Shapiro (2015), Platão é um nome particularmente importante para a matemática por ter contribuído decisivamente para elevá-la ao estatuto de modelo de racionalidade e de via privilegiada de formação intelectual. Ao situar o estudo matemático como etapa central na educação filosófica e política, pela sua capacidade de conduzir o pensamento além do imediato e disciplinar o raciocínio. Platão ajudou a consolidar a ideia de que a matemática não é apenas um instrumento prático, mas um conhecimento com pretensão de universalidade, rigor e fundamento, capaz de orientar a própria noção de demonstração e de “ciência”.

É importante destacar que as contribuições de Platão são mais filosóficas do que matemáticas. Não existe nenhum teorema ou algo similar atribuído a Platão, porém, na sua concepção da realidade, a matemática era fundamental para o completo entendimento do mundo. Segundo Shapiro (2015), Platão entendia que a perfeição, a beleza e a justiça residiam em um mundo perfeito, o mundo do “Ser” ou das “Formas” e o que vemos são meras imagens borradas destes conceitos, pois residimos num mundo físico imperfeito, o mundo do Devir²⁹. Platão considerava que a matemática é fundamental para “enxergarmos” e entendermos o mundo das Formas, já que para ele os entes matemáticos lá residem. Desta forma, uma circunferência, por exemplo, tem existência eterna e é perfeita e o que vemos como circunferência é uma simples cópia imperfeita (ou borrão) da forma original do mundo do Ser. Porém as regras que temos para esta cópia valem também para a forma perfeita, nos permitindo entender, ao menos em parte, este outro

²⁹ Devir tem significado de mudança.

mundo.

4.2.6 Sócrates³⁰

Com base em Shapiro (2015), Sócrates é uma referência decisiva para compreender o ambiente intelectual no qual Platão atribui estatuto central à matemática. Contudo, segundo fontes consultadas, os interesses principais de Sócrates residiam na ética e na vida pública, e seu procedimento característico consistia em examinar crenças por meio de perguntas e refutações, levando o interlocutor a reconhecer inconsistências e a reavaliar suas posições. Trata-se, portanto, de um método essencialmente crítico: elimina crenças falsas ou confusas, mas não fornece uma doutrina positiva definitiva nem um tipo de certeza comparável ao ideal demonstrativo dos matemáticos.

Em Shapiro (2015), a relação entre Sócrates e Platão pode ser lida em dois movimentos, por um lado, Platão herda de Sócrates a exigência de rigor na investigação e a reconfigura em um programa formativo no qual a matemática assume função privilegiada. Por outro, a filosofia platônica se afasta do espírito socrático ao deslocar a prática filosófica do debate aberto e interrogativo, típico das conversas públicas na ágora, para um contexto mais privado e seletivo de formação e discussão, no qual a matemática funciona como modelo de procedimento demonstrativo, visando maior certeza e fundamentação. Finalmente, é necessária uma última observação, não é possível determinar em que medida o “Sócrates” dos diálogos de Platão corresponde ao Sócrates histórico ou se constitui somente como um personagem. Isso torna delicada qualquer tentativa de atribuir ao Sócrates histórico teses mais fortes sobre o papel da matemática ou compromissos metafísicos.

³⁰ A exposição a seguir não seguirá rigidamente a ordem cronológica. Platão é apresentado primeiro por formular, no recorte desta pesquisa, de modo mais explícito a centralidade da matemática; em seguida, retoma-se Sócrates para evidenciar o contraste metodológico que ajuda a compreender a “virada” platônica e encaminha a discussão de Aristóteles.

4.2.7 Aristóteles

Se Platão era filósofo por excelência, seu discípulo Aristóteles, era o que se pode considerar um cientista, ele defendia o método empírico, a análise, podendo ser considerado pai de várias ciências. Novamente baseado em Shapiro (2015), vemos que para Aristóteles, os entes matemáticos residem nos próprios objetos e podemos estudá-los através da abstração. Desta forma uma esfera de latão imperfeita³¹ pode ser reduzida a sua forma básica perfeita e assim estudada. Porém como muito bem explica Shapiro (2015, p. 109)³²:

Na interpretação abstraccionista, queremos obter finalmente objectos que satisfazem exactamente a descrição matemática de esferas, planos e linhas. Para poder realizar isto, temos de abstrair de quaisquer imperfeições nos espécimes físicos, tal como altos na superfície do cubo. Isto é, não abstraímos só do latão, abstraímos das imperfeições para chegar a uma esfera perfeita. Se esta abstracção adicional é permitida, então podemos indagar como é que a visão de Aristóteles difere da de Platão. Em que sentido são as figuras abstraídas finais ainda parte do mundo físico? Como é que as Formas perfeitas existem nos objectos físicos imperfeitos? Parece que reentramos no mundo de Platão do Ser, pela porta de trás, ou pelo menos enfrentamos os problemas maiores com o mundo do Ser. A manobra contemplada corta o laço íntimo entre a matemática e o mundo físico observado acima.

Ou seja, para Shapiro (2015), se a abstração deve produzir objetos que satisfaçam exatamente as descrições matemáticas, então a exigência de perfeição tende a reaparecer e a distinção em relação ao platonismo torna-se menos clara. Mas o ponto relevante é que ambos conferem à matemática um estatuto que ultrapassa o uso meramente prático ou convencional, atribuindo aos seus objetos algum tipo de existência objetiva.

³¹ Nunca conseguimos desenhos perfeitos, pois uma reta da matemática, por exemplo, tem espessura zero, o que só é possível no campo da imaginação.

³² Mantida a ortografia portuguesa original.

4.2.8 Euclides

Muito do conhecimento matemático grego nos chegou através de Euclides, porém, Boyer e Merzbach (2012) e Eves (2011) afirmam que existem poucas referências sobre sua vida. Presume-se que ele tenha estudado com os discípulos de Platão ou talvez até na própria Academia. Das suas obras originais³³ mais da metade se perdeu, e o que chegou a nosso tempo, trata-se de cópias dos originais, em especial textos em Árabe. A principal obra de Euclides, ao menos das que nos chegaram, são Os Elementos, que antes de mais nada é um livro didático como outros que já existiam na sua época, porém, o acerto de sua obra foi tão grande que suplantou os compêndios existentes e foi a base para o ensino da matemática por mais de 2000 anos³⁴.

Diversos autores afirmam que nem toda a obra é de autoria original de Euclides. De mais relevância é saber que ela nos fornece as definições fundamentais, ou iniciais, de basicamente toda a matemática. Nesta obra encontramos Eudoxo, Tales e muitos outros, de forma que é imprescindível falar sobre Euclides e sua obra.

4.2.9 Arquimedes

Diferentemente de seus predecessores, Arquimedes de Siracusa destacou-se pelo caráter aplicado de sua matemática. Entre suas contribuições, ressaltam-se o estudo das alavancas³⁵, o princípio da fluatibilidade³⁶ e até a ousada tentativa de calcular o número de grãos de areia do universo então conhecido. Neste trabalho, entretanto, o foco recai sobre sua contribuição ao cálculo de π . Conforme observa Roque (2012), Arquimedes refinou o método da exaustão de Eudoxo ao utilizar não apenas

³³ Talvez em número de dez.

³⁴ Os Elementos de Euclides é o livro “não religioso” com maior número de edições impressas até os tempos de hoje (mais de 1000).

³⁵ Dai-me uma alavanca e moverei o mundo.

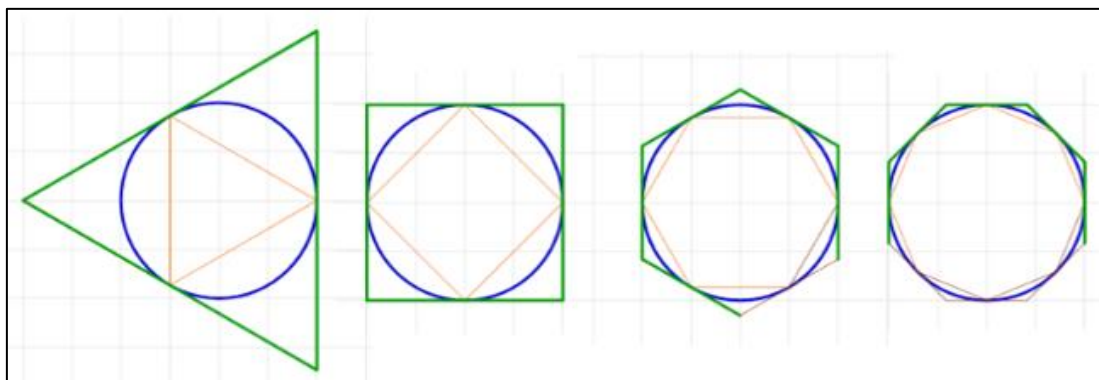
³⁶ Da famosa palavra Eureka (achei) ao descobrir um método para calcular a densidade de um objeto de forma irregular,

um polígono inscrito (A), mas também um polígono circunscrito (B). Dessa forma, a área de uma circunferência (C) poderia ser estimada entre dois limites:

$$\text{Área inscrita (A)} < \text{Área da Circunferência (C)} < \text{Área Circunscrita (B)}$$

Geometricamente, podemos entender que, ao aproximar a circunferência por polígonos regulares com número crescente de lados, o polígono inscrito fornece uma estimativa por falta e o polígono circunscrito uma estimativa por excesso da medida da área de ambas figuras. À medida que aumentamos o número de lados, a área de ambos os polígonos se aproximam da medida área da circunferência, estreitando o intervalo no qual a medida de sua área (e, conseqüentemente, o valor de π) deve estar. Observemos o que é ilustrado na Figura 6:

Figura 6 - Método da exaustão utilizado por Arquimedes para calcular π .



Fonte: desenho do autor com Geogebra

Desse modo, ao aumentar o número de lados dos polígonos regulares inscritos (A) e circunscritos (B), obtemos limites cada vez mais estreitos para a circunferência (C) e, conseqüentemente, para o valor de π . Com esse procedimento, Arquimedes estabeleceu a aproximação rigorosa:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Esse resultado é notável por combinar um procedimento geométrico simples com um controle rigoroso do erro, antecipando a ideia de aproximação por meio “limites”.

4.3 MATEMÁTICA APÓS GRÉCIA

Longe de pretender esgotar o tema a partir dos poucos matemáticos aqui citados, o que se apresenta a seguir é apenas uma seleção daqueles que se relacionam diretamente ao nosso Produto Educacional. Ressalta-se ainda que, após o período grego, a história da matemática se amplia significativamente, abrangendo uma miríade de autores, tradições e contextos geográficos, como Índia, China e o mundo islâmico, entre outros, bem como temáticas bastante diversas.

4.3.1 Fibonacci

Eves (2011) considera Leonardo Fibonacci³⁷ o matemático mais talentoso da Idade Média. Com pai ligado ao comércio fez diversas viagens pelo Mediterrâneo, e neste processo teve contato com a matemática praticada pelos Árabes, em especial os “algarismos³⁸” Indo-arábicos, os quais ajudou a difundir. Sua obra mais famosa é o *Liber Abaci* que contém aritmética e álgebra elementares com alguma influência de Al-Khowarizmi e Abu Kamil. Esta obra explica os algarismos Indo-arábicos, cálculo com inteiros e frações, raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas.

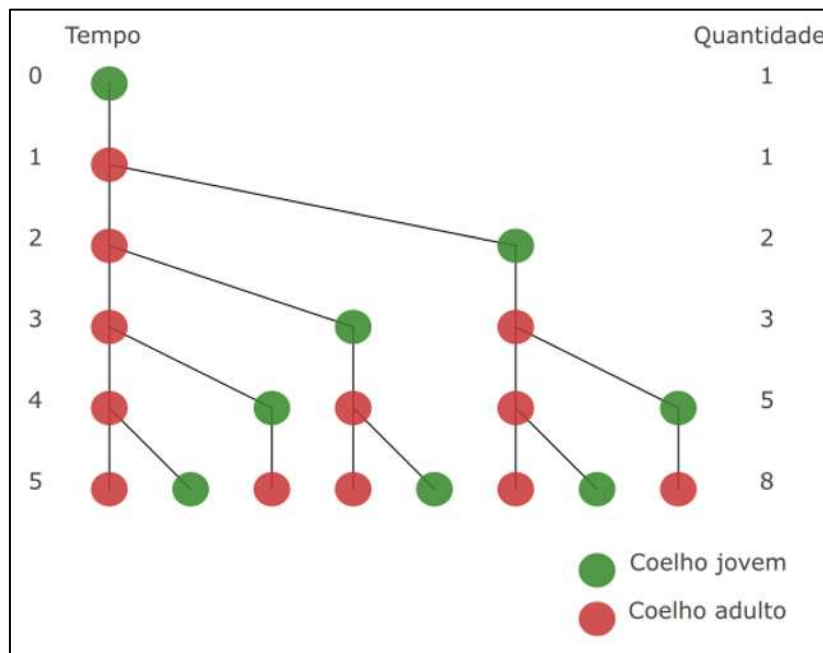
Segundo Boyer e Merzbach (2012), boa parte do *Liber Abaci*³⁹ é considerada desinteressante, mas por outro lado alguns problemas são bem significativos, em especial o problema dos coelhos: Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? A Figura 7 traz uma ilustração do problema.

³⁷ Leonardo, filho de Bonaccio ou ainda Leonardo de Pisa.

³⁸ Em Boyer e Merzbach (2012) vemos que o termo *algarismo* deriva do nome do matemático persa Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (c. 780–850), cujo tratado sobre aritmética difundiu na Europa o sistema numérico hindu-arábico. Na forma latinizada (*Algoritmi*), seu nome deu origem tanto a “algoritmo” quanto a “algarismo”, consagrando os símbolos numéricos como herança de sua obra.

³⁹ Obra mais conhecida de Fibonacci.

Figura 7 - Representação gráfica da sequência de Fibonacci.



Esse problema dá origem à famosa sequência de Fibonacci, que além de inúmeras propriedades aritméticas (como por exemplo termos sucessivos serem primos entre si, ou fato de obtermos a proporção áurea quando levamos a sequência ao infinito), descobriu-se também que estes termos aparecem em muitos processos naturais, como crescimento de alguns vegetais e inclusive em lugares improváveis como em variação da cotação de ações no mercado financeiro⁴⁰. De onde vem a pergunta, o fato da sequência de Fibonacci aparecer em diversos contextos é mera coincidência ou como diz Pitágoras, tudo é número?

4.3.2 Galileu

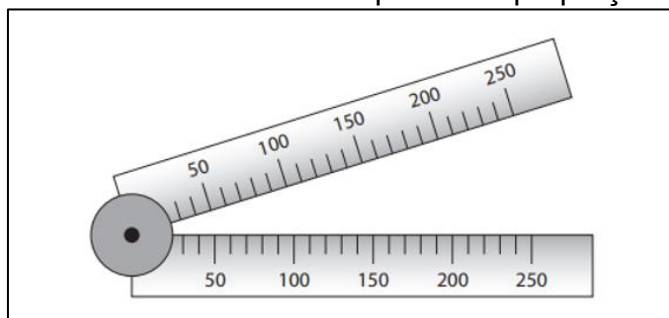
Assim como Pitágoras, Galileu achava que o mundo era governado por números. Em Eves (2011) vimos que ele inicialmente estudou medicina e depois se interessou pelo estudo da matemática. Aos 25 anos passou a ser professor de Matemática da Universidade de Pisa, onde realizou

⁴⁰ Belmonte (2010) relaciona a sequência de Fibonacci às oscilações do mercado de ações por meio da Teoria das Ondas de Elliott.

experiências com queda livre de objetos. O consenso científico da época, baseado em Aristóteles, sustentava que a velocidade da queda dependia da forma e do peso do corpo. No entanto, as observações de Galileu iam em sentido oposto: demonstravam que, em condições semelhantes, os objetos caíam com a mesma aceleração, independentemente de suas características físicas. Essa atitude contestatória causou inquietação na comunidade acadêmica local, levando-o a renunciar à sua cadeira e, posteriormente, a lecionar na Universidade de Pádua. Suas contribuições foram grandes e prolíficas, onde podemos destacar dentre outras, cálculo de objetos em queda livre, teoria heliocêntrica, teoria de funções, estudo sobre infinitos ⁴¹ e infinitesimais.

Um outro ramo em que Galileu se destacou, talvez inspirado por Arquimedes, foi a construção de instrumentos científicos, entre os quais podemos citar alguns modelos de telescópios⁴², os primeiros termômetros e instrumentos diversos de medição. De Boyer e Merzbach (2012) vemos que uma destas invenções foi um dispositivo de cálculo⁴³ que Galileu chamou de seu: “compasso geométrico e militar”. Seu uso é descrito em um manual de operações “Le operazioni del compasso geometrico et militare” onde descreve o modo como o instrumento deveria ser usado, o funcionamento era bem simples, sem grande precisão e destinava-se ao uso por pessoas sem grandes habilidades matemáticas, sem o auxílio de papel ou outros aparatos. Na Figura 8 vemos uma versão resumida do compasso.

Figura 8 - Versão reduzida do compasso de proporção de Galileu



Fonte: Boyer e Merzbach (2012) (2012, p. 225)

⁴¹ Paradoxo de Galileu, alguns números são quadrados e outros não, de tal forma que existem mais números não quadrados que quadrados, porém para cada número existe um quadrado.

⁴² Com este instrumento ele conseguiu observar satélites em órbita de Júpiter, o que deu origem a sua teoria Heliocêntrica.

⁴³ Pode-se dizer que era um computador mecânico ou régua de cálculos.

4.3.3 Era dos Fundamentos e Estruturas Matemáticas

O estudo do cálculo infinitesimal pode ser iniciado com os paradoxos formulados por Zenão, na Grécia Antiga, os quais foram enfrentados por Eudoxo por meio do método da exaustão. A análise desses paradoxos remete, em essência, ao comportamento de uma variável quando assume valores muito pequenos, tendendo a zero. Questões desse tipo passaram a ser tratadas de maneira sistemática com a matemática produzida por Leibniz e Newton, o que, segundo Eves (2011), elevou a disciplina a um novo patamar e encerrou a fase da matemática elementar.

No mesmo período de tempo, cabe também destacar o matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), que entre inúmeras contribuições à matemática também trabalhou com a definição de número inteiro negativo, que na sua visão era similar, em construção, aos números positivos. E na matemática discreta também devemos mencionar Gauss, talvez o maior dos matemáticos modernos⁴⁴, que provou o teorema fundamental da aritmética⁴⁵.

Os diversos ramos da matemática foram sendo criados desde tempo imemoriais por matemáticos, filósofos e pessoas comuns. E o ápice deste processo pode ser determinado com o cálculo, e os trabalhos de Euler e Gauss⁴⁶ que levaram a um outro patamar de abstração e generalização, o que permitiu o surgimento de diversas novas áreas, consolidando a matemática como linguagem da ciência⁴⁷.

Uma vez consolidada a matemática, novos objetivos surgiram. De Shapiro (2015) vemos que Peano postulou, através de seus famosos

⁴⁴ Gauss, também chamado príncipe dos Matemáticos, fez inúmeras contribuições à Matemática, Física e Filosofia.

⁴⁵ Havia sido provado anteriormente, inclusive por Euclides, mas não para todos os casos.

⁴⁶ Outros matemáticos poderiam ser citados, mas não é o objetivo deste trabalho ser uma compilação de matemáticos.

⁴⁷ Como observa Bochner, "Mathematics is not merely an instrument of science, but the very medium in which scientific ideas acquire precise meaning and universal form" (BOCHNER, 1966, p. 7). [Tradução nossa: "A matemática não é meramente um instrumento da ciência, mas o próprio meio no qual as ideias científicas adquirem significado preciso e forma universal."]

axiomas, que toda a matemática pode ser derivada dos números naturais, o que é chamado aritmetização da matemática. Posteriormente Cantor e Dedekind avançaram com este processo definindo noções de infinito, cardinalidade, teoria dos números e os números reais formando a base para grande parte da matemática discreta moderna.

Por fim, sobre as tentativas, falhas, de sistematizar toda a matemática, Shapiro (2015) afirma que Frege tentou padronizar toda a matemática por meio de classes e lógica, e neste processo criou a definição matemática de número, porém, interrompeu seu trabalho quando Russel expõe uma contradição através de um paradoxo⁴⁸. Já Russell trabalhou ativamente com a sistematização por meio da lógica e Hilbert por meio do formalismo, propondo que todas as verdades matemáticas pudessem ser derivadas de um conjunto finito de axiomas sem contradições. Ambas as iniciativas tiveram fim quando Gödel, mostrou ser impossível sistematizar toda a matemática com seu Teorema da Incompletude, ou seja, a matemática nunca será completa. Neste sentido Silva (2007, p.238):

Não há, não pode haver, nem deve haver uma correta filosofia da matemática. Pelas razões expostas aqui, mas também porque a matemática muda. Ela não é o que era, nem será o que é. A matemática evolui por inércia própria, levada por seus problemas e pelas tentativas de resolvê-los, pelas suas crises e até pelos seus fracassos, mas também pelas necessidades da ciência e da técnica. A matemática também reflete a cultura em que é criada, e é tão variável quanto essa, além de mudar constantemente o modo como ela própria se vê, a sua auto-imagem. Não há, portanto, uma essência imutável da matemática que competiria à filosofia revelar. Filosofamos sobre a matemática como alguém que entra num quarto escuro munido apenas com uma lanterna só iluminamos partes isoladas, jamais o todo. Pior, pois no nosso caso o quarto ainda nem está terminado.

5 TEORIA MATEMÁTICA

5.1 NÚMEROS, NÚMEROS NATURAIS E NÚMEROS INTEIROS

Uma vez estabelecidas as bases históricas do conceito de

⁴⁸ Famoso paradoxo de Russell, pode ser exemplificado como a classe de todos os elementos que não pertencem a nenhuma classe.

número, passa-se agora à sua conceituação matemática, com ênfase nos números naturais. O primeiro exemplo pode ser tomado de um matemático grego, segundo Euclides (2009, p. 269):

1. Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
2. E número é a quantidade composta de unidades.
3. Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.
4. E partes, quando não meça exatamente.

Euclides inicia sua conceituação definindo a unidade e, em seguida, caracteriza o número como uma coleção de unidades. Essa formulação permaneceu praticamente inalterada durante cerca de dois milênios, servindo de base para a tradição matemática ocidental. Observa-se ainda que as definições apresentadas em terceiro e quarto lugares correspondem, em essência, ao que hoje entendemos como números racionais.

