Universidade Estadual de Londrina

BEATRIZ ESTULANO VIEIRA

INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE SEGURIDADE SOCIAL *A LÁ* "PAY-AS-YOU-GO" AO MODELO INTERGERACIONAL DE CICLO DE VIDA

Londrina
2022

BEATRIZ ESTULANO VIEIRA

INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE SEGURIDADE SOCIAL *A LÁ* "PAY-AS-YOU-GO" AO MODELO INTERGERACIONAL DE CICLO DE VIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Regional da Universidade Estadual de Londrina-UEL como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientador: Professor Dr. Renato Nozaki Sugahara

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

VIEIRA, BEATRIZ ESTULANO

INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE SEGURIDADE SOCIAL A LÁ “PAY-AS-YOU-GO” AO MODELO INTERGERACIONAL DE CICLO DE VIDA / BEATRIZ ESTULANO VIEIRA. - Londrina, 2022.

82 f. : il.

Orientador: RENATO NOZAKI SUGAHARA. Dissertação (Mestrado em Economia Regional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Estudos Sociais Aplicados, Programa de Pós-Graduação em Economia Regional, 2022.

Inclui bibliografia.

1. Seguridade Social. Pay-as-you-go. Controle Ótimo. - Tese. I. SUGAHARA, RENATO NOZAKI. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Estudos Sociais Aplicados. Programa de Pós-Graduação em Economia Regional. III. Título.0

CDU 33

BEATRIZ ESTULANO VIEIRA

INTRODUÇÃO DO SISTEMA DE SEGURIDADE SOCIAL *A LÁ* "PAY-AS-YOU-GO" AO MODELO INTERGERACIONAL DE CICLO DE VIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Regional da Universidade Estadual de Londrina-UEL como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

BANCA DA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Renato Nozaki Sugahara
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dra. Joanna Georgios Alexopoulos
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Ricardo Silva Azevedo Araújo
Universidade de Brasília - UnB

Londrina, 06 de maio de 2022.

“O verdadeiro valor das coisas é o esforço e o problema de as adquirir. ” Adam Smith

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço de coração ao meu professor e orientador Renato Nozaki Sugahara, por me mostrar que tudo é possível com esforço e dedicação. Agradeço pelo apoio, paciência, conselhos, confiança e pelos ensinamentos. Agradeço também a professora Joanna Georgios Alexopoulos, que contribuiu com o desenvolvimento do trabalho e me ajudou a acreditar e executar minhas ideias. Acrescendo aos meus agradecimentos o meu estimado amigo João Gabriel, que me acompanhou durante todo o processo de escrita, com comentários e apontamentos de grande relevância, tornando essa jornada mais leve e feliz. Expresso também minha gratidão a todos os meus professores, os quais foram fundamentais na minha trajetória.

Agradeço também a toda minha família em especial aos meus pais, Luísa e Ailton, e minhas irmãs, Juliana e Giovanna, por todo o apoio financeiro e emocional. Meio a eles faço meus sinceros votos de gratidão ao meu namorado Hugo e seus familiares por toda compreensão, amor e ensinamento, mostrando que o conhecimento é a única virtude que nos acompanhará até o fim. Por fim agradeço a todos que de alguma forma contribuíram durante toda essa jornada acadêmica.

ESTULANO VIEIRA, Beatriz. **Introdução Do Sistema De Seguridade Social a lá "Pay-As-You-Go" Ao Modelo Intergeracional De Ciclo de vida.** 2022. 87 f. Dissertação (Mestrado em Economia Regional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

O objetivo central deste trabalho é entender os efeitos do sistema de seguridade social a lá "pay-as-you-go" (PAYG) expandindo o modelo de Baranzini (1991, CAP 6). O trabalho foi dividido em três capítulos independentes, interligados entre si. O capítulo 1 estende o modelo proposto, acrescentando a hipótese de mercados imperfeito, crescimento populacional, tentando responder ao debate atual sobre as alterações na composição da pirâmide etária, diferentes taxas de preferência intertemporal, e governo balanceado. Para a solução do modelo, aplicou-se o "Princípio do Máximo" para encontrar o consumo e estoque de capital para cada classe no ótimo, em cada período. As principais conclusões observam que o sistema PAYG impacta no consumo dos agentes, assim como, a taxa de crescimento populacional. O segundo capítulo expande o primeiro, removendo a hipótese de diferentes taxas de preferência intertemporal, e acrescentando o cálculo do benefício de seguridade social. A metodologia utilizada aqui é a de otimização, assim, foi recalculado o ótimo do consumo, além de fazer a agregação do consumo, poupança e estoque de capital de cada classe. Concluiu-se que o PAYG impacta no consumo e no estoque de capital de ambas as classes. Por fim, no capítulo 3 foi realizada uma simulação numérica em um modelo de gerações sobrepostas (MGS), concluindo que o PAYG aumentará o consumo e o bem-estar dos trabalhadores, no entanto, a contribuição social apresenta um ponto máximo. Todo esse estudo buscou contribuir com a literatura.

Palavras-chave: seguridade social; pay-as-you-go; controle ótimo.

JEL: J26, D15, C61

ESTULANO VIEIRA, Beatriz. **Introduction of Social Security a lá “Pas-as-you-go” in a Intergeneration Life Cycle Model.** 2022. 87 p. Dissertation (Master’s in Regional Economics) - State University of Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The central objective of this paper is to understand the effects of the social security system there “pay-as-you-go” (PAYG) by expanding Baranzini’s (1991, CAP 6) model. The paper has been divided into three independent, interconnected chapters. Chapter 1 extends the proposed model by adding the imperfect markets hypothesis, population growth, trying to respond to the current debate on changes in the composition of the age pyramid, different intertemporal preference rates, and balanced government. To solve the model, the "Principle of Maximum" was applied to find the consumption and capital stock for each class in the optimum in each period. The main findings note that the PAYG system impacts the consumption of agents, as well as the population growth rate. The second chapter expands on the first by removing the assumption of different intertemporal preference rates and adding the calculation of the social security benefit. The methodology used here is optimization, so the consumption optimum was recalculated, in addition to aggregating consumption, savings, and capital stock for each class. It was concluded that PAYG impacts consumption and the capital stock of both classes. Finally, in chapter 3 a numerical simulation was performed in a model of overlapping generations (MGS), concluding that PAYG will increase consumption and workers' welfare, however, the social contribution presents a maximum point. This entire study sought to contribute to the literature.

JEL: J26, D15, C61

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

NOTAÇÕES

$\dot{c}_i$	Variação do consumo no tempo de i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$\dot{k}_i$	Variação do estoque de capital de i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$\dot{k}_i^p$	Variação do estoque de capital dos aposentados i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$\dot{k}_i^a$	Variação do estoque de capital dos ativos i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
A_t	Especialização do trabalho
$B_0(t)$	Valor presente dos benefícios previdenciários da geração t
$C_i(t)$	Consumo agregado de i, no tempo t, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$C_w^R(t)$	Consumo agregado dos trabalhadores aposentados no tempo t
H_i	Hamiltoniano de i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$\underline{K}$	Limite inferior do espaço de estado
$\bar{K}$	Limite superior do espaço de estado
$K_i(t)$	Estoque de capital agregado de i, no tempo t, i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente
N_c	Número de capitalistas ativos
$N_i(t)$	Número de i vivos no tempo t,i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente
$N_i^A(t)$	Número de i ativos no tempo t,i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente
N_t	População
N_w	Número de trabalhadores pertencentes ao cohort 0
$N_w^R(t)$	Número de trabalhadores aposentados no tempo t
$S_i(t)$	Poupança agregadas de i, no tempo t, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
$S_w^A(t)$	Poupança agregadas dos trabalhadores ativos no tempo t
U_i	Função de utilidade de i,i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente

$c_i(t)$	Consumo de i no tempo t,i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente
c_w^A	Consumo dos trabalhadores quando estão ativos
c_w^R	Consumo dos trabalhadores quando aposentados
e^{rk}	Consumo no tempo t+k
$\bar{g}$	Taxa de crescimento do consumo dos capitalistas
g^*	Taxa de crescimento do consumo dos trabalhadores
k_0	Estoque de capital herdado dos capitalistas
k_c^a	Estoque de capital do capitalista quando ativo
k_c^p	Estoque de capital do capitalista quando inativo
$k_i(t)$	Estoque de capital de i no tempo t,i=c,w para capitalistas e trabalhadores, respectivamente
k_w^a	Estoque de capital do trabalhador quando ativo
k_w^p	Estoque de capital do trabalhador quando inativo
n_k	Número de pontos grid
t_C	Tributação do capital
t_W	Tributação salarial
w_0	Salário inicial
δ_C	Preferência intertemporal pura dos capitalistas
δ_W	Preferência intertemporal pura dos capitalistas
δ_t	Preferência intertemporal pura
λ_i	Preço sombra, i=1,2
B	Herança
R	Idade em que se torna inativo
S	Poupança
T	Fim do período inativo
WF_i	Bem-estar de i, i=c,w para capitalistas e trabalhadores respectivamente
Y	Renda
a	Preferência temporal
b(t)	Benefício da Previdência Social no momento t
c(t)	Consumo no tempo t
d	Distância
g	Taxa de nascimentos

i	Taxa de juros de depósito
m	Taxa de progresso técnico aumentador de trabalho
n	Taxa natural de crescimento
p	Proporção fixa do salário caso o trabalhador ainda estivesse trabalhando
r	Taxa de juros
s	Propensão marginal a poupar
t	Início do período ativo
U	Utilidade
v	Fim do período ativo
v	Tecnologia
w(t)	Taxa salarial no período t
ε	Tolerância ao erro

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

MODELO DE CICLO DE VIDA INTERGERACIONAL CONSIDERANDO SEGURIDADE SOCIAL

1 INTRODUÇÃO

"Since the end of the nineteenth century significant progress towards the removal of very great disparities of wealth and income has been achieved through the instrument of direct taxation— income tax and surtax and death duties."
A Teoria Geral, Keynes J. (1936, p. 372)

O objetivo central deste capítulo é desenvolver uma abordagem alternativa ao modelo do ciclo de vida intergeracional considerando seguridade social, inspirado no sistema PAYG. É feita uma análise teórica da mobilidade de classe e se o crescimento econômico e a distribuição de riqueza são impactados pela aposentadoria. Neste trabalho, considerou-se o modelo de Baranzini (1991, CAP. 6), que trata de agentes heterogêneos em um modelo de ciclo de vida e motivo herança, o que caracteriza sua abordagem mais próxima da linha de pensamento pós-keynesiana. O tema da seguridade social tornou-se um dos principais temas de discussão econômica e política nos últimos anos, tanto em economias desenvolvidas quanto em economias em desenvolvimento. Segundo Portella e de Souza (2020) ao invés de privatizar a Previdência Social, é preciso solidificar aquela sustentada pelo governo e seu financiamento, para garantir o princípio da dignidade humana. Com esse propósito, usar-se-á um modelo de ciclo de vida, o qual é útil para analisar o impacto da seguridade social [ver Gertler (1990)].

Os princípios da teoria do ciclo de vida foram apresentados no início da década de 1950 por Modigliani e Brumberg (1954). Os autores assumem que os indivíduos planejam seu comportamento do nível de consumo e poupança, ao longo do seu ciclo de vida, com o objetivo era explicar os padrões. Para isso, é considerado que o indivíduo vive dois períodos, onde no primeiro realiza atividades remuneradas e no segundo aposenta-se. Assim, é necessária a análise do comportamento da sua renda total e decisões de consumo que impactam a produção agregada no nível macroeconômico. Em resposta à abordagem tradicional, Balestra e Baranzini (1971) trabalharam em um modelo de crescimento de duas classes considerando agentes heterogêneos. É interessante que, como resultado, os autores determinam que a distribuição funcional da renda, em equilíbrio, é dada pela “Equação de Cambridge”, como desenvolvida por Pasinetti (1962), ou seja, ela é independente dos trabalhadores.

Nesta linha de pensamento, Baranzini (1991) apresentou sua teoria de distribuição de riqueza, considerando ciclo de vida e motivo herança. O autor estabeleceu fundamentos microeconômicos para a teoria com base na estrutura pós-keynesiana. Nell (2013) descreve os microfundamentos como um sistema de otimização considerando os agentes da economia e princípios de racionalidade. Para ele, os indivíduos planejam seu comportamento econômico ao longo de seu ciclo de vida, bem como conciliam simultaneamente suas decisões individuais intergeracionais. De acordo com Wolff (1988) a especificação de um modelo de economia do ciclo de vida com duas classes parece ser consistente com o resultado de Pasinetti, quanto à taxa de juros e crescimento da produtividade estão em equilíbrio estacionário. Neste cenário, a desigualdade de riqueza entre os indivíduos parece permanecer constante ao longo do tempo. Estas conclusões reforçam a validade da introdução dos fundamentos microeconômicos nos modelos de duas classes.

Porém, o modelo de Baranzini (1991) e suas extensões [como Teixeira, Sugahara e Baranzini (2002); Baranzini, Bejuino e Teixeira (2003); Wei e Araújo (2009); Sugahara *et al.* (2016); e Góes e Teixeira (2020)] não trata do sistema de seguridade social, que interfere na dinâmica do modelo, uma vez que o consumo dos aposentados é composto pela previdência. Nesse sentido, decidiu-se introduzir o sistema PAYG, com orçamento equilibrado, onde a receita pública é utilizada como transferência de renda dos capitalistas e trabalhadores mais jovens para o consumo dos trabalhadores aposentados. Abordagens semelhantes foram apresentadas por Heijdra e Ploeg (2002, CAP. 17) e Acemoglu (2009, CAP. 9) onde o trabalhador ativo sustenta o benefício do aposentado no mesmo período, havendo uma transferência de recursos dos jovens para os idosos em cada período. Assim, o mecanismo de transferência de renda (considerando as atividades governamentais), ajusta os valores recebidos e transferidos sem perda de recursos entre o ativo e o aposentado. Portanto, se trata de um sistema que apresenta uma solução que se adequa às características do ciclo de vida por tratar de atividades intertemporais.

Esse capítulo é baseado em Baranzini (1991, CAP. 6), e no artigo de Góes e Teixeira (2020). Assim, como para esses autores, lidar-se-á com o pressuposto de que cada indivíduo faz seus planos de forma a maximizar o valor do fluxo de utilidades descontadas do consumo, ao longo da vida. Além disso, como eles, também será tratado um sistema de tempo contínuo. Porém, será introduzida a hipótese de mercados imperfeitos, crescimento populacional e governo balanceado.

Como em Steedman (1972), o agente governamental opera com orçamento equilibrado, tributando os capitalistas e trabalhadores, agindo como mediador da transferência de renda para a segunda classe, a mais vulnerável. Neste trabalho, essas classes estão divididas entre ativos e inativos, sendo os inativos os mais vulneráveis, que receberão os benefícios da previdência. A tributação será direta e sobre os rendimentos, funcionando como mecanismos de transferência de renda para os aposentados. Por hipótese, os capitalistas não trabalham e vivem do consumo da renda dos capitais, logo não se aposentam, mesmo que paguem a tributação. Enquanto para os trabalhadores, sua tributação é destinada apenas para consumo futuro no período de aposentadoria. Keynes (1936) afirmou que, por meio da tributação direta, o Estado consegue uma menor concentração de renda e riqueza disponíveis. Assim, a redistribuição da riqueza será um dos assuntos tratados neste capítulo, primeiro porque a riqueza é um estoque, segundo porque está diretamente ligada ao crescimento econômico. Nesse sentido, considera-se a tributação absorvida pelo agente governamental, que realizará a transferência, e o setor público não operará com déficits ou superávits.

Este capítulo foi dividido em 6 seções: a primeira é esta introdução que apresenta os objetivos e a justificativa da nova abordagem. A segunda apresenta um panorama histórico da previdência social em modelos teóricos. Em seguida, apresentar-se-á os princípios e algumas extensões da abordagem do ciclo de vida. A quarta parte apresenta as configurações do modelo, a estrutura e as propostas. A seção cinco apresenta a maximização e os resultados. Por fim, a seção seis apresenta as considerações finais.

2 UMA VISÃO HISTÓRICA SOBRE A MODELAGEM PREVIDENCIÁRIA

A crise de 1929 trouxe à tona preocupações com a organização financeira. A Grande Depressão tornou politicamente possível a criação do programa de seguridade social. Com o intuído de reduzir e estabilizar a força de trabalho em meio à crise do desemprego, a previdência social foi criada. Segundo Feldstein (1976), o processo de poupança do ciclo de vida foi radicalmente alterado pelo crescimento dos programas públicos de aposentadoria previdenciária, anos depois, ele discute as diferenças dos programas de previdência privada e pública.

De acordo com Feldstein (1978), os programas públicos de previdência social atuam como substitutos da poupança familiar. Já a previdência privada funciona como despesa empresarial dedutível, e quando os benefícios são pagos, são considerados como rendimento tributável para os empregados. Embora tais programas públicos de seguridade social sejam susceptíveis de reduzir a poupança nacional, esta tendência é compensada nos programas privados. As pensões privadas, poderiam, em princípio, diminuir as poupanças agregadas, no entanto, seu crescimento não tem prejudicado a poupança. Na verdade, causará um aumento da poupança de um pequeno montante causado pela combinação do financiamento parcial das empresas, e a resposta dos acionistas às responsabilidades não financiadas.

Portanto, para Gertler (1990), a previdência tem resultados positivos na intensidade de capital, como taxas de juros reais e oferta de trabalho. Uma implicação é que a seguridade social influenciará positivamente no consumo agregado, na poupança e na distribuição de renda. No entanto, há dois ajustes na riqueza de um trabalhador. O primeiro é quando a riqueza inclui o valor dos pagamentos previdenciários igual ao que o trabalhador espera quando se aposentar, o segundo é quando a medida da riqueza é agora líquida de um fluxo de impostos descontados. Embora o aumento da seguridade social aumente o estoque de capital, ele tem um efeito negativo sobre a oferta de trabalho dos aposentados.

Para o caso brasileiro, o sistema previdenciário é baseado no modelo paramétrico, o que leva a acreditar que esse tipo de sistema não é confiável para um futuro próximo. Segundo Holland e Málaga (2018), este sistema tem como pilar a solidariedade entre gerações, assim, as contribuições dos jovens ativos financiam os beneficiam dos pensionistas. Este sistema tem se mostrado insustentável graças às projeções populacionais e mudanças no mercado de trabalho. Inviabilizando o aumento de incentivos públicos e reduzindo benefícios para a maioria dos brasileiros, esse sistema tornou-se inadequado. Como solução, os autores propõem a adoção de um modelo híbrido, combinando as vantagens dos atuais esquemas de repartição com o regime de capitalização.

O primeiro sistema a ser considerado é o método PAYG, utilizado pelo governo como modelo teórico para garantir a seguridade social. Aqui, as receitas fiscais são pagas como benefícios concomitantes e não são acumuladas, quando a geração inativa de trabalhadores se aposentar, os benefícios dependerão do pagamento de impostos dos que estiverem ativos. Já no segundo sistema, cada trabalhador economiza recursos, em uma conta própria individual, o que permite diversificar o risco entre os membros da mesma geração, esse sistema vigora no Chile desde a reforma de 1981. Assim, para Holland e Málaga (2018), a estrutura ideal seria combinar benefícios pagos pelo governo (universais) com um teto relativamente baixo em formato de distribuição, e mais contribuições individuais (privadas).

