Universidade Estadual de Londrina

GILCIMAR DA CRUZ LEAL

# GEOMETRIA ANALÍTICA:

UMA TEORIA A SER MAIS UTILIZADA NO ENSINO MÉDIO

Londrina
2016

GILCIMAR DA CRUZ LEAL

# GEOMETRIA ANALÍTICA:

UMA TEORIA A SER MAIS UTILIZADA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Neuza Teramon

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Leal, Gilcimar da Cruz.
Geometria Analítica : uma teoria a ser mais utilizada no Ensino Médio / Gilcimar da Cruz Leal. - Londrina, 2016.
92 f. : il.

Orientador: Neuza Teramon.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Geometria Analítica - Teses. 2. Ensino Médio - Teses. 3. GeoGebra - Teses. I. Teramon, Neuza. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

GILCIMAR DA CRUZ LEAL

# GEOMETRIA ANALÍTICA:

## UMA TEORIA A SER MAIS UTILIZADA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

______________________________________
Orientadora: Profª. Drª. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina - UEL

______________________________________
Profª. Drª. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
Universidade Estadual de Maringá - UEM

______________________________________
Profª. Drª. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 10 de março de 2016.

Dedico este trabalho a meu pai Antônio, a minha mãe Belanísia e aos meus irmãos por entenderem a minha ausência.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora não só pela constante orientação nesta dissertação, mas sobretudo pela sua amizade que foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do curso que sempre se empenharam em nos dar uma boa aula.

Aos colegas de classe que ofereceram a amizade em todo momento do curso e nos momentos de discussões de conteúdos para o enriquecimento de nosso conhecimento.

Gostaria de agradecer também às pessoas que contribuíram para a realização das entrevistas presente nesta dissertação.

Aos amigos Júlio Cézar e Danilo que sempre me ajudaram a enfrentar os desafios constantes, e aos queridos Rodrigo, Eugênio e Gisele que sempre me apoiaram.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus, por dar-me forças e saúde para concluir esse trabalho.

*"O sucesso é ir*
*de fracasso em fracasso*
*sem perder o entusiasmo"*

Winston Churchill

LEAL, Gilcimar da Cruz. **Geometria Analítica:** Uma teoria a ser mais utilizada no Ensino Médio. 2016. 92f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.


## RESUMO

Considerando a relevância dos conteúdos da Geometria Analítica no Ensino Médio, propomos algumas atividades que visam contribuir com a aplicação desses conceitos. Para o encaminhamento desse trabalho apresentamos um breve contexto histórico da Geometria visando mostrar o seu desenvolvimento ao longo da criação humana, revisamos alguns conceitos básicos da Geometria Analítica e apresentamos atividades vinculadas à Geometria Analítica, à Geometria Euclidiana Plana e outros conceitos matemáticos do Ensino Médio. Algumas destas atividades estão articuladas ao *software* GeoGebra, pois o mesmo auxilia na visualização e no dinamismo das resoluções das atividades propostas. Por fim, foram realizadas entrevistas com professores de Matemática e graduandos do curso de Matemática, e foram aplicadas algumas das atividades deste trabalho, para analisarmos os métodos de resoluções apresentados por estes entrevistados.



**Palavras-chave:** Geometria Analítica. Ensino Médio. GeoGebra.

LEAL, Gilcimar da Cruz. **Analytic Geometry:** A theory to be more used in High School. 2016. 92p. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – State University of Londrina, Londrina, 2016.


## ABSTRACT

Considering the significance of the contents of Analytic Geometry in high school, we propose some activities aimed at contributing to the implementation of these concepts. For forwarding this work, we present a brief historical context of Geometry in order to show its development throughout human creation, we review some basics concepts of Analytic Geometry and we present activities related to Analytic Geometry, Euclidean Plane Geometry and other mathematical concepts of high school. Some of these activities are related to GeoGebra software, because it helps in the preview and the dynamism of the resolutions of the proposed activities. Finally, interviews were conducted with teachers of mathematics and undergraduate students of Mathematics courses, and some of the activities of this work were applied in order to analyze the methods of resolutions presented by these interviewed.



**Keywords:** Analytic Geometry. High School. GeoGebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| a.C. | antes de Cristo |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| UERJ | Universidade do Estado do Rio de Janeiro |
| OBMEP | Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas |

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A finalidade desta dissertação é mostrar algumas formas de explorar a importância da utilização da Geometria Analítica no Ensino Médio.

O presente trabalho foi inspirado na minha[1] paixão pela Educação Básica, a qual desejo compartilhar por meio das resoluções de atividades envolvendo os conceitos da Geometria Analítica e, dessa forma, pretendo contribuir com a melhoria do conhecimento e proporcionar uma outra visão da Geometria Analítica em atividades em que não se espera que a mesma seja utilizada.

O conteúdo deste trabalho foi inspirado na resolução de uma atividade do projeto "OBMEP na Escola", por meio da Geometria Analítica. Essa atividade foi aplicada em um grupo de professores de Matemática e eu a resolvi utilizando Geometria Analítica. Nesta atividade, em particular, o uso da Geometria Analítica tornou a solução rápida e simples, quando comparada a outras resoluções apresentadas pelos meus colegas professores que não utilizaram a mesma teoria. Fiquei com a impressão de que a Geometria Analítica é pouco lembrada na resolução de problemas geométricos. Desde então, comecei a “enxergar” a Geometria Analítica de um modo diferente, de maneira a tentar usá-la cada vez mais. Esta atividade, que me motivou, esta inclusa nessa dissertação no capítulo 3 e é a atividade 3.1.

De acordo com o artigo 28 do PROFMAT, o Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula, assim o tema escolhido que norteia esta dissertação atende a esta recomendação regimental do PROFMAT.

Neste trabalho não serão feitas todas as demonstrações de um curso de Geometria Analítica, mas sim os de relevância para o embasamento desta dissertação.

No capítulo 1, apresentamos um pouco da história sobre a Geometria Euclidiana Plana e também sobre a Geometria Analítica e resumimos a biografia de René Descartes.

No capítulo 2, exploramos alguns conceitos da Geometria Analítica

[1] Em alguns momentos do presente trabalho, tomei a liberdade de usar a primeira pessoa do singular para expressar minhas opiniões.

do Ensino Médio, apresentamos algumas demonstrações que consideramos relevantes e destacamos um breve relato sobre o software GeoGebra.

No capítulo 3, propomos algumas atividades em que suas resoluções foram por meio dos conceitos da Geometria Analítica e apresentamos outras formas de resoluções, utilizando conceitos da Geometria Euclidiana Plana, funções e construções por meio do *software* GeoGebra.

No capítulo 4, foi solicitado a dois professores do Ensino Médio e cinco alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática que resolvessem ou refletissem sobre atividades previamente selecionadas dentre as que foram propostas no capítulo anterior. Baseados em suas resoluções, respostas e reflexões e também na entrevista realizada com os mesmos após esta etapa, sistematizamos suas impressões e apresentamos uma análise das respostas dadas pelos professores e alunos.

Esperamos que, após a leitura deste trabalho, professores e alunos tenham uma nova visão dos conceitos da Geometria Analítica, utilizando-a em atividades que antes não parecia ser possível usá-la.

# CAPÍTULO 1 – GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo trazemos uma síntese da história das Geometrias Euclidiana Plana e Analítica, pois estas Geometrias constituem as ferramentas principais para o desenvolvimento das atividades propostas neste trabalho. No que concerne a Geometria Euclidiana Plana, fazemos um apanhado histórico basicamente até Euclides, pois para as atividades desenvolvidas nesta dissertação, esta é uma das teorias que foi empregada. Assim, foram excluídos aspectos históricos da Geometria das Cônicas, Geometria Projetiva, Geometria Diferencial e Geometrias não Euclidianas.

## 1.1 Um Pouco de História da Geometria

A palavra geometria vem do grego e, de acordo com o dicionário etimológico, “geo significa terra e metria, medir. A palavra geometria nos remete aos agrimensores do Antigo Egito que com cordas esticadas sobre as parcelas de terreno traçavam linhas simples: retas e circunferências”.

Para Heródoto, a geometria teria origem às margens do Rio Nilo no Egito e Aristóteles acreditava que a origem estava ligada à existência de uma classe sacerdotal que tinha a Geometria como um tipo de lazer. Embora Heródoto e Aristóteles coloquem estes fatores como motivadores para a Matemática e a Geometria, é claro que o homem neolítico já mostrava sua preocupação com relações que levam a uma Geometria elementar, basta observar os padrões geométricos em seus potes, cestas e tecidos. Esta preocupação humana pode ter origem no senso estético e na beleza das formas (BOYER, 2012).

Ainda em relação ao antigo Egito, o papiro de Ahmes traz alguns problemas geométricos como:

(i) cálculo de áreas de triângulos e trapézios isósceles. Estes polígonos são transformados em retângulos, fazendo uso de congruências de figuras geométricas;

(ii) cálculo da área de um campo circular, e os egípcios atribuiram o valor $3\frac{1}{6}$ para $\pi$, que é uma aproximação relativamente boa para a constante $\pi$. Não foram encontrados registros de deduções ou demonstrações formais na Matemática egípcia. Os registros dos papiros indicam que a Geometria egípcia preocupava-se com os problemas de mensuração, em que a preocupação maior era a técnica e não a melhoria da compreensão dos conceitos (BOYER, 2012).

Nos documentos egípcios não se encontrou menção alguma ao Teorema de Pitágoras, já os povos babilônicos faziam uso do Teorema de Pitágoras. Em textos babilônicos aparece o seguinte enunciado: Uma escada de comprimento 0,30 está apoiada na parede. Se a parte superior da escada escorregar 0,6 para baixo, quanto a extremidade inferior se afastará da parede? A resposta é obtida por meio do uso correto do Teorema de Pitágoras (BOYER, 2012).

Um fato comum entre egípcios e babilônicos é que, pelos registros encontrados, eles se ocupavam de problemas e casos específicos, não apresentando generalizações. Os historiadores caracterizam a Matemática dos egípcios e babilônicos das eras pré-helênicas pelo seu caráter prático e aplicado. Herança de terras, fabricação de cerveja e construção de pirâmides são alguns exemplos. A Matemática por ela mesma despertava pouco ou nenhum interesse.

A efervescência cultural dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates deslocaram-se para as margens do Mar Mediterrâneo por volta do século VIII a.C., a civilização grega da época não hesitava em absorver e adotar elementos de culturas diferentes, os gregos mostravam o desejo de aprender e aperfeiçoar o que outros povos lhes ensinavam. Neste contexto surgem Tales e Pitágoras.

Tales é considerado o primeiro matemático legítimo, atribui-se a ele a criação do sistema dedutivo da Geometria. A ele são atribuídos os seguintes resultados:

i) um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto;

ii) um círculo é bissectado por um diâmetro;

iii) os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;

iv) os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais;

v) se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.

Pitágoras conhecia Matemática e astronomia, mas ele também era um profeta e um místico. Existem obstáculos para estabelecer quais foram as contribuições efetivas de Pitágoras, pois a ordem fundada por ele era comunitária e secreta. Deste modo, prefere-se falar das descobertas da escola pitagórica e não atribuir os feitos à Pitágoras. Assim, credita-se à escola pitagórica o estudo da Matemática como um culto à sabedoria e ao prazer intelectual, ao contrário dos egípcios e babilônicos que pensavam a Matemática como uma ferramenta para problemas práticos.

Aspectos importantes da Geometria estão relacionados à Pitágoras como o famoso teorema que leva seu nome. Conjectura-se que os pitágoricos foram os primeiros a demonstrá-lo. A escola pitagórica tinha como símbolo o pentagrama ou pentágono estrelado. O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. As interseções destas diagonais formam um novo pentágono regular. Pode-se repetir este processo indefinidamente e as diagonais do pentágono interceptam-se segundo a razão aúrea obtendo-se sempre pentágonos regulares.

A respeito da história de Tales e Pitágoras, Boyer (2012) bem adverte que não existem registros históricos sobre ambos. O que se sabe sobre estes dois matemáticos baseia-se na tradição oral.

Por volta dos séculos VII e VI a.C. termos ligados à Geometria estavam relacionados com a arquitetura. Ainda no século VI a.C. conceitos geométricos como círculos e ângulos aparecem em situações que tratavam de astronomia e calendários.

Datam aproximadamente do século IV a.C., os três famosos problemas da antiguidade, quais sejam: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo que deveriam ser resolvidos utilizando construção com régua não graduada e compasso. Foram necessários mais de 2200 anos para se comprovar que os três problemas são impossíveis de serem solucionados apenas com régua e compasso, estes problemas geraram muita teoria matemática. Aqui mais uma vez, surge um exemplo da Matemática racional cultuada pelos gregos.

Roque (2012) narra que nesta época era comum elaborar soluções para problemas geométricos e problemas de comparação de grandezas geométricas por meio de razões. A obra de Roque (2012) apresenta o papel exercido pela descoberta das grandezas incomensuráveis e como este conceito contribuiu para a fragmentação entre Álgebra e Geometria da Matemática da época. O estudo das grandezas incomensuráveis levou a um jeito diferente de pensar a Geometria, pois tais grandezas provocaram a divisão entre o mundo das grandezas e o mundo dos números, culminando nos *Elementos* de Euclides, uma vez que a perspectiva de dois segmentos não serem comensuráveis conduz à necessidade de uma Geometria com bases sólidas, distinta da Geometria intuitiva desenvolvida até então. Assim, dentre os matemáticos gregos que se dedicaram a estudar Geometria, destacamos Euclides que teve o papel de organizar os conceitos geométricos desenvolvidos até sua época (BOYER, 2012).

Por volta de 300 a.C., Euclides compilou e sistematizou o conhecimento geométrico em seu *Os Elementos*. Euclides foi um grande expositor, esta é uma das explicações para o sucesso desta obra, além disso Os Elementos trazem os assuntos básicos da matemática da época, assim assuntos como curvas planas e cônicas não aparecem, pois eram considerados tópicos de matemática avançada. Esta obra não é somente uma compilação, pois apresenta resultados inéditos, além de ser organizado segundo o método dedutivo. Roque esclarece que:

> o que eram elementos para os gregos? Os elementos de uma ciência constituíam as proposições fundamentais, a partir das quais seria possível deduzir as outras. Ou seja, não tinham que ser enciclopédicos, mas mostrar uma escolha judiciosa do que será apresentado. Por exemplo, nos Elementos de Euclides, não está demonstrado que as três alturas de um triângulo se encontram num ponto, mas este teorema pode ser deduzido a partir de outros, mais básicos, demonstrados por Euclides (ROQUE, p.82, 2012).

Vemos que Euclides emprega o método dedutivo, em que alguns fatos são aceitos como evidentes (axiomas) e que a partir da combinação destes fatos podem-se deduzir novos resultados (teoremas e proposições).

*Os Elementos* é uma obra composta por 465 proposições distribuídas em treze livros, dos quais os seis primeiros são a respeito de geometria plana elementar, os três seguintes abordam a teoria dos números, porém com enfoque geométrico, o décimo sobre grandezas incomensuráveis e o três últimos sobre geometria espacial (BOYER, 2012). Esta obra formalizou o conhecimento geométrico e trouxe cientificidade à Matemática. A Geometria Euclidiana, pelo rigor das suas demonstrações, servem como base para outras ciências físicas (PARANÁ, 2006).

Segundo Domingues (1993 *apud* DOLCE e POMPEO, 1993, p.60) "*Os Elementos*, teve mais de mil edições impressas em todo o mundo, desde a primeira publicação impressa, feita em Veneza, em 1482, e teve um feito editorial talvez só superado pela Bíblia”.

De acordo com Eves (2011), pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides, mas existem indícios de que sua formação matemática esteja ligada às escolas em Atenas, na academia de Platão e foi professor no primeiro modelo de universidade, a escola de Alexandria, no Egito.

Segundo Domingues (1993 *apud* DOLCE e POMPEO, 1993, p.286), o primeiro passo para aprimorar o rigor matemático da geometria elementar de Euclides, foi dado por Moritz Pasch (1843-1930) em suas *Lições de Geometria*, de 1882, o qual Pasch observou as definições dadas por Euclides e, para evitar a ocorrência de círculos viciosos, chamada *regressus in infinitum*, admitiu como primitivos (sem definição) os conceitos de ponto, reta e plano. A motivação para isto vem da definição dada por Euclides de que "ponto é aquilo que não tem partes", porém o que vem a ser "partes"?.

Para Domingues (1993 *apud* DOLCE e POMPEO, 1993, p.287), a fundamentação de maior influência da geometria euclidiana é a de David Hilbert (1862-1943), que proferiu uma série de conferências que abordam axiomaticamente tal conteúdo, publicada em 1899 num pequeno texto que recebeu vários apêndices. Em 1904, Hilbert, por meio da Geometria Analítica, provou que a geometria euclidiana é consistente se a ciência da aritmética é consistente.

Os cinco postulados de Euclides são:

i) pode-se traçar uma única reta por quaisquer dois pontos;

ii) pode-se continuar um segmento finito de reta infinitamente;

iii) pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;

iv) todos os ângulos retos são iguais;

v) se um segmento de reta corta dois outros segmentos de retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então os dois segmentos de retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Há evidências de que os postulados, especialmente o quinto, foram formulados por Euclides mesmo. Na primeira metade do século dezenove, os matemáticos concluíram que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isto ocorreu com a descoberta da geometria não-Euclidiana em que o quinto postulado de Euclides era substituído por uma outra afirmação que lhe é contraditória conduzindo a teoremas que não coincidem com os da Geometria Euclidiana. No entanto, esta nova Geometria é tão consistente e logicamente aceita quanto a Euclidiana e encontra aplicações no sistema de navegação marítima e na teoria da relatividade de Einstein. O universo de Einstein é curvo, assim as Geometrias não-Euclidianas adequam-se a esta concepção. A descoberta das Geometrias não-Euclidianas está associada aos matemáticos Johann Bolyai (1802-1860) e Nikolai I. Lobachewsky (1793-1856) que a obtiveram independentemente (BARBOSA, 1985). Após mais de dois mil anos, a Geometria Euclidiana, que reinava absoluta, passa a dividir atenção com outras formas de pensar a Geometria (COUTINHO, 2001).

Roque (2012) faz um apanhado de como *Os Elementos* foram transmitidos no decorrer dos anos, sobre como esta obra foi esquecida na Europa, mas preservada entre os árabes, sobre seu retorno para a Europa ainda durante a Idade Média. Roque trata sobre a primeira edição de Os Elementos em língua portuguesa, de 1735, publicada pelo padre jesuíta Manoel de Campos e finaliza colocando que, em 2009, Bicudo (2009) traduziu *Os Elementos* diretamente do grego para a língua portuguesa.

A beleza da Geometria, como um sistema dedutivo, desenvolvido pelo homem no qual poucas afirmações simples são admitidas sem demonstrações para provar afirmações mais complexas, inspirou homens, das mais diversas áreas, a organizarem suas ideias da mesma forma. Como exemplo disto, podemos citar o “Principia” de Isaac Newton, no qual ele tenta apresentar a Física como um sistema dedutivo e a “Ética” do filosófo Spinoza (BARBOSA, 1985).