Como observa Russell (2006), atrelar toda a matemática aos números naturais é uma construção relativamente recente. Durante muitos séculos, a definição de Euclides mostrou-se suficiente para a matemática então existente. Essa situação começa a se modificar no final do século XIX, quando Peano e Dedekind passam a sistematizar a disciplina, estabelecendo de maneira rigorosa seus conceitos mais fundamentais. Neste sentido temos Peano que reduz (cria) os números naturais a três conceitos primitivos e cinco proposições primitivas⁴⁹, e com isto subsidia toda a matemática. De Russel (2007, p. 21 a 23). Os três conceitos primitivos da aritmética de Peano são: zero, número, sucessor.

As cinco proposições primitivas adoptadas por Peano são:

- (1) 0 é um número;
- (2) O sucessor de qualquer número é um número;
- (3) Não há dois números com um mesmo sucessor;
- (4) 0 não é sucessor de número algum;
- (5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e também ao sucessor de todo o número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números.

⁴⁹ Nós conhecemos como Axiomas de Peano, mas a tradução do livro de Russell usa esta terminologia ligeiramente diferente.

Consideremos, por alto, de que maneira a teoria dos números naturais resulta destes três conceitos e cinco proposições. Para começar, definimos 1 como «sucessor de zero», 2 como «sucessor de 1» e assim por diante. Podemos, obviamente, prosseguir com estas definições enquanto nos aprouver, pois, em virtude de (2), todo o número que atingirmos terá um sucessor, e, em virtude de (3), este número não poderá ser qualquer dos já definidos, porque, se assim fosse, dois números diferentes teriam o mesmo sucessor; e, em virtude de (4), nenhum dos números que alcançamos na dos sucessores progressão poderá ser zero. Assim, o sistema dos sucessores dá-nos uma progressão infindável de números continuamente novos. Em virtude de (5), todos os números estão nesta sequência, a qual começa com 0 e prossegue através dos sucessivos sucessores: porque (a) 0 pertence a esta progressão, e (b) se um número n a ela pertence, também a ela pertencerá a ela o seu sucessor, pois, de acordo com a indução matemática, todos os números pertencem à progressão.

Dessa forma está definido nosso primeiro conceito: números naturais. Porém, Russel (2007) observa que ainda faltam algumas coisas, já que nada define 0, número e sucessor nos axiomas de Peano, em especial o que é número. Isto é resolvido por Russel ao citar Frege com a definição final do que é um número. Exemplificando, número não pode ser entendido como uma pluralidade, como no exemplo trio de homens, neste caso três não é um número, mas sim um exemplo de número, mas por outro lado, um trio de homens, um trio de pensamentos, um trio de laranjas e um trio de pardais, são 4 coleções distintas com algo comum que os une, neste caso o três. Ou seja, número é o que tem em comum nas coleções (classes) de mesmo equipotencial⁵⁰, não importando o que contenham.

Por fim, falta definir o que é um número inteiro e, para isto, vamos primeiro nos apoiar em Roque (2012) afirmando que Euler entendia que a formação dos números negativos era similar aos positivos, só que subtraindo a unidade a cada passo, ou seja, os negativos são complementos dos positivos (ou opostos)⁵¹. Deve-se notar que, na natureza, os números inteiros negativos geralmente requerem uma referência para fazer sentido. Exemplos comuns são a contagem do tempo antes e depois da Era Comum, ou ainda a

⁵⁰ Equipotencial é uma definição apresentada por Frege (2021), que designa coleções com a mesma quantidade de elementos, ou seja, conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca.

⁵¹ Cantor por fim, dá a formatação final ao conjunto dos números inteiros

caracterização da carga elétrica de um átomo, em que se convencionou associar a perda de elétrons à carga positiva e o ganho de elétrons à carga negativa. Nesse sentido, pode-se recorrer a Caraça (1951), que discute a necessidade de tais referenciais para a compreensão desses números.

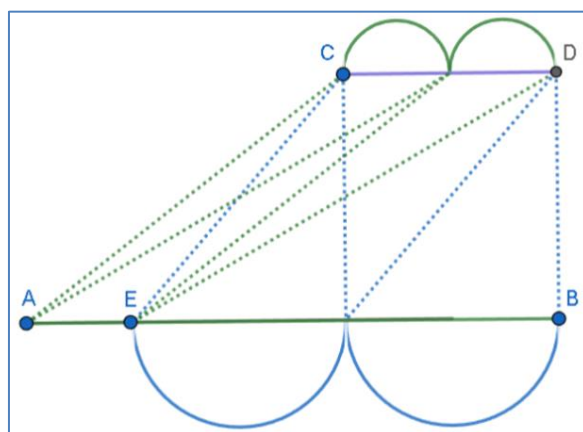
5.2 ANTIFAIRESE, COMENSURABILIDADE E INCOMENSURABILIDADE

O conceito de Antifairese, segundo Roque (2012), vem do grego e significa “subtração recíproca”, sendo um método semelhante ao que conhecemos como “algoritmo de Euclides”, no qual encontramos a relação entre dois números (ou dois entes geométricos) ao comparar grandezas. A partir de duas quantidades, retira-se a menor da maior sucessivas vezes, até que se obtenha uma relação entre elas. Por exemplo, vamos comparar os números 90 e 34: (1º) retira-se 34 de 90 duas vezes resultando em 22; (2º) retira-se 22 de 34 resultando em 12; (3º) retira-se 12 de 22 resultando em 10; (4º) retira-se 10 de 12 resultando em 2; (5º). Por fim, retira-se 2 de 10, 5 vezes resultando em 0), logo, a medida entre os números 90 e 34 é 2. Um outro exemplo, comparar 5 e 2: (1º) retira-se 2 de 5 duas vezes resultando em 1; (2º) retira-se 1 de dois duas vezes resultando em zero, portanto a medida entre 2 e 5 é um.

Do mesmo modo que compararmos quantidades numéricas, também podemos comparar entes geométricos⁵². Na Figura 9, fazemos a antifairese dos segmentos AB e CD. Inicialmente retiramos, duas vezes, a medida de CD do segmento AB, resultando no segmento AE; após retiramos AE de CD duas vezes; portanto a relação entre os segmentos AB e CD é de 5 para 2. O ponto importante é que, quando o processo termina após um número finito de passos, concluímos que as grandezas são comensuráveis, isto é, existe uma “medida comum” capaz de medir ambas. Se, ao contrário, a antifairese não terminasse, isso indicaria incomensurabilidade, como ocorre em casos clássicos ligados às diagonais e às raízes irracionais.

⁵² Note que isto é um exercício puramente matemático. Como toda geometria ou abstrairmos as formas do mundo real ou as tomamos como cópias do mundo das formas.

Figura 9 - Antifairese de dois segmentos de reta.

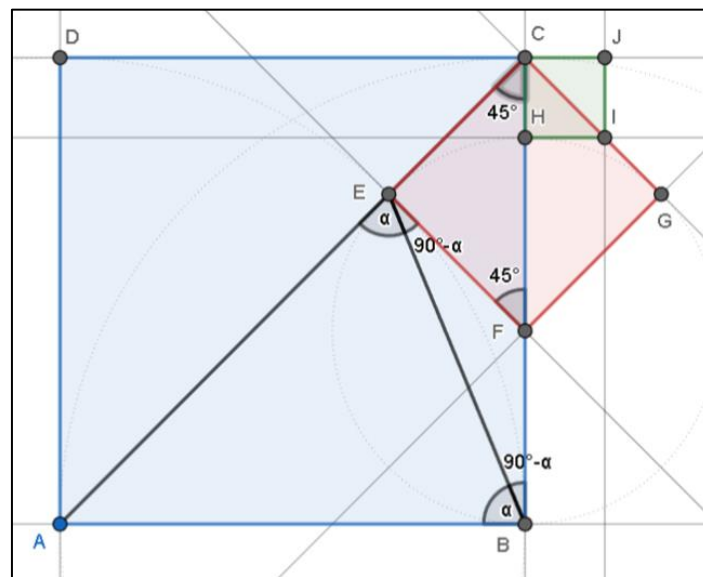


Fonte: desenho do autor

Já na Figura 10, usamos a antifairese para comparar a lateral AB com a diagonal AC de um quadrado. Inicialmente, projetamos AB em AC e marcamos o ponto E, logo, AC comporta AB e sobra o segmento CE. A próxima etapa é comparar EC com AB. Para isto vamos traçar uma perpendicular a AC passando por E. Note que na nossa construção AB é igual a AE, o que implica que BAE é isóscele. Além disto como AEF e ABF são ângulos retos implica que BEF é isóscele, e por consequência CEF também é isósceles, logo, EC é igual a EF que é igual a BF e conseguimos projetar CE em AB. Agora vamos construir duas retas perpendiculares, uma de AC passando por C e a segunda de EF passando por F. Na intersecção destas duas perpendiculares marcamos o ponto G e obtemos um quadrado de lado CE e com diagonal CF, que nada mais é que do a sobra da projeção de CE em BC. Mas como CF ainda é maior que CE devemos novamente subtrair CE de CF o que vai resultar no ponto H.

Observe que a partir deste passo a construção que estamos fazendo sobre CEFG é idêntica à que fizemos sobre ABCD, e como as figuras são obviamente congruentes chegaremos a um outro quadrado (CHIJ no caso) e deste a um outro, e assim, *ad infinitum*, ou seja, será um processo sem fim e não conseguiremos relacionar a lateral com a diagonal. Disto vamos obter dois conceitos: quando conseguimos relacionar as duas grandezas dizemos que elas são comensuráveis já; no caso da Figura 10, vemos que tal processo não é possível, portanto, a relação entre lado e diagonal de um quadrado é incomensurável.

Figura 10 - Antifairese lado e diagonal de um quadrado.



Fonte: elaborado pelo autor.

5.3 NÚMEROS PRIMOS, NÚMEROS COMPOSTOS E DIVISIBILIDADE

Para compreendermos o que são números primos, compostos e suas possibilidades de divisão, vamos nos basear em Euclides (2009, p. 269-270; 290-292; 337-342), lembrando que, para os gregos, a unidade (um) não era considerada número, e que trabalhavam com o critério de medida (comensurabilidade e incomensurabilidade) ao relacionar números, dado que sua lógica era essencialmente geométrica:

12. Um número primo é o medido por uma unidade só.
13. Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum.
14. Um número composto é o medido por algum número.
15. E números compostos entre si são os medidos por algum número como medida comum.

29. Todo número primo é primo com todo número que não mede.
30. Caso dois números, sendo multiplicados entre si, façam algum, e algum número primo meça o produzido deles, medirá também um dos do princípio.
31. Todo número composto é medido por algum número primo.
32. Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo.

14. Caso um número seja o menor medido por números primos, será medido por nenhum outro número primo além dos que medem no princípio.

20. Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos.

Da definição 12 vemos que primos são aqueles medidos pela unidade, ou seja, aqueles que somente são divisíveis por um. Já a definição 14 diz que se um número é medido por outro número⁵³ ele é dito composto. Disto podemos entender que um número primo é aquele divisível somente por um e por ele mesmo e um número composto é aquele que é divisível por outro número além de um e ele próprio. Além disso, vemos pela proposição I.20 do livro IX que os primos são infinitos.

Usando a proposição I.31 vemos que números compostos são medidos por primos, de onde resulta no teorema fundamental da aritmética⁵⁴ que afirma que todo número inteiro maior que um pode ser decomposto em um produto de números primos de forma única a não ser pela ordem. Por fim, números primos entre si são aqueles cuja medida resulta em um, ou seja, aqueles que não tem nenhum fator primo em comum na decomposição.

5.4 NÚMEROS RACIONAIS, NÚMEROS IRRACIONAIS E NÚMEROS REAIS

Os livros didáticos, em geral, definem um número racional como aquele que pode ser representado por uma fração a/b (irredutível), com $b \neq 0$, e número irracional como aquele que não pode ser representado por uma fração. Em uma definição histórica podemos recorrer a Euclides (2009, p. 269):

3. Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.

4. E partes, quando não meça exatamente.

Vale lembrar que, para Euclides, o termo comensurável não está ligado a número em si, mas à possibilidade de comparar magnitudes por uma unidade comum. Ainda assim, esse raciocínio acabou abrindo o caminho

⁵³ Lembrando que na notação grega, número está definido como maior ou igual a dois

⁵⁴ Este teorema foi provado por Gauss de forma definitiva e para todos os casos.

para a distinção moderna entre racionais e irracionais: quando a razão entre grandezas pode ser expressa como uma fração de inteiros temos o que hoje chamamos de número racional, e quando não é possível surge o que mais tarde se identificará como irracional. Na sequência, precisamos agora unir estes dois conjuntos. De Shapiro (2015) e Silva (2007) vemos que isto foi feito por Dedekind através de seus cortes. De modo bem simplista, embora seja o cerne da definição apresentada por Cantor, podemos lembrar, por exemplo, do número $\sqrt{2}$ como um número real, e fazermos a união de dois conjuntos, quais sejam, o primeiro dos números cujo quadrado seja menor que 2 e um segundo cujo quadrado seja maior ou igual a 2. Desta maneira temos um conjunto contínuo, contendo o irracional $\sqrt{2}$, definindo os números reais. Por fim, em Silva (2007) vemos que Cantor, em paralelo a Dedekind, desenvolveu uma teoria do contínuo aritmético em que os números irracionais são definidos como sequências infinitas de números racionais, fazendo com que os números reais finalmente sejam um contínuo sem as falhas ou “buracos” dos irracionais, quando pensamos no modelo geométrico — a reta, mas à custa de trazer definitivamente para dentro da matemática o conceito de infinito.

5.5 TEOREMA DE TALES

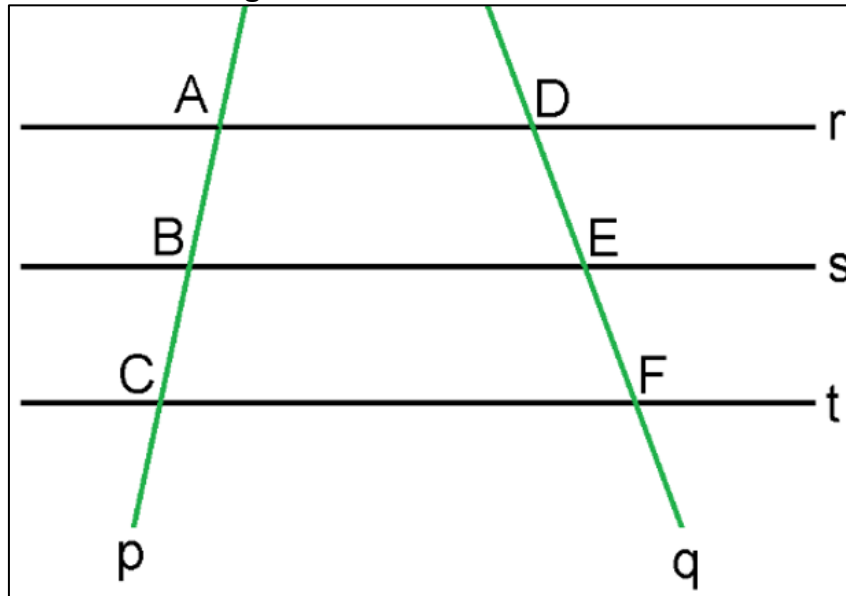
O Teorema de Tales conhecido em línguas anglófonas como teorema da intersecção, afirma que retas transversais a retas paralelas formam segmentos que são proporcionais. Segundo Boyer e Merzbach (2012) o teorema é atribuído a Tales, que o deduziu a partir de um exercício prático de medir uma pirâmide no Egito a partir de sua sombra projetada em comparação com a sombra de um cajado.

Usando a Figura 11 como referência, considerem-se as retas r , s e t paralelas entre si, e as retas p e q concorrentes a essas. Das intersecções formadas entre as cinco retas obtêm-se os pontos A, B, C, D, E e F. O Teorema de Tales estabelece que, nessa configuração, os segmentos correspondentes são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

onde AB, BC, DE e EF representam, respectivamente, as distâncias entre os pontos A e B, B e C, D e E, E e F.

Figura 11 - Teorema de Tales.



Fonte: desenho do autor.

5.6 INFINITO E INFINITESIMAL

Para tratar do infinito e do infinitesimal, podemos iniciar com Aristóteles que, segundo Silva (2007), entendia que o infinito possuía “dois tipos”. Um primeiro tipo chamado de infinito potencial que é aquele que obtemos ao, por exemplo, se adicionar sucessiva e continuamente números, ou seja, o infinito como fase final de um processo. E, um segundo tipo que ele chama de infinito atual, que pode ser definido como uma totalidade já acabada ou aquilo que já é infinito. Ainda segundo Aristóteles, os matemáticos devem se ocupar somente do infinito potencial e este foi o posicionamento de muitos matemáticos, inclusive alguns do século XX como Poincaré.

Ainda segundo Silva (2007) a questão da resistência ao infinito está ligada à questão empírica, já que infinitos números implica que existem

infinitos objetos em um mundo real que a experiência nos mostra como finito⁵⁵. Durante a história matemática vários tiveram de lidar com esta questão e um deles foi Galileu que percebeu que a ideia de infinito é contraditória, já que uma grandeza infinita tem a estranha propriedade de ser equinúmerica com uma parte de si própria. E finalmente, esta mesma propriedade observada por Galileu foi usada por Cantor e Dedekind para definir uma grandeza infinita e matematicamente trabalhar com isto. Neste sentido cabe destacar o que autores colocam, como Silva (2007, p. 83):

A aceitação do infinito atual, na matemática ou mesmo na natureza, foi um processo longo e difícil ainda não completamente encerrado. Negado por Aristóteles, redimido por Leibniz, combatido por Descartes; admitido e estudado por Bolzano e Cantor e desacreditado por Kronecker no século XIX; atacado como fonte segura de paradoxos por Poincaré e alijado da matemática por Brouwer já no século XX - o infinito ainda causa vertigens.

Já o infinitesimal pode ser associado “a ideia de algo que é quase zero”, isto traz problemas e paradoxos semelhantes ao infinito, como, por exemplo, nos paradoxos de Zenão ou ainda, no método da exaustão. Para tratar com o infinitesimal a matemática se vale de uma área denominada Análise Matemática, porém, tanto os termos infinito e infinitesimal, ainda podem nos causar problemas, quando confrontamos estes conceitos com o mundo real.

5.7 MATEMÁTICA

Durante as seções anteriores, foi apresentado um conjunto de ideias que circundam e se relacionam ao tema deste trabalho. Com o objetivo de ampliar a compreensão e avançar, ainda que de forma gradual, torna-se necessário trazer algumas considerações de cunho filosófico. Nesse sentido, inicia-se com Shapiro (2015) que discorre sobre os diversos aspectos da Filosofia da Matemática, em especial, sobre a natureza dos objetos

⁵⁵ Franklin (2014) citando Shapiro “Parece razoável insistir que existe algum limite para o tamanho do universo físico” (tradução nossa).

matemáticos. Ele expõe vertentes usuais, a de Platão e a de Aristóteles. Para Platão os objetos matemáticos existem em um plano independente do material (o mundo das Ideias) e o que vemos é uma versão borrada deles na realidade física. Já para Aristóteles os entes matemáticos derivam dos objetos reais e, através da abstração, chegamos ao verdadeiro aspecto dos entes matemáticos. Por exemplo, para Platão, por dois pontos passa somente uma reta, já para Aristóteles somente uma reta pode ser traçada entre estes pontos. A questão longe de ser semântica diz respeito à forma como os dois filósofos encaram a matemática. Para Platão os dois pontos e a reta sempre existiram (no mundo das ideias), logo, a ideia de traçar uma reta entre dois pontos não faz sentido já que existente⁵⁶, em contraponto, para Aristóteles é algo que pode ser criado, já que inexistente. Ou de modo mais abstrato, podemos dizer que Platão vê os objetos matemáticos como entidades que pertencem ao Mundo das Ideias, um domínio imaterial e perfeito que transcende a experiência física. Portanto, através da matemática é possível se ter uma visão sobre a natureza da existência. Em contrapartida, Aristóteles oferece uma visão mais prática dos números, sugerindo que eles devem estar vinculados somente à realidade física, mesmo usando a abstração, o objeto matemático ainda guarda forte correlação com o mundo real. Shapiro (2015) também destaca que a abstração de Aristóteles, de fato, transforma a forma física do objeto em um objeto ideal que nada mais é do que o objeto do mundo das Ideias de Platão.

Já Russell (2007) oferece uma abordagem lógica aos números, citando Frege, que eles podem ser entendidos como classes de classes. Essa visão logicista dos números permite que eles sejam tratados como entidades abstratas, independentes de uma referência física concreta. Como bem explana Silva (2007), tanto Platão quanto Aristóteles imaginam os objetos matemáticos com conexão física com a realidade, não permitindo sua existência apenas no nível de pensamento. Note que, embora Platão conceba os objetos matemáticos com existência plena no plano das Ideias, esta existência é refletida no meio físico.

⁵⁶ Neste sentido de Shapiro (2015, p. 25): “Se a filosofia de Platão é correcta, a linguagem dinâmica não faz sentido algum. Objectos eternos e imutáveis não são sujeitos a construção e movimento. Não podemos traçar uma linha ou uma circunferência que sempre existiu. Não podemos tomar um segmento de linha recta eterno e imutável e cortá-lo em metade e depois mover uma das partes para sobrepor a outra figura.”

Por fim, deve-se lembrar que a matemática moderna possui forte caráter abstrato. Muitas vezes, ela não é construída diretamente a partir de objetos do mundo real, mas sim como desenvolvimento interno de suas próprias estruturas. Nesse sentido, Silva (2007, p. 51) observa:

Evidentemente, isso precisou esperar até o século XX, quando se firmou a ideia de que teorias matemáticas não precisam ser teorias de nenhum domínio objetivo em particular, mas de todos que compartilham uma certa estrutura formal. Ou seja, teorias matemáticas formais são, na verdade, teorias de formas, não teorias de conteúdo.

Porém, mesmo sendo um campo de conhecimento debruçado na abstração, a matemática insiste em aparecer em contextos totalmente distintos, ambientes diversos dos que foram elaborados, em situações aparentemente bem distintas, como por exemplo qual a relação entre o mercado de ações e as criações de coelhos de Fibonacci? Por algum motivo, ainda não totalmente claro, cotações do mercado podem ser modeladas por Fibonacci⁵⁷. Em seu artigo “A eficácia irracional da matemática nas ciências naturais”, Wigner (1960), discorre sobre a importância da matemática nas ciências naturais e sobre as impressionantes casualidades entre o trabalho de matemáticos e físicos, nos dando um panorama da relação entre a matemática aplicada e a física. Neste mesmo sentido Wigner⁵⁸ (1960) nos questiona o motivo de, por exemplo, o espaço de Hilbert ter sido utilizado para descrever a mecânica quântica, mesmo não tendo sido desenvolvido para isto.

