Universidade Estadual de Londrina

DAIANY CRISTINY RAMOS

MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS EXPERIÊNCIAS DOS ALUNOS

Londrina
2020

DAIANY CRISTINY RAMOS

MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS EXPERIÊNCIAS DOS ALUNOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof.ª Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Ramos, Daiany Cristiny.

Modelagem Matemática: uma análise semiótica das experiências dos alunos / Daiany Cristiny Ramos. - Londrina, 2020.
100 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem Matemática na Educação Matemática. - Tese. 2. Categorias Peirceanas. - Tese. 3. Raciocínio Diagramático. - Tese. 4. Interpretantes comunicacionais. - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

DAIANY CRISTINY RAMOS

MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DAS EXPERIÊNCIAS DOS ALUNOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito para obtenção do Título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientador: Prof.ª Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Profª. Drª. Susana Carreira
Universidade do Algarve - UALG

____
Profª. Drª. Eleni Bisognin
Universidade Franciscana-UFN

____
Profª. Drª. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual do Paraná-UNESPAR

____
Profª. Drª. Edilaine Regina dos Santos
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 14 de abril de 2020.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível por causa do apoio de pessoas especiais que estiveram presentes em todos esses anos. Então só me resta agradecer...

à minha mãe, por sempre me incentivar a estudar, pois o seu sonho era, como ela dizia, "que eu fosse alguém na vida". Foi justamente para alcançar esse sonho que cheguei até aqui. Mesmo que não esteja mais entre nós, muito obrigada mãe por me apoiar e incentivar enquanto pode.

aos meus tios Luciano e Marcelo, por sempre me apoiarem nas decisões que tomei e por me fazerem seguir em frente quando o que eu mais queria era desistir.

à Renata por me fazer acreditar que tudo era possível e que eu era capaz de fazer qualquer coisa; por ter me feito continuar quando eu só queria parar.

à Katielly, por todas as nossas conversas, por todos os incentivos, por todos os puxões de orelha, pelo companheirismo e parceria. Katy, muito obrigada por me fazer companhia nessa caminhada que como sabemos não é nada fácil.

à Alessandra, Jenai, Renata e Hallynne por me incentivarem a continuar e por ouvir todas as minhas angústias nesse período.

à minha prima, Sarha, por me ouvir quando precisei e me apoiar durante todos esses anos.

à minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de desenvolver outra pesquisa sob sua orientação; pelos puxões de orelha; pelas palavras de incentivo quando foi necessário; por compartilhar comigo durante todos esses anos suas experiências e seus conhecimentos, aprendi muito com você durante esses anos.

às professoras Susana Carreira, Eleni Bisognin, Michele Regiane Dias Veronez e Edilaine Regina dos Santos, que dispensaram tempo para analisar e, com isso, contribuir significativamente na construção deste trabalho.

aos amigos do GRUPEMMAT por todas as nossas terças-feiras de estudo; por todos os nossos cafés, nossos almoços. Agradeço a todos pela companhia, pelos conselhos, pelas brincadeiras.

aos alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática, pelo companheirismo e pela participação na pesquisa.

a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Believe...

RAMOS, Daiany Cristiny. **Modelagem matemática:** uma análise semiótica das experiências dos alunos. 2020. 100 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Esta pesquisa busca na semiótica peirceana, elementos que podem esclarecer caminhos de inter-relação entre conhecimento e experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática. Com a finalidade de tecer nossas reflexões estruturamos nossa pesquisa no formato multipaper de modo que os desdobramentos da pesquisa são apresentados em três artigos. No primeiro artigo nos propomos a descrever a modelagem matemática em termos semióticos a partir das experiências dos alunos quando desenvolvem atividade de modelagem matemática. No segundo artigo, com base nas argumentações de Peirce relativas a um tipo particular de raciocínio- o raciocínio diagramático, investigamos sobre o raciocínio diagramático na constituição do fazer modelagem matemática. No terceiro artigo buscamos indícios da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática. Nos três artigos nossas inferências são ancoradas em uma análise interpretativa das atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do quarto ano de um curso de licenciatura em matemática. Nossa análise delineou caminhos de inter-relação entre conhecimento e experiências dos alunos. O primeiro caminho delineado refere-se à inter-relação entre a constituição do ser modelagem matemática e da constituição do fazer modelagem. O segundo caminho refere-se à inter-relação entre o raciocínio diagramático e a constituição do fazer modelagem matemático. O terceiro caminho refere-se à interlocução entre o aprender modelagem matemática e as experiências dos alunos. Por fim, a partir da análise desses caminhos emerge um quarto, que ao relacionar os elementos semióticos abordados nos outros artigos nos permite inter-relacionar constituição do fazer modelagem matemática às experiências vivenciadas pelos alunos. Nossa busca por elementos da semiótica peirceana para elucidar essas relações entre conhecimento e experiências evidenciou que a constituição do conhecimento sobre modelagem matemática é mediada pela construção, transformação e intepretação de signos que são constituídos e refinados mediante as experiências vivenciadas em situações de modelagem matemática.

Palavras-chave: modelagem matemática na educação matemática; categorias peirceanas; raciocínio diagramático; interpretantes comunicacionais.

RAMOS, Daiany Cristiny. **Mathematical modeling:** a semiotic analysis of students' experiences. 2020. 100 f. Thesis (PhD in Science Teaching and Mathematical Education) - State University of Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This research seeks in Peircean semiotics, elements that can clarify paths of interrelationship between knowledge and student s experiences when developing mathematical modeling activities. In order to weave our reflections, we structured our research in a multipaper format so that the results of the research are presented in three articles. In the first article we propose to describe mathematical modeling in semiotic terms from the student s experiences when they develop mathematical modeling activities. In the second article, based on Peirce's arguments concerning a particular type of reasoning - diagrammatic reasoning, we investigated diagrammatic reasoning in the constitution of doing mathematical modeling. In the third article we look for signs of sign mediation in the communication between teacher and students associated with how to teach and learn mathematical modeling. In the three articles, our inferences are anchored in an interpretative analysis of mathematical modeling activities developed by students in the fourth year of a mathematics degree course. Our analysis outlined paths of interrelationship between student s knowledge and experiences. The first path outlined refers to the interrelationship between the constitution of being mathematical modeling and the constitution of doing modeling. The second path refers to the interrelationship between diagrammatic reasoning and the constitution of doing mathematical modeling. The third path refers to the interlocution between learning mathematical modeling and students' experiences. Finally, from the analysis of these paths, a fourth emerges, which, when relating the semiotic elements addressed in the other articles, allows us to interrelate the constitution of doing mathematical modeling to the experiences of students. Our search for elements of Peircean semiotics to elucidate these relationships between knowledge and experiences showed that the constitution of knowledge about mathematical modeling is mediated by the construction, transformation and interpretation of signs that are constituted and refined through the experiences in mathematical modeling situations.

Keywords: mathematical modeling in mathematics education; peircean categories; diagrammatic reasoning; communication interpreters.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1- CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nos últimos anos pesquisadores e professores da área de Educação Matemática têm intensificado suas discussões visando à inclusão de aplicações da Matemática e da modelagem matemática[1] em sala de aula (STILLMAN, 2019; NISS et al. 2007; GALBRAITH, P., STILLMAN, G. A., & BROWN, J. P., 2017). Como consequência dessas discussões, surgiram pesquisas com diferentes focos e perspectivas a respeito da modelagem matemática, tanto no contexto nacional quanto em âmbito internacional.

Embora a caraterização de atividades de modelagem matemática seja plural entre os professores e pesquisadores da área, parece haver um consenso de que a modelagem matemática envolve uma situação de um contexto real em que a matemática é utilizada para entender, interpretar e analisar um problema resultante dessa situação.

Nesse sentido, Almeida (2010) pondera que uma atividade de modelagem matemática tem como ponto de partida uma situação inicial, associada uma situação da realidade, e culmina numa situação final que é a resposta ao problema identificado na situação inicial. Blum (2002) considera que, de forma abreviada, podemos considerar que em uma atividade de modelagem matemática,

> o ponto de partida é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação – de acordo com o conhecimento e os interesses do modelador – conduzem à formulação de um problema e de um modelo real da situação. [...]. Caso seja necessário, dados reais são coletados a fim de fornecer mais informações sobre a situação original. Se possível e adequado, o modelo real – ainda uma parte do mundo real, para nós – é matematizado, isto é, os objetos, dados, relações e as condições envolvidas nele são traduzidos matematicamente, resultando em um modelo matemático da situação original. [...]. Se for necessário (e é, frequentemente, no caso de processos de resolução de problemas "realmente reais"), todo o processo' tem de ser repetido por meio de uma modificação ou da obtenção de um modelo totalmente diferente. No fim, a solução obtida da situação-problema inicial é apresentada e comunicada (BLUM, 2002, p. 152-153).

Ao percorrer esse caminho, descrito por Blum (2002), o aluno tem a possibilidade de utilizar diferentes representações com o intuito de estudar e compreender a situação do mundo real. Silva e Veronez (2014, p.79) destacam que "essas representações carregam consigo as intenções do sujeito envolvido com a atividade de modelagem e são manifestadas por meio dos signos que ele utiliza". A

[1] Em alguns momentos do texto utilizamos o termo modelagem para nos referirmos a modelagem matemática.

produção e/ou uso de signos em atividades de modelagem nos remete à semiótica, a ciência dos signos.

A Semiótica possui diferentes desdobramentos a depender do local em que se originou. Nessa pesquisa nosso foco é a Semiótica concebida por Charles Sanders Peirce (1839-1914), filósofo e matemático americano, que desenvolveu uma teoria bastante abrangente em torno dos signos em geral. A noção de signo para Peirce vai além de mera representação, "o signo carrega consigo características do objeto e está atrelado às experiências do sujeito que entra em contato com o objeto" (SILVA; VERONEZ; 2014, p. 83). Sua grande e inovadora contribuição à semiótica é a definição de signo como uma relação entre três elementos, a saber, o *representâmen, o objeto e o interpretante.* O signo é qualquer coisa que representa algo, o seu objeto, de tal modo que gera outro signo, o seu interpretante.

Para Peirce a constituição do conhecimento é um processo de intepretação que é evidenciado a partir de signos (SILVA, VERONEZ, 2014; OTTE, 2006). Esse caráter da semiótica peirceana tem possibilitado que pesquisadores na área da Educação Matemática a utilizem como referencial teórico para apresentar reflexões com relação aos processos interpretativos e da construção de conhecimento deles decorrente em contextos educacionais.

Autores como Kadunz (2016); Almeida e Silva (2018), destacam que a semiótica peirceana tem sido cada vez mais discutida na comunidade de Educação Matemática, fato que pode ser explicitado por publicações como a de Kadunz (2016), Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016), Otte (2006), Bakker e Hoffman (2005), Tylén et al. (2014), Almeida e Silva (2017), entre outros.

Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) discutem a construção do conhecimento em Matemática enquanto atividade semiótica ancorados em aspectos da semiótica peirceana, mais especificamente no que se refere às categorias Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Para Peirce a primeiridade tem a característica de ser primeiro, um sentimento primeiro desprovido de reflexão e interpretação. A Secundidade, por sua vez, refere-se a uma reação a esse sentimento primeiro, sendo essa reação desprovida de reflexão. A reflexão a respeito da reação ao sentimento primeiro é característica da Terceiridade, sendo assim a Terceiridade reação e reflexão sobre as experiências primeiras. A partir de interpretações da epistemologia da matemática sob uma visão semiótica, Otte (2006), argumenta que essas categorias são consideradas por Peirce como essenciais a toda e qualquer experiência.

Outro aspecto relevante que tem merecido atenção no âmbito de pesquisadores da área de educação matemática refere-se a um tipo particular de signos- os diagramas- e o raciocínio associada à produção e o uso desses signos – o raciocínio diagramático (OTTE, 2006; BAKKER E HOFFMAN, 2005; HOFFMANN, 2005; DÖRFLER, 2005). Os diagramas são um tipo de signo que possuem um caráter icônico, isto é, representam o seu objeto por uma relação de similaridade e ainda estão associados a um sistema de regras. Kadunz (2006), ao discutir o papel desses signos na aprendizagem de matemática, destaca que esses signos são construídos seguindo certas regras e relações. Um exemplo desses signos pode ser encontrado no âmbito da geometria, em que, ao construir um triângulo são utilizados segmentos de retas conectados por pontos. A construção desse triângulo segue um sistema de regras da geometria e além disso, representa o objeto matemático por meio de similaridade (KADUNZ, 2006).

A construção, experimentação e observação com diagramas são denominadas, por Bakker e Hoffman (2005), como etapas do raciocínio diagramático. Os autores ao estudar o raciocínio diagramático e o desenvolvimento de conceitos estatísticos, destacam que as etapas desse raciocínio proporcionam a reflexão sobre os diagramas construídos o que pode acarretar a descoberta de relações antes não observadas.

Ao discorrer sobre aspectos do raciocínio diagramático, Tylén et al. (2014), argumenta que propriedades desse raciocínio, como o fato de tornar relações abstratas perceptíveis e manipuláveis, por exemplo, permite que ele seja explorado e associado a diversos contextos científicos.

Conforme apontado nas pesquisas relatadas, aspectos da semiótica peirceana podem ser utilizados como quadro teórico em pesquisas preocupadas com a aprendizagem em matemática. No que se refere a pesquisas que possuem essa preocupação, podemos destacar as que têm como foco a modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática. Dentre essas pesquisas, nos remetemos as realizadas por Silva e Almeida (2018); Almeida, Silva e Ramos (2018); Almeida e Silva (2017); Ramos (2016); Almeida e Silva (2012); Veronez (2013); Almeida, Silva e Vertuan (2011); Kehle e Cunningham (2000), entre outros.

Ao analisar atividades de modelagem matemática, Veronez (2013) argumenta que os alunos utilizam e/ou produzem signos durante suas ações cognitivas que são atreladas ao desenvolvimento da atividade. A autora tece suas reflexões pautada na teoria dos signos de Charles S. Peirce e conclui que a dinamicidade e complementaridade dos signos influenciam o encaminhamento que os alunos dão ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Nesse encaminhamento, os alunos precisam fazer escolhas, que segundo a autora são regidas pelas funções dos signos, isto é, as escolhas são atreladas aos “signos e/ou produzidos pelos alunos para comunicar seus pensamentos e conhecimentos, da situação ou do objeto matemático, para os seus pares e para o professor e, ao conhecimento que os alunos têm sobre os signos que eles fazem uso” (VERONEZ, 2013, p. 156).

Ao discutir o significado atribuído ao objeto matemático, função exponencial, que emerge no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, Silva e Almeida (2018), se baseiam na teoria semiótica de Peirce para tecer suas reflexões sobre a problemática proposta. As autoras analisam os signos interpretantes produzidos por estudantes ao desenvolver uma atividade de modelagem e inferem que o significado da função exponencial nas atividades de modelagem matemática está associado à diversos fatores, entre eles à familiaridade que o intérprete revela ter em relação ao objeto e a intenção do intérprete em significar o objeto.

Outra ideia relacionada aos signos interpretantes é o processo de significação, denominado de semiose. Utilizando desse conceito, Almeida e Silva (2017) discutem a relação entre a ação e produção de signos em atividades de modelagem matemática. Ao estudar a semiose no desenvolvimento de atividades de modelagem, no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, as autoras concluem que a semiose é uma ação que envolve signo, objeto e interpretante é ilimitada.

Outros aspectos da teoria peirceana, além do processo de significação, são associados a pesquisas de modelagem matemática. Um desses aspectos são as categorias do signo, conforme definido por Peirce. Almeida, Silva e Vertuan (2011) discutem uma aproximação entre as categorias peirceanas (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade) e os níveis de relações dos signos estabelecidos por Peirce e a modelagem matemática. A análise de uma atividade de modelagem matemática forneceu indícios de há ações que são “primeiras”, ações que são “segundas” e ações que são “terceiras” no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, corroborando com as categorias primeiridade, secundidade e terceiridade caracterizadas por Peirce.

Os raciocínios ou modos de inferência de Peirce também são relacionados a pressupostos da modelagem matemática. Kehle e Cunningham (2000) discutem a respeito dos modos de inferência, caracterizados por Peirce, e o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Esse autores trazem um quadro teórico em que cada um dos tipos de inferência; abdução, dedução e indução, são relacionados a modos e ações a serem realizadas durante uma atividades de modelagem matemática. Pautadas nesse referencial, Almeida e Silva (2012) tecem reflexões sobre o potencial das atividades de modelagem matemática para o desenvolvimento de diferentes modos de inferência e ações cognitivas. Após a pesquisa as autoras concluem que existe uma relação entre os tipos de inferência e as ações cognitivas associadas a diferentes fases da modelagem matemática. As autoras relacionam os modos de inferência da abdução a ações necessárias na fase da inteiração e matematização, já os modos de inferência da dedução e indução são relacionados a ações necessárias no fase da resolução e intepretação dos resultados e validação.

Ao se propor a refletir sobre o raciocínio abdutivo e a modelagem matemática, Ramos (2016) se pauta na teoria peirceana no que se refere aos tipos de raciocínios, para investigar atividades de modelagem matemática com a expectativa de identificar os tipos de raciocínio requeridos nessas atividades. A autora entende que o raciocínio abdutivo é requerido em diversos momentos da atividade, mais frequentemente no fase da inteiração e matematização. Após sua análise a autora infere que assim como a modelagem matemática possui características que auxiliam no desenvolvimento dos raciocínios, as características dos raciocínios auxiliam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Na presente pesquisa estamos interessados em, à luz da semiótica peirceana, investigar relações entre práticas de modelagem matemática na sala de aula e a construção de conhecimento. Particularmente, interessa-nos colocar foco na construção de conhecimento sobre o fazer modelagem matemática de alunos em um curso superior. Assim, a nossa problemática de pesquisa refere-se à *busca na semiótica peirceana, de elementos que podem esclarecer caminhos de interrelação entre conhecimento e experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.*

A estrutura do nosso relatório de pesquisa apresenta-se no formato *multipaper*[2], de modo que nossas deliberações a respeito desta problemática de pesquisa são apresentadas em três artigos científicos, cada um direcionando-se para alguns elementos desta interrelação

O primeiro artigo tem o objetivo de *descrever a modelagem matemática em termos semióticos a partir da intepretação de experiências dos alunos.* Essa descrição

[2] Formato alternativo de organização de teses, dissertações. Consiste em estruturar o relatório em artigos que apesar suas características individuais estão relacionados e permitem a discussão sobre o objetivo geral.

Essa descrição visa elucidar elementos que possam revelar estruturas gerais relativas ao fazer modelagem matemática e ao ser modelagem matemática capturadas das experiências dos alunos. O entendimento sobre o fazer modelagem e o ser modelagem matemática é neste artigo apresentado a partir das categorias de Peirce definidas como primeiridade, secundidade e terceiridade, considerando-se as perspectivas fenomenológica e ontológica como proposto em Sáenz-Ludlow Kadunz (2016).

O segundo artigo orienta-se por uma das caracterizações de signo mais amplamente considerada no âmbito das pesquisas, especialmente na área de Educação Matemática: as possibilidades do signo para tratar de sua relação com o objeto. Nesta classificação, encontra-se o diagrama, um tipo de signo amplamente usado quando se trata de ensinar e aprender matemática. O lidar com diagramas tem características associadas ao que Peirce define como raciocínio diagramático. Segundo Otte (2006), este raciocínio é indicativo de como se dá a construção de conhecimento em diferente circunstâncias educacionais. Assim, no artigo 2, temos como objetivo investigar o papel do raciocínio diagramático na constituição do fazer modelagem matemática.

Por fim, no terceiro artigo dirigimos nossa atenção para uma função central da semiótica nos contextos educacionais: a comunicação. Neste caso, nos apoiamos no pensamento de Peirce sobre a comunicação considerando sua definição de signos interpretantes e uma das classificações destes signos reconhecida na semiótica peirceana: os signos intencionais, effectuais e comunicacionais. À luz desta classificação de signos, temos como objetivo *buscar indícios da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática*.

Nossas inferências em cada um desses artigo são pautadas nas experiências de alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado do Paraná. Esses alunos estavam inseridos no contexto de uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, cujo objetivo era estudar aspectos teóricos e práticos relacionados à modelagem matemática na Educação Matemática.

A turma em questão era composta por vinte alunos que foram introduzidos às atividades de modelagem matemática de acordo com os momentos de familiarização descritos por Almeida, Silva e Vertuan (2012). Assim, em um primeiro momento a professora da turma realizou atividades de modelagem matemática em conjunto com toda a turma. Em um segundo momento a professora propôs o tema e os alunos desenvolveram a atividade, identificando um problema e encontrando um modelo matemático que ajudasse a solucionar o problema criado. Em um terceiro momento os alunos foram responsáveis por elaborar uma atividade de modelagem matemática, desde a definição da situação-problema à elaboração e interpretação do modelo. Além de desenvolver essas atividades, os alunos realizaram estudos teóricos sobre o tema, discutindo aspectos de uma atividade de modelagem matemática, a caracterização da modelagem matemática, perspectivas existentes da modelagem matemática, entre outros aspectos.

As aulas da disciplina eram ministradas pela orientadora desta tese de doutorado. Além disso, tanto as aulas em que os alunos desenvolveram atividades, quanto as aulas em que os alunos estudaram aspectos teóricos foram acompanhadas pela pesquisadora visando assessorar os alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem e coletar os dados para subsidiar a presente pesquisa. Os dados[3] foram coletados ao longo do ano de 2017 por meio de:

- **Registros escritos produzidos pelos alunos durante as atividades**: ao final das atividades os alunos entregavam um relatório escrito para cada atividade desenvolvida, além disso, qualquer produção escrita feita pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades foi recolhida.

- **Gravações de áudio e de vídeo:** durante o desenvolvimento das atividades cada grupo possuía um gravador ou celular visando capturar todas as discussões dos alunos. Ao final das atividades desenvolvidas os alunos eram solicitados a apresentar para a turma o desenvolvimento da atividade proposta. Nesse momento posicionamos uma câmera de vídeo na sala de aula visando capturar seus registros no quadro e suas explicações.

Esses instrumentos foram utilizados ao longo das aulas, principalmente aquelas em que os alunos desenvolveram alguma atividade de modelagem matemática. Para essa pesquisa selecionamos algumas das atividades que foram desenvolvidas pelos alunos, sendo nossa escolha por essas atividades, pelo fato da originalidade e porque elas

[3] A coleta de dados dos alunos se deu com a autorização dos alunos, por meio da assinatura de um termo de autorização em que autorizam a utilizar parcial ou integralmente, os meus registros escritos, impressos, arquivos eletrônicos e gravações em áudio e vídeo na realização das atividades desenvolvidas (Anexo A).

possuem mais indícios que auxiliam nossa investigação. O quadro 1.1 explicita o nome dessas atividades, a qual momento de familiarização ela pertence.

Quadro 1.1- Atividades analisadas na pesquisa

Atividade	Momento de Familiarização
Horário de Verão	1º momento
Biometria da Mão	1º momento
Olha a batata frita!	2º momento
Queda dos técnicos no campeonato brasileiro	3º momento
Papel x Secador de mão	3º momento

Fonte: autora

A atividade *horário de verão* foi desenvolvida por todos os vinte alunos da turma, durante duas horas aulas. Essa atividade foi a primeira a ser desenvolvida na disciplina e consistia na análise da definição das datas de início e término do horário de verão. A análise dessa atividade, levou em consideração os registros dos vinte alunos. Essa atividade será descrita e analisada no terceiro artigo, apresentado no quarto capítulo

A atividade *Biometria da Mão* foi desenvolvida por todos os vinte alunos da turma, sendo essa turma dividida em quatro grupos. O desenvolvimento da atividade se deu por quatro horas aulas, e mais duas horas aulas para a apresentação da atividade pelos grupos. A atividade de um desses grupos será descrita e analisada no terceiro artigo, apresentado no quarto capítulo. O grupo escolhido é constituído por quatro alunos e se deu pelo fato de que esses alunos produziram registros mais detalhados sobre a atividade, possibilitando assim uma melhor análise por parte da pesquisadora. Esse mesmo grupo desenvolveu a atividade *Queda dos técnicos no campeonato brasileiro,* que é discutida no segundo capítulo, desse relatório de pesquisa. Essa temática foi escolhida por eles e se trata de uma atividade do terceiro momento, sendo assim, apenas esse grupo a desenvolveu. Desde o início do semestre, os alunos da turma, foram informados que ao final da disciplina deveriam apresentar uma atividade de modelagem matemática cuja temática fosse escolhida por eles. Nesse sentido a atividade *Queda dos técnicos no campeonato brasileiro* foi desenvolvida pelos alunos em momentos extraclasse, sendo que duas aulas, cada uma com duas horas aulas, foram destinadas a orientar os trabalhos desses alunos. Ao final da disciplina, eu uma aula, esses alunos apresentaram a atividade para os demais alunos da turma.