## 1.2 Um Pouco de História da Geometria Analítica

Na primeira metade do século XVII, o conhecimento geométrico recebeu uma nova abordagem com a Geometria Analítica que trouxe uma dinâmica diferente à Matemática. Além disso, este século é memorável para a Matemática por conta do surgimento do cálculo diferencial e integral. A Europa vivia uma transição política e econômica e o modo de produção capitalista emergente requeria das ciências novos conhecimentos. Buscavam-se conhecimentos mais avançados no campo da astronomia e da mecânica. Era preciso que a Matemática resolvesse cálculos como, por exemplo, distância entre dois pontos, coordenadas de ponto que divide um segmento conforme uma razão dada, determinação de intersecção de curvas, discussão de curvas, etc. Por meio da Geometria Analítica, tais problemas eram solucionados (PARANÁ, 2006).

Como mencionado acima, o século XVII foi marcado por meio dos trabalhos de Fermat e Descartes pela descoberta da nova Geometria, da hoje denominada Geometria Analítica. Segundo Roque (2012), o objetivo de Descartes, que articulava as linguagens geométrica e algébrica, era:

> [...] utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, na qual regras simples de composição levassem dos objetos simples a outros mais complexos. Por razões puramente geométricas, era necessário algebrizar a geometria (ROQUE, p.247, 2012).

A Geometria Analítica de Pierre de Fermat (1601-1665) se deu em 1629 ao reconstruir *Lugares planos*, de Apolônio, mediante referências contidas na *Coleção matemática*, de Pappus. Fermat mostrou que equações do segundo grau em duas variáveis podem ser círculos, elipses, parábolas ou hipérboles e que uma equação geral $ax + by = c$, notação atual, representa uma reta (IEZZI, 1998).

Assim, segundo Roque (2012, p.257) a Geometria Analítica, da forma como a identificamos nos dias atuais, fundamenta-se em duas afirmações recíprocas: “(i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem.”

O primeiro enfoque foi o adotado por Descartes, enquanto Fermat adotava o segundo método, pois segundo Fermat: “Sempre que em uma equação final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva".

A Geometria Analítica emprega a análise matemática no estudo das dimensões e de acordo com Eves (p. 595, 2011):

> [...] O sistema consiste em dois eixos perpendiculares, cada um com uma escala, sendo bem familiares as regras que nos ensinam como localizar um ponto, com relação a esse referencial, pelo par ordenado de números reais que representam as distâncias (com os

sinais pertinentes), do ponto aos eixos.

Embora o sistema de dois eixos perpendiculares recebam atualmente o nome de sistema de coordenadas cartesianas, Roque (2012) destaca que Descartes não adotava necessariamente eixos perpendiculares, tendo em vista que Descartes escolhia o sistema de coordenadas que fosse mais conveniente para cada problema.

As denominações abscissas e ordenadas, usadas atualmente na Geometria Analítica, foram contribuições de Leibniz (1646-1716). Segundo Domingues (1993 *apud* IEZZI, 1993, p.117):

> Fermat não usava um par de eixos, mas apenas uma semi-reta positiva, e suas ordenadas eram oblíquas. A correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais positivos (únicos que usava) e a semi-reta era algo subentendido e muito vago.

Parece que há um consenso entre os historiadores de que, após as contribuições de Fermat e Descartes, a Geometria Analítica ganhou as notações que usamos hoje (SOARES, 2013).

Na Geometria de Descartes não há um desenvolvimento sistemático do método analítico, que pode ser construído a partir das proposições isoladas que aparecem em diferentes partes do tratado de Fermat intitulado *Ad locos planos et solidos isagoge*, publicado em 1679 (CAJORI, 2007). Nesta obra, de acordo com Soares (p.38, 2013), “encontram-se reduções de equações do primeiro e segundo graus através de rotações e translações de eixos”.

O primeiro livro de Geometria Analítica, considerado por alguns, foi *Elementa Curvarun*, de Jan De Witt (1629-1672) que traz definições cinemáticas e planimétricas das secções cônicas e, aborda também, a Geometria Analítica usando coordenadas de forma sistemática. La Hire (1640-1718) também escreveu obras sobre cônicas, apresentando um estudo sobre parábolas, elipses e hipérboles, deixando em evidência, o método usado por Descartes (SOARES, 2013).

Para Santos e Laval (2012), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) contribuiu, à Geometria Analítica, aplicando álgebra a problemas da geometria expressando área de triângulos e volume de tetraedros por meio de determinantes de terceira e quarta ordem.

Segundo Soares (2013), num trabalho concluído em 1637, sobre quadraturas e tangentes, Fermat definiu analiticamente outras curvas. Fermat, a partir da equação, encontrava o lugar geométrico e Descartes, do lugar geométrico chegava à equação.

A Geometria Analítica, segundo Soares (2013), consolidou-se no século XIX por Gaspard Monge (1746-1818) que era professor e administrador da famosa escola *Ècole Polytechnique*. Seu trabalho foi tão bem-sucedido que fez a Geometria Analítica tornar-se uma disciplina do currículo, conquistando um lugar nas escolas.

Sucintamente, a história da Geometria Analítica passou por três etapas: a primeira se destaca pela elaboração do sistema de coordenadas; a segunda se caracteriza pelo reconhecimento da relação entre álgebra e geometria e a terceira pela representação gráfica da expressão $y = f(x)$ (SMITH, p.316, 1925). Um dos matemáticos que se destaca em Geometria Analítica é René Descartes e na próxima seção discorreremos um pouco mais a respeito dele.

### 1.2.1 René Descartes (1596-1650)

Os fatos em seguida tem como referência (BOYER, 2012).

Descartes nasceu em *La Haye,* na França, e estudou no colégio jesuíta *La Flèche*. Graduou-se em direito, sem muito entusiasmo, na cidade de *Poitiers*, centro-oeste da França. Após um período de viagens pela Europa, em que manteve contato com alguns dos principais sábios, Descartes conheceu Mersenne, em Paris, e alguns cientistas que discutiam sobre as críticas do pensamento peripatético. A soma de tais estímulos e influências foram o alicerce para Descartes progredir e tornar-se o pai da filosofia moderna. Sua obra *O Discurso do Método* ou *Discurso sobre o método para bem conduzir a razão na busca da verdade dentro da ciência*, que teve como inspiração a busca por um método universal para encontrar a verdade, expõe seu ponto de vista.

Aos 21 anos, Descartes alistou-se no exército do príncipe francês Maurício de Orange e, por ser amigo do príncipe, tinha liberdade para se dedicar aos estudos. Descartes estava fortemente interessado em Matemática em 1619. Durante aquele inverno, ele estava servindo o exército alemão e Descartes ficava deitado na cama até às dez da manhã, pensando em problemas. Apesar da relação de Euler poder ser deduzida de um trabalho de Descartes, ao que tudo indica, Descartes não observou a relação entre vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo. Trabalho este muito anterior à descoberta de Euler. Por isso, credita-se a relação V – A + F = 2 à Euler, por acreditar que Descartes não tinha observado tal relação.

Aos 29 anos, Descartes deu baixa no exército francês, mudou-se para Holanda e dedicou-se à matemática pura e a formulação de sua Geometria. Após alguns anos, um amigo classicista holandês chamou a sua atenção para o problema das três e quatro retas de Pappus, e Descartes aplicou seus novos métodos e o resolveu sem dificuldade. Com isso, ele constatou o poder e a generalidade de sua teoria e escreveu a célebre obra *La géométrie*, que levou a Geometria Analítica ao conhecimento de seus contemporâneos.

Na obra *La géométrie*, Descartes, na primeira parte, relaciona os cálculos aritméticos com as operações de geometria e descreve, na segunda parte, como são efetuadas geometricamente os cálculos de multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas. Apesar de ser um texto matemático antigo, a notação utilizada na obra pode ser acompanhado por um estudante da atualidade.

Descartes considerava que a Geometria adotava diagramas que cansavam a imaginação de modo desnecessário e a álgebra, por sua vez, era uma arte confusa e nebulosa. Deste modo, resumidamente pode-se dizer que os objetivos do método de Descartes eram:

i) libertar a geometria dos diagramas por meios de processos algébricos;

ii) atribuir sentido às operações algébricas fazendo uso de interpretações geométricas.

Finalizando, ressaltamos que Descartes não dedicou-se somente à matemática. Seus métodos em Geometria constituem mais um capítulo de uma vida consagrada à ciência e à filosofia (BOYER, 2012).

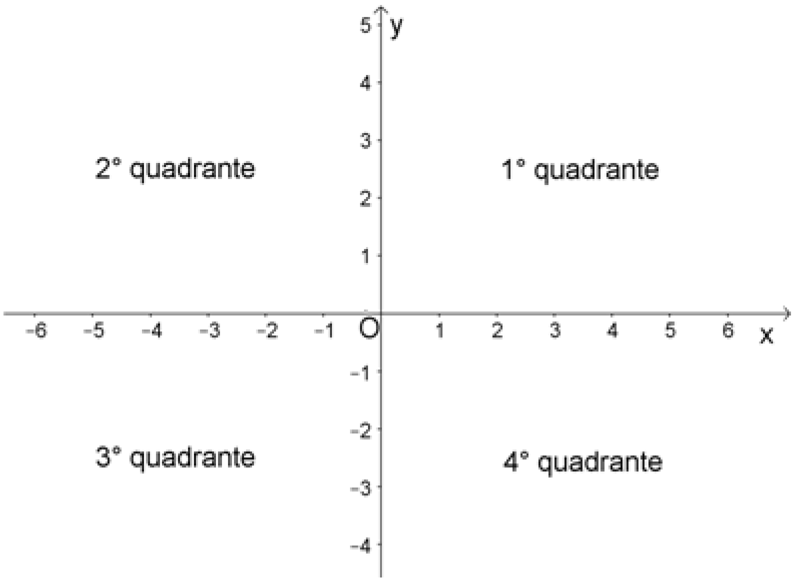
# CAPÍTULO 2 – CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA RELEVANTES PARA A COMPREENSÃO DESTE TRABALHO

Esse capítulo tem o propósito de expor alguns conceitos da Geometria Analítica que consideramos relevantes para o embasamento das atividades que serão propostas no capítulo três. Para desenvolver tais conceitos, tomamos como base Iezzi (1993), Souza (2012) e Dante (2013).

## 2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

O plano cartesiano, Figura 1, consiste num plano com dois eixos perpendiculares, $x$ e $y$, que o dividem em quatro regiões denominadas quadrantes. O eixo horizontal $x$ é definido eixo das abscissas e o eixo vertical $y$, eixo das ordenadas. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado origem.

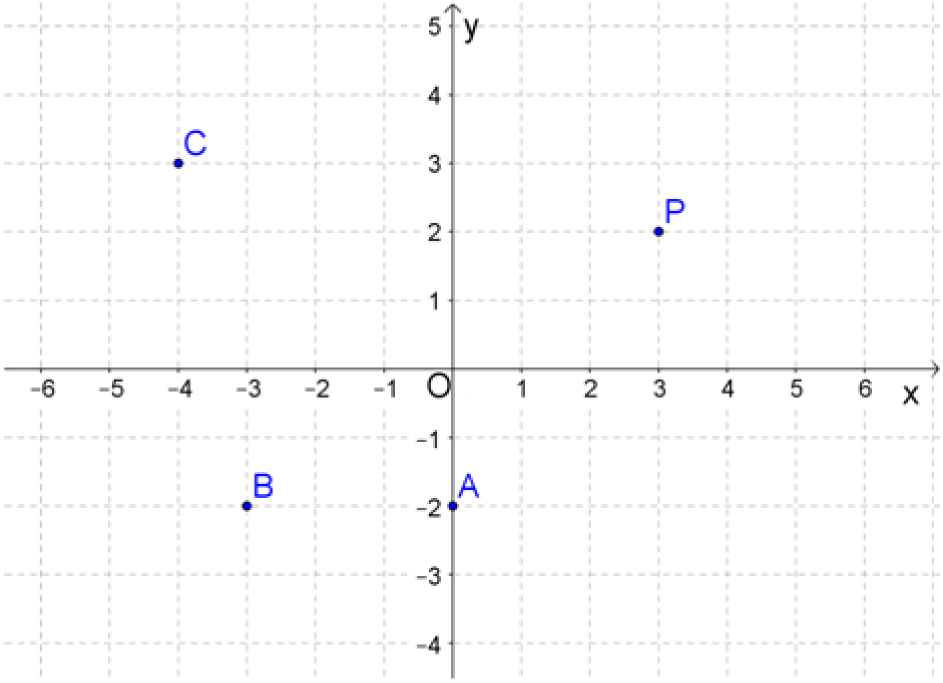
**Figura 1**: Plano Cartesiano




**Fonte**: Autor

Podemos representar um ponto P em um plano cartesiano, utilizando as coordenadas cartesianas, que consistem num par ordenado $(a, b)$, sendo que $a$ é abscissa, e $b$, a ordenada do ponto. A Figura 2 mostra alguns exemplos de pontos indicados no plano cartesiano onde P (3,2), C (-4,3), B (-3,-2) e A (0,-2).

**Figura 2**: Pontos no Plano Cartesiano




**Fonte**: Autor

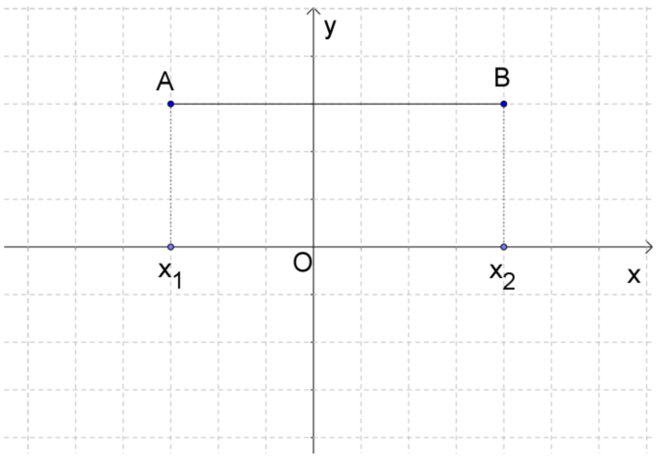
## 2.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos A($x_1$, $y_1$) e B($x_2$, $y_2$), Figura 3, a distância $d$ entre eles é dada por:

1º caso: AB //[2] Ox

$d$ = $d_{AB}$ = $|x_2 - x_1|$

**Figura 3**: AB // Ox



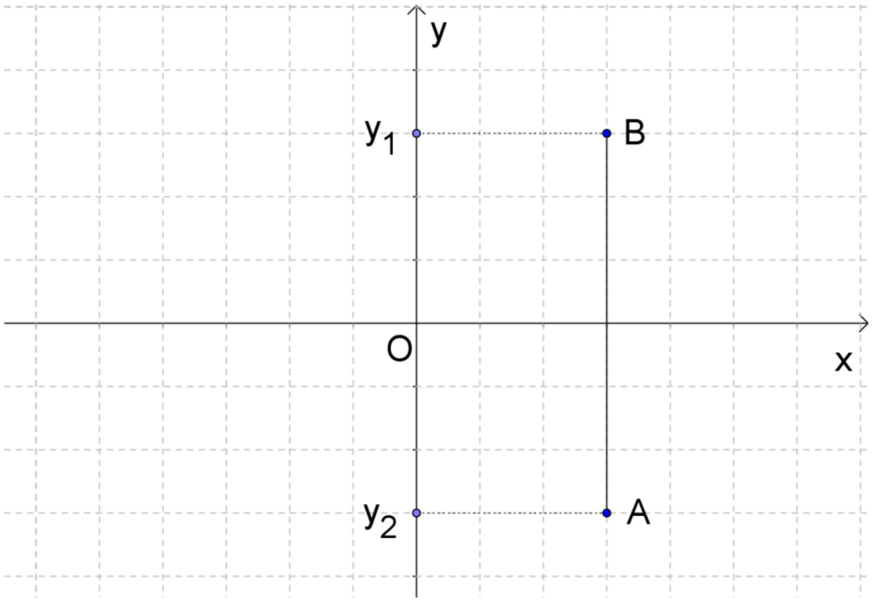

**Fonte**: Autor

[2] Utilizamos as barras // para indicar que são paralelas.

2º caso: AB // Oy, conforme Figura 4

$$d = d_{AB} = |y_2 - y_1|$$

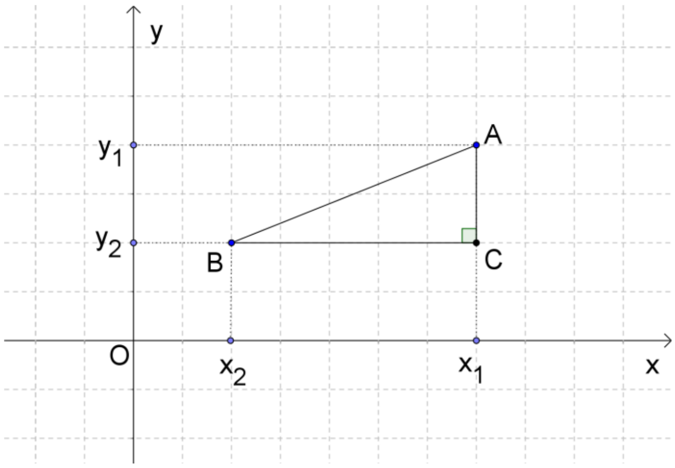
**Figura 4**: AB // Oy




**Fonte**: Autor

3º caso: AB não paralelos ao eixos $x$ e ao eixo $y$, conforme a Figura 5.

**Figura 5**: AB não paralelo aos eixos x e y.




**Fonte**: Autor

Temos inicialmente:

AC // O$y$ ⇒ $y_c = y_2$ (1)

BC // O$x$ ⇒ $x_c$ = $x_1$ (2)

De (1) e (2) conclui-se que C ($x_1$, $y_2$).

De acordo com o primeiro e segundo casos, temos:

$d_{AC} = |y_A - y_C| = |y_1 - y_2|$

$d_{BC} = |x_C - x_B| = |x_1 - x_2|$

Aplicando o teorema de Pitágoras[3] ao triângulo ABC, temos:

$d^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

e então:

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

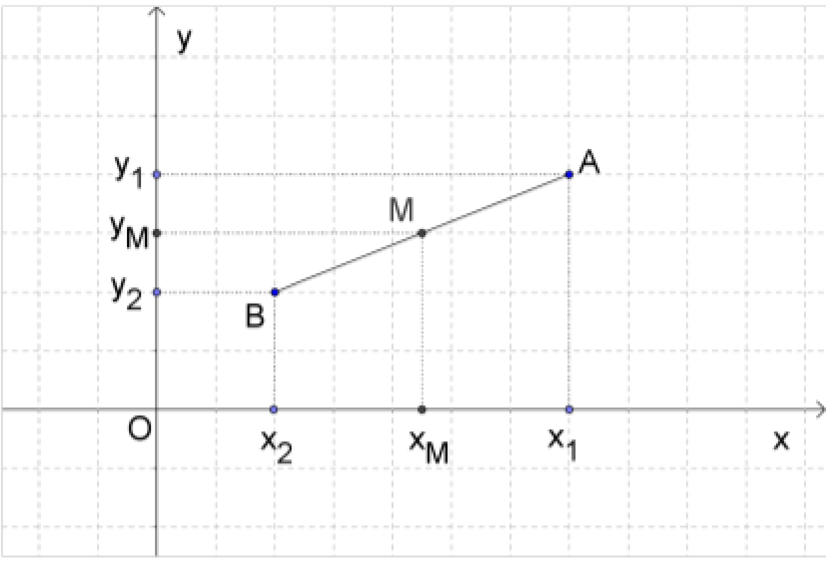
ou ainda $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

onde $\Delta x = x_2 - x_1$ ou $\Delta x = x_1 - x_2$ e $\Delta y = y_2 - y_1$ ou $\Delta y = y_1 - y_2$.