É verdade, claro, que a física escolhe certos conceitos matemáticos para a formulação das leis da natureza, e certamente apenas uma fração de todos os conceitos matemáticos é usada na física. É verdade também que os conceitos que foram escolhidos não foram selecionados arbitrariamente de uma lista de termos matemáticos, mas foram desenvolvidos, em muitos, se não na maioria dos casos, independentemente pelo físico e reconhecidos então como tendo sido concebidos antes pelo matemático. (Tradução nossa)

Wigner (1960) também nos lembra que a declaração de que as leis da natureza são escritas na linguagem da matemática foi feita há trezentos anos por Galileu, e que agora é mais verdadeira do que nunca.

⁵⁷ Belmonte (2010). fornece um exemplo desta relação.

⁵⁸ Nobel de Física de 1963.

Contudo, é importante recordar que essa associação entre matemática e realidade remonta a tempos ainda mais remotos, desde a contagem e a atribuição de números a objetos, passando pelo surgimento do conceito de número zero e pela formulação pitagórica de que “tudo é número”. Delineia-se, assim, uma linha de continuidade que reforça a ideia de que a matemática, mesmo concebida como abstração intelectual, possui uma misteriosa eficácia na descrição do mundo natural, independentemente de sua origem cultural, histórica ou filosófica, e que se consolida como a linguagem privilegiada da ciência, sustentando não apenas modelos explicativos, mas também a própria possibilidade de compreendermos as leis que regem a natureza.

6 TEORIA DIDÁTICA E O PRODUTO EDUCACIONAL

6.1 DIRETRIZES E CARACTERIZAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um Produto Educacional (PEd). Com isso, sentimos a necessidade, durante o seu desenvolvimento, de compreendermos o que se espera dessa produção no âmbito dos mestrados profissionais, especialmente, no Programa PROFMAT.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, 2019), no Documento de Área 46 - Ensino, estabelece uma série de diretrizes a respeito dos produtos educacionais, os quais devem ser desenvolvidos com base em fundamentos teóricos e devem alinhar-se às necessidades do contexto educacional em que serão aplicados. Ainda, os PEd devem ser passíveis de avaliação e validação, contribuindo para a formação de professores e a melhoria das práticas de ensino. Entre os vários itens do documento destaca-se:

No Mestrado Profissional, distintamente do Mestrado Acadêmico, o mestrando necessita desenvolver um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um

vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, entre outros.

Já segundo Mendonça (2022), um produto educacional é concebido como uma solução prática para problemas identificados no processo de elaboração da dissertação ou tese, sendo resultado de uma pesquisa aplicada que visa à melhoria da qualidade da educação. O autor também destaca que o produto educacional é uma intervenção planejada que busca transformar a realidade educacional por meio de recursos didáticos inovadores. De Mendonça (2022, p. 5) destacamos:

O produto educacional (resposta), por sua vez, é autônomo em relação à dissertação/tese, isto é, ele deve autoconter os elementos necessários para que o leitor o compreenda e possa replicá-lo, respeitando a natureza para o qual foi concebido. Portanto, o leitor não deve precisar conhecer a dissertação/tese para utilizar o PE ou mesmo compreendê-lo. Daí porque produto educacional é uma produção autônoma em relação a dissertação/tese.

Dessa forma, deduzimos, a partir de nossas fontes, que um produto educacional é uma intervenção pedagógica planejada, fundamentada teoricamente e voltada para a transformação da prática de ensino com vistas a promover a aprendizagem. Ele se materializa na forma de recursos como sequências didáticas, jogos, softwares, manuais, vídeos, entre outros, desenvolvidos a partir de pesquisas aplicadas no contexto educacional. Dessa forma, o produto educacional não é um fim em si mesmo, mas parte de um processo reflexivo, investigativo e transformador que visa tornar o conhecimento mais acessível, contextualizado e eficaz no cotidiano escolar.

6.2 CONTRIBUIÇÕES DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO

A História da Matemática, longe de ser apenas um apêndice curioso ou decorativo no ensino da disciplina, constitui-se em uma poderosa ferramenta de ensino. Podemos identificar vários aspectos que definem sua importância no ensino da matemática. O primeiro ponto a ser destacado é desmistificar a matemática de sua aura de conhecimento destinado a poucos. D'Ambrosio (2001) destaca que a matemática é uma criação humana, nascida

das práticas sociais e simbólicas destinada a resolver problemas próprios de sua época e sociedade e não somente resultado exclusivo do trabalho de gênios isolados⁵⁹. No mesmo mote, temos Miguel (2004), que afirma que ela ajuda o aluno a entender que os conceitos matemáticos não nasceram prontos, mas foram criados e recriados ao longo do tempo.

Por Santos (2006) vemos que ao entrar em contato com os processos de criação dos conceitos, muitas vezes marcados por tentativas e erros, o aluno desenvolve uma visão mais crítica e realista do conhecimento e isso permite uma atitude de questionamento e abertura intelectual permitindo ao aluno descobrir seu próprio potencial para explorar a realidade, já que tantos outros também o fizeram.

É importante retomar D'Ambrosio (2001) ao destacar a relevância da história da matemática na formação docente, na medida em que ela ajuda o professor a compreender as raízes conceituais do que ensina. Com isso, torna-se possível aprofundar a prática pedagógica e estimular uma postura crítica e criativa. Em vez de apenas repetir métodos mecânicos ou seguir manuais didáticos, o professor pode planejar experiências de ensino mais conscientes, integrando cultura, lógica e contexto histórico.

Por fim, D'Ambrosio (2021, p. 1) nos coloca que:

As ideias matemáticas compõem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.

A partir da citação anterior compreendemos que a história da matemática é essencial porque devolve humanidade a uma disciplina que é apresentada como fria e fechada. A matemática não surgiu pronta, ela foi criada por pessoas reais em diferentes culturas e épocas, para lidar com problemas do seu cotidiano, quando reconhecemos isso, deixamos de tratá-la como um conjunto de verdades absolutas e passamos a vê-la como um processo, uma construção coletiva, sujeita a mudanças, interpretações e

⁵⁹ Claro que sempre temos o exemplo de Gauss descobrindo a fórmula da soma de uma PA com menos de 10 anos, mas por outro lado temos o escriba Ahmes, há milênios atrás com problemas similares aos que os alunos enfrentam no atual dia a dia escolar.

contextos históricos e culturais. Mais do que um recurso didático, a história da matemática é uma forma de resgatar a dignidade do pensamento, ela mostra que a dúvida é legítima, que o erro é produtivo e, principalmente que o conhecimento é sempre uma obra em aberto. Mais ainda, visitar a história traz as pessoas, as ideias, as decisões e completa o entendimento de um conceito, porque deixamos de simplesmente reproduzir e partimos para a construção do conhecimento.

6.3 UMA ABORDAGEM DIDÁTICA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A história da matemática é um campo de conhecimento que oferece conteúdo vasto e com muita riqueza que pode se aproximar da forma como entendemos os conceitos matemáticos, não apenas como um conteúdo de estudo, mas como uma ferramenta pedagógica que pode transformar o ensino da disciplina. Integrar a história da matemática ao processo de formação de professores permite compreender como os conceitos foram desenvolvidos e aplicados ao longo do tempo, enriquecendo sua compreensão. O trabalho de Cyrino e Pasquini (2009) vai neste sentido, como um exemplo de como a história da matemática pode ser incorporada ao ensino de operações com números inteiros. O texto propõe uma análise das contribuições de matemáticos históricos como René Descartes e David Hilbert, cujas abordagens geométricas para a multiplicação e divisão de segmentos podem ser utilizadas para ensinar operações com números inteiros, trazendo mais clareza e visualização aos conceitos que subjazem a gênese do números inteiros.

Como observado por Cyrino e Pasquini (2009), a história da matemática revela que os conceitos matemáticos que hoje consideramos simples foram, em algum momento, desafios complexos que precisaram ser desenvolvidos e refinados ao longo do tempo. A multiplicação e a divisão de números inteiros, por exemplo, foram inicialmente abordadas de forma geométrica por René Descartes, que, em sua obra *La Géométrie* (1637), associou a multiplicação de números inteiros ao produto de dois segmentos de

reta, considerando a área de um retângulo formado pelos segmentos. Para ele, os números poderiam ser representados por segmentos geométricos, o que permitia visualizar a operação de multiplicação de maneira concreta. Esta abordagem de Descartes abriu caminho para uma compreensão mais intuitiva da multiplicação, ligando a aritmética à geometria, considerada uma disciplina mais visual e acessível.

Cyrino e Pasquini (2009) observam que o trabalho de David Hilbert, mais de dois séculos depois, representou um avanço significativo no sentido de justificar as operações com os números inteiros. Hilbert formulou um método mais sistemático para o cálculo de segmentos, com base na geometria analítica. Ele procurou fundamentar a multiplicação e a divisão de segmentos de forma mais abstrata, mas também acessível, e validou propriedades importantes da multiplicação, como a comutatividade e a distributividade. Hilbert, ao integrar conceitos geométricos às operações aritméticas, fez com que a matemática se tornasse mais formal e ao mesmo tempo mais compreensível para os matemáticos da época. Essas contribuições históricas são essenciais no contexto educacional, pois oferecem aos professores recursos para ensinar conceitos aritméticos de forma visual e geométrica, proporcionando aos alunos uma compreensão mais concreta das operações matemáticas.

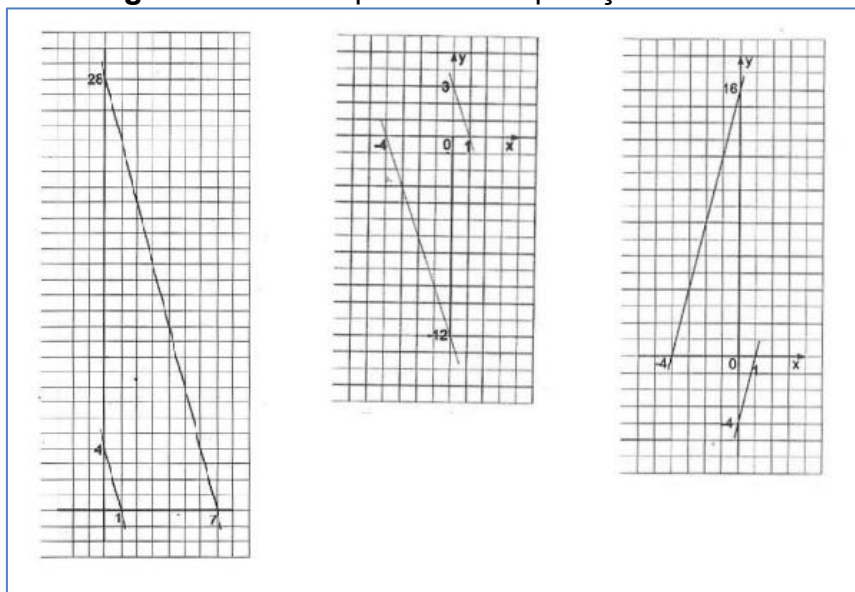
A história da matemática pode ser uma aliada poderosa na formação de professores da disciplina. Essa perspectiva é ilustrada por Cyrino e Pasquini (2009) que exemplificam como é possível integrar a história ao ensino de operações com números inteiros, especialmente por meio das abordagens geométricas de Descartes e Hilbert. A proposta do texto não é apenas apresentar essas abordagens como um conteúdo histórico, mas utilizá-las como recursos pedagógicos para a prática docente. A tarefa é mostrar como a matemática pode ser mais do que um conjunto de fórmulas e algoritmos, e como a história dos conceitos matemáticos contribui para entender a evolução do conhecimento e formar professores mais críticos e reflexivos. Uma das principais propostas do texto é usar a história para mostrar aos futuros professores como as operações com números inteiros podem ser representadas de maneira geométrica. A multiplicação de segmentos de reta,

como proposta por Descartes, é uma forma concreta e visual de ensinar a multiplicação de números inteiros. A tarefa de representar a multiplicação de dois segmentos no plano cartesiano, por exemplo, permite que os alunos observe de maneira prática o processo de multiplicação, associando números a segmentos geométricos e justifique diversos procedimentos e regras utilizadas nas operações com os números inteiros.

No texto de Cyrino e Pasquini (2009), são apresentadas várias tarefas que permitem aplicar o conhecimento histórico de maneira prática. Um dos exemplos é uma tarefa de multiplicação de dois segmentos de reta, baseado no trabalho de Descartes. Nesta tarefa os alunos devem representar geometricamente os números propostos, ajudando-os a visualizar a operação de multiplicação de maneira concreta conforme exemplificado na Figura 12. Esse tipo de tarefa não só reforça a compreensão da multiplicação, mas também ajuda os alunos a desenvolver habilidades geométricas e analíticas. Outro procedimento importante é a divisão de segmentos, inspirado em Hilbert. Ao dividir um segmento por outro, os alunos podem visualizar a razão entre os dois segmentos e compreender a operação de divisão de maneira mais tangível. Esse tipo de procedimento, além de ajudar a compreender a divisão, também estimula o pensamento geométrico e a compreensão das relações proporcionais entre os segmentos. A tarefa de estudar a regra dos sinais é outra proposta valiosa. Usando as construções geométricas de Descartes e Hilbert, os alunos são desafiados a representar a multiplicação de números negativos no plano cartesiano, observando como as operações de multiplicação de sinais iguais ou opostos, resultando respectivamente em produtos positivos ou negativos. Essa tarefa ajuda a internalização da regra dos sinais de maneira visual, facilitando a compreensão do comportamento das operações com números inteiros.

O texto em si não traz uma apresentação formal do conjunto dos números inteiros. porém, apresenta nas diversas tarefas propostas (e resolvidas no próprio texto) diversas questões que podem e devem ser discutidas na formação de professores de matemática.

Figura 12 – Exemplos da multiplicação de retas



Fonte: Cyrino e Pasquini (2009, p. 33, 38 e 39)

Integrar a história da matemática no ensino das operações com números inteiros, conforme o trabalho de Cyrino e Pasquini (2009), oferece uma maneira de tornar o ensino mais acessível, significativo e visual. O uso de representações geométricas, inspiradas por matemáticos como Descartes e Hilbert, permite que os conceitos aritméticos sejam compreendidos de maneira concreta e intuitiva, o que é especialmente importante na formação de professores de matemática. Ao entender a história por trás dos conceitos, os professores não apenas ensinam as operações, mas também capacitam seus alunos a compreender as raízes e a evolução do conhecimento matemático, o que contribui para uma formação mais crítica, reflexiva e conectada à realidade.

Por fim, como sugestão um bom desdobramento do material de Cyrino e Pasquini (2009) pode ser a inclusão do compasso de proporção de Galileu. Assim como os esquemas de Descartes e Hilbert, o instrumento de Galileu se presta a calcular proporções, razões e todos se conectam diretamente aos trabalhos de Arquimedes, Eudoxo e por fim, Tales. Com isto vemos que a Matemática navega por diversas épocas e sociedades cada qual oferecendo sua contribuição para o que hoje entendemos como matemática.

6.4 DA DISSERTAÇÃO AO PRODUTO EDUCACIONAL

A ligação entre esta dissertação e o produto educacional parte do princípio de que a matemática é uma construção humana e cultural, cujos conceitos não nascem prontos e, justamente por isso, a história da matemática pode orientar uma prática docente mais crítica, consciente e criativa. E concretizamos essa ideia no produto educacional, principalmente por meio de propostas didáticas voltadas aos números naturais e às operações, a partir dos sistemas de numeração maia e babilônico, além de uma tarefa que explora o lado abstrato e conceitual da matemática por meio de histórias em quadrinhos.

Especificamente, a conexão pode ser vista no encadeamento interno do próprio produto educacional. A tarefa “roda de conversa” funciona como porta de entrada, pois propõe apresentar e comparar as civilizações maia, babilônica, grega e atual/futura, destacando época, cultura, tecnologia e, em especial, elementos matemáticos, e culminando em um debate orientado para os aspectos matemáticos dessas culturas. Essa tarefa dialoga com o argumento da dissertação de que a compreensão da história da matemática fortalece a formação docente e permite escolhas didáticas melhores.

Na sequência, as estações Maia, Babilônica e Euclides materializam, em tarefas, a ideia de múltiplas contribuições históricas para a construção dos conceitos numéricos e operatórios. Elas também se conectam às discussões filosóficas sobre o que é número. Em particular, pode-se traçar um paralelo com a definição formal atribuída a Frege, segundo a qual o número pode ser definido como a classe de todas as classes semelhantes, isto é, com o mesmo equipotencial. Isso se torna claro quando comparamos, por exemplo, três seixos e três palitos na numeração maia. Do mesmo modo, há uma aproximação com questões presentes em Platão e Aristóteles, ao evidenciar a dualidade entre o número como abstração e sua contraparte concreta, tal como aparece nos objetos e nas práticas de contagem apresentadas. Em termos pedagógicos, isso se articula diretamente com o pressuposto do próprio produto, contribuindo para o raciocínio e para a compreensão do que é número,

Por fim, a Estação Cordel faz a ponte com o conteúdo mais conceitual da dissertação, pois desloca o foco do como calcular para o como

pensar. No PEd, essa estação inclui aulas e exemplos voltados ao ideia de limite e à divisão por zero, à utilidade da matemática e da História da Matemática, e ao método da exaustão de Eudoxo, mas nada impede que outros temas também sejam tratados, desde operações matemáticas simples até, por exemplo, o conceito platônico do “mundo das Ideias”. A estação promove ainda uma conexão com o mundo do aluno, ao utilizar uma linguagem e personagens que vão ao encontro do discente, reforçando a proposta de que o estudante pode acessar grandes ideias a partir de linguagem e contexto.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo refletir sobre os fundamentos da matemática a partir de uma perspectiva histórica e filosófica, articulando contribuições de autores como Platão, Aristóteles, Frege, Russell, Gödel, entre outros, e relacionando tais ideias com a prática pedagógica contemporânea. A análise realizada evidenciou que a matemática, longe de ser um corpo rígido e definitivo, é um campo em constante construção, marcado por tensões conceituais e pela busca de fundamentos que, em grande medida, permanecem abertos.

Constatou-se que a articulação entre história e filosofia permite compreender a matemática não apenas como técnica ou linguagem formal, mas como uma produção cultural que reflete diferentes modos de pensar ao longo do tempo. Essa perspectiva oferece ao estudante e ao professor um instrumento de ressignificação do ensino, ao mostrar que os conceitos matemáticos resultam de debates, rupturas e avanços, e não de uma linearidade inquestionável.

Do ponto de vista pedagógico, o estudo reforça a importância de inserir elementos históricos e filosóficos na formação matemática, ampliando o horizonte crítico dos alunos e possibilitando a construção de sentido para os conteúdos. Reconhece-se, entretanto, que os limites deste trabalho residem na extensão do tema, que comporta múltiplas abordagens ainda não exploradas aqui, como a análise mais detalhada da etnomatemática, da antropologia da matemática e das relações entre lógica formal e educação.

Conclui-se, portanto, que a matemática deve ser vista como um campo de saber em diálogo com a filosofia, a história e a cultura, e que esse diálogo pode se transformar em uma ponte pedagógica potente. Como perspectiva futura, sugere-se o aprofundamento das conexões entre filosofia da matemática e práticas de ensino, de modo a fortalecer tanto a compreensão teórica quanto a aplicação educativa desse conhecimento.

8 REFERÊNCIAS

BELMONT, Daniele Ferreira de Sousa. Teoria das ondas de Elliott: uma aplicação ao mercado de ações da BM&FBOVESPA. 2010. 97 f. Dissertação (Mestrado em Economia do Trabalho e Economia de Empresas) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2010.
<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/5048> acesso em 03/01/2025

BOCHNER, Salomon. *The role of mathematics in the rise of science*. Princeton: Princeton University Press, 1966. Disponível em:
<https://archive.org/details/roleofmathematic0000boch/mode/2up>. Acesso em: 3 mar. 2025.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. 3. ed. norte-americana. São Paulo: Blucher, 2012.

CAPES. Documento de Área 46: Ensino. Brasília: CAPES, 2019. Disponível em:
https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/Docs_de_area/Ensino_doc_area_e_comiss%C3%A3o_2019.pdf. Acesso em: 29 maio 2025.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CRUMP, Thomas. A breve história da ciência: como a ciência mudou a compreensão do mundo. Rio de Janeiro: Ediouro, 2006.

CYRINO, Márcia Cristina da Costa Trindade; PASQUINI, Regina Célia Guapo. *Multiplicação e divisão de números inteiros: uma proposta para a formação de professores de Matemática*. Belém: SBHMT, 2009. (Coleção História da Matemática para Professores, v. 14).

D'AMBROSIO, Ubiratan. *A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA QUESTÕES METODOLÓGICAS E POLÍTICAS E REFLEXOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*. Revista História da Matemática para Professores, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 26–40, 2021. Disponível em:
<https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/66>. Acesso em: 8 jun. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica*. Zetetiké, Campinas, v. 9, n. 1, p. 5–22, 2001.

EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. *Física Quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. Rio de Janeiro: Campus, 1985.

EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRANKLIN, James. *An Aristotelian realist philosophy of mathematics: mathematics as the science of quantity and structure*. Oxford: Oxford University Press, 2014.

FREGE, Johann Gottlob. *Os fundamentos da aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*. Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021. (Textuniversitários, 11).

GOEBEL, Silke. *Why animals recognise numbers but only humans can do maths*. The Conversation, 28 jul. 2021. Disponível em: <https://theconversation.com/why-animals-recognise-numbers-but-only-humans-can-do-maths-165121>. Acesso em: 3 mar. 2025.

HARDY, Godfrey Harold; WRIGHT, Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 6. ed. Oxford: Clarendon Press, 2008.

MENDES, Iran Abreu. Número: o simbólico e o racional na história. In: NEVES, Lúcia Ozório de Faria (org.). *História da Matemática: uma visão crítica, histórica e filosófica*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.

MENDONÇA, A. P.; RIZZATTI, I. M.; RÔÇAS, G.; FARIAS, M. S. F. O que contém e o que está contido em um Processo/Produto Educacional? Reflexões sobre um conjunto de ações demandadas para Programas de Pós-Graduação na Área de Ensino. *Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico*, v. 8, e211422, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.31417/educitec.v8.2114>. Acesso em: 29 maio 2025.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Angela (org.). *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Campinas, SP: Autores Associados, 2004. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Mayan mathematics*. Novembro 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mayan_mathematics/. Acesso em: 23 fev. 2005.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. Edição digital.

RUSSELL, B. *Introdução à filosofia matemática*. Tradução de Maria Luiz X. de A. Borges; Revisão Técnica de Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SANTOS, Claudia Regina; MIGUEL, Antonio (org.). *Educação Matemática e Formação de Professores: um olhar sobre a prática*. Campinas, SP: Autores

Associados, 2006.

SHAPIRO, Stewart. *Filosofia da matemática*. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2015.