As atividades *Olha a batata frita!* e *Papel x Secador de mão* é apresentada e analisada no segundo artigo, descrito no terceiro capítulo desse relatório. A primeira atividade foi desenvolvida por todos os alunos da turma que foi dividida em três grupos. A atividade aconteceu em duas horas aulas, sendo utilizado mais duas horas aula para a apresentação e discussão dela com o restante da turma. Para a análise escolhemos a atividade desenvolvida por um desses grupos, pelo fato de que os alunos apresentaram mais de uma solução à atividade. Vale destacar, que o grupo analisado nesse artigo se difere do grupo analisado nos demais artigos. Ainda no segundo artigo, analisamos a atividade do terceiro momento, *Papel x Secador de mão,* que esse mesmo grupo desenvolveu, e por se tratar de uma atividade desse momento foi desenvolvida em momento extraclasse. Esses alunos também tiveram orientação durante as quatro horas aulas que foram destinadas a esse propósito e ao final da disciplina, eu uma aula, apresentaram a atividade para os demais alunos.

Além dessas atividades, também levamos em consideração na pesquisa dados coletados no decorrer de aulas em que texto[4] teórico era estudado e em seguida aspectos deste eram discutidos em seminários mediados por questões relativas ao texto.

Os dados coletados a partir dessas atividades foram submetidos a uma análise interpretativa em que nós apoiamos a pressupostos teóricos da semiótica de Charles S. Peirce, uma vez que a semiótica peirceana pode elucidar questões relacionadas ao conhecimento e as experiências dos alunos em matemática (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016). Nesse sentido nossa lente teórica foi constituída por estudos teóricos sobre as categorias do signo de Peirce, sobre o raciocínio diagramático e a teoria dos interpretantes.

Levando em consideração essa configuração da pesquisa, o presente relatório de pesquisa é constituído de cinco capítulos: introdução; três capítulos cada um relativo a um dos artigos; e considerações finais.

No Capítulo 1, *Introdução*, apresentamos alguns aspectos relativos à modelagem matemática e à semiótica. Além disso, nesta parte apresentamos o problema de pesquisa da tese bem como os objetivo de cada um dos três artigos que serão apresentados nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 contém o artigo *Uma interpretação semiótica de atividades de modelagem matemática.*

---

[4] Capítulo 1 do livro Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática do autor Rodney Carlos Bassanezi.

No capítulo 3 apresentamos o segundo artigo, cujo título é *Raciocínio diagramático em atividades de modelagem matemática.*

No capítulo 4 apresentamos o artigo *Ensinar e aprender a modelagem matemática: uma interpretação semiótica*.

Por fim, no capítulo 5, *Considerações finais*, retomamos a nossa questão de pesquisa e tecemos reflexões pautadas nos resultados que obtivemos em cada um nos três artigos escritos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; RAMOS, D. C.. Sobre ensinar e aprender ‘o fazer’ modelagem matemática. In **Anais** VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Foz do Iguaçu, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **BOLEMA**, v. 31, p. 202-219, 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias** (En línea), v. 6, p. 8-17, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetike**, v. 18, p. 379-406, 2010

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. ano 17, n.22, p. 19-36, 2004.

BAKKER, A.; HOFFMANN, M. H.G. Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, n. 3, p. 333-358, 2005.

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

DÖRFLER, W. Diagrammatic Thinking. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, 2005.

GALBRAITH, P., STILLMAN, G. A., & BROWN, J. P.. The primacy of ‘noticing’: A key to successful modelling. In STILLMAN, G. A; BLUM, W.; KAISER ,G. (Eds.),

Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education (pp. 83–94). Cham: Springer, 2017.

HOFFMANN, M.H.G. Signs as Means for Discoveries. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, Boston, 2005.

KANDUNZ, G. Diagrams as Means for Learning. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and mathematical modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, Madison, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

NISS, M. Prescriptive modelling—Challenges and opportunities. In STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice**: Cultural, social and cognitive influences (pp. 67–79). Cham: Springer, 2015.

OTTE, M.. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. In: **Semiotic Perspectives in Mathematics Education**: A PME Special Issue. Springer, Vol. 61, No. 1/2, p. 11-38, 2006.

RAMOS, D. C.. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.** Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G. Constructing Knowledge Seen as a Semiotic Activity. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.. The Exponential Function Meaning on Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, 2018.

SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D.. Um Olhar Semiótico Sobre a Modelagem Matemática. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.. (Org.). **Modelagem Matemática em foco**. 1ed.Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, v. 1, p. 79-104, 2014.

STILLMAN, G. A. State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.. **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education**. Springer, Cham, p. 1-20, 2019.

TYLEN, K. et al. Diagrammatic reasoning: Abstraction, interaction, and insight. **Pragmatics & Cognition**, p. 264–283, 2014.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 175p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

Capítulo 2- Artigo 1

INTERPRETAÇÃO SEMIÓTICA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo

O presente artigo traz para o campo da Modelagem Matemática elementos da Semiótica peirceana. De modo particular, interessa-nos *capturar* nas experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática elementos que nos permitam *descrever* a modelagem matemática em termos semióticos a partir dessas experiências. Esta *descrição* abrange dois aspectos, que embora formem a unidade daquilo que pretendemos descrever, têm traços específicos: o *fazer* modelagem matemática e o *ser* modelagem matemática identificados nas experiências dos alunos. Nossos resultados se fundamentam em uma pesquisa empírica em que uma atividade de modelagem matemática é desenvolvida por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. A interpretação semiótica nos permite inferir que as ações dos alunos se assentam nas categorias de Peirce caracterizadas como primeiridade, secundidade e terceiridade, compreendendo as perspectivas fenomenológica e ontológica destas categorias. E sob estas perspectivas, a apreensão do como *fazer* modelagem matemática se dá na conscientização dos alunos de que precisam se apropriar de uma situação da realidade matematizá-la de modo que a solução encontrada seja aceita e possa ser validada por uma determinada comunidade. Além disso, os alunos reconhecem que para *ser* modelagem matemática a atividade deve ter seu início em uma situação problemática da realidade para cuja abordagem matemática não há esquemas à priori definidos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Semiótica Peirceana; Atividade de Modelagem Matemática.

Introdução

Discussões relativas às práticas de modelagem matemática na sala de aula têm merecido atenção de pesquisadores e professores no âmbito da Educação Matemática. Um dos pontos de interesse nessas discussões refere-se aos procedimentos dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática na tentativa de entender como procedem e como o fazer modelagem se incorpora às suas experiências.

A tentativa, ou até mesmo a experimentação, desse entendimento passa pela própria caracterização do que é modelagem matemática e do que se considera que atividades dessa natureza requerem de quem as desenvolve. Segundo Galbraith (2015), as tentativas de entendimento vêm ancoradas em uma lente epistemológica e, portanto, são delimitadas por uma perspectiva teórica.

No presente artigo a margem da nossa delimitação é uma perspectiva semiótica. Conforme é apresentado em Almeida e Silva (2018), nas últimas décadas diferentes perspectivas semióticas têm merecido atenção em pesquisas na área de Educação Matemática visando entender, entre outros aspectos, o ensino e a aprendizagem da matemática. Neste contexto, nossas discussões neste texto estão fundamentadas na semiótica peirceana.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) abriu um caminho fértil para buscar entendimento com relação ao o que é conhecer e como isto se torna possível, fundamentando uma teoria dos signos, reconhecida como semiótica peirceana.

Uma pergunta central que Peirce apresentou é: como os humanos podem conhecer (ou saber sobre) o mundo, sobre as coisas? Ele mesmo, em diferentes momentos da estruturação de sua teoria, indica que o ato de conhecer é mediado por signos considerados ora como ferramentas (de representação ou de referência) ora como elementos que requerem a produção de novos signos (CP 5.251).

Conforme pondera Marietti (1994), para Peirce o signo não é somente linguístico, mas também lógico e pragmático, de tal modo que não podemos pensar fora de signos e, sendo inclusive o pensamento *per si* também um signo.

Otte (2006), ao discutir e interpretar aspectos da semiótica peirceana, aponta a questão: o que é o signo? As argumentações do autor sinalizam que qualquer coisa, marca ou sinal pode ser um signo na medida em que orienta a nossa atenção para algo diferente dele mesmo. O signo tem um significado, enquanto o objeto, aquilo a que o signo se refere, por si só não tem significado.

É justamente essa ideia que, segundo Santaella (2018), Peirce expressa ao afirmar que "o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, a que se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo provoca em um possível intérprete)" (SANTAELLA, 2018, p. 7).

Assim, em contraste com o modelo diádico de signo esquematizado pelo linguista Ferdinand de Saussure, a semiótica peirceana tem uma estrutura triádica. Conforme sugere Otte (2006), a ideia central da teoria de Peirce é o sistema triádico de categorias por ele reconhecido para estruturar sua teoria dos signos.

Peirce visa capturar a estrutura das nossas experiências por meio de três categorias por ele denominadas: Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. À luz da semiótica peirceana, todo e qualquer fenômeno se apresenta à mente e é compreendido em termos dessas três categorias. Peirce, como um observador voraz do mundo a sua volta, tinha como um dos focos de suas formulações defender e concluir que todos os fenômenos, sejam eles sociais, culturais, cognitivos, individuais, interacionais, físicos ou emocionais, reais ou imaginários, deviam ter algo em comum. Esse aspecto comum refere-se justamente à identificação destas três categorias. Um fenômeno, por sua vez, é "o total coletivo de tudo aquilo que está de qualquer modo presente na mente, sem qualquer consideração se isso corresponde a alguma coisa real ou não" (IBRI, 2015, p. 22).

As aproximações do pensamento de Peirce dos contextos educacionais, e particularmente da Educação Matemática, têm sido recorrente nas últimas décadas (SÁENZ-LUDLOW; KANDUNZ, 2016; RADFORD; SCHUBRING; SEEGER, 2008; ALMEIDA; SILVA, 2018; PRESMEG; RADFORD; KADUNZ, 2016). No âmbito da Modelagem Matemática, mais especificamente, elementos da semiótica peirceana também vem sendo usados (SILVA; ALMEIDA, 2015; SILVA; ALMEIDA, 2018; ALMEIDA; SILVA, 2012; VERONEZ, 2013; SILVA, 2013; RAMOS, 2016). Olhar para a ação e produção de signos, as funções dos signos e a busca pelo significado em atividades de modelagem matemática são aspectos investigados nestas pesquisas.

O presente artigo, também tem a intenção de trazer para o campo da Educação Matemática e mais especificamente para o campo da Modelagem Matemática, a teorização de Peirce. De modo particular, interessa-nos *capturar* nas experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática elementos que nos permitam *descrever* a modelagem matemática em termos semióticos a partir dessa experiências. Esta *descrição*[5] a partir das experiências dos alunos modeladores abrange dois aspectos, que embora formem a unidade daquilo que pretendemos descrever, têm traços específicos: o *fazer* modelagem matemática e o *ser* modelagem matemática identificados nas experiências dos alunos.

A nossa interpretação dessas experiências se fundamenta, por um lado, nas teorizações de Peirce e seus interpretadores e, por outro lado, em uma pesquisa empírica em que alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolvem atividades de modelagem matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática oferecida no quarto ano desse curso.

[5] Essa descrição visa mostrar as estruturas em que a experiência relatada se dá, deixando transparecer nessa descrição estruturas universais.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Durante as últimas décadas muito se tem discutido sobre a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática. Parece haver um consenso na literatura da área de que uma atividade de modelagem matemática tem como ponto de partida um problema, advindo de uma situação do mundo real, para o qual se busca entendimento por meio da matemática. Segundo Pollak (2011) a matemática nessa busca é utilizada para entender e interpretar a situação do mundo real. Nesse sentido uma atividade de modelagem matemática se inicia em uma situação do contexto real e se finaliza em uma situação final, que consiste na solução do problema identificado (ALMEIDA, 2010).

Em uma atividade de modelagem matemática a análise ou interpretação de situações do mundo real inicia-se com a identificação de um problema a ser estudado, mediada pela inteiração com a problemática identificada na situação da realidade.

Uma vez identificado o problema, de modo geral, são requeridas simplificações, em consonância com o que pondera Pollack (2011) de que a situação real, em geral, envolve muitas variáveis e é preciso decidir o que se deseja manter e o que não se pode levar em consideração na modelagem matemática. Estas simplificações orientam também a matematização da situação. Na matematização, segundo Jablonka e Gellert (2007, p. 2), "a algo é associado mais matemática do que lhe havia sido associado até então". Esta associação, conforme sugerem Almeida, Sousa e Tortola (2015), vem ancorada fortemente nas hipóteses assumidas por aqueles que desenvolvem a atividade. Sobretudo, é dessa associação que se configura a elaboração de um modelo matemático o qual, segundo Lesh (2010) é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática que tem por finalidade descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Esse modelo matemático possibilita encontrar resultados que são confrontados com a situação inicial, resultando na solução do problema.

Conforme sugerem Almeida e Vertuan (2014), os procedimentos realizados durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem ser caracterizados mediante quatro fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação. A estruturação dos procedimentos dos alunos ao desenvolver atividades de modelagem matemática, em conformidade com a identificação dessas fases, costuma ser representada por meio de esquemas, em geral denominados ciclos de modelagem. Estes ciclos, além de representar um esforço de identificação das ações dos modeladores, também têm a intenção de indicar a não linearidade destas ações no decorrer do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Por exemplo, caso o aluno na fase de interpretação de resultados e validação verifique que o modelo encontrado não condiz com a situação inicial, o aluno pode retomar suas hipóteses e assim verificar o que é necessário modificar. O aluno pode realizar esse movimento de idas e vindas nas fases quantas vezes ele julgar necessário.

No presente artigo, um olhar para o fenômeno da modelagem matemática na sala de aula sob uma perspectiva semiótica coloca foco neste movimento dos alunos ao desenvolver atividades de modelagem, visando capturar as experiências dos alunos e interpreta-las à luz das categorias peirceanas.

SEMIÓTICA PEIRCEANA

Nos últimos anos pesquisadores da área de Educação Matemática vêm dando atenção a diferentes perspectivas semióticas e suas interrelações o ensino e a aprendizagem da matemática em diferentes contextos educacionais (OTTE; BARROS, 2015; SÁENZ-LUDLOW; KANDUNZ, 2016; RADFORD; SCHUBRING; SEEGER, 2008; ALMEIDA; SILVA, 2018; PRESMEG; RADFORD; KADUNZ, 2016).

Almeida e Silva (2018, p. 697), neste contexto, a partir de uma retomada histórica com relação a aproximações da Matemática com a semiótica no decorrer do tempo, ponderam que “o desenvolvimento da Matemática não é independente do desenvolvimento dos signos”, considerando que a Matemática não pode ser desvinculada de uma linguagem sígnica.

Na teoria semiótica construída por Charles Sanders Peirce a caracterização do signo compreende uma relação triádica em que estão correlacionados três componentes: *representâmen* (ou signo-veículo), objeto e o interpretante. Para Peirce o r*epresentâmen* representa algo, o seu objeto, para alguém, um intérprete. O interpretante é um novo signo produzido pelo intérprete e corresponde ao efeito interpretativo que o signo produz na mente desse intérprete.

O interpretante, conforme sugere Correa (2009), emana do *representâmen* e do objeto de modo relativo. Os objetos, por sua vez, já não são para o intérprete como a coisa que eram, mas como a coisa que se tornaram depois do processo de experimentação mediado pelos interpretantes. Deely (1990) neste contexto pondera que

> [...] o signo não é uma coisa nem um objeto, mas um padrão de acordo com o qual as coisas e os objetos se entrelaçam para criar a trama da experiência, na qual uma parte está por outra parte de modo a dar maior ou menor "sentido" ao todo, em tempos e contextos variados (DEELY, 1990, p. 76).

É esta trama da experiência e a impossibilidade de definitivamente separar objeto, *representâmen* e interpretante que se vinculam ao aspecto fundamental do pensamento de Peirce de que a correlação triádica sempre responde às relações de: espontaneidade, em que o ser é apenas uma qualidade; existência em que já há referência a um correlato; generalidade ou convencionalidade que são mediados por uma reflexão.

Estas relações são o elemento fundamental da semiótica peirceana e sua estruturação ocupou Peirce por muito tempo (Peirce, 1972; 1992), configurando-as como sendo as três categorias básicas da sua teoria: a primeiridade, a secundidade e a terceiridade. Para Otte (2006, p. 24) essas categorias são a base "para a compreensão, não apenas do conceito da ciência normativa de Peirce, mas de sua teoria dos signos e, de fato, de seu pensamento como um todo".

A estruturação dessas três categorias perpassa grande parte da semiótica peirceana e, do mesmo modo que ocupou o pensamento de Peirce, também tem instigado seus interpretadores no decorrer do tempo. Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) fazem uma tentativa de construir uma síntese de como o entendimento das três categorias fundamentais da semiótica peirceana pode ser percebido. Esta síntese pode ser visualizada no Quadro 2.1 em que cada coluna apresenta refere-se às possibilidades de interpretação de cada uma das 3 categorias especificadas nas linhas.

Quadro 2.2-Categorias Peirceanas

CATEGORIAS PEIRCEANAS					
Nome	**Caracterização típica**	**Como universo de experiência**	**Como medida**	**Referência**	**Correlação dos elementos sígnicos**
Primeiridade	Qualidade sentimento	Espontaneidade Mera percepção Possibilidades	Vagueza	Referência ao fundamento do signo (o representâmen)	Monádica (a pura qualidade)
Secundidade	Reação Resistência	Fatos brutos Existência	Singularidade Medida discreta	Referência a um correlato (o objeto)	Diádica (representâmen e objeto)
Terceiridade	Reflexão Representação	Hábitos, leis, necessidades, convencionalidade	Generalização Medida contínua	Referência a um interpretante	Triádica (objeto, representâmen e interpretante)

Fonte: Adaptado de Sáenz-Ludlow e Kadunz, 2016, p. 6

Embora a construção dessas categorias seja amplamente discutida na literatura considerando-as como categorias fenomenológicas, Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) trazem para o campo da Educação Matemática a discussão dessas categorias levando em consideração duas perspectivas que a caracterização de Peirce lhes teria conferido: a perspectiva ontológica e a perspectiva fenomenológica. Segundo estes autores, a perspectiva ontológica refere-se à natureza do *ser* enquanto a perspectiva fenomenológica diz respeito à experiência consciente, considerando como os fenômenos são apreendidos na consciência.

Na perspectiva fenomenológica a primeira categoria de Peirce, Primeiridade, compreende as experiências sem reação, sem causa e efeito. Trata-se de um primeiro nível de significação, em geral decorrente de processos sensório-motores em que se identificam o puro sentimento, a percepção.

A Secundidade na perspectiva fenomenológica refere-se a uma condição de mediação sem reflexão e engloba as experiências e a reação que elas causam, sem haver, entretanto, uma ação reflexiva sobre essa reação. Assim, qualquer sensação já é Secundidade, pois corresponde à ação de um sentimento sobre nós e nossa reação específica. Qualquer relação de dependência entre dois termos (qualidade e existência) é uma relação diádica, uma Secundidade.

A Terceiridade, por sua vez, nesta perspectiva fenomenológica refere-se às condições de mediação com reflexão; são as experiências e reações com reflexão sobre essas reações.

Segundo Balsemão (1993) ao perguntar "O que é" em seu texto *On a new list of categories*, Peirce se refere à determinação ontológica de suas categorias. Sob esta perspectiva, Peirce (CP 8.328) caracteriza as categorias assim: a Primeiridade é como uma *qualidade,* o modo de ser de algo exatamente como é sem referência a nada mais (apenas o *representâmen* é o que está presente); a Secundidade diz respeito a uma *relação* (envolvendo um *representâmen* e um objeto); e a Terceiridade é *representação* (que se refere a uma relação triádica entre *representâmen*, objeto e interpretante), ou ainda uma generalização. Para Santaella (208), Peirce definiu essa relação como sendo aquela própria da ação do signo, ou seja, a de gerar ou produzir conhecimento e se desenvolver num outro signo, este chamado de "interpretante do primeiro", e assim ad infinitum [...] (p. 8).

Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) destacam que cada categoria na perspectiva fenomenológica pode ser co-construída considerando a perspectiva ontológica e vice-versa.

Na perspectiva fenomenológica a Primeiridade é um sentimento, uma percepção. Sob a perspectiva ontológica a Primeiridade pode ser um qualissigno que, segundo Balsemão (1993, p. 155), "designa uma simples aparência ou qualidade" que intervém na relação do signo com ele mesmo. Pode ser também um sinsigno, isto é, um signo segundo em relação ao *representâmen* e representa um objeto ou um evento real. Por fim, pode ser um legissigno que é um signo de terceiridade e representa algo geral, uma lei e está relacionado à generalização.

A Secundidade na perspectiva fenomenológica é uma reação, uma *relação* entre *representâmen* e objeto e pode desencadear a formação de signos de primeiridade (ícone), secundidade (índice) e terceiridade (símbolo). Segundo Balsemão (1993, p. 156) "os ícones são signos que comunicam determinados efeitos", eles se referem ao seu objeto por características do objeto, ou seja, por similaridade com o objeto. Os índices, segundo Peirce (1992), são signos que indicam seu objeto não por relação de semelhança, mas por relação de proximidade. Um símbolo por sua vez é um signo que se refere ao seu objeto na forma de uma lei, de uma convenção socialmente reconhecida.

Já a Terceiridade na perspectiva fenomenológica envolve reação, reflexão e ação, sendo possível observar formas ontológicas de primeiridade, secundidade e terceiridade, representadas, respectivamente, por signos remáticos, dicentes ou argumentativos. Um signo é um rema quando para seu interpretante ele é um signo de possibilidade. Um signo dicente é aquele que para o interpretante é um signo de existência. O argumento é um signo que para o interpretante é uma lei.

Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) destacam que da mesma forma que podemos encontrar elementos ontológicos quando consideramos a perspectiva fenomenológica podemos construir as categorias sob uma perspectiva ontológica a partir de elementos fenomenológicos.

A Primeiridade enquanto uma *qualidade* tem aspectos fenomenológicos da primeiridade (qualissigno), da secundidade (ícone) e da terceiridade (rema). A Secundidade enquanto uma *relação* necessita de um sinsigno para mostrar a existência de algo, de um índice que relaciona o signo com seu objeto e um dicente para representar a existência na mente do interpretante. A Terceiridade, enquanto *generalização*, engloba aspectos fenomenológicos de primeiridade (legissigno), de secundidade (símbolo) e de terceiridade (argumento).

A figura 2.1, mostra como as categorias Primeiridade, Secundidade e Terceiridade na perspectiva fenomenológica, representada pelas linhas da tabela, se correlacionam quando vistas sob uma perspectiva ontológica, representada pelas colunas da tabela. Por outro lado, mostra que as categorias sob a perspectiva ontológica, representada pelas colunas, se correlacionam com a perspectiva fenomenológica dessas categorias.