## 2.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento

Dado um segmento de reta AB, conforme Figura 6, tal que A ($x_1$, $y_1$) e B ($x_2$, $y_2$) são pontos distintos, podemos determinar as coordenadas do ponto médio M ($x_M$, $y_M$) do segmento AB.

**Figura 6:** Ponto médio




**Fonte**: Autor

[3] Se um triângulo retângulo possui catetos de medidas $b$ e $c$ e hipotenusa medindo $a$, então é válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Note que $x_2B$, $x_MM$ e $x_1A$ são segmentos de retas paralelos cortados pela transversal AB e pelo eixo Ox.

Aplicando o Teorema de Tales[4], temos:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{x_2 x_M}{x_M x_1} \Rightarrow 1 = \frac{x_M - x_2}{x_1 - x_M} \Rightarrow x_M - x_2 = x_1 - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{y_2 y_M}{y_M y_1} \Rightarrow 1 = \frac{y_M - y_2}{y_1 - y_M} \Rightarrow y_1 - y_M = y_M - y_2 \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Concluímos que, dado um segmento de extremidades A $(x_1, y_1)$ e B$(x_2, y_2)$, a abscissa e a ordenada do ponto médio M $(x_M, y_M)$ é a média aritmética das abscissas e das ordenadas das extremidades. Cabe ressaltar que a demonstração não depende da localização de A e B nos quadrantes do plano cartesiano.

### 2.3.1 Cálculo do determinante da matriz de ordem 3.

Seja a matriz M = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, definimos:

$$\det M = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte maneira:

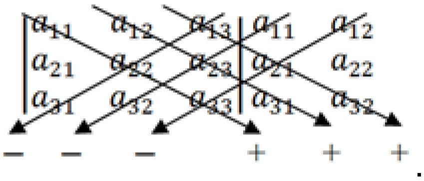
a) Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.

b) Os termos precedidos pelo sinal $(+)$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal:

$$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}\ .$$

c) Os termos precedidos pelo sinal $(-)$ são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária:

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$



.

Este dispositivo prático é conhecido como Regra de Sarrus para o cálculo do determinante da matriz de ordem 3.

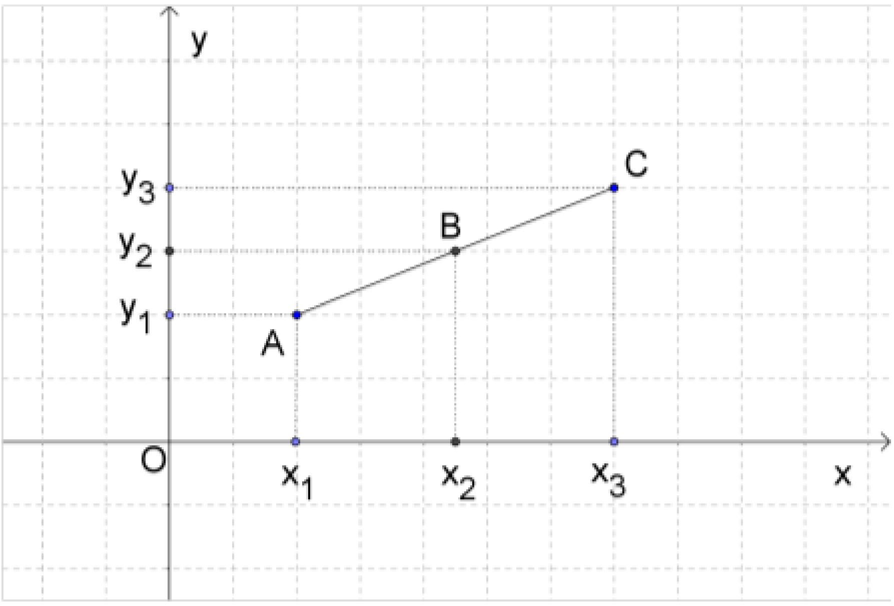
---

[4] O Teorema de Tales pode ser enunciado como sendo um feixe de retas paralelas divididas por retas transversais, de maneira que os segmentos obtidos em uma das retas transversais são ordenadamente proporcionais aos segmentos obtidos na outra transversal (SOUZA, 2012).

## 2.4 – Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos A, B e C alinhados, conforme Figura 7.

**Figura 7**: A, B e C alinhados




**Fonte**: Autor

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{x_1x_2}{x_1x_3} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \qquad (3)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{y_1y_2}{y_1y_3} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \qquad (4)$$

Comparando $(3)$ e $(4)$, temos:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} \Rightarrow (x_2 - x_1).(y_3 - y_1) = (x_3 - x_1).(y_2 - y_1)$$

$$\Rightarrow x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 = x_3y_2 - x_3\,y_1 - x_1y_2\; x_1y_1$$

$$\Rightarrow x_1y_2 + x_3\,y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 = 0.$$

O primeiro termo dessa igualdade corresponde ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Daí, podemos dizer que, se três pontos A $(x_1, y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$ e C $(x_3, y_3)$ estão alinhados, então:

D = $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ = 0.

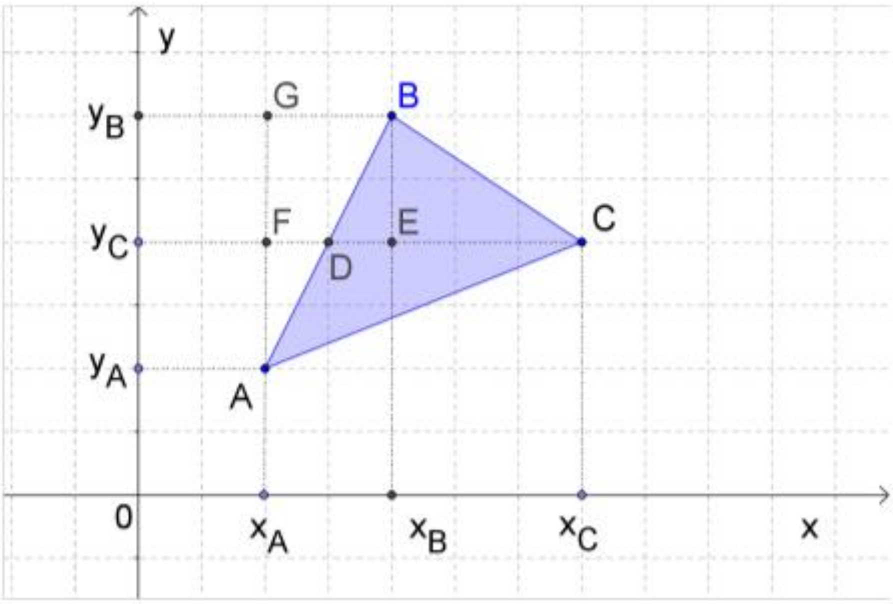
Podemos verificar também que, se D = $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ = 0, então A $(x_1, y_1)$, B $(x_2, y_2)$ e C $(x_3, y_3)$ são pontos colineares.

## 2.5 Área de um triângulo

Dados três pontos não colineares, é possível calcular a área do triângulo cujos vértices são esses pontos.

Para calcular a área, consideremos o triângulo ABC de coordenadas A($x_A$, $y_A$), B($x_B$, $y_B$) e C($x_C$, $y_C$ ), conforme apresentado na Figura 8.

**Figura 8**: Triângulo ABC




**Fonte**: Souza,p.162, 2013 - adaptado

Podemos expressar a área do triângulo ABC como a soma das áreas dos triângulos ACD e BCD. Observe que D é um ponto no segmento AB e o segmento CD é paralelo ao eixo das abscissas.

Observamos inicialmente que, os triângulos ABG e ADF são semelhantes pelo caso AA[5]. Começaremos denotando a abscissa $X_D$ do ponto D, na Figura 8, em função das coordenadas de A, B e C.

Pela semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{BG}{DF} = \frac{AG}{AF} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow x_D = x_A + \frac{(x_B - x_A).(y_C - y_A)}{y_B - y_A}$$

A medida $\overline{CD}$ é dada por:

$$\overline{CD} = |x_C - x_D| = \left|x_C - x_A - \frac{(x_B - x_A).(y_C - y_A)}{y_B - y_A}\right| =$$

$$\left|\frac{(x_C - x_A).(y_B - y_A) - (x_B - x_A).(y_C - y_A)}{y_B - y_A}\right|.$$

Finalmente, calculamos a área do triângulo ABC, que denotamos por $S_{ABC}$.

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}.\overline{CD}.\overline{AF} + \frac{1}{2}.\overline{CD}.\overline{FG} = \frac{1}{2}.\overline{CD}.(\overline{AF} + \overline{FG}) = \frac{1}{2}.\overline{CD}.\overline{AG} =$$

$$= \frac{1}{2}.\left|\frac{(x_C - x_A).(y_B - y_A) - (x_B - x_A).(y_C - y_A)}{y_B - y_A}\right|.|y_B - y_A|$$

$$= \frac{1}{2}.|(x_C - x_A).(y_B - y_A) - (x_B - x_A).(y_C - y_A)|$$

$$= \frac{1}{2}.|-(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)|$$

$$= \frac{1}{2}.|(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)|$$

Observamos que $x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C$ corresponde a $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$. Logo, a área do triângulo ABC é dada por $S_{ABC} = \frac{1}{2}.|D|$.

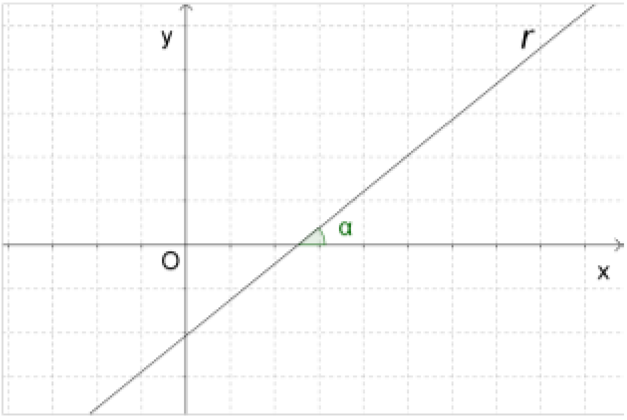
## 2.6 Inclinação e coeficiente angular de uma reta

Seja α a medida do ângulo que a reta $r$ forma com o eixo $x$, conforme a Figura 9. Essa medida α do ângulo é denominada inclinação da reta $r$ e

[5] A semelhança de triângulos, caso AA, indica que dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos correspondentes congruentes.

é considerada do eixo $x$ para a reta $r$ no sentido anti-horário.

**Figura 9**: Inclinação da reta $r$



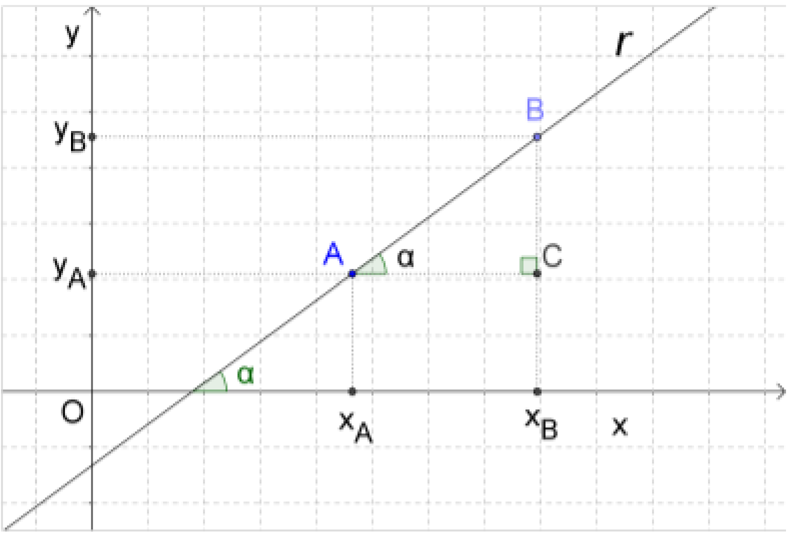

**Fonte**: Autor

O coeficiente angular ou a declividade dessa reta $r$ é o número real $m$ que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α.

$m = tg\alpha$

Seja $r$ a reta determinada por A($x_A, y_A$) e B($x_B, y_B$) e seja C($x_B, y_A$), conforme Figura 10. No triângulo retângulo ABC, temos:

**Figura 10**: Pontos A e B da reta $r$




**Fonte**: Autor

$m = tg\alpha = \frac{d(C,B)}{d(A,C)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Logo, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, ou ainda, $y_B - y_A = m\,(x_B - x_A)$

## 2.7 - Equação da reta

Toda equação da reta $r$ do plano cartesiano é da forma $ax + by + c = 0$ em que $a, b$ e $c$ são números reais, e $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos e $(x, y)$ representa um ponto genérico de $r$.

Esta equação pode ser deduzida como segue:

Podemos usar a condição de alinhamento dos pontos supondo dados dois pontos A($x_A, y_A$) e B($x_B, y_B$) para encontrarmos uma equação da reta que passa por A e B. Um ponto genérico P($x, y$) pertence à reta que passa por A e B se, e somente se, A, B e P estão alinhados, ou seja,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo esse determinante pela regra de Sarrus temos:

$x.y_A.1 + y.1.x_B + 1.x_A.y_B - 1.y_A.x_B - 1.y_B.x - 1.y.x_A = 0$

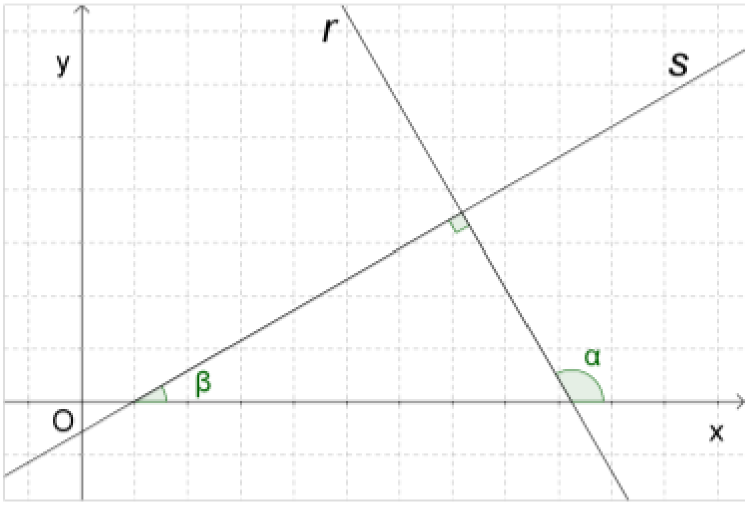
$(y_A - y_B).x + (x_B - x_A).y + (x_A.y_B - x_B.y_A) = 0.$

Denotando $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_A.y_B - x_B.y_A = c$, decorre que todo ponto P $\epsilon$ $r$ verifica a equação $ax + by + c = 0$, denominada equação geral da reta.

## 2.8 Perpendicularidade de duas retas

Consideremos duas retas r e s perpendiculares no plano cartesiano, conforme a Figura 11.

**Figura 11**: $r$ e $s$ perpendiculares




**Fonte**: Autor

Observamos da Figura11 que:

$\alpha = \beta + 90°$

$tg\ \alpha = tg\ (\beta + 90°)$

$tg\ \alpha = \frac{sen(\beta+90°)}{\cos(\beta+90°)}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\beta.cos90°+sen90°.cos\beta}{\cos\beta.cos90°-sen\beta.sen90°}$ .

Lembrando que $cos90° = 0$ e $sen90° = 1$, temos:

$tg\ \alpha = \frac{cos\beta}{-\ sen\beta}$

$tg\ \alpha = -\ \frac{1}{tg\beta}$

$tg\ \alpha.\ tg\beta = -1$

$m_r.m_s = -1.$

Logo, se $r$ e $s$ são perpendiculares então $m_r.m_s = -1$.

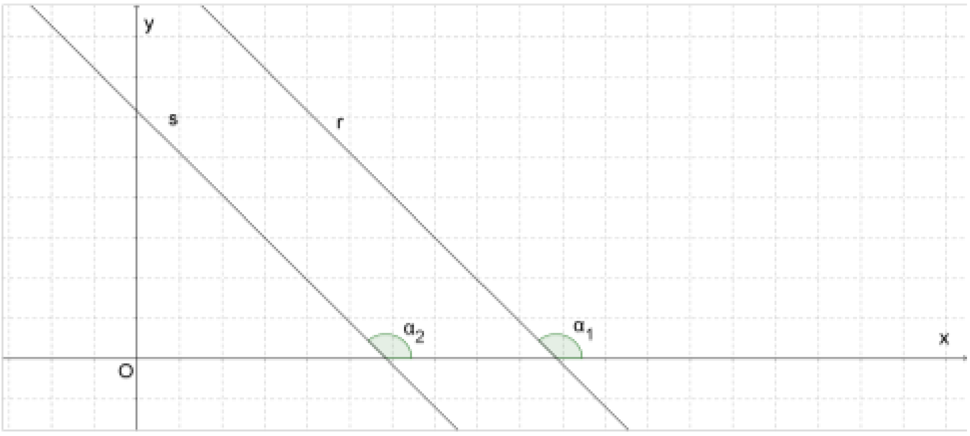
## 2.9 Paralelismo entre duas retas

Considere $\alpha_1$ a inclinação da reta $r$ e $\alpha_2$ a inclinação da reta $s$, temos:

Se $m_1 = m_2 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \text{tg}\ \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ ($\alpha_1\ e\ \alpha_2$ estão entre 0° e 180°)

Se as inclinações são iguais, as retas são paralelas ($r$ // $s$). Observar a Figura 12 que mostra duas retas distintas e não verticais, que são paralelas.

**Figura 12**: Retas Paralelas

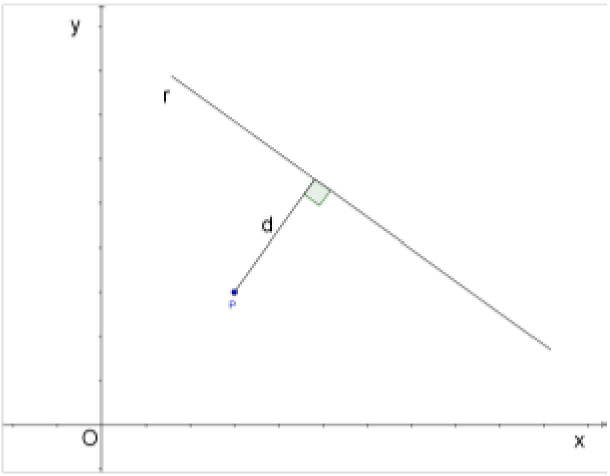



**Fonte**: Autor

2.10 Distância de um ponto a uma reta

Seja uma reta $r$ de equação geral $ax + by + c = 0$, com $a$ e $b$ não simultaneamente nulos. Chama-se distância $d\ (P, r)$ do ponto $P\ (x_P, y_P)$ à reta $r$, a medida do segmento perpendicular a essa reta com origem em $P$, conforme mostra a Figura 13.