SILVA, J. J. Platão e Aristóteles. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Ed. Unesp, 2007.

WIGNER, Eugene. *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, New York, v. 13, n. 1, p. 1-14, fev. 1960. Disponível em: <https://math.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html>. Acesso em: 15 dez. 2025.

PRODUTO EDUCACIONAL

O QUE É O NÚMERO? SOMA, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO:

RESSIGNIFICANDO COMPREENSÕES ACERCA DO
MODO COMO CIVILIZAÇÕES ANTIGAS CALCULAVAM.

Fábio Ferla

Orientadora:

Prof.^a. Dra. Regina Celia Guapo Pasquini



LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Civilização 1 | 7 |
| Figura 2 – Civilização 2 | 7 |
| Figura 3 – Civilização 3 | 7 |
| Figura 4 – Civilização 4 | 7 |
| Figura 5 – Conversão da base 10 para base 20..... | 11 |
| Figura 6 – Conversão da base 20 para base 10..... | 12 |
| Figura 7 – Sistema de numeração Maia..... | 13 |
| Figura 8 – Somando 253 com 367 na notação Maia..... | 14 |
| Figura 9 – Subtraindo 188 de 222 na notação Maia..... | 15 |
| Figura 10 – Fotos somando 253 com 367..... | 16 |
| Figura 11 – Fotos subtraindo 188 de 222..... | 17 |
| Figura 12 – Impressos da estação Maia..... | 18 |
| Figura 13 – Fatorando o número 7 com a Estação Babilônia..... | 21 |
| Figura 14 – Fatorando o número 10 com a Estação Babilônia..... | 22 |
| Figura 15 – Fatorando o número 7..... | 23 |
| Figura 16 – Fatorando o número 10..... | 23 |
| Figura 17 – Fatorando o número 15..... | 23 |
| Figura 18 – Múltiplos e fatores primos de 1 a 60..... | 24 |
| Figura 19 – Impresso central da estação Babilônia..... | 25 |
| Figura 20 – Estação Babilônia montada..... | 25 |
| Figura 21 – Usando a Estação Euclides..... | 28 |
| Figura 22 – Usando a Estação Euclides..... | 29 |
| Figura 23 – Exemplo de uso Estação Euclides..... | 30 |
| Figura 24 – Exemplo de uso Estação Euclides..... | 30 |
| Figura 25 – Exemplo de uso Estação Euclides..... | 31 |
| Figura 26 – Exemplo de uso Estação Euclides..... | 31 |
| Figura 27 – Lista dos fatores primos de 1 a 100..... | 32 |
| Figura 28 – Estação Euclides..... | 33 |
| Figura 29 – Conjunto de Imagens Exemplo 1 – Estação Cordel..... | 37 |
| Figura 29 – Conjunto de Imagens Exemplo 2 – Estação Cordel..... | 38 |
| Figura 30 – Conjunto de Imagens Exemplo 3 – Estação Cordel..... | 41 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | APRESENTAÇÃO | 5 |
| 2 | TAREFA: RODA DE CONVERSA..... | 6 |
| 2.1 | Descrição da atividade..... | 6 |
| 2.2 | Aula 1 – As Civilizações Antigas: aspectos históricos..... | 6 |
| 2.3 | Encaminhamento: | 6 |
| 3 | TAREFA: ESTAÇÃO MAIA..... | 8 |
| 3.1 | Descrição da atividade..... | 8 |
| 3.2 | Aula 1 – A Civilização Maia: aspectos históricos | 8 |
| 3.3 | Aula 2 - A Estação Maia | 8 |
| 3.4 | Aula 3 – Calculando como os maias..... | 9 |
| 3.5 | Encaminhamento..... | 9 |
| 3.5.1 | Estação Maia – Primeira Parada..... | 9 |
| 3.5.2 | Estação Maia – Segunda Parada | 11 |
| 3.5.3 | Estação Maia – Terceira Parada..... | 12 |
| 3.5.4 | Estação Maia – Quarta Parada | 13 |
| 3.5.5 | Estação Maia – Imagens da Implantação..... | 16 |
| 3.5.6 | Estação Maia – Como Construir | 17 |
| 4 | ATIVIDADE: ESTAÇÃO BABILÔNICA..... | 19 |
| 4.1 | Descrição da atividade..... | 19 |
| 4.2 | Aula 1 - A civilização Suméria..... | 19 |
| 4.3 | Aula 2 - A Estação Babilônica..... | 19 |
| 4.4 | Aulas 3 e 4 - Usando A Estação Babilônica | 19 |
| 4.5 | Encaminhamento..... | 20 |
| 4.5.1 | Exemplo, fatorando o número 7: | 21 |
| 4.5.2 | Exemplo, fatorando o número 10:..... | 21 |
| 4.5.3 | Estação Babilônia – Imagens da Implantação..... | 23 |
| 4.5.4 | Estação Babilônia - Como Construir..... | 23 |
| 5 | ATIVIDADE: ESTAÇÃO EUCLIDES..... | 26 |
| 5.1 | Descrição da atividade..... | 26 |
| 5.2 | Aula 1 - A matemática Grega de Euclides –..... | 26 |
| 5.3 | Aula 2 - A Estação Euclides | 26 |
| 5.4 | Aula 3 – Usando A Estação Euclides | 26 |
| 5.5 | Encaminhamento..... | 27 |

| | | |
|-------|--|----|
| 5.5.1 | Estação Euclides – Imagens da Implantação..... | 30 |
| 5.5.2 | Estação Euclides - Como Construir | 31 |
| 6 | ATIVIDADE: ESTAÇÃO CORDEL | 34 |
| 6.1 | Aula 1 - Conceito de limite e divisão por zero. | 34 |
| 6.2 | Aula 2 – Utilidade da Matemática e da História da Matemática | 34 |
| 6.3 | Aula 3 – Método da Exaustão de Eudoxo..... | 34 |
| 6.4 | Encaminhamento..... | 35 |
| 6.4.1 | Estação Cordel – Como Construir | 36 |
| 7 | REFERÊNCIAS..... | 44 |

1 APRESENTAÇÃO

Embora os números sejam presentes em nossa vida mesmo antes do nosso nascimento, aos números e suas operações podemos atribuir uma parcela pelo insucesso de nossos alunos na escola.

Além disto a vida de qualquer cidadão depende da quantificação de horários, salários, preços, distâncias, volumes, massas, doses de medicamentos, orçamentos familiares, indicadores ambientais como pluviosidade, e até das métricas menos visíveis que regem o mundo digital — armazenamento, largura de banda, latência e taxas de processamento. Sem essas medidas, e sem compreender as operações que as articulam (estimativas, arredondamentos, proporções, porcentagens, médias e variações), o planejamento individual e coletivo se fragiliza, escolhas perdem fundamento e a participação cidadã se reduz. Logo, não saber Matemática vai muito além de um problema acadêmico.

Este Produto Educacional (PEd) tem como objetivo propor tarefas que envolvam os números naturais e suas operações a partir dos diferentes modos como antigas civilizações desenvolviam seus sistemas de numeração, as civilizações: maia, babilônica e grega. E ainda, tarefas que buscam explorar alguns conceitos e ideias que permeiam o que é um número por meio de um trabalho com história em quadrinhos usando Inteligência Artificial.

Acreditamos que os processos advindos dos diferentes sistemas de numeração, não somente a mudança de base, mas as próprias regras necessárias para realizar as operações podem contribuir para a compreensão, o desenvolvimento e o fortalecimento de estratégias de raciocínio que permitam entender o que é um número e possíveis relações entre eles em termos operacionais.

2 TAREFA: RODA DE CONVERSA

2.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Público alvo: 8ª série do Ensino Fundamental.

Materiais necessários: Impresso, computador ou livros,

Objetivo: Apresentar ao aluno uma breve noção sobre algumas sociedades antigas, destacando aspectos de sua história e cultura e, em especial, de sua matemática. Além disso, esta atividade funciona como introdução às demais.

Aulas: Uma aula com duração de 50 minutos. Embora esta tarefa seja proposta para uma aula, ela necessitará de orientações na aula anterior usando por volta de 15min para isso.

2.2 AULA 1 – AS CIVILIZAÇÕES ANTIGAS: ASPECTOS HISTÓRICOS

Apresentar para os alunos alguns aspectos das civilizações maia, babilônica¹ e grega em comparação com nossa civilização.

2.3 ENCAMINHAMENTO:

Imprimir ou exibir Figura 1, Figura 2, Figura 3 e Figura 4 para os alunos, e propor como tarefa para casa identificar e fazer um breve relato sobre cada uma das civilizações apresentadas, a sala deve ser dividida em quatro ou mais grupos para permitir a participação de todos, sendo que cada um dos grupos será responsável por uma das civilizações a saber: Civilização 1: Maia, Civilização 2: Babilônia, Civilização 3: Grécia e Civilização 4: Atual.

Dentre os quesitos abordados os principais são época, aspectos culturais e tecnológicos, local geográfico da civilização, linguagem, matemática, ciência, e se for uma civilização extinta qual seu legado que ainda utilizamos.

¹ Os termos Babilônia, Suméria e Acádia designam o mesmo povo e local geográfico, porém em diferentes épocas, Suméria desenvolveu a escrita Cuneiforme, Acádia é o primeiro império da História e por fim Babilônia representa a cultura que desenvolveu o zero posicional. Neste Produto Educacional será usado o termo Babilônia ou Babilônicos. Para saber mais consulte Roque (2012).

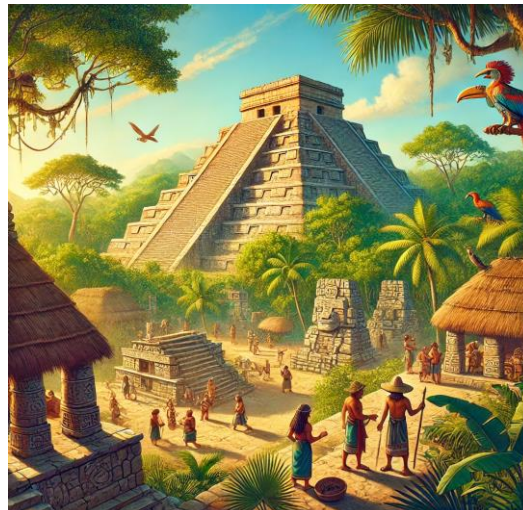
Após esta primeira exposição o professor deve conduzir um debate entre os grupos comparando as civilizações antigas com a atual, direcionando a discussão para aspectos matemáticos das culturas.

Figura 1 – Civilização 1



Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

Figura 2 – Civilização 2



Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

Figura 3 – Civilização 3



Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

Figura 4 – Civilização 4



Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

3 TAREFA: ESTAÇÃO MAIA

3.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Público alvo: 8ª série do Ensino Fundamental.

Materiais necessários: Cartolina, lápis, alfinetes ou cola, pedrinhas ou tampinhas, cavilha, palitos de fósforos ou canudos, conchas ou forminhas, régua, papel impresso, calculadora e caneta.

Objetivo: Entender o que é um número. Estudar o sistema de numeração Maia. Compreender as relações entre concreto e o abstrato relacionadas a número.

Aulas: Três aulas com duração de 50 minutos cada.

Observação: Esta atividade foi planejada para turmas de no máximo 25 alunos.

3.2 AULA 1 – A CIVILIZAÇÃO MAIA: ASPECTOS HISTÓRICOS

Apresentar para os alunos alguns aspectos da civilização Maia, o seu sistema de numeração, e na sequência as operações de conversão da base 10 para a base 20 e da base 20 para base 10.

TAREFA 1: Escolher alguns números e representá-los na simbologia maia, fazendo a conversão da base dez para a base vinte.

TAREFA 2: Com os mesmos números fazer a conversão da base 20 para a base 10.

3.3 AULA 2 - A ESTAÇÃO MAIA

Organizar os alunos em equipes de 5 e apresentar a Estação Maia, e o seu funcionamento que será dividido em tarefas. Cada tarefa será propositiva dentro de uma PARADA ou mais.

TAREFA 3: Realizar em conjunto com os alunos: a soma (253 + 367);

TAREFA 4: Realizar a subtração (222 – 188) para os alunos e propor outras

duas operações: $(100 + 110)$ e $(200 - 130)$.

3.4 AULA 3 – CALCULANDO COMO OS MAIAS.

Com a turma distribuída novamente em equipes, propor a tarefa de realizar operações com os números representados segundo a simbologia maia.

TAREFA 5: Propor para os alunos uma lista com algumas operações para que as resolvam assim como os maias faziam, mantendo as equipes com 5 alunos. Uma sugestão de operações: $20 + 20$, $111 + 222$, $347 + 347$, $650 + 12$, $377 - 143$, $528 - 350$, $172 - 13$ e $577 - 576$.

3.5 ENCAMINHAMENTO

Com base em Morey e Silva (2017), a atividade consiste inicialmente em explorar o sistema de numeração maia, ou seja, a base utilizada e a simbologia para a representação dos números nesse sistema. Para isso, realizaremos algumas representações de alguns números convertendo-os da base dez para a base vinte que é a base que os maias utilizavam, e vice-versa. Mais ainda, faremos a representação desses números utilizando objetos análogos aos que os maias utilizavam à sua época. Além disso, realizaremos algumas operações no sistema de numeração maia, seguindo suas regras.

A fim de realizarmos todos esses processos, dividiremos esta estação de trabalho em quatro partes, que chamaremos de paradas: primeira, segunda, terceira e quarta. Escolhemos apresentar a seguir uma breve explicação de cada uma delas. Cada uma das aulas irá usar uma ou mais destas paradas, usando para isto os processos descritos a seguir.

3.5.1 Estação Maia – Primeira Parada

A primeira parada explora a conversão de números na base dez para a base a qual era usada pelos maias, faremos isso para representarmos o número na notação que eles utilizavam. Para isso, precisamos escolher um

número e dividi-lo por 20 quantas vezes forem necessárias para a obtenção dos dígitos que representam esse número no sistema de numeração de base 20 ou base vigesimal. A fundamentação teórica matemática para este procedimento pode ser encontrada em Hefez (2022). Como exemplo, escolhemos o número 450, e para conhecermos quais são os algarismos que ele deve possuir no sistema de numeração com base 20 devemos determinar quais são os valores de $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ na expressão, a seguir:

$$450 = a_n \times 20^n + a_{n-1} \times 20^{n-1} + \dots + a_2 \times 20^2 + a_1 \times 20^1 + a_0 \times 20^0$$

Para isso, basta dividirmos a expressão acima por 20, quantas vezes for necessária para que o resto fique menor que 20, ou seja, sucessivamente. Ao realizarmos essa divisão, obtemos:

$$\frac{450}{20^n} = a_n \times 1 + a_{n-1} \times \frac{20^{n-1}}{20^n} + \dots + a_2 \times \frac{20^2}{20^n} + a_1 \times \frac{20}{20^n} + a_0 \times \frac{20^0}{20^n}$$

Com n tal que $20^n \leq 450$. Observe que em uma primeira vez realizada esta divisão, identificamos o valor de a_n . Realizando novamente a divisão, identificamos o valor de a_{n-1} :

$$\frac{450}{20^{n-1}} = a_n \times \frac{20^n}{20^{n-1}} + a_{n-1} \times 1 + \dots + a_2 \times \frac{20^2}{20^{n-1}} + a_1 \times \frac{20}{20^{n-1}} + a_0 \times \frac{20^0}{20^{n-1}}$$

E assim, sucessivamente, determinamos os coeficientes da expressão que serão os dígitos que representam o número 450 na base vigesimal, que para o número em tela serão apenas 3 dígitos, que serão a_2, a_1 e a_0 . Ou seja,

$$450 = [a_2 a_1 a_0]_{20} = [1 \ 2 \ 10]_{20}$$

Em outras palavras, obtemos o seguinte procedimento para as sucessivas divisões: Na primeira vez que dividimos 450 por 20, resulta em 22 com o resto 10; em seguida, dividimos 22 por 20, o que resulta em 1 com o resto 2, como $2 < 20$, o processo estará finalizado; portanto, o número 450 representado na base 20 será: $[1 \ 2 \ 10]_{20}$.

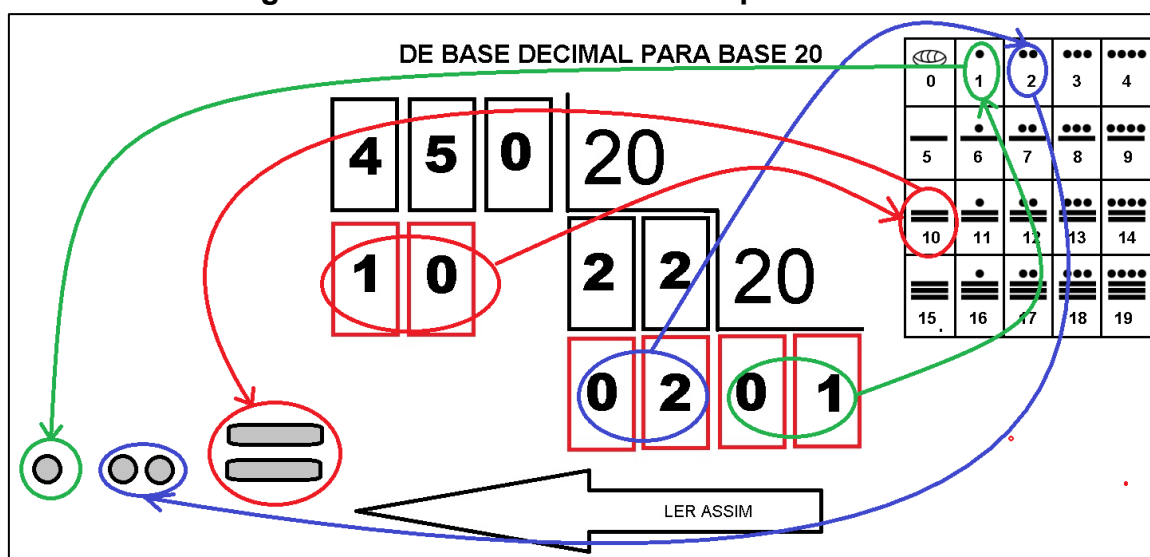
$$\frac{450}{20} = 22 + \frac{10}{20}$$

$$\frac{22}{20} = 1 + \frac{2}{20}$$

A ideia é que os alunos façam esse processo e utilizem a

PRIMEIRA PARADA da estação para isso. Apresentamos a seguir uma cópia de como pode ser o material para que os alunos possam registrar os resultados obtidos nessa divisão. Indicamos que estas divisões podem ser realizadas com o auxílio de uma calculadora, caso o professor considere adequado:

Figura 5 – Conversão da base 10 para base 20



Fonte: Desenho do autor.

Com isso, a fim de representar o número escolhido 450, na simbologia maia, o aluno deverá determinar primeiramente quais serão os dígitos, tal como fizemos acima, cuja indicação está apresentada no quadro em vermelho na figura apresentada a seguir, lido da esquerda para direita.

3.5.2 Estação Maia – Segunda Parada

Nesta parada faremos o processo inverso, trabalharemos com a conversão do número que está representado na base 20 para base decimal ou base 10. Para isto, é necessário fazer a correspondência e determinar o equivalente a cada casa decimal, que pode ser feita com o auxílio de uma tabela conforme a figura a seguir, e em seguida, somar os resultados. Por exemplo, para converter $[1\ 2\ 10]_{20}$ de base 20 para base decimal devemos somar $400 + 40 + 10$. Pois,

$$[1\ 2\ 10]_{20} = 1 \times 20^2 + 2 \times 20 + 10 \times 20^0$$

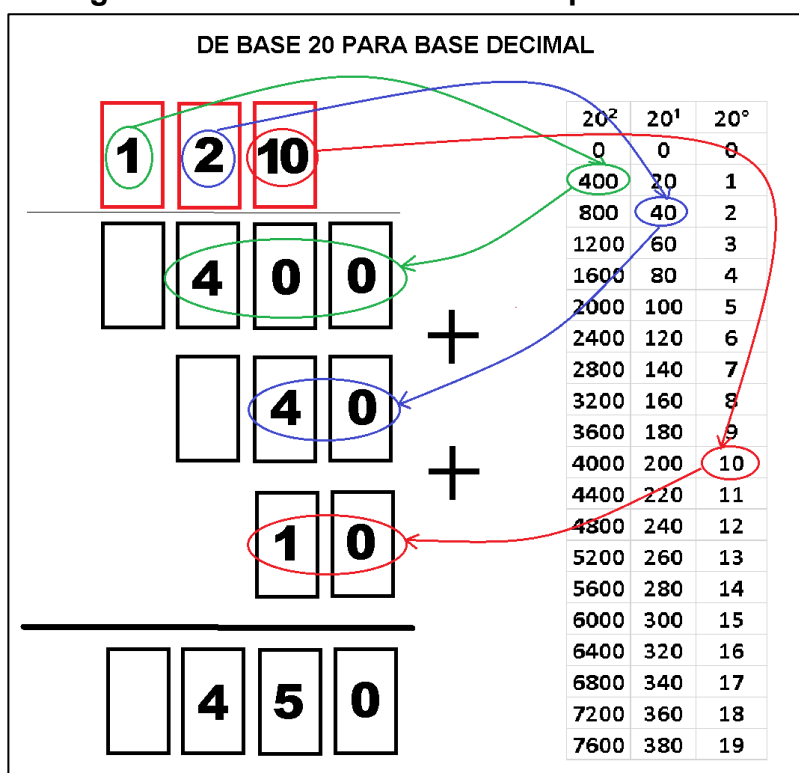
$$[1\ 2\ 10]_{20} = 1 \times 400 + 2 \times 20 + 10 \times 1 = 450$$

Ou seja:

$$[1\ 2\ 10]_{20} = [4\ 5\ 0]_{10}$$

Ou ainda, 450 sem a necessidade de usarmos uma notação diferente para a representação do número na base decimal que é a base usualmente utilizada por todos nós.

Figura 6 – Conversão da base 20 para base 10



Fonte: Desenho do autor.

3.5.3 Estação Maia – Terceira Parada


A terceira parada dessa estação de trabalho cuja finalidade é representar os números por meio da simbologia maia e, para isso, utilizaremos a tabela de conversão de dígitos. Ou seja, vamos representar os números com os objetos análogos aos que os maias utilizavam (ou similares).

A título de curiosidade, os símbolos que os maias utilizavam podem ser vistos em códices que podem ser encontrados em vários sites². Entretanto, para uma alusão ao modo como os maias procediam utilizando objetos

² https://www.famsi.org/research/graz/dresdensis/thumbs_0.html

para realizar as representações, utilizaremos: pedrinhas para representarmos as unidades, cavilhas³ para representarmos o cinco e conchas para o zero. Uma outra ideia, caso seja de mais fácil acesso, seria utilizar tampinhas de garrafa para as unidades, palitos ou canudinhos cortados para o 5 e forminhas de docinhos de festa para o zero. Ou simplesmente, tampinhas plásticas de três cores distintas.