Figura 2.1 -Categorias Peirceanas

Perspectiva fenomenológica		Perspectiva ontológica		
		Primeiridade qualidade	*Secundidade relação*	*Terceiridade generalização*
Primeiridade sentimento/percepção	**Relação do signo consigo mesmo**	Qualidade Qualissigno	Existência real Sinsigno	Lei geral Legissigno
Secundidade Reação	**Relação do signo com o objeto**	Similaridade com alguma qualidade do Objeto Ícone	Dá indícios de uma relação com o Objeto Índice	Relação com o interpretante Símbolo
Terceiridade reflexão	**Relação do signo com o interpretante**	Possibilidade Rema	Fato Dicissigno	Raciocínio Argumento

Fonte: Adaptado de Sáenz-Ludlow e Kadunz, 2016, p. 7

Para Santaella (2018) todo e qualquer fenômeno que se apresenta à mente do intérprete é compreendido em termos das categorias peirceanas. Nesse sentido podemos compreender a modelagem matemática pautados nas categorias peirceanas sob uma perspectiva fenomenológica.

Almeida, Silva e Vertuan (2011), buscando alcançar alguma compreensão relativa aos procedimentos realizados em uma atividade de modelagem matemática, sinalizam a identificação de primeiridade, secundidade e terceiridade a partir da interpretação de signos produzidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade. Para os autores, os nos procedimentos dos alunos há indícios de primeiridade, relacionada nada ao primeiro contato dos alunos com a situação inicial; já a secundidade é inferida relativamente à identificação de um problema e a elaboração das hipóteses. Por fim a terceiridade é identificada pelos autores quando da obtenção e dedução do modelo matemático e sua interpretação pelos alunos.

Não obstante esta identificação no trabalho de Almeida, Silva e Vertuan (2011), é preciso ponderar que Pierce na estruturação dessas categorias Peirce tenta capturar a estrutura das nossas experiências relativas a qualquer fenômeno de modo que, para além da identificação de signos que podem ser de primeiridade, de secundidade ou de terceiridade deve nos interessar a apreensão do fenômeno pela nossa consciência.

É justamente neste sentido que no presente artigo nos orientamos pela estruturação peirceana considerando a complementaridade e a interrelação entre as categorias interpretadas sob as duas perspectivas, ontológica e fenomenológica com a finalidade de apresentar o denominamos de uma descrição da modelagem matemática a partir das experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Diante do nosso objetivo, o processo analítico desse trabalho é dirigido ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem realizada por alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Essa turma era composta por vinte alunos que cursavam a disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Ao longo da disciplina os alunos desenvolveram atividades de modelagem, em grupos de até seis alunos, e tiveram contato com aspectos teóricos relativos à Modelagem Matemática na Educação Matemática. As autoras do presente artigo são a professora da disciplina e a pesquisadora, que participou das aulas visando assessorar os alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem.

A análise aqui empregada, à luz do quadro teórico estruturado nas seções anteriores do texto, é de cunho qualitativo e interpretativo. Os dados em que se fundamentam nossas deliberações foram coletados por meio de gravações em áudio e vídeo durante as aulas e durante a apresentação da atividade pelos alunos do grupo para todos os alunos da turma bem como do relatório escrito da atividade entregue pelos alunos.

A atividade de modelagem matemática a que nos referimos tem como temática de investigação *Queda dos técnicos no campeonato brasileiro* e foi desenvolvida por um grupo de seis alunos, todos do sexo masculino. A originalidade do tema investigado e a qualidade dos dados coletados no desenvolvimento dessa atividade justificam a nossa escolha para inclusão no presente artigo.

Os alunos do grupo justificam a escolha dessa temática pelo fato de que "*Os times no Brasil têm uma cultura de demitir seus técnicos se os resultados bons demorarem a acontecer. Nos outros países isso não é muito comum. E por essa razão,* *decidimos fazer um estudo referente à demissão de técnicos no futebol brasileiro, além disso nós também gostamos de futebol"* (registro dos alunos).

A temática permitiu que os alunos investigassem *"Qual é o número de derrotas seguidas que gera as demissões de técnicos de times que disputam o campeonato brasileiro?"* (registro dos alunos).

Na apresentação do trabalho na sala de aula os alunos ponderam que há muitas variáveis que influenciam a demissão do técnico conforme indica a fala de um dos alunos: *"O técnico pode ser demitido porque, sei lá, pode ser que ele esteja jogando a Libertadores e perde um jogo importante ou perde um clássico, ou por pressão da torcida. Assim, como são muitas variáveis para a demissão do técnico, a gente só quis fazer o estudo pelas derrotas seguidas no período de 10 jogos"* (registro dos alunos).

Considerando o fato de que seriam analisados apenas os dez últimos jogos do técnico antes da sua demissão, os alunos buscaram informações sobre as demissões consecutivas dos técnicos do campeonato brasileiro da série A no período de 2013 a 2017. A figura 2.2 ilustra os dados coletados relativos ao ano de 2016. Na primeira coluna do quadro são descritos os times do campeonato que tiveram seus técnicos demitidos ao longo do campeonato; na segunda são apresentados os nomes dos técnicos demitidos; na terceira coluna é apresentada a rodada em que o técnico foi demitido; e na última coluna são descritas quantas derrotas seguidas aconteceram nos últimos 10 jogos daquele técnico antes de ele ser demitido. Um dos alunos explica que *"Se o técnico foi demitido antes de 10 jogos nós analisamos todos os jogos, agora se ele foi demitido com mais de 10 jogos nós analisamos somente as derrotas seguidas nos últimos 10 jogos"* (registro dos alunos).

Figura 2. 2 -Dados coletados referente ao número de derrotas seguidas do ano de 2016

Campeonato Brasileiro – 2016:

Time	Técnico	Rodada	Derrotas
Atlético-MG	Marcelo Oliveira	36ª	2
Coritiba	Gilson Kleina	5ª	3
América-MG	Givanildo	5ª	3
América-MG	Sérgio Vieira	15ª	8
Internacional	Argel Fucks	14ª	6
Internacional	Falcão	19ª	3
Internacional	Celso Roth	35ª	4
Figueirense	Vinícius Eutrópio	14ª	4
Figueirense	Argel Fucks	21ª	3
Cruzeiro	Paulo Bento	16ª	6
Santa Cruz	Milton Mendes	19ª	7
Vitória	Vagner Mancini	24ª	6
Corinthians	Cristóvão Borges	26ª	5
São Paulo	Ricardo Gomes	36ª	4
Moda			3

Fonte: registro dos alunos

O número de derrotas seguidas, nos últimos 10 jogos do técnico, expresso na última coluna da tabela da figura 2.2 indica que o número de derrotas seguidas é um dos fatores que influenciam na demissão dos técnicos. Diante disso, esses alunos assumem a hipótese de que *"Existe um intervalo de derrotas seguidas com uma maior frequência de queda de técnicos, no Campeonato Brasileiro* (registro dos alunos).

Considerando as características dos dados bem como a hipótese definida, os alunos fizeram a matematização da situação mediante conceitos da área de Estatística e do uso de ferramentas computacionais.

O primeiro passo dos alunos foi encontrar a frequência relativa das demissões, usando a frequência absoluta das derrotas seguidas e dividindo esse número pelo número total de técnicos. Após calcularam a média aritmética e o desvio padrão da quantidade de derrotas que o técnico teve nos últimos 10 jogos. A figura 2.3 ilustra este procedimento dos alunos para o ano de 2016.

Figura 2.3 -Valores obtidos na matematização da situação

Dados coletados referentes ao ano de 2016:

Quantidade de derrotas que teve nos 10 últimos jogos (Qd)	Quantidade de técnicos com o mesmo tanto de derrotas (Qt)	Frequência relativa (densidade) (Qt/11)
0	1	0,09
3	4	0,36
5	1	0,09
6	3	0,27
7	1	0,09
8	1	0,09

Cálculo da média μ:

$$\mu = \frac{(1 \times 0 + 4 \times 3 + 1 \times 5 + 3 \times 6 + 1 \times 7 + 1 \times 8)}{11} = 4{,}54$$

Portanto, a média $\mu = 4.54$ e o desvio padrão $\sigma = 2{,}34$.

Fonte: registro dos alunos

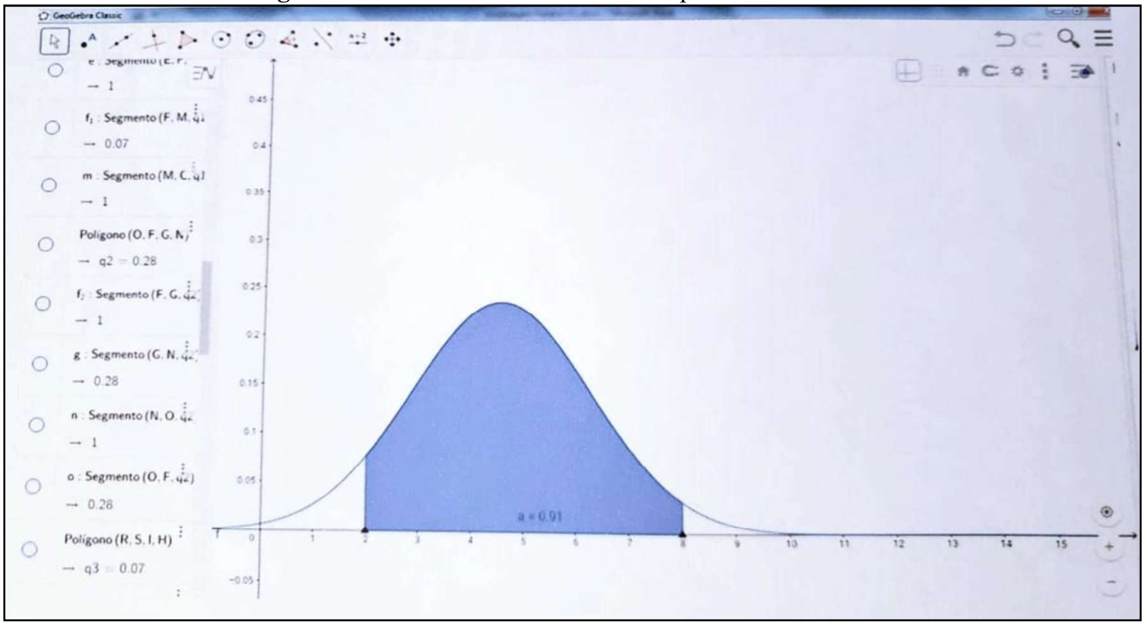
O uso de média aritmética e desvio padrão é justificada pelos alunos como *"uma maneira de verificar se os métodos estatísticos seriam um bom procedimento para resolver o problema"* (registro dos alunos). Após a análise dos dados obtidos para o período de anos analisado, os alunos perceberam que *"com 1 ou 2 derrotas seguidas é mais difícil ter demissão e com mais de 6 derrotas seguidas também é"* (registro dos alunos).

Usando representação dos dados no *software* GeoGebra os alunos analisaram para qual intervalo de derrotas seguidas há maior probabilidade do técnico ser demitido, utilizando o conceito de curva normal, visto que essa curva expressa matemática e geometricamente a distribuição normal de frequências e permite inferir sobre a probabilidade de um determinado evento ocorrer.

A ideia de usar a curva normal se deu pelo fato de que *"nós temos variáveis discretas, daí tivemos a ideia de fazer uma variável contínua para explicar aqueles pontos no intervalo de probabilidade. Queríamos descrever a função onde aquela média é o máximo"* (registro dos alunos).

O *software* foi utilizado para realizar a transformação da variável discreta em contínua, empregando a função densidade dos dados fornecidos. A função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, em que σ e μ são o desvio padrão e a média aritmética do número de derrotas, respectivamente. Essa função, conforme mencionado, foi encontrada com o auxílio do *software*, utilizando a média aritmética e o desvio padrão encontrados. Após encontrar a função densidade os alunos encontraram a área sob a curva no intervalo, visto que essa área indica probabilidade de um evento ocorrer no intervalo dado (SILVA et al., 2018). O intervalo em que esses alunos calcularam a área é dado pelo número mínimo e máximo de derrotas consecutivas observadas na coleta de dados. No caso do ano de 2016, conforme ilustra a figura 2.2 o número mínimo é duas derrotas e o máximo são oito derrotas seguidas. De posse dessas informações e com o auxílio do *software* os alunos encontraram que para o ano de 2016 a probabilidade de um técnico ser demitido no intervalo que compreende de duas até oito derrotas seguidas é de 91%, conforme ilustra a figura[6] 2.4.

Figura 2.4 -Modelo matemático criado para o ano de 2016



Fonte: registro dos alunos

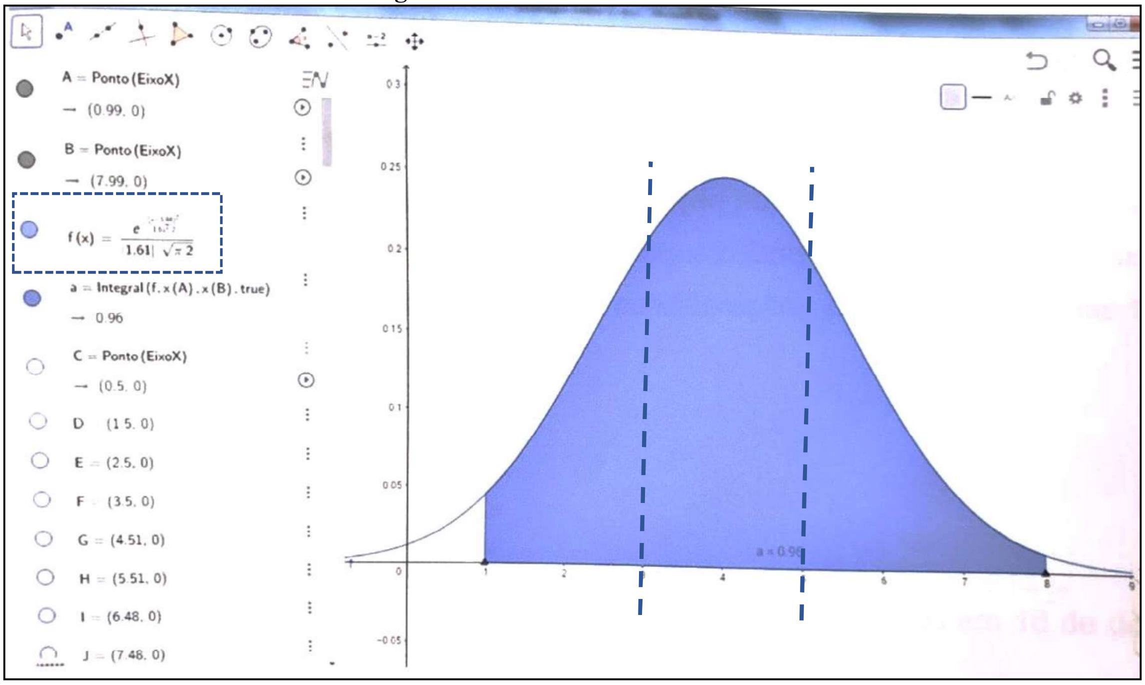
Para determinar qual intervalo de derrotas seguidas gera maior número de demissões de técnicos dos times que disputam o campeonato brasileiro, os alunos deveriam determinar um modelo matemático que permitisse responder a essa pergunta, uma vez que os valores obtidos até o momento se referiam a anos específicos. Assim os alunos criaram uma estratégia, ainda utilizando a ideia da curva normal, conforme explicam "*Ao final, o que a gente fez, foi pegar todos os dados de 2013 até 2017 e somar todos. Observamos que houve 113 demissões de técnicos nesse período. E aí a gente fez uma curva normal padrão, para representar todos esses dados*" (registro dos alunos).

Como resultado desse raciocínio os alunos obtiveram o modelo matemático, o

[6] No registro entregue pelos alunos, no caso do ano de 2016, a função densidade não fica explícita, porém esse foi o método utilizado e utilizaram a média e desvio padrão explicitados na figura 2.3.

gráfico da curva normal bem como a função densidade, $f(x)$, indicada na figura[7] 2.5.

Figura 2.1-Modelo matemático final



Fonte: registro dos alunos

A análise e interpretação da curva normal, representada na figura 2.5, permitiu aos alunos concluir que se um técnico acumular de 3 a 5 derrotas seguidas de seu time do campeonato brasileiro, ele terá maior probabilidade de ser demitido, considerando as 10 últimas partidas de permanência do técnico no time. Os alunos complementam sua análise afirmando que *"onde a curva tem seu valor máximo é o ponto crítico, então ele tem maior probabilidade de ser demitido, nesse caso ali (aponta para o slide) é de 4 derrotas consecutivas"* (registro dos alunos).

Esse resultado matemático, quando confrontado com o problema que se propuseram a investigar, gera uma resposta satisfatória e adequada diante dos dados coletados e da hipótese elaborada. Ou seja, o intervalo relativo ao número de derrotas seguidas que mencionam na formulação do problema, consiste em 3 a 5 derrotas seguidas do time sob o comando do técnico para que sua demissão seja apontada pelo clube.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

[7] No registro entregue pelos alunos não é possível identificar todos os elementos da função densidade. A função densidade encontra-se no canto esquerdo da figura e foi destacada com um retângulo. A construção dessa função se baseia na média e desvio padrão das derrotas seguidas no período de 2013 a 2017.

Para *capturar* nas experiências dos alunos quando desenvolvem a atividade de modelagem matemática elementos que nos permitam *descrever* a modelagem matemática em termos semióticos nossa interpretação é referente a manifestações de pensamento, ações, falas e registros dos alunos no decorrer desse desenvolvimento. Interessa-nos, portanto, considerar as diferentes instâncias em que este desenvolvimento se deu, embora nem sempre nossas assertivas considerem a sequência cronológica em que as experiências dos alunos foram sendo constituídas.

Os alunos do grupo, todos do sexo masculino, demonstraram interesse em investigar a temática envolvendo futebol desde suas primeiras interações e discussões relativas ao desenvolvimento da atividade de modelagem. Embora ainda não houvesse um delineamento de como problema da demissão de técnicos de futebol poderia ser estudado à luz da matemática, havia um sentimento, mera sensação, não esboçando, entretanto, nenhuma reação. Configura-se assim primeiridade em relação ao fenômeno de modelar matematicamente a relação da demissão de técnicos de times do campeonato brasileiro com a quantidade de derrotas seguidas do time nos últimos dez jogos, visto que esse primeiro contato "corresponde a noção de um primeiro *flash* [...] é algo de imediato, isolado em si" (BALSEMÃO, 1993, p. 132).

Então relativamente ao como o fenômeno é apreendido pela consciência, ou seja, sob a perspectiva fenomenológica, no universo da experiência, a primeiridade se expressa na espontaneidade, mero sentimento, enquanto como medida ela expressa a, ainda vagueza dos interesses do grupo para definir como a situação seria investigada. De fato, neste instante os alunos apenas justificam sua escolha pelo tema, dizendo: *"...gostamos de futebol e podemos ver as frequentes demissões de técnicos"* (registro dos alunos). No que se refere aos elementos sígnicos, na apreensão pela consciência a situação – demissão dos técnicos- é um signo primeiro, um *representâmen,* sendo a relação do signo apenas consigo mesmo. Entretanto, essa investigação pressupõe uma relação entre a situação (o *representâmen*) e um problema a ser investigado (objeto). Além disso, o interesse do grupo pela situação da demissão dos técnicos de futebol proporciona que o aluno ative conceitos de curva normal e função densidade de probabilidade que poderão ser utilizados na elaboração do modelo matemático Assim a situação inicial enquanto um signo primeiro, causa um efeito nos alunos, um interesse por estudar uma situação, que denota a existência de algo a ser estudado, um problema, interesse esse que leva o aluno a ativar conceitos estatísticos.

No que se refere ao ser modelagem matemática, o interesse dos alunos do grupo pela situação da demissão dos técnicos de futebol, constitui uma qualidade. A situação inicial (mera qualidade), por sua vez, constitui um signo icônico na relação com seu objeto, nesse caso o problema elaborado pelos alunos, visto que a situação inicial- a situação de demissões de técnicos- e o seu objeto-o problema- são relacionados por uma qualidade, que segundo Balsemão (1993) é denominado de "comunidade qualitativa". Entretanto, já está constituída uma possibilidade de obter uma solução para a situação mediada por um modelo matemático a ser construído.

Nesse sentido, a primeiridade, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, está relacionada à situação inicial, advinda da realidade, e aos signos produzidos a partir desse contato inicial. Assim, podemos inferir que o fazer modelagem matemática está relacionado ao sentimento primeiro, ao primeiro contato com a situação inicial. Além disso, percebemos essa qualidade como essencial da modelagem matemática, configurando assim a situação inicial um elemento necessário para dizermos o que é modelagem matemática, corroborando com a ideia de Pollak (2011) que o diferencial da modelagem matemática é o seu início em uma situação advinda da realidade. Nesse sentido a situação inicial, advinda da realidade, é o que culmina o desenvolvimento de uma atividade de modelagem e é o que a define como tal.

O contato dos alunos com especificidades da situação da queda de técnicos na fase de inteiração culmina na definição do problema a ser investigado com relação à situação. A definição desse problema, *"Qual é o número de derrotas seguidas que gera as demissões de técnicos de times que disputam o campeonato brasileiro?"* dá indicativo de uma relação diádica entre o estado de *qualidade* e um correlato, o objeto. Para Santaella (2008, p. 47) "existir é sentir a ação de fatos externos resistindo à nossa vontade", o que em uma atividade de modelagem matemática corresponde a elaborar um problema a partir da situação inicial. Neste sentido, o problema é um signo de secundidade que pode ser visto como um signo de existência, pois a relação estabelecida representa a existência de um objeto. O problema, sobretudo, guarda uma similaridade com a situação e possibilita que o aluna perceba relações existentes entre a situação com conceitos estatísticos.

Por outro lado, sob a perspectiva fenomenológica, o problema refere-se a uma reação perante a situação e, neste sentido é um signo de secundidade. Este problema guarda similaridade com a situação e, portanto, tem características de ícone. Os indícios de experiência dos alunos com a situação revelados no problema conferem a ele características de índice. Por fim, o problema também traz consigo aspectos convencionados da linguagem e de conceitos estatísticos que são utilizados para mediar a análise da situação sobre a queda de técnicos de futebol e, neste sentido é um símbolo.

A ação investigativa dos alunos visando responder ao problema proposto mediante a matematização da situação é mediada pela formulação da hipótese. A hipótese formulada dá indícios da tomada de consciência de que a matemática poderia fomentar a obtenção de uma resposta para o problema. Em sua hipótese os alunos admitem que existem um intervalo de derrotas seguidas com uma maior frequência de queda de técnicos. Neste sentido, a hipótese corresponde, sob a perspectiva ontológica, a uma secundidade mostra a existência de uma relação entre o problema e matemática, além de explicitar uma relação de existência entre a matemática e o problema, indicando caminhos para matematizar a situação.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2011), a formulação de um problema em uma atividade de atividade de modelagem matemática está relacionado a secundidade, pois mostra a existência de algo a ser estudado. Inferimos que além do problema, a elaboração das hipóteses também está relacionada a Secundidade, visto que as hipóteses indicam o encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática (ALMEIDA, SOUZA, TORTOLA, 2015). A relação entre elaboração do problema e das hipóteses e a secundidade nos permite inferir que a relação existente esses signos, constituem aspectos da modelagem matemática, uma vez que ao nos perguntarmos o que é modelagem matemática, podemos responder que é uma qualidade (a situação inicial) é uma relação com a situação inicial (problema e hipóteses). As hipóteses e o problema quando analisados em termos de uma reação à situação inicial, mostram uma similaridade com o signo (situação inicial), similaridade essa que fornece indícios dos encaminhamentos que deverão ser realizados para se chegar a uma resposta ao problema.

A matematização da situação a partir da hipótese definida pelos alunos vem permeada por reflexões acerca da situação, do problema e da própria hipótese. Particularmente, nessa atividade foi ancorada em conhecimento e ferramentas estatísticas e conduziu à obtenção de um modelo matemático que ao ser interpretado indica o intervalo numérico que contém o número de derrotas consecutivas do time que podem levar à demissão do técnico.