**Figura 13**: Distância de Ponto a reta




**Fonte**: Autor

Denominando de reta $s$, a equação da reta perpendicular à reta $r$, que passa pelo ponto $P$, vamos determinar a equação da reta $s$.

Se a reta $s$ é perpendicular à reta $r$ de coeficiente angular $m_r = -\frac{a}{b}$, então $m_s = \frac{b}{a}$.

A equação da reta $s$ é:

$y - y_P = m_s\,(x - x_P)$ e substituindo $m_s$ por $\frac{b}{a}$, temos:

$y - y_P = \frac{b}{a}\,(x - x_P)$, isolando y, obtemos:

$y = y_P + \dfrac{b}{a}\,(x - x_P)$.

Denominando de ponto $Q$, a intersecção da reta $r$: $ax + by + c = 0$ com a reta $s$: $y = y_P + \frac{b}{a}\,(x - x_P)$, podemos determinar a sua coordenada resolvendo o sistema de equação:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ y = y_P + \frac{b}{a}\,(x - x_P) \end{cases}.$$

Substituindo a equação da reta $s$ na reta $r$, temos:

$$ax + b\left[\ y_P + \frac{b}{a}\,(x - x_P)\right] + c = 0$$

$$ax + by_P + \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a}\,x_P + c = 0$$

$$ax + \frac{b^2}{a}x + by_P - \frac{b^2}{a}\,x_P + c = 0$$

$$x\left(a + \frac{b^2}{a}\right) = \frac{b^2}{a}\,x_P - by_P - c$$

$$x = \frac{\frac{b^2}{a}\,x_P - by_P - c}{a + \frac{b^2}{a}}$$

$$x = \frac{\frac{b^2 x_P}{a} - \frac{aby_P}{a} - \frac{ac}{a}}{\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{a}}$$

$$x = \frac{\frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac}{a}}{\frac{a^2 + \ b^2}{a}}$$

$$x = \frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac}{a^2 + \ b^2}$$

$x$ é a abscissa do ponto Q, ou seja, $x_Q$.

Substituindo $x_Q$ na equação $y = y_P + \frac{b}{a}\ (x - \ x_P)$, obteremos a ordenada do ponto $Q$, ou seja, $y_Q$.

$$y = y_P + \frac{b}{a}\ (x - \ x_P)$$

$$y = y_P + \frac{b}{a}\left(\frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac}{a^2 + \ b^2} - \ x_P\right)$$

$$y = y_P + \frac{b}{a}\left(\frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac - \ x_P(a^2 + \ b^2)}{a^2 + \ b^2}\right)$$

$$y = y_P + \frac{b}{a}\left(\frac{-ab y_P - \ ac - a^2 x_P}{a^2 + \ b^2}\right)$$

$$y = y_P + \left(\frac{-b^2 y_P - \ bc - ab x_P}{a^2 + \ b^2}\right)$$

$$y = \frac{(a^2 + \ b^2) y_P - b^2 y_P - \ bc - ab x_P}{a^2 + \ b^2}$$

$$y = \frac{a^2 y_P - ab x_P - \ bc}{a^2 + \ b^2}.$$

Portanto, o ponto Q tem coordenada $\left(\frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 y_P - ab x_P - bc}{a^2 + b^2}\right)$.

Determinando a distância entre os pontos $P$ e $Q$, estaremos determinando a distância entre o ponto $P$ e a reta $r$, ou seja, $d_{PQ} = \ d\ (P, r)$:

$${d_{PQ}}^2 = \ (x_P - \ x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$$

$${d_{PQ}}^2 = \left(x_P - \frac{b^2 x_P - ab y_P - \ ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y_P - \frac{a^2 y_P - ab x_P - bc}{a^2 + b^2}\right)^2$$

$${d_{PQ}}^2 = \left(\frac{(a^2 + \ b^2) x_P - b^2 x_P + ab y_P + \ ac}{a^2 + \ b^2}\right)^2 + \left(\frac{(a^2 + \ b^2) y_P - a^2 y_P + ab x_P + \ bc}{a^2 + \ b^2}\right)^2$$

$${d_{PQ}}^2 = \left(\frac{a^2 x_P + \ ab y_P + \ ac}{a^2 + \ b^2}\right)^2 + \left(\frac{b^2 y_P + ab x_P + \ bc}{a^2 + \ b^2}\right)^2$$

$$d_{PQ}{}^2 = \left(\frac{a(ax_P + by_P + c}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(by_P + ax_P + c}{a^2 + b^2}\right)^2$$

$$d_{PQ}{}^2 = \frac{a^2(ax_P + by_P + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2(by_P + ax_P + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$d_{PQ}{}^2 = \frac{a^2(ax_P + by_P + c)^2 + b^2(by_P + ax_P + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$d_{PQ}{}^2 = \frac{(ax_P + by_P + c)^2(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$d_{PQ}{}^2 = \frac{(ax_P + by_P + c)^2}{a^2 + b^2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{\frac{(ax_P + by_P + c)^2}{a^2 + b^2}}$$

$$d_{PQ} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

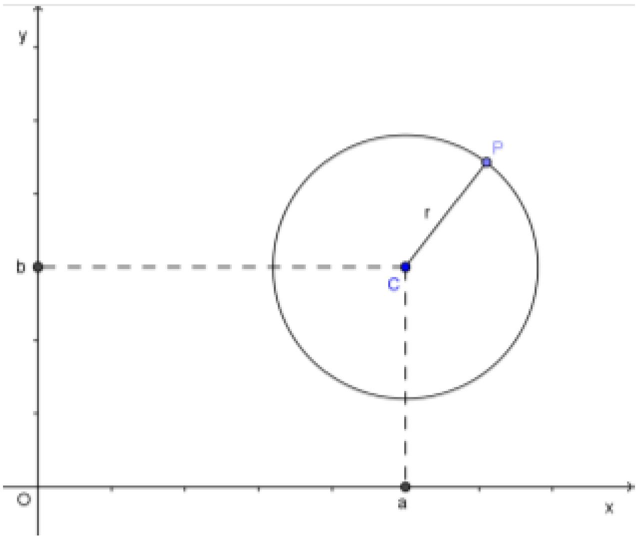
Logo, a distância $d$ entre o ponto $P$ $(x_P, y_P)$ e a reta $r$ é calculada pela fórmula $d_{P,r} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

## 2.11 Circunferência

Dados um ponto C, pertencente a um plano $\alpha$, e uma distância r não nula, chama-se circunferência o conjunto dos pontos de $\alpha$ que estão à distância r do ponto C.

Consideremos a circunferência $\delta$ de centro C (a,b) e raio r. Um ponto P $(x, y)$ pertence a $\delta$ se, e somente se, a distância de P a C é igual ao raio r, conforme a Figura 14.

**Figura 14**: Circunferência




**Fonte**: Autor

Chama-se equação da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos P $(x, y)$ pertencentes à curva. É imediato que um ponto genérico P∈ $\delta$ verifica a condição $\overline{PC}$ = r. Portanto , temos:

$d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ e $d_{PC} =$ r. Assim,

r = $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ .

E elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos a equação reduzida da circunferência:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Considerando os conceitos da Geometria Analítica expostos, acreditamos que uma ferramenta que possa contribuir com o ensino desse conteúdo é o *software* GeoGebra.

## 2.12 GeoGebra

Abrimos essa seção para falarmos um pouco a respeito do *software* GeoGebra que, em algumas atividades, propostas no capítulo três, foi muito utilizado, pois com o auxílio desse *software*, trouxemos ilustrações e dinamismo para sua resolução que, às vezes, são elaboradas.

O *software* GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter para uma Matemática Dinâmica que permite o desenvolvimento do ensino e aprendizagem no campo da Matemática em seus diversos níveis de ensino. Esse *software* permite a utilização da álgebra, geometria, gráficos, tabelas, probabilidades, estatísticas e cálculos simbólicos num único ambiente. De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2014), a utilização do GeoGebra pode revelar-se significativamente para a resolução de atividades matemáticas que envolvam pensamentos mais complexos.

O *software* GeoGebra possui milhares de usuários, tornando-se um líder em *software* de Matemática Dinâmica e, existe também, o Instituto Geogebra, na Universidade Federal Fluminense, no Rio de Janeiro, que auxilia a todos os interessados ofertando oficinas tanto presenciais quanto *online*.

Esse *software* pode ser instalado em: *Tablets*, *Smartphones*, computadores com *Windows*, *Linux* ou *Mac OS* e as suas ilustrações podem ser inseridas no *Word*, no *Open Office* ou no *LateX*. O download desse software é gratuito e encontra-se no site oficial www.geogebra.org.

# CAPÍTULO 3 – ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo apresentamos algumas atividades que são resolvidas sempre com a utilização da Geometria Analítica, pois este é o foco do trabalho. Além disso, são apresentadas outras formas de resoluções utilizando procedimentos algébricos, Geometria Euclidiana Plana ou construções geométricas, pois também queremos destacar que os problemas, em especial os problemas geométricos, podem ter soluções diversas e que diferentes teorias ou recursos podem ser utilizados. Por um determinado caminho, a solução pode ser simples, elegante e rápida e o contrário também pode ocorrer, ou seja, podemos enveredar por caminhos longos, complexos e até bem tortuosos. No entanto, afirmar que esta ou aquela solução é mais simples ou complexa é um fato relativo. Tudo depende dos conhecimentos prévios de quem vai resolver o problema e isto permitirá abordagens distintas.

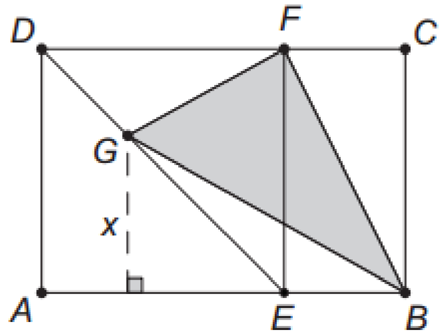
Em Lima (2006, p.53) o autor destaca o fato de um problema apresentar soluções distintas salientando que "não cabe aqui qual é a "melhor" solução. Todas são boas [...] cada aluno considerou que a melhor era a sua."

Neste trabalho apresentamos soluções para os problemas propostos utilizando diferentes tratamentos, com a certeza que existem inúmeras outras soluções não exploradas aqui, fato que comprovamos com a atividade que foi desenvolvida no capítulo quatro. A beleza da Matemática também reside nesta realidade: revelar a criatividade e a riqueza do pensamento humano.

### 3.1 – A área do triângulo

Na figura abaixo, AEFD é um quadrado e o retângulo ABCD tem lados AB = 3 cm e AD = 2 cm. Seja G um ponto qualquer do segmento DE e $x$ a distância de G ao segmento AB. Calcule a área do triângulo BFG quando G é o ponto médio do segmento DE.

**Figura 15**: Triângulo BFG



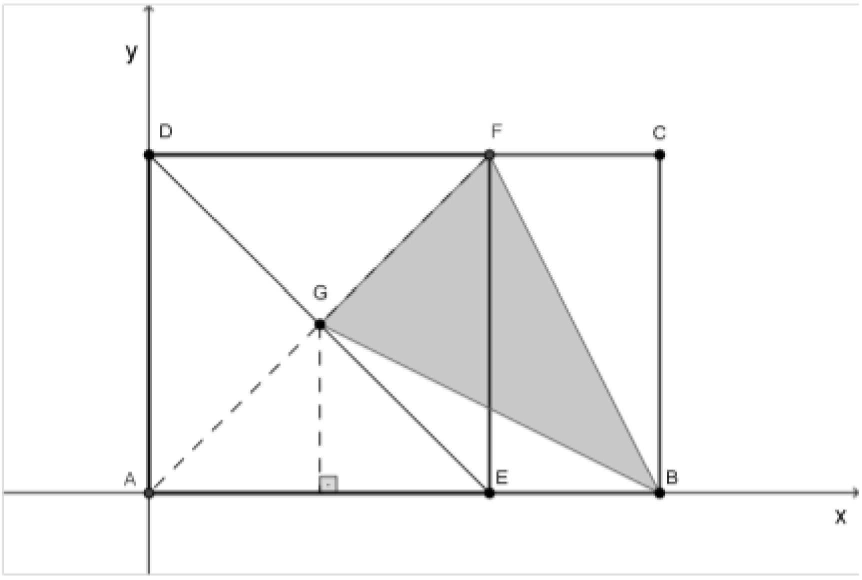

**Fonte**: OBMEP NA ESCOLA (2014, p.3, adaptado)

**Solução 1: Resolvendo por meio da Geometria Analítica**

Uma forma de resolvermos esta atividade, utilizando a Geometria Analítica, é inserir convenientemente um plano cartesiano com origem no ponto A, conforme sugestão de Lima et al:

> Se temos um problema geométrico e queremos resolvê-lo usando Geometria Analítica, temos a liberdade de introduzir no plano o sistema de coordenadas que acharmos mais convenientes para o nosso problema (LIMA, CARVALHO, WAGNER e MORGADO, 2006, p.21).

**Figura 16**: Triângulo BFG no Plano Cartesiano




**Fonte**: Autor

Como o ponto A está na origem, decorre que as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E e F são (0,0), (3,0), (3,2), (0,2), (2,0) e (2,2) respectivamente. Como o ponto G se encontra no ponto médio do segmento DE, suas coordenadas são dadas por

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$ e $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$

Logo, as coordenadas de G são (1,1).

A área do triângulo BFG, denotada por (BFG) é dada por:

(BFG) = $\frac{1}{2}. |\det S|$, onde S = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando a Regra de Sarrus, temos:

S = $|3.2.1 + 0.1.1 + 1.2.1 - (1.2.1 + 1.1.3 + 1.0.2)|$

S = $|6 + 0 + 2 - (2 + 3 + 0)|$

S = $|8 - 5|$

S = $|3|$

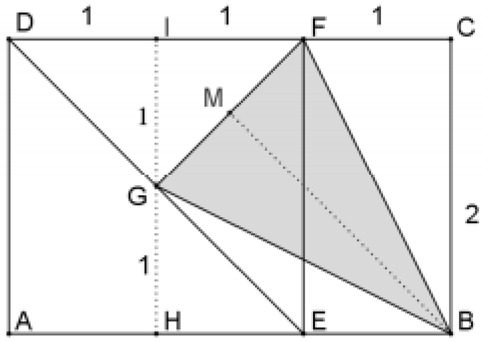
S = 3.

Portanto (BFG) = $\frac{1}{2}$. 3, ou seja,a área do triângulo BFG é $\frac{3}{2}$ cm$^2$.

Podemos explorar essa atividade por meio da Geometria Euclidiana Plana.

**Solução 2: Aplicando o Teorema de Pitágoras**

**Figura 17**: Triângulo BFG e o Teorema de Pitágoras




**Fonte**: SOLUÇÕES OBMEP NA ESCOLA (2014, p.2)

Na figura acima, os pontos H e I são os pés das perpendiculares traçadas por G aos lados AB e CD. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos BCF, BHG e FIG nos mostra que $\overline{BF}$ = $\overline{BG}$ = $\sqrt{5}\,cm$ e $\overline{FG}$ = $\sqrt{2}\,cm$. Denotando por M o ponto médio de FG, segue que BM é a altura do triângulo BFG relativa ao lado FG. Outra aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo BMF nos mostra que $\overline{BM}$ = $\frac{3}{\sqrt{2}}\,cm$. Logo,

(BFG) = $\frac{1}{2}.\overline{FG}.\overline{BM}$ = $\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\frac{3}{\sqrt{2}}$ = $\frac{3}{2}\,cm^2$, onde (BFG) é a área do triângulo de vértices B, F e G.

**Solução 3: Decompondo as figuras**

Temos (BFG)[6] = (BCDE) – (BFC) – (FGD) – (GEB). Por outro lado temos, (BCDE) = $\frac{3+1}{2}.2 = 4$, pois a figura BCDE é um trapézio (alternativamente, (BCDE) = (ABCD) – (ADE) = $3.2 - \frac{2.2}{2} = 4$), (BFC) = $\frac{2.1}{2} = 1$, (FGD) = $\frac{2.1}{2} = 1$ e (GEB) = $\frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$ ; segue que (BFG) = $4 - 1 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,cm^2$. Aqui também poderia ser feito como segue, usando a mesma ideia de decomposição de figuras:

(BFG) = (HBCI) – (BGH) – (BCF) – (FIG).

---

[6] A notação (BFG) representa a área do polígono de vértices B, F e G, assim como (BCDE) representa a área do polígono de vértices B, C, D e E, e assim sucessivamente.

**Solução 4: Aplicando a fórmula de Herão**

É possível solucionar usando a fórmula de Herão[7] $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $S$ representa a área do triângulo, $p$ é o semiperímetro, $a, b$ $e$ $c$ são as medidas dos lados.

As medidas dos lados $a, b$ $e$ $c$ podem ser calculadas aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BCF, FIG e GHB que resultam em $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. As medidas dos lados $a, b$ $e$ $c$ também podem ser calculadas utilizando a distância entre dois pontos. O semiperímetro é dado por $p = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $p = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$. Aplicando a fórmula de Herão, temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}\right)}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$S = \sqrt{\frac{18}{4} . \frac{2}{4}}$$

$$S = \sqrt{\frac{36}{16}}$$

$$S = \frac{6}{4}$$

$$S = \frac{3}{2} cm^2.$$

Primeiramente apresentamos uma solução utilizando a Geometria Analítica, em seguida, três soluções utilizando a Geometria Euclidiana Plana, com intuito de abordar conhecimentos matemáticos como o teorema de Pitágoras, áreas de figuras planas e fórmula de Herão.

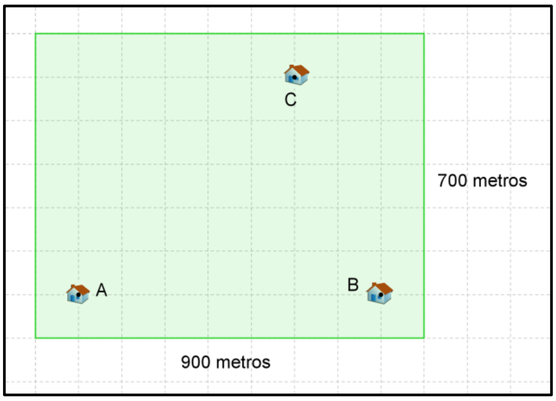
---

[7] Para a demonstração da fórmula de Herão, sugerimos Fundamentos de Matemática Elementar, 9: geometria plana , 1993, p.329.

### 3.2 – O problema do poço

João está com um problema em sua comunidade. Um poço será construído e as três famílias envolvidas desejam ficar próximas a ele. Utilizando o mapa da comunidade João observou que o terreno é representado por um retângulo cujas dimensões são 700 m x 900 m, conforme Figura 18, no qual se pode observar a localização das três casas. Determine onde deverá ficar o poço de modo que a distância entre o poço e qualquer uma das casas seja a mesma, e qual será essa distância do poço às casas.