Figura 7 – Sistema de numeração Maia

| | | | | |
|--|---------------|----------------|-----------------|------------------|
|  0 | • 1 | •• 2 | ••• 3 | •••• 4 |
| — 5 | — • 6 | — •• 7 | — ••• 8 | — •••• 9 |
| — — 10 | — — • 11 | — — •• 12 | — — ••• 13 | — — •••• 14 |
| — — — 15 | — — — • 16 | — — — •• 17 | — — — ••• 18 | — — — •••• 19 |

Fonte: Desenho elaborado pelo autor

Nesta estação não são feitos cálculos, simplesmente associamos o símbolo Maia com sua representação decimal ou o contrário.

3.5.4 Estação Maia – Quarta Parada

Por fim, temos a quarta e última parada da estação, na qual realizaremos algumas operações de soma e subtração com alguns números, porém, usando o material manipulável, ou seja, os objetos que representavam cada número de modo análogo à civilização maia.

No exemplo a seguir convertemos 253 para base 20, primeiro dividimos 253 por 20, resta 13 e obtemos o divisor 12, na sequência dividimos 12 por 20 onde obtemos o resto 12 e 0 como divisor, portanto 253 na base 20 é igual a: $[0\ 12\ 13]_{20}$.

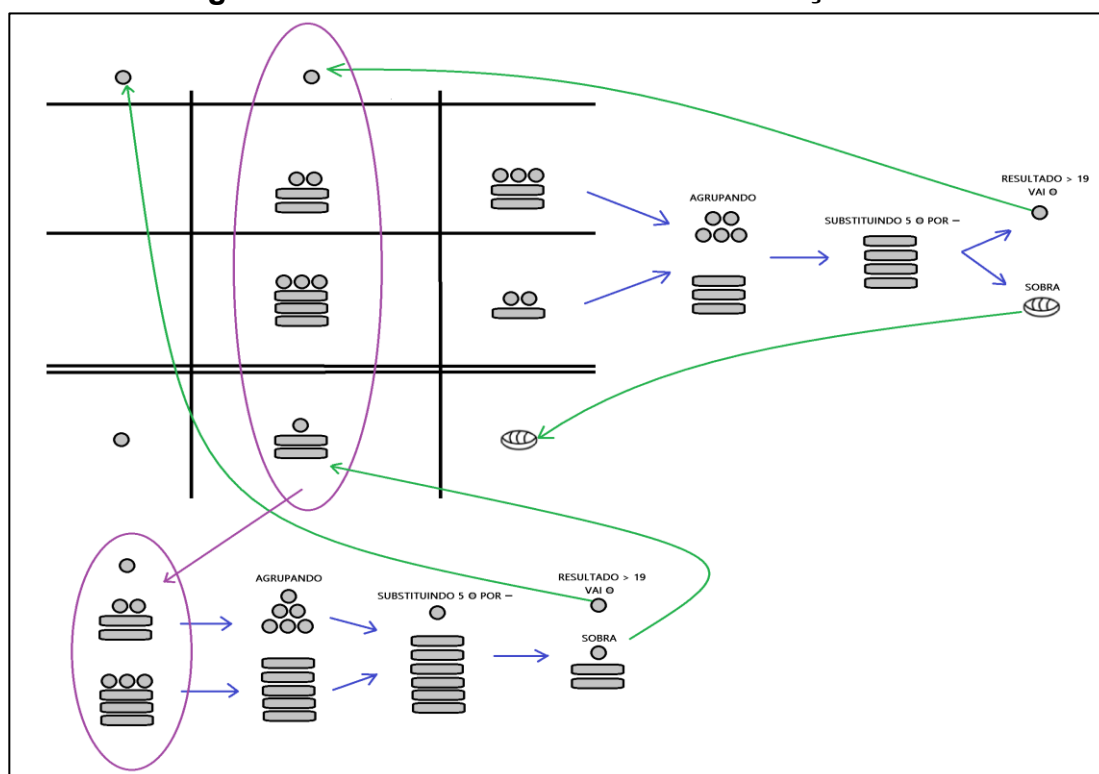
Na sequência usamos a tabela de conversão de símbolos para

³ Pino cilíndrico usado para ou fixar peças de madeira

determinar como esse número pode ser representado em símbolos ou caracteres Maias.

Em seguida, procederemos da mesma forma com o número 367. Obtemos a representação na base vigesimal e obtemos $[0\ 18\ 7]_{20}$. Na sequência realizamos a adição, que feita de modo similar a da base decimal. Assim, somaremos 7 com 13, 18 com 12. Temos: $7 + 13 = 20$, o que nos leva a acrescentar uma unidade à próxima casa vigesimal, a seguir adicionarmos $12 + 18 + 1$ (acrescentado da casa anterior) = 31, novamente passamos a próxima casa o excedente de 20, já que a base é vigesimal, ou seja, 11 unidades para esta casa. Finalmente, adicionamos à última casa 1 unidade resultando ao final no resultado de: $[1\ 11\ 0]_{20}$. Podemos acompanhar a figura a seguir para maior entendimento.

Figura 8 – Somando 253 com 367 na notação Maia



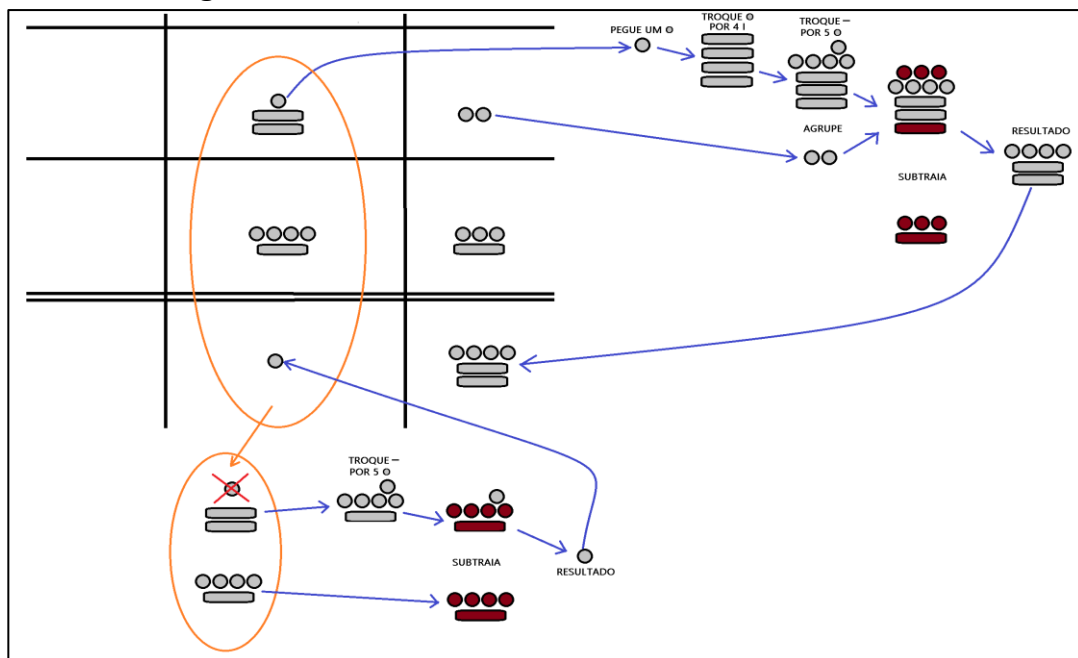
Fonte: Desenho elaborado pelo autor

Finalmente, vamos realizar a conversão da representação de um número da base 20 para base 10. Consideremos o número $[1\ 11\ 0]_{20}$ para a base 10. Como o processo é inverso, ao invés de dividir sucessivamente por 20 ou 10, faremos a multiplicação por 20, depois por 20^2 , por 20^3 e assim, sucessivamente. Esse procedimento nos dará o resultado $1 \times 20^2 + 11 \times 20^1 + 0 \times 20^0 = 620$.

Para facilitar este processo, a parada da estação terá uma tabela com o resultado das multiplicações de cada um dos números por sua respectiva casa vigesimal. Nas paradas Terceira e Segunda podemos ver melhor como este processo é feito.

Agora, vamos realizar a operação de subtração entre o número 222 cuja representação em base vigesimal é $[0\ 11\ 2]_{20}$ e o número 188 com representação vigesimal igual a $[0\ 9\ 8]_{20}$. Novamente, procederemos de modo similar à subtração com base 10, mas observando que não podemos subtrair 8 de 2, ou seja, haverá a necessidade de “empréstimo” da casa vigesimal superior, lembrando que como ela é 20 vezes maior, ao emprestarmos 1, estamos emprestando 20, ou seja estaremos subtraindo 8 de 22, o que resulta em 14. Já a segunda casa vigesimal passa a ser 10 menos 9 o que vai resultar em 1. Por fim, na terceira casa temos 0 menos 0 resultando em 0. Veja a seguir, apresentamos uma figura ilustrando este exemplo, observando que em cada uma das subtrações substituímos uma barra por cinco pontos com o intuito de facilitar a visualização da operação.

Figura 9 – Subtraindo 188 de 222 na notação Maia



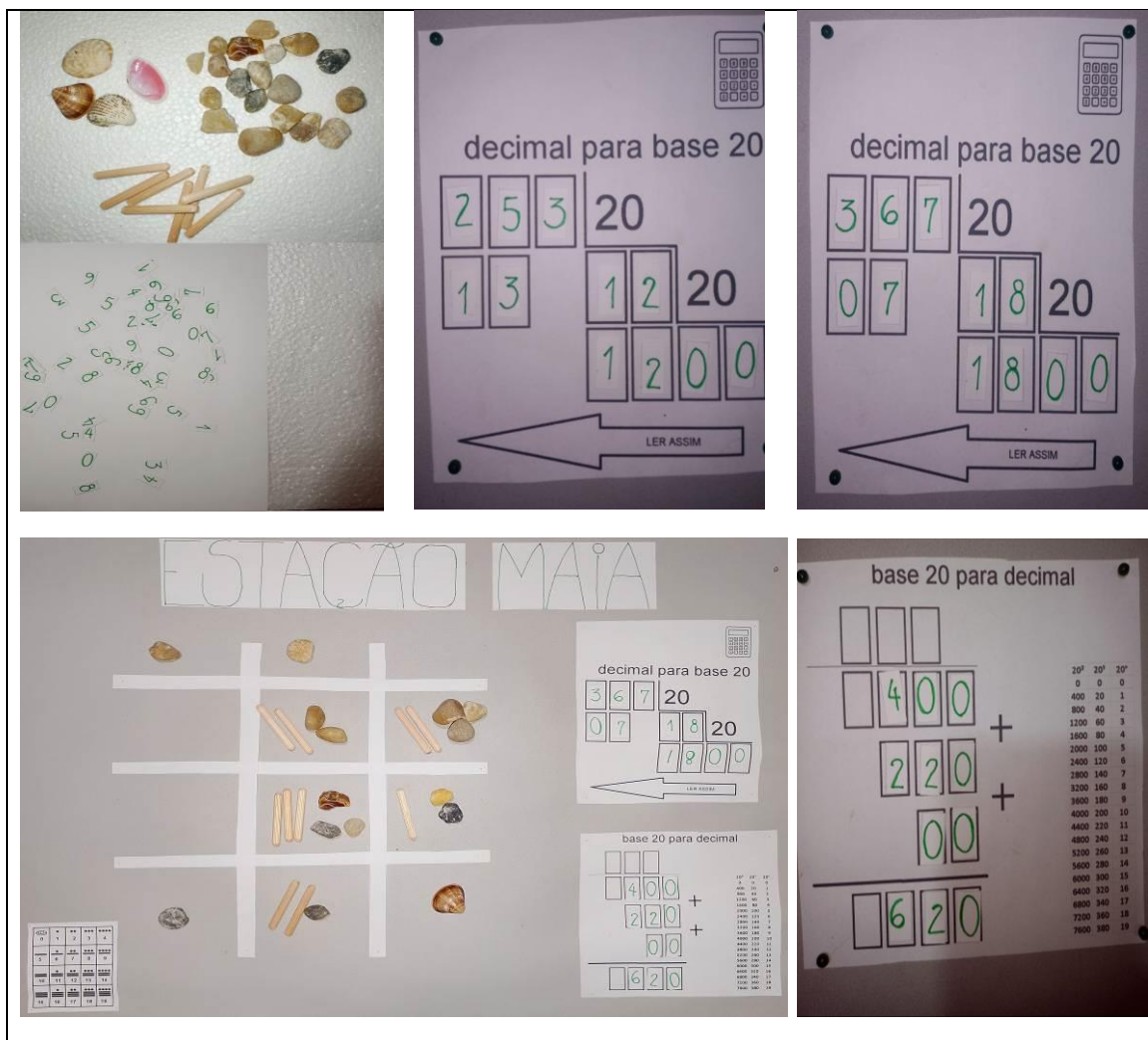
Fonte: Desenho elaborado pelo autor

Finalmente, vamos realizar a conversão do resultado $[0\ 1\ 14]_{20}$ para a representação na base 10, usando as estações Segunda e Terceira o que resultara em: $1 \times 20^1 + 14 \times 20^0 = 34$.

3.5.5 Estação Maia – Imagens da Implantação

Exemplo de uso: Neste exemplo vamos somar os números 253 e 367. O mosaico de fotos mostra o material utilizados, e as etapas, usando todas as paradas da estação.

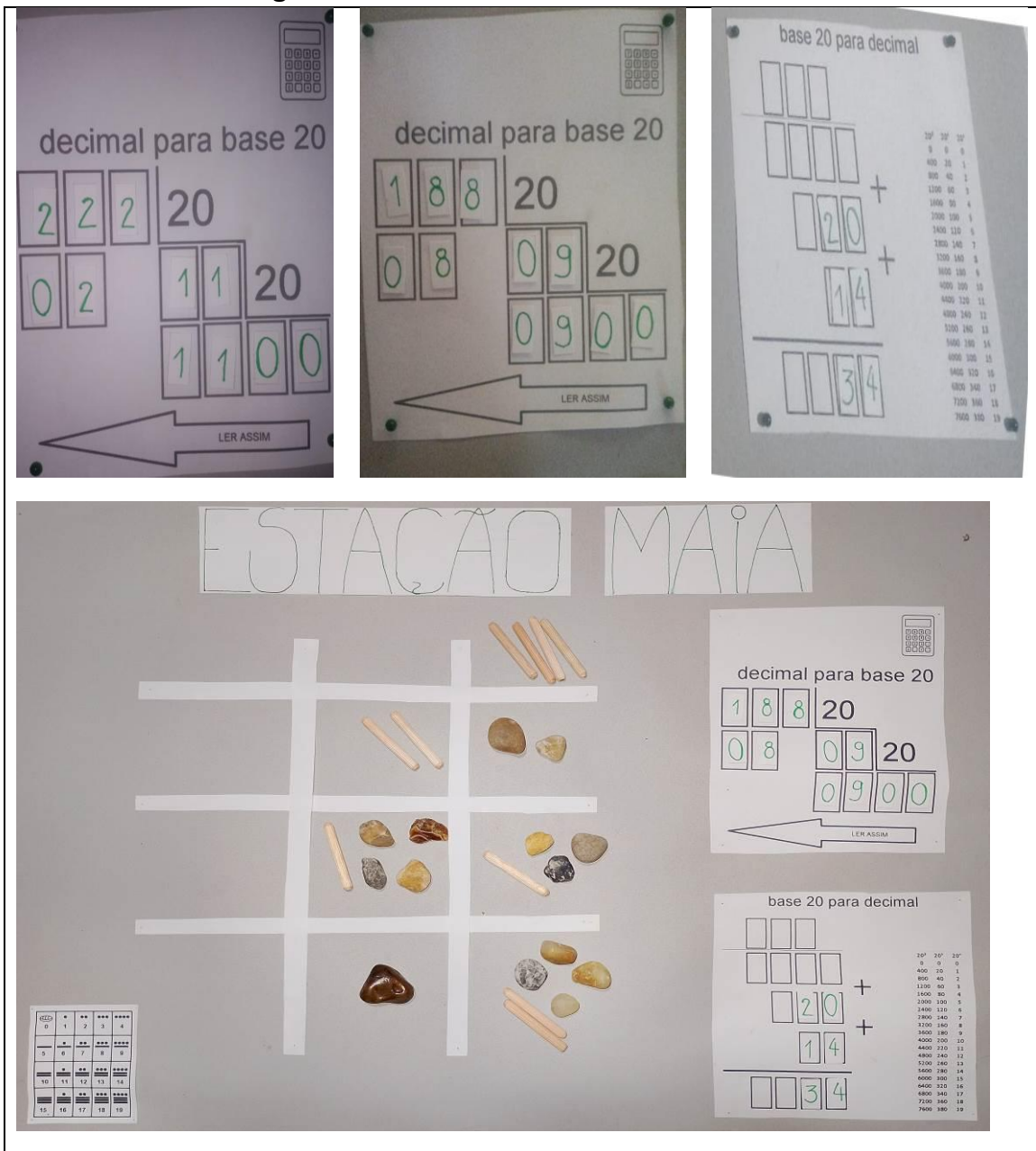
Figura 10 – Fotos somando 253 com 367.



Fonte: fotos do autor

Exemplo de uso: Neste exemplo vamos subtrair 188 de 222. O mosaico de fotos mostra as etapas, usando todas as paradas da estação.

Figura 11 – Fotos subtraindo 188 de 222.



Fonte: fotos do autor

3.5.6 Estação Maia – Como Construir

Para construir a Estação, simplesmente imprima os desenhos da imagem a seguir, e cole em uma cartolina. Alternativamente pode-se imprimir as conversões de base em folhas separadas e deixar a cartolina somente para adições e subtrações com os materiais maias.

Figura 12 – Impressos da estação Maia.

DE BASE DECIMAL PARA BASE 20

DE BASE 20 PARA BASE DECIMAL

| | | | | |
|----|----|----|-----|------|
| | • | •• | ••• | •••• |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | • | •• | ••• | •••• |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | • | •• | ••• | •••• |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | • | •• | ••• | •••• |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

ESTAÇÃO MAIA

DE BASE DECIMAL PARA BASE 20

DE BASE 20 PARA BASE DECIMAL

| 20 ² | 20 ¹ | 20 ⁰ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 400 | 20 | 1 |
| 800 | 40 | 2 |
| 1200 | 60 | 3 |
| 1600 | 80 | 4 |
| 2000 | 100 | 5 |
| 2400 | 120 | 6 |
| 2800 | 140 | 7 |
| 3200 | 160 | 8 |
| 3600 | 180 | 9 |
| 4000 | 200 | 10 |
| 4400 | 220 | 11 |
| 4800 | 240 | 12 |
| 5200 | 260 | 13 |
| 5600 | 280 | 14 |
| 6000 | 300 | 15 |
| 6400 | 320 | 16 |
| 6800 | 340 | 17 |
| 7200 | 360 | 18 |
| 7600 | 380 | 19 |

Fonte: desenhos do autor

4 ATIVIDADE: ESTAÇÃO BABILÔNICA⁴

4.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Público alvo: 8ª série do Ensino Fundamental.

Materiais necessários: Cartolina, lápis, alfinetes ou cola, pedrinhas ou tampinhas, régua, papel impresso e caneta.

Objetivo: Estudar a base numérica dos Sumérios – base 60 – como estratégia para o entendimento de números primos e compostos e por consequência das operações de multiplicação e divisão.

Aulas: Quatro aulas com duração de 50 minutos cada.

Observação: Esta atividade foi planejada para turmas de no máximo 25 alunos.

4.2 AULA 1 - A CIVILIZAÇÃO SUMÉRIA

Apresentar aos alunos aspectos históricos da civilização dos Sumérios, seu sistema de numeração, a fatoração de números e obtenção de seus divisores.

4.3 AULA 2 - A ESTAÇÃO BABILÔNICA

Organizar a turma em equipes de 5 alunos, apresentar a Estação e o seu funcionamento. Fazer em conjunto com os alunos a fatoração dos números 7, 10 e 15.

4.4 AULAS 3 E 4 - USANDO A ESTAÇÃO BABILÔNICA

Os alunos deverão preencher uma tabela, ponto fulcral da atividade, para todos os números de 1 a 60, apresentando a forma fatorada de cada um desses números, bem como todos os seus divisores. Para agilizar e

⁴ Os termos Babilônia, Suméria e Acádia designam o mesmo povo e local geográfico, porém em diferentes épocas, Suméria desenvolveu a escrita Cuneiforme, Acádia é o primeiro império da História e por fim Babilônia representa a cultura que desenvolveu o zero posicional. Neste Produto Educacional será usado o termo Babilônia ou Babilônicos. Para saber mais consulte Roque (2012).

orientar este processo, podemos promover uma gamificação desta Parada. Para isso, o professor vai precisar de um saquinho com um nome para cada equipe e um saquinho com todos os números de 1 a 60. Sorteia-se um número e concede-se um minuto para todas as equipes pensarem, após ele sorteia uma equipe para responder os divisores e a fatoração do número escolhido, se a equipe acertar marca um ponto e se errar perde um ponto, em sequência uma nova equipe é escolhida para responder. Na próxima rodada um novo número deve ser escolhido e as equipes que já responderam são eliminadas do sorteio, e assim sucessivamente até que todas as equipes tenham respondido, neste momento o sorteio passa a ser novamente de todas as equipes e o jogo vai se sucedendo até que todos os números sejam fatorados.