A elaboração desse modelo matemático corresponde a uma experiência com características de terceiridade uma vez que decorre de ação, reação e de reflexão sobre esta reação. Sob a perspectiva fenomenológica, o modelo é um signo interpretante de primeiridade enquanto uma possibilidade de solução; um signo de secundidade indicando um fato com relação à problemática da demissão de técnicos de futebol; por fim um signo da terceiridade, que expressa um raciocínio do grupo com relação ao problema.

Sob uma perspectiva ontológica, o modelo matemático elaborado pelos alunos é signo da primeiridade, pelo fato de que expressa uma lei geral para a situação da demissão dos técnicos de futebol. É um signo da secundidade pois, mostra uma relação com o interpretante, nesse caso as hipóteses e o problema elaborados anteriormente. Além desses aspectos, o modelo matemático expressa os argumentos utilizados em sua construção, portanto é um signo da terceiridade.

O que se pode ponderar a partir dessas interpretações é que a experiência dos alunos no desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática perpassa as categorias peirceanas. Segundo Wall (2003), Peirce considera estas categorias como universalmente presentes em qualquer fenômeno. Neste sentido, o fenômeno que é o nosso foco a modelagem matemática.

Peirce (1992) ao discutir a natureza de um fenômeno, considerando assim a perspectiva ontológica do fenômeno, evidencia que ele é constituído por uma *qualidade* (primeiridade), uma relação (secundidade) e uma generalização (terceiridade). Essa constituição é determinada pela resposta à pergunta "O que é?", assim para determinamos a partir das experiências dos alunos como eles constituem a modelagem matemática sobre essa perspectiva, devemos voltar a nossas interpretações e nos perguntarmos "o que é modelagem matemática?". A modelagem é uma qualidade, expressa pela situação inicial advinda da realidade. É também uma relação, que no caso da modelagem é expressa pela elaboração do problema e das hipóteses. Por fim, modelagem matemática é generalização, representada pela elaboração de um modelo e sua interpretação. A elaboração do modelo e sua interpretação são signos criados a partir da reflexão sobre a qualidade e sobre a relação estabelecidas anteriormente.

Por outro lado, quando Peirce (1992) visa elucidar o movimento do pensamento, isto é, olhar para o fenômeno sob a perspectiva fenomenológica, o fenômeno é um sentimento que é referência a um *representâmen* (primeiridade), uma reação diádica que faz referência a um objeto (secundidade) e uma relação triádica que faz referência a um interpretante (terceiridade). A perspectiva fenomenológica está relacionada ao fazer modelagem matemática, a que ações os alunos empregam no desenvolvimento de uma atividade. Nossa interpretação das experiências dá indícios de que a identificação de uma situação inicial, advinda da realidade, elucida um sentimento primeiro, um desejo desses alunos para investigar determinada temática, sendo assim a primeira ação. Ao elaborar um problema os alunos demonstram uma reação a aquele sentimento primeiro, buscam uma relação entre a situação inicial e um objeto. A busca por uma relação entre o problema e um objeto matemático é explicitada na elaboração de hipóteses, que nos dá indícios de que os alunos ponderam sobre quais relações existem entre o problema e possíveis procedimentos matemáticos. Sendo assim a elaboração de um problema e das hipóteses é uma segunda ação a ser realizada pelos alunos. A elaboração do modelo e sua respectiva interpretação é resultado da reflexão sobre o problema e as hipóteses.

A partir de nossas intepretações sobre o "fazer modelagem matemática", isto é, olhando para a modelagem e identificando as categorias peirceanas sob uma perspectiva fenomenológica, podemos relacionar as fases da modelagem matemática e as categorias peirceanas. A identificação da situação inicial corresponde a uma primeiridade, a elaboração do problema, ação da fase da inteiração, corresponde a uma secundidade, além disso, a elaboração de hipóteses que é uma fase da matematização também está relacionada a secundidade. A elaboração do modelo matemático e sua intepretação, são ações das fases de resolução e interpretação do resultado e validação, respectivamente. Tais ações podemos relacionar a terceiridade.

A figura 2.6, ilustra a identificação desses elementos no que se refere a atividade de modelagem matemática. As linhas horizontais se referem à perspectiva fenomenológica que está relacionada ao fazer modelagem matemática dos alunos. Já as colunas nesse quadro referem-se à perspectiva ontológica, isto é, o que podemos inferir ser considerado pelos alunos o que é modelagem matemática no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. O quadro, representado na figura 2.6, explicita o fato de que "o mundo categorial de Peirce implica na ideia de *continuum*..." (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2011, p. 9), isto é, existe um equilíbrio entre as categorias e há interação entre elas, tanto em uma perspectiva fenomenológica quanto ontológica.

Figura 2.2-Interpretação semiótica de uma atividade de modelagem matemática

Perspectiva fenomenológica- fazer modelagem matemática		Perspectiva ontológica- ser modelagem matemática		
		Primeiridade qualidade	*Secundidade relação*	*Terceiridade generalização*
Primeiridade Espontaneidade no interesse do grupo pela situação	**Relação do signo consigo mesmo** Apenas a situação inicial (demissão de técnicos de futebol)	Interesse pela situação inicial a ser investigada	Definição do problema a ser investigado Elaboração de hipóteses para subsidiar a matematização da situação	Ativação dos conceito de curva normal e de função densidade de probabilidade
Secundidade Reação à situação mediada pela coleta e análise preliminar dos dados	**Relação do signo com o objeto** Intermediação da relação entre situação e dados mediante a matematização	Definição do problema a ser investigado Coleta de dados	Percepção de relações da situação com conceitos estatísticos	O uso dos conceitos estatísticos para mediar análise da situação
Terceiridade Reflexão sobre a situação à partir do modelo construído	**Relação do signo com o interpretante** Validação do modelo construído e possibilidades de análise da situação	Possibilidade de obter uma solução para a situação mediada por um modelo matemático a ser construído	Matematização mediada pela estatística	Construção do modelo matemático e interpretação do modelo Análise da situação mediada pelo modelo

Fonte: autoras

A nossa análise da apreensão pela consciência dos alunos de ações específicas no desenvolvimento da atividade de modelagem vem confirmar a primeiridade como base para secundidade e a terceiridade como fim último do que são as possibilidades dos alunos para, neste momento e neste contexto, deliberarem sobre a situação em estudo: a demissão de técnicos de times que disputam o campeonato brasileiro. Tal fato corrobora com a ideia de *continuum* de Peirce, visto que todas essas ações não são independentes elas estão relacionadas.

Diante do nosso objetivo *descrever* a modelagem matemática em termos semióticos interpretando as experiências dos alunos quando desenvolvem atividades dessa natureza, podemos ponderar que sob a perspectiva fenomenológica, relativamente ao como a modelagem matemática é apreendida pela consciência, refere-se ao fazer modelagem matemática. A apreensão do como *fazer* modelagem matemática se dá na conscientização dos alunos de que precisam se apropriar de uma situação e matematizá-la de modo que a solução encontrada seja aceita e possa ser validada por uma determinada comunidade, nesse caso os alunos da turma e as professoras. O fazer modelagem matemática é nesta perspectiva um fenômeno que é apreendido pela percepção, reação e reflexão de modo que a primeiridade é essa mera percepção do fenômeno, a secundidade refere-se a reações que possibilitam que problema seja definido e que um ferramental matemático e tecnológico seja ativado para na terceiridade produzir o modelo matemático e interpretá-lo de modo que uma solução para o problema proposto possa ser apresentada.

Já à luz da perspectiva ontológica das categorias peirceanas, capturamos das experiências dos alunos o que lhes parece necessário para caracterizar uma atividade de modelagem matemática, na direção de seu entendimento do *ser* uma atividade de modelagem matemática (e não ser outra atividade como uma resolução de problemas, por exemplo). Ou seja, reconhecer que para ser modelagem matemática a atividade deve ter seu início em uma situação problemática da realidade e ser viável, deve requerer a formulação de hipóteses, e deve ser matematizada sem que esquemas à priori estejam definidos para indicar qual matemática deve ser usada e qual é o resultado que deve ser obtido são nesta perspectiva ações que se assentam na primeiridade, na secundidade e na terceiridade.

Neste sentido, a interpretação semiótica das ações dos alunos ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática indica, por um lado que percepção, ação, reação e reflexão viabilizam investigar uma situação inicial, definindo um problema e apresentando uma resposta para este problema. Por outro lado, ao mesmo tempo em que estes estágios da experiência se constituem, as ações dos alunos são mediadas por uma variedade de signos que são, na verdade, expressões de uma linguagem matemática que é identificada, explorada e usada pelos alunos para apresentar uma resposta para um problema que não tem, a priori, natureza matemática.

O fenômeno de modelar matematicamente uma situação, ou seja, fazer modelagem matemática, atende às peculiaridades de um fenômeno capaz de produzir conhecimento, na perspectiva peirceana de que esta produção corresponde à terceiridade em que a reflexão, o raciocínio e a argumentação proporcionam a generalização.

É justamente neste sentido que a experiência emanada de terceiridade faz com que o objeto, neste caso a modelagem matemática, já não seja para o intérprete, o aluno, como a coisa que era, mas como a coisa que se tornou depois do processo de experimentação mediado pelos interpretantes. Os signos e o objeto se entrelaçaram para criar a trama da experiência de caracterizar o que é modelagem matemática e de identificar procedimentos associados ao desenvolvimento de atividades dessa natureza.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M W; SOUSA, B.N.P. ; TORTOLA, E. . Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. *In*: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 2015, Pirenópolis. **Anais** do VI SIPEM. Rio de Janeiro: SBEM, v. 1. p. 1-12, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P. . Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação (UNESP. Impresso)**, v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P. . O significado em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre pesquisas brasileiras. **REVEMAT**, v. 9, p. 124-145, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. ; VERTUAN, R. E. . Modelagem Matemática na Educação Básica. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K.A. P.. (Org.). **Modelagem Matemática em Foco**. 1ed.Rio de Janeiro - RJ: Ciência Moderna, v. 1, p. 1-21, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetike** (UNICAMP), v. 18, p. 379-406, 2010.

BALSEMÃO, E. Categorias e semiosis. Notas introdutórias ao pensamento do individual em Ch. S. Peirce. **Revista Filosófica de Coimbra**, v. 2, n. 3, p. 115-168, 1993.

CORREA, C. M. C. **Estudo sobre o desenvolvimento verbal na criança**. Tese de Doutorado em Comunicação e Semiótica, PUC – SP, 2009

DEELY, J. **Semiótica Básica**. Tradução: Julio C. M. Pinto. São Paulo: Editora Ática, 1990.

GALBRAITH, P.. Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, p. 339–350, 2015.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

IBRI, Ivo A.. **Kósmos Noétos**: a arquitetura metafísica de Charles S. Peirce. São Paulo: Paulus, 2015.

JABLONKA, E.; GELLERT, U.. Mathematisation–demathematisation. In: Mathematisation and demathematisation. **Brill Sense**, 2007. p. 1-18.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application, Blumenau**, v. 1, n. 2, p.16 - 48, 2010.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. Construção de Conceitos Matemáticos na Educação Básica numa Abordagem Peirceana. **Bolema**. Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 887-904, dez. 2010.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1-2, p. 11-38, 2006.

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. What is Mathematics, Really? Who Wants to Know? **Bolema**. Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 756-772, ago. 2015.

PEIRCE, C.S **Semiótica e Filosofia**: textos escolhidos. 1.ed. São Paulo: Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 2 reimpressão da 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2015.

PEIRCE, C. S. **The essential Peirce**: selected philosophical writings, Vols. 1. Peirce Edition Project (ed.). Bloomington: Indiana University, 1992.

PEIRCE, C. S. **The collected papers of Charles S. Peirce**. Edição eletrônica reproduzindo Vols. I-VI [Hartshorne, C.; Weiss, P. (eds.). Cambridge: Harvard University, 1931-1935], Vols. VIIVIII [Burks, A. W. (ed.). Cambridge: Harvard University, 1958]. Charlottesville, Intelex Corporation. [Obra citada como CP, seguido pelo número do volume e número do parágrafo], 1994 (1866-1913).

POLLAK, H. O. What is Mathematical Modeling?. **Journal of Mathematics Education at Teachers College**, v. 2, n. 1, 2011.

PRESMEG, N.; RADFORD, L.; KADUNZ, G.. **Semiotics in mathematics education**. Springer, 2016.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F.. **Semiotics in Mathematics Education**: Epistemology, history, classroom and culture. The Netherlands: Sense Publishers, 2008.

RAMOS, D. C.. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática**. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G. Constructing Knowledge Seen as a Semiotic Activity. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

SANTAELLA, L.. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. de 2000. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SILVA, E. M. et al.. **Estatística.** 5. ed.. São Paulo : Atlas, 2018.

SILVA, K.A. P. ; ALMEIDA, L. M. W. . Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática (Online), v. 29, p. 568-592, 2015.

SILVA, K.A. P. ; ALMEIDA, L. M. W . The Exponential Function Meaning on Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach. R**EDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, p. 195-215, 2018.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVEIRA, L. F. B. Charles Sanders Peirce: science as semiotics. **Trans/form/ação**, v. 12, p. 71-83, 1989.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. 2013. 175p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

WALL, C. **Peirce:** a guide to the perplexed. New York: Bloomsbury, 2013.

RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICO

RESUMO

No presente artigo nosso problema de interesse é olhar para o raciocínio diagramático na constituição do *fazer* modelagem matemática. Nossas deliberações, por um lado, se fundamentam em aspectos teóricos da modelagem matemática e da semiótica peirceana, mais especificamente no que se refere ao raciocínio diagramático. Por outro lado, são ancoradas na análise interpretativa de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. A partir da análise dessas atividade inferimos que a constituição do fazer modelagem está diretamente relacionada a constituição do raciocínio diagramático, visto que o raciocínio diagramático cria oportunidades para a construção do conhecimento. No caso dessa pesquisa as etapas do raciocínio diagramático permitiu que os alunos realizem e refletissem sobre ações que são necessárias no que se refere ao fazer modelagem matemática. Além disso, a familiarização gradativa dos alunos com as atividades vai configurando situações em que a construção de conhecimento relativo ao fazer modelagem matemática vai sendo incrementada gradativamente pelas etapas do raciocínio diagramático dos alunos modeladores.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Semiótica Peirceana; Atividade de modelagem matemática; Raciocínio Diagramático, Diagramas.

INTRODUÇÃO

A partir do final da década de 1970 a modelagem matemática começou a ganhar espaço nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática (BIEMBENGUT, 2009). A partir daí as pesquisas sobre o tema vêm se consolidando e podem ser encontradas com frequência em periódicos da área de Educação Matemática (SOUZA, ALMEIDA, KLÜBER, 2018).

Uma questão que, de forma direta ou indiretamente, permeia muitas das investigações sobre modelagem na Educação Matemática é: *Como os alunos constroem conhecimento quando desenvolvem atividades de modelagem matemática?* Ampliar as discussões relativas a esta questão é relevante para a área considerando que práticas de modelagem em diferentes níveis de escolaridade têm nesta questão um aporte para a introdução de atividades dessa natureza na sala de aula.

Reconhecidamente que a abordagem dessa questão se vincula a diferentes campos teóricos e compreende uma diversidade de interpretações, neste artigo particularmente, lançamos um olhar semiótico sobre atividades de modelagem matemática considerando elementos da semiótica de Charles Sanders Peirce.

A semiótica, em termos gerais, considera os signos como meios de significação de um objeto ou como meio de representação de algo para alguém. Neste sentido, Peirce (1998, p.13) considera que "O signo é algo que serve para produzir conhecimento sobre alguma outra coisa, para a qual o signo está (*stands for*) ou representa. Essa outra coisa é chamada de objeto[8] do signo". Peirce pondera também que todo nosso pensamento é ancorado em signos de tipos diversos, sejam eles imaginados ou efetivamente percebidos.

Hoffman (2005) ao trazer para o âmbito da matemática a teoria de Peirce argumenta que no que se refere aos objetos matemáticos, uma privilegiada forma de experimentação é mediada por diagramas. Esta experimentação está associada com o que Peirce caracteriza como raciocínio diagramático. A construção de conhecimento à luz do raciocínio diagramático pode ser interpretada como um processo com três etapas fundamentais: construir signos; fazer experimentações com esses signos; observar os resultados (HOFFMAN, 2005; KADUNZ, 2016; ALMEIDA E SILVA, 2019).

No âmbito da área de Educação Matemática, D'Ambrosio (2009, p. 91) reconhece a Modelagem Matemática como "a estratégia por excelência dos seres humanos para a geração de conhecimento". Alinhados com essa ideia, no presente artigo temos a intenção de trazer a abordagem semiótica para o campo da modelagem matemática, particularmente, para o fazer modelagem matemática dos alunos, buscando evidências de raciocínio diagramático nas ações dos alunos. Com esta finalidade desenvolvemos uma pesquisa empírica em que atividades de modelagem matemática são desenvolvidas por alunos do quarto anos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática.

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Conforme argumenta Almeida (2010), em termos gerais uma atividade de modelagem matemática parte de uma situação inicial (problemática) e, por intermédio de um conjunto de ações dos modeladores, culmina em uma situação final (que representa uma solução para a situação inicial).

---

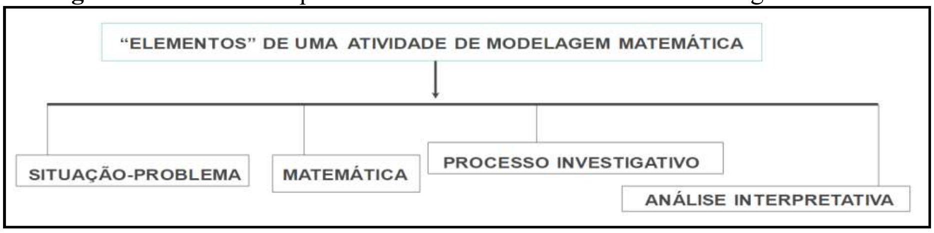
[8] Para Peirce (2005), o objeto não pode se restringir à noção de um existente. Uma ideia, um conjunto de coisas, um evento ou uma ocorrência pode ser objeto de uma dada relação sígnica.

Pollak (2015) considera que as ações daqueles que desenvolvem atividades de modelagem matemática referem-se a

> formular uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo matemático, fazer uso de matemática na situação idealizada a partir de uma situação da realidade, e então decidir se os resultados podem, em alguma medida, ser uteis para entender a situação original (POLLAK, 2015, p. 267).

Assim, sem a intenção de especificar claramente sequências predeterminas para estas ações expressas, de modo geral, por meio dos chamados ciclos de modelagem matemática (GREEFRATH, 2011; BLUM, LEIß, 2007; CARREIRA et al., 2011) reconhecemos, em consonância com o que se apresenta em Almeida, Silva e Vertuan (2012), que é possível identificar elementos que caracterizam a modelagem matemática: o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são pré-definidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre uma análise interpretativa da solução (figura 3.1).

Figura 3.1-Elementos que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17).

Em atividades de modelagem matemática na sala de aula as ações estão centradas no aluno modelador. Esse papel, conforme argumentam Silveira e Caldeira (2012), pode causar certo estranhamento aos alunos, pois eles estão acostumados às atividades em que o professor indica os caminhos que devem seguir. Nesse sentido, Silva, Almeida e Gerolomo (2011, p.30) sugerem que "o aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de "aprender" a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o "resolvedor" principal".

Nesse contexto Almeida, Silva e Vertuan (2012) sugerem que a modelagem seja introduzida de forma gradativa na sala de aula, no decorrer do que os autores denominam de três momentos. No primeiro momento a situação inicial é apresentada aos alunos juntamente com os dados e informações necessárias para o estudo da situação. Então, "ações como definição de variáveis e hipótese, simplificação, transição para a linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para análise interpretativa da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN; 2012, p.26).

Em um segundo momento, o professor sugere a situação inicial e os alunos, de modo geral divididos em grupos, são responsáveis pela coleta das informações necessárias, a elaboração do problema, a elaboração das hipóteses, definição das variáveis e construção do modelo matemático, sendo os alunos assessorados pelo professor.

As experiências vivenciadas nesses dois primeiros momentos podem munir o aluno de experiências e habilidades que lhes deem autonomia para no terceiro momento tornar-se responsáveis pelo desenvolvimento de uma atividade em que cada um dos elementos a que nos referimos é de inteira responsabilidade dos alunos, cabendo ao professor o papel de orientador e de supervisor dos alunos.

A autonomia do alunos ao se envolver com práticas de modelagem matemática não é independente dos signos produzidos e usados, bem como dos raciocínios que esta produção e este uso proporcionam aos alunos (RAMOS, 2016). Assim, neste artigo nossa atenção é dirigida aos signos, mais especificamente aos signos diagramáticos, associados às ações dos alunos e ao raciocínio associado a estes signos, o raciocínio diagramático, na constituição do fazer modelagem matemática.

O RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO NA SEMIÓTICA PEIRCEANA

Desde o final da década de 1990 pesquisadores em Educação Matemática têm investigado tanto abordagens teóricas sobre os signos quanto teorias em que o signo é uma ferramenta para responder questões de pesquisa relacionadas à aprendizagem (KADUNZ, 2016). Almeida e Silva (2018) corroboram com essa afirmação ao destacar que aspectos da semiótica peirceana vêm orientando reflexões em relação aos processos de ensino e de aprendizagem.

A teoria de Peirce tem como ponto central a relação triádica do signo, isto é, o signo é composto por três elementos, o *representâmen,* o objeto e o interpretante. Peirce (1972) entende o signo como aquilo que em certa medida representa algo para alguém. O signo, portanto, representa alguma coisa, isto é seu objeto e ao dirigir-se a alguém, cria na mente da pessoa um novo signo, denominado de interpretante do primeiro signo.

A relação do signo com seu objeto também se dá de forma triádica de modo que na relação com seu objeto, o signo pode ser um ícone, um índice ou um símbolo. O ícone é caracterizado por Peirce como um signo que se refere ao objeto por meio de semelhança, similaridade com as qualidades do objeto, como por exemplo, uma fotografia indica o fotografado. A capacidade referencial de um ícone reside em *poder ter* alguma semelhança com as qualidades do seu objeto. Entretanto, conforme pondera (SANTAELLA, 2010), não há uma conexão existencial obrigatória entre ícone e objeto: um ícone ainda seria significativo mesmo que seu objeto não existisse em um sentido concreto (PEIRCE, 1972). O índice, por sua vez, é um signo que indica um objeto não por relação de semelhança, mas por relação de proximidade como por exemplo, fumaça no céu, que pode indicar a ocorrência de um incêndio nas proximidades. Já o símbolo é um signo que se refere ao objeto em virtude de uma lei. Símbolos matemáticos, como por exemplo π, são signos simbólicos.

Ao considerar a relação do signo com seu objeto como um ícone, no âmbito da matemática um tipo de ícone é relevante: o digrama (ALMEIDA e SILVA, 2019; KADUNZ, 2016; HOFMANN, 2005). Os diagramas representam por similaridade as relações internas entre o signo e o seu objeto (PEIRCE, 1972). Hoffmann (2005) mostra que o diagrama além de representar relações, como qualquer ícone, é também constituído em um sistema consistente de representações. Nesse sentido, os diagramas se prestam a operações altamente específicas como transformações e combinações, realizadas de acordo com regras convencionais.

De acordo com Dörfler (2005) os diagramas não são apenas estruturas estáticas que só precisam ser percebidas, mas eles são os objetos de operação. O signo diagramático é para Dörfler (2005), um tipo de registro associado a um sistema de operação e pode ser constituído de qualquer tipo de registro, como numerais ou figuras geométricas, desde que tenha um sistema de operação envolvido. Os triângulos, por exemplo, são considerados signos diagramáticos, visto que representam relações particulares de linhas e vértices que são indicados por letras.

Segundo Hoffman (2005), toda construção de diagrama é realizada por meio de um sistema representacional e todas as experimentações com o signo diagramático são determinadas pelas regras desse sistema. Essa construção de diagramas e experimentação com esses signos caracterizam etapas do raciocínio diagramático: construir signos; fazer experimentações com esses signos; observar os resultados (KADUNZ, 2016; BAKKER e HOFFMANN , 2005; ALMEIDA e SILVA, 2019).