Seguindo outra linha de pensamento, Miller (2020) afirma que a adoção de previdência privada não seria uma boa alternativa, uma vez que este sistema não é redistributivo e não garante benefícios vitalícios. Em vez disso, aumentaria a desigualdade entre os idosos e seria menos eficaz na redução da pobreza do que a previdência social, portanto, não seria uma solução viável.

Com o objetivo de diminuir as lacunas de gastos com serviços públicos e obtendo lucros éticos, novos mercados baseados na cobrança e negociação de dívidas estão surgindo. Lavinas (2018) afirma que a financeirização está tornando não apenas os pobres cada vez mais dependentes de crédito e empréstimos, mas também as classes médias. Assim, não se tem mais estados de bem-estar social, mas sim “estados de tarifa de dívida”, já que, em vez de consumir crédito para comprar mercadorias ou serviços, as pessoas consumirão dívida. Portanto, estar e viver endividado pode se tornar a norma, principalmente em tempos de políticas de austeridade neoliberais, quando o governo busca cortar gastos.

Drèze e Khera (2017) analisam o caso da Índia e concluem que a expansão dos programas de seguridade social, juntamente com o reconhecimento mais amplo dos direitos econômicos e sociais, trouxe uma importante contribuição para o bem-estar humano. Ellery Jr. e Bugarin (2003) comprovaram empiricamente que o sistema previdenciário PAYG, contribuirá para a melhoria do bem-estar, que apresenta um ganho de bem-estar em relação a um sistema totalmente financiado pela poupança.

Por esses motivos, assumir-se-á que a aposentadoria irá se comportar como um sistema PAYG, e será intermediada pelo governo, ao longo do ciclo de vida. O governo intervém para evitar situações que se tornem socialmente insuportáveis, como afirma Pasinetti (2012), seja por meio de gastos governamentais, seja por meio da redistribuição de renda. Aqui, essa redistribuição será feita via cobrança de impostos, para a classe mais vulnerável, os trabalhadores inativos. Foley e Michl (1999, p. 225) dizem: "*Government taxes and transfers can have effects on the allocation of resources if the taxes and transfers are linked to economic decision variables"*.

Assim, neste capítulo, lidar-se-á com ciclo de vida. Nesses modelos, os indivíduos vivem dois períodos, um quando jovem e ativo, e outro quando inativo. Além disso, assume-se a existência de duas classes, capitalistas e trabalhadores, pois, segundo Balestra e Baranzini (1971), as implicações ideais de um modelo com agentes heterogêneos para a economia apresentam implicações convenientemente. Isso evidencia que o comportamento de poupança dos trabalhadores é irrelevante para a determinação dos resultados, ou seja, eles não são fortes o suficiente para impactar no sistema. Na próxima seção, é mostrada uma visão histórica da teoria dos ciclos de vida.

3 PRINCÍPIOS DA TEORIA DE CICLO DE VIDA E ALGUMAS EXTENSÕES

No início da década de 1950, Franco Modigliani, entre outros, desenvolveram uma teoria assumindo que os indivíduos planejam seu comportamento do nível de consumo e poupança, ao longo de seu ciclo de vida. Neste caminho, Baranzini (1991) desenvolveu uma teoria da distribuição de riqueza, considerando a teoria intergeracional e o motivo herança. Seu modelo estabelece fundamentos microeconômicos para a teoria do crescimento e distribuição com base na estrutura pós-keynesiana. O objetivo seria justificar uma melhor alocação de recursos e crescimento econômico. Assim, é possível otimizar a utilidade dos agentes e verificar seu comportamento ao longo do período. Em seu modelo, a economia é dividida entre capitalistas e trabalhadores, onde a primeira classe recebe lucros e herança, enquanto a segunda recebe salários. Várias extensões de sua abordagem foram propostas.

Teixeira, Sugahara e Baranzini (2002) introduziram as atividades governamentais ao modelo, considerando apenas o imposto sobre herança. Em seu artigo, eles mostraram como as transferências governamentais podem ser apoiadas por micro fundamentações ortodoxas. Eles expandiram Baranzini (1991) em um modelo de tempo discreto (dois períodos) que trata da acumulação de capital, distribuição de renda e herança intergeracional. Conclui-se que a inclusão do pressuposto das transferências é relativamente negativa para a participação dos capitalistas no estoque total de capital. Portanto, a hipótese do ciclo de vida e o motivo herança são compatíveis com as atividades governamentais básicas dentro de uma estrutura pós-keynesiana. Baranzini, Benjuino e Teixeira (2003), também assumem que tal tributo é integralmente repassado aos trabalhadores, que não deixam herança aos seus descendentes. Dentro deste trabalho, é possível mostrar que o capital total, assim como a poupança total, irá se expandir.

Wei e Araújo (2009) fazem uma análise da tributação ótima para capitalistas e trabalhadores na abordagem de Baranzini, com o intuito de compreender o comportamento das finanças públicas. Essa análise trata o lazer e a atividade da classe trabalhadora, com o intuito de verificar em qual situação optar-se-ão por trabalhar ou não. Outra conquista feita por eles é que, no longo prazo, a tributação do capital tende a ser zero, e nesse caso o modelo é levado a verificar a equalização entre taxa de lucro e imposto de preferência intertemporal. Segundo eles, os trabalhadores podem fornecer mais ou menos empregos dependendo da alíquota do imposto sobre os salários. Eles concluem que a tributação dos trabalhadores não influencia a acumulação de capital.

Sugahara *et al.* (2016) buscaram conceber microfundamentos ortodoxos para o modelo macroeconômico com o governo. Para tanto, utilizaram a sobreposição de gerações com agentes heterogêneos e o modelo com governo para permitir que ambas as classes (capitalista e trabalhadora) mantivessem um estoque de capital intergeracional positivo. Além disso, incorporaram agentes representativos em classes heterogêneas. O principal resultado de seu trabalho foram os efeitos da tributação na distribuição da riqueza entre as classes. Eles também concluem um efeito positivo sobre as taxas de juros, uma vez que, a presença do governo aumenta a participação da classe trabalhadora no estoque total de capital da economia. Vale notar que se a disposição da classe trabalhadora em deixar herança aos seus descendentes é muito alta, eles podem desaparecer com a classe capitalista, levando à eutanásia do capitalista.

Outra extensão foi projetada por Góes e Teixeira (2020) quando apresentam uma abordagem alternativa ao modelo de Baranzini (1991), para o caso de tempo contínuo. Neste artigo, os autores, permitem o progresso técnico e diferenças comportamentais entre capitalistas e trabalhadores. Aqui, ambas as classes podem deixar e receber a herança, dependendo de suas preferências. Os autores concluíram que a possibilidade de os trabalhadores deixarem herança, neste caso, não altera sua distribuição funcional de renda. No entanto, altera seu consumo e estoque de capital (evidência de seu motivo herança), ampliando o crescimento da economia. Portanto, essas teorias não consideraram como a seguridade social pode impactar nos resultados do sistema, que é um dos objetivos deste capítulo. Na próxima seção, será apresentada as configurações do modelo.

4 CONFIGURAÇÕES DO MODELO

Uma característica fundamental do modelo de crescimento neoclássico é que eles admitem uma família representativa para a análise da acumulação de capital. Além disso, permite-nos estabelecer a equivalência entre problemas de equilíbrio e crescimento otimizado. No entanto, essa suposição não é adequada à medida que a população cresce, o que é o caso apresentado aqui. Isso ocorre, porque, principalmente as decisões tomadas pela geração mais jovem afetarão os idosos. Essas interações econômicas não têm contrapartida no modelo de crescimento neoclássico. Acemoglu (2009) afirma que esses modelos são úteis por vários motivos. Primeiro, eles capturam a interação potencial de diferentes gerações de indivíduos no mercado. Em segundo lugar, eles fornecem uma alternativa tratável aos modelos de agentes representativos de horizonte infinito. Terceiro, algumas de suas principais implicações são diferentes daquelas baseadas no modelo neoclássico de crescimento, bem como da dinâmica de acumulação de capital e consumo. A maneira mais simples de relaxar a suposição dos agentes representativos é realizada pela introdução de dois períodos.

Diferente do modelo neoclássico, Baranzini (1991) analisa a otimização do consumo por uma perspectiva da demanda efetiva, contudo, mantendo as características neoclássicas apresentadas acima. Para obter soluções analíticas, o presente modelo, considera dois agentes, trabalhadores e capitalistas, os quais vivem dois períodos, ativos e inativos, baseado na abordagem de Baranzini (1991, CAP. 6). Os indivíduos são adultos totalmente treinados em $t = 0$ quando começam a ganhar renda, seu período de atividade é de R anos e depois se aposentam. Cada indivíduo morre com a idade T, desfrutando assim de $T - R$ anos de aposentadoria. Isso permite observar os efeitos de vários parâmetros como taxas de poupança, tributação e acumulação de capital em um modelo mais generalizado de ciclo de vida e distribuição de renda e riqueza. Para ambos os indivíduos, o critério de escolha maximiza o valor das utilidades de desconto:

$$U_C = \int_0^T e^{-\delta_C t} U_C[c_C(t)]dt = \int_0^T e^{-\delta_C t} \frac{1}{a} [c_C(t)]^a dt \quad (1)$$

$$U_W^A = \int_0^R e^{-\delta_W t} U_W^A[c_W^A(t)]dt = \int_0^R e^{-\delta_W t} \frac{1}{a} [c_W^A(t)]^a dt \quad (2)$$

$$U_W^R = \int_R^T e^{\eta t} U_W^R[c_W^R(t)]dt = \int_R^T e^{(1+\eta)t} \frac{1}{a} [c_W^R(t)]^a dt \quad (3)$$

As equações (1) e (2) mostram, respectivamente, as funções de utilidade geral dos capitalistas e dos trabalhadores ativos, que são afetadas negativamente pela preferência intertemporal pura de cada classe. Essas funções são do tipo *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA). A equação (3) é a utilidade dos trabalhadores aposentados e, como esses trabalhadores não deixam herança, eles não são impactados pela preferência intertemporal pura. Como o PAYG representa a transferência de renda dos capitalistas e trabalhadores ativos para os aposentados, a taxa de crescimento da população afeta o nível de seu consumo. Cada classe tem seu consumo definido como:

$$c_c(t) = c_c(0)e^{g^*_{c_c}t} = k_0\left(r - g^*_{c_c}\right)\frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}}e^{g^*_{c_c}t} \quad (4)$$

$$c_w^A(t) = c_w^A(0)e^{g_{c_W^A}t} \quad (5)$$

$$c_W^R(t) = c_w^R(R)e^{g_{c_W^R}t}$$

(6)

onde: $g^*_{c_c} = \frac{r-\delta}{1-a}$; $g_{c_w^A} = \frac{i-\delta_W}{1-a}$; $g_{c_W^R} = \frac{\eta+i}{1-a}$.

As equações (4), (5) e (6) representam, respectivamente, o consumo dos capitalistas, trabalhadores ativos e aposentados. A semelhança entre esta abordagem e Góes e Teixeira (2020) é a consideração de diferentes taxas de crescimento do consumo. A primeira para os capitalistas, a segunda para os trabalhadores ativos e a última para os trabalhadores aposentados. Contudo, este modelo difere de Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020) por considerar mercados imperfeitos, isso é; $i < r$. Seguindo Rust e Phelan (1997), a imperfeição dos mercados é condição necessária para que a Previdência Social tenha um efeito comportamental significativo, pois se os indivíduos tivessem acesso a um mercado perfeitos, poderiam projetar sua própria aposentadoria ideal. Sendo, i a taxa de juros de depósito, que apenas garante aos trabalhadores uma pequena poupança para transferir a renda do período ativo para o período aposentado. Assim, pode-se garantir que a contribuição funcione como um sistema de seguridade social e não apenas como um processo de transferência de renda. Aqui, o governo funciona repassando a tributação para a classe mais vulnerável, assim como no modelo de Steedman (1972), porém, diferente dele a classe mais vulnerável aqui são apenas os trabalhadores inativos. Sendo assim, o consumo desta classe será:

$$c_w^R(t) = \left[(1+\eta)\{t_c r k_c(t)^* + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R}\right] \quad (7)$$

A equação (7) mostra a renda transferida de capitalistas e trabalhadores ativos para trabalhadores aposentados. Essa equação é a definição do processo PAYG, onde a geração mais jovem deixa uma parte de sua renda para os mais velhos. Essa fórmula difere do modelo original apresentado por Baranzini (1991), bem como, por suas extensões como Teixeira, Sugahara e Baranzini (2002), Wei e Araújo (2009), Sugahara *et al.* (2016) e Góes e Teixeira (2020). Essa equação garante o mínimo de sobrevivência, uma vez que, mesmo exogenamente, o governo pode impor um valor mínimo para cada tributação, para garantir pelo menos o mesmo nível de consumo dos trabalhadores ativos. Nesse caso, tem-se a garantia de que a mobilidade de classe se mantém, e os aposentados não deterioram seu consumo. A maximização das utilidades é sujeita as restrições de variações do estoque de capital, definidas como:

$$\dot{k}_C = (1 - t_C) r k_C - c_C \quad (8)$$

$$\dot{k}_W^A = (1 - t_W)(w + ik_W^A) - c_W^A \quad (9)$$

$$\dot{k}_W^R = (1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)$$

(10)

As fórmulas (8) e (9) definem a receita do setor público tributando os rendimentos e garante aos trabalhadores a distribuição de renda pessoal em R. Essas equações mostram o comportamento de cada estoque de capital (funções poupança/investimento). Os tributos aqui tratados são diretos e sobre a renda, além disso, funcionam como mecanismo previdenciário, descontado a herança. A equação (10) representa o comportamento do estoque de capital para os aposentados, que será composto pela soma da renda proveniente do PAYG e um valor fixo investido quando eram ativos, descontado o consumo. Observe que, como a força de trabalho está variando no tempo, a renda proveniente do PAYG depende do nível da taxa de crescimento populacional.

Conforme proposto por Kaldor (1955-6), a tributação é aplicada como um imposto pessoal no nível das famílias, com alíquotas progressivas aplicáveis ao consumo agregado. Isso permite o financiamento da previdência social, transferindo parte da renda arrecadada pela acumulação de capital para a classe mais vulnerável, os trabalhadores inativos. A tributação dos capitalistas e dos trabalhadores mais jovens trata-se de mecanismos de transferência de renda para a aposentadoria dos trabalhadores idosos. Para Hicks (1999), os programas de seguro social são mais do que resultados convenientes de encontros particulares da classe trabalhadora com outros poderes. Esses são direitos que cabem apenas a classe trabalhadora, o que garante que essa classe se aposente. Já que os capitalistas, não trabalham e vivem do consumo da renda do capital, então eles não se aposentam. A partir dessas equações, temos nosso sistema para analisar os efeitos da aposentadoria no modelo. Esta análise é abordada na próxima seção usando o Princípio do Máximo de Pontryagin.

5 MAXIMIZAÇÃO E CONTROLE ÓTIMO[1]

O controle ótimo é um conjunto de equações diferenciais que descrevem os caminhos das variáveis de controle que minimizam ou maximizam a função objetivo. Para a solução, são consideradas a função objetivo (o que se quer maximizar), as equações que modelam a dinâmica do problema em cada instante de tempo e as restrições do problema. Um importante resultado na teoria do controle ótimo é o "Princípio do Máximo" (desenvolvido por Pontryangin, 1987), que é um resultado fundamental para obter a solução ótima de um problema desse tipo. Estas são condições de otimização necessárias. Através deste resultado, têm-se um método de encontrar candidatos para controles ótimos por meio das condições necessárias, tais como em problemas dinâmicos de otimização. Segundo Góes e Teixeira (2020), o uso de técnicas de otimização dinâmica, em particular o Princípio Máximo de Pontryagin, permite a otimização do comportamento dos agentes.

Na economia, lida-se com o princípio da racionalidade, apresentado pela primeira vez por Turgot (1766) e estruturado como um axioma microeconômico por Walras (1874). Ele apresentou que todos os agentes (capitalistas e trabalhadores) buscam maximizar suas utilidades. Segundo Dorfman (1969), as equações básicas do princípio do máximo são as formas limite das condições necessárias de primeira ordem para um máximo aplicado ao mesmo problema. Além disso, ele afirma *"the same results deduced from the more familiar method of maximizing subject to a finite number of constraints"* (Dorfman, 1969, p.827). A abordagem usada aqui é mostrada no capítulo 4 por Léonard e Long (1992), que segue as ordens acima:

1º - Determine as funções objetivo e suas restrições.
2º - Construa o Hamiltoniano que será otimizado.
3º - Defina cada condição de primeira ordem entre o Hamiltoniano e as variáveis de estado e de co-estado.
4º - Aplique o princípio máximo.