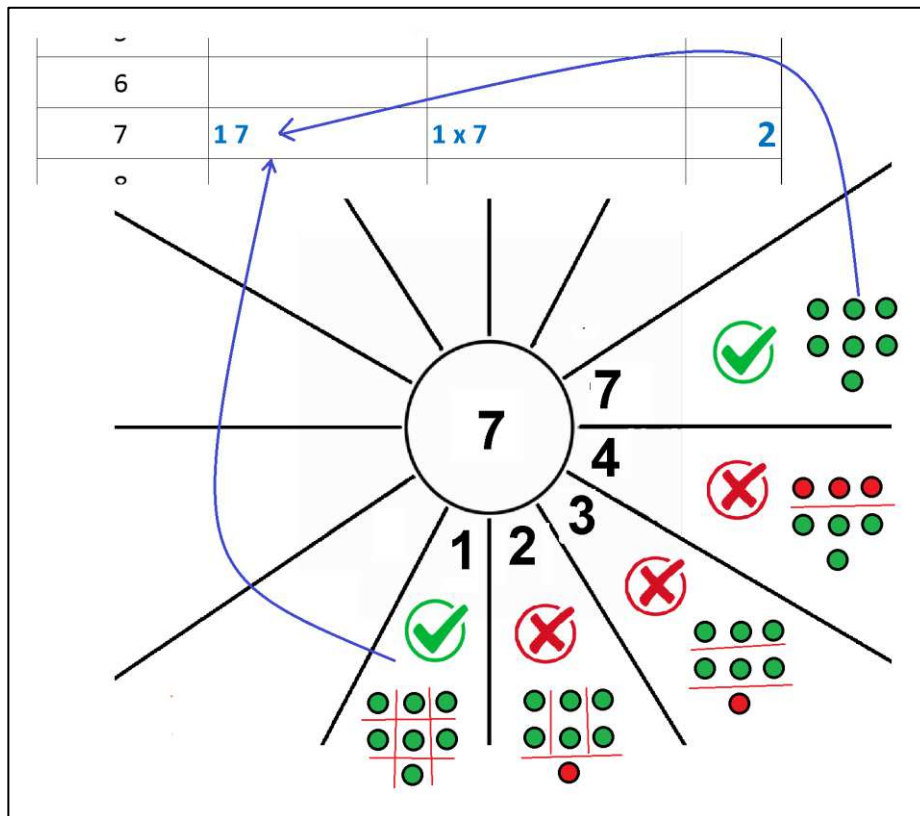
4.5 ENCAMINHAMENTO

A fim de cumprir o objetivo desta Estação são necessários vários cálculos, e essa parada será destinada a esta etapa. Para preenchermos a tabela desejada com seus múltiplos e divisores simularemos todas as possibilidades trabalhando sobre quantos podem ser os agrupamentos com partes iguais que cada número possui. Para isso precisamos considerar cada um deles. Ou seja, precisamos separá-los em partes iguais de tal forma que não haja resto. E nem sempre isso é possível! Por exemplo, sabemos que seis é divisível por dois pois podemos separá-lo em três conjuntos de dois elementos, seguindo este raciocínio podemos ainda separá-los em dois conjuntos de três elementos, e somente estas duas possibilidades, porém não podemos dividir seis por cinco pois resultaria em um conjunto de cinco elementos e sobraria um elemento, logo seis não é divisível por cinco. Vale notar que estamos trabalhando indiretamente a tabuada. Obviamente um aluno que tenha um bom conhecimento da tabuada poderá saber boa parte dos divisores por simples memorização, porém a ideia dessa atividade é ir além da memorização, já que pretendemos entender o que os números representam, e a proposta da Estação é que haja uma compreensão mais profunda e concreta dos números nesse sentido, sobretudo, as relações entre eles. E para isto, os alunos farão os agrupamentos na tabela. Consideramos esta atividade como uma atividade de investigação.

4.5.1 Exemplo, fatorando o número 7:

Vamos exemplificar a investigação de algumas possíveis divisões para números de 1 a 60, por exemplo, o número sete. Observemos que o 7 somente pode ser dividido por um e sete, já que as divisões por dois, três e quatro deixam resto, salientando que é desnecessário testar para cinco e seis já que quando dividimos por quatro o resto foi menor que quatro, logo para cinco e seis o mesmo irá se repetir, portanto sete é divisível por um e sete, ou seja é divisível somente por dois números, o que o caracteriza como *número primo*. Veja na figura a seguir a análise do número sete:

Figura 13 – Fatorando o número 7 com a Estação Babilônia.



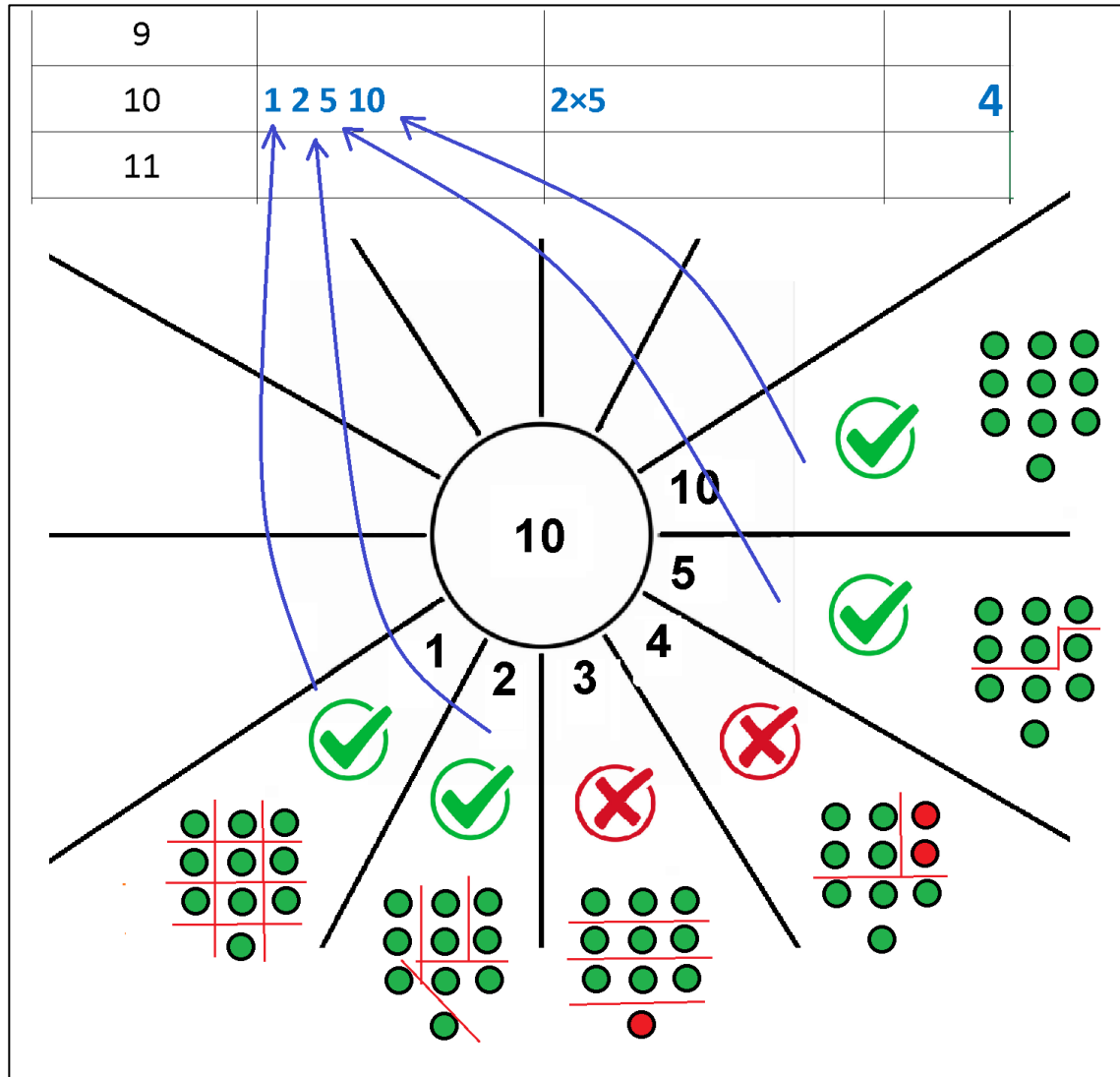
Fonte: desenhos do autor

4.5.2 Exemplo, fatorando o número 10:

No próximo exemplo procedemos da mesma forma para o número 10, conseguimos dividir 10 por 1 e por ele mesmo, mas além destes números conseguimos divisões de 10, sem resto, por 5 e por 2, logo os divisores

de 10 serão 1, 2, 5 e 10. E como 2 e 5 são primos podemos dizer que 10 é composto pelos números primos 2 e 5 pois $2 \times 5 = 10$. Veja na figura, a seguir, o resultado da análise do número 10.

Figura 14 – Fatorando o número 10 com a Estação Babilônia.



Fonte: desenhos do autor

Para o número 20, por exemplo, teremos os 2, 5 e 10 como divisores, mas como 10 não é um número primo, sua fatoração em primo deverá conter somente dois números, logo a única maneira de fazermos isso, é fazendo $2 \times 2 \times 5$ cujo resultado será 20. Aqui, a comutatividade não importa na contagem de termos.

4.5.3 Estação Babilônia – Imagens da Implantação

Figura 15 – Fatorando o número 7



Fonte: foto do autor

Figura 16 – Fatorando o número 10



Fonte: foto do autor

Figura 17 – Fatorando o número 15



Fonte: foto do autor

4.5.4 Estação Babilônia - Como Construir

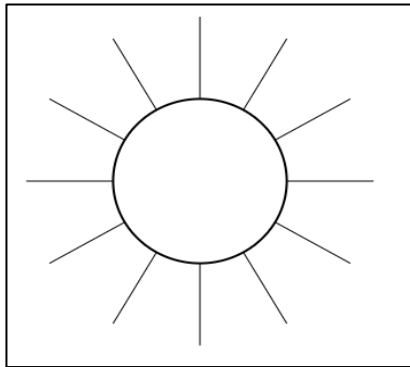
Para construir a estação Babilônia, basta imprimir ou desenhar as figuras a seguir e coloca-la sobre uma cartolina.

Figura 18 – Múltiplos e fatores primos de 1 a 60.

| Número | Divisores | Fatoração em primos | Quantidade de Divisores |
|--------|-----------|---------------------|-------------------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | 1 3 5 15 | 3×5 | 4 |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |
| 21 | | | |
| 22 | | | |
| 23 | | | |
| 24 | | | |
| 25 | | | |
| 26 | | | |
| 27 | | | |
| 28 | | | |
| 29 | | | |
| 30 | | | |
| 31 | | | |
| 32 | | | |
| 33 | | | |
| 34 | | | |
| 35 | | | |
| 36 | | | |
| 37 | | | |
| 38 | | | |
| 39 | | | |
| 40 | | | |
| 41 | | | |
| 42 | | | |
| 43 | | | |
| 44 | | | |
| 45 | | | |
| 46 | | | |
| 47 | | | |
| 48 | | | |
| 49 | | | |
| 50 | | | |
| 51 | | | |
| 52 | | | |
| 53 | | | |
| 54 | | | |
| 55 | | | |
| 56 | | | |
| 57 | | | |
| 58 | | | |
| 59 | | | |
| 60 | | | |

Fonte: desenho do autor

Figura 19 – Impresso central da estação Babilônia.



Fonte: desenho do autor

Figura 20 – Estação Babilônia montada.

ESTAÇÃO BABILÔNIA

| Número | Divisões | Fotografia em progress | Quantidade de Divisões |
|--------|----------|------------------------|------------------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | 13 5 15 | 345 | 8 |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |
| 21 | | | |
| 22 | | | |
| 23 | | | |
| 24 | | | |
| 25 | | | |
| 26 | | | |
| 27 | | | |
| 28 | | | |
| 29 | | | |
| 30 | | | |
| 31 | | | |
| 32 | | | |
| 33 | | | |
| 34 | | | |
| 35 | | | |
| 36 | | | |
| 37 | | | |
| 38 | | | |
| 39 | | | |
| 40 | | | |
| 41 | | | |
| 42 | | | |
| 43 | | | |
| 44 | | | |
| 45 | | | |
| 46 | | | |
| 47 | | | |
| 48 | | | |
| 49 | | | |
| 50 | | | |
| 51 | | | |
| 52 | | | |
| 53 | | | |
| 54 | | | |
| 55 | | | |
| 56 | | | |
| 57 | | | |
| 58 | | | |
| 59 | | | |
| 60 | | | |

Fonte: desenho do autor

5 ATIVIDADE: ESTAÇÃO EUCLIDES

5.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Público-alvo: 8ª série do Ensino Fundamental.

Materiais necessários: Cartolina, lápis, alfinetes ou cola, pedrinhas ou tampinhas, régua, papel impresso e caneta.

Objetivo: Estudo dos números compostos e primos como base para o entendimento da comutatividade das operações de multiplicação e divisão.

Aulas: Três aulas com duração de 50 minutos cada.

Observação: Esta atividade foi planejada para turmas de no máximo 25 alunos.

5.2 AULA 1 - A MATEMÁTICA GREGA DE EUCLIDES –

Expor aos alunos um pouco do pensamento matemático Grego em especial alguns conceitos matemáticos de Euclides. Também relembrar aos alunos o conceito de comutatividades nas operações de multiplicação e divisão. Através desta explanação propor aos alunos uma mudança na forma tradicional de se revolver operações que envolvam multiplicação e divisão através da simplificação dos números envolvidos.

5.3 AULA 2 - A ESTAÇÃO EUCLIDES

Organizar os alunos em equipes de 5 alunos e apresentar a Estação e seu funcionamento. Propor para os alunos a realização das operações: $(15 \times 2)/(5 \times 3)$, $(55 \times 9):(14 \times 15)$ e $(52 \times 33):(39 \times 11)$.

5.4 AULA 3 – USANDO A ESTAÇÃO EUCLIDES

Os alunos devem resolver uma lista com diversos exercícios com a Estação Euclides, novamente em equipes com 5 alunos: $(12 \times 4):30$, $(35 + 25):12$, $(48 \times 21):(14 \times 12)$, $(99 \times 99):(22 \times 27)$ e $(69 \times 18):(9 \times 26)$.

5.5 ENCAMINHAMENTO

Geralmente, os professores de Matemática apresentam muitos exercícios como uma sequência fixa de passos. Nesses casos, ao surgir uma multiplicação seguida de divisão, costuma-se executar a multiplicação antes; contudo, essa escolha pode aumentar os valores intermediários, elevando a dificuldade do cálculo e a chance de erro, quando haveria caminhos de resolução mais simples.

O objetivo desta estação é decompor cada número envolvido na operação em seus fatores primos para proporcionar uma outra forma de realizar este tipo de operação.

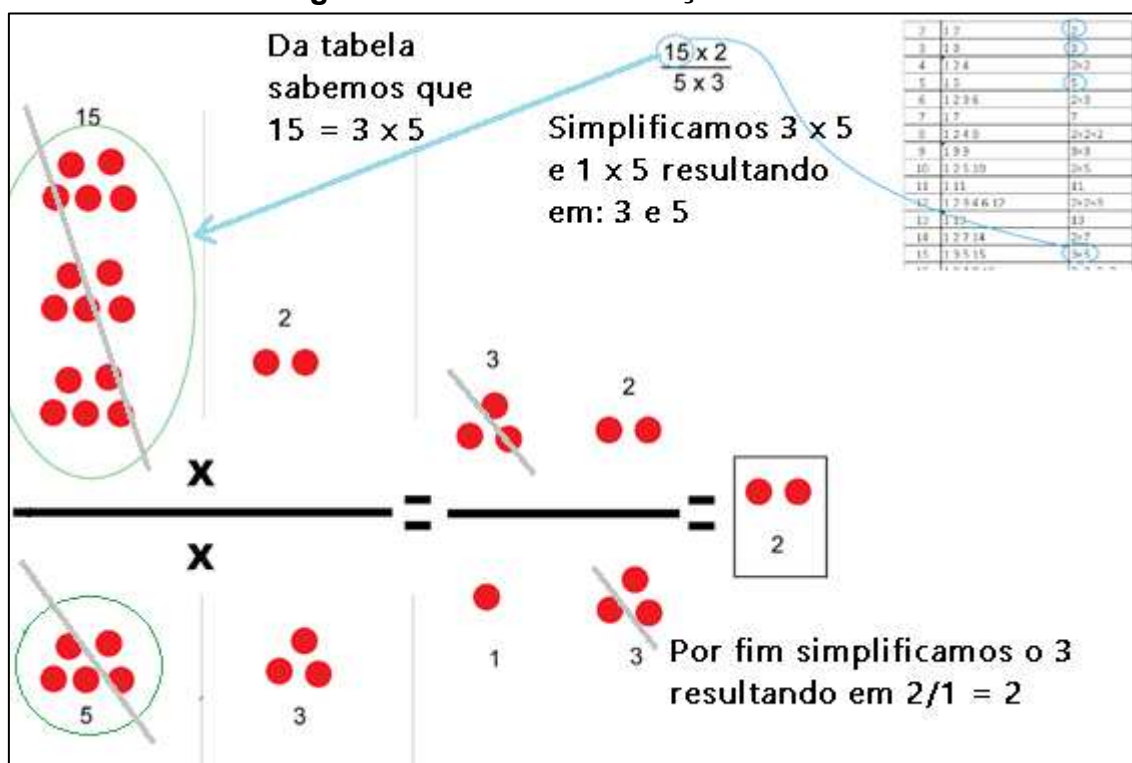
Por exemplo⁵, para resolver a operação 15×2 dividido por 5×3 , vamos escrever o número 15 em termos dos seus fatores primos, ou seja, $15 = 5 \times 3$, note agora que temos o fator 5 como parte do número que está no dividendo e no divisor, logo, podemos usar das propriedades da de divisão e reescrever a operação na forma:

$$\frac{15 \times 2}{5 \times 3} = \frac{5 \times 3 \times 2}{5 \times 3} = 2$$

Com isso, fazemos uma simplificação no processo de realizar as operações. Esse procedimento facilita em demasia o cálculo, pois evita operações longas, com maior número de processos, e permite visualizarmos rapidamente o fator que é comum a ambos os números do dividendo e do divisor, realizando a operação com mais rapidez e agilidade. Além disso, o uso de representações visuais (como bolinhas agrupadas) reforça o entendimento da decomposição e do cancelamento dos fatores. Veja na imagem a seguir este exemplo usando a Estação Euclides:

⁵ Óbvio que um aluno com destreza matemática não teria dificuldade alguma em fazer a operação exemplo de forma convencional, a proposta é que, a partir da situação apresentada, o aluno use o método para valores maiores.

Figura 21 – Usando a Estação Euclides.



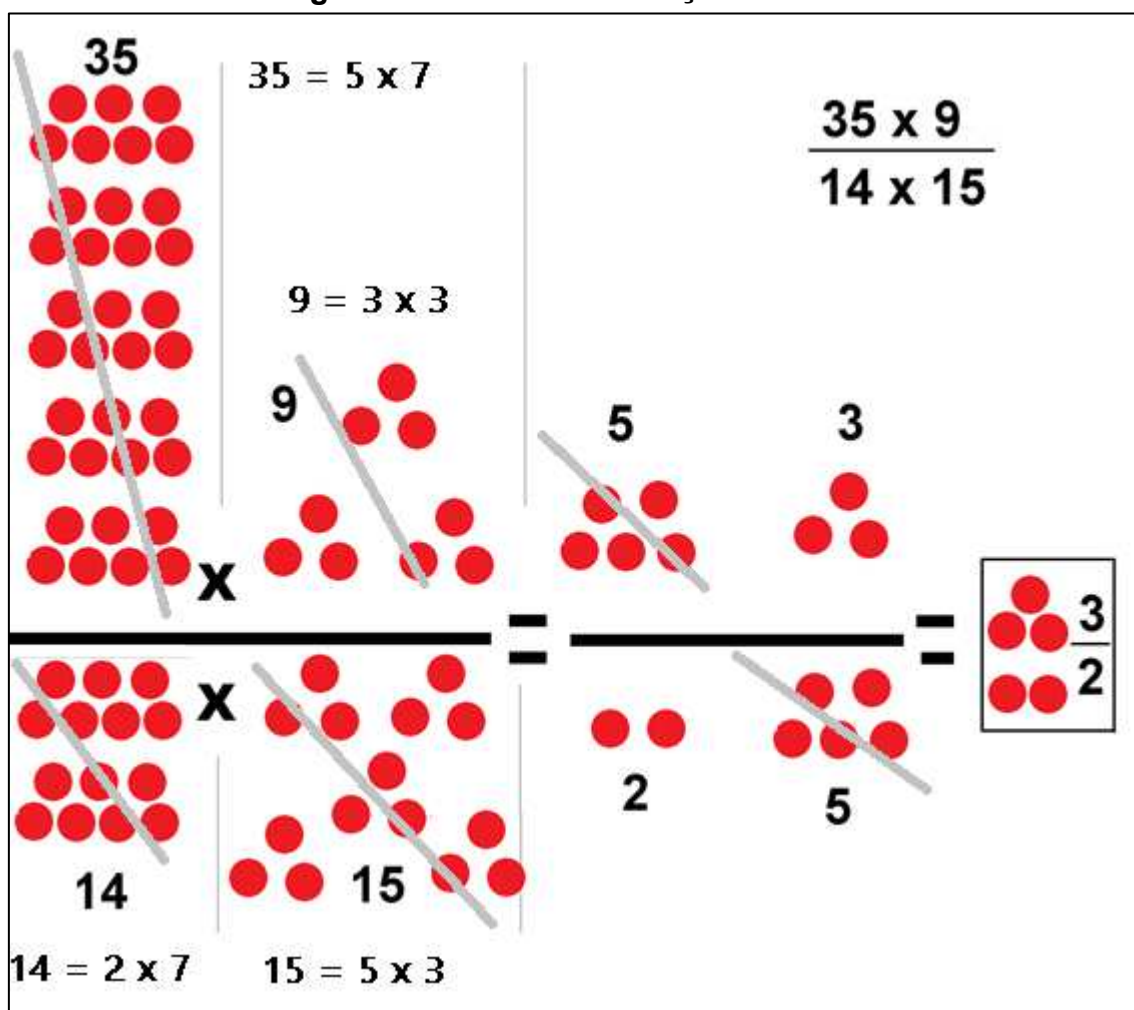
Fonte: desenho do autor

Em um outro exemplo, para resolver a operação 35×9 dividido por 14×15 , vamos primeiramente escrever os números 35, 9, 14 e 15 em termos de seus fatores primos, ou seja, $35 = 5 \times 7$, $9 = 3 \times 3$, $14 = 2 \times 7$ e $15 = 3 \times 5$. Observamos que nesta primeira etapa temos os fatores 7 e 3 que são comuns ao divisor e ao dividendo. Desse modo, podem simplificar o processo escrevendo:

$$\frac{35 * 9}{14 * 15} = \frac{7 * 5 * 3 * 3}{2 * 7 * 3 * 5} = \frac{1 * 5 * 1 * 3}{2 * 1 * 1 * 5} = \frac{5 * 3}{2 * 5} = \frac{1 * 3}{2 * 1} = \frac{3}{2}$$

Observe que poderíamos fazer 3 simplificações na primeira etapa diretamente, mas isto pode confundir o aluno em um primeiro momento, de forma que optamos por resolver este problema em duas fases. Também acreditamos que com a prática o aluno possa fazer estas operações de forma automática pulando etapas e até visualizando diretamente o resultado final. Veja a figura a seguir para um melhor entendimento:

Figura 22 – Usando a Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

Por fim cabe salientar que o objetivo desta tarefa é possibilitar ao aluno maior domínio e destreza para a resolução de problemas, as operações propostas poderiam ser resolvidas de forma muito fácil com uma calculadora, mas fazê-la do modo manual usual – multiplicação e depois divisão – iria certamente demandar uma boa quantidade de tempo, o que na resolução de provas pode ocasionar um mal desempenho causando frustração ao estudante. Mais do que um método a ideia é que seja um descomplicador matemático, facilitando a resolução de cálculos.