No que se refere a essas etapas, Bakker e Hoffmann (2005) explicitam que a etapa, da construção, consiste na criação de diagramas por meio de um sistema representacional. Segundo os autores a construção desses diagramas é motivada pela necessidade dos alunos de representar relações que considerem importantes em um problema.

Já em relação a segunda etapa do raciocínio diagramático, a experimentação com os diagramas, Bakker e Hoffmann (2005) destacam que

> qualquer experiência com um diagrama é executada dentro de um sistema representacional e é uma atividade orientada por regras ou hábitos (hoje enfatizamos que essa atividade está situada dentro de uma prática). O que torna importante a experimentação com diagramas é a racionalidade imanente neles. As regras definem as possíveis transformações e ações, mas também as restrições de operações com diagramas (BAKKER, HOFFMANN, 2005, p. 340-341).

A terceira etapa do raciocínio diagramático consiste na observação e reflexão dos resultados a que conduzem as experiências com a construção e experimentação com o diagrama. De acordo com Bakker e Hoffmann (2005), para Peirce quando um matemático constrói um diagrama ele está diante de um ícone cuja observação possibilita evidenciar relações além daquelas estabelecidas na construção do diagrama.

O raciocínio diagramático é, segundo Dörfler (2003), uma manipulação baseada em regras sendo um processo criativo e construtivo de diagramas para investigar propriedades e relações do objeto. Nesse tipo de raciocínio o foco está nos registros diagramáticos e nas suas manipulações e operações realizadas.

Segundo Dörfler (2003) a construção de diagramas, a experimentação e observação com esses signos são necessárias para se aprender matemática. Otte (2006) complementa que a análise dos diagramas construídos pode dar indicativos de como se dá a interpretação e significação de um fenômeno.

APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Com a finalidade de olhar para o raciocínio diagramático na constituição do *fazer* modelagem matemática voltamos o nosso olhar para as ações dos alunos no desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática. O grupo de seis alunos, cujas atividades apresentamos, faz parte de uma turma de vinte alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Esses alunos desenvolveram as atividades, no contexto de uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, sendo essa estruturada de tal forma que os alunos estudassem tanto aspectos teóricos relacionados à modelagem matemática, quanto aspectos relativos as práticas com atividades de modelagem matemática. Em relação às práticas de modelagem matemática, ou seja, em relação ao desenvolvimento de atividades de modelagem pelos alunos, elas forma introduzidas de forma gradativa conforme os momentos de familiarização descritos por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Nesse artigo apresentamos duas as atividades desenvolvidas, sendo uma do segundo momento de familiarização e uma do terceiro momento de familiarização.

A atividade *Olha a batata frita!* é do segundo momento e a temática foi proposta pela professora aos alunos. Na atividade *Papel x Secador de Mão* relativa ao terceiro momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática, a temática foi escolhida pelos alunos do grupo. A escolha dessas atividades para nossa análise, se deu pelo fato de terem sido desenvolvidas pelo mesmo grupo de alunos em momentos de familiarização distintos.

Do ponto de vista metodológico, empregamos uma análise de cunho qualitativo e interpretativo pautados no quadro teórico abordado nas seções anteriores. Nossas inferências se fundamentam na análise de dados coletados por meio de gravações em áudio e vídeo durante as duas aulas em que os alunos desenvolveram as atividades e durante a apresentação das atividades pelos alunos do grupo para todos os alunos da turma bem como do relatório escrito da atividade entregue pelos alunos. Os alunos são indicados por A_1, A_2, ... A_6. Quando nos referimos à professora na transcrição de diálogos usamos a letra P_1.

O desenvolvimento da atividade cuja temática é a *Batata Frita* iniciou com a entrega de um texto com informações relativas à produção de batatas fritas, conforme indica a figura 3.2. No caso dessa atividade, o problema a ser investigado também já foi apresentado aos alunos, juntamente com materiais como barbante, réguas e facas plásticas para auxiliar na coleta de dados.

Figura 3.2-Parte do material entregue aos alunos

Olha a Batata Frita!!!

Segundo reportagem do site Terra[1] alguns pesquisadores afirmam que a história da batata frita nasceu em uma ponte de Paris, outros na ribeira do rio Meuse: franceses e belgas reivindicam a paternidade das batatas fritas, um prato emblemático cujas origens impregnam a cultura popular dos dois países. "A batata frita é filha da cozinha da rua, da baixa gastronomia. Por isso é difícil estabelecer sua certidão de nascimento", explica a historiadora francesa Madeleine Ferrière.

Problema:
Quantos bastões de batata podem ser obtidos em uma embalagem de 1 Kg?

As batatas são encaminhadas para a remoção da casca residual,"olhos", manchas escuras e áreas verdes, operação que é realizada manualmentecom auxílio de facas de aço inoxidável.As batatas descascadas são' conduzidas através de esteiras ou em cestaspara equipamentos de alta velocidade (cortadores rotativos) para seremcortadas na forma de palitos (tipo francesas). O tamanho varia de acordocom a preferência do consumidor. As dimensões de sua seção transversalgeralmente são de 10x10mm, enquanto seu comprimento deve ter no mínimo25 mm. Após o corte é recomendado uma seleção, visando a obtençãode um lote de primeira qualidade (com maior uniformidade), separando pedaçosmenores e descartando pedaços quebrados. Após as outras etapas do processamento, as batatas devem ser cuidadosamente pesadas e empacotadas pois elas quebram. De acordo com a finalidade, as embalagens podemconter, por exemplo 15 Kg de produto, quando destinada a restaurantes, ou de 0,5 - 1 Kg, quando o mercado de consumo doméstico.

Fonte: autoras

De posse dos materiais os alunos começaram a criar estratégias para resolver ao problema proposto. Uma dessas estratégias foi realizar simplificações no que diz respeito ao peso da batata. Essas simplificações foram feitas a partir de uma fala da professora: *Eu trouxe 10 batatas mais ou menos do mesmo formato e tamanho, sendo que o peso total é de 1,6 Kg.* Essas informações e a observação das batatas que eles possuíam, culminaram na elaboração de uma hipótese, conforme ilustra a figura 3.3.

Figura 3.3-Hipóteses criadas pelos alunos para a primeira solução

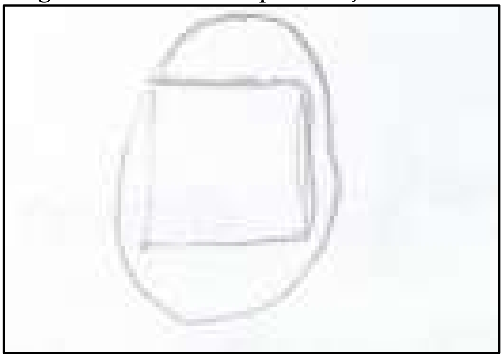
• Hipótese: • Cada batata pesa 160 gramas
• somente bastões perfeitos poderão ser utilizados para completar 1 Kg.

Fonte: registro dos alunos

Primeiro esses alunos experimentaram suas ideias em uma das batatas, conforme ilustra o diálogo a seguir

A1: Na primeira batata que a gente cortou, tínhamos o objetivo de descobrir quantos pedaços de 2,5 cm a gente conseguiria fazer com a batata.
A2: 2,5 por 1 por 1 cm.
A1: isso! Vamos fingir que isso aqui é uma batata (desenha a batata no quadro, representada pela figura 3.4*), a gente cortou ela na vertical, de pé. Quando a gente cortou ela assim a gente conseguiu 34 bastões (de batata) perfeitos* (com a medida de $2,5 \times 1 \times 1$) *e o que sobrou a gente jogou fora.*

Figura 3.4-Primeira representação da batata

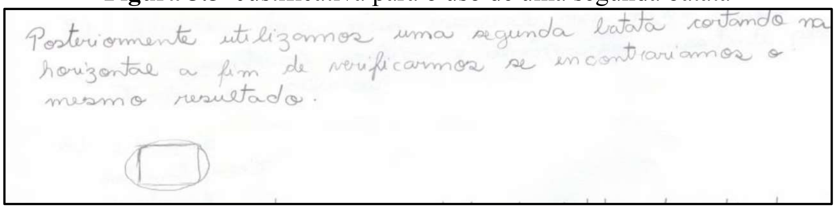


Fonte: registro dos alunos

Nessa primeira tentativa os alunos obtiveram 34 palitos com as medidas estipuladas. Considerando que cada batata pesava 160 gramas, os alunos dividiram esse valor pelos 34 bastões encontrando assim, que cada bastão pesa 4,7 gramas.

Porém não ficaram satisfeitos com o resultado e utilizaram uma segunda batata, *"agora com um corte diferente, fizemos o corte com a batata deitada, na horizontal"* (registro dos alunos). A justificativa para o uso dessa segunda batata é que eles queriam verificar se a quantidade de bastões seria a mesma, conforme ilustra a figura 3.5.

Figura 3.5 -Justificativa para o uso de uma segunda batata



Posteriormente utilizamos uma segunda batata cortando na horizontal a fim de verificarmos se encontraríamos o mesmo resultado.

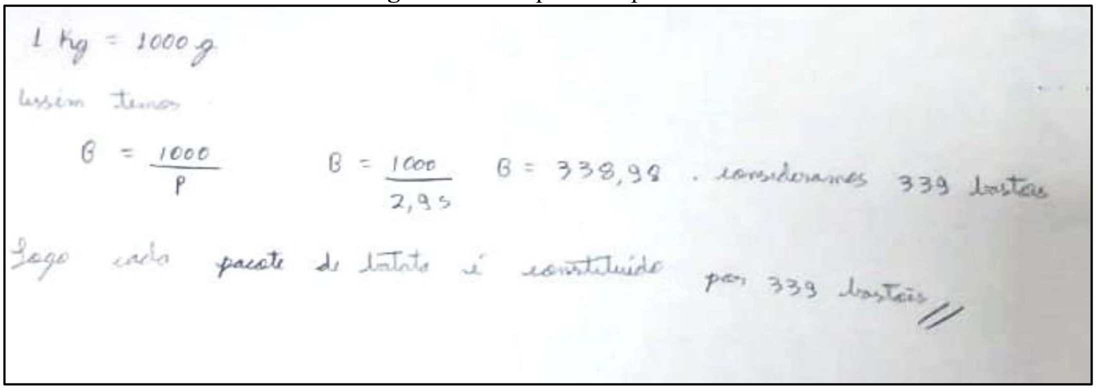
Fonte: registro dos alunos

Nessa nova tentativa os alunos perceberam que a quantidade de batata desperdiçada foi menor e encontraram 48 bastões perfeitos. Realizando a divisão de 160g por 48 encontraram que cada bastão tem 3,3g. Mesmo após essas duas tentativas, eles resolveram realizar uma terceira, conforme indica o trecho a seguir:

A1: Só que aqui nos dois a gente teve boa parte que não pesou né! Vários pedaços da batata foram jogados no lixo e a gente não sabia quanto pesava isso. Então a gente utilizou uma terceira batata. Essa batata a gente cortou em cubos de 1 cm, porque eram cubos menores, e a gente entendeu que se cortássemos em pedaços menores nós íamos aproveitar melhor a batata. Então a gente conseguiu aproveitar praticamente toda a batata, cortando em cubos de 1cm³. Quando a gente fez isso nós descobrimos 135 cubos. Nós já tínhamos que uma batata inteira pesava 160g e sabíamos que uma batata tinha 135 cubos, a partir disso a gente dividiu 160 por 135 e descobrimos que cada cubinho pesava 1,18g.

A partir dessa nova estratégia eles concluíram que cada bastão de dimensões 5cm x 1cm x 1cm, pesa 5,95. Porém, como o bastão o interesse era obter o peso de um bastão com as dimensões de 2,5 cm x 1cm x 1cm, eles dividiram esse valor por 2. Após descobrirem o peso de cada um dos bastões, dividiram a quantidade de 1kg pelo peso de cada bastão, encontrando um total de aproximadamente 339 bastões, que seria a resposta ao problema de quantos bastões temos em 1 kg de batata, conforme ilustra a figura 3.6.

Figura 3.6 -Resposta ao problema



1 kg = 1000 g

assim temos

$B = \frac{1000}{P}$ $B = \frac{1000}{2,95}$ $B = 338,98$. consideramos 339 bastões

Logo cada pacote de batata é constituído por 339 bastões //

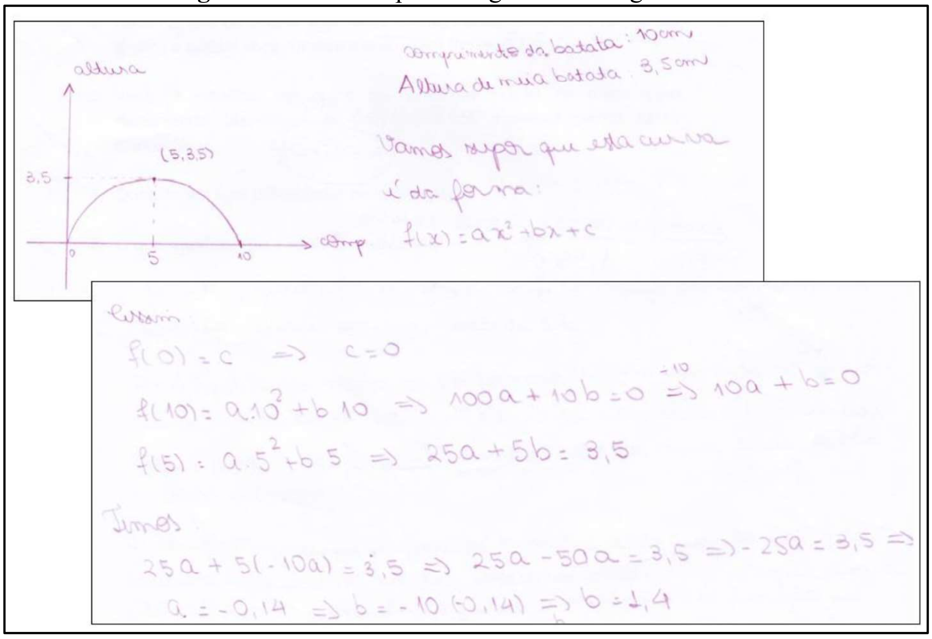
Fonte: registro dos alunos

Após discussão com todos da turma, os alunos do grupo concluíram que o resultado apresentado era aceitável, visto que os outros grupos encontraram valores bem parecidos e que os valores encontrados não estavam tão fora da realidade, considerando o tamanho do palito que foi estipulado.

Esses alunos, matematizaram a situação de uma nova forma, pois, após observarem o formato da batata tiveram o seguinte *insight “Nossa a batata parece um sólido de revolução”* (registro dos alunos). A partir dessa observação os alunos passaram a considerar não mais a massa, mas sim o volume desse sólido. Além disso, essa observação requereu que os alunos elaborassem outras hipóteses. *Temos como hipótese que as medidas do bastão são de* $1cm \times 1cm \times 2,5cm$*; que a batata é um elipsoide e vamos assumir que a batata tem 160 gramas* (registro dos alunos).

Como hipótese os alunos consideram que a batata é um sólido de revolução e ao observaram a frente da batata e verificaram que a metade da batata se assemelhava a uma parábola, conforme a explicação deles: *“Nós trabalhamos com a metade da batata, olhamos para a bata assim* (se refere à vista frontal de uma batata) *e pensamos no comprimento da batata que é aproximadamente 10 cm e a altura da batata, que é a parte de cima ali 3,5 cm. Ai a agente achou a lei dessa função, porque nós temos três pontos e utilizamos a integral para calcular o sólido de revolução”* (registro dos alunos). A figura 3.7 ilustra o modelo encontrado.

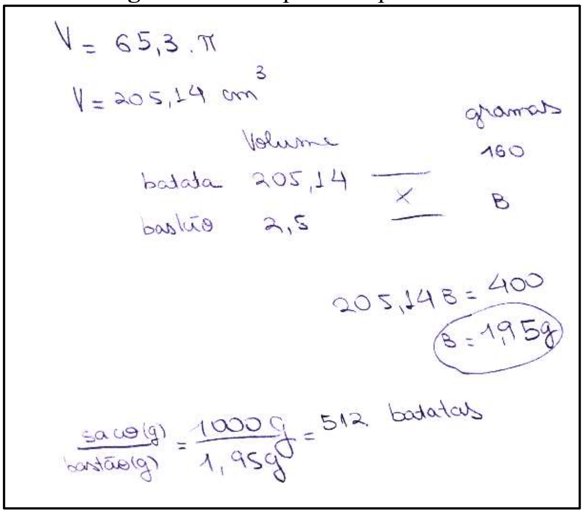
Figura 3.7 -Modelo para a segunda estratégia



Fonte: registro dos alunos

Após encontrarem a função eles determinaram o volume do sólido formado pela rotação da função encontrada em torno do eixo x, gerando assim um sólido que se aproxima do formato de um elipsoide, o que condiz com a hipótese criada pelos alunos. Ao calcular esse volume os alunos encontram que o sólido formado tem um volume de $65{,}3\,\pi\, cm^3$. Ao encontrar esse valor os alunos utilizaram a hipótese de que cada batata pesava 160g e relacionaram o volume encontrado com o peso de uma batata. Essa relação foi realizada, porque os alunos queriam descobrir qual o peso de um bastão cujo volume era de $2{,}5\ cm^3$. Ao relacionar o peso e o volume esses alunos encontraram que palito de dimensões $1\ cm\ \times 1\ cm \times 2{,}5\ cm$ pesava $1{,}95\ g$. Ao final eles dividiram o peso do pacote, 1000 gramas, pelo peso de cada palito, encontrando que em um 1kg de batata se tem aproximadamente 512 palitos. A figura 3.8 ilustra os procedimentos adotados por esses alunos.

Figura 3.8 - Resposta ao problema



Fonte: registro dos alunos

No momento de discussão dos resultados esses alunos foram questionados por outros alunos da turma porque não utilizaram o volume da batata e dividiram pelo volume do palito, e como reposta obtiveram "*não tínhamos pensado nisso, mas deve dar certo*" (registro dos alunos). Após discussão dessas possibilidade com a turma, chegou-se à conclusão que seria possível resolver dessa forma também. Ao final os alunos acreditam que os dois valores são razoáveis, apesar de ter dado uma diferença entre os valores encontrados. Salientaram ainda, que seria possível confrontar esse valor se comprassem um pacote1 kg de batata e contassem os palitos do pacote.

Os mesmos alunos desse grupo desenvolveram a atividade denominada *Papel x Secador de Mão* no instante relativo ao terceiro momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática.

Na expectativa de responder ao problema *"Para o shopping, é mais vantajoso financeiramente o uso de secadores de mão ou papéis toalha nos banheiros"* (registro dos alunos), os alunos buscaram informações sobre o uso do papel para secar a mão e do secador elétrico de mãos em um shopping center de uma cidade do Paraná. Segundo os alunos *"a escolha desse shopping em específico se deu pelo fato de que possuía tanto os papeis para secar mão quanto os secadores elétricos nos banheiros"* (registro dos alunos).

Diante do problema, os alunos buscaram informações referentes à instalação e manutenção desses dois tipos de equipamentos e informações referentes à quantidade de pessoas que visitam o shopping diariamente, visto que o shopping não tem um controle da quantidade de pessoas que vão ao banheiro durante o horário de funcionamento. A informação fornecida pela administração do shopping foi de que diariamente passam pelo shopping em média 16000 pessoas, entre funcionários e consumidores. Segundo os alunos o shopping realiza uma média das pessoas que transitam no shopping durante a semana, *"o que inclui o fim de semana, por isso a média é alta, pois no fim de semana mais pessoas vão ao shopping"* (registro dos alunos). A figura 3.9 ilustra as informações coletadas sobre os equipamentos.

Figura 3.9-Informações coletadas

Secador Geminus

Melhor preço: Mercado livre - R$500,00

Consumo: 0,38990 kWh

Potencia: 1800 Watts

Tempo de secagem: 15 segundos

Consumo de energia: para cada secagem em *W=0,00750* custo por secagem através da utilização do secador é igual a 0,00292

Papel toalha

Suporte: R$20,00

Pacote com mil folhas de papel: R$11,00

Custo unitário da folha de papel toalha: R$0,011

Fonte: registro dos alunos

Para a resolução do problema esses alunos elaboram algumas hipóteses, conforme a fala de um deles na apresentação aos demais alunos da sala: *"uma pessoa usa em média 4 folhas de papel; diariamente passam 16000 pessoas no shopping e todas elas usam o banheiro"* (registro dos alunos).

As informações coletadas bem como as simplificações realizadas resultaram na construção de dois modelos. Sendo que primeiro "*nós fizemos primeiro a função em relação a secagem de mão com secador. 500 do custo com a instalação mais o custo por pessoa, nesse caso o p é a quantidade de pessoas. A função g é do custo em relação a secagem com o papel, o gasto que seria com o papel. No caso seria 20 do custo do suporte mais 0,011 vezes quatro, que é a quantidade de folhas que uma pessoa usa vezes a quantidade de pessoas"* (registro dos alunos). A figura 3.10 ilustra os modelos criados pelos alunos, nessa figura a função *F(p)* representa o custo total da utilização do secador de mão em função da quantidade de pessoas que utilizam o secador de mão e a função *G(p)* o custo da utilização do papel em função da quantidade de pessoas que utilizam o papel.

Figura 3.10 3-Modelos criados

Assim temos que o custo total da utilização pode ser definido pela função

$$F(p) = 500 + 0{,}00292p$$

Assim temos que o custo total da utilização pode ser definido pela função:

$$G(p) = 20 + (0{,}011 \cdot 4)p$$

$$G(p) = 20 + 0{,}044p$$

Fonte: registro dos alunos

Com o objetivo de determinar número de pessoas para o qual os gastos seriam os mesmos considerando os dois equipamentos, e partir desse resultado analisar qual seria o mais vantajoso, os alunos compararam as duas funções, encontrando o valor de p para o qual as funções são iguais, conforme ilustra a figura 3.11.

Figura 3.11 4- Análise do modelo matemático

Igualando as duas funções temos:

$$F(p) = G(p)$$

$$500 + 0{,}00292p = 20 + 0{,}044p$$

$$480 = 0{,}04108p$$

$$P = \frac{480}{0{,}04108} = 11684{,}51$$

Com isso concluímos que acima de 11685 pessoas a utilização do secador de mão é mais vantajosa.

Fonte: registro dos alunos

Os alunos concluem que era mais vantajoso financeiramente o uso de secador de mão, caso mais de 11685 pessoas utilizassem os banheiros, mesmo não explicitando como chegaram a essa conclusão em seus registros.

De posse dos modelos matemáticos construídos os alunos fizeram uma previsão da despesa anual do shopping com cada um dos equipamentos. Essa previsão, conforme ilustra a figura 3.12, foi baseada nas informações fornecidas pelo shopping e nos modelos encontrados.

Figura 3.12 -Interpretação dos resultados

Após uma pesquisa de dados constatamos que o shopping analisado recebe um público visitante diário de aproximadamente dezesseis mil pessoas, logo segundo os dados do modelo, para este shopping, a utilização do secador de mão seria muito mais vantajosa.

Considerando que o shopping recebe um público anual de 6 milhões temos:

R$18020,00 para o gasto com a utilização secador de mão anualmente.

R$264020,00 para o gasto com papel toalha anualmente.

Fonte: registro dos alunos

Ao comparar as informações contidas na figura 3.13, os alunos concluíram que é vantajoso financeiramente para o shopping o uso dos secadores de mão. Ao informar os resultados ao shopping em questão, *"a administração do shopping alegou que a utilização do secador de mão não erradica a necessidade do papel toalha, uma vez que ele agrada os clientes muito mais do que o secador eletrônico por secar melhor, e também é utilizado para outros meios, além de secar a mão, como: com maquiagem, crianças, higiene e outros fatores"* (registro dos alunos).