Proposição 1 - O processo de aposentadoria PAYG depende da quantidade de renda dos capitalistas e trabalhadores e da taxa de crescimento da população. A receita do

---
[1] As manipulações matemáticas encontram-se no Apêndice 1 ao final da dissertação.

governo veio da tributação direta sobre rendimentos, que é repassada aos trabalhadores aposentados. Nesse sentido, considera-se os sistemas ($\dot{c}_C$,$\dot{k}_C$), ($\dot{c}_W^A$,$\dot{k}_W^A$), e ($\dot{c}_W^R$,$\dot{k}_W^R$). Nas fórmulas dinâmicas, deve-se definir a solução ótima para cada classe. **Prova**: Este problema se sustenta em um problema de maximização. As funções de consumo determinam a função utilidade (função objetivo), e as restrições são as variações do estoque de capital. Primeiro, o problema do capitalista será:

$$MaxU_C = \int_0^T e^{-\delta_C t} \frac{1}{a} [c_C(t)]^a dt$$

Sujeito a: $\dot{k}_C = (1 - t_C) r k_C(t) - c_C(t)$

Assim, é possível estruturar o hamiltoniano, sendo ele a utilidade desta classe, somado o custo de oportunidade de se variar o estoque de capital:

$$H_c = e^{-\delta_C t} \frac{1}{a} [c(t)]^a + \lambda_1 [(1 - t_C) r k_C(t) - c_C(t)]$$

Aplicando a condição de primeira ordem, chega-se aos seguintes resultados:

$$\frac{\partial H_C}{\partial c_C(t)} = c_C(t)^{a-1} e^{-\delta_c t} - \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = c_C(t)^{a-1} e^{-\delta_c t}$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H_C}{\partial k_C(t)} = -\lambda_1 (1 - t_C) r$$

$$\dot{k}_C(t) = \frac{\partial H_C}{\partial \lambda_1(t)} = (1 - t_C) r k_C(t) - c_C(t)$$

Aplicando o Princípio do Máximo de Pontryagin, encontra-se as equações de trajetória do capital e do consumo dos capitalistas.

$$k_C^*(t) = \left(\frac{1 - e^{R(n-r)}}{1 - e^{T\left(g_{c_C}^* - r\right)}}\right) \left(\frac{r - g_{c_C}^*}{r}\right) k_0 \, e^{g_{c_C}^* t}$$

(11)

$$c_C^*(t) = (1 - t_C) \left(\frac{1 - e^{R(n-r)}}{1 - e^{T\left(g_{c_C}^* - r\right)}}\right) \left(r - g_{c_c}^*\right) k_0 e^{g_{c_C}^* t}$$

(12)

A equação (11) depende do nível da herança, mas este resultado não é afetado pela tributação. Este resultado difere do encontrado por Góes e Teixeira (2020), no caso deles, o estoque de capital cresce exponencialmente em relação à taxa de crescimento do consumo e à taxa lucro, enquanto neste caso cresce apenas em relação à taxa de crescimento do consumo. A equação (12) é afetada direta e negativamente pela tributação, transferindo parte do consumo para os aposentados, neste caso, a única diferença em relação há Góes e Teixeira (2020), é a tributação. Deve-se ressaltar que a tributação inicialmente só aparece na fórmula de acumulação de capital (a restrição), porém, em condição de equilíbrio tem-se uma compressão do consumo dos capitalistas $\left[\frac{\partial c_C^*(t)}{\partial t_C} < 0\right]$ para garantir a aposentadoria. Analiticamente falando, a transferência de renda veio do consumo e não do capital total. Portanto, como o estoque de capital está aumentando, isso não significa um prejuízo para os capitalistas. Para os trabalhadores ativos, o problema é:

$$MaxU_W^A = \int_0^R e^{-\delta_W t}\frac{1}{a}[c_W^A(t)]^a dt$$

Sujeito a: $\dot{k}_W^A = (1 - t_W)[w + ik_W^A(t)] - c_W^A(t)$

Construindo o Hamiltoniano, tem-se:

$$H_W^A = e^{-\delta_W t}\frac{1}{a}[c_W^A(t)]^a + e^{nt}\frac{1}{a}[c_W^R(t)]^a + \lambda_2[(1 - t_W)(w + ik_W^A(t)) - c_W^A(t)]$$

Aplicando a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial H_W^A}{\partial c_W^A(t)} = 0 = e^{-\delta_W t}c_W^A(t)^{a-1} - \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_W^A}{\partial k_W^A(t)} = -(1 - t_W)i$$

$$\dot{k}_W^A = \frac{\partial H_W^A}{\partial \lambda_2} = (1 - t_W)(w + ik_W^A) - c_W^A(t)$$

Assim é possível chegar na trajetória do estoque de capital e consumo dos trabalhadores ativos:

$$k_W^{A^*} = \left[\frac{\delta_W e^{-\delta_W t}}{[(1-t_W)i]^a}\right]^{\frac{1}{1-a}} - \frac{w_o e^{mt}}{i}$$

(13)

$$c_W^A(t)^* = \left[\frac{(1-t_W)i}{\delta_W e^{-\delta_W t}}\right]^{\frac{1}{a-1}} = \left[\frac{\delta_W e^{-\delta_W t}}{(1-t_W)i}\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

(14)

A equação (13) é o estoque de capital do trabalhador ativo e, diferentemente do capitalista, agora a tributação afeta este valor. Wei e Araújo (2009) concluem que a tributação do salário não afeta a acumulação de capital, porém, neste modelo será afetado $\left[\frac{\partial k_W^{A^*}}{\partial t_W} > 0\right]$. Este resultado difere do encontrado por Góes e Teixeira (2020), mostrando que o impacto tributário reestruturou todas as fórmulas. A mesma diferença é apresentada em (14), que mostra uma relação positiva entre a tributação do trabalhador e o consumo $\left[\frac{\partial c_W^A(t)^*}{\partial t_W} > 0\right]$, refletindo o aumento do consumo e do estoque de capital dos trabalhadores ativos. Por fim, o problema dos trabalhadores aposentados é:

$$MaxU_W^R = \int_R^T e^{(1+\eta)t}\frac{1}{a}[c_W^R(t)]^a dt$$

Sujeito a: $\dot{k}_W^R = (1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)$

O Hamiltoniano desta classe será:

$$H_W^R = e^{(1+\eta)t}\frac{1}{a}[c_W^R(t)]^a + \lambda_3\big[(1+\eta)\{t_c r k_c(t) + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)\big]$$

Aplicando a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial H_W^R}{\partial c_W^R(t)} = 0 = e^{(1+\eta)t} c_W^R(t)^{a-1} - \lambda_3$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H_W^R}{\partial k_W^R(t)} = 0$$

$$\dot{k}_W^R = \frac{\partial H_W^R}{\partial \lambda_3} = (1+\eta)\{t_c r k_c(t) + t_W[w + i k_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)$$

Assim, encontra-se a trajetória de consumo dos trabalhadores aposentados:

$$c_W^R(t)^* = (1+\eta)\{t_c r k_c(t)^* + t_W[w + i k_W^A(t)^*]\} + \overline{k_W^R}$$
(15)

A equação (15) mostra o consumo dos aposentados em equilíbrio. É interessante que a taxa de crescimento da população afeta esse equilíbrio, cuja conclusão serve para apresentar a robustez do sistema PAYG. Como os trabalhadores poupam parte de sua renda quando são ativos, o valor poupado será consumido quando forem aposentados. Além disto, como essa classe não deixa herança, seu estoque de capital ao final do período T será 0. A próxima seção apresenta as considerações finais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse capítulo contribui em três aspectos:

(I) Foi estendido o modelo de Baranzini (1991, CAP. 6) sobre o aspecto de mercados imperfeitos e uma nova função de consumo dos capitalistas, trabalhadores ativos e trabalhadores aposentados. Considerou-se a tributação direta e sobre a renda dos capitalistas e trabalhadores ativos. Aqui, foram mostradas três taxas diferentes de crescimento do consumo, uma vez que os capitalistas e os trabalhadores terão taxas de juros diferentes. Nesse sentido, com essas novas premissas, estruturou-se um sistema que possibilitou a análise do comportamento da distribuição de renda pessoal

(II) Considerando a nova formulação, foi possível aplicar o Princípio do Máximo de Pontryagin, para definir o estoque de capital e consumo ótimos para cada classe. Assim, comprovou-se o impacto da taxa de crescimento populacional no consumo dos aposentados, o que garante a robustez do sistema PAYG.

(III) Construiu-se, do início ao fim deste capítulo, um debate histórico e teórico em torno do tema previdenciário.

Para concluir, os resultados obtidos no presente capítulo avançam a literatura econômica. No entanto, ainda existem questões analíticas consideráveis a serem tratadas, como uma análise empírica ou a condição de estabilidade do modelo.

CAPÍTULO 2

O SISTEMA PAYG EM UM MODELO DE CICLO DE VIDA: UMA VISÃO PÓS-KEYNESIANA[2]

1 INTRODUÇÃO

"The management of part of the value of labour power cannot then be assumed by either of the parties concerned, the capitalists and the workers: if one or the other does so, it risks introducing class practices which may contradict the objective of assistance or that of social security (for example financial speculation by the bosses, or the use of relief funds to support workers' struggles)"

(de Brunhoff, S. État et Capital, 1982, p. 23.)

O objetivo deste capítulo é mostrar como o sistema previdenciário PAYG impacta na distribuição de renda. O debate em torno da seguridade social recentemente tem se tornado um tema relevante. Nas economias em desenvolvimento, o modelo previdenciário pode representar um grave problema estrutural para as contas públicas, isso é causado pelo desequilíbrio financeiro do sistema, que se manifesta quando a receita é menor que a despesa. Esse problema caracteriza a crise do sistema previdenciário, que decorre de vários motivos, como por exemplo, a mudança demográfica, mudança no mercado de trabalho e outros.

Desde Harrod (1948), com a discussão de "*hump saving*", foi reconhecida a importância de poupar durante os anos de trabalho para consumo durante a aposentadoria. Segundo Diamond (1977), é necessário compreender as razões que justificam a existência dos sistemas de segurança social. Uma das razões para isso, seria a possibilidade de implementação de políticas públicas de natureza distributiva. A previdência social, quando considerada uma visão pós-keynesiana, apresentam mecanismos de redistribuição de renda.

Os planos de previdência pública geralmente seguem o modelo PAYG que tem benefícios definidos e é financiado por meio de impostos. Nesses planos de previdência, os pagamentos aos aposentados são financiados diretamente pelas contribuições dos atuais trabalhadores/contribuintes, conforme aponta Aaron (2010).

---

[2] Uma vez que tratam de artigos independentes, a numeração desse artigo reinicia.

Esse sistema é utilizado pelo governo como método teórico para garantir a seguridade social, onde as receitas são pagas como benefícios concomitantes e não são acumuladas. Sendo assim, quando a geração atual de trabalhadores aposentar, os benefícios dependerão do pagamento de impostos dos que estiveram ativos.

A principal contribuição deste capítulo é entregar um modelo considerando duas classes (trabalhadores e capitalistas), ciclo de vida (um período ativo e outro inativo), o sistema PAYG e mercados imperfeitos. Aqui a receita pública é usada como transferência de renda dos capitalistas e trabalhadores mais jovens para os trabalhadores aposentados. Este sistema foi apresentado por Heijdra e Ploeg (2002, CAP. 17) e Acemoglu (2009, CAP. 9) onde o trabalhador ativo suporta a pensão do aposentado ao mesmo tempo, para que haja uma transferência de recursos dos jovens para os idosos em cada período. Assim, o mecanismo de transferência de renda (considerando as atividades governamentais), ajusta os valores recebidos e transferidos sem perda de recursos.

Este capítulo será dividido em 4 seções, além desta introdução. A próxima seção falará sobre as hipóteses do modelo a ser desenvolvido, passando para a otimização do problema. Na terceira seção, será apresentada a agregação do modelo e, por fim, na quarta seção, serão apresentadas as conclusões do capítulo.

2 CONFIGURAÇÕES DO MODELO

O objetivo principal deste capítulo é analisar como o sistema PAYG afeta a distribuição de renda em um modelo com agentes heterogêneos (capitalistas e trabalhadores) e fricção nos mercados de capitais (diferentes taxas de juros para cada classe). Para isso, baseia-se esta extensão em Baranzini (1991, CAP. 6), quando trata de um modelo intergeracional contínuo, porém, diferentemente dele, neste modelo trata de mercados imperfeitos

A hipótese assumida para os trabalhadores é que essa classe receba salário líquido de contribuição previdenciária $(1-t_w)w(t)$, não deixa legado, mas podem participar dos mercados de capitais para suavizar o consumo ao longo do tempo, além disso, são a única classe a receber benefícios previdenciários b quando aposentados. Embora os capitalistas sejam apenas rentistas, eles pagam contribuição previdenciária $(1-t_c)rk_c$ enquanto ativos e recebem $k_c(0)=k_0$ e deixam $k_c(R)=k_0e^{nR}$, $n=g+m$ representando a taxa de crescimento natural da economia. Assume-se o equilíbrio de Harrod dado por $\frac{s}{v}=n=g+m$, onde $s=\frac{S}{Y}$, $v=\frac{K}{Y}$, e $Y=\min\left\{\frac{K}{v};A_tN_t\right\}$.

Para obter soluções analíticas explícitas, considera-se um modelo de dois períodos, baseado na abordagem de Baranzini (1991, CAP 6). Os indivíduos são adultos totalmente treinados em $t=0$ quando começam a ganhar renda, seu período de atividade é de R anos e depois se aposentam. Cada indivíduo morre com a idade T, desfrutando assim de $T-R$ anos de aposentadoria. Isso permite observar os efeitos de vários parâmetros, como as taxas de poupança, tributação e acumulação de capital em um modelo de ciclo de vida mais generalizado de distribuição de renda e riqueza. Para ambos os indivíduos o critério de escolha maximiza o valor das utilidades de desconto, pois os indivíduos buscam maximizar seu consumo, são eles:

$$U_i=\int_0^T e^{-\delta t}u[c_i(t)]dt$$

(1)

Com: $u[c_i(t)]=\frac{1}{a}[c_i(t)]^a$, $a<1$.

$u(.)$ é estritamente crescente e estritamente côncava, além disso, satisfaz a condição de Inada (suposições sobre a forma de uma função de produção que garante a estabilidade de uma trajetória de crescimento econômico – Inada, 1963). A equação (1) mostra a função de utilidade, que é afetada negativamente pela preferência intertemporal pura, ou seja, a decisão do agente entre consumir agora ou deixar para depois.

Assim como Steedman (1972), assume-se que o governo opera com um orçamento equilibrado. O agente governamental utiliza mecanismos de tributação para transferir renda para a classe mais vulnerável, neste caso, apenas para os trabalhadores aposentados. Para Hicks (1999) os programas de seguro social são direitos da classe trabalhadora, que faz com que apenas essa classe se aposente, mesmo que ambas as classes ativas paguem impostos previdenciários. Como os capitalistas não trabalham e vivem do consumo da renda do capital, eles não se aposentam.

Para garantir que a tributação funcione como um sistema de segurança social e não apenas como um processo de transferência de renda, assume-se a presença de assimetria de informações e custos de transação, triagem e monitoramento. Assim, a taxa de juros (r) é exógena, os capitalistas têm pleno acesso a mercados de capitais perfeitos e os trabalhadores enfrentam uma menor taxa de juros de depósito (i). Essa suposição (mercados de capitais imperfeitos), garante aos trabalhadores uma pequena poupança para transferir a renda do tempo de atividade para o tempo de aposentadoria. Uma vez definidas as hipóteses do modelo, o problema dos trabalhadores é:

$$\max \int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c_w(t)]^a dt$$

s.a: $\int_0^R [w_0(1 - t_w)e^{mt} - c_w(t)]e^{-it} dt + \int_R^T [b(t) - c_w(t)]e^{-it} dt = 0$ (2)

A equação (2) mostra a restrição orçamentária dos trabalhadores, ela é dividida em dois períodos, um quando estão ativos e outro quando estão aposentados. A primeira parte da equação é seu orçamento, composta pelo seu salário líquido, retirada a parcela de impostos e o que é consumido, no segundo período eles recebem os benefícios da aposentadoria, observe que a taxa juros do depósito impacta a restrição orçamentária dos trabalhadores. O problema dos capitalistas é:

$$\max \int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c_c(t)]^a dt$$

s.a: $\int_0^T c_c(t) e^{-r(1-t_c)t} dt - k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right) = 0$ (3)

Onde $r(1-t_c)$ é a taxa de juros alcançada para os capitalistas (líquida de impostos previdenciários), além disso, assume-se: $r(1-t_c) > n$. A equação (3) mostra a restrição orçamentária dos capitalistas, que mantêm seu padrão de consumo durante todo o período, pois não se aposentam. Nesse sentido, sua restrição se dará pelo consumo menos o que deixam como herança para a próxima geração. Tendo definido o problema de maximização para cada classe, pode-se agora passar para a otimização do problema.

3 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO[3]

Segundo Santos e Marcelos (2015), os problemas de otimização, têm como objetivo maximizar ou minimizar uma função sujeita a uma restrição. São chamados de problemas de otimização pelo fato de que as soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas com as técnicas de máximos e mínimos significa encontrar a solução ótima para eles. O método utilizado aqui é o mesmo apresentado por Baranzini (1991, CAP. 6). As condições ideais dos trabalhadores são:

$$u'[c_w(0)] = e^{-\delta t}u'[c_w(t)]e^{it}$$

$$c_w(0) = e^{\frac{(i-\delta)t}{a-1}}c_w(t)$$

$$c_w(t) = c_w(0)e^{g^*t} \tag{4}$$

Esta equação não admitiu um valor nulo para o consumo inicial dos trabalhadores, uma vez que, se for assumido $c_w(0) = 0$ a trajetória de consumo não existirá; $g^* = \frac{i-\delta}{1-a}$ representam taxa de crescimento do consumo dos trabalhadores. É necessário analisar as duas condições seguintes para a "taxa de juros de depósito líquido", representada por $i - \delta$: se $i - \delta > 0$ a remuneração do capital dos trabalhadores garante um valor de renda sustentável ao trabalhador ativo; se $i - \delta < 0$ tem-se que o consumo dos trabalhadores será prejudicado. Substituindo (4) em (1):

$$\int_0^R \left[w_0(1-t_w)e^{mt} - c_w(0)e^{g^*t}\right]e^{-it}dt + \int_R^T \left[b(t) - c_w(0)e^{g^*t}\right]e^{-it}dt = 0$$

O primeiro termo indo de 0 a R, representa o período ativo, ele é positivo, e pode ser interpretado como poupança líquida do trabalhador. O segundo termo R a T, é o período aposentado, que tem que ser simetricamente negativo, pois caracteriza a despoupança líquida, já que este modelo não admite a acumulação de capital dos trabalhadores. Pode-se representar $\int_R^T b(t)e^{-it}dt = B_0(t)$ como o valor presente dos

[3] As manipulações matemáticas podem ser encontradas no Apêndice 2 ao final da dissertação

benefícios previdenciários da geração t. Fazendo as manipulações matemáticas, é possível chegar ao consumo dos trabalhadores:

$$c_w(t) = \left\{w_0(1 - t_w)\left[\frac{i-g^*}{i-m}\right]\left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right]B_0(t)\right\}e^{g^*t} \quad (5)$$

A equação (5) mostra que o consumo é afetado positivamente pelo valor presente dos benefícios previdenciários, provando que o PAYG aumentará o consumo dos trabalhadores. Definida a equação de consumo, para analisar as propriedades de $c_w(0)$ será feita a diferenciação parcial em relação aos parâmetros individuais[4]:

$$\frac{dc_w(0)}{dt_w} < 0$$

Como Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020), não consideraram a tributação, não é possível comparar esse resultado. Essa derivação mostra que o consumo inicial dos trabalhadores e a tributação sobre os salários têm uma relação negativa, ou seja, um aumento na tributação sobre os salários diminuirá o consumo inicial dessa classe. Esse resultado é esperado, pois quanto maior a tributação, menor será a renda líquida disponível para consumo, o que concorda com os resultados de Wei e Araújo (2009).

$$\frac{dc_w(0)}{dB_o(t)} > 0$$

Um aumento no valor presente dos benefícios previdenciários da geração t aumentará o consumo inicial dos trabalhadores. Esse resultado está de acordo com o que foi observado na literatura, os trabalhadores no primeiro perídio irão antecipar seu consumo, pois no segundo período eles irão receber o benefício.

$$\frac{dc_w(0)}{dm} > 0$$

[4] As derivadas podem ser encontradas no apêndice 3 ao final da dissertação.