5.5.1 Estação Euclides – Imagens da Implantação

$$1): \frac{15 \times 2}{5 \times 3}$$

Figura 23 – Exemplo de uso Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

$$2): \frac{35 \times 9}{14 \times 15}$$

Figura 24 – Exemplo de uso Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

$$3: \frac{52 \times 33}{39 \times 11}$$

Figura 25 – Exemplo de uso Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

$$4): (3 \times 2) = (2 \times 3)$$

Figura 26 – Exemplo de uso Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

5.5.2 Estação Euclides - Como Construir

Nesta estação temos duas áreas de trabalho, uma central, onde faremos os cálculos e uma tabela auxiliar para consultar a fatoração dos números, veja a seguir a imagem com a tabela dos fatores primos de cada número de 1 a 100:

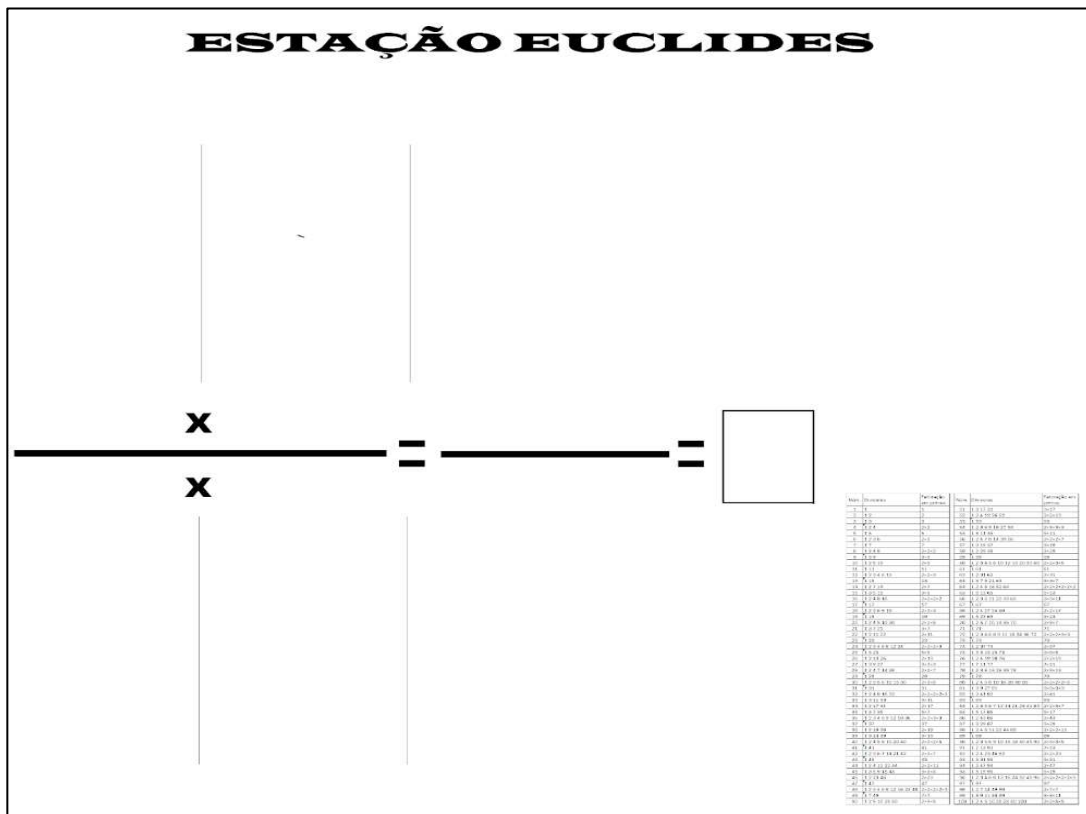
Figura 27 – Lista dos fatores primos de 1 a 100.

| Núm. | Divisores | Fatoração em primos | Núm. | Divisores | Fatoração em primos |
|------|---|---------------------|------|---|---------------------|
| 1 | 1 | 1 | 51 | 1 · 3 · 17 · 51 | 3×17 |
| 2 | 1 · 2 | 2 | 52 | 1 · 2 · 4 · 13 · 26 · 52 | 2×2×13 |
| 3 | 1 · 3 | 3 | 53 | 1 · 53 | 53 |
| 4 | 1 · 2 · 4 | 2×2 | 54 | 1 · 2 · 3 · 6 · 9 · 18 · 27 · 54 | 2×3×3×3 |
| 5 | 1 · 5 | 5 | 55 | 1 · 5 · 11 · 55 | 5×11 |
| 6 | 1 · 2 · 3 · 6 | 2×3 | 56 | 1 · 2 · 4 · 7 · 8 · 14 · 28 · 56 | 2×2×2×7 |
| 7 | 1 · 7 | 7 | 57 | 1 · 3 · 19 · 57 | 3×19 |
| 8 | 1 · 2 · 4 · 8 | 2×2×2 | 58 | 1 · 2 · 29 · 58 | 2×29 |
| 9 | 1 · 3 · 9 | 3×3 | 59 | 1 · 59 | 59 |
| 10 | 1 · 2 · 5 · 10 | 2×5 | 60 | 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 10 · 12 · 15 · 20 · 30 · 60 | 2×2×3×5 |
| 11 | 1 · 11 | 11 | 61 | 1 · 61 | 61 |
| 12 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 12 | 2×2×3 | 62 | 1 · 2 · 31 · 62 | 2×31 |
| 13 | 1 · 13 | 13 | 63 | 1 · 3 · 7 · 9 · 21 · 63 | 3×3×7 |
| 14 | 1 · 2 · 7 · 14 | 2×7 | 64 | 1 · 2 · 4 · 8 · 16 · 32 · 64 | 2×2×2×2×2×2 |
| 15 | 1 · 3 · 5 · 15 | 3×5 | 65 | 1 · 5 · 13 · 65 | 5×13 |
| 16 | 1 · 2 · 4 · 8 · 16 | 2×2×2×2 | 66 | 1 · 2 · 3 · 6 · 11 · 22 · 33 · 66 | 2×3×11 |
| 17 | 1 · 17 | 17 | 67 | 1 · 67 | 67 |
| 18 | 1 · 2 · 3 · 6 · 9 · 18 | 2×3×3 | 68 | 1 · 2 · 4 · 17 · 34 · 68 | 2×2×17 |
| 19 | 1 · 19 | 19 | 69 | 1 · 3 · 23 · 69 | 3×23 |
| 20 | 1 · 2 · 4 · 5 · 10 · 20 | 2×2×5 | 70 | 1 · 2 · 5 · 7 · 10 · 14 · 35 · 70 | 2×5×7 |
| 21 | 1 · 3 · 7 · 21 | 3×7 | 71 | 1 · 71 | 71 |
| 22 | 1 · 2 · 11 · 22 | 2×11 | 72 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 9 · 12 · 18 · 24 · 36 · 72 | 2×2×2×3×3 |
| 23 | 1 · 23 | 23 | 73 | 1 · 73 | 73 |
| 24 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 24 | 2×2×2×3 | 74 | 1 · 2 · 37 · 74 | 2×37 |
| 25 | 1 · 5 · 25 | 5×5 | 75 | 1 · 3 · 5 · 15 · 25 · 75 | 3×5×5 |
| 26 | 1 · 2 · 13 · 26 | 2×13 | 76 | 1 · 2 · 4 · 19 · 38 · 76 | 2×2×19 |
| 27 | 1 · 3 · 9 · 27 | 3×3×3 | 77 | 1 · 7 · 11 · 77 | 7×11 |
| 28 | 1 · 2 · 4 · 7 · 14 · 28 | 2×2×7 | 78 | 1 · 2 · 3 · 6 · 13 · 26 · 39 · 78 | 2×3×13 |
| 29 | 1 · 29 | 29 | 79 | 1 · 79 | 79 |
| 30 | 1 · 2 · 3 · 5 · 6 · 10 · 15 · 30 | 2×3×5 | 80 | 1 · 2 · 4 · 5 · 8 · 10 · 16 · 20 · 40 · 80 | 2×2×2×2×5 |
| 31 | 1 · 31 | 31 | 81 | 1 · 3 · 9 · 27 · 81 | 3×3×3×3 |
| 32 | 1 · 2 · 4 · 8 · 16 · 32 | 2×2×2×2×2 | 82 | 1 · 2 · 41 · 82 | 2×41 |
| 33 | 1 · 3 · 11 · 33 | 3×11 | 83 | 1 · 83 | 83 |
| 34 | 1 · 2 · 17 · 34 | 2×17 | 84 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 7 · 12 · 14 · 21 · 28 · 42 · 84 | 2×2×3×7 |
| 35 | 1 · 5 · 7 · 35 | 5×7 | 85 | 1 · 5 · 17 · 85 | 5×17 |
| 36 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 9 · 12 · 18 · 36 | 2×2×3×3 | 86 | 1 · 2 · 43 · 86 | 2×43 |
| 37 | 1 · 37 | 37 | 87 | 1 · 3 · 29 · 87 | 3×29 |
| 38 | 1 · 2 · 19 · 38 | 2×19 | 88 | 1 · 2 · 4 · 8 · 11 · 22 · 44 · 88 | 2×2×2×11 |
| 39 | 1 · 3 · 13 · 39 | 3×13 | 89 | 1 · 89 | 89 |
| 40 | 1 · 2 · 4 · 5 · 8 · 10 · 20 · 40 | 2×2×2×5 | 90 | 1 · 2 · 3 · 5 · 6 · 9 · 10 · 15 · 18 · 30 · 45 · 90 | 2×3×3×5 |
| 41 | 1 · 41 | 41 | 91 | 1 · 7 · 13 · 91 | 7×13 |
| 42 | 1 · 2 · 3 · 6 · 7 · 14 · 21 · 42 | 2×3×7 | 92 | 1 · 2 · 4 · 23 · 46 · 92 | 2×2×23 |
| 43 | 1 · 43 | 43 | 93 | 1 · 3 · 31 · 93 | 3×31 |
| 44 | 1 · 2 · 4 · 11 · 22 · 44 | 2×2×11 | 94 | 1 · 2 · 47 · 94 | 2×47 |
| 45 | 1 · 3 · 5 · 9 · 15 · 45 | 3×3×5 | 95 | 1 · 5 · 19 · 95 | 5×19 |
| 46 | 1 · 2 · 23 · 46 | 2×23 | 96 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 16 · 24 · 32 · 48 · 96 | 2×2×2×2×2×3 |
| 47 | 1 · 47 | 47 | 97 | 1 · 97 | 97 |
| 48 | 1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 16 · 24 · 48 | 2×2×2×2×3 | 98 | 1 · 2 · 7 · 14 · 49 · 98 | 2×7×7 |
| 49 | 1 · 7 · 49 | 7×7 | 99 | 1 · 3 · 9 · 11 · 33 · 99 | 3×3×11 |
| 50 | 1 · 2 · 5 · 10 · 25 · 50 | 2×5×5 | 100 | 1 · 2 · 4 · 5 · 10 · 20 · 25 · 50 · 100 | 2×2×5×5 |

Fonte: desenho do autor

Esta tabela deve ser colada em uma cartolina, ou deixada ao alcance dos estudantes, e por fim, apresenta-se o corpo central da estação, que deve ser construído conforme a figura a seguir.

Figura 28 – Estação Euclides.



Fonte: desenho do autor

6 ATIVIDADE: ESTAÇÃO CORDEL

Público-alvo: 3ª ano do Ensino Médio ou Ensino Superior⁶.

Materiais necessários: Lápis, caneta, papel e papel impresso.

Objetivo: Estudo de conceitos mais avançados, ou abstratos, da matemática com o uso de quadrinhos para aproximar o conceito apresentado da realidade do aluno. O estudo de conceitos mais profundos da matemática possibilita ao aluno um melhor entendimento do que é matemática e até o que é a realidade em que vivemos. Para os alunos do ensino médio seria como um fechamento dos conceitos aprendidos durante os anos de estudo, já para alunos do ensino superior pode funcionar como contextualização para conceitos a serem aprendidos.

Aulas: Três aulas com duração de 50 minutos cada.

6.1 AULA 1 - CONCEITO DE LIMITE E DIVISÃO POR ZERO.

Os alunos devem ler os quadrinhos “Pratão e Ary na divisão atômica” e fazer um trabalho analisando o que foi apresentado. Pontos a serem destacados são a diferença entre a divisão em muitas partes matemáticas e a do mundo real.

6.2 AULA 2 – UTILIDADE DA MATEMÁTICA E DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Os alunos devem ler os quadrinhos “Matemática: A visão que transforma” e fazer um debate, mediado pelo professor. Os temas a serem abordados são a construção da matemática, matemática dos povos antigos, evolução da matemática, exemplo de onde o saber lógico é importante.

6.3 AULA 3 – MÉTODO DA EXAUSTÃO DE EUDOXO

Os alunos devem ler os quadrinhos “Método da Exaustão de

⁶ A princípio, cursos da área de Exatas, mas nada impede que seja utilizado em outros campos do conhecimento.

Eudoxo”. Após isto devem tentar simular o procedimento para calcular um valor aproximado de π . O objetivo desta tarefa é para que o aluno entenda um pouco sobre como a Matemática é criada (ou descoberta) a partir do uso de conceitos que já eram conhecidos.

6.4 ENCAMINHAMENTO

Esta estação reúne uma série de histórias em quadrinhos (HQs) sobre temas diversos. Para este Produto Educacional, apresentam-se três histórias de referência; contudo, a proposta é que cada docente elabore suas próprias composições — reutilizando estes personagens ou criando outros — e, se necessário, situe as tramas em diferentes contextos históricos. Na elaboração das histórias, empregou-se inteligência artificial (IA) generativa para a criação das ilustrações e para a adaptação dos diálogos, buscando aproximá-los do repertório linguístico juvenil.

Justifica-se esta proposta pelo diagnóstico de que, frequentemente, a Matemática é apresentada de modo estanque, como regra ou fórmula seguida de exercícios, o que dificulta ao estudante reconhecer sua relevância no cotidiano. Ao recorrer às HQs como mediadoras, esta estação oferece uma perspectiva alternativa: conectar ideias matemáticas a narrativas e situações significativas, promovendo compreensão conceitual, curiosidade investigativa e possibilidades de transferência para problemas reais, além de incentivar a autoria docente na criação de novas sequências didáticas.

Os quadrinhos são montados com base em personagens históricos em suas versões modernas e adolescentes para criar uma ligação mais forte com os estudantes. A ideia é que isto aproxime um pouco o cotidiano deles com os personagens históricos criando empatia.

Veja a seguir os personagens propostos:

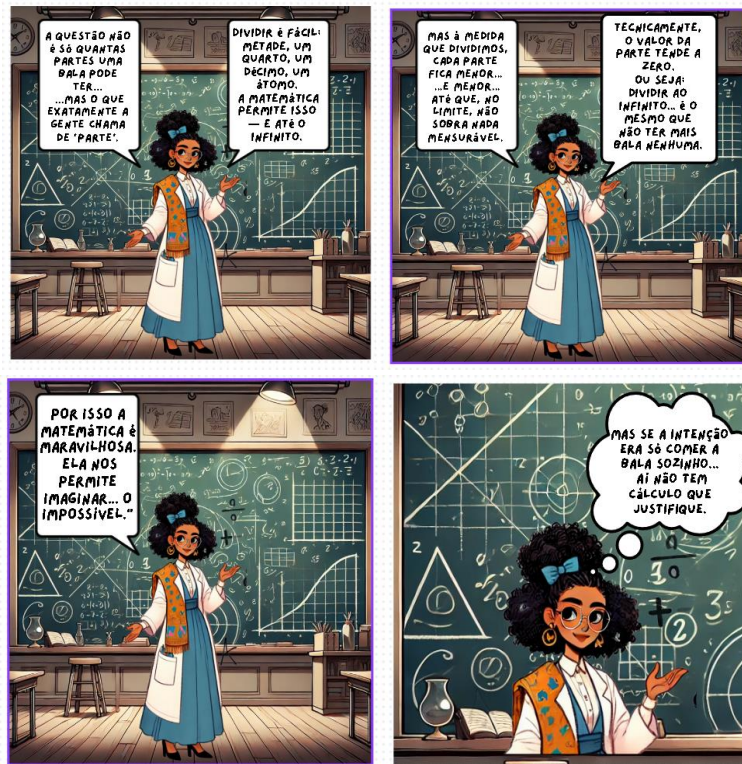
| Nome Completo | Apelido | Inspiração | Aparência | Personalidade |
|----------------------|----------------|-------------------|---|---|
| Hipátia | Hipátia | Hipátia | Negra/parda, elegante | Sábia, carismática |
| João da Silva | Pratão | Platão | Indígena, cabelo longo preso | Filosófico, comilão, introspectivo |
| Ary Toteles | Ary | Aristóteles | Branco, cabelo curto | Lógico, direto, prático |
| Maria Curry | Curry | Marie Curie | Mulata, cabelo cacheado alto | Científica, animada, genial |
| Hilberto Filho | Hilberto | Hilbert | Negro, cabelo black power | Calmo, lança desafios lógicos |
| Patrícia Agoras | Pita | Pitágoras | Branca, atlética | Racional, criativa, cria teoremas |
| Frida Geraldine | Frege | Gottlob Frege | Afro-brasileira | Reservada, lógica e meticulosa |
| Gustavo de Lima | Gudel | Kurt Gödel | Asiático, misterioso | Misterioso, introspectivo |
| Fulani Beltrani | Fulani | Aluno comum | Gênero e cor indefinidos, visual neutro | O aluno comum: apático, quase não participa |

6.4.1 Estação Cordel – Como Construir

Exemplo 1: Exemplificando o conceito de limite na divisão por zero.

Figura 29 – Conjunto de Imagens Exemplo 1 – Estação Cordel.



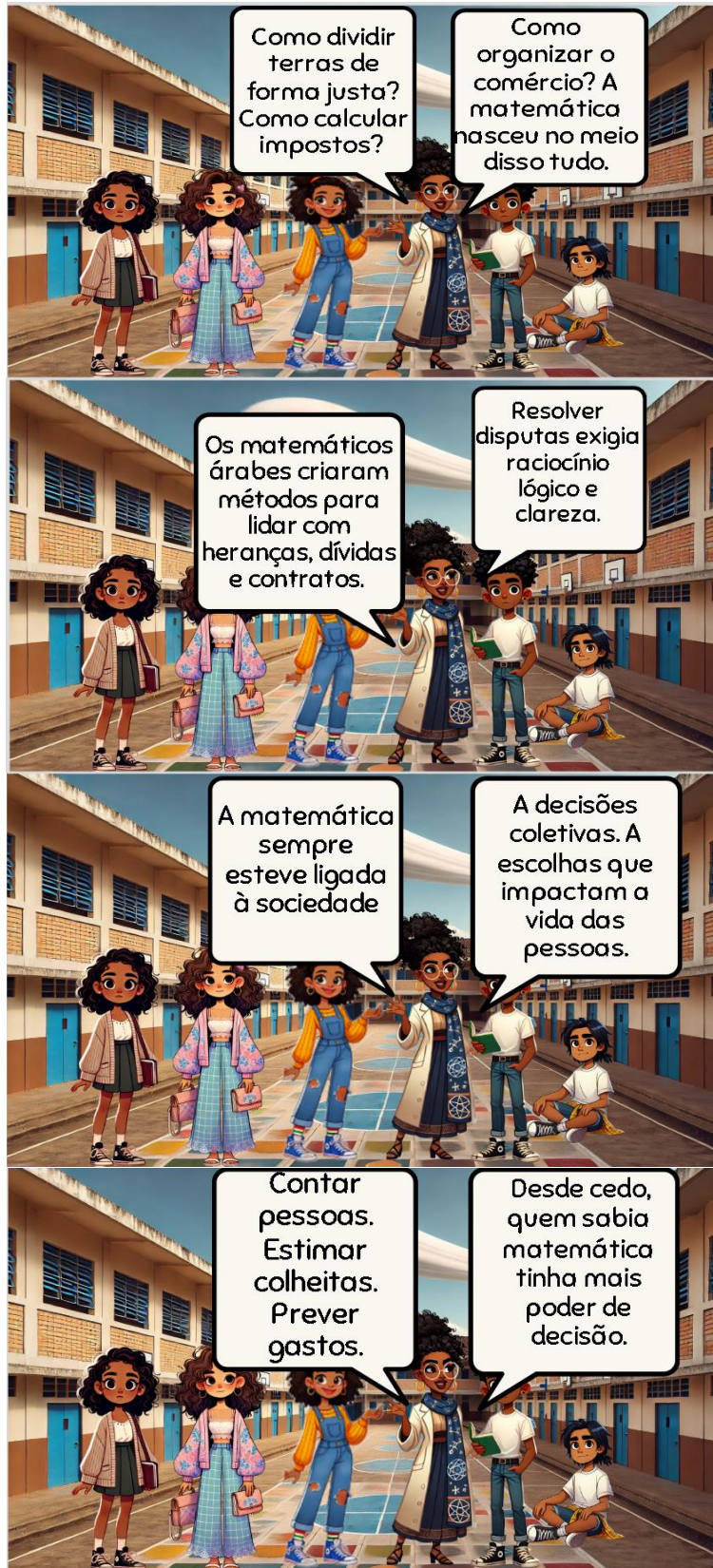


Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

Exemplo 2: Ensinando sobre a importância da História da Matemática e da Matemática para a construção social do aluno.

Figura 29 – Conjunto de Imagens Exemplo 2 – Estação Cordel.







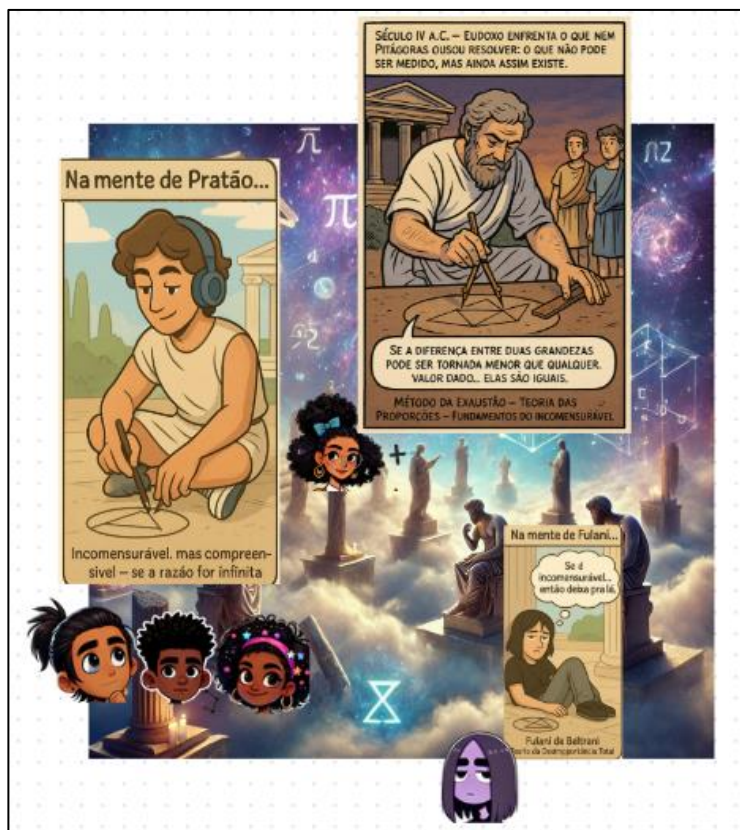


Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

Exemplo 3: Ensinando um pouco de Eudoxo e do seu método da Exaustão.