AS AÇÕES DOS ALUNOS SOB UMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

Nossas deliberações sobre a construção de conhecimento nas atividades de modelagem matemática que apresentamos, levam em consideração, na perspectiva semiótica, a construção de diagramas, a experimentação com este tipo de signos, bem como a reflexão e observação dos diagramas no decorrer do desenvolvimento das atividades. Ou seja, o raciocínio diagramático dos alunos é neste caso o sinalizador de que algo foi construído relativamente ao abordar uma situação por meio da matemática, caracterizando-se, portanto, um fazer modelagem matemática.

Na atividade *papel x secador de mão*, os alunos, a partir da situação inicial, identificaram um problema a ser estudado e o expressaram por meio de signos diagramáticos, guardando esse problema uma relação de similaridade com a situação e possibilita que o aluno perceba relações existentes entre a situação com conceitos matemáticos. A elaboração do problema é realizada dentro de um sistema de regras de sintaxe e concordância. Tal construção de signos diagramáticos, não é observada na atividade da *Batata Frita*. Neste sentido, parece se observar que atividades do terceiro momento de familiarização tem um incremento em relação àquelas do segundo momento, uma vez que a interpretação da situação e a definição do problema são assessoradas por signos que podem ser interpretados como diagramas.

Um ação que é percebida em ambas as atividades é a busca por estabelecer relações entre o problema a ser investigado e estratégias matemáticas, na expectativa de organizar a situação inicial em termos matemáticos, isto é, matematizar a situação (ALMEIDA, 2018). Diante do problema de descobrir quantos palitos de batata podem ser obtidos em um pacote de 1 kg os alunos explicitam a relação entre o que se quer investigar e o como podemos investigar ao assumir que *somente bastões perfeitos poderão ser utilizados para completar 1 kg"* (registro dos alunos), ou ainda, que *"a batata é um elipsoide"* (registro dos alunos). No caso da primeira hipótese, a situação é relacionada ao tamanho dos palitos, que são os palitos que tenham exatamente a medida estipulada na situação. No segundo caso, os alunos relacionam a batata a um sólido geométrico, um elipsoide. Na segunda atividade ao assumirem que 16000 pessoas vão ao banheiro do shopping, os alunos relacionam o problema de verificar qual dos tipos de instrumentos, o secador de mão ou o papel, é mais vantajosos financeiramente, com um objeto matemático, nesse caso a ideia de máximo, pois eles não admitem que nem menos nem mais pessoas vão ao banheiro. Nesse sentido, as hipóteses elaboradas representam relações de informações que encontramos na situação inicial com conceitos matemática. Além de representar essas relações as hipóteses são elaboradas dentro de um sistema de regras, nesse caso regras de sintaxe e regras matemáticas, configurando-se assim como signos diagramáticos (OTTE, 2006).

A partir dessa experiência dos alunos podemos inferir que eles constroem relações entre a situação inicial e a hipóteses que formulam que são regidas por regras, isto é, eles constroem signos diagramáticos. Esses diagramas, as hipóteses, explicitam "a necessidade de representar relações" (BAKKER, HOFFMANN, 2005, p. 340) que eles consideram importantes na atividade de modelagem matemática. Nesse sentido podemos inferir que a elaboração de hipóteses requer a construção de diagramas, o que caracteriza o primeira etapa do raciocínio diagramático, a construção de um ou mais diagramas, ou ainda, conforme Bakker e Hoffmann (2005), a diagramatização.

Essa diagramatização também acontece no momento que os alunos definem as variáveis do problema. Tal fato, fica explícito no desenvolvimento da atividade do terceiro momento, em que eles definem a variável p para quantidade de pessoas e as variáveis $F(p)$ e $G(p)$, que são respectivamente, o custo total da utilização do secador de mão em função da quantidade de pessoas que utilizam o secador de mão e o custo da utilização do papel em função da quantidade de pessoas que utilizam o papel. As variáveis são signos diagramáticos que mostram uma relação de similaridade com a situação inicial, visto que, representam ideias da situação inicial, além disso, a definição é regida por um sistema de regras da álgebra. As variáveis possuem "uma estrutura que consiste em um arranjo espacial específico e relações espaciais entre suas partes e elementos" (DÖRFLER, 2005, p. 41).

Já na atividade do segundo momento, apesar de utilizarem a variável x, não há uma preocupação em explicitar, no papel ou em suas falas, qual relação dessa variável com a situação inicial. Esse episódio nos fornece indícios de que os alunos utilizam o conceito matemático de uma variável, porém não sentem a necessidade de explicitar a relação entre a situação inicial e o objeto matemático. Tal fato corrobora com a ideia de Peirce que todo o pensamento é ancorado em signos que podem ser imaginados, não sendo assim efetivamente percebidos.

As relações e convenções constituídas por meio da elaboração de hipóteses e definição de variáveis na fase da matematização, conduzem as ações dos alunos na elaboração dos modelos matemáticos que ajudarão a responder aos problemas. Na primeira atividade, diante da expectativa de encontrar uma resposta ao problema os alunos, em um primeiro momento, constroem uma representação frontal da batata, sendo essa construída por linhas e regras envolvendo figuras inscritas em polígonos, visto que inscrevem um retângulo na elipse. A vista frontal da batata exibe uma semelhança com o objeto em estudo e é governada por um sistema de regras geométricas, o que a caracteriza como um diagrama. Nessa atividade os alunos, ao relacionarem a batata a um elipsoide, tem como ação de encontrar uma função que representaria a vista frontal da batata e que quando revolucionada em torno do eixo x, geraria um sólido que se assemelhasse a um elipsoide.

No caso dessa atividade, os alunos criam hipóteses diferentes que ao serem experimentadas conduzem a modelos diferentes, isto é, as relações e convenções que os alunos utilizam para elaborar as hipóteses definem restrições que determinam, "às vezes dentro de uma gama de possibilidades, o resultado de experimentos" (HOFFMANN, 2004, p.298), nesse caso os modelos matemáticos e consequentemente a análise da situação mediada pelo modelo.

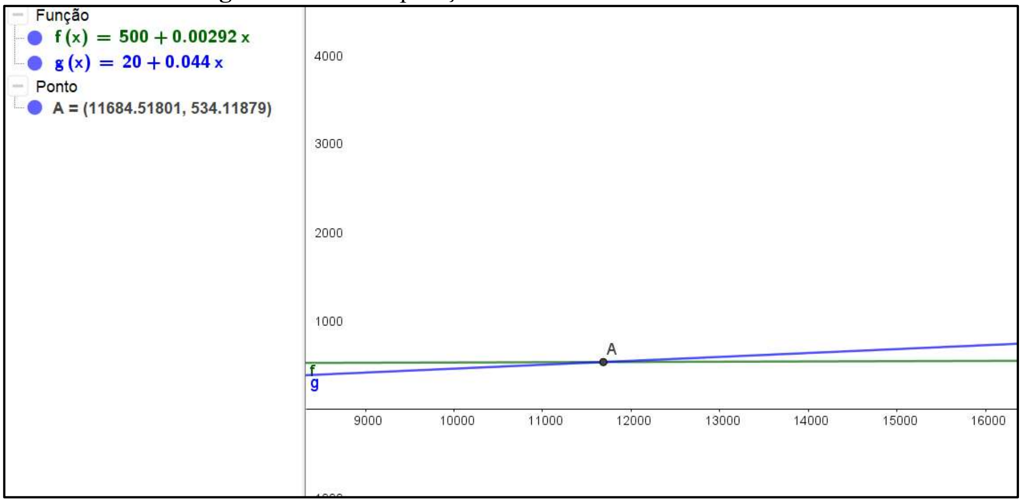
Na segunda atividade os alunos constroem funções que os ajudam a responder ao problema, funções essas que relacionam as informações da situação inicial com o objeto matemático. Além disso, essas funções representam as relações que são relevantes para resolver ao problema. Essas relações, são decorrentes experimentação com os diagramas construídos na matematização.

As experiências dos alunos, na construção dos modelos matemáticos, nós da indicativos que se faz necessário a experimentação das relações e convenções na fase da matematização. Nesse sentido, podemos inferir que na fase da resolução os alunos experimentam dentro de um sistema representacional orientado por regras matemáticas os diagramas, hipóteses e variáveis, criados anteriormente. A manipulação desses diagramas conduz a construção de novos diagramas que continuam a representar uma semelhança com os diagramas anteriormente criados. Assim, as ações dos alunos nesse fase da atividade de modelagem matemática, nos dá indícios que os alunos adentram na segunda etapa do raciocínio diagramático, visto que, segundo Bakker e Hoffmann (2005), essa etapa consiste na experimentação com os diagramas construídos na etapa anterior. Bakker e Hoffmann (2005) destacam que essa etapa é importante porque explicita a racionalidade iminente dos diagramas que "define primeiro os limites de possíveis transformações e, em segundo lugar, restringe um conjunto de implicações necessárias das operações nos diagramas" (HOFFMANN, 204, p. 298).

A experimentação com os diagramas, conduz os alunos a observar os modelos matemáticos e interpretá-los de acordo com a situação inicial. No caso do primeira atividade, os alunos constroem dois modelos, sendo que no primeiro é explicito a preocupação em interpretar o modelo, ação que não fica explícita no segundo modelo. Os alunos não sentem necessidade de refletir sobre a resposta encontrada e confrontá-la com a situação inicial, o que nos dá indícios de que eles ainda não estão familiarizados com todas as fases que constituem uma atividade de modelagem matemática.

Na segunda atividade, os alunos encontram duas funções $F(p)$ e $G(p)$, representadas na figura 3.10, e as compararam encontrando o valor de p para o qual as funções são iguais. Porém o problema elaborado requer que os alunos façam uma intepretação para além do que realizaram. A partir do valor encontrado em que as duas funções são iguais os alunos concluem que era mais vantajoso o uso de secador de mão para mais de 11685 pessoas, porém eles não explicitam como chegaram a essa conclusão. Os alunos não apresentam no relatório indícios de como a construção da resposta foi mediada pela construção, experimentação e reflexão por meio de signos. Neste caso, eles poderiam ter feito (é provável que o tenham feito em algum instante) um gráfico, como por exemplo na figura 3.13, para ilustrar como a resposta ao problema foi obtida.

Figura 3.135-Comparação dos modelos construídos



Fonte: autoras

No que se refere ao raciocínio diagramático requerido nas duas atividades, podemos perceber que as características de cada um influenciam nas ações que os alunos empregam. Na atividade de segundo momento não é necessário "formular uma situação-problema" o que é, conforme aponta (POLLAK, 2015, p. 267) uma ação com demanda cognitiva certamente não inferior àquela de resolvê-lo. Assim, em atividades de segundo momento os alunos não constroem diagramas que explicitam as relações entre a situação inicial e possibilidades de estudo, tal construção é realizada pela professora que propôs a situação em estudo.

Neste sentido, há indicação de que nas duas atividades relativas a momentos de familiarização distintos, o raciocínio diagramático também se configura de formas distintas e o que o conhecimento que os alunos constroem relativamente ao fazer modelagem matemática também tem configurações distintas nestes dois momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática.

PARA CONCLUIR

Levando em consideração que partimos de uma discussão já percebida na literatura da área relativa ao *Como os alunos constroem conhecimento quando desenvolvem atividades de modelagem matemática?* (BLUM, 2015; ÄRLEBÄCK, DOERR, 2018; FERRUZI, ALMEIDA, 2009) as análises empreendidas no presente artigo nos permitem considerar que a construção de conhecimento à luz do raciocínio diagramático pode ser inferida em atividades de modelagem matemática. Particularmente, nosso esforço analítico considerou atividades desenvolvidas em momentos distintos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem.

De acordo com Bakker e Hoffmann (2005) a construção do conhecimento à luz do raciocínio diagramático pode ser interpretada como um processo de três etapas: a construção de signos diagramáticos, a experimentação com esses signos e a observação dos resultados. Diante desse pressuposto e da análise apresentada percebemos que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pode ser visto como um raciocínio diagramático progressivo sobre os elementos que constituem o fazer modelagem matemática.

Nossas análises sugerem em um primeiro momento é necessário que o aluno realize a diagramatização, isto é, "crie seus próprios diagramas que façam sentido para eles, mas também aprendam poderosos tipos convencionais de diagramas" (BAKKER, HOFFMANN, 2005, p. 352). Devido ao seu caráter investigativo, além do fato de não se ter procedimentos pré-determinados as atividades de modelagem possibilitam que o alunos expressem relações que eles julgam importantes desde o início da atividade, na identificação da situação inicial e determinação do problema. Nesse momento da atividade os alunos constroem diagramas que os ajudem a entender a situação.

A diagramatização em uma atividade de modelagem matemática não ocorre apenas na identificação da situação inicial e na determinação do problema. A elaboração de hipóteses e definição de variáveis expressam relações entre a situação inicial e conceitos matemáticos. Além de relações, as hipóteses e variáveis expressam convenções que são utilizadas ao longo da atividade e determinam o modelo matemático a ser criado. Nesse sentido, as hipóteses e variáveis são diagramas construídos que dependem da intepretação da situação inicial feita pelos alunos e envolve múltiplas ações.

Em um segundo momento, nossa análise indica, a necessidade de os alunos realizarem experimentos com as hipóteses, variáveis e com o problema elaborado, ou seja, com os signos diagramáticos construídos. Esses experimentos são explicitados pelo fato de que atividades de modelagem matemática requerem que ocorra um processo investigativo da situação (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012). Nesse sentido o processo investigativo é conduzido pelas relações e convenções que os alunos explicitaram em momentos anteriores e resulta em um modelo matemático, isto é, "um sistema conceitual descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática" (ALMEIDA, VERTUAN, 2015, p. 2).

Por fim nossa análise indica que a observação do modelo matemático se faz necessário para encontrar uma possível solução ao problema identificado. Assim, a terceira etapa do raciocínio diagramático em uma atividade de modelagem matemática consiste em refletir sobre o experimento, nesse caso o modelo matemático, para entender o que esse pode oferecer de novo em relação as etapas anteriores. Nesse sentido a reflexão do modelo matemático com base na situação inicial, pode conduzir a uma resposta ao problema inicial, resposta essa que é um novo signo diagramático.

Sob um ponto de vista semiótico a constituição do fazer modelagem está diretamente relacionada a constituição do raciocínio diagramático, visto que o raciocínio diagramático cria oportunidades para a construção do conhecimento. No caso dessa pesquisa as etapas do raciocínio diagramático permitiu que os alunos realizem e refletissem sobre ações que são necessárias no que se refere ao fazer modelagem matemática.

A familiarização gradativa dos alunos com as atividades, sugerida em Almeida e Brito (2005), discutida em Silva, Almeida, Gerolomo (2011) e também sugerida em Almeida (2018) vai configurando situações em que a construção de conhecimento relativo ao fazer modelagem matemática vai sendo incrementada gradativamente pelas etapas do raciocínio diagramático dos alunos modeladores

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM,** 2018.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 387-414, dez. 2010.

ALMEIDA, L. M. W; SILVA, K. A. P. The learning of double integral concept using a textbook. In: **Proceedings of the Third International Conference on Mathematics Textbook Research and Development**, p. 1-10. Paderborn, Germany, 2019.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; RAMOS, D. C.. Sobre ensinar e aprender 'o fazer' modelagem matemática. In **Anais** VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Foz do Iguaçu, 2018.

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M.W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. In VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis, 2015. **Anais** do VI

Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-13, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E.. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.. **Modelagem Matemática em Foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. Ciência e Educação, São Paulo, v. 11, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. **ZDM,** v. 50, n. 1-2, p. 187-200, 2018.

BAKKER, A.; HOFFMANN, M. H.G. Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, n. 3, p. 333-358, 2005.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. Ed. São Paulo: Contexto Editora, 2011.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modeling problems? In HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W. et al. (Eds.) **Mathematical Modeling (ICTMA12)**: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing, 2007.

BLUM, Werner. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education.** Springer, p. 73-96, 2015.

CARREIRA, S. et al.. Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. In KAISER, G.. **Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling**, (ICTMA 14) (p. 199 – 210). New York: Springer, 2011.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions**. Journal of mathematical modelling and application**. v.1, n. 1, p. 89-98, 2009

DÖRFLER, W. Diagrammatic Thinking. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, 2005.

DÖRFLER, W. Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. In: **Developments in mathematics education in German-speaking countries**. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics. p. 39-49, 2003.

FERRUZZI, E. C. ; ALMEIDA, L. M. W. . Modelagem matemática: contexto para a construção do conhecimento matemático. **In:** Anais do IV SIPEM - Seminário Internacional de Educação Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009. v. 1.

GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling – Overview. In KAISER, G., BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Eds.), **Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling**, (ICTMA 14) (pp 301 – 304). New York: Springer, 2011.

HOFFMANN, M.H.G. Signs as Means for Discoveries. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, Boston, 2005.

HOFFMANN, M. H. G. How to get it. Diagrammatic reasoning as a tool of knowledge development and its pragmatic dimension. **Foundations of Science**, v. 9, n. 3, p. 285-305, 2004.

KANDUNZ, G. Diagrams as Means for Learning. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

Niss, M. et al.. Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, &M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education**. New York, NY: Springer, p. 3-32, 2007.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1-2, p. 11-38, 2006.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 2 reimpressão da 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2015.

RAMOS, D. C.. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.** 2016. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTAELLA, M. L.. **A teoria geral dos signos**: semiose e autogeração. Editora Ática, 1995.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.. The Exponential Function Meaning on Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, 2018.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. “Aprendendo” a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. **Educação Matemática em Revista,** p. 28-36, 2011.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, v. 26, n. 43, p. 1021-1047, 2012.

SOUZA, E. G.; ALMEIDA, L. M. W.; KLÜBER, T. E. Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In: **Mathematics Education in Brazil**. Springer, Cham, 2018. p. 211-228.

STILLMAN, G. A. State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education**. New York: Springer, p. 1-20, 2019.

TYLEN, K. et al. Diagrammatic reasoning: Abstraction, interaction, and insight. **Pragmatics & Cognition**, p. 264–283, 2014.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 175p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

CAPÍTULO 4- ARTIGO 3

ENSINAR E APRENDER A MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA INTERPRETAÇÃO SEMIÓTICA

RESUMO

Nesse artigo temos como intenção buscar indícios da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática. Nossas deliberações, por um lado, se fundamentam em aspectos teóricos da modelagem matemática e da semiótica peirceana, mais especificamente no que se refere aos signos interpretantes intencionais, effectuais e comunicacionais. Por outro lado, são ancoradas na análise interpretativa de três episódios relativos a aulas em uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. A análise dos signos interpretantes construídos, durante os episódios relatados, nos permite indicar que para o fazer modelagem matemática é relevante, entre outros aspectos: desenvolver com os estudantes atividades e indicar alguns padrões de encaminhamento da atividade de modelagem; associar, na sala de aula, atividades e discussões que viabilizam aos alunos interações com grupos e apresentação de suas ideias. A configuração do uso e da produção de signos que viabilizam a comunicação indica que somente a partir da convergência entre, professor e o fazer modelagem matemática, e entre, signos interpretantes e alunos, que ocorrem indícios de aprendizagem sobre o fazer modelagem matemática como resultados do processo comunicativo.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Semiótica Peirceana. Interpretantes.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o foco de várias pesquisas tem sido o ensino e a aprendizagem da modelagem matemática (BLUM, 2015; FERRI, 2018; BLUM E FERRI, 2009). Resultados dessas pesquisas, por um lado indicam que a modelagem matemática já consta nas estruturas curriculares de diferentes cursos e níveis de escolaridade mundo a fora (FERRI, 2018). Por outro lado, Mass e Engeln (2018) afirmam que as pesquisas desenvolvidas em modelagem estão muito além das práticas do dia-a-dia dos professores em muitos países e consideram que os desafios relativos à implementação de práticas inovadoras, como é o caso da modelagem matemática, devem ser discutidos nos cursos de formação de professores.

Perante esses desafios, Blum (20015), Ferri (2018), entre outros, têm abordado de forma explícita a questão: a modelagem matemática pode ser ensinada e aprendida? As discussões relativas a essa questão estão em constante movimento. Entretanto, se centram em torno de uma resposta afirmativa para a questão.

No presente artigo, inseridos no movimento inerente ao enfretamento da necessidade de associar uma discussão teórica com as práticas de modelagem matemática na sala de aula e também em concordância com a resposta afirmativa para a questão apresentada, nos propomos a deliberar sobre a questão da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática.

Nossas argumentações se orientam por pressupostos teóricos relativos à semiótica peirceana. Charles Sanders Peirce (1839-1914) foi um filósofo e matemático americano que, segundo Santaella (2008), se dedicou à configuração de uma doutrina capaz de compreender as estruturas do conhecimento e fez-nos por meio de suas deliberações sobre os signos, caracterizando a semiótica como ciência dos signos.

O pensamento de Peirce tem merecido atenção nas últimas décadas no âmbito da Educação Matemática (PRESMEG, 2006, 2016; HOFFMANN, 2007; SÁENZ-LUDLOW, KADUNZ, 2016; KADUNZ, 2016; ALMEIDA E SILVA, 2016; SILVA E ALMEIDA, 2015). Um aspecto relevante neste contexto refere-se à argumentação, de Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016), relativamente ao uso do signo e sua intermediação no processo de comunicação. Segundo esses autores, a semiótica nos proporciona elucidar como conhecimento e experiência dos alunos se correlacionam, se co-constroem. Também a teoria de Peirce nos oferece elementos para evidenciar como a construção de conhecimento dos estudantes está relacionada aos processos comunicacionais bem-sucedidos e mediados por signos.

São estes aspectos o ponto de interesse do presente artigo: a mediação por signos na comunicação entre professor e alunos em uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Com esta finalidade levamos em consideração alguns episódios que ocorreram no decorrer de aulas dessa disciplina ministrada por uma das autoras do presente artigo para alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Nosso olhar é sobre signos interpretantes usados e produzidos no decorrer destes episódios de sala aula.

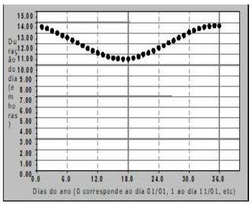
A MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Para subsidiar nossas deliberações relativas à mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática no curso de formação inicial de professores em Matemática – a Licenciatura em Matemática – apresentamos três episódios relativos a três instantes no decorrer das aulas da disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Os episódios estão descritos nas figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.

Figura 4.1 -Episódio 1

O **Episódio 1** refere-se ao primeiro contato dos alunos dessa turma com a modelagem matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. A opção da professora foi de iniciar a disciplina com a atividade de modelagem que consiste na análise da definição das datas de início e término do horário de verão. Neste caso a tabela da duração dos dias durante o ano de 2012 na cidade de Curitiba foi o conjunto de dados que desencadeou a definição de um problema: Como são determinados os dias de início e de término do horário de verão no Brasil? A partir de uma tabela que informa a duração dos 365 dias do ano de 2012 na cidade de Curitiba, os alunos iniciaram o processo de matematização e construíram a tabela e a e a representação no plano cartesiano conforme mostra a figura a seguir.