Essa derivada não é feita por Góes e Teixeira (2020), porém, este resultado concorda com o de Baranzini (1991), ou seja, à medida que m aumenta, a renda disponível dos trabalhadores também aumenta, de modo que o consumo inicial aumenta.

$$\frac{d_{c_{w(0)}}}{dg^*} > 0$$

Este resultado concorda com Góes e Teixeira (2020), o consumo inicial do trabalhador é uma função crescente de sua taxa de crescimento do consumo. Então, quanto maior é a taxa de crescimento do consumo, maior o consumo inicial exigido pelo trabalhador, este resultado está de acordo com as expectativas.

$$\frac{dc_w(0)}{di} < 0$$

Branzini (1991) e Góes e Teixeira (2020) não abordaram tal derivação. Porém, de acordo com a derivada nota-se que o consumo dos trabalhadores tem uma relação negativa com a taxa de juros de depósito, ou seja, quanto maior a taxa de juros, menor será o consumo inicial. A lógica por trás deste raciocínio é relativamente simples, taxas de juros de depósito mais baixas impulsionam o consumo.

$$\frac{dc_w(0)}{d\delta} > 0$$

Este resultado concorda com Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020), o consumo inicial dos trabalhadores é uma função crescente de sua taxa de desconto intertemporal. Assim, quanto maior for a taxa de desconto intertemporal dos trabalhadores, maior será o consumo inicial exigido, isso porque um aumento de δ desencoraja a poupança.

$$\frac{dc_w(0)}{dT} > 0$$

Este resultado está de acordo com Góes e Teixeira (2020), quanto maior o horizonte de tempo, maior o consumo inicial exigido pelos trabalhadores, mas esse resultado difere de Baranzini (1991). O processo para encontrar a condição ótima dos capitalistas é o mesmo dos trabalhadores, ou seja:

$$c_c(t) = c_c(0)e^{\bar{g}t} \tag{6}$$

Esta equação não admite um valor nulo para o consumo capitalista inicial, uma vez que, se for assumido $c_c(0) = 0$ a trajetória de consumo não existirá; $\bar{g} = \frac{r(1-t_c)-\delta}{1-a}$ representam taxa de crescimento do consumo dos capitalistas. É necessário analisar as duas condições seguintes para a "taxa de juros líquida", representada por $r(1-t_c)-\delta$: se ela for maior que zero, a remuneração de capital dos capitalistas garante um valor de renda sustentável; se for menor que zero, o consumo dos capitalistas será prejudicado. Substituindo (6) em (3):

$$\int_0^T c_C(0)e^{\bar{g}t}\, e^{-r(1-t_c)t}dt - k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right) = 0$$

Como os capitalistas mantêm seu consumo constante ao longo de sua vida, uma vez que essa classe não se aposenta, consequentemente não recebe benefício social, então sua utilidade vai de 0 a T. A restrição orçamentária representada pela integral acima mostra o ciclo de vida de cada capitalista. O primeiro termo desta equação é a evolução do consumo no tempo t, e o segundo termo é o estoque de capital herdado no tempo 0 somado ao estoque de capital deixado e assim por diante. Fazendo a manipulação matemática, tem-se:

$$c_C(0) = k_0[r(1-t_c) - \bar{g}]\frac{1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1 - e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}}$$

De (6):

$$c_C(t) = k_0[r(1-t_c) - \bar{g}]\frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}}e^{\bar{g}t} \tag{7}$$

A equação (7) mostra o consumo dos capitalistas, que é dado pelo estoque de capital, tributação descontada e taxa de crescimento do consumo desta classe. Este resultado se refere a Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020), porém, agora considerando o impacto da tributação. Caso a taxa de juros seja maior que a taxa de desconto intertemporal, então o consumo dos rentistas também será uma função crescente do tempo. Encontrado o consumo dos capitalistas, é possível fazer a diferenciação parcial em relação aos parâmetros individuais:

$$\frac{dc_c(0)}{dt_c} < 0$$

Como os capitalistas só pagam impostos e não recebem benefícios, essa relação está de acordo com as expectativas. Isso acontece porque ao pagar a tributação, sua renda líquida torna-se menor, consequentemente eles consumirão menos nesse período, já que os capitalistas não receberão nenhum benefício quando forem mais velhos.

$$\frac{dc_c(0)}{dn} > 0$$

O consumo tem uma relação positiva com a taxa de crescimento natural da economia, esse resultado difere de Baranzini (1991). No entanto, é de se esperar que os dois tenham uma relação positiva, pois a renda dos capitalistas vem dos lucros, e como afirma Marx (1984), o capitalista dita o ritmo de crescimento da economia. Além disso, esse resultado está de acordo com Pasinetti (1962), o qual define $\frac{P}{K} = \frac{n}{s_c}$, ou seja, um aumento de n aumenta o lucro, tornando a renda do capitalista maior, portanto, aumenta o consumo desta classe.

$$\frac{dc_c(0)}{d\delta} > 0$$

Este resultado está de acordo com Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020), o consumo inicial do capitalista é uma função crescente de sua taxa de desconto intertemporal. Assim, quanto maior a taxa de desconto intertemporal, maior é o consumo inicial exigido pelo rentista.

$$\frac{dc_c(0)}{dr} > 0$$

Assim como em Baranzini (1991), o aumento da taxa de juros tem um efeito positivo sobre o consumo capitalista. Neste capítulo, os capitalistas auferem lucros apenas de sua renda, a qual aumentará quando sua remuneração (taxa de lucro) também aumentar. Além disso, seu consumo, *coeteris paribus*, também aumenta, pois existe uma relação positiva entre renda e consumo.

$$\frac{dc_c(0)}{d\bar{g}} > 0$$

Como a teoria mostra, fica claro que a taxa de crescimento do consumo e o consumo inicial têm relações positivas, isso é comprovado a partir desta derivada.

$$\frac{dc_c(0)}{dT} < 0$$

Assim como para Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020), se considerado um horizonte de tempo maior, então menor será o consumo inicial exigido dos capitalistas. Isso acontece porque aqui lida-se com um modelo de ciclo de vida de dois períodos, então o agente deve escolher entre consumir agora ou deixar para o próximo período.

Para encontrar os benefícios previdenciários, tem-se que encontrar o orçamento equilibrado do governo. O número de trabalhadores vivos no tempo t é dado por $N_w(t) = N_w \frac{e^{gT}(1-e^{-gT})}{g}$, já para os capitalistas, $N_c(t) = N_c \frac{e^{gT}(1-e^{-gT})}{g}$. Aquelas pessoas que nao aposentam em t (ativos) são $N_w^A(t) = N_w \frac{e^{gR}(1-e^{-gR})}{g}$, para os trabalhadores, e $N_c^A(t) = N_c \frac{e^{gR}(1-e^{-gR})}{g}$, para os capitalistas. E as pessoas aposentadas em t são apenas $N_w^R(t) = N_w \frac{(e^{gT}-e^{-gR})}{g}$, já que só os trabalhadores se aposentam. Agora é possível definir os benefícios totais da seguridade social:

$$b(t)\frac{N_w e^{gR}\left(e^{\frac{T}{R}}-1\right)}{g} = w_0 e^{mT} t_w \frac{N_w e^{gR}(1-e^{-gR})}{g} + rk_c(t)t_c \frac{N_c e^{gR}(1-e^{-gR})}{g} \tag{8}$$

Após algumas manipulações matemáticas é possível encontrar o benefício da seguridade social no tempo t:

$$b(t) = \frac{1}{\left(e^{\frac{T}{R}}-1\right)}\left\{w_0 e^{mT} t_w (1 - e^{-gR}) + rk_c(t) t_c \frac{N_c\left(1-e^{-gR}\right)}{N_w}\right\} \quad (9)$$

A partir da equação (9) percebe-se que o aumento da expectativa de vida diminui os benefícios previdenciários, isso acontecerá porque os aposentados viverão mais. Portanto, eles usarão o benefício por mais tempo, então esse benefício será menor para compensar o aumento da expectativa de vida. O contrário é visto para o período ativo de cada classe, um aumento de R também aumentará o benefício, já que as classes estão pagando impostos por mais tempo, o benefício repassado também será maior, pois aqui lida-se com um governo que apenas repassa a tributação. Essa equação também está de acordo com o que se espera para a taxa de crescimento populacional, um aumento dessa taxa aumentará o benefício, pois no sistema PAYG os jovens são responsáveis pelo pagamento do benefício dos aposentados, uma relação inicial capitalistas/trabalhadores vivos no tempo t também aumenta $b(t)$. Além disso, um aumento no lucro dos capitalistas (rk_c) também aumentará o benefício, pois os impostos dessa classe incidem sobre os lucros, uma vez que estes são seus rendimentos. Na próxima seção apresentar-se-á o modelo agregado.

4 AGREGAÇÃO DO MODELO[5]

O agregado refere-se a somas de comportamento individual em toda a economia. Segundo Evans (1997) o objetivo da agregação é consolidar o comportamento econômico dos indivíduos em uma variável lógica simples, de modo a permitir que um analista econômico investigue os dados. Além disso, consolidar o comportamento dos indivíduos limitará as complicações que podem surgir, permitindo a formatação de um modelo mais preciso. Começará definindo, para cada classe, o consumo agregado, depois o estoque de capital agregado e pôr fim a poupança. Primeiro, dos capitalistas:

$$C_c(t) = \int_0^T N_c e^{n(t-v)} c_c(t) dt$$

Portanto:

$$C_c(t) = N_c e^{n(t-v)} k_0 [r(1-t_c) - \bar{g}] \frac{1-e^{[n-r(1-t_C)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_C)]t}} e^{\bar{g}t}$$
(10)

A equação (10) mostra que o consumo total dos capitalistas é definido pela população inicial, evoluindo pela taxa de crescimento populacional e variando pelo consumo marginal individual do capitalista. Como foi mostrado na seção anterior, o estoque de capital dos capitalistas é:

$$K_c(t) = \int_0^T N_c e^{nv} k_c(t-v)(v) dv$$

Portanto:

$$K_c(t) = \frac{C_c(t)}{r-n}$$

[5] A agregação matemática está representada no Apêndice 4 ao final da dissertação.

Substituindo a equação (10):

$$K_c(t) = \frac{N_c e^{n(t-v)} k_0 [r(1-t_c)-\bar{g}]}{r-n} \frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}} e^{\bar{g}t}$$

(11)

A equação (11) mostra o capital total dos capitalistas, o qual aumenta com seu consumo, já que eles só recebem lucro é de se esperar que ambos cresçam juntos. Além disso, a taxa de juros afeta negativamente o capital total dos capitalistas. Para encontrar a poupança total dos capitalistas segue-se a mesma ideia de Baranzini (1991), mas como este modelo considera a tributação impactando no lucro dos capitalistas, a poupança agregada dos capitalistas será:

$$S_c(t) = rk_c(t)(1-t_c) - C_c(t)$$

Substituindo a equação (10)

$$S_c(t) = rk_c(t)(1-t_c)\left[1 + N_c e^{n(t-v)} k_0 \bar{g} \frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}} e^{\bar{g}t}\right]$$

(12)

A equação (12) mostra que quanto maior a tributação sobre os lucros dos capitalistas, menor sua poupança, isso acontece porque os impostos arrecadados são repassados apenas aos trabalhadores aposentados, já que os capitalistas não se aposentam. Para os trabalhadores, tem-se:

$$C_w(t) = \int_0^T N_w e^{n(t-v)} c_w(t) dt$$

Portanto:

$$C_w(t) = N_w e^{n(t-v)} \left\{ w_0(1-t_w) \left[\frac{i-g^*}{i-m}\right] \left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] B_0(t) \right\} e^{g^*t}$$

(13)

A equação (13) mostra que o consumo total dos trabalhadores é definido pela população inicial desta classe. Além disso, o valor presente dos benefícios previdenciários também aumenta o consumo total dos trabalhadores, mostrando o impacto positivo da aposentadoria.

Como os trabalhadores usam todas as suas poupanças como consumo na hora da aposentadoria, eles não têm acúmulo de estoque de capital, logo, $K_w(T) = 0$. Além disso, os trabalhadores não recebem herança no início do período, então $K_w(0) = 0$, o que significa que $K_w(t) = S_w^A - C_w^R = 0$. Nesse sentido, considerando que, os trabalhadores mais jovens poupam para consumir quando aposentados, assim, eles não tiveram uma acumulação de capital, o que difere da formulação original de Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020). Esse resultado só pode ser possível porque neste capítulo considera-se mercados imperfeitos.

A poupança total dos trabalhadores é 0, pois a arrecadação dessa classe durante o período ativo é utilizada quando inativo, e o que poupam quando inativos é consumido no mesmo período. A próxima seção mostra as considerações finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo contribui para a literatura em dois aspectos:

(I) Expandiu-se o modelo de Baranzini (1991, CAP. 6), considerando o sistema PAYG e mercados imperfeitos em um modelo de ciclo de vida contínuo. Tal sistema desenha o processo de aposentadoria justificando o consumo dos trabalhadores mais velhos quando inativos. Esse processo está mais próximo da realidade, quando se considera os benefícios sociais de controle governamental, a transferência de renda entre classes (trabalhadores e capitalistas) e períodos (ativo e inativo), visando garantir o bem-estar dos mais velhos nessa economia. Os resultados, em uma perspectiva de longo prazo, aumentam todas as receitas.

(II) Desenvolvido o modelo, os resultados mostram que o PAYG tem um impacto positivo no consumo dos trabalhadores e considerando que a taxa de lucro pode ser determinada pelo resultado de Steedman de 1972, assim: $r = \frac{n}{s_c(1-t_c)}$; a tributação capitalista tem um efeito positivo sobre a renda capitalista. Nesse sentido, mesmo considerando que o consumo dos capitalistas seja afetado negativamente pela tributação, o efeito real pode ser anulado pelos efeitos sobre a taxa de lucro. Embora alguns debates digam que o sistema PAYG deve ser prejudicial à economia, os resultados mostrados aqui não refletem isso.

Para concluir, os resultados obtidos no presente artigo avançam a literatura econômica. No entanto, ainda existem questões analíticas consideráveis a serem tratadas.

CAPÍTULO 3
SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS CONSIDERANDO O PAYG

1 INTRODUÇÃO

O objetivo central deste capítulo é apresentar as simulações numéricas para a verificação do impacto do sistema PAYG em um modelo de gerações sobrepostas (MGS), considerando agentes heterogêneos. Assim, são utilizados métodos computacionais utilizando-se o software Octave. O MGS foi escolhido pois permite examinar, em uma perspectiva intertemporal, os efeitos de variações tributárias sobre variáveis como consumo, estoque de capital e bem-estar das diferentes gerações. Sendo assim, este modelo, é eficaz para analisar a políticas fiscais, uma vez que os seus efeitos se estendem ao longo de vários períodos.

Samuelson (1958) e Diamond (1965) foram os pioneiros na apresentação do MGS. O modelo apresentado por eles é micro fundamentado, ou seja, os indivíduos maximizam sua utilidade como suporte teórico para o estudo de como os agentes impactam no crescimento econômico. Deste modo, torna possível analisar as implicações das decisões individuais sobre as variáveis agregadas. Além disso, representa-se a cada instante de tempo indivíduos em diferentes etapas de suas vidas, aqui trata-se de duas gerações, jovens e idosos.

Samuelson (1958) apresentou seu método previdenciário financeiro para prever que cada geração de trabalhadores garantirá uma renda segura quando aposentados. Seu modelo considera uma melhor taxa interna de retorno sobre suas contribuições previdenciárias quando comparado com um sistema de capitalização. Vários artigos apontaram que o MGS de dois períodos usado por Samuelson (1958) não pode explicar a dinâmica da taxa de juros de equilíbrio no mundo real [ver Arthur e McNicoll (1978), Keyfitz e Caswell (2005), Willis (1988), Lee e Yamagata (2003)]. Portanto, neste capítulo, considera-se mercados imperfeitos, uma vez que aqui lida-se com assimetrias de informações e os altos prêmios ao risco.

Diamond (1965), desenvolve um modelo com o objetivo de examinar o equilíbrio competitivo de longo prazo em um modelo de crescimento e explorar os efeitos sobre esse equilíbrio da dívida pública. O autor conclui que a dívida interna aumenta a taxa de juros, reduzindo a utilidade dos agentes no caso eficiente, mas o efeito não é tão claro no caso ineficiente. Já a dívida externa, afasta a taxa de juros da taxa de crescimento, reduz a utilidade dos agentes no caso eficiente e pode elevá-la ou reduzi-la no caso ineficiente. Por fim, a substituição da dívida interna por externa, eleva a taxa de juros, reduzindo a utilidade no caso eficiente, ao é capaz de elevá-la ou reduzi-la no caso ineficiente. Diferentemente deste modelo, no presente capítulo, trata-se de um governo operando com orçamento equilibrado.

Esse capítulo está dividido em duas seções além dessa introdução. Sendo a próxima seção a apresentação da simulação computacional e seus resultados essenciais, que confirmam a robustez do modelo do modelo PAYG e por fim as considerações finais.

2 O MODELO

O modelo aqui tratado, lida com agentes heterogêneos e gerações sobrepostas. Ou seja, tem-se dois agentes, os capitalistas e trabalhadores. Sendo que a primeira classe aufere sua renda a partir dos lucros, recebem e deixam herança e pagam a contribuição previdenciária, mesmo que não se aposentem. Já a segunda classe recebe salário líquido, paga a contribuição previdenciária e não deixa legado. Além disso, os indivíduos vivem dois períodos, um quando jovens (ativos) e outro quando idosos (inativos), quando se aposentam e passam a receber o benefício.

A transferência do benefício previdenciário é feita pelo governo, que opera com orçamento equilibrado e adota apenas a política de previdência social *a lá* PAYG. Assim como em Steedman (1972), o governo utiliza mecanismos de tributação para transferir renda para a classe mais vulnerável, enquanto para o autor essa classe são os trabalhadores, no presente capítulo, a classe mais vulnerável são os trabalhadores idosos. Na próxima subseção serão mostrados os problemas de casa classe.

2.1 TRABALHADOR

Para o trabalhador o critério de escolha é maximizar o valor da utilidade. Como este modelo trata de gerações sobrepostas, a utilidade do trabalhador nascido em t, será composta pelo seu consumo em t, isso é, quando ativo ($c^{Y}_{W_t}$), e o consumo em $t+1$, quando inativo ($c^{O}_{W_{t+1}}$), sendo que este será impactado pela taxa de preferência intertemporal (δ), a qual representa a sua escolha entre consumir agora ou deixar para o próximo período.

$$U_{W_t} = \max\left[\frac{1}{a}{c^{Y}_{W_t}}^{a}\right] + \delta\left[\frac{1}{a}{c^{O}_{W_{t+1}}}^{a}\right]$$
(1)

s.a: $c^{Y}_{W_t} + k^{O}_{W_{t+1}} = w_t\left(1 - t_{w_t}\right)$; $c^{O}_{W_{t+1}} = (1 - i_{t+1})k^{o}_{W_{t+1}} + b_{t+1}$

A equação (1) representa a utilidade do trabalhador em t, como trata-se de gerações sobrepostas, ela será composta pela soma das utilidades quando ativos e inativos. A restrição orçamentária dos trabalhadores ativos será composta pelos seus salários líquidos, que devem ser alocados entre consumo e estoque de capital. Como os trabalhadores não deixam herança, no segundo período, quando inativos, eles irão consumir todo o estoque de capital e os benefícios.