**Figura 18**: Casas A, B e C

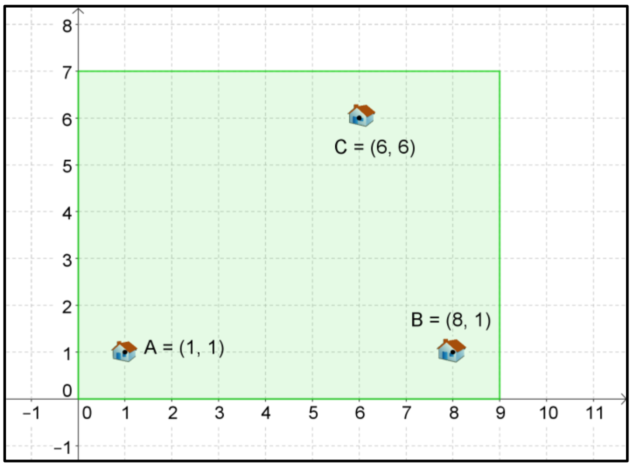



**Fonte**: PROBLEMA ADAPTADO DE ALVES (2014, p.3)

**Solução 1: Resolvendo por meio da distância entre dois pontos e sistemas de equações**

Uma possível resolução é sobrepor o mapa no primeiro quadrante, de modo que a coordenada do ponto A é (1,1), do ponto B é (8,1) e do ponto C é (6,6), então teremos a representação conforme mostra a Figura 19:

**Figura 19**: Casas A, B e C no plano cartesiano




**Fonte**: Autor

Nessa representação, podemos convencionar que cada unidade representa cem metros e, utilizando essa escala, podemos facilitar os cálculos. Essa informação será necessária na interpretação da resolução do problema. O objetivo é encontrar as coordenadas de um ponto P = $(x, y)$, de modo que, d(A,P) seja igual a d(C,P) e igual a d(B,P).

Uma das possíveis resoluções é a seguinte:

Como não conhecemos as coordenadas do ponto P = $(x, y)$, vamos encontrar as três distâncias: d(A,P), d(C,P) e d(B,P). Temos:

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A,P}) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2},$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{C,P}) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2},$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{B,P}) = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}.$$

O problema impõe que d(A,P) = d(C,P) = d(B,P). Sendo assim, podemos escrever três equações envolvendo duas incógnitas. Sejam:

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A,P}) = \mathrm{d}(\mathrm{C,P}) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2}\,, \quad (4)$$

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A,P}) = \mathrm{d}(\mathrm{B,P}) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}\,, \quad (5)$$

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{C,P}) = \mathrm{d}(\mathrm{B,P}) \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}. \quad (6)$$

Agora basta resolver o sistema. Começando por (4):

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + (y-6)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36$$

$-2x - 2y + 2 = -12x - 12y + 72$

$10x + 10y = 70$

$x + y = 7$

$$y = 7 - x. \tag{7}$$

Chamamos a atenção para a equação da reta que foi encontrada, que é equidistante aos pontos A e C.

Agora considerando (5):

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-8)^2 + (y-1)^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 16x + 64 + y^2 - 2y + 1$

$-2x - 2y + 2 = -16x - 2y + 65$

$14x = 63$

$x = 4{,}5.$

Como já descobrimos o valor de $x$, então podemos substituir em (4) para encontrar o valor de $y$:

$y = 7 - x$

$y = 7 - 4{,}5$

$y = 2{,}5.$

Como $x$ = 4,5 e $y$ = 2,5 e observe que não utilizamos a equação (6). Podemos substituir os valores de $x$ e $y$ em (6) para verificar que essas soluções são coerentes. Mas antes podemos simplificar a equação (6):

$\sqrt{(x-6)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-1)^2}$

$\sqrt{(4{,}5-6)^2 + (2{,}5-6)^2} = \sqrt{(4{,}5-8)^2 + (2{,}5-1)^2}$

$\sqrt{(-1{,}5)^2 + (-3{,}5)^2} = \sqrt{(-3{,}5)^2 + (1{,}5)^2}$

$\sqrt{2{,}25 + 12{,}25} = \sqrt{12{,}25 + 2{,}25}$

$\sqrt{14{,}5} = \sqrt{14{,}5}.$

A equação foi satisfeita pelos valores de $x$ e $y$ encontrados. Logo o ponto P tem coordenada $x$ = 4,5 e $y$ = 2,5.

Pelas condições impostas, a distância entre P e qualquer um dos três pontos: A, B ou C, será a mesma. Logo, podemos encontrar a distância entre A e P para descobrir essa medida:

$d(A,P) = \sqrt{(4{,}5-1)^2 + (2{,}5-1)^2}$

$d(A,P) = \sqrt{(3,5)^2 + (1,5)^2}$

$d(A,P) = \sqrt{12,25 + 2,25}$

$d(A,P) = \sqrt{14,5}$

$d(A,P) \cong 3,8079.$

E como cada unidade no plano cartesiano representa 100 metros, multiplicamos essa distância encontrada por 100, obtendo a distância entre o poço e qualquer uma das casas que é de aproximadamente 380,79 metros.

**Solução 2: Resolvendo por cálculos de ponto médio de um segmento, equações de retas, sistemas lineares e distância entre dois pontos**

Calculando o ponto médio M do segmento AC, lembrando que as coordenadas dos extremos são A (1,1) e C (6,6), obtemos a coordenada M $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, e utilizando a fórmula da inclinação e coeficiente angular de uma reta, exposta na seção 2.6, $m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, temos:

$$m = \frac{6-1}{6-1}$$

$m = 1.$

Denotando por $r$ a reta que passa pelos pontos A e C e por $s$ a reta que passa pelos pontos equidistantes de A e C denominada reta mediatriz. A reta $s$ é perpendicular a reta $r$ e usando a relação de perpendicularidade entre duas retas, da seção 2.8, $m_r . m_s = -1$, temos:

$m_r . m_s = -1$

$1. m_s = -1$

$m_s = -1.$

Usando a fórmula $m = \frac{y - y_M}{x - x_M}$, onde $m = -1$ e a coordenada de M $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, obtemos a equação:

$$m = \frac{y - y_M}{x - x_M}$$

$$-1 = \frac{y - \frac{7}{2}}{x - \frac{7}{2}}$$

$-x + \frac{7}{2} = y - \frac{7}{2}$

$\frac{7}{2} + \frac{7}{2} - x = y$

$7 - x = y.$

Portanto, encontramos novamente a equação (7) por meio das propriedades das retas.

Refazendo os mesmos procedimentos descritos acima para calcular o ponto médio N do segmento de BC, de extremos B (8,1) e C (6,6), obtemos N $\left(7, \frac{7}{2}\right)$. O coeficiente angular da reta BC é $-\frac{5}{2}$. A equação da reta mediatriz, que é perpendicular a reta BC, que passa pelo ponto N é $10y - 4x = 7$. Calculando a intersecção das retas mediatrizes de equações $7 - x = y$ e $10y - 4x = 7$, obtemos a coordenada do ponto P, onde $x = 4{,}5$ e $y = 2{,}5$. Pelas condições impostas pelo problema, basta calcular a distância entre P a qualquer um dos três pontos: A, B ou C, que será a mesma. Logo, podemos calcular a distância entre A e P para descobrir essa medida:

$d(A,P) = \sqrt{(4{,}5 - 1)^2 + (2{,}5 - 1)^2}$

$d(A,P) = \sqrt{(3{,}5)^2 + (1{,}5)^2}$

$d(A,P) = \sqrt{12{,}25 + 2{,}25}$

$d(A,P) = \sqrt{14{,}5}$

$d(A,P) \cong 3{,}8079.$

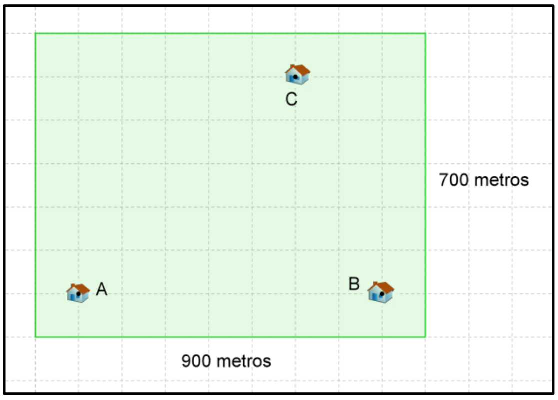
E como cada unidade no plano cartesiano representa 100 metros, multiplicamos essa distância encontrada por 100, obtendo a distância entre o poço e qualquer uma das casas que é de aproximadamente 380,79 metros. Observe o papel desempenhado pela Geometria Analítica no desenvolvimento das soluções 1 e 2.

**Solução 3: Resolvendo por meio do *software* GeoGebra**

Podemos encontrar a solução para essa atividade apenas geometricamente, utilizando o mapa apresentado no enunciado da atividade. Se relacionarmos os pontos que representam as coordenadas de cada uma das casas como vértices de um triângulo ABC, podemos encontrar um ponto que seja equidistante dos três vértices do triângulo ABC.

Para tanto, é possível representar esses pontos em uma malha quadriculada, e tentar determinar a coordenada do ponto P com régua e compasso ou utilizar um software de Geometria Dinâmica como o GeoGebra para encontrar esse ponto P, que pode ser potencial para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos. Mas como podemos estabelecer o ponto P? Neste caso, vamos utilizar o *software* GeoGebra.

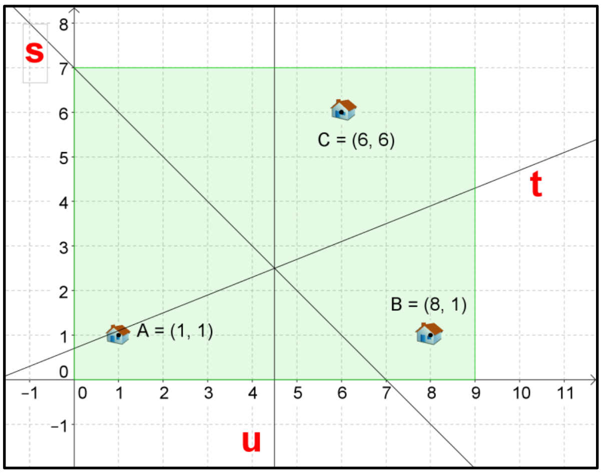
**Figura 20**: Casas A, B e C




**Fonte**: ALVES (p.3, adaptado)

Primeiro, lembremos que o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos dados é chamado de mediatriz. Sendo assim, podemos traçar as mediatrizes dos pontos A e B, A e C, e por fim de B e C. Temos a representação na Figura 21.

**Figura 21**: Mediatrizes

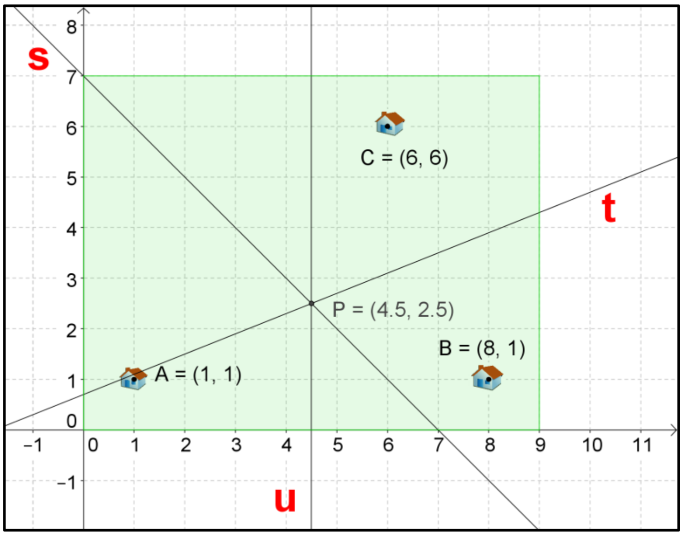



**Fonte**: Autor

Sejam: $s$ a mediatriz de A e C, $t$ a mediatriz de B e C, e $u$ a mediatriz de A e B.

Como a mediatriz é uma reta e, além disso, $s$ equidista de A e C, $t$ equidista de B e C, e $u$ equidista de A e B, podemos observar que existe um ponto de interseção entre as três retas. Vamos marcar esse ponto denotando de ponto P, conforme Figura 22:

**Figura 22**: Mediatrizes e o ponto P




**Fonte**: Autor

As coordenadas desse ponto P são $x$ = 4,5 e $y$ = 2,5, ou seja, a mesmas coordenadas encontrada pela solução apresentada anteriormente.

Para encontrar a distância entre o ponto P e qualquer uma das casas, basta utilizar a fórmula da distância entre dois pontos e encontraremos a distância entre o poço e uma das casas, que é igual à distância entre o poço e qualquer uma das outras casas. Procedendo da mesma maneira anteriormente, calculamos a distância encontrada que é $d(C,P) \cong 3{,}8079$.

E como cada unidade no plano cartesiano representa 100 metros, multiplicamos essa distância encontrada por 100, obtendo que a distância entre o poço e qualquer uma das casas é igual a aproximadamente 380,79 metros.

**Solução 4: Resolvendo por meio da equação da circunferência**

Podemos ainda, nesta atividade, explorar a equação reduzida da circunferência, ou seja, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Conhecendo a equação reduzida da circunferência, vamos relacioná-la a atividade resolvida, no qual a distância entre qualquer uma das casas e o poço era igual a $\sqrt{14,5}$ .(100) e o poço (ponto P) tinha coordenadas $x$ = 4,5 e $y$ = 2,5. Observemos a relação entre a atividade e a equação da circunferência e note que o ponto P representa o centro da circunferência, e $\sqrt{14,5}$ .(100) é a medida do raio. Sendo assim, escreveremos a equação da circunferência cujo centro está em P e tem raio igual a $\sqrt{14,5}$ . Temos:

$(x-4,5)^2+(y-2,5)^2=14,5$.

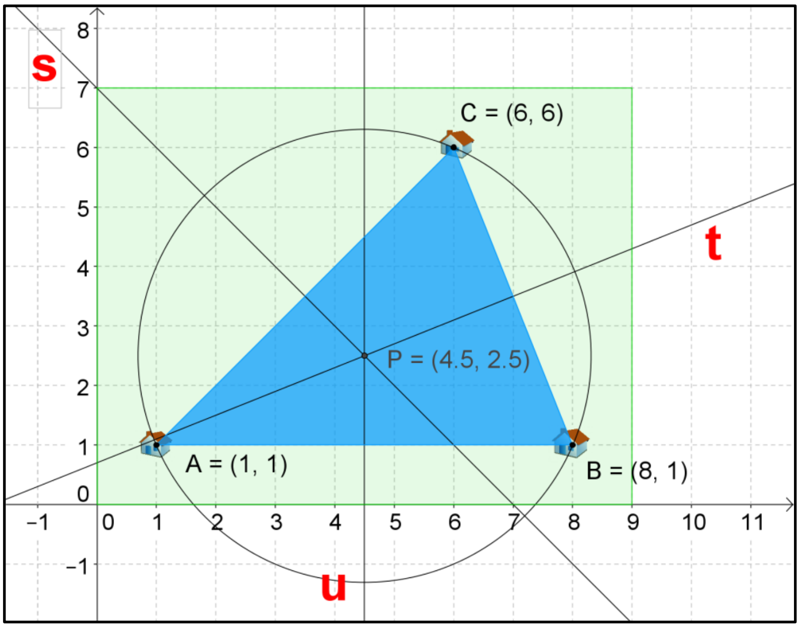
Ao obtermos a equação da circunferência, sabemos que todos os pontos que satisfazem essa equação são pontos dessa circunferência. Sugerimos aqui verificar que as coordenadas que representam as três casas satisfazem essa equação.

Ao analisarmos a resolução geométrica apresentada, digitamos no *software* GeoGebra a equação da circunferência encontrada, dada por:

$(x-4.5)\text{^}2 + (y-2.5)\text{^}2 = 14,5$.

Observamos que no GeoGebra, assim como no Excel, ao introduzir uma equação no campo de entrada, utilizamos alguns símbolos para representar as operações básicas (o acento circunflexo ^ representa exponenciação, a vírgula de um número decimal representamos por um ponto, entre outros). Em seguida será construído um triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C, conforme a Figura 23. O ponto de encontro das mediatrizes do triângulo de vértices A, B e C é denominado circuncentro, que é equidistante desses vértices, sendo assim, o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

**Figura 23**: Casas A, B e C na circunferência




**Fonte**: Autor

Observe que ainda nesse problema podemos levantar alguns questionamentos tais como: Se os membros da comunidade pretendessem construir uma quarta casa de forma que o poço seja equidistante às quatro casas, onde essa casa pode ser construída? Se eles optassem por construir a quarta casa no ponto R=(3,2), essa casa estará mais próxima ou mais distante do poço, em relação às outras casas? E se construírem a quarta casa no ponto T = (1,5)?

Com esses questionamentos, podemos trabalhar outros conceitos da Geometria Analítica, tais como as posições relativas entre ponto e circunferência, explorando quando um ponto pertence à circunferência, é interior ou exterior a ela, ou seja, quando a distância entre esse ponto e o centro da circunferência é igual, menor ou maior do que o raio, respectivamente.

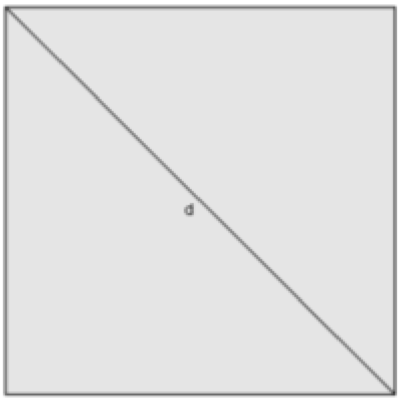
Finalizamos observando que esta atividade permitiu explorar abordagens distintas do mesmo problema, possibilitando o uso de conceitos matemáticos do Ensino Médio.

### 3.3 A área do quadrado em função da diagonal

A área $S$ do quadrado pode ser calculada em função da diagonal $d$ pela expressão:

a) $d^2\sqrt{2}$ b) $2d^2$ c) $2d\sqrt{2}$ d) $4d^2$ e) $\frac{d^2}{2}$

**Figura 24**: Quadrado

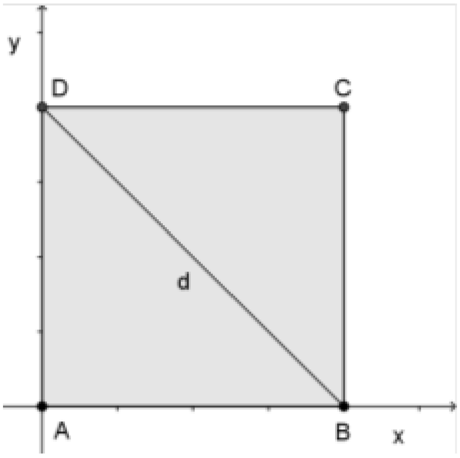



**Fonte:** Editora Positivo (2007, p.14)

**Solução 1: Resolução por meio da Geometria Analítica**

Uma forma de resolver esta atividade é inserindo um plano cartesiano com origem no vértice inferior esquerdo do quadrado, conforme sugere a Figura 25.