DIA (n)	t	NASCER	OCASO	DURAÇÃO DO DIA (horas/minutos)	DURAÇÃO DO DIA D(t) (horas)
01	0	05:30	19:11	13:41	13,68
11	1	05:37	19:13	13:36	13,60
21	2	05:45	19:12	13:27	13,45
32	3	05:54	19:08	13:14	13,23
42	4	06:01	19:03	13:02	13,03
52	5	06:07	18:55	12:48	12,80
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
355	35	05:23	19:07	13:44	13,73



A partir da hipótese de que as informações que constam da figura indicam um fenômeno periódico, os alunos chegaram ao modelo matemático para indicar a duração do dia na cidade de Curitiba: $D(t) = 12,14 = 12,14 + 1,59\cos\left(\frac{p}{18}(t+1)\right)$. A partir desse modelo os alunos fizeram outras matematizações e chegaram à resposta do problema, concluindo que 21/03 e 21/09 são, respectivamente, os dias ideais de término e início do horário de verão na cidade de Curitiba. A obtenção dessas datas gerou uma discussão interessante que aliou aspectos matemáticos e não matemáticos do fenômeno que poderiam subsidiar

Fonte: autoras

Figura 4.2 -Episódio 2- Parte 1

O Episódio 2 refere-se ao início do estudo 'sobre' modelagem matemática em que, tanto aspectos teóricos como aspectos relativos à implementação da modelagem nas aulas de matemática viriam à tona. As atividades iniciaram com o estudo do capítulo 1 do livro *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática* do autor Rodney Carlos Bassanezi. A partir de uma leitura preliminar do capítulo realizada pelos alunos, foram formados os grupos para uma discussão do texto no interior de cada grupo. Essa discussão foi orientada por questões entregues pela professora e que contemplam elementos considerados essenciais pela professora no que se refere à caracterização, uso e implementação da modelagem matemática na sala de aula. Após a estruturação de respostas para as questões por cada um dos grupos, ocorreu a apresentação e discussão das respostas pelos grupos com todos os alunos da disciplina. Durante este episódio as atividades foram gravadas em áudio e vídeo e os alunos entregaram slides usados na apresentação de suas respostas bem como um relatório completo contendo as respostas das questões e que foi elaborado após as aulas do episódio. Partes das respostas eram apresentadas no quadro pelos alunos, especialmente aquelas relativas aos modelos matemáticos apresentados no texto ou solicitados pelas respostas das questões. As questões discutidas são apresentadas na figura a seguir. O nosso foco neste artigo são as questões que, em alguma medida, referem-se ao como fazer modelagem matemática.

Fonte: autoras

Figura 4.3 6-Episódio 2- Parte 2

ESTUDO DO CAPÍTULO 1 DO LIVRO ENSINO-APRENDIZAGEM COM MODELAGEM MATEMÁTICA

TÍTULO DO CAPÍTULO: MODELAGEM MATEMÁTICA – UM MÉTODO CIENTÍFICO DE PESQUISA OU UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM? Autor: Rodney Carlos Bassanezi

1º Parte: Questões gerais (todos os grupos irão apresentar)

1-Qual parece ser a intenção do autor com este capítulo?

2-A partir da leitura do texto, caracterize Matemática.

3-A partir da leitura do texto, caracterize Modelagem Matemática.

4-Qual o papel da matemática nas outras áreas do conhecimento?

5-Apresentar relações que, a partir da leitura do capítulo, podem ser estabelecidas entre: Modelagem Matemática e Como ensinar Matemática de maneira que se torne um assunto agradável para a maioria, incluindo alunos e professores.

6-Fale sobre o histórico da "tratória" e resolva a equação diferencial (modelo matemático) cuja solução representa esta curva.

2º Parte: Questões específicas (cada grupo vai apresentar uma questão).

1-O que é "modelo matemático"? Como são classificados os modelos matemáticos?

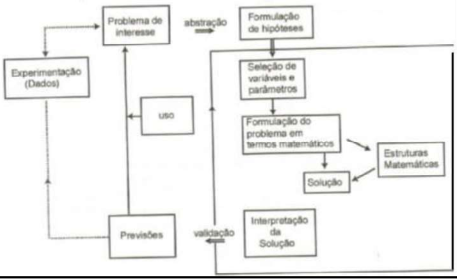
2-Discuta, como base no capítulo estudado, a eficiência da modelagem e do modelo matemático.

3-Dê um exemplo de modelo matemático diferente daqueles do texto e classifique-o de conforme o tipo de matemática utilizada.

4-Quais são os argumentos favoráveis à inclusão da modelagem nas atividades escolares? Explique.

5-Que tipos de obstáculos à inclusão da modelagem matemática nas atividades escolares são discutidos pelo autor?

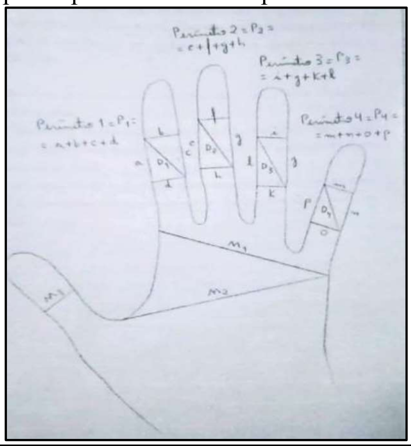
6-O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula requer a inter-relação entre matemática, a área do conhecimento em que se situa o problema investigado e a educação matemática. A figura ao lado é apresentada no livro do autor cujo capítulo está sendo estudado. Identifique, nessa figura, etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.



Fonte: autoras

Figura 4.4 7-Episódio 3- Parte 1

O Episódio 3 refere-se ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática que, cronologicamente ocorreu após os dois episódios anteriores. A temática foi sugerida aos alunos pela professora e refere-se ao desenvolvimento de sistema de reconhecimento (um algoritmo) usando a biometria da mão. A atividade foi desenvolvida pelos alunos em grupo. Cada grupo deveria resolver seu algoritmo, um modelo matemático, de modo que os alunos do grupo fossem usuários do sistema, ou seja aceitos sistema, e outros alunos da turma deveriam ser impossibilitados de ter acesso mediante esse sistema, sendo considerados intrusos. A primeira etapa do desenvolvimento da atividade foi a obtenção dos dados, ou seja, as medidas da mão. A partir de uma apresentação da professora mostrando possíveis medidas que os alunos poderiam usar, o desafio foi para cada grupo construir o banco de dados do grupo, a partir da seleção de quais medidas usar e a sua obtenção para cada um dos integrantes do grupo. Cada grupo escolheu as medidas a serem utilizadas em seu banco de dados e as registraram em uma folha ofício, sendo que o banco de dados deveria ser composto apenas pelas medidas dos integrantes do grupo. Referimos-nos aqui a um dos grupos que escolheu as medidas da mão conforme indica a figura. A partir das 11 medidas, as discussões, se direcionaram para a criação do algoritmo. Para combinar as 11 medidas na formulação do algoritmo, os alunos fizeram várias experimentações com os dados, tendo em vista principalmente o funcionamento do algoritmo para a identificação de pertencentes ao grupo e intrusos. O modelo matemático (algoritmo) foi definido de modo que cada participante é identifica por um valor dador por:



$$V_i = \sqrt[3]{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + M_1 + M_2 + M_3}$$

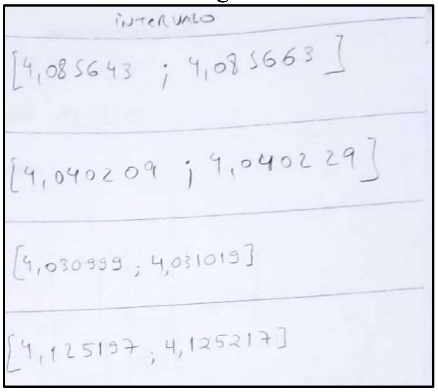
cujas medidas estão indicadas na figura.

As medidas de cada integrante do grupo foram usadas no algoritmo para indicar possibilidades frente ao desafio de determinar como os intrusos seriam identificados pelo algoritmo. Obtendo os valor V_i com $1 \leq i \leq 4$, as discussões do grupo, intermediadas pela professora, levaram os alunos a ponderar pela necessidade de definir uma margem de erro para aceitar um indivíduo como integrante do grupo ou como intruso. aceitabilidade

Fonte: autoras

Figura 4.5 -Episódio 3- Parte 2

Após diversas simulações com as medidas do banco de dados e com as medidas de possíveis intrusos, o grupo deliberou que deveriam definir intervalos de aceitabilidade considerando 10^{-5} a mais e 10^{-5} a menos. A partir disso construíram um intervalo para os dados de cada um dos 04 integrantes do grupo conforme indica a figura.



Para avaliar a eficiência do algoritmo os alunos do grupo fizeram simulações com medidas das mãos três alunos não participantes do grupo e os mesmos foram recusados pelo sistema, ou seja ,o valor V_j obtido pelo modelo para estes três alunos não se incluíram em nenhum dos 04 intervalos definidos no banco de dados sistema.

A conclusão dos alunos apresentada para a professora e para os demais alunos da turma é de que a atividade lhes proporcionou conhecer como os sistemas biométricos funcionam e como ferramentas matemáticas podem ser usadas para combinar medidas. Ponderaram que um aspecto fundamental é caracterizar bem a margem de erro aceitável para aumentar a segurança do sistema.

Fonte: autoras

A COMUNICAÇÃO SOB A PERSPECTIVA DA SEMIÓTICA PEIRCEANA

A noção de signo vem ocupando mentes de grandes pensadores como Platão, Aristóteles, Locke, Kant, Peirce, Saussure que ao longo de séculos vêm tratando da conceitualização, da natureza e da função do signo no pensamento e na interação das pessoas (Nöth, 1990). Conforme consideram Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016), a história e a evolução da semiótica parece andar lado a lado com a história e a evolução da comunicação.

Comunicar é uma ação para entrar em contato com algo ou alguém de maneira escrita, falada ou gesticulada. Essa ação necessita de um sistema de códigos constituído por signos que sejam compreensíveis, tanto para o emissor quanto para o receptor da mensagem comunicada (SILVA, 2013).

Conforme sugere Pietarinen (2003, p. 82), Peirce entende a comunicação como "um diálogo entre interlocutores que trazem à tona signos". Neste sentido, a comunicação cria um vasto sistema semiótico que requer a realização de interpretações para possibilitar a construção de conhecimentos de modo que o signo é resultado da interpretação que uma mente – um intérprete – dá a um objeto.

Bortolotti (2003) sugere que poderíamos perguntar: O que Peirce entende por signo? Em sintonia com grande parte dos interpretadores do pensamento de Peirce, este autor também considera que Peirce apresentou diferentes definições de signo no decorrer de sua trajetória filosófica.

Em Peirce (1972), o filósofo caracteriza assim o signo:

> Um signo, ou *representâmen*, é algo que, sob certo aspecto ou algum modo, representa[9] alguma coisa para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo melhor desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o *fundamento* do *representâmen* (PEIRCE, 1972, p. 94, grifos do autor).

A noção de signo repousa, portanto, numa relação triádica, inter-relacionando *representâmen*, objeto e interpretante. O *representâmen*, chamado por alguns de 'pura qualidade' remete as características do signo, independentemente de sua função representativa de modo que deve ser diferente do pensamento que o sucede. O objeto refere-se a coisa exterior. Por fim, o interpretante refere-se à função representativa do signo, à capacidade do signo endereçar-se a outro signo.

É nesta relação triádica que Peirce visa dizer que "O signo é algo que serve para produzir conhecimento sobre alguma outra coisa, para a qual o signo está (*stands for*) ou representa. Essa outra coisa é chamada de objeto do signo" (PEIRCE, 1998, p. 13). Esse conhecimento é produzido por uma mente – um intérprete- que produz outro signo – o interpretante.

Peirce dedicou grande parte de seus investimentos na estruturação e classificação de signos interpretantes e apresentando diferentes denominações para estes signos decorrentes de processos interpretativos dos intérpretes. Como considera Santaella (2012), os signos interpretantes na teoria peirceana são meios utilizados para representar algo para alguém, são meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem.

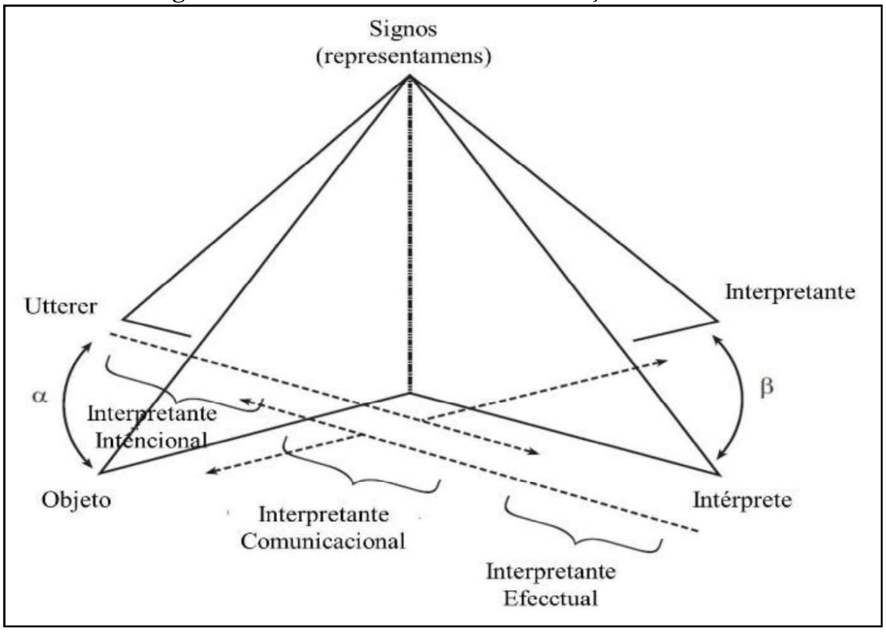
No processo de comunicação o interpretante constitui um ato comunicativo, produzido por meio de uma relação estabelecida entre um emissor (utterer) para com um receptor (intérprete) e se efetiva quando esses dois parceiros "atingem uma compreensão mútua do signo" (SANTAELLA, 2008, p. 68). Considerando justamente esta relação entre emissor e receptor, Peirce (1998) considera que:

> Há o Interpretante *Intencional*, que é uma determinação da mente do utterer; o Interpretante *Effectual* que é uma determinação da mente do intérprete; e o Interpretante *Comunicacional*, ou seja, o *Cominterpretant*, que é uma determinação daquela mente na qual as mentes do utterer e do intérprete têm de se fundir a fim de que qualquer comunicação possa ocorrer. Esta mente pode ser chamada *commens*. Ela consiste em tudo o que é e deve ser bem compreendido entre utterer e intérprete a fim de que o signo em questão cumpra sua função (PEIRCE, 1998, p. 478).

[9] Para Peirce (2005, p. 61), representar consiste em "estar em lugar de, isto é, estar numa tal relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro".

Em atos de comunicação pode se observar "duas escalas dinâmicas dentro da divisão triádica de signos, um representando o continuum objeto-interpretante e o outro representando o continuum emissor-intérprete" (PIETARINEN, 2003, p. 86). As duas escalas dinâmicas são esquematizadas na Figura 4. As setas representadas em linhas tracejadas representam o aumento ou a diminuição de estados de informação dos utterers e dos intérpretes; as áreas que se sobrepõem, representam fundamentos em comum e é nestas sobreposições que os interpretantes comunicacionais são determinados; α indica a convergência entre os objetos e seus utterers e β a convergência entre os interpretantes e seus intérpretes.

Figura 4.6-Sistema triádico de comunicação em Peirce



Fonte: Pietarinen (2003, p. 87).

Segundo Presmeg (2008), em sala de aula tais convergências podem ser elucidadas na comunicação entre alunos e professor no desenvolvimento das atividades. Os *commens* são os resultados da comunicação e essencialmente, são os indícios do que se tornou compreendido em cada atividade.

A ATIVIDADE SEMIÓTICA NOS EPISÓDIOS

Com a finalidade de buscar indícios da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática, realizamos uma análise interpretativa dos episódios descritos, considerando os registros escritos e os registros de áudio e vídeo que foram coletados no decorrer das aulas da disciplina no curso de Licenciatura em Matemática a que nos referimos. Vinte alunos cursaram a disciplina em que os episódios foram desenvolvidos. Os alunos são indicados por A_1, A_2, ... A_{20}. Quando nos referimos à professora na transcrição de diálogos usamos a letra P_1.

Nossas argumentações, sobretudo, devem pautar-se na perspectiva de que, em se tratando de episódios de sala de aula, participam professor e alunos. O nosso esforço analítico sobre os episódios se pauta nos signos interpretantes produzidos no processo comunicacional que se estabelece envolvendo alunos e professora no decorrer dos episódios na sala de aula.

O episódio 1, o desenvolvimento da atividade relativa ao horário de verão descrito na figura 4.1, representa o primeiro contato dos alunos com a modelagem matemática na disciplina. Assim, a obtenção dos dados necessários para a abordagem da situação bem como o encaminhamento de como esta situação poderia ser estudada por meio da matemática foram orientados pela professora.

Neste sentido, interpretantes intencionais da mente da professora (do utterer) lançam luz para que os estudantes iniciem a sua familiarização com o fazer modelagem matemática. Os estudantes – intérpretes - tiveram suas experiências com o fazer modelagem matemática mediadas pelas orientações e colaborações da professora no desenvolvimento da atividade.

As informações neste caso são mais centradas na professora do que nos alunos. Os procedimentos dos alunos são relativos à construção do modelo matemático, obtendo, a partir dos dados da situação, os parâmetros desse modelo, conforme indica a figura 4.1. Assim, os interpretantes *effectuais* são produtos de atenção a interpretantes intencionais. No *continuum* professor-alunos, a dinâmica ainda está apoiada nos interpretantes intencionais. A resposta do problema, que não é o próprio modelo nesta situação, mas o que dele se pode fazer, vai se delineando pela comunicação entre professora e alunos de modo que o modelo construído passa a ser usado pelos alunos para determinar os dias de início e término de horário de verão. Neste caso, os procedimentos matemáticos dos alunos são resultados de uma relação estabelecida pelos alunos entre os interpretantes intencionais e os interpretantes effectuais, caracterizando aí os interpretantes comunicacionais.

Durante as aulas relativas ao episódio 2, descrito nas figuras 4.2 e 4.3, as discussões tinham como foco as questões apresentadas na descrição deste episódio. Estão no escopo deste artigo os elementos dessas discussões que dizem respeito ao fazer modelagem matemática uma vez que é sobre isto que a professora espera que os alunos aprendam neste episódio. Neste caso, os interpretantes effectuais são as argumentações dos alunos apresentadas pelos grupos ou individualmente perante a turma. Todavia, a discussão também era subsidiada por intervenções e colaborações da professora (do utterer) visando estabelecer uma comunicação formativa em que características do objeto *fazer modelagem matemática* fossem evidenciadas. Estas evidências configuram-se na sala de aula como interpretantes comunicacionais – os *commens* – uma vez que são resultados de interações entre interpretantes intencionais e *effectuais*.

Os registros captados por áudio e vídeo dão indícios de elementos que os alunos consideram relevantes para o fazer modelagem matemática a partir do episódio vivenciado. Um desses elementos refere-se à relevância percebida pelos alunos para a abordagem de situações não matemáticas por meio da matemática, como indica, por exemplo, a fala de um aluno:

A_{11}: *Com a modelagem a gente consegue juntar, por exemplo, a geografia, igual a gente fez com o horário de verão, associar física e tantas outras num enunciado que a gente vai conseguir resolver com a modelagem né? Então, também eu acho que torna mais atrativo, porque daí entra na questão do estudar algo que é do cotidiano do aluno.*

As discussões dos alunos também revelam a expectativa de que em atividades de modelagem os alunos possam desenvolver sua autonomia para agir na abordagem das situações, conforme indica parte de um diálogo entre professora e alunos.

A_6: Não sei se alguém falou, mas quando você ensinar matemática com a modelagem você dá autonomia para o aluno.
P_1: Exatamente.
A_6: Esse é o principal foco do estudo, autonomia de pensamento para o aluno raciocinar por si só, para resolver os problemas do mundo, do cotidiano.
P_1: Isso. Muito interessante! Esse é um fato importante da modelagem, o aluno sentir essa capacidade de fazer as coisas com criatividade, com estilo próprio.

Neste ato de comunicação o estado de informação dos alunos – intérpretes – está estruturando um *continuum* da relação objeto-interpretante, e os interpretantes já passam a ser *commens* resultantes do diálogo entre professora e alunos.

A questão 2, relativa à deliberações sobre a eficiência da modelagem matemática, gerou uma discussão que levou em consideração diferentes possibilidades para ponderar sobre a eficiência.

A_7: A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre a representação do sistema [...] Além disso, a eficiência da modelagem eu acho que ela também se encaixa no campo educacional, no sentido que a gente já discutiu, porque a gente consegue trabalhar com situações do cotidiano do aluno, você consegue

despertar a autonomia do aluno a partir de trabalhos utilizando a modelagem. A eficiência da modelagem tá também nisso né? Você conseguir dar liberdade para o outro responder, dar liberdade para o outro se tornar pesquisador mesmo no âmbito escolar.
A_{10}: Quando você fez esse questionamento de eficiência, você pensou em que (dirigindo-se à professora)?
P_1: Justamente nas duas coisas que vocês falaram, de como avaliar se o modelo é eficiente e se a modelagem é eficiente.

O diálogo indica que um fazer modelagem matemática 'eficiente' leva em consideração características do modelo matemático produzido, mas também o conjunto de ações no decorrer dessa produção.

A questão que mais diretamente levaria os alunos a refletir sobre práticas do como fazer modelagem matemática foi a questão 6 (relativa às etapas da modelagem matemática identificadas no esquema da figura 4.3), em que os grupos identificaram diferentes etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem e fizeram-no considerando o esquema (ciclo) apresentado no texto em estudo (episódio 2).

O grupo de alunos que se dispôs a liderar a discussão dessa questão organizou slides e a partir de imagens passou a discutir o tema com os colegas.

A_3: A primeira etapa que ele apresenta é a experimentação, nesse momento é onde a gente olha para os dados que obtemos para a situação que a gente quer estudar [...] Aí a segunda etapa é a da abstração [...] Aí dentro a gente tem a seleção de variáveis e daí a formulação de hipóteses que é o que eu considero, o que eu não considero para a situação. A gente estava até comentando, no exemplo do horário de verão que a gente estudou [...]
A_{20}: E daí a próxima etapa é a resolução por um matemático. Aí dependendo do grau, da complexidade do modelo, daí ele pode contar com métodos computacionais para chegar à solução. E a partir do momento que pode ser que o modelo não traga uma solução, a modelagem possibilita usar outras técnicas e outras teorias. E daí depois que o modelo foi construído vem a etapa da validação que define se aceita ou não o modelo. Nessa etapa as hipóteses e os modelos são contestados e os resultados que foram encontrados são testados com os experimentais obtidos na primeira etapa. E daí quanto mais próximo os resultados pelo modelo forem dos experimentais mais chances de se validar esse modelo. Mas também não depende mais só dos dados, depende da intenção do modelador e do contexto.
A_8: O autor diz no texto que o interessante é que nenhum modelo seja definitivo e que um modelo bom é um modelo que pode proporcionar a criação de outros modelos. Então no quadrinho que ele colocou aqui (aponta para o slide) a experimentação é a etapa que às vezes não é o matemático que faz. Daí, já a abstração e resolução é o matemático que executa e a validação do modelo não é feita somente pelo matemático, mas também pelo pesquisador de outra área. Uma das coisas que o autor diz no texto é que o intercâmbio da matemática com esses pesquisadores é o que proporciona a obtenção de modelos coerentes e úteis. A quinta etapa que é a modificação, a gente pode ver dentro desse quadro (apontando para o esquema do slide) que ele faz, porque, se você observa, esse quadro tem uma setinha que ele faz então na validação, se ele não

for validado eu posso voltar aqui (apontando para a etapa de abstração) e faço todo o processo matemático de novo. Quem faz esse processo aqui dentro desse quadro é o matemático e fora desse quadro o pesquisador de outra área. Claro que pode ser em conjunto ou não com o matemático.
P_1: Isso... a modelagem matemática é um processo dinâmico.

A comunicação nesse episódio nos permite afirmar que os interpretantes intencionais (produzidos pela professora) atuam como referência para que os intérpretes, os alunos, aumentem o seu estado de informação sobre o objeto, constituindo assim o *continuum utterer*-intérprete a que nos referimos na figura 4.6.

O episódio 3, descritos nas figura 4.4 e 4.5, refere-se ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem após o estudo do texto e das discussões sobre modelagem matemática. Neste caso o problema foi levado pela professora visto que sua intenção era que os estudantes realizassem os procedimentos necessários no desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Nesse sentido os interpretantes intencionais da mente da professora (do utterer) lançam luz para que os estudantes comecem a ter autonomia no desenvolvimento da atividade.