2.2 CAPITALISTA

O problema do capitalista da geração t é maximizar uma função de utilidade representativa da classe, escolhendo em t o que irá consumir e deixar de herança. Sendo assim, a sua utilidade é dada pela maximização do consumo dos capitalistas ativos ($c_{C_t}^{Y}$), somada a utilidade do capitalista, nascido em t, no período $t+1$ ($U_{C_{t+1}}$) em deixar herança para a próxima geração ($k_{C_{t+1}}$). A utilidade em $t+1$ será impactada pelo δ, que representa o “altruísmo” do capitalista. Seu problema é restringido por uma restrição orçamentária estática representativa, isto é:

$$U_{C_t} = \max\left[\frac{1}{a} c_{C_t}^{Y\;a}\right] + \delta(1+n)U_{C_{t+1}}\left(k_{C_{t+1}}\right)$$

(2)

s.a: $c_{C_t} + k_{C_{t+1}}(1+n) = k_{C_t} + r_t\left(1 + t_{C_t}\right)k_{C_t}$

A partir da equação (2), pode-se afirmar que o capitalista irá maximizar sua função utilidade, levando em consideração sua preferência de consumo intertemporal, bem como sua vontade de deixar legados para seus descendentes. Como esta classe deixa herança, a sua restrição orçamentária exige que a soma do consumo em t com a herança deixada para a próxima geração deve ser igual a herança recebida, somado os rendimentos derivados dela. Ou seja, a herança deixada para a próxima geração ($k_{C_{t+1}}$) deve ser igual a herança recebida (k_{C_t}). Além disso, assume-se $r(1-t_c) > n$, essa condição é necessária para que os capitalistas tenham um estoque de capital positivo.

2.3 GOVERNO

Assume-se que o governo opera com orçamento equilibrado em todo período. Por se tratar de um sistema PAYG, os trabalhadores que estão recebendo o benefício em t são os que nasceram em $t-1$. Além disso, os gastos totais com benefícios para os trabalhadores aposentados em t, deve ser igual a receita do governo com contribuição social dos trabalhadores e capitalistas ativos em t.

$$N_{w_{t-1}} b_t = N_{w_t} w_t t_{w_t} + N_{c_t} r_t k_{c_t} t_{c_t} \tag{3}$$

Assumindo $\frac{N_{w_t}}{N_{w_{t-1}}} = \frac{N_{c_t}}{N_{c_{t-1}}} = 1 + n$ e $\frac{N_c}{N_w} = \Omega$, então $b_t = (1+n)\left[w_t t_{w_t} + \Omega r_t k_{c_t} t_{c_t}\right]$.

O lado esquerdo da equação (3) representa o total dos benefícios repassados pelo governo. Já lado direito mostra a arrecadação do governo, representada pela soma entre o total arrecadado pelos tributos. Além disso, nessa simulação, foi assumido que a relação entre capitalistas e trabalhadores se mantem constante no tempo, $\Omega = 1$, essa hipótese é graças a suposição de que ambas as classes apresentam a mesma taxa de crescimento populacional[6]. A próxima seção mostra a simulação numérica e os resultados.

[6] O objetivo desse capítulo é de análise de equilíbrio parcial. Desse modo, foi assumido $\Omega = 1$, já este parâmetro tem apenas efeito nas contas do governo. Vale ressaltar que em uma análise de equilíbrio geral, Ω afetaria preços e distribuição de renda.

3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Para analisar a trajetória do MGS a partir do sistema PAYG, esta seção apresenta resultados gerados computacionalmente a partir do software Octave. Os resultados apresentados aqui mostram o equilíbrio parcial para cada classe, ou seja, supõem-se preços fixos. Assim, é possível estudar o equilíbrio, a eficiência e comparar os resultados gerados. Esta hipótese simplificadora torna o modelo consideravelmente mais acessível.

É um requisito computacional que a função objetivo possa ser representada por um número finito de parâmetros. Portanto, precisa-se aproximar a função objetivo, para que seja possível implementar o algoritmo de iteração em um computador. A maneira simples de aproximar uma função em um domínio contínuo é representar a função original como um conjunto finito de pontos nas variáveis de controle e de estado. Para construir o algoritmo, precisa-se:

1º – Defina o número de pontos *grid* (n_k), os limites inferior ($\underline{K}$) e superior ($\overline{K}$) do espaço de estados e a tolerância de erro (ε).

2º – Definir pontos *grid* $\{K_1, K_2, \dots, K_{n_K}\}$.

3º – Definir um valor inicial da função. Supõe-se que uma condição inicial trivial seja 0.

4º – Atualizar a função valor para o próximo período.

5º – Compare as funções de valores e calcule a distância d. Se $d > \varepsilon$, o erro não é pequeno o suficiente, então atualiza-se a função de valor e volte para o passo 4. Se $d \leq \varepsilon$, então encontra-se a função de valor ótimo aproximada.

6º – Verifique se os limites do espaço de estados não são vinculativos. Se os limites do espaço de estado forem muito apertados, relaxe os limites e reinicie.

7º – Certifique-se de que ε é pequeno o suficiente reduzindo ε e refazendo todo o processo. Se a regra de decisão ótima resultante for substancialmente diferente da originalmente obtida, o ε inicial pode ser muito grande, então continue reduzindo até que os resultados sejam robustos.

8º – Certifique-se de que n_C é grande o suficiente. Aumente n_C e refaça todo o processo. Se a função de valor resultante ou a regra de decisão ótima for substancialmente diferente da original, o n_C inicial pode ser muito pequeno, então continue aumentando até que os resultados sejam robustos.

Os resultados são:

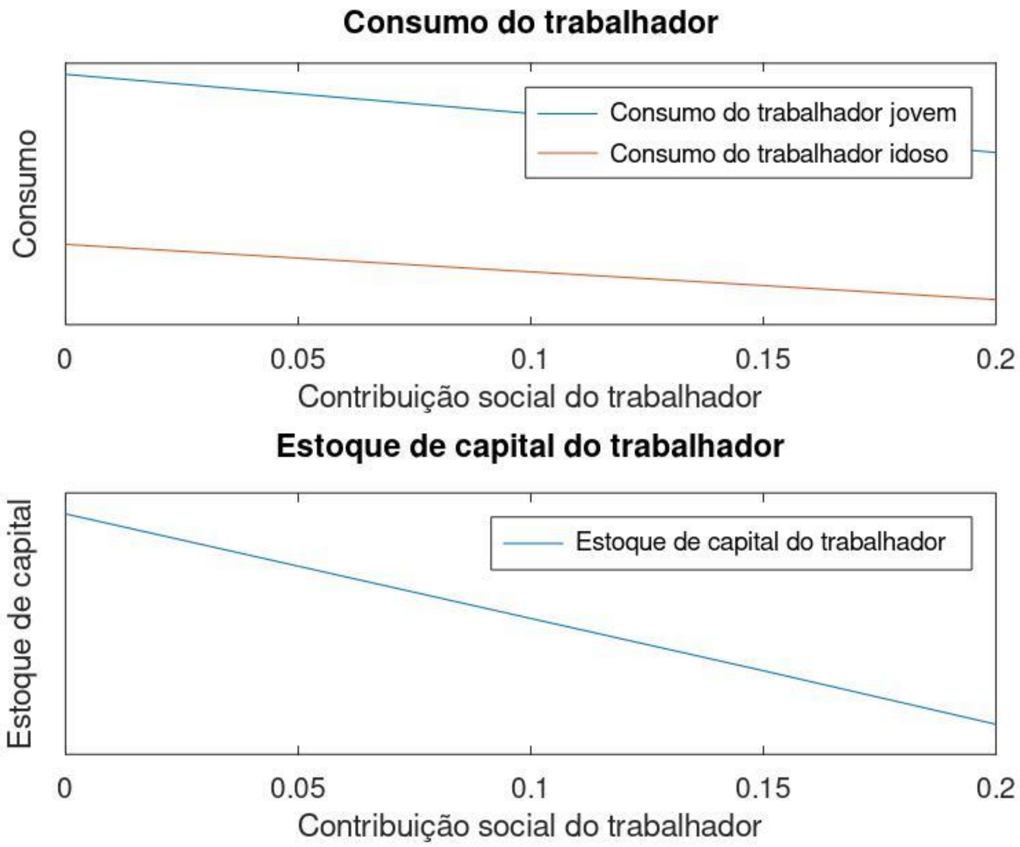
Tabela 1 - Impacto da variação tributária

Variáveis	- 10%	- 5%	- 3%	+ 3%	+ 5%	+ 10%
$C_w^Y(\%)$	7,2904	3,6452	2,18712	-2,18712	-3,6452	-7,22965
$C_W^O(\%)$	7,23078	3,61539	2,16923	-2,16923	-3,61539	-7,32117
$K_w(\%)$	51,9481	25,974	15,5844	-15,5844	-25,974	-52,5974
$WF_w(\%)$	3,56951	1,8004	1,08409	-1,09597	-1,83342	-3,70173
$C_C(\%)$	-1,39613	-0,698063	-0,418838	0,418838	0,698063	1,33018
$K_C(\%)$	1,8392	0,919601	0,55176	-0,55176	-0,919601	-1,81293
$WF_c(\%)$	2,56981	1,27621	0,763745	-0,757564	-1,25929	-2,49045

Elaborado pelos autores

Na Tabela 1, fica evidente que os trabalhadores são mais severamente impactados pela variação da tributação. Nesse sentido, tendem a suavizar seu consumo, além disso, é possível notar que, em caso de maior tributação nos salários, menor será o bem-estar dos trabalhadores. Este resultado confirma as afirmações de Wei e Araújo (2009), de que os trabalhadores suportam o ônus da tributação. Assim como para os trabalhadores, no caso da análise com relação aos capitalistas, uma diminuição da tributação sobre os lucros aumenta seu consumo, isso acontece porque ele irá variar o estoque de capital. Isso concorda com a afirmação de Kalecki (1971) de que os capitalistas são donos de seu próprio destino. Além disso, é possível notar que um aumento da tributação sobre os lucros diminuirá o bem-estar, pois terão que poupar mais para obter mais renda, confirmando o resultado apresentado por Sugahara, *et. al.* (2016). Embora os efeitos da tributação sejam negativos, eles são necessários para que haja o repasse e manutenção do benefício, podendo garantir o consumo dos trabalhadores idosos, o qual será composto pela aposentadoria.

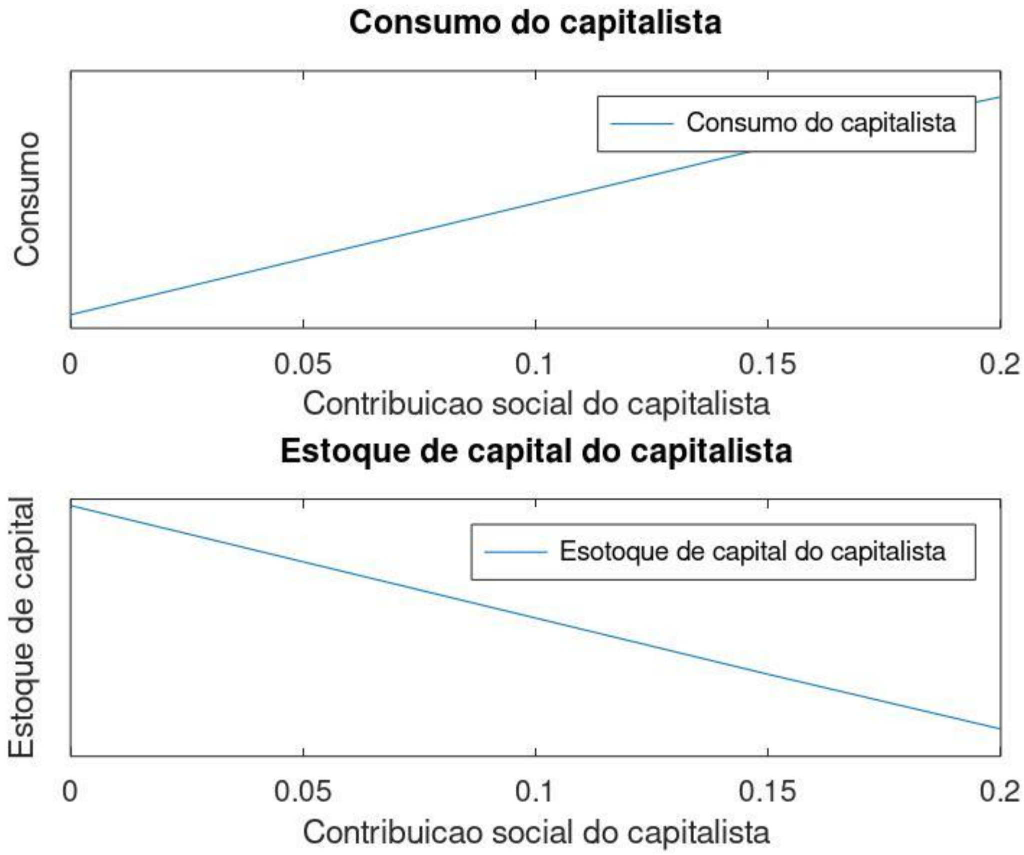
Figura 1 - Impacto da variação tributária sobre os Trabalhadores



Elaborado pelos autores

A Figura 1 confirma o resultado apresentado acima. No primeiro gráfico mostra-se que o consumo do trabalhador tem uma relação linear e descrente com a sua contribuição social. O que significa que um aumento da contribuição social dos trabalhadores diminuirá seu consumo, aqui a queda não é tão acentuada porque o consumo é suavizado.

Figura 2 - Impacto da variação tributária no Capitalista



Elaborado pelos autores

Na Figura 2 é possível ver como os capitalistas são impactados pela contribuição social. No primeiro gráfico seu consumo aumentará, impactado pela tributação. Isso acontece pois eles terão de consumir mais para ter o mesmo nível de utilidade. A partir do segundo gráfico, nota-se que o estoque de capital tem uma relação negativa com a contribuição social, uma possível explicação para isso é que o aumento da tributação torna a renda líquida dos capitalistas menor, assim seu estoque de capital será menor, uma vez que seu consumo está crescendo. Vale ressaltar que esta é uma análise de equilíbrio parcial, assim, a taxa de juros é mantida constante, caso contrário, um aumento da tributação aumentaria os lucros [ver Steedman (1972)] tornando o estoque de capital maior.

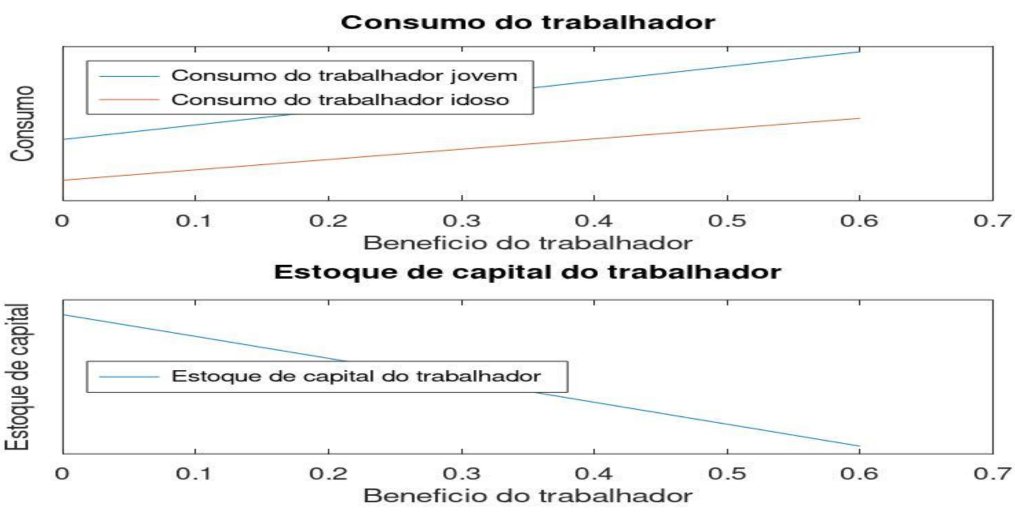
Tabela 2 - Impacto da variação do benefício

Variáveis	- 10%	- 5%	- 3%	+ 3%	+ 5%	+ 10%
$C_w^Y(\%)$	-6,92588	-3,46294	-2,06561	2,06561	3,46294	6,92588
$C_W^O(\%)$	-6,91228	-3,45614	-2,09176	2,09176	3,45614	6,91228
$K_w(\%)$	74,026	37,013	22,0779	-22,0779	-37,013	-74,026
$WF_W(\%)$	-3,52224	-1,74533	-1,04351	1,03273	1,71539	3,40233

Elaborado pelos autores

Assim, na Tabela 2, como no caso anterior, os trabalhadores irão suavizar seu consumo recebendo o benefício; se o benefício for maior, o consumo também será. O consumo aumentará nos dois períodos de sua vida, isso acontece pelo fato de os mais novos diminuem suas poupanças, uma vez que quando aposentarem, passarão a ter um incremento em sua renda. Dessa forma, a diminuição do benefício afetará positivamente a poupança dos trabalhadores, evidenciando a suavização do consumo, conforme o aumento do estoque de capital. Além disso, quanto maior o benefício, maior será o bem-estar dos trabalhadores, o que está em linha com os trabalhadores previamente estudados [esse resultado apresenta conformidade com Ellery Jr. e Bugarin (2003)]. Como os capitalistas não aposentam, eles não serão impactados pela variação do benefício.

Figura 3 - Impacto da variação tributária no Capitalista



Elaborado pelos autores

A Figura 3 mostra o impacto da variação do benefício dos trabalhadores. O primeiro gráfico mostra o consumo dos trabalhadores, aqui, o consumo dos mais jovens e mais velhos é representado por uma linha positivamente inclinada, evidenciando a relação entre consumo e benefícios dos trabalhadores. O segundo gráfico representou o estoque de capital do trabalhador, que é impactado negativamente pelos benefícios, uma vez que eles irão antecipar o consumo no segundo período, o benefício não irá aumentar o seu estoque de capital. Estes resultados concordam com Bucciol (2011), de que a previdência social não melhora a riqueza dos trabalhadores, pois seu consumo aumenta quando recebem o benefício.