**Figura 25**: Quadrado no plano cartesiano




**Fonte**: Autor

Como ABCD é um quadrado e sendo $x$ a medida dos seus lados, podemos denotar as coordenadas dos seus vértices por: A (0,0), B (0,$x$) , D ($x$,0) e C ($x, x$). Note que a distância entre os pontos B ($x_B, y_B$) e D ($x_D, y_D$) é a medida da diagonal $d$, então de acordo com a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$D_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$

$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (0 - x)^2}$

$d = \sqrt{(x)^2 + (-x)^2}$

$d = \sqrt{2x^2}$

$d^2 = 2x^2$.

A área $S$ do quadrado de lado $x$ é $x^2$.

Como $d^2 = 2x^2$ segue que $S = \frac{d^2}{2}$.

**Solução 2: Resolução por meio da Geometria Euclidiana Plana**

A área $S$ do quadrado em função da medida de seu lado $x$ é dada por: $S = x^2$ e utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cujos catetos são os lados do quadrado de medida $x$ e de hipotenusa dada pela diagonal de medida $d$, temos: $d^2 = x^2 + x^2$.

Substituindo a expressão da área do quadrado no Teorema de Pitágoras, encontramos:

$d^2 = S + S$

$d^2 = 2S$

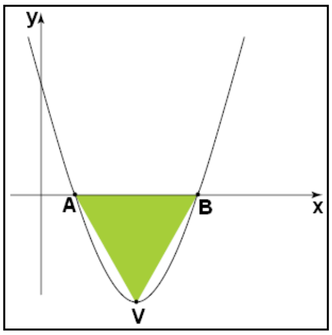
$S = \frac{d^2}{2}$ (alternativa e).

Esta atividade é um exemplo de que inserir um plano cartesiano e fazer uso dos conceitos de Geometria Analítica nem sempre é a resolução mais curta.

### 3.4 A parábola e o triângulo equilátero

Observe a parábola de vértice V, gráfico da função quadrática definida por $y$ = $ax^2$ + $bx$ + $c$, que corta o eixo das abscissas nos pontos A e B. Calcule o valor numérico de $\Delta = b^2 - 4ac$, sabendo que o triângulo ABV é equilátero.

**Figura 26**: Parábola




**Fonte**: UERJ, 2009

**Solução 1: Resolvendo por meio da Geometria Analítica e conceitos de funções quadráticas**

Se o triângulo é equilátero, então a distância entre os pontos A, B e V, tomados dois a dois, são iguais, ou seja, $D_{AB} = D_{BV} = D_{AV}$ e considerando as coordenadas dos pontos A $\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$, B $\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e V $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, temos:

$$D_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$D_{AB}{}^2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 + (0-0)^2$$

$$D_{AB}{}^2 = \frac{\Delta}{a^2}.$$

Por outro lado, $D_{BV} = \sqrt{(x_V - x_B)^2 + (y_V - y_B)^2}$

$$D_{BV}{}^2 = \left[\frac{-b}{2a} - \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)^2$$

$$D_{BV}{}^2 = \frac{\Delta^2 + 4\Delta}{16a^2}.$$

Se $D_{AB} = D_{BV}$ então $D_{AB}{}^2 = D_{BV}{}^2$. Temos que:

$$\frac{\Delta}{a^2} = \frac{\Delta^2 + 4\Delta}{16a^2}.$$

Como $a \neq 0$, pois é uma equação do segundo grau, temos:

$\Delta 16a^2 = a^2\Delta^2 + 4\Delta a^2$ (dividindo a equação por $a^2$)

$16\Delta = \Delta^2 + 4\Delta$

$\Delta^2 - 12\Delta = 0$

$\Delta = 0$ (não convém, pois pelo gráfico notamos que são raízes distintas)

$\Delta = 12.$

Logo, o valor numérico de $\Delta$ é 12.

**Solução 2: Resolvendo por meio da Geometria Euclidiana Plana e alguns conceitos de funções quadráticas**

Observando que as raízes da equação do segundo grau são dadas por $A = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $B = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, notemos que a medida do lado $l$ do triângulo é dado por:

$$l = B - A = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad (8)$$

A ordenada do vértice $(V)$ de uma parábola é dada por:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \quad (9)$$

e a medida da altura $h$ de um triângulo equilátero, em função do seu lado $l$, é dada por:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}. \quad (10)$$

Observemos que a altura do triângulo representa a ordenada do vértice da parábola. Substituindo as equações $(8)$ e $(9)$ em $(10)$, temos:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2a}. \quad (11)$$

Elevando ambos os membros da equação $(11)$ ao quadrado, temos:

$$\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\frac{\Delta^2}{16a^2} = \frac{3\Delta}{4a^2}. \quad (12)$$

Multiplicando a equação $(12)$ por $16a^2$, observando que $a$ é diferente de zero, pois é condição para que exista uma equação do segundo grau, temos:

$$\Delta^2 = 12\Delta. \quad (13)$$

Dividindo a equação $(13)$ por $\Delta$, lembrando que $\Delta$ é diferente de zero, pois nota-se pelo gráfico da equação que são duas raízes distintas, temos:

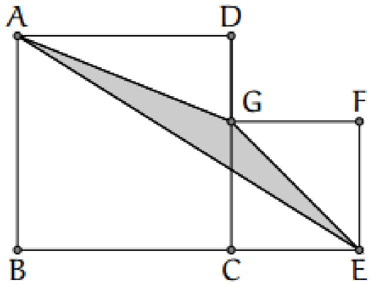
$$\Delta = 12.$$

Notamos que se faz necessário conhecer os zeros de uma função quadrática em sua forma canônica para iniciar a resolução.

### 3.5 O triângulo de área fixa

Na figura, ABCD e CEFG são quadrados e o lado do quadrado CEFG mede 12 cm. Qual a área do triângulo AEG?

**Figura 27**: Quadrados ABCD e CEFG

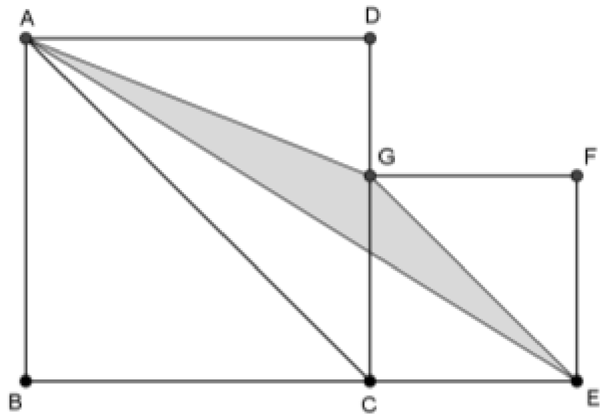



**Fonte**: Banco de questões da OBMEP, 2011, p.34

### Solução 1: Solucionando por meio da Geometria Analítica

Notemos que o segmento GE é a diagonal do quadrado CEFG. Analogamente traçaremos a diagonal AC do quadrado ABCD, conforme a Figura 28, para análise das diagonais.

**Figura 28**: Diagonal AC



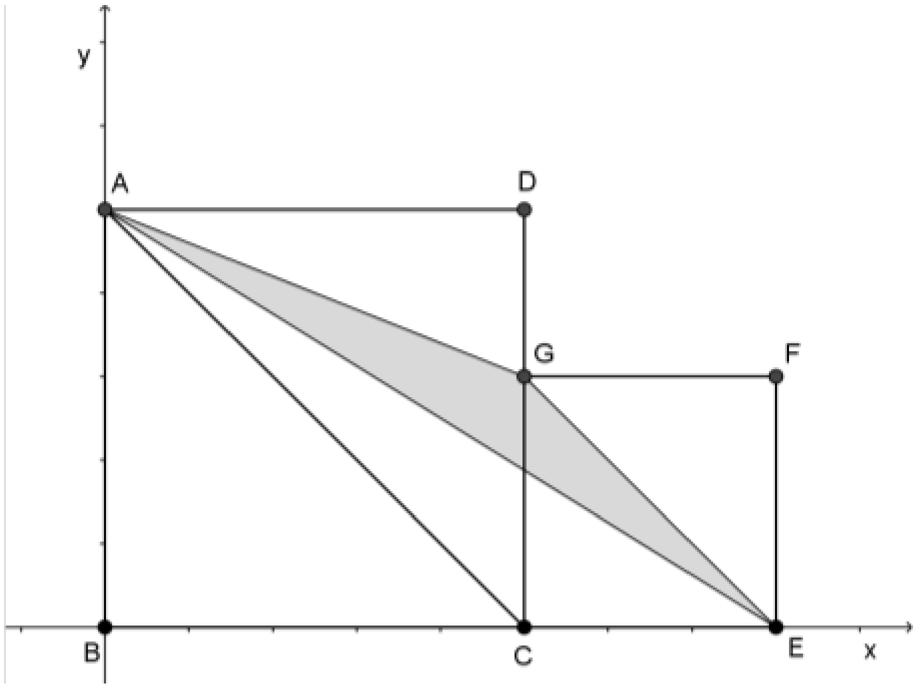

**Fonte**: Autor

As diagonais AC e GE formam um ângulo de 135º (sentido anti-horário) com o eixo $x$. Se as diagonais possuem o mesmo coeficiente angular, então elas são paralelas.

Sendo $\overline{EG}$, a medida da base do triângulo AEG, podemos notar que a altura do triângulo é a distância entre as diagonais.

Sobrepondo o plano cartesiano com origem no ponto C, conforme mostra a Figura 29, obtemos as coordenadas dos pontos E, G e C que são, respectivamente, (12,0), (0,12) e (0,0).

**Figura 29**: Quadrados no plano cartesiano




**Fonte**: Autor

Para o cálculo da base EG do triângulo, basta calcular a distância entre os pontos E e G.

$D_{EG} = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2}$

$d = \sqrt{(0-12)^2 + (12-0)^2}$

$d = \sqrt{144 + 144}$

$d = 12\sqrt{2}$.

Podemos calcular a equação da reta EG, pois conhecemos um de seus pontos e o seu coeficiente angular 135º.

$y - y_o = m(x - x_o)$

$y - 0 = tg135°(x - 12)$

$y = -1(x - 12)$

$y = -x + 12$.

Logo $x + y - 12 = 0$ é a equação geral da reta determinada por E e G.

A altura do triângulo é a distância do ponto C a reta EG que pode ser calculada pela fórmula $d_{P,r} = \left|\frac{ax_o + by_o + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$. Assim, sabendo que a equação da reta determinada por E e G é $x + y - 12 = 0$, temos que: $a = 1,\ b = 1\ e\ c = -12$ e as coordenadas do ponto dado é C(0,0), ou seja,$x_o = 0$ e $y_o = 0$.

$$d_{P,r} = \left|\frac{ax_o + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

$$d_{P,r} = \left|\frac{1.0 + 1.0 + (-12)}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$$

$$d_{P,r} = \left|\frac{-12}{\sqrt{2}}\right|.$$

Tomando o módulo e fazendo a racionalização, temos que a altura do altura do triângulo é $6\sqrt{2}$.

Finalmente, a área do triângulo é dada por $\frac{b.h}{2} = \frac{12\sqrt{2}.6\sqrt{2}}{2} = 72\ cm^2$.

**Solução 2: Solucionando por meio da Geometria Euclidiana Plana**

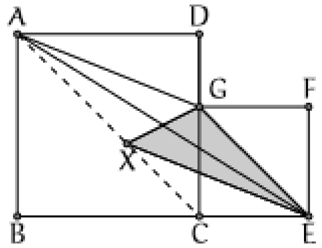
A solução apresentada na sequência é a mesma solução descrita no Banco de Questões da OBMEP, 2011, p. 110.

Traçamos a diagonal AC do quadrado ABCD. Como os segmentos AC e GE formam um ângulo de 45° em relação à reta que contém o segmento BE, concluímos que AC e GE são paralelas.

Seja X um ponto arbitrário sobre AC, conforme mostra a Figura 30. Os triângulos AGE e XGE possuem a mesma área, pois ambos têm a mesma base GE e a mesma altura que corresponde à distância entre as retas paralelas AC e GE.

Tomando X = C, concluímos que a área do triângulo AGE é igual a área de CGE, isto é, $\frac{12.12}{2} = 72\ cm^2$.

**Figura 30:** Quadrados e diagonal AC




**Fonte**: OBMEP (Banco de Questões 2011, p.110)

Essa atividade mostra que o uso dos conceitos de Geometria Analítica tornou a resolução mais extensa em comparação a Geometria Euclidiana Plana.

### 3.6 Soma constante

| |
|---|
| O ponto P pertence a um dos lados de um retângulo. Provar que a soma das distâncias de P às diagonais desse retângulo é constante. |

**Fonte**: LIMA (A Matemática do Ensino Médio, volume 3, 2006, p.40)

**Solução 1: Resolvendo por meio da Geometria Euclidiana Plana**

As soluções aqui expostas foram adaptadas de Lima, A Matemática do Ensino Médio, volume 3, 2006, p.40.

Considere o retângulo ABCD e seja P um ponto do lado AD. Como mostra a figura 31, os segmentos PH e PJ são perpendiculares às diagonais AC e BD, respectivamente. Tracemos AE perpendicular a BD e PF perpendicular a AE. Desta forma, PJEF é um retângulo e portanto,

$$\overline{PJ} = \overline{FE}. \tag{16}$$

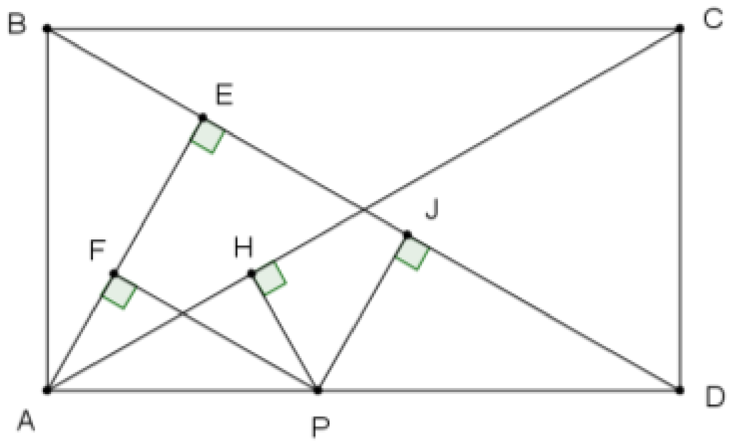
Os triângulos APH e APF são congruentes porque são retângulos, com mesma hipotenusa AP e ainda, $F\hat{P}A = D\hat{B}A = C\hat{A}B$, a igualdade entre estes ângulos decorre de semelhança de triângulos. Como os triângulos APH e APF são congruentes decorre que

$$\overline{PH} = \overline{AF}. \tag{17}$$

De (16) e (17) resulta que

$\overline{\mathrm{PJ}} + \overline{PH} = \overline{AF} + \overline{FE} = \overline{AE}$ = constante.

**Figura 31:** Retângulo ABCD

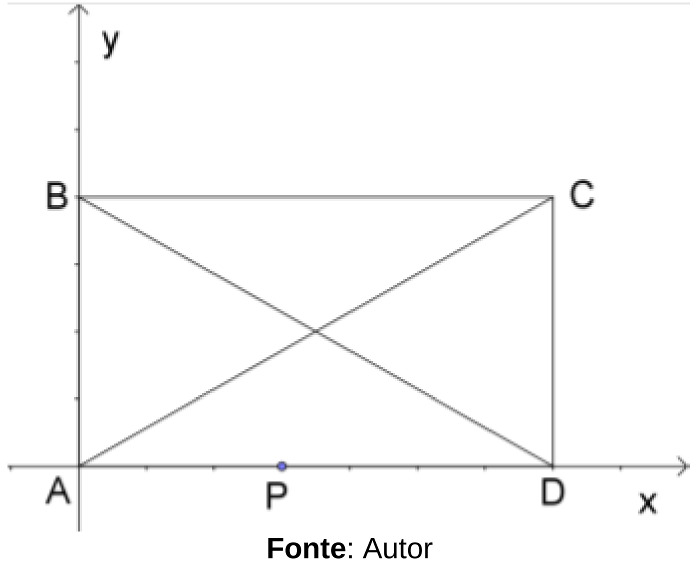



**Fonte**: Autor

**Solução 2: Resolvendo por meio da Geometria Analítica**

Pode-se escolher um sistema de coordenadas de modo que
A = $(0,0)$,
B = $(0, b)$, com $b > 0$,
C = $(a, b)$, com $a > 0$,
D = $(a, 0)$
P = $(c, 0)$, com $0 \leq c \leq a$.

**Figura 32:** Retângulo ABCD no plano cartesiano




**Fonte**: Autor

Podemos determinar a equação da reta AC pela condição de alinhamento de pontos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aplicando a Regra de Sarrus concluímos que a equação da reta AC é $bx - ay = 0$.

De modo análogo, podemos determinar a equação da reta BD:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, a equação da reta BD é $bx + ay = ab$.

Aplicando a fórmula da distância entre ponto e reta para calcular as distâncias dessas retas ao ponto P e somando essas distâncias obtemos:

$$d_{P,AC} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,AC} = \frac{|bc + (-a).0 + 0|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}}$$

$$d_{P,AC} = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{P,BD} = \frac{|bc + a.0 + (-ab)|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$d_{P,BD} = \frac{|bc - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto, $\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{|bc - ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} =$ constante.

Observamos ainda que essa constante nada mais é que a distância do ponto A à reta BD. Notamos que a resolução por meio da Geometria Euclidiana Plana requer domínio sobre a congruência e semelhança de triângulos, enquanto a resolução por meio da Geometria Analítica são aplicações diretas das fórmulas.

## CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DE RESOLUÇÕES

Na introdução deste trabalho observamos que a Geometria Analítica é pouca lembrada para a resolução de problemas geométricos. A fim de verificar a validade dessa afirmação (aqui chamamos a atenção para o fato de que temos plena consciência de que este “verificar” ocorre em campo amostral bem restrito), decidimos aplicar algumas das atividades do capítulo anterior. Para tanto, foram pré-selecionadas quatro questões dentre as atividades propostas e as mesmas foram entregues a um grupo constituído de dois professores de Matemática, que atuam no Ensino Médio, em Escolas Públicas, e para cinco graduandos de um curso de Matemática. Dentre estes estudantes, dois deles cursam a habilitação licenciatura e os demais cursam o bacharelado. A questão 3.3 não foi selecionada pelo fato de possuir resolução simples e a questão de 3.6, por se tratar de uma demonstração.

Cada uma destas pessoas, resolveu os exercícios individualmente, em horários diferentes. As entrevistas também ocorreram privativamente. Este processo ocorreu como segue: Foi solicitado aos entrevistados que eles tentassem resolver as atividades, eles tinham a liberdade de fazer um esboço ou efetivamente solucionar as questões, pois nosso interesse reside em determinar quais conceitos matemáticos seriam utilizados. Observou-se que a maioria optou por resolver efetivamente as atividades não se limitando apenas a delinear uma solução. Os entrevistados ficaram livres para usufruir do tempo que quisessem para resolver as questões propostas.