Para resolver o problema os aluno, divididos em grupos de até seis alunos, buscaram encontrar padrões observando suas mãos, concluindo que *a mão do ser humano, tem algumas regularidades* (registro dos alunos). Essa observação os leva a selecionarem diferentes medidas para serem utilizadas na criação do algoritmo. Essas medidas por sua vez, foram submetidas a operações de tal forma que cada grupo desenvolvesse um algoritmo. Os interpretantes intencionais seriam nessa atividade sendo compreendidos na medida em que cada desafio na atividade fosse sendo enfrentado pelos alunos. Assim, nos atos de comunicação no continuum objeto (problema) – interpretante (meio para chegar na) solução e no continuum emissor (professora) –intérprete (aluno) os estados de informação iam se transformando na medida em que cada etapa da modelagem ia sendo desenvolvida: coleta de dados (medidas das mãos); hipóteses (quais medidas usar); matematização – quais ferramentas matemáticas podem ser usadas; construção do modelo – o algoritmo desenvolvido; validação do modelo – a testagem do algoritmo para identificação de intrusos.

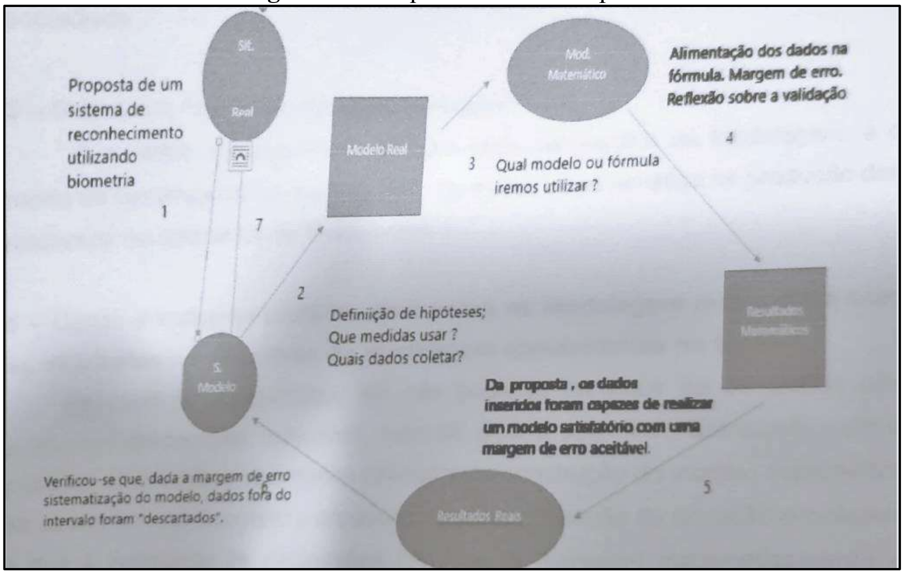
O que parece fundamental nessa atividade é a possibilidade de inferir que os interpretantes intencionais (da professora) foram sendo transformados em interpretantes effectuais (mente dos alunos) e conduzindo aos commnens (os resultados dos alunos). De fato, o êxito dos alunos na obtenção e validação do algoritmo nesse caso é um indicativo, do ponto de vista semiótico, de que a comunicação se efetivou e commens se constituíram.

A nossa inferência pode ser associada a dois aspectos observados nos dados coletados com os alunos. Um deles é um trecho do relatório dos alunos em que afirmam que *"a atividade nos proporcionou conhecer como os sistemas biométricos funcionam e como ferramentas matemáticas podem ser usadas para combinar medidas. Um aspecto fundamental é caracterizar bem a margem de erro aceitável para aumentar a segurança do sistema."*.

O outro é a apresentação de um esquema em que os alunos identificam e caracterizam os diferentes procedimentos associados ao desenvolvimento dessa atividade conforme indica a figura 4.8.

Do ponto de vista do 'fazer' modelagem matemática este é um indicativo de que os três episódios, que individualmente sinalizam uma ação de signos interpretantes mediando a comunicação na sala de aula, se articulam para a construção de conhecimento relativo ao como se aprende a fazer modelagem matemática.

Figura 4.8 -Esquema construído por um aluno



Fonte: registro dos alunos

RESULTADOS: IMPLICAÇÕES PARA O APRENDER E ENSINAR MODELAGEM MATEMÁTICA

Olhar para as possibilidades de ensinar e aprender como fazer modelagem matemática à luz da semiótica peirceana nos permite apresentar contribuições para a questão que ainda merece atenção no debate acadêmico: Como ensinar e aprender o fazer modelagem matemática?

Considerando que a comunicação na sala de aula é mediada por signos e o uso e a produção de signos é essencial para que algo possa ser aprendido, a identificação de diferentes signos interpretantes dá indícios de configurações para ensinar o fazer modelagem matemática na sala de aula.

Um resultado importante neste contexto é que o professor é indispensável. De fato, cabe a ele orquestrar as atividades para que aquilo que tem a intenção de ensinar e dar aos alunos vastas oportunidades de envolvimento, permanente ativação cognitiva e oportunidades de comunicação. Nesse sentido, a configuração do uso e da produção de signos que viabilizam a comunicação indica que somente a partir da convergência entre utterer (professor) e objeto (fazer modelagem matemática) e entre signos interpretantes e intérpretes (alunos) ocorrem *commens* (indícios de aprendizagem), como resultados do processo comunicativo.

A análise de signos interpretantes no decorrer dos três episódios nos permite indicar que para o fazer modelagem matemática é relevante, entre outros aspectos: desenvolver com os estudantes atividades e indicar alguns padrões de encaminhamento da atividade de modelagem; associar, na sala de aula, atividades e discussões que viabilizam aos alunos interações com grupos e apresentação de suas ideias.

Por outro lado, a análise semiótica das produções de signos pelos alunos no decorrer dos episódios nos leva a apresentar indícios de que estes alunos são capazes de identificar que, em atividades de modelagem, podem ser autônomos e criativos, produzindo diferentes resoluções para os problemas e usar diferentes conteúdos matemáticos. Além disso, os alunos também indicam que diferentes etapas podem ser caracterizadas no desenvolvimento das atividades e que ações relativas a estas etapas podem ser discutidas no interior de cada grupo.

Do ponto de vista semiótico, o que é aprendido sobre o fazer modelagem matemática é resultado da interação e da complementação de signos interpretantes intencionais, effectuais e comunicacionais, considerando o professor, alunos e o processo comunicativo que entre eles se desencadeia.

Neste sentido, a interpretação semiótica oferece meios de compreensão de como ocorre aprender modelagem matemática da perspectiva do receptor (aluno) da perspectiva do enunciador (professor), indagando, entretanto, a todo instante o potencial do processo de comunicação e levando em consideração que as posições são móveis. De fato, o interpretante intencional da professora se movimenta na medida em que o aluno também enuncia, para além de ser um receptor passivo. A sala de aula constitui o que

Silva (2013) chama de explosão de signos em que o professor com signos intencionais provoca nos alunos a geração de signos conforme suas experiências e suas interpretações.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P.. Signos produzidos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. **In: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-11, 2016.

BLUM, Werner. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education.** Springer, p. 73-96, 2015.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

Bortolotti (2003)

FERRI, R. B.. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

HOFFMANN, M. H. G. Learning from people, things, and signs. **Studies in Philosophy and Education**, v. 26, n. 3, p. 185-204, 2007.

KANDUNZ, G. Diagrams as Means for Learning. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016

LINGEFJARD, T. Learning Mathematics Through Mathematical Modelling. **Journal Of Mathematical Modelling and Application**. v. 1, n.5, p. 41-49, 2012.

NOTH, W.. **Handbook of Semiotics**. Bloomington and Indianapolis. 1990.

MASS, K.; ENGELN, K. Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. **ZDM Mathematics Education**. v. 50, n.1,2, Berlin., p. 273-285, 2018.

PEIRCE, C. S. **The essential Peirce**. Peirce Edition Project, Bloomington, IN: Indiana University Press, 1998.

PEIRCE, C.S.. **Semiótica e Filosofia**: textos escolhidos. 1.ed. São Paulo: Cultrix, 1972

PIETARINEN, A.-V. Peirce's theory of communication and its contemporary relevance. In: NYÍRI, K. (Ed.). **Mobile Learning**. Wien: Passagen, p. 81-98, 2003.

PRESMEG, N. Trigonometric connections through a semiotic less. In: RADFORD, L.; GERT, S.; SEEGER, F. (Eds.). **Semiotic in Mathematics Education**: Epistemology, History, Classroom, an Culture. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 103-119, 2008.

PRESMEG, N. C. A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In: **Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. p. 19-34, 2006.

PRESMEG, N. Semiotics in Mathematics Education. In: **INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION: TOPICAL SURVEYS**. Hamburg: Springer, p. 49, 2016.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G. Constructing Knowledge Seen as a Semiotic Activity. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SILVA, A. C. T. Conexões: semiótica e educação. Koan: revista de Educação e Complexidade. N 1, pp.50-60, 2013.

SILVA, K.A. P.; ALMEIDA, L. M. W.. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática (Online), v. 29, p. 568-592, 2015.

CAPÍTULO 5- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa *buscamos na semiótica peirceana elementos que podem esclarecer caminhos de inter-relação entre conhecimento e experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.* Os elementos a qual nos referimos são as categorias do signo de Peirce, o raciocínio diagramático e os interpretantes comunicacionais. Devido a nossa opção por organizar a pesquisa em formato *multipaper* em cada um dos três artigos que a compõe, discutimos cada um desses elementos de acordo com uma questão de pesquisa específica.

Nesse capítulo, discutimos os principais resultados obtidos em cada artigo, com a finalidade de *esclarecer caminhos de inter-relação entre conhecimento e experiências dos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática* e de refletir sobre possíveis contribuições da pesquisa para a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

No primeiro artigo descrevemos a modelagem matemática em termos semióticos a partir da intepretação de experiências dos alunos. Nossa intepretação foi pautada por dois enfoques sendo o primeiro o da modelagem matemática como um conteúdo a ser ensinado (GALBRAITH, 2012) e o segundo as categorias do signo de Peirce, sendo elas a primeiridade, secundidade e terceiridade. Peirce (1992) ainda destaca que essas categorias podem ser analisadas sob duas perspectivas, a fenomenológica e a ontológica. Nesse artigo relacionamos a perspectiva fenomenológica ao fazer modelagem matemática, e a perspectiva ontológica ao ser modelagem matemática. Essas ideias foram utilizadas para realizarmos uma análise interpretativa da atividade *A queda dos técnicos do campeonato brasileiro*, realizada por um grupo de seis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

No que diz respeito ao como fazer modelagem matemática inferimos que a sua apreensão se dá na conscientização dos alunos de que precisam se apropriar de uma situação e matematizá-la de tal forma que se encontre uma solução que seja validada pela turma e o professor. O fazer modelagem matemática é nesta perspectiva um fenômeno que é apreendido pela percepção, reação e reflexão. Por outro lado, inferimos que o ser modelagem matemática está relacionado ao fato de que o aluno reconheça que para ser modelagem matemática a atividade deve ter seu início em uma situação problemática da realidade e ser viável, deve requerer a formulação de hipóteses, e deve ser matematizada sem que esquemas à priori estejam definidos para indicar qual matemática deve ser usada e qual é o resultado que deve ser obtido.

A atividade *A queda dos técnicos do campeonato brasileiro*, de acordo com a caracterização dos momentos de familiarização proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012), constitui-se como sendo uma atividade de terceiro momento. Nesse sentido os alunos ao desenvolveram essa atividade já tiveram contato com outras atividades bem como com aspectos teóricos, eles tiveram um experiência com essas atividade, o que implica que eles vivenciaram situações mediadas por modelagem matemática.

Segundo Balsemão (1993) o conhecimento que o indivíduo constitui ao longo de sua experiência deriva e está referida sempre a experiência ulteriores e antecedentes. Nesse sentido, ao vivenciarem situações mediadas por modelagem matemática os alunos criam experiências que os ajudam a constituir o ser modelagem, essa constituição "implica na determinação de uma existência particular por meio de fundamentos gerais" (BALSEMÃO, 1993, p. 129). Portanto a existência do ser modelagem matemática é determinada por ações que se assentam na primeiridade, secundidade e terceiridade. A modelagem é expressa pelo interesse do aluno de investigar uma situação inicial advinda da realidade, uma primeiridade. É expressa pela elaboração do problema e das hipóteses, que constituem uma relação entre a situação inicial e a matematização da situação (ação da secundidade). Por fim, modelagem matemática é expressa pela generalização, representada na elaboração de um modelo e sua interpretação a partir da reflexão sobre a situação inicial e sobre a relação estabelecidas anteriormente.

Portanto, as categorias peirceanas sob uma perspectiva ontológica nos esclarecem que as experiências permitem que o aluno reconheça que uma atividade de modelagem matemática tem o seu início em uma situação inicial, advinda de um contexto real e termina na análise da situação mediada pelo modelo construído. Além disso, reconhecem que a modelagem matemática requer a formulação de hipóteses e que a situação inicial seja matematizada sem que esquemas à priori estejam construídos.

Por outro lado, as categorias peirceanas sob uma perspectiva fenomenológica, também se configuram como um dos elementos semióticos que nos permitem delinear um caminho de interlocução entre conhecimento e experiências. Esse caminho vai além da identificação das categorias peirceanas nos procedimentos utilizados em uma atividade de modelagem matemática (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2011). Essas categorias nos possibilitou capturar as experiências dos alunos no desenvolvimento de uma atividade e inferir como o fenômeno de fazer modelagem matemática é apreendido pela consciência do aluno. As experiências nos fornece indícios que os alunos reconhecem que é necessária a identificação de uma situação inicial, advinda da realidade, que necessita ser matematizada utilizando conceitos matemáticos. A matematização dessa situação conduz à um modelo matemático que é analisa mediante a situação inicial (ALMEIDA, 2010).

Diante do exposto, percebemos que as categorias peirceanas quando analisadas sob uma perspectiva fenomenológica e ontológica nos permite delinear um caminho de inter-relação entre o conhecimento constituído sobre o ser modelagem matemática e o conhecimento sobre o fazer modelagem matemática. As experiências capturadas nos fornece indícios que o a constituição do conhecimento no que se refere ao ser modelagem matemática não é independente da constituição do conhecimento sobre o fazer modelagem matemática. Almeida, Silva e Vertuan (2012) destacam que é possível identificar elementos que caracterizam a modelagem matemática: a identificação de uma situação inicial, a matematização dessa situação por meio de conceitos matemáticos não definidos à priori e uma análise interpretativa da solução. Ora, nossa análise identifica elementos além desses e ainda mostra que eles estão atrelados as ações que constituem o fazer modelagem matemática. O interesse por investigar uma determinada situação que tenha como contexto a realidade, nos fornece indícios que além de constituir uma qualidade da modelagem matemática mostra uma relação de espontaneidade. A definição de um problema a ser estudado ao mesmo tempo que constitui uma relação necessária ao ser modelagem matemática, indica a intermediação da relação entre situação e dados mediante a matematização. A matematização da situação ora indica uma relação do ser modelagem matemática ora elucida o que deve ser feito no desenvolvimento da atividade. Por sua vez, a construção do modelo matemático e interpretação do mesmo é uma generalização no que se refere ao ser modelagem matemática e no que se refere ao fazer modelagem matemática é a reflexão sobre a situação a partir do modelo encontrado.

No segundo artigo tivemos como interesse *olhar para o raciocínio diagramático na constituição do fazer modelagem matemática*. Para tal, nos pautamos nos signos diagramáticos, e o raciocínio associado a esses signos, visto que esses signos podem ser aplicados para entendermos melhor o estado das coisas (OTTE, 2006). Nesse sentido analisamos duas atividades de modelagem matemática, desenvolvidas em momentos de familiarização diferentes (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN; 2012). A atividade do segundo momento *Olha a batata frita!* foi desenvolvida por todos os alunos que compunham a turma, porém analisamos apenas a atividade de um desses grupos. A segunda atividade analisada, é configurada como sendo do terceiro momento de familiarização e foi desenvolvida pelo mesmo grupo de alunos da atividade do segundo momento. A situação inicial dessa atividade era *papel x secador de mão*, sendo investigado se era mais vantajoso financeiramente um shopping ter papel ou secador de mão em seus banheiros.

Ao voltarmos nosso olhar para as experiências desse grupo no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática percebemos a constituição do fazer modelagem matemática, ou seja, as ações que os alunos empregam no desenvolvimento de uma atividade são medidas pela construção, experimentação e observação/reflexão de signos diagramáticos. A elaboração das hipóteses e definição de variáveis expressam relações, que os alunos consideram como importantes, entre a situação inicial e conceitos matemáticos. A partir de suas hipóteses e variáveis os alunos constroem um modelo matemático que é limitado pelos diagramas construídos na fase da matematização. Por fim os alunos observam e refletem sobre o modelo matemático, a fim de encontrar uma resposta ao problema que condiz com a situação inicial. Além disso, destacamos que as etapas do raciocínio diagramático requeridas no desenvolvimento das atividades nos fornece indícios que a familiarização com atividades de modelagem matemática além de desenvolver a autonomia dos alunos contribui para a constituição do fazer modelagem matemática desses alunos. Outro ponto que destacamos nesse artigo, é que muitas vezes os alunos apresentam conclusões, mas não as expressam em seus registros, corroborando assim com o fato de muitas vezes o signo vem depois do pensamento. Esses alunos pensam sobre, porém não criam um signo diagramático que expresse esse fato.

O elemento semiótico destacado nesse artigo, o raciocínio diagramático nos elucida um caminho de inter-relação entre o raciocínio diagramático e a constituição do fazer modelagem matemática. A constituição do fazer modelagem matemática está atrelada às experiências anteriores dos alunos, corroborando assim com Silva, Almeida e Gerolomo (2011, p.30) que sugerem que "o aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de "aprender" a desenvolvê-las". Hoffmann (2004) destaca que para Peirce qualquer tipo de raciocínio se apoia na ideia de que se alguém exerce certos tipos de escolhas, alguém sofrerá certas percepções. O autor destaca ainda que essas escolhas implicam em certos tipos de experiências que são inevitáveis. Nesse sentido o raciocínio diagramático requerido em diferentes ações do fazer modelagem matemática explicitam a necessidade do aluno de realizar escolhas, que são expressadas por signos diagramáticos e que irão conduzir o aluno a transformar e refletir sobre esses signos de acordo com suas experiências no que se refere a conceitos sobre a própria modelagem matemática e a conceitos matemáticos.

Hoffmann (2004, p. 298) destaca que

> qualquer experiência com um diagrama que tenha sido executado dentro de um determinado sistema representacional sempre "implicará certos tipos de experiências inevitáveis", como Peirce os chama, que é precisamente aquelas experiências resultantes de atividades orientadas por regras.

Nesse sentido, o fazer modelagem enquanto mediado pelo raciocínio diagramático permite que o aluno se familiarize com as regras que regem a constituição do fazer modelagem matemática.

No terceiro artigo *buscamos indícios da mediação por signos na comunicação entre professor e alunos associada ao como ensinar e aprender modelagem matemática.* Dentre os desdobramentos da análise das experiências dos alunos nesses episódios ressaltamos que para a constituição do fazer modelagem matemática é relevante, que o professor desenvolva com os alunos atividades e indique alguns padrões de encaminhamento da atividade de modelagem matemática, além de propiciar na sala de aula atividades e discussões que viabilizam os alunos interagir com os integrantes de seu grupo e com o restante da sala. Além disso, nossa análise indica que do ponto de vista semiótico o aprender a fazer modelagem matemática é resultado da interação e da complementação de signos interpretantes comunicacionais.

Nossas deliberações nesse artigo se pautam nos interpretantes comunicacionais que nos fornece um caminho de interlocução entre o aprender modelagem matemática e as experiências dos alunos. Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) destacam que a constituição de conhecimento em matemática é mediado por comunicações matemáticas e que se os alunos forem motivados e bem dirigidos, o conhecimento por eles constituído serão progressivamente refinados. Nesse sentido, podemos entender que o aprender modelagem matemática está atrelado ao processo comunicacional nas aulas de modelagem matemática. Almeida e Vertuan (2014) destacam que uma das ações necessárias no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática é a comunicação dos resultados aos demais alunos da turma. Nossas reflexões vão para além apresentação dos resultados, a comunicação mediada por signos interpretantes é necessária para que os alunos efetivem o que aprenderam sobre modelagem matemática. Diante dessa afirmação, destacamos o papel do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem, ele é responsável por planejar as atividades para que aquilo que tem a intenção de ensinar fique explicito e é responsável por viabilizar vastas oportunidades de envolvimento ao aluno favorecendo assim a permanente ativação cognitiva e oportunidades de comunicação. Portanto experiências com diferentes atividades de modelagem matemática e com aspectos teóricos explicitam diferentes intensões do professor o que permite ao aluno diferentes oportunidades de comunicação, refinando assim cada vez mais o que o aluno aprende sobre modelagem matemática.

Os elementos semióticos destacados em cada um dos artigos, nos permite delinear caminhos de inter-relação entre o conhecimento e a experiência dos alunos durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O primeiro caminho delineado refere-se a inter-relação entre a constituição do ser modelagem matemática e da constituição do fazer modelagem. O segundo caminho refere-se a inter-relação entre o raciocínio diagramático e a constituição do fazer modelagem matemática e por fim delineamos um caminho de interlocução entre o aprender modelagem matemática e as experiências dos alunos.

A análise desses caminhos ainda os permite delimitar um quarto caminho que a partir dos elementos semióticos dos três artigos nos permite inter-relacionar constituição do fazer modelagem matemática às experiências vivenciadas pelos alunos.

No que tange a constituição do fazer modelagem, isto é, a quais ações os alunos empregam no desenvolvimento de atividades de modelagem, as experiências com atividades desse tipo os auxiliam a identificar o que se faz necessário para desenvolver uma atividade de modelagem. O inventario das experiências dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem evidenciou que por meio da produção transformação e interpretação de signos que desenvolvem o conhecimento sobre o fazer modelagem matemática.

Ao analisarmos o movimento do pensamento, isto é, ao olharmos para a modelagem matemática sob a perspectiva fenomenológica identificamos que os alunos reconhecem que o desenvolvimento de uma atividade envolve identificar uma situação inicial (primeiridade), elaborar um problema, hipóteses e variáveis (secundidade), construir um modelo matemático e analisa-lo de acordo com os pressupostos da situação inicial (terceiridade). Essas ações identificadas são mediadas pela construção de signos diagramáticos que expressam o relações entre a situação inicial e conceitos matemáticos que são convencionadas durante o desenvolvimento das atividades por meio de hipóteses e variáveis. A manipulação e reflexão desses signos, isto é, o raciocínio diagramático requerido na atividade "cria oportunidades de desenvolver conceitos (BAKKER, HOFFMANN, 2005, p. 353). Nesse sentido o raciocínio diagramático requerido cria a oportunidade de os alunos desenvolver conceitos sobre a própria modelagem matemática, mas também sobre a matemática envolvida na atividade. Os signos diagramáticos construídos no desenvolvimento das atividades, além de possibilitar o desenvolvimento de conceitos é um meio de comunicação. No desenvolvimento das atividades percebemos que em alguns casos apesar de chegar à conclusão para o problema os alunos não comunicam como chegaram a essa conclusão, isto é, os alunos não explicitam os signos que os ajudaram a produzir tal conhecimento.

As experiências dos alunos, isto é, o resultado da interpretação de ações que realizaram durante toda a disciplina de modelagem matemática possibilita ao aluno a constituir o fazer modelagem matemática, a identificar quais ações são necessárias no desenvolvimento. Portanto, cabe destacar a importância de inserir a modelagem matemática de forma gradativa, conforme sinaliza Almeida, Silva e Vertuan (2012), visto que além de desenvolver a autonomia dos alunos, esses criam experiências que os auxiliam na constituição do conhecimento sobre modelagem matemática.

Nessa pesquisa, tivemos a intenção de fornecer elementos da semiótica peirceana que esclarecem caminhos de inter-relação ente o conhecimento e as experiências dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Ao refletir sobre os resultados da pesquisa, um exercício importante é trazer as limitações e as perspectivas futuras da pesquisa. Uma das limitações foi nossa opção por estruturar a tese em formato *multipaper*, apesar desse formato facilitar a disseminação da pesquisa, visto que os artigos estão prontos para