Tabela 3 - Mudanças na contribuição social

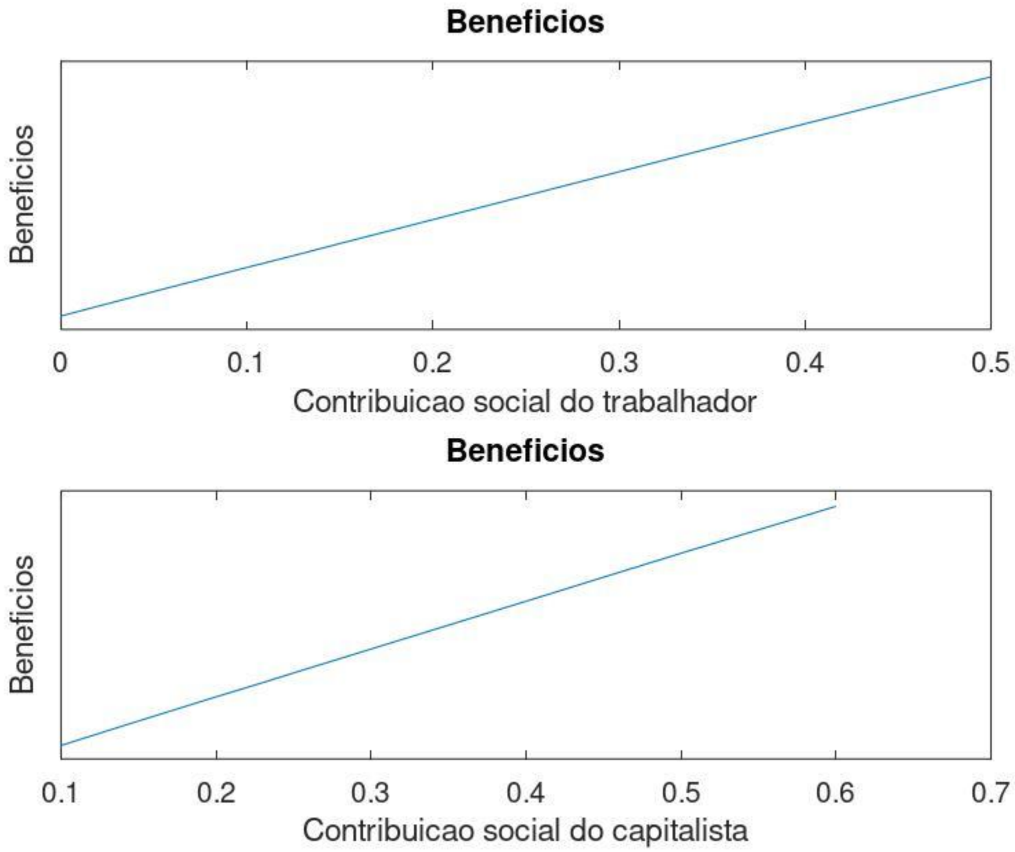
Variáve-is	- 10%	- 5%	- 3%	+ 3%	+ 5%	+ 10%	+ 20%	+ 30%	+ 40%
$C_w^Y(\%)$	-3,276	-1,560	-0,936	0,780	1,404	2,964	5,928	-6,552	-22,153
$C_W^O(\%)$	-3,083	-1,521	-0,931	0,954	1,628	3,052	6,077	32,246	62,367
$K_w(\%)$	46,718	23,166	13,899	-13,513	-22,779	-45,946	-91,892	-99,614	-99,614
$WF_W(\%)$	-1,612	-0,775	-0,468	0,424	0,7443	1,489	2,951	4,034	3,979
$C_C(\%)$	-1,313	-0,624	-0,413	0,4133	0,688	1,313	2,560	3,678	4,860
$K_C(\%)$	1,846	0,909	0,5619	-0,562	-0,937	-1,846	-3,666	-5,432	-7,225
$WF_c(\%)$	2,554	1,263	0,7642	-0,757	-1,259	-2,488	-4,904	-7,236	-9,532

Elaborado pelos autores

Na Tabela 3 pode-se ver os impactos das variações da contribuição social, aqui é possível ver que um aumento no benefício aumentará o consumo dos trabalhadores até certo ponto. Para os trabalhadores jovens, o impacto de um aumento na contribuição social é positivo até 30%, quando se torna negativo, isso acontece, pois, um aumento na tributação reduzirá sua renda líquida, assim, eles terão menos renda para alocar no consumo. O estoque de capital dessa classe será inversamente impactado pela contribuição social, quanto maior o benefício, menor o estoque de capital, isso acontece, pois, os trabalhadores irão antecipar o seu consumo e consequentemente diminuir o seu estoque de capital. Para a contribuição social, pode-se ver que variações a partir de 40%, os trabalhadores terão perdas no bem-estar. Isso concorda com Gordan (1983), para ele, certos impostos podem reduzir o bem-estar quando são usados em excesso, já que os trabalhadores estão pagando uma fração significativa do imposto.

Para os capitalistas, quanto maior a contribuição social, menor seu estoque de capital e bem-estar. Isso se deve ao fato de que, embora os capitalistas não recebam o benefício, eles pagam o imposto destinado à aposentadoria. Portanto, eles serão impactados negativamente por variações na contribuição social. Para o consumo, vemos o contrário, quanto maior a contribuição social, maior o consumo dos capitalistas, por eles estarem diminuindo o seu estoque de capital e consequentemente a renda derivada dele.

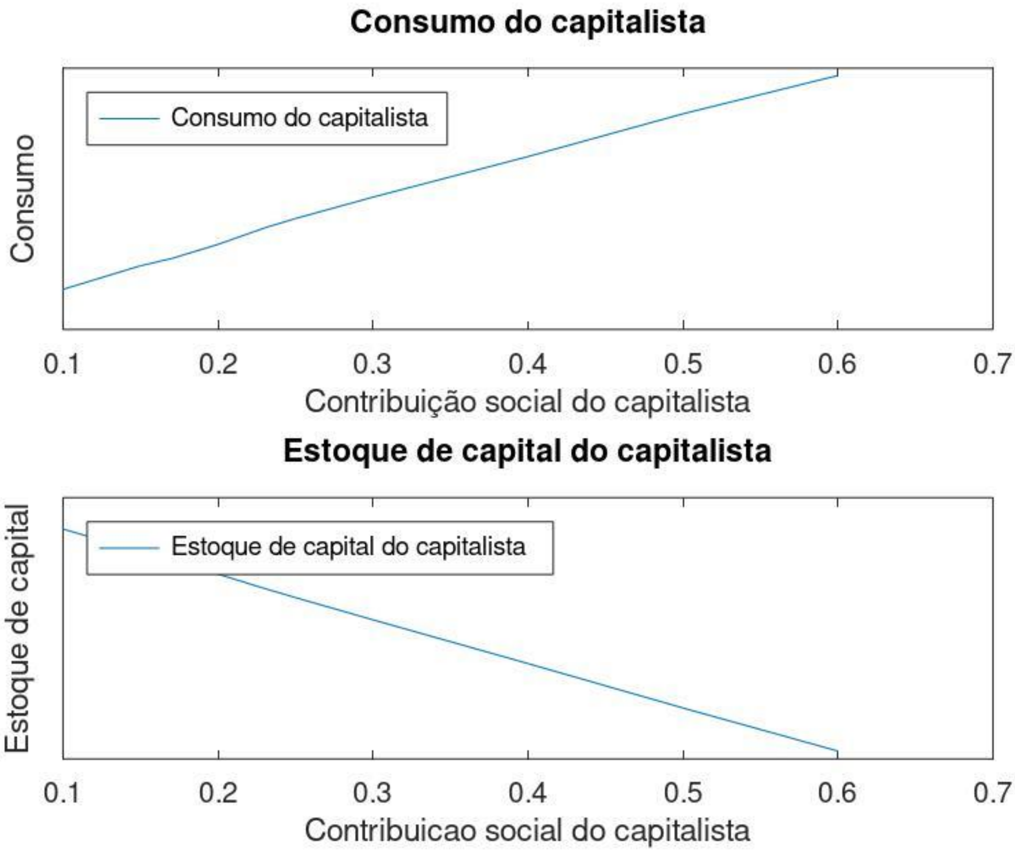
Figura 4 - Impacto da Mudança na Contribuição Social nos Benefícios



Elaborado pelos autores

A Figura 4 é uma representação da relação entre os benefícios com diferentes contribuições sociais. Uma alíquota de 0% não traz benefícios, a alíquota de 100% também não. Assim, a curva de Laffer [ver Wanniski (1978)] concluiu que deve haver um tributo onde o valor máximo possa ser atingido, assim, aumentar a alíquota além desse ponto torna-se improdutivo, pois o benefício também começa a diminuir. Aqui fica clara a relação positiva ente a contribuição social e o benefício, isso acontece pois usa-se a suposição de que o governo apenas repassa a tributação, assim como em Steedman (1972). Graças a hipótese de que $r(1 - t_c) > n$, supor uma contribuição muito alta é irrealista, além de não fazer sentido econômico.

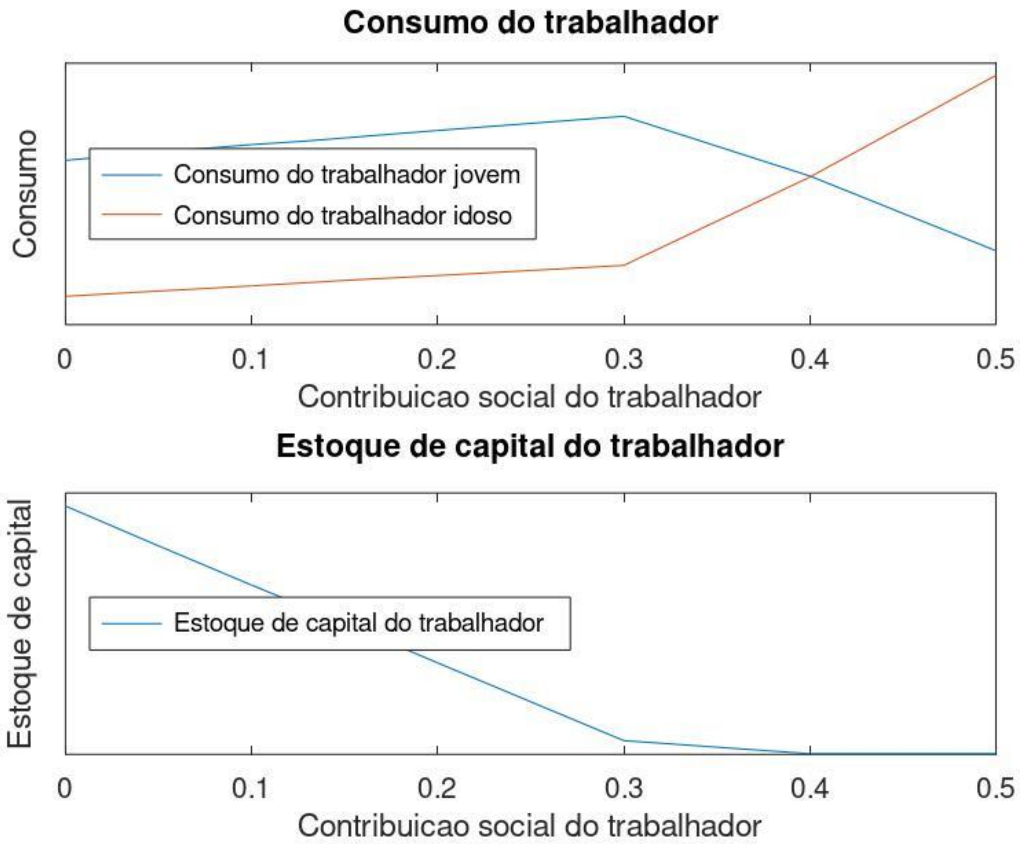
Figura 5 - Impacto da Mudança na Contribuição Social sobre o Capitalista



Elaborado pelos autores

Na Figura 5 fica claro que as variações positivas da contribuição social impactarão positivamente o consumo dos capitalistas. Isso acontece, pois, os capitalistas tendem a manter o seu padrão de consumo, mesmo que isso impacte negativamente na sua renda devido a redução do estoque de capital. Assim, quando maior for a contribuição, maior tem de ser o seu consumo, para manter o mesmo nível de utilidade, contudo, essa decisão leva o capitalista, no limite, a não deixar herança, pelo efeito negativo do estoque de capital, que tenderá a zero. Além disso, a contribuição social tem um limite, variá-la acima de 60% tornará o estoque de capital desta classe negativa, essa suposição é ilógica, caso isso acontecesse, levaria a eutanásia desta classe, estando de acordo com Meade (1963).

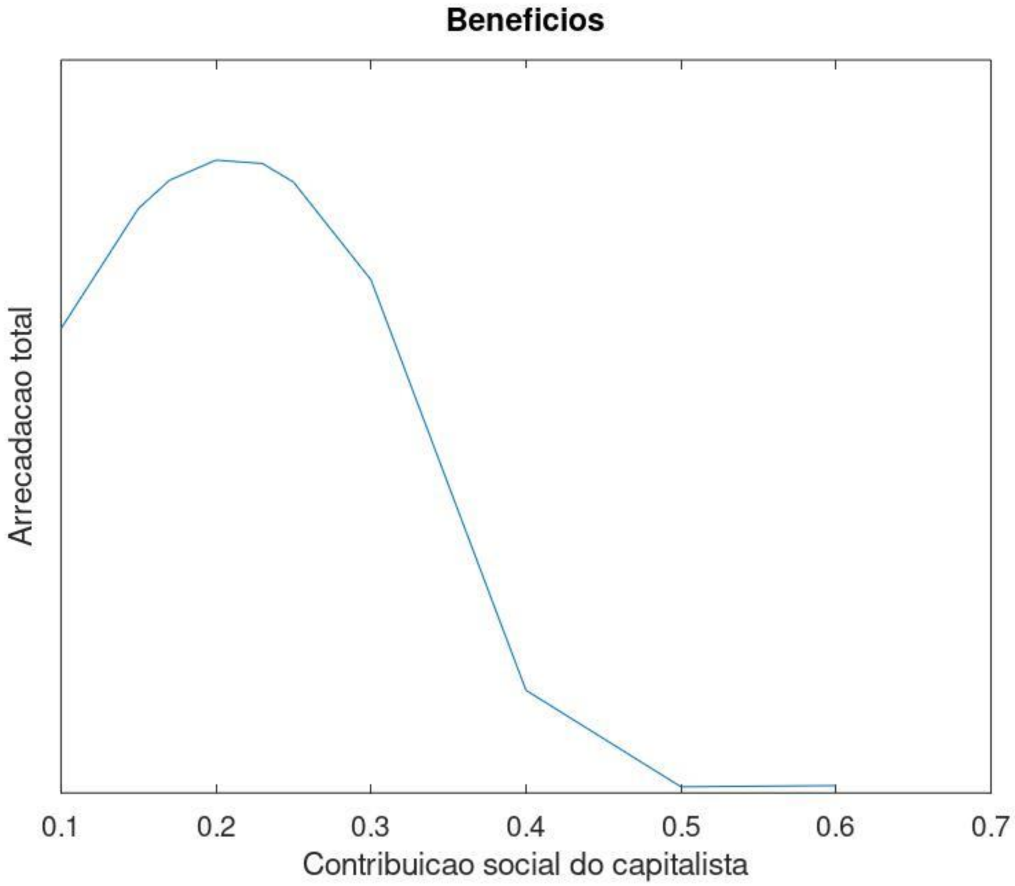
Figura 6 - Impacto da Mudança na Contribuição Social sobre os Trabalhadores



Elaborado pelos autores

Na Figura 6, é possível ver que o consumo dos trabalhadores jovens atingirá seu pico quando a contribuição social for de 30%. Aumentar a contribuição além desse ponto comprometerá grande parte de sua renda, assim seu consumo será drasticamente afetado. Já para os trabalhadores idosos, ou seja, aqueles que recebem o benefício, a partir deste ponto o consumo irá crescer expressivamente. A interseção entre as curvas representa a contribuição social ideal do trabalhador é de 40%, elevar a alíquota além deste ponto não aumentaria o bem-estar dos trabalhadores. O estoque de capital, por outro lado, tem uma relação negativa com a contribuição social, chegando a 0, pois esta classe não deixa herança.

Figura 7 - Curva de Laffer dos capitalistas



Elaborado pelos autores

A Figura 7 representa a curva de Laffer, que analisa a relação entre o nível de arrecadação em valores brutos e a porcentagem de tributação de uma economia. De acordo com essa teoria, a partir do ponto máximo desta curva, o aumento da alíquota tem efeito contrário, ou seja, a arrecadação é reduzida devido ao esgotamento da capacidade contributiva, conforme evidencia a figura. A arrecadação dos capitalistas é dada pelo produto da taxa de imposto que recai sobre a renda dos capitalistas, a base do imposto. Esta base representa a demanda por capital, ou seja, o quanto eles poupam para o futuro. À medida que o governou aumenta a alíquota, a tributação aumenta e a base do imposto cai, assim, a curva de Laffer mostra que quando o imposto é relativamente pequeno, aumentar ele, tem um efeito maior, isso acontece porque a demanda por capital não é tão sensível. Porém, quando essa taxa aumenta expressivamente, essa demanda começa a cair mais que proporcionalmente, assim como a arrecadação. Neste modelo, não existe curva de Laffer para os trabalhadores, porque supõem-se salário fixo e oferta de trabalho exógena, e como mostra Wei e

Araújo (2009), a tributação irá afetar na oferta de trabalho. A próxima seção apresentará as conclusões finais.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo contribui para a literatura em quatro aspectos:

(I) A simulação numérica mostra que a aposentadoria, no sistema PAYG, melhorará o consumo e o bem-estar dos trabalhadores, o que está de acordo com as expectativas. No entanto, quando a contribuição social chega a 0.3, os trabalhadores terão uma diminuição do seu bem-estar, pois, grande parte da sua renda está sendo comprometida. Isso mostra os limites das políticas fiscais.

(II) Para os capitalistas, a aposentadoria impactará negativamente o estoque de capital e o bem-estar, isso ocorre porque eles pagam o tributo, mas não recebem os benefícios. Porém, o seu consumo tem uma relação positiva com a contribuição social, isso acontece pois eles irão aumentar o consumo para manter o nível de utilidade.

(III) O equilíbrio parcial do governo mostrou que existe um ponto máximo para a tributação sobre os lucros, evidenciando a curva de Laffer dos capitalistas. Ou seja, aumentos progressivos da alíquota são ineficientes, pois chegará a um nível em que a receita é máxima, após esse nível a receita diminuirá. Desta forma, a política fiscal não deve ser a única ferramenta utilizada para melhorar a distribuição de renda.

(IV) Verifica-se no modelo uma relação direta com a realidade social dos países desenvolvidos e em desenvolvimento. Como a renda por trabalhador é menor do que a renda por capitalista, imputar uma tributação igual ou maior para a primeira classe irá condenar os trabalhadores a uma eterna desigualdade de renda.

Para concluir, os resultados obtidos no presente artigo avançam a literatura econômica. No entanto, ainda existem questões consideráveis a serem tratadas, como por exemplo, como a previdência afeta a oferta de trabalho.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nesta dissertação buscou-se expandir um modelo de ciclo de vida considerando o sistema de seguridade social *a lá* PAYG. O objetivo aqui é compreender como este sistema afeta a distribuição de renda em um modelo com agentes heterogêneos (capitalistas e trabalhadores) e fricção nos mercados de capitais (diferentes taxas de juros para cada classe).

No capítulo 1, estendeu-se o modelo de ciclo de vida, inserindo o PAYG sobre mercados imperfeitos e uma nova função de consumo dos capitalistas, trabalhadores ativos e aposentados. Os resultados mostram que o estoque de capital dos capitalistas não é afetado pela tributação, enquanto o consumo é direto e negativamente afetado pela tributação, transferindo parte do consumo para os aposentados. Analiticamente falando, a transferência de renda veio do consumo e não do capital total desta classe. Já para os trabalhadores ativos, o estoque de capital do trabalhador ativo é positivamente afetado pela tributação, o que difere do modelo desenvolvido por Wei e Araújo (2009), para eles, a tributação sobre o salário, não afeta a acumulação de capital do trabalhador. Além disso, existe uma relação positiva entre a tributação do trabalhador e o consumo, tanto para os ativos, quando para os inativos. Nota-se que a taxa de crescimento da população afeta esse equilíbrio, cuja conclusão serve para apresentar a robustez do sistema PAYG. Os resultados aqui diferem dos resultados apresentados por Góes e Teixeira (2020), uma vez que a tributação reestruturou todas as equações.