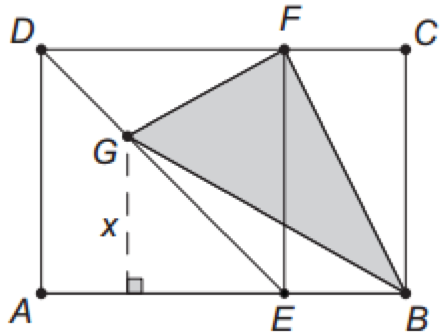
Em um segundo momento, passou-se a questionar os entrevistados, suas respostas foram gravadas com o consentimento dos mesmos, conforme anexo A, e foram feitas as seguintes perguntas:

- Como resolveu a questão?
- Por que pensou nessa resolução?
- Existe outra maneira de resolvê-la? Como seria tal maneira?
- Seria possível resolver usando régua e compasso?
- Conhece algum software para resolver a questão?
- Existe a possibilidade de resolver usando a geometria analítica?
- Você acha que a Geometria Analítica fica relegada ao esquecimento? Por quê?

A primeira atividade apresentada foi a atividade 3.1 do capítulo 3 e os entrevistados a resolveram e foram questionados a respeito da estratégia de resolução adotada e os dados obtidos encontram-se no Quadro 1.

3.1 Na figura abaixo, AEFD é um quadrado e o retângulo ABCD tem lados AB = 3 cm e AD = 2 cm. Seja G um ponto qualquer do segmento DE e $x$ a distância de G ao segmento AB. Calcule a área do triângulo BFG quando G é o ponto médio do segmento DE.

**Figura 15**: Triângulo BFG




**Fonte**: OBMEP NA ESCOLA (2014, p.3, adaptado)

**Quadro 1**: como resolveu a atividade 3.1

| Entrevistado | Como resolveu a questão 3.1? |
|---|---|
| Professor 1 | Resolveu aplicando o Teorema de Pitágoras, como mostrado neste trabalho. |
| Professor 2 | Resolveu aplicando o Teorema de Pitágoras, como mostrado neste trabalho. |
| Aluno 1 | Resolveu calculando as áreas das figuras em branco e depois retirou da área do retângulo. |
| Aluno 2 | Resolveu aplicando o Teorema de Pitágoras, como mostrado neste trabalho. |
| Aluno 3 | Resolveu usando o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. |
| Aluno 4 | Resolveu aplicando o Teorema de Pitágoras, como mostrado neste trabalho. |
| Aluno 5 | Resolveu decompondo em vários triângulos e retirou da área do retângulo, utilizando Teorema de Pitágoras. |

**Fonte**: Autor

Observamos que, a maioria dos entrevistados, utilizou o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Questionamos o motivo de terem pensando dessa forma, apresentada no Quadro 1, para resolvê-las e as respostas obtidas encontram-se no Quadro 2.

**Quadro 2**: Justificativa de resolução para a atividade 3.1

| Entrevistado | Por que pensou nessa resolução? |
|---|---|
| Professor 1 | Sempre tenta resolver de maneira que lhe parece possível e, se não der certo, muda a estratégia de resolução. |
| Professor 2 | Parecia que essa seria a solução mais fácil para esta atividade. |
| Aluno 1 | Por não ter medidas dos lados do triângulo, achou que, dessa forma seria a mais fácil para resolver. |
| Aluno 2 | Foi a primeira coisa que lhe veio a cabeça para resolver a atividade. |
| Aluno 3 | Disse que quando vê triângulos e ângulos retos sempre pensa que, de alguma forma, deve-se utilizar o Teorema de Pitágoras. |
| Aluno 4 | Quando viu vários triângulos e vários ângulos retos já pensou no Teorema de Pitágoras. |
| Aluno 5 | Observando vários triângulos e nas informações dadas, pensou no Teorema de Pitágoras. |

**Fonte**: Autor

Os entrevistados foram questionados a respeito de outras formas de resolver a atividade 3.1 e os dados se encontram no Quadro 3.

**Quadro 3**: Outra maneira de resolver a atividade 3.1

| Entrevistado | Existe outra maneira de resolvê-la? Como seria tal maneira? |
|---|---|
| Professor 1 | Acredita que há outras formas de resolver, mas não lhe veio nada em mente para resolver de outra forma. |
| Professor 2 | Colocaria um plano cartesiano, calcularia os pontos médios e a distância entre os pontos e encerraria calculando pela fórmula da área do triângulo por meio da geometria plana. |
| Aluno 1 | Acredita que há várias maneiras de resolver, porém aplicando o Teorema de Pitágoras seria a mais fácil. |
| Aluno 2 | A fórmula de Heron também a resolveria, mas acha que daria mais trabalho. |
| Aluno 3 | A atividade 3.1 poderia usar Geometria Analítica calculando equações de retas, distância entre dois pontos, porém achou que seria mais trabalhoso. |
| Aluno 4 | Daria para resolver pela fórmula de Heron, mas seria trabalhoso. |
| Aluno 5 | Talvez deslocando o triângulo para o lado do retângulo, mas não tem certeza se isso daria certo. |

**Fonte**: Autor

Questionamos a respeito da possibilidade de resolver esta atividade com o uso de régua e compasso e os dados se encontram no Quadro 4.

**Quadro 4**: Régua e compasso para a atividade 3.1

| Entrevistado | Seria possível resolver usando régua e compasso? |
|---|---|
| Professor 1 | Usando somente a régua é possível, mas ressaltou que não resolveria assim. |
| Professor 2 | Para usar régua e compasso nesta atividade teria que pensar um pouco mais. |
| Aluno 1 | Poderia usar somente a régua para medir a base e a altura para calcular a área do triângulo desejada. |
| Aluno 2 | Não respondeu. |
| Aluno 3 | Régua e compasso seria possível, mas não seria muito preciso o resultado. |
| Aluno 4 | Não respondeu. |
| Aluno 5 | Não respondeu. |

**Fonte**: Autor

Sobre a possibilidade de resolver a atividade 3.1 por *software*, os dados obtidos se encontram no Quadro 5.

**Quadro 5**: Possibilidade de usar algum *software*

| Entrevistado | Conhece algum software para resolver a questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Por meio do software GeoGebra seria fácil calcular a área do triângulo dado. |
| Professor 2 | Usaria o software GeoGebra. |
| Aluno 1 | O *software* GeoGebra resolveria a atividade. |
| Aluno 2 | O *software* GeoGebra resolveria a atividade. |
| Aluno 3 | O *software* GeoGebra resolve a atividade |
| Aluno 4 | O *software* GeoGebra resolve a atividade. |
| Aluno 5 | Qualquer *software* que contenha plano cartesiano resolveria. |

**Fonte**: Autor

Foram questionados a respeito da utilização da Geometria Analítica na atividade 3.1 e os dados encontram-se no Quadro 6.

**Quadro 6**: Geometria Analítica na atividade 3.1

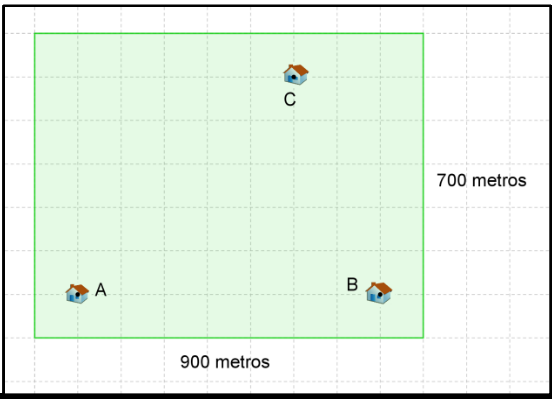
| Entrevistado | Existe a possibilidade de resolver usando a Geometria Analítica? |
|---|---|
| Professor 1 | Talvez se reestruturasse o problema de outra forma até poderia usar Geometria Analítica, mas pela geometria plana pareceu mais fácil. |
| Professor 2 | Sim. O Professor 2 decidiu usar a Geometria Analítica para resolver novamente a atividade e, após isso, explicou os procedimentos que adotaria sendo como primeiro passo aplicar o Teorema de Pitágoras, percebendo assim, que se trata de um triângulo isósceles. Calculou o ponto médio da base desse triângulo e, por meio da fórmula da distância entre dois pontos, calculou a medida da altura e da base do triângulo, e finalizou determinando a área do triângulo por meio da sua base e altura. |
| Aluno 1 | Acha possível, mas não sabe como faria. |
| Aluno 2 | O aluno disse que não domina Geometria Analítica, mas acredita que deva haver uma maneira de resolvê-la utilizando-a. |
| Aluno 3 | Não soube responder. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Acredita que a Geometria Analítica resolveria inserindo um plano cartesiano e calculando a distância entre seus pontos. |

**Fonte**: Autor

A segunda atividade apresentada foi a atividade 3.2 do capítulo 3 e os entrevistados a resolveram e foram questionados a respeito da estratégia de resolução adotada e os dados obtidos encontram-se no Quadro 7.

3.2 João está com um problema em sua comunidade. Um poço será construído e as três famílias envolvidas desejam ficar próximas a ele. Utilizando o mapa da comunidade João observou que o terreno é representado por um retângulo cujas dimensões são 700 m x 900 m, conforme Figura 18, no qual se pode observar a localização das três casas. Determine onde deverá ficar o poço de modo que a distância entre o poço e qualquer uma das casas seja a mesma, e qual será essa distância do poço às casas.

**Figura 18**: Casas A, B e C




**Fonte**: PROBLEMA ADAPTADO DE ALVES (2014, p.3)

**Quadro 7**: Como resolveu a atividade 3.2

| Entrevistado | Como resolveu essa questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Resolveu, inicialmente, por meio da fórmula da distância entre dois pontos e depois utilizou sistemas lineares de duas incógnitas e terminou calculando a distância entre dois pontos, ou seja, utilizou conceitos da Geometria Analítica. |
| Professor 2 | Resolveu, basicamente, pela fórmula da distância entre dois pontos, ou seja, por meio da Geometria Analítica. |
| Aluno 1 | Tentou calcular o ponto médio das três coordenadas e usou distância entre dois pontos, mas não chegou a nenhuma conclusão. |
| Aluno 2 | Não conseguiu resolver, mas tentou aplicando o Teorema de Pitágoras. |
| Aluno 3 | Resolveu usando ponto médio dos lados do triângulo, equações de retas e intersecção de retas, ou seja, usando os conteúdos da Geometria Analítica. |
| Aluno 4 | Resolveu usando o ponto de encontro das mediatrizes, usou ponto médio, equação de retas, distância entre dois pontos, ou seja, conceitos da Geometria Analítica. |
| Aluno 5 | Resolveu a questão transformando o triângulo dado em um triângulo equilátero, utilizou o Teorema de Pitágoras e distância entre dois pontos. |

**Fonte**: Autor

Destacamos que nessa atividade, quase todos os entrevistados utilizaram-se dos conceitos de Geometria Analítica, porém observamos que esta atividade nos remete explicitamente ao uso de Geometria Analítica, pois é solicitado que seja determinada a distância entre o poço e qualquer uma das casas. Além disso, a figura que acompanha essa atividade está inserida em uma malha quadriculada, fator que induz ao uso de um sistema de coordenadas cartesianas.

Estes aspectos surgem nas respostas dadas pelos entrevistados, que estão sistematizadas no Quadro 8, quando estes foram questionados sobre os motivos que os levaram a pensar nas resoluções apresentadas no Quadro 7.

**Quadro 8**: Justificativa da resolução para a atividade 3.2

| Entrevistado | Por que pensou nessa resolução? |
|---|---|
| Professor 1 | Assim que viu a malha quadriculada, pensou no plano cartesiano. |
| Professor 2 | Percebeu, pelo desenho, que as coordenadas pedidas na atividade 3.2 não seriam inteiras e para calcular esses números fracionários não seria nada fácil de calcular de outra forma. |
| Aluno 1 | Por ter a malha quadriculada, pensou em algo com a Geometria Analítica. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Quando viu a malha quadriculada e os pontos que representam as casas na atividade, já pensou em Geometria Analítica. |
| Aluno 4 | Usou a Geometria Analítica, pois, para ele, foi fácil de enxergar a estratégia de resolução. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Os entrevistados foram questionados a respeito de outras formas de resolver a atividade 3.2 e os dados se encontram no Quadro 9.

**Quadro 9**: Outra maneira de resolver a atividade 3.2

| Entrevistado | Existe outra maneira de resolvê-la? Como seria tal maneira? |
|---|---|
| Professor 1 | Acredita que há outras formas de resolver, mas não lhe veio nada em mente para resolver de outra maneira. |
| Professor 2 | Talvez a questão possa ser resolvida graficamente, porém como achava que precisaria de uma resolução optou pela geometria analítica. |
| Aluno 1 | Acredita que há outras formas, mas não sabe como fazê-la. |
| Aluno 2 | Apenas afirmou que questões que envolvem geometria sempre há várias maneiras de resolvê-las. |
| Aluno 3 | Não soube responder. |
| Aluno 4 | Sairia pela geometria plana, mas não descreveu como procederia. |
| Aluno 5 | Acredita há outras formas de resolver a questão 3.2, mas não soube descrever. |

**Fonte**: Autor

Questionamos a respeito da possibilidade de resolver esta atividade com o uso de régua e compasso e os dados se encontram no Quadro 10.

**Quadro 10**: Régua e compasso para a atividade 3.2

| Entrevistado | Seria possível resolver usando régua e compasso? |
|---|---|
| Professor 1 | Usando o compasso resolveria, porém ressaltou que não resolveria assim. |
| Professor 2 | Usaria régua e compasso para construir o ponto de encontro das mediatrizes. |
| Aluno 1 | Acha que seria possível, mas não soube descrever. |
| Aluno 2 | Daria para resolver com o compasso e régua, fazendo uma circunferência com o centro no ponto procurado, mas enfatizou que seria um valor aproximado. |
| Aluno 3 | Régua e compasso seria possível, mas não seria muito preciso para resolver. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Só o compasso resolveria. |

**Fonte**: Autor

A respeito da possibilidade de resolver a atividade por *software*, os dados obtidos se encontram no Quadro 11.

**Quadro 11**: Conhece algum software para a atividade 3.2

| Entrevistado | Conhece algum software para resolver a questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Disse que já fez um exercício parecido usando o GeoGebra. |
| Professor 2 | Usando o GeoGebra faria a construção de mediatrizes igual a construção com o compasso. |
| Aluno 1 | O software geogebra resolveria. |
| Aluno 2 | O software geogebra resolveria. |
| Aluno 3 | O software geogebra resolveria. |
| Aluno 4 | O software geogebra resolveria. |
| Aluno 5 | Um software que tenha plano cartesiano resolveria. |

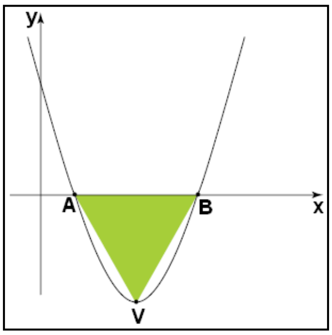
**Fonte**: Autor

Como seis entre sete entrevistados resolveram a questão usando Geometria Analítica, a pergunta “Existe a possibilidade de resolver usando a Geometria Analítica?” não foi feita.

Outra atividade que foi apresentada foi a 3.4 do capítulo 3 e os entrevistados foram questionados a respeito da estratégia de resolução adotada e os dados obtidos encontram-se no Quadro 12.

3.4 Observe a parábola de vértice V, gráfico da função quadrática definida por $y = ax^2 + bx + c$, que corta o eixo das abscissas nos pontos A e B. Calcule o valor numérico de $\Delta = b^2 - 4ac$, sabendo que o triângulo ABV é equilátero.

**Figura 26**: Parábola




**Fonte**: UERJ, 2009

**Quadro 12**: Como resolveu a atividade 3.4

| Entrevistado | Como resolveu essa questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Resolveu utilizando os conceitos de Geometria Euclidiana Plana e funções quadráticas, como descrito na “solução 2” do capítulo anterior. |
| Professor 2 | Usou a geometria analítica, partindo da altura de um triângulo equilátero, e usou as coordenadas dos pontos A, B, V e ponto médio do segmento AB. Usou a distância entre o ponto médio de AB e o vértice V igualando a altura do triângulo equilátero, obtendo assim, o valor solicitado. |
| Aluno 1 | Não conseguiu resolver, porém falou que seria um cálculo algébrico e um pouco de geometria plana. |
| Aluno 2 | Não conseguiu resolver, porém disse que seria um cálculo algébrico. |
| Aluno 3 | Resolveu usando as coordenadas das raízes de uma equação do segundo grau e a distância entre dois pontos igual a utilizada na “solução 1” apresentada neste trabalho. |
| Aluno 4 | Tentou resolver a questão 3.4 iniciando com conceitos de função e depois distância entre dois pontos de geometria analítica, porém não concluiu o exercício. |
| Aluno 5 | Não soube resolver, mas acha que resolveria algebricamente. |

**Fonte**: Autor

Questionamos o motivo de terem pensando da forma apresentada no Quadro 12, para resolvê-la e os dados obtidos encontram-se no Quadro 13.

**Quadro 13**: Justificativa de resolução para a atividade 3.4

| Entrevistado | Por que pensou nessa resolução? |
|---|---|
| Professor 1 | Achou a questão muito difícil, tentou de várias maneiras e a única maneira que chegou a um resultado foi a maneira descrita no quadro 12. |
| Professor 2 | Foi a única maneira que veio à cabeça. |
| Aluno 1 | Não respondeu. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Foi a única coisa que pensou. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Os entrevistados foram questionados a respeito de outras formas de resolver a atividade 3.4 e os dados se encontram no Quadro 14.

**Quadro 14**: Outra maneira de resolver a atividade 3.4

| Entrevistado | Existe outra maneira de resolvê-la? Como seria tal maneira? |
|---|---|
| Professor 1 | Não soube responder. |
| Professor 2 | Se tiver outra maneira de resolver, acredita que tenha pouca variação, talvez usando a medida do lado. |
| Aluno 1 | Não soube responder. |
| Aluno 2 | Disse que deve haver outra maneira de resolver sem ser algebricamente, pois envolve geometria. |
| Aluno 3 | Acha que não há outra maneira de resolver. |
| Aluno 4 | Deve haver outra maneira de resolver, pois da maneira que pensou, usando a geometria analítica, seria muito trabalhoso. |
| Aluno 5 | Deve haver outra maneira além da algébrica, porém não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Questionamos a respeito da possibilidade de resolver esta atividade com o uso de régua e compasso e os dados se encontram no Quadro 15.

**Quadro 15**: Régua e compasso na atividade 3.4

| Entrevistado | Seria possível resolver usando régua e compasso? |
|---|---|
| Professor 1 | Acha que não seria possível. |
| Professor 2 | Acha que não é possível resolver usando régua e compasso. |
| Aluno 1 | Não soube responder. |
| Aluno 2 | Acha que a questão não seria possível resolver usando régua e compasso. |
| Aluno 3 | Acha que não seria possível resolver por régua e compasso. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

A respeito da possibilidade de resolver a atividade por *software*, os dados obtidos se encontram no Quadro 16.