Figura 30 – Conjunto de Imagens Exemplo 3 – Estação Cordel.







Fonte: imagem gerada por IA (DALL·E) a partir de descrição do autor.

7 REFERÊNCIAS

HEFEZ, Abramo. Aritmética. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. (Coleção PROFMAT).

MOREY, Bernadete; SILVA, Gesivaldo Santos. Os sistemas de numeração antigos na formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

OPENAI. Imagens geradas por inteligência artificial (DALL·E) a partir de descrições do autor. ChatGPT, San Francisco, Estados Unidos, 2025. Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: 03 mar. 2025 a 20 out. 2025.

*Hay que medir el silencio,
hay que medir las palabras,
sin quedarse ni pasarse,
medio a medio de la raya.*

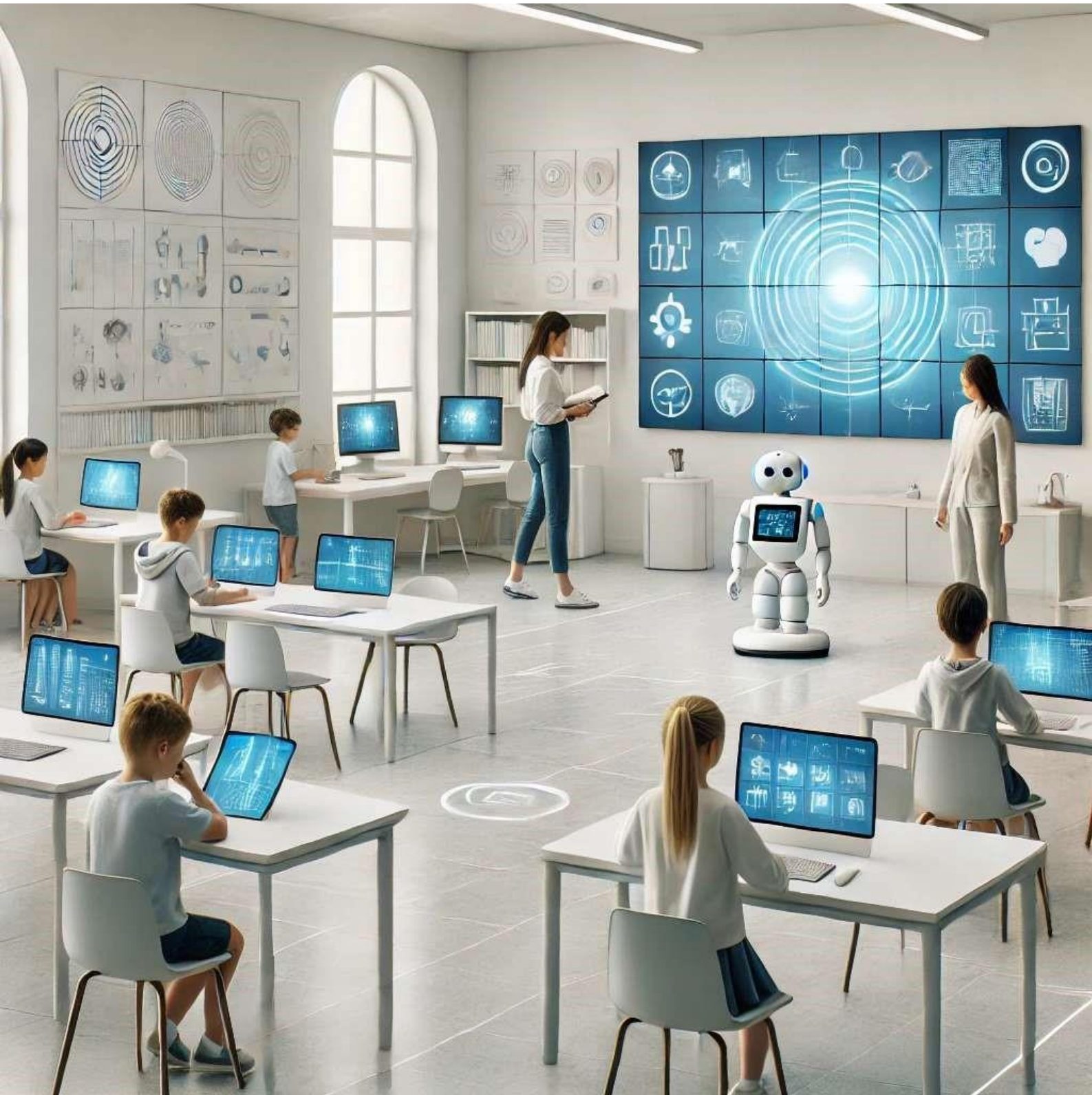
Violeta Parra
(El Albertío)

RODA DE CONVERSA









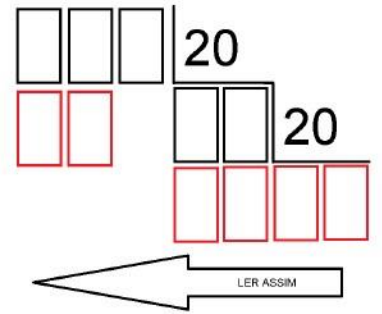
ESTAÇÃO MAIA

ESTAÇÃO MAIA

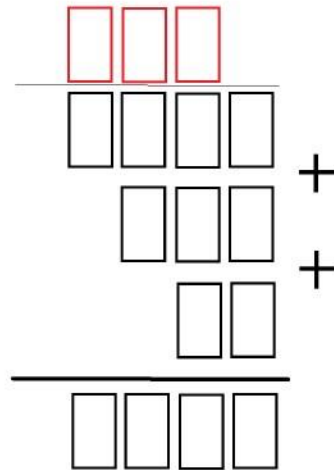


| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

DE BASE DECIMAL PARA BASE 20



DE BASE 20 PARA BASE DECIMAL

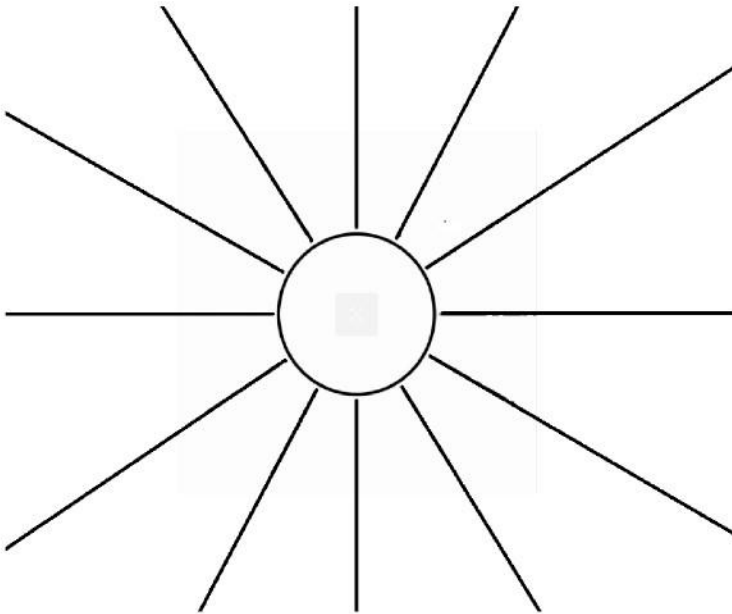


| 20 ² | 20 ¹ | 20 ⁰ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 400 | 20 | 1 |
| 800 | 40 | 2 |
| 1200 | 60 | 3 |
| 1600 | 80 | 4 |
| 2000 | 100 | 5 |
| 2400 | 120 | 6 |
| 2800 | 140 | 7 |
| 3200 | 160 | 8 |
| 3600 | 180 | 9 |
| 4000 | 200 | 10 |
| 4400 | 220 | 11 |
| 4800 | 240 | 12 |
| 5200 | 260 | 13 |
| 5600 | 280 | 14 |
| 6000 | 300 | 15 |
| 6400 | 320 | 16 |
| 6800 | 340 | 17 |
| 7200 | 360 | 18 |
| 7600 | 380 | 19 |

| 0 | * | ** | *** | **** |
|----|----|----|-----|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |

ESTAÇÃO BABILÔNIA

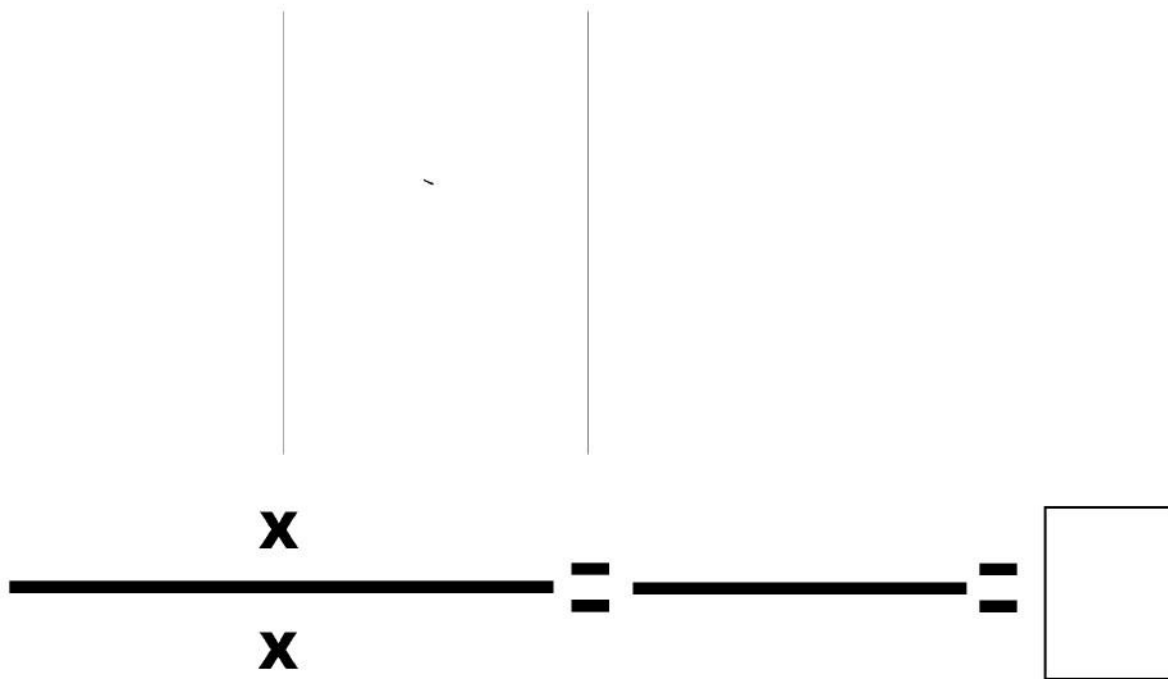
ESTAÇÃO BABILÔNIA



| Número | Divisores | Fatoração em primos | Quantidade de Divisores |
|--------|-----------|---------------------|-------------------------|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | 1 3 5 15 | 3×5 | 4 |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |
| 21 | | | |
| 22 | | | |
| 23 | | | |
| 24 | | | |
| 25 | | | |
| 26 | | | |
| 27 | | | |
| 28 | | | |
| 29 | | | |
| 30 | | | |
| 31 | | | |
| 32 | | | |
| 33 | | | |
| 34 | | | |
| 35 | | | |
| 36 | | | |
| 37 | | | |
| 38 | | | |
| 39 | | | |
| 40 | | | |
| 41 | | | |
| 42 | | | |
| 43 | | | |
| 44 | | | |
| 45 | | | |
| 46 | | | |
| 47 | | | |
| 48 | | | |
| 49 | | | |
| 50 | | | |
| 51 | | | |
| 52 | | | |
| 53 | | | |
| 54 | | | |
| 55 | | | |
| 56 | | | |
| 57 | | | |
| 58 | | | |
| 59 | | | |
| 60 | | | |

ESTAÇÃO EUCLIDES

ESTAÇÃO EUCLIDES

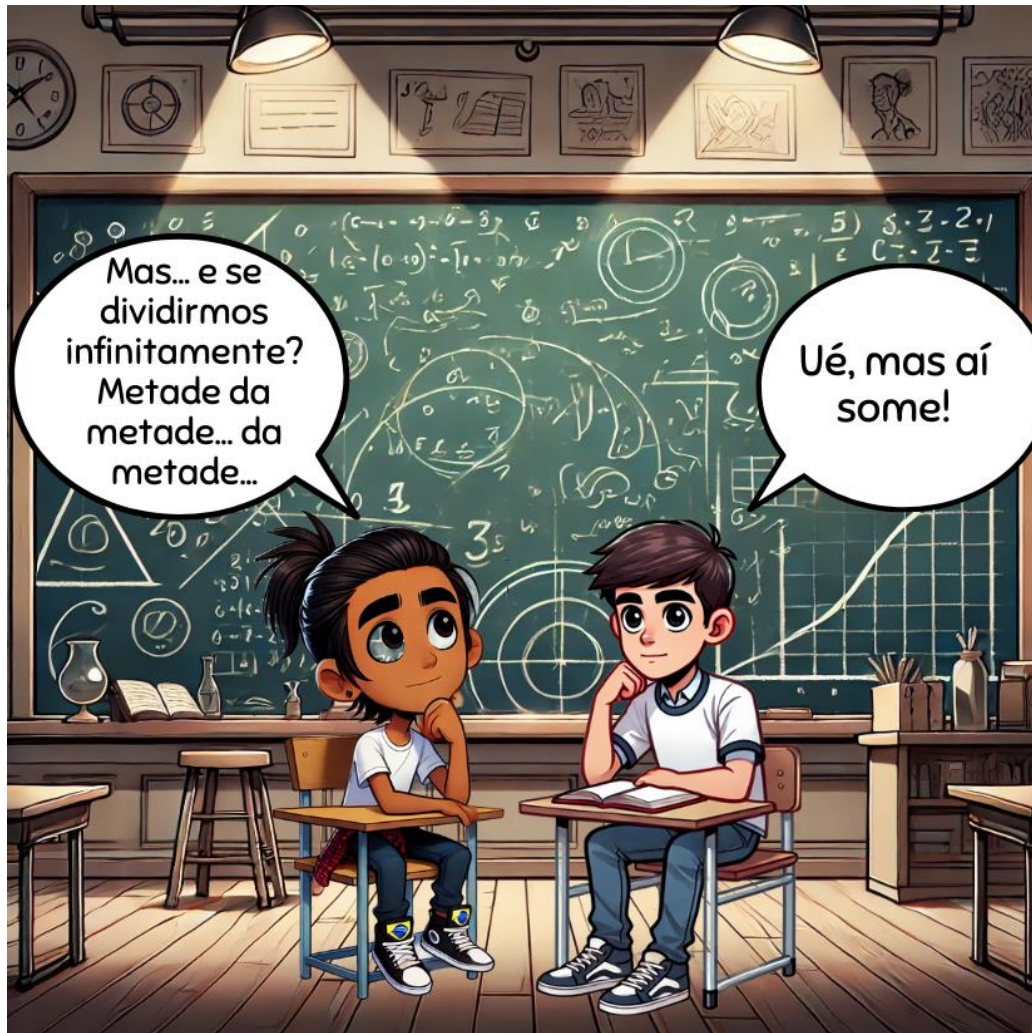


| num. | Composiçao | Fatorizaçao em primos | num. | Composiçao | Fatorizaçao em primos |
|------|-------------------------|-----------------------|------|-------------------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 | 51 | 1 3 17 51 | 3*17 |
| 2 | 1 2 | 2 | 52 | 1 2 4 13 26 52 | 2*2*13 |
| 3 | 1 3 | 3 | 53 | 1 53 | 53 |
| 4 | 1 2 4 | 2*2 | 54 | 1 2 3 6 9 18 27 54 | 2*3*3*3 |
| 5 | 1 5 | 5 | 55 | 1 5 11 55 | 5*11 |
| 6 | 1 2 3 6 | 2*3 | 56 | 1 2 3 7 8 14 28 56 | 2*2*2*7 |
| 7 | 1 7 | 7 | 57 | 1 3 19 57 | 3*19 |
| 8 | 1 2 4 8 | 2*2*2 | 58 | 1 2 29 58 | 2*29 |
| 9 | 1 3 9 | 3*3 | 59 | 1 59 | 59 |
| 10 | 1 2 5 10 | 2*5 | 60 | 1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60 | 2*2*3*5 |
| 11 | 1 11 | 11 | 61 | 1 61 | 61 |
| 12 | 1 2 3 4 6 12 | 2*2*3 | 62 | 1 2 31 62 | 2*31 |
| 13 | 1 13 | 13 | 63 | 1 3 7 21 63 | 3*3*7 |
| 14 | 1 2 7 14 | 2*7 | 64 | 1 2 4 8 16 32 64 | 2*2*2*2*2*2 |
| 15 | 1 3 5 15 | 3*5 | 65 | 1 5 13 65 | 5*13 |
| 16 | 1 2 4 8 16 | 2*2*2*2 | 66 | 1 2 3 6 11 22 33 66 | 2*3*11 |
| 17 | 1 17 | 17 | 67 | 1 67 | 67 |
| 18 | 1 2 3 6 9 18 | 2*3*3 | 68 | 1 2 4 17 34 68 | 2*2*17 |
| 19 | 1 19 | 19 | 69 | 1 3 23 69 | 3*23 |
| 20 | 1 2 4 5 10 20 | 2*2*5 | 70 | 1 2 5 7 10 14 35 70 | 2*5*7 |
| 21 | 1 3 7 21 | 3*7 | 71 | 1 71 | 71 |
| 22 | 1 2 11 22 | 2*11 | 72 | 1 2 3 4 6 8 12 18 24 36 72 | 2*2*2*3*3 |
| 23 | 1 23 | 23 | 73 | 1 73 | 73 |
| 24 | 1 2 3 4 6 8 12 24 | 2*2*2*3 | 74 | 1 2 37 74 | 2*37 |
| 25 | 1 5 25 | 5*5 | 75 | 1 3 5 15 25 75 | 3*5*5 |
| 26 | 1 2 13 26 | 2*13 | 76 | 1 2 4 19 38 76 | 2*2*19 |
| 27 | 1 3 9 27 | 3*3*3 | 77 | 1 7 11 77 | 7*11 |
| 28 | 1 2 4 7 14 28 | 2*2*7 | 78 | 1 2 3 6 13 26 39 78 | 2*2*3*13 |
| 29 | 1 29 | 29 | 79 | 1 79 | 79 |
| 30 | 1 2 3 5 6 10 15 30 | 2*3*5 | 80 | 1 2 4 5 8 10 16 20 40 80 | 2*2*2*2*5 |
| 31 | 1 31 | 31 | 81 | 1 3 9 27 81 | 3*3*3*3 |
| 32 | 1 2 4 8 16 32 | 2*2*2*2 | 82 | 1 2 41 82 | 2*41 |
| 33 | 1 3 11 33 | 3*11 | 83 | 1 83 | 83 |
| 34 | 1 2 17 34 | 2*17 | 84 | 1 2 3 4 6 7 12 14 21 28 42 84 | 2*2*2*3*7 |
| 35 | 1 5 35 | 5*7 | 85 | 1 5 17 85 | 5*17 |
| 36 | 1 2 3 4 6 9 12 18 36 | 2*2*3*3 | 86 | 1 2 43 86 | 2*43 |
| 37 | 1 37 | 37 | 87 | 1 3 29 87 | 3*29 |
| 38 | 1 2 19 38 | 2*19 | 88 | 1 2 4 8 11 22 44 88 | 2*2*2*11 |
| 39 | 1 3 13 39 | 3*13 | 89 | 1 89 | 89 |
| 40 | 1 2 4 5 8 10 20 40 | 2*2*2*5 | 90 | 1 2 3 5 6 9 10 15 18 30 45 90 | 2*3*3*5 |
| 41 | 1 41 | 41 | 91 | 1 7 13 91 | 7*13 |
| 42 | 1 2 3 6 7 14 21 42 | 2*3*7 | 92 | 1 2 4 23 46 92 | 2*2*23 |
| 43 | 1 43 | 43 | 93 | 1 3 31 93 | 3*31 |
| 44 | 1 2 4 11 22 44 | 2*2*11 | 94 | 1 47 94 | 2*47 |
| 45 | 1 3 5 15 45 | 3*3*5 | 95 | 1 5 19 95 | 5*19 |
| 46 | 1 2 23 46 | 2*23 | 96 | 1 2 3 4 6 8 12 16 24 32 48 96 | 2*2*2*2*3 |
| 47 | 1 47 | 47 | 97 | 1 97 | 97 |
| 48 | 1 2 3 4 6 8 12 16 24 48 | 2*2*2*2*3 | 98 | 1 2 7 14 49 98 | 2*7*7 |
| 49 | 1 7 49 | 7*7 | 99 | 1 3 9 11 33 99 | 3*3*11 |
| 50 | 1 2 5 10 25 50 | 2*5*5 | 100 | 1 2 4 5 10 20 25 50 100 | 2*2*2*5*5 |

ESTAÇÃO CORDEL

Pratão e Ary na divisão atômica











A importância da História da Matemática e da Matemática para a construção social do aluno.











Eudoxo e seu método da exaustão.





Na mente de Pratóo...



SÉCULO IV A.C. – EUDOZO ENFRENTA O QUE NEM PITÁGORAS OUSOU RESOLVER: O QUE NÃO PODE SER MEDIDO, MAS AINDA ASSIM EXISTE.



SE A DIFERENÇA ENTRE DUAS GRANDEZAS PODE SER TORNADA MENOR QUE QUALQUER VALOR DADO... ELAS SÃO IGUAIS.

MÉTODO DA EXAUSTÃO – TEORIA DAS PROPORÇÕES – FUNDAMENTOS DO INCOMENSURÁVEL

Na mente de Fulani...



Fulani de Beltrani
Teoria da Desproporção Total