Diferente do capítulo 1, no capítulo 2, expandiu-se o modelo de Baranzini (1991, CAP 6.), considerando a mesma função de consumo, contudo, trazendo a hipótese do PAYG e de mercados imperfeitos. Além disso, neste capítulo é feito o cálculo de benefício e análise do impacto da expectativa de vida, do período ativo, do crescimento populacional e dos rendimentos de cada classe, com respeito a distribuição de renda. Os resultados, em uma perspectiva de longo prazo, aumentam todas as receitas. Mostrando que o PAYG tem um impacto positivo no consumo dos trabalhadores e, a tributação capitalista, tem um efeito positivo sobre a renda capitalista. Nesse sentido, mesmo considerando que o consumo dos capitalistas seja afetado negativamente pela tributação, o efeito real pode ser anulado pelos efeitos sobre a taxa de lucro. Estes resultados estão de acordo com as conclusões do capítulo 1.

Para mais, foi feita a diferenciação parcial do consumo de cada classe em relação aos parâmetros individuais. Com exceção da diferenciação do consumo inicial dos capitalistas com relação a taxa natural de crescimento da economia, todos os resultados concordam com os resultados de Góes e Teixeira (2020). Porém, uma possível explicação para a relação positiva entre consumo e taxa de crescimento natural da economia é que um aumento de n, aumenta os lucros do capitalista, o que concorda com a afirmação de Marx (1984) de que os capitalistas ditam o ritmo de crescimento da economia.

Por fim, no capítulo 3 foi feita uma simulação numérica considerando o PAYG em um MGS. O que difere dos capítulos anteriores, os quais usaram o modelo de ciclo de vida. A motivação para a escolha deste modelo, é que o MGS permite a análise intertemporal, O MGS foi escolhido pois permite examinar, em uma perspectiva intertemporal, os efeitos de variações tributárias sobre variáveis como consumo, estoque de capital e bem-estar das diferentes gerações. Os resultados mostraram uma melhora no consumo e o bem-estar dos trabalhadores, até certo ponto, o que evidencia os limites da política fiscal. O estoque de capital desta classe não irá aumentar, mostrando, que o PAYG não melhora a riqueza dos trabalhadores, porém, melhora o seu bem-estar, o que concorda com a literatura. Para os capitalistas, a aposentadoria impactará negativamente o bem-estar, uma vez que está classe apenas paga a contribuição social, mas não recebe o benefício. Além disso, é possível notar que o estoque de capital e o consumo são impactados em direções opostas, ou seja, para o capitalista aumentar o seu consumo é necessário que ele diminua o seu estoque de capital, concordando com a afirmação de Kalecki (1971) de que os capitalistas são donos do seu próprio destino.

Portanto, constrói-se, do início ao fim desta dissertação, um debate histórico e teórico em torno do tema previdenciário e da abordagem pós-keynesiana. Porém, ainda existem questões que podem ser tratadas, tais como: os efeitos da previdência na oferta de trabalho, efeitos do comercio internacional e abertura da economia, endogenizarão do mercado de trabalho, entre outras.

REFERÊNCIAS

AARON, H. **Economic effects of social security**. 1. ed. Washington: Brookings Institution Press, 1982.

ACEMOGLU, D. Growth with Overlapping Generations. *In:* ACEMOGLU, D. **Introduction to Modern Economic Growth**. Princeton: Princeton University Press, 2009, p. 327-355.

ARTHUR, W. B.; MCNICOLL, G. Samuelson, population and intergenerational transfers. **International Economic Review**, v. 109, n. 1, p. 241–246. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2526407. Acesso em: 23 mar. 2022.

BALESTRA, P.; BARANZINI M. Some optimal aspects in a two class growth model with a differentiadted interest rate. **Kyklos International Review for Social Science**, Basileia, v. 1, n. 4, p. 240-256, 1971. Disponível em: https://doi.org/10.1111/j.1467-6435.1971.tb00808.x. Acesso em: 24 mar. 2020.

BARANZINI, M. **A theory of wealth distribution and accumulation**. 1 ed. New York: Oxford University Press, 1991.

BARANZINI, M.; BENJUINO, S. O.; TEIXEIRA, J. R. **Taxation on Intergenerational Bequest and Redistribution of Wealth in a Class-Setting**. Texto para discussão, n. 279, 2003. Brasília: Departamento de Economia, Universidade de Brasília.

BUCCIOL, A. A Note On Social Security Welfare With Self-Control Problems. **Macroeconomic Dynamics**, v. 15, n. 4, p. 579-594, 2011. Disponível em: doi:10.1017/S1365100510000209. Acesso em: 25 mar. 2022.

DE BRUNHOFF, S. **État et capital**. Paris: Paris: Maspero, 1982.

DIAMOND, P. A. A framework for social security analysis. **Journal of Public Economics**, v. 8, n. 3, p. 275-298, 1977. Disponível em: https://doi.org/10.1016/0047-2727(77)90002-0. Acesso em: 25 mar. 2022.

DIAMOND, P. A. National Debt in a Neoclassical Growth Model. **The American Economic Review**, v. 55, n. 5, p. 1126–1150, 1965. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/1809231. Acesso em: 14 abr. 2022.

DORFMAN, R. An economic interpretation of optimal control theory. **The American Economic Review**, v. 59, n. 5, p. 817-831, 1969. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/1810679. Acesso em: 25 mar. 2022.

DRÈZE, J.; KHERA, R. Recent social security initiatives in India. **World Development**, v. 98, p. 555-572, 2017. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.worlddev.2017.05.035. Acesso em: 25 mar. 2022.

ELLERY JR., R. DE G.; BUGARIN, M. N. S. Previdência social e bem estar no Brasil. **Revista Brasileira de Economia [online]**. v. 57, n. 1, pp. 27-57, 2003. Disponível em: https://doi.org/10.1590/S0034-71402003000100002. Acesso em: 25 mar. 2022.

EVANS, G. R. **Chapter 1: Economic models**. Harvey Mudd College, 1997.

FELDSTEIN, M. Do private pensions increase national savings?. **Journal of Public Economics**, v. 10, n. 3, p. 277-293, 1978. Disponível em: https://www.nber.org/papers/w0186. Acesso em: 25 mar. 2022.

FELDSTEIN, M. Social security and saving: The extended life cycle theory. **The American Economic Review**, n. 66, n. 2, p. 77-86, 1976. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/1817202. Acesso em: 25 mar. 2022.

FOLEY, D. K.; MICHL, T. R. Government debt and social security: the overlapping generations model. *In*: FOLEY, D. K.; MICHL, T.R. **Growth and distribution**. Cambridge: Harvard University Press, 1999a. p. 225-255.

GERTLER, M. Government debt and social security in a life-cycle economy. *In*: **Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy***,* North-Holland, v. 50, p. 61-110, 1999.

GÓES, G. S.; TEIXEIRA, J. R. Growth and income distribution: The heritage effect on the capital accumulation process. **Structural Change and Economic Dynamics**, In Press. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.strueco.2020.03.009. Acesso em: 01 set. 2020.

GORDON, R. H. An Optimal Taxation Approach to Fiscal Federalism. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 98, n. 4, p. 567-586, 1983. Disponível em: doi:10.2307/1881778. Acesso em: 25 mar. 2022.

HARROD, R. F. Towards a Dynamic Economics: Some recent developments of economic theory and their application to policy. **MacMillan and Company**, London, 1948.

HEIJDRA, B. J.; PLOEG F. V. D. Intergenerational Economics, II. *In:* HEIJDRA, B. J.; PLOEG F. V. D. **The Foundations of Modern Macroeconomics**. New York: Oxford University Press, 2002, p. 589-650.

HICKS, A. **Social Democracy and Welfare Capitalism: A Century of Income Security Politics**. Cornell University Press, 2000. 288 p.

HOLLAND, M., & MALAGA, T. Previdência social no Brasil: propostas para uma reforma de longo prazo. Texto para discussão 487, **FGV EESP**, 29p, 2018.

INADA K. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization, **The Review of Economic Studies**, v. 30, n. 2, p. 119–127, 1963. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2295809. Acesso em: 25 mar. 2022.

KALDOR, N. Alternative theories of distribution. **The Review of Economic Studies**, Cambridge, v. 23, n. 2, p. 83-100, 1955-1956. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2296292?origin=JSTOR-pdf. Acesso em: 9 jun. 2020.

KALECKI, M. **Selected Essays on the Dynamics of the Capitalist Economy 1933–1970**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1971. 206 p.

KEYFITZ, N.; CASWELL, H. **Applied Mathematical Demography**. 3. ed. Springer, 2005. 584 p.

KEYNES, J. M. **The general theory of employment, interest, and money**. Kessinger Publishing, 1936. 414 p.

LAVINAS, L. The collateralization of social policy under financialized capitalism. **Development and Change**, v. 49, n. 2, p. 502-517, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1111/dech.12370. Acesso em: 25 mar. 2022.

LEE, R., & YAMAGATA, H. Sustainable Social Security: What Would It Cost?. **National Tax Journal**, v. 56, n. 1, p. 27–43, 2003. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/41789650. Acesso em: 26 mar. 2022.

LÈONARD, D; LONG, N. V. **Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 368 p.

MARX, K. **O capital: crítica da economia política - Livro Primeiro**. São Paulo: Abril Cultural. 1984

MILLER, J. Resuscitating Private Social Security Accounts: Countering Inequality With Panic and Prevarication. **NEW SOLUTIONS: A Journal of Environmental and Occupational Health Policy**, v. 30, n. 1, p. 52-56, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1177/1048291120905081. Acesso em: 25 mar. 2022.

MEADE, J. The rate of profit in a growing economy. **The Economic Journal**, v. 73, n. 292, p. 665-674, 1963. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2228173?origin=JSTOR-pdf. Acesso em: 28 abr. 2022.

MODIGLIANI, F.; BRUMBERG, R. Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. *In:* **Post-Keynesian economics***,* London: Allen and Unwin, p. 388-436, 1954.

NELL, E. J. Reinventing Macroeconomics: What are the Questions?. *In:* HARCOURT, G. C.; KRIESLER, Peter. **The Oxford Handbook of Post-Keynesian Economics, Volume 1: Theory and Origins**. 1. ed. Oxford: Oxford handbooks online, 2013. v. 1, p. 1-19.

PASINETTI, L. L. A few counter-factual hypotheses on the current economic crisis. **Cambridge Journal of Economics**, Cambridge, v. 36, n. 6, p. 1433-1453, 2012. Disponível em: https://doi.org/10.1093/cje/ber009. Acesso em: 10 ago. 2020.

PASINETTI, L. L. Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 29, n. 4, p. 267-279, 1962. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/2296303?origin=JSTOR-pdf. Acesso em: 27 mar. 2020.

PONTRYAGIN, L. S. **Mathematical theory of optimal processes**. 1. Ed. Routledge, 1987. 382 p. v. 4.

PORTELLA, A. A.; de Souza, B. C. N. A nova ofensiva ao sistema previdenciário brasileiro: um paralelo com o modelo privatista chileno. **Revista Direito, Estado e Sociedade**, v. 58, p. 14-41, 2020. Disponível em: https://revistades.jur.puc-rio.br/index.php/revistades/article/view/1192. Acesso em: 25 mar. 2022.

RUST, J.; Phelan, C. How Social Security and Medicare Affect Retirement Behavior In a World of Incomplete Markets. **Econometrica**, v. 65, n. 4, p. 781-831, 1997. Disponível em: doi:10.2307/2171940. Acesso em: 25 mar. 2022.

SAMUELSON, P. A. An Exact Consumption-Loan Model of Interest With or Withouthe Social Contrivance of Money, **Journal of Political Economy**, v. 66, n. 6, p. 467-482, 1958. Dispnível em: https://www.jstor.org/stable/1826989. Acesso em: 25 mar. 2022.

SANTOS, K. D.; MARCELOS, W. R. Processo De Produção Da Placa De Circuito Impresso , **Anais do EVINCI - UniBrasil**: v. 1, n. 4, p. 1, 2015.

STEEDMAN, I. The state and the outcome of the pasinetti process. **The Economic Journal**, Manchester, v. 82, n. 328, p. 1387-1395, 1972. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/pdf/2231318.pdf?seq=1. Acesso em 28 mar. 2020.

SUGAHARA, R. N.; et al. Effects of the taxation on inheritance in a microfounded model of growth and post-Keynesian distribution with overlapping generations and life cycle. **EconomiA**. v. 17, n. 3, p.340-350, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.econ.2016.09.002. Acesso em: 01 set. 2020.

TEIXEIRA, J. R.; SUGAHARA, R. N., BARANZINI, M. On Micro-Foundation for the Kaldor-Pasinetti Growth Model with Taxation on Bequest. **Revista Brasileira de Economia de Empresas**. v. 2, n. 1, p. 9-23, 2002. Disponível em: https://portalrevistas.ucb.br/index.php/rbee/article/view/4380. Acesso em: 01 set. 2020.

TURGOT, A. R. J. **Reflections on the Formation and Distribution of Wealth**. 1. ed. London: E. Spragg, p. 119-182, 1774.

WALRAS, L. **Éléments d'Économie Politique Pure Ou Théorie de la Richesse Sociale**. Hachette Livre Bnf, 1874.

WANNISKI, J. Taxes, revenues, and the Laffer curve. **The Public Interest**, v. 50, n. 3, p. 3-16, 1978. Disponível em: https://www.proquest.com/docview/1298134426?pq-origsite=gscholar&fromopenview=true. Acesso em: 25 mar. 2022.

WEI, H. C. C.; ARAÚJO, R. S. A. A Post-Keynesian Model of Growth and Wealth Distribution: Government's Optimal Tax Choice Using an Intertemporal Infinitely Representative Agent. **Revista de Economia Mackenzie**, v. 7, n. 1, p.9-29, 2009. Acesso em: 25 mar. 2022.

WILLIS, R. J. Economics of changing age distribution in developed countries. *In:* Lee, R, Life Cycles, Institutions, and Population Growth: **A Theory of the Equilibrium Interest Rate in an Overlapping Generations Model. International Studies in Demography**, Oxford: Oxford University Press, p. 106–138, 1988. Acesso em: 25 mar. 2022.

WOLFF, E. Life cycle savings and the individual distribution of wealth by class. *In:* **Modelling the accumulation and distribution of wealth**, p. 261-280, 1988. Clarendon Press.

APÊNDICE 1

MANIPULAÇÕES MATEMÁTICAS

A - CAPITALISTAS

$MaxU_C = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c(t)]^a dt$

s.a. $\dot{k}_C = (1 - t_C) r k_C - c_C$

O Hamiltoniano é:

$H_c = e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c(t)]^a + \lambda_1 [(1 - t_C) r k_C - c_C(t)]$

Aplicando a condição de primeira ordem:

$\frac{\partial H_C}{\partial c_C(t)} = c_C(t)^{a-1} e^{-\delta t} - \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = c_C(t)^{a-1} e^{-\delta t}$

(1A)

$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H_C}{\partial k_C(t)} = -\lambda_1 (1 - t_C) r$

(2A)

$\dot{k}_C(t) = \frac{\partial H_C}{\partial \lambda_1(t)} = (1 - t_C) r k_C - c_C(t)$

(3A)

De (1A), encontra-se $\dot{\lambda}_1(t)$:

$\dot{\lambda}_1 = (a-1) c_C(t)^{a-2} \dot{c}_C e^{-\delta_C t} - \delta e^{-\delta_C t} c_C(t)^{a-1}$

(4A)

Igualando (4A) e (2A)

$-c_C(t)^{a-1} e^{-\delta_C t} (1 - t_C) r + \delta_C e^{-\delta_C t} c_C(t)^{a-1} = (a-1) c_C(t)^{a-2} \dot{c}_C e^{-\delta_C t}$

$$\frac{c_C(t)[\delta_C-(1-t_C)r]}{(a-1)} = \dot{c}_C$$
(5A)

De (5A), tem-se t_C^*:

$$\frac{c_C(t)[\delta_C-(1-t_C)r]}{(a-1)} = 0 \rightarrow \delta_C - (1-t_C)r = 0 \rightarrow (1-t_C) = \frac{\delta_C}{r} \rightarrow t_C^* = 1 - \frac{\delta_C}{r}$$
(6A)

De (3A) e (6A), tem-se $c_C(t)$

$$c_C(t) = \left(1 - 1 + \frac{\delta_C}{r}\right) r k_C \rightarrow c_C^*(t) = \delta_C k_C^*(t)$$
(7A)

Tem-se o estoque de capital dos capitalistas, de Baranzini (1991) e Góes e Teixeira (2020):

$$k_c^a(t) = k_0 e^{nt} + \int_0^t [(r-n)k_0 e^{nt} - c_c(v)] e^{r(t-v)} dv = k_0 e^{rt}[1 - B(1 - e^{(g^*-r)t})]$$
(8A)

$$k_c^p(t) = [k_c^a(R) - k_0 e^{Rn}] e^{r(t-R)} + \int_R^t c_c(v) e^{r(t-v)} dv = k_0 e^{rt}(e^{(g^*-r)t} - e^{(g^*-r)T}) \quad \text{(9A)}$$

Portanto:

$$k_C(t) = k_C^a + k_C^p \rightarrow ln[k_C(t)] = ln\left[k_C^a + k_C^p\right] \rightarrow \frac{\dot{k}_C}{k_C} = \frac{\dot{k}_C^a}{k_C} + \frac{\dot{k}_C^p}{k_C}$$
(10A)

De (8A), tem-se:

$$k_C^a = k_0 e^{rt}\left[1 - B\left(1 - e^{(g^*-r)t}\right)\right] \rightarrow \ln(k_C^a) = lnk_0 + rt + ln\left[1 - B\left(1 - e^{(g^*-r)t}\right)\right]$$

$$\frac{\dot{k}_C^a}{k_C^a} = r + \frac{(g^*-r)Be^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}}{k_c^a} \rightarrow \dot{k}_C^a = rk_c^a + (g^* - r)Be^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}$$

(11A)

Considerando $\dot{k}_C^a = 0$, tem-se:

$$k_C^a(t)^* = \frac{(g^*-r)Be^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}}{r}$$

(12A)

De (9A), tem-se:

$$\frac{\dot{k}_c^p}{k_c^p} = r + \frac{(g^*-r)\left[e^{(g^*-r)t}-e^{(g^*-r)T}\right]}{e^{(g^*-r)t}-e^{(g^*-r)T}} \rightarrow \frac{\dot{k}_c^p}{k_c^p} = r + (g^* - r) \rightarrow \dot{k}_c^p = g^*k_c^p$$

(13A)

De (10A), tem-se:

$$\frac{\dot{k}_C}{k_C} = \frac{\dot{k}_C^a}{k_C} + \frac{\dot{k}_C^p}{k_C} \rightarrow \dot{k}_C = \dot{k}_C^a + \dot{k}_C^p \rightarrow \dot{k}_C = rk_C^a + (g^* - r)Be^{(g^*-r)t}k_0e^{rt} + g^*k_c^p$$

$$k_C(t)^* = Be^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}\,\frac{(r-g^*)}{r}$$

(14A)

Como: $B = \left(\frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}}\right)$, ver Góes e Teixeira (2020), assim, tem-se os pontos ótimos:

$$k_C(t)^* = \left(\frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}}\right)e^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}\,\frac{(r-g^*)}{r}$$

(15A)

$$c_C^*(t) = \delta_C\left(\frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}}\right)e^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}\,\frac{(r-g^*)}{r}$$