**Quadro 16**: Conhece algum software para a atividade 3.4

| Entrevistado | Conhece algum software para resolver a questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Não soube responder. |
| Professor 2 | Acha que não seria possível resolver usando GeoGebra. |
| Aluno 1 | Não soube responder sobre a questão 3.4. |
| Aluno 2 | Acha que não seria possível resolver pelo GeoGebra. |
| Aluno 3 | Acredita que o GeoGebra não resolveria. |
| Aluno 4 | Acha que o geogebra não resolveria. |
| Aluno 5 | Acha que um software não resolveria. |

**Fonte**: Autor

Foram questionados a respeito da utilização da Geometria Analítica nesta atividade e os dados encontram-se no Quadro 17.

**Quadro 17**: Geometria Analítica para a atividade 3.4

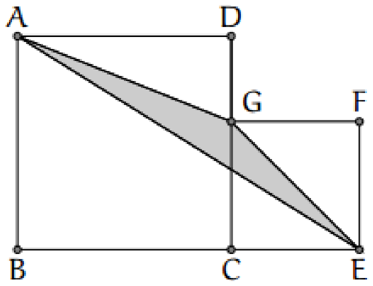
| Entrevistado | Existe a possibilidade de resolver usando a geometria analítica? |
|---|---|
| Professor 1 | Achou essa questão muito difícil e acredita que a Geometria Analítica não se aplicaria. |
| Professor 2 | Fez uso da geometria analítica para resolvê-la. |
| Aluno 1 | Não soube responder. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Não soube responder. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

A última atividade que foi apresentada foi a 3.5 do capítulo 3 e os entrevistados foram questionados a respeito da estratégia de resolução adotada e os dados obtidos encontram-se no Quadro 18.

3.5 Na figura, ABCD e CEFG são quadrados e o lado do quadrado CEFG mede 12 cm. Qual a área do triângulo AEG?

**Figura 27**: Quadrados ABCD e CEFG




**Fonte**: Banco de questões da OBMEP, 2011, p.34

**Quadro 18**: Como resolveu a atividade 3.5

| Entrevistado | Como resolveu essa questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Calculou a soma da área dos dois quadrados e subtraiu a área dos três triângulos em branco. |
| Professor 2 | Calculou a área dos três triângulos e a retirou da área dos dois quadrados. |
| Aluno 1 | Não a resolveu, pois disse que parecia que faltavam dados. |
| Aluno 2 | Resolveu como descrito na “solução 2” do capítulo anterior. |
| Aluno 3 | Tentou resolver usando a Geometria Analítica, mas não conseguiu. |
| Aluno 4 | Tentou resolver por meio da semelhança de triângulos, porém não chegou a nenhum resultado. |
| Aluno 5 | Tentou resolver aplicando o Teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos, mas não conseguiu resolver. |

**Fonte**: Autor

A resolução apresentada pelo Professor 1, foi singular, mostrando a diversidade de soluções que podem surgir. Por considerarmos esta solução interessante, a apresentamos no Anexo B.

Questionamos o motivo de terem pensando dessa forma apresentada no quadro 18, para resolvê-la e os dados obtidos encontram-se no Quadro 19.

**Quadro 19**: Justificativa de resolução para a atividade 3.5

| Entrevistado | Por que pensou nessa resolução? |
|---|---|
| Professor 1 | Foi a única ideia que pensou. |
| Professor 2 | Achou que seria difícil calcular diretamente a área do triângulo. |
| Aluno 1 | Não respondeu. |
| Aluno 2 | Por não ter a medida do quadrado maior, pensou que seria um triângulo de área fixa. |
| Aluno 3 | Foi a única coisa que pensou. |
| Aluno 4 | Não respondeu. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Os entrevistados foram questionados a respeito de outras formas de resolver a atividade 4.5 e os dados se encontram no Quadro 20.

**Quadro 20**: Outra maneira de resolver a atividade 3.5

| Entrevistado | Existe outra maneira de resolvê-la? Como seria tal maneira? |
|---|---|
| Professor 1 | Não soube responder. |
| Professor 2 | Não soube responder. |
| Aluno 1 | Há alguma maneira de resolver, porém não soube descrever. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Tentou usar semelhança de triângulos, porém não chegou a nenhuma conclusão. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Questionamos a respeito da possibilidade de resolver esta atividade com o uso de régua e compasso e os dados se encontram no Quadro 21.

**Quadro 21**: Régua e compasso na atividade 3.5

| Entrevistado | Seria possível resolver usando régua e compasso? |
|---|---|
| Professor 1 | Acha que não seria possível. |
| Professor 2 | Acha que não seria possível. |
| Aluno 1 | Acredita que seja possível com o uso de régua e compasso desde que não seja algo preciso. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Não soube responder. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

A respeito da possibilidade de resolver a atividade por *software*, os dados obtidos se encontram no Quadro 22.

**Quadro 22**: *Software* para a atividade 3.5

| Entrevistado | Conhece algum software para resolver a questão? |
|---|---|
| Professor 1 | Acredita que o GeoGebra resolveria, mas não descreveu os procedimentos. |
| Professor 2 | Seria possível com o uso do GeoGebra, faria um quadrado fixo e um quadrado qualquer com o controle deslizante, traçaria o polígono e pediria o valor da área do triângulo que o próprio software disponibiliza. |
| Aluno 1 | Acredita que o GeoGebra resolva, mas não descreveu como faria isso. |
| Aluno 2 | O GeoGebra resolveria. |
| Aluno 3 | O GeoGebra resolveria. |
| Aluno 4 | O GeoGebra resolveria. |
| Aluno 5 | Um *software* resolveria. |

**Fonte**: Autor

Foram questionados a respeito da utilização da Geometria Analítica nesta atividade e os dados encontram-se no Quadro 23.

**Quadro 23**: Geometria Analítica na atividade 3.5

| Entrevistado | Existe a possibilidade de resolver usando a geometria analítica? |
|---|---|
| Professor 1 | Acredita que seria possível a utilização da Geometria Analítica, mas não saberia como usá-la. |
| Professor 2 | Utilizando a Geometria Analítica, acha que seria uma resolução mais trabalhosa. |
| Aluno 1 | Não soube responder. |
| Aluno 2 | Não soube responder. |
| Aluno 3 | Não soube responder. |
| Aluno 4 | Não soube responder. |
| Aluno 5 | Não soube responder. |

**Fonte**: Autor

Para encerrarmos os diálogos, questionamos os entrevistados se eles acham que a Geometria Analítica fica relegada ao esquecimento, os dados se encontram no Quadro 24.

**Quadro 24**: Geometria Analítica relegada ao esquecimento

| Entrevistado | Geometria Analítica relegada ao esquecimento |
|---|---|
| Professor 1 | Não acha que a Geometria Analítica fica relegada ao esquecimento, mas acredita que os professores devem gostar muito dela para utilizá-la, pois a mesma exige muito detalhe e muito conceito. A Geometria Analítica tem uma estrutura mais formal que requer muito domínio e, a sua utilização, em muitos casos, requer precisão. |
| Professor 2 | Na atividade 3.5 fica difícil lembrar da Geometria Analítica, mas em exercícios que apareçam malha quadriculada ou plano cartesiano fica mais fácil lembrar. Acredita que muitas pessoas não a usam porque a sua escrita é muito rigorosa. |
| Aluno 1 | Acha que sim, pois para lembrar da Geometria Analítica o problema deve conter um plano cartesiano. |
| Aluno 2 | Acha que a Geometria Analítica fica muito esquecida. |
| Aluno 3 | Acha que a Geometria Analítica fica esquecida, pois sua experiência particular durante o ensino de Geometria Analítica, no Ensino Médio, limitou-se a localizar pontos no plano cartesiano. |
| Aluno 4 | Acredita que a Geometria Analítica é meio esquecida pela quantidade de conceitos que ela tem e também pelo seu rigor na escrita. |
| Aluno 5 | Por ter aprendido pouco sobre Geometria Analítica, usa-a muito pouco e, com isso, sempre a esquece. |

**Fonte**: Autor

Observando o Quadro 24, percebemos a diferença entre a opinião dos alunos e dos professores. Os alunos consideram que Geometria Analítica fica esquecida, porém os professores acreditam que Geometria Analítica não é desprezada. Ambos os professores e um dos alunos destacam que a escrita da Geometria Analítica é rigorosa e exige precisão.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Faremos as considerações finais, expondo nosso ponto de vista sobre cada capítulo, entendendo que cada etapa deste trabalho teve sua relevância para sua efetivação.

O primeiro capítulo proporcionou recordar brevemente sobre o desenvolvimento da Geometria Euclidiana Plana até *Os Elementos* de Euclides e sobre a criação e elaboração da Geometria Analítica, destacando, em particular, a vida de René Descartes.

O segundo capítulo foi fundamental para revisar alguns conceitos da Geometria Analítica e trouxemos demonstrações que permitem um embasamento para compreendê-la ainda melhor. Neste capítulo, explicamos brevemente sobre o *software* GeoGebra que dinamiza, mas não substitui o processo de ensino e aprendizagem.

Pesquisar as atividades do terceiro capítulo foi recompensador pois, além de ter sido um desafio, o objetivo era buscar atividades interessantes e diferentes das habitualmente adotadas nos livros didáticos. Encontrar atividades onde fosse possível utilizar Geometria Analítica como uma ferramenta de resolução e buscar outras possíveis soluções foi realmente uma tarefa instigante.

Lembramos que as atividades neste trabalho são um estímulo para aplicar os conceitos da Geometria Analítica. Propomos, ao mostrar o desenvolvimento das atividades utilizando a Geometria Analítica, a reflexão e mudança na visão sobre esses conceitos e os mesmos podem ser usados.

Analisando as respostas dos sete entrevistados, fizemos um levantamento sobre a utilização da Geometria Euclidiana Plana e Geometria Analítica e as informações são mostradas no Quadro 25, observamos que a Geometria Euclidiana Plana é usada com maior frequência.

**Quadro 25**: Levantamento do uso das Geometrias

| Atividades | Fração utilizada de Geometria Analítica | Fração utilizada de Geometria Euclidiana Plana |
|---|---|---|
| Atividade 3.1 | $\frac{0}{7}$ | $\frac{7}{7}$ |
| Atividade 3.2 | $\frac{6}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |
| Atividade 3.4 | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ |
| Atividade 3.5 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |

**Fonte**: Autor

Observamos que o ensino de Geometria Euclidiana Plana ocorre desde os primeiros anos do Ensino Fundamental enquanto o primeiro contato com a Geometria Analítica dá-se apenas no Ensino Médio. Então pensamos que é natural que as pessoas sintam-se confortáveis em utilizar a Geometria Euclidiana Plana, pois este é um conhecimento que eles tiveram mais tempo para construir. Apesar do menor contato com a Geometria Analítica, principalmente por parte dos alunos, suas respostas demonstram que eles apresentam conhecimento desta teoria, veja que na atividade 3.2, cujo enunciado remete diretamente à Geometria Analítica, os conceitos relacionados a esta teoria foram bastante usados. Os estudantes entrevistados tem, em sua grade curricular do primeiro ano de graduação, a disciplina Geometria Analítica, porém é provável que as atividades ou exercícios resolvidos por eles tenham sido aqueles habituais que focam unicamente o conteúdo visto naquele momento, não havendo a associação da Geometria Analítica com outras áreas da Matemática.

As respostas dadas à pergunta "Existe a possibilidade de resolver usando a Geometria Analítica?" estão sistematizadas no Quadro 26.

**Quadro 26**: Geometria Analítica como possibilidade de resolução

| **Pergunta** | **Existe a possibilidade de resolver usando a Geometria Analítica?** | | |
|---|---|---|---|
| Atividades | Sim | Não | Não soube responder |
| Atividade 3.1 | $\frac{4}{7}$ | $\frac{0}{7}$ | $\frac{3}{7}$ |
| Atividade 3.4 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{0}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |
| Atividade 3.5 | $\frac{2}{7}$ | $\frac{0}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |

**Fonte**: Autor

Observamos que as respostas, principalmente dos alunos, revelam que, por vezes, os mesmos não mostram indícios da possibilidade de usar Geometria Analítica. Nas atividades 3.4 e 3.5, a proporção do resultado "Não soube responder" é significativa. Isto vem reforçar o argumento de que a Geometria Analítica não é encarada como uma ferramenta alternativa na resolução de certos problemas.

Durante as entrevistas, algumas pessoas destacaram que se na atividade figura um plano cartesiano então eles são levados a usar Geometria Analítica. Assim, observamos que a presença de um sistema de coordenadas cartesianas está vinculada ao uso de Geometria Analítica e esta parece ser uma abordagem enraizada na nossa maneira de raciocinar.

Outro fato que gostaríamos de registrar é que quando foi mencionado que, usando os conceitos da Geometria Analítica todas as atividades propostas poderiam ser solucionadas, alguns entrevistados ficaram espantados e incrédulos e, por isso, no final das entrevistas, apresentamos as resoluções, descritas neste trabalho, por meio da Geometria Analítica.

É uma pena que a metodologia de resolução de problemas não seja mais explorada no cotidiano das aulas de Matemática, pois esta metodologia permite que os alunos apresentem suas soluções e em oportunidades como esta, podem surgir soluções distintas para um mesmo problema, como foi feito neste trabalho.

Esperamos que esse trabalho contribua para despertar o olhar dos professores e estudantes de Matemática para o uso da Geometria Analítica, pois esta área do conhecimento matemático pode e deve ser usada na resolução de problemas geométricos, mesmo que o enunciado do problema não conduza diretamente para essa teoria.

## REFERÊNCIAS


BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BICUDO, I. (tradutor e organizador). **Os elementos**. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

BORBA, M. C. et al**. Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática – Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3 Ed. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**, 1 Ed, Trad Lázaro Coutinho, Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

COUTINHO, L. **Convite às Geometrias não-Euclidianas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DANTE, L. R. **Contexto e Aplicações** volume 3. 2 Ed. São Paulo: Ática, 2014.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9**: Geometria Plana. 7 Ed. São Paulo: Atual, 1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. Ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2011.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 7**: Geometria Analítica. 4 Ed. São Paulo: Atual, 1998.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** volume 3. 6 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2006.

ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P**. Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, D. L.; LAVAL, A. **Uma História Concisa da Geometria Analítica**. In: Ocsana Sônia Danyluk. (Org.). História da Educação Matemática – escrita e reescrita de histórias. Porto Alegre: Sulina, p. 170-207, 2012,

SBM. Conselho Diretor. Sociedade Brasileira de Matemática**. Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Rio de Janeiro, 2014.

SMITH, D. E. **History of Mathematics.** volume 2, Canadá: General Publishing Company, Ltd, 1925.

SOARES, S. R. **Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. 2013. 141 f. Dissertação em Matemática Profissional, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, 2013.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática** volume 3. 2 Ed. São Paulo: FTD, 2013.

Apostila de Matemática do Ensino Médio, Editora Positivo, Curitiba, 2007.

Sítios da Internet Consultados

Dicionário. Disponível em: http://www.priberam.pt/dlpo/geometria%20anal%C3%ADtica Acesso em: 10 Set. 2015.

GeoGebra. Disponível em: http://www.ogeogebra.com.br/site/. Acesso em: 11 Nov. 2015.

GeoGebra. Disponível em: http://www.geogebra.org/. Acesso em 11 Nov. 2015.

GeoGebra. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Acesso em 11 Nov. 2015.

Banco de Questões da OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em 20 Jul. 2015.

ALVES, R. S. de O. **A Comunidade**. Série Matemática na Escola. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074. Acesso em: 11 Jan. 2016.

Atividade 3.4 do capítulo 3. http://www.revista.vestibular.uerj.br/questao/questao-discursiva.php?seq_questao=240 Acesso em: 16 Jan. 2016

# ANEXOS

# Anexo A

## Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Prezado(a) Senhor(a)

Gostaríamos de convidá-lo a participar de nosso estudo, que tem como objetivo complementar a dissertação de mestrado **Resolução de problemas geométricos sob diferentes perspectivas**, por meio da resolução de algumas atividades e entrevista sobre o método de resolução destas atividades.

A pesquisa, utilizando a metodologia de uma entrevista semi-estruturada, consistirá na realização de uma entrevista e gravação da mesma, junto aos participantes do estudo e posterior análise dos dados. Será conduzida dessa forma, pois pretendemos compreender as diversas formas de resolução para uma mesma atividade, esperando contribuir para o melhor entendimento de estratégias de resolução de problemas pré-determinados.

Trata-se de uma dissertação desenvolvida por Gilcimar da Cruz Leal e orientada pela Prof.ª Dr.ª Neuza Teramon, do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, realizada no Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas, da Universidade Estadual de Londrina.

A qualquer momento da realização desse estudo qualquer participante/pesquisado envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. Qualquer participante selecionado poderá recusar-se a participar ou retirar-se da pesquisa em qualquer fase da mesma, sem nenhum tipo de penalidade, constrangimento ou prejuízo aos mesmos. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados. Especificamente, nenhum nome, identificação de pessoas ou de locais interessa a esse estudo. Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na dissertação, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este “Termo de Consentimento Livre e Esclarecido” no local indicado abaixo. Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

| | |
|---|---|
| ´Gilcimar da Cruz Leal | Profª Drª NEUZA TERAMON |
| Pesquisador | Orientadora |
| Mestrando em Matemática CEE/UEL | MAT/CEE/UEL |

Eu, ______________________________________________________________,
assino o termo de consentimento, após esclarecimento e concordância com os objetivos e condições da realização da pesquisa **Resolução de problemas geométricos sob diferentes perspectivas**, permitindo, também, que os resultados gerais deste estudo sejam divulgados sem a menção dos nomes dos pesquisados.

Londrina, _____ de ______________ de 201_.

______________________________
Assinatura do Pesquisado/da Pesquisada

Qualquer dúvida ou maiores esclarecimentos, entrar em contato com os responsáveis pelo estudo:

**e-mail**: professorgilleal@hotmail.com
**Telefone:** 3324-2263 (Colégio Estadual Prof. Newton Guimarães)
**Comitê de Ética UEL:** (43) 3371- 5455

# Anexo B

## Resolução da atividade 3.5 feito pelo Professor 1

A área do triângulo AEG é a soma das áreas dos dois quadrados (ABCD e CEFG) subtraído da soma das áreas dos três triângulos: ABE, ADG e EFG.

As áreas (A) dos quadrados são:

$A_{CEFG} = 12^2 = 144$

Denotando $\overline{DG} = x$ cm, então $A_{ABCD} = (x + 12)^2 = x^2 + 24x + 144$

As áreas (A) dos triângulos são:

$A_{ABE} = \frac{(x + 24).(x + 12)}{2} = \frac{x^2 + 36x + 288}{2}$

$A_{ADG} = \frac{(x + 12).x}{2} = \frac{x^2 + 12x}{2}$

$A_{EFG} = \frac{12\ .\ 12}{2} = \frac{144}{2}$

Área (A) do triângulo AEG:

$A_{AEG} = A_{ABCD} + A_{CEFG} – (A_{ABE} + A_{ADG} + A_{EFG})$

$A_{AEG} = 144 + x^2 + 24x + 144 - \left(\frac{x^2 + 36x + 288 + x^2 + 12x + 144}{2}\right)$

$A_{AEG} = 144 - 72$

$A_{AEG} = 72\ cm^2$