Como: $t_C^* = 1 - \frac{\delta_C}{r}$, temos:

$c_C^*(t) = (1 - t_C)\left(\frac{1-e^{R(n-r)}}{1-e^{T(g^*-r)}}\right)e^{(g^*-r)t}k_0e^{rt}(r - g^*)$

(16A)

B - TRABALAHDORES

1º – Trabalhadores ativos

$MaxU_W^A = \int_0^R e^{-\delta_W t}\frac{1}{a}[c_W^A(t)]^a dt$

$\dot{k}_W^A = (1 - t_W)[w + ik_W^A(t)] - c_W^A(t)$

O Hamiltoniano:

$H_W^A = e^{-\delta_W t}\frac{1}{a}[c_W^A(t)]^a + \lambda_2[(1 - t_W)(w + ik_W^A) - c_W^A(t)]$

(1B)

Aplicando a condição de primeira ordem:

$\frac{\partial H_W^A}{\partial c_W^A(t)} = 0 = e^{-\delta_W t}c_W^A(t)^{a-1} - \lambda_2$

(2B)

$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H_W^A}{\partial k_W^A(t)} = -(1 - t_W)i$

(3B)

$\dot{k}_W^A = \frac{\partial H_W^A}{\partial \lambda_2} = (1 - t_W)(w + ik_W^A) - c_W^A(t)$

(4B)

Derivando (2B) com respeito ao tempo:

$\dot{\lambda}_2 = -\delta_W e^{-\delta_W t}c_W^A(t)^{a-1} + e^{-\delta_W t}(a - 1)c_W^A(t)^{a-2}\dot{c}_W^A$

(5B)

Igualando (5B) e (3B):

$$-(1-t_W)i = -\delta_W e^{-\delta_W t} c_W^A(t)^{a-1} + e^{-\delta_W t}(a-1)c_W^A(t)^{a-2}\dot{c}_W^A$$

(6B)

Isolando $\dot{c}_W^A$ em (6B):

$$\frac{\left[\delta_W e^{-\delta_W t} c_W^A(t)^{a-1} - (1-t_W)i\right]}{e^{-\delta_W t}(a-1)c_W^A(t)^{a-2}} = \dot{c}_W^A$$

(7B)

Considerando (7B), se $\dot{c}_W^A = 0$:

$$\frac{\left[\delta_W e^{-\delta_W t} c_W^A(t)^{a-1} - (1-t_W)i\right]}{e^{-\delta_W t}(a-1)c_W^A(t)^{a-2}} = 0 \rightarrow c_W^A(t)^{a-1} = \frac{(1-t_W)i}{\delta_W e^{-\delta_W t}}$$

$$c_W^A(t)^* = \left[\frac{(1-t_W)i}{\delta_W e^{-\delta_W t}}\right]^{\frac{1}{a-1}} = \left[\frac{\delta_W e^{-\delta_W t}}{(1-t_W)i}\right]^{\frac{1}{1-a}}$$

(8B)

De (4B), tem-se:

$$0 = (1-t_W)(w + ik_W^A) - c_W^A(t)^*$$

$$c_W^A(t)^* = (1-t_W)(w + ik_W^A)$$

$$c_W^A(t)^* - (1-t_W)w = (1-t_W)ik_W^A$$

$${k_W^A}^* = \frac{c_W^A(t)^*}{(1-t_W)i} - \frac{w}{i}$$

$${k_W^A}^* = \left[\frac{[(1-t_W)i]^a}{\delta_W e^{-\delta_W t}}\right]^{\frac{1}{a-1}} - \frac{w}{i} = \left[\frac{\delta_W e^{-\delta_W t}}{[(1-t_W)i]^a}\right]^{\frac{1}{1-a}} - \frac{w}{i}$$

Baranzini (1991, p. 163) define $w = w_o e^{mt}$. Portanto:

$$k_W^{A\,*} = \left[\frac{\delta_W e^{-\delta_W t}}{[(1-t_W)i]^a}\right]^{\frac{1}{1-a}} - \frac{w_o e^{mt}}{i}$$

(9B)

2º – Trabalhadores aposentados:

$$MaxU_W^R = \int_R^T e^{(1+\eta)t} \frac{1}{a}[c_W^R(t)]^a dt$$

$$k_W^R = (1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)$$

O Hamiltoniano:

$$H_W^R = e^{\eta t}\frac{1}{a}[c_W^R(t)]^a + \lambda_3\left[(1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + \overline{k_W^R} - c_W^R(t)\right]$$

(10B)

Aplicando a condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial H_W^R}{\partial c_W^R(t)} = 0 = e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1} - \lambda_3$$

(11B)

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H_W^R}{\partial k_W^R(t)} = 0$$

(12B)

$$\dot{k}_W^R = 0 = \frac{\partial H_W^R}{\partial \lambda_3} = (1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + ik_W^A(t)]\} + k_W^R - c_W^R(t)$$

(13B)

De (11B), tem-se:

$$0 = e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1} - \lambda_3 \rightarrow \lambda_3 = e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1}$$

$$\eta e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1} + e^{\eta t}(a-1) c_W^R(t)^{a-2} \dot{c}_W^R = 0$$

$$e^{\eta t}(a-1) c_W^R(t)^{a-2} \dot{c}_W^R = -\eta e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1}$$

$$\dot{c}_W^R = -\frac{\eta e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1}}{e^{\eta t}(a-1) c_W^R(t)^{a-2}}$$

$$\dot{c}_W^R = \frac{\eta e^{\eta t} c_W^R(t)^{a-1}}{e^{\eta t}(1-a) c_W^R(t)^{a-2}}$$

$$\dot{c}_W^R = \frac{\eta c_W^R(t)}{(1-a)}$$

(14B)

De (13B), tem-se:

$$0 = (1+\eta)\{t_c r k_c + t_W[w + i k_W^A(t)]\} + k_W^R - c_W^R(t)$$

$$c_W^R(t)^* = (1+\eta)\{t_c r k_c(t)^* + t_W[w + i k_W^A(t)^*]\} + \overline{k_W^R}$$

(15B)

APÊNDICE 2

MANIPULAÇÕES MATEMÁTICAS

A - CAPITALISTAS

$\max \int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c_w(t)]^a dt$

s.a: $\int_0^T c_c(t) e^{-r(1-t_c)t} dt - k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right) = 0$ (1)

Condição ótima:

$c_c(t) = c_C(0) e^{\bar{g}t}$ (2)

$\bar{g} = \frac{r(1-t_c)-\delta}{1-a}$ (3)

Substituindo (2) em (1)

$$\int_0^T c_C(0) e^{\bar{g}t}\, e^{-r(1-t_c)t} dt - k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right) = 0$$

$$c_C(0) \int_0^T e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t} dt = k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)$$

$$c_C(0) \frac{e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t} - 1}{\bar{g} - r(1-t_c)} = k_0\left(1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)$$

$$c_C(0) = k_0[r(1-t_c) - \bar{g}] \frac{1 - e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1 - e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}}$$

De (2):

$c_C(t) = k_0[r(1-t_c) - \bar{g}] \frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}} e^{\bar{g}t}$ (4)

B - TRABALHADORES

$\max \int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{a} [c_w(t)]^a dt$

s.a: $\int_0^R [w_0(1-t_w)e^{mt} - c_w(t)]e^{-it}dt + \int_R^T [b(t) - c_w(t)]e^{-it}dt = 0$ (5)

Condição de otimo:

$$u'[c_w(0)] = e^{-\delta t} u'[c_w(t)]e^{it}$$

$$[c_w(0)]^{a-1} = e^{(i-\delta)t}[c_w(t)]^{a-1}$$

$$c_w(0) = e^{\frac{(i-\delta)t}{a-1}} c_w(t)$$

$c_w(t) = c_w(0)e^{g^* t}$ (6)

Onde $g^* = \frac{i-\delta}{1-a}$ (7)

Substituindo (6) em (5):

$$\int_0^R \left[w_0(1-t_w)e^{mt} - c_w(0)e^{g^* t}\right]e^{-it}dt + \int_R^T \left[b(t) - c_w(0)e^{g^* t}\right]e^{-it}dt = 0$$

$$w_0(1-t_w)\int_0^R e^{(m-i)t}dt - c_w(0)\int_0^T e^{(g^*-i)t}dt + \int_R^T b(t)e^{-it}dt = 0$$

Pode-se representar $\int_R^T b(t)e^{-it}dt = B_0(t)$

$$w_0(1-t_w)\left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{i-m}\right] - c_w(0)\left[\frac{1-e^{(g^*-i)t}}{i-g^*}\right] + B_0(t) = 0$$

$w_0(1-t_w)\left[\frac{i-g^*}{i-m}\right]\left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right]B_0(t) = c_w(0)$ (8)

C – GOVERNO

Número de pessoas em t $\begin{cases} N_w(t) = N_w \frac{e^{gT}(1-e^{-gT})}{g} \\ N_c(t) = N_c \frac{e^{gT}(1-e^{-gT})}{g} \end{cases}$

Pessoas ativas em t $\begin{cases} N_w^A(t) = N_w \frac{e^{gR}(1-e^{-gR})}{g} \\ N_c^A(t) = N_c \frac{e^{gR}(1-e^{-gR})}{g} \end{cases}$

Pessoas inativas em t $\left\{ N_w^R(t) = N_w \frac{(e^{gT}-e^{-gR})}{g} \right.$

$$N_w^R(t) = N_w \frac{e^{gR}\left(e^{\frac{T}{R}} - 1\right)}{g}$$

$$b(t)\frac{N_w e^{gR}\left(e^{\frac{T}{R}} - 1\right)}{g} = w_0 e^{mT} t_w \frac{N_w e^{gR}(1 - e^{-gR})}{g} + erk_c(t)t_c \frac{N_c e^{gR}(1 - e^{-gR})}{g}$$

$$b(t)\left(e^{\frac{T}{R}} - 1\right) = w_0 e^{mT} t_w (1 - e^{-gR}) + erk_c(t)t_c \frac{N_c}{N_w}(1 - e^{-gR})$$

$$b(t) = \frac{1}{\left(e^{\frac{T}{R}}-1\right)}\left\{w_0 e^{mT} t_w (1 - e^{-gR}) + erk_c(t)t_c \frac{N_c(1-e^{-gR})}{N_w}\right\} \qquad (9)$$

$\uparrow T$ (Expectativa de vida) $\rightarrow \downarrow b(t)$

$\uparrow R$ (Tempo ativo) $\rightarrow \uparrow b(t)$

$\uparrow n = m + g \rightarrow \begin{matrix} \uparrow m \\ \uparrow g \end{matrix} \rightarrow \uparrow b(t)$

$\uparrow rk_c \rightarrow \uparrow b(t)$

$\uparrow \frac{N_c}{N_w} \rightarrow \uparrow b(t)$

APÊNDICE 3

DERIVADAS

A – CAPITALISTAS

$$c_C(0) \quad = k_0[r(1-t_c)-\bar{g}]\frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}e^{\bar{g}t}$$

$$\bar{g} = \frac{r(1-t_c)-\delta}{1-a}$$

$$\frac{dc_c(0)}{dt_c} = -k_0\frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}e^{\bar{g}t} + k_0[r(1-t_c) -$$
$$\bar{g}]\frac{\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)rTe^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}-rRe^{[n-r(1-t_c)]R}\left(1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}\right)}{\left(1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}\right)^2}e^{\bar{g}t} < 0$$

$$\frac{dc_c(0)}{dn} = k_0[r(1-t_c)-\bar{g}]\frac{\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)Re^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}e^{\bar{g}t} > 0$$

$$\frac{\partial c_c(0)}{\partial \delta} = \frac{\frac{\left\{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right\}k_0e^{\bar{g}t}}{1-a}\left\{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}-r(1-t_c)+\bar{g}\right\}}{\left\{1-e^{\left[\frac{r(1-t_c)-\delta}{1-a}-r(1-t_c)\right]T}\right\}^2} > 0$$

$$\frac{dc_c(0)}{dr} = \frac{(1-t_c)e^{\bar{g}t}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}\left\{k_0\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right) +\right.$$
$$\left.\frac{\left(1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}\right)e^{[n-r(1-t_c)]R}R-\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)Te^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}\right\} > 0$$

$$\frac{dc_c(0)}{d\bar{g}} = -\frac{k_0e^{\bar{g}t}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}\left\{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}-[r(1-t_c) -\right.$$
$$\left.\bar{g}]\frac{\left[t\left(1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}\right)-\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}T\right]}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}\right\} > 0$$

$$\frac{dc_c(0)}{dT} = \frac{-k_0[r(1-t_c)-\bar{g}]^2\left(1-e^{[n-r(1-t_c)]R}\right)e^{\bar{g}t}e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}}{\left(1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]T}\right)^3} < 0$$

B - TRABALHADORES

$$c_w(0) = w_0(1-t_w)\left[\frac{i-g^*}{i-m}\right]\left[\frac{1-e^{(m-i)R}}{1-e^{(g^*-i)T}}\right]+\left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)T}}\right]B_0(t)$$

$$g^* = \frac{i-\delta}{1-a}$$

$$\frac{dc_w(0)}{dt_w} = -w_0\left[\frac{-(ia+\delta)}{(i-m)(1-a)}\right]\left[\frac{1-e^{(m-i)R}}{1-e^{(g^*-i)T}}\right] < 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{dB_o(t)} = \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)T}}\right] > 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{dm} = \frac{w_0(1-t_w)}{1-e^{(g^*-i)T}}\left[\frac{ia+\delta}{(i-m)^2(1-a)}\right]\left\{1-e^{-(i-m)R}[1+R(i-m)]\right\} > 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{dg^*} = -w_0(1-t_w)\left(\frac{1}{i-m}\right)\left\{\frac{\left(1-e^{(m-i)R}\right)^2-(i-g^*)\left(1-e^{-(i-g^*)T}\right)te^{-(i-g^*)T}}{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)^2}\right\} -$$

$$\left[\frac{1-e^{-(i-g^*)T}(1-iT+g^*T)}{\left(1-e^{-(i-g^*)T}\right)^2}\right]B_0(t) > 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{di} = w_0(1-t_w)\left[\frac{g^*-m}{(i-m)^2}\right]\left[\frac{1-e^{(m-i)R}}{1-e^{(g^*-i)T}}\right] + w_0(1-$$

$$t_w)\left[\frac{i-g^*}{i-m}\right]\left[\frac{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)Re^{(m-i)R}-\left(1-e^{(m-i)R}\right)Te^{(g^*-i)T}}{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)^2}\right] + \left[\frac{1-e^{(g^*-i)T}[1+T(i-g^*)]}{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)^2}\right]B_0(t) < 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{d\delta} = -\frac{w_0(1-t_w)}{(i-m)(1-a)}\left[\frac{1-e^{(m-i)R}}{1-e^{\left(\frac{ia-\delta}{1-a}\right)T}}\right]\left\{\frac{1-e^{\left(\frac{ia-\delta}{1-a}\right)T}[1-T(ia-\delta)]}{1-e^{\left(\frac{ia-\delta}{1-a}\right)T}}\right\} +$$

$$\left\{\frac{\left(1-e^{\left(\frac{ia-\delta}{1-a}\right)T}\right)(1-a)+Te^{\frac{1a-\delta}{1-a}}(\delta-ia)}{\left[\left(1-e^{\left(\frac{ia-\delta}{1-a}\right)T}\right)(1-a)\right]^2}\right\}B_0(t) > 0$$

$$\frac{dc_w(0)}{dT} = w_0(1-t_w)\left[\frac{i-g^*}{i-m}\right]\left[\frac{(1-e^{(m-i)R})(g^*-i)e^{(g^*-i)T}}{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)^2}\right] + \left[\frac{(i-g^*)(g^*-i)e^{(g^*-i)T}}{\left(1-e^{(g^*-i)T}\right)^2}\right]B_0(t) > 0$$

APÊNDICE 4

AGREGAÇÃO

A – CAPITALISTAS

$$C_c(t) = \int_0^T N_0^c e^{n(t-v)} c_c(t)dt$$

$$C_c(t) = N_0^c e^{n(t-v)} k_0[r(1-t_c) - \bar{g}] \frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}} e^{\bar{g}t} \tag{1}$$

$$K_c(t) = \int_0^T N_0^c e^{nv} k_c(t-v)(v)dv$$

$$c_c(t) = rk_c - \dot{k}_c$$

$k_c(0) = k_0$ e $k_c(R) = k_0 e^{nR}$

$$\ln k_c(R) = \ln k_0 e^{nR} \rightarrow \ln k_c(R) = \ln k_0 + nR$$

$$\frac{\dot{k}_c}{k_c} = n \rightarrow \dot{k}_c = nk_c$$

$$c_c(t) = rk_c - nk_c \rightarrow c_c(t) = k_c(r-n)$$

$$\frac{c_c(t)}{(r-n)} = k_c$$

Integrando de 0 a T, tem-se:

$$\int_0^T k_c(t) = K_c(t)$$

$$\int_0^T c_c(t) = C_c(t)$$

Portanto:

$$K_c(t) = \frac{C_c(t)}{r-n}$$

$K_c(t) = \frac{N_0^c e^{n(t-v)} k_0[r(1-t_c)-\bar{g}]}{r-n} \frac{1-e^{[n-r(1-t_c)]R}}{1-e^{[\bar{g}-r(1-t_c)]t}} e^{\bar{g}t}$
(2)

$$S_c(t) = rk_c(t)(1-t_c) - C_c(t) \quad (3)$$

B - TRABALHADORES

$$C_w(t) = \int_0^T N_0^w e^{n(t-v)} c_w(t) dt$$

$$C_w(t) = N_0^w e^{n(t-v)} \left\{ w_0(1-t_w) \left[\frac{i-g^*}{i-m}\right] \left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] B_0(t) \right\} e^{g^* t} \quad (4)$$

$$K_w(t) = \int_0^T N_0^w e^{nv} k_w(t-v)(v) dv$$

Pode-se assumir $K_w(T) = 0$ e $K_w(0) = 0$

$$K_w(T) = S_w^a - C_w^R = 0$$

$$c_w(t) = w(t) + ik_w - \dot{k_w}(t)$$

$k_w(0) = k_w(R) = 0$, então $\dot{k_w} = 0$

$$c_w(t) = w(t) + ik_w \rightarrow k_w = \frac{c_w(t) - w(t)}{i}$$

Integrando de 0 a T, temos:

$$\int_0^T k_w(t) = K_w(t)$$

Portanto:

$$K_c(t) = \frac{C_c(t) - w(t)}{i}$$

Sabemos que $w(t) = w_0 e^{mt}$, então:

$$K_c(t) = \frac{N_0^w e^{n(t-v)} \left\{ w_0(1-t_w) \left[\frac{i-g^*}{i-m}\right] \left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] B_0(t) \right\} e^{g^* t} - w_0 e^{mt}}{i}$$

$$K_c(t) = \frac{N_0^w e^{n(t-v)+g^* t}}{i} \left\{ w_0(1-t_w) \left[\frac{i-g^*}{i-m}\right] \left[\frac{1-e^{(m-i)t}}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] + \left[\frac{i-g^*}{1-e^{(g^*-i)t}}\right] B_0(t) \right\} - \frac{w_0 e^{mt}}{i} \qquad (5)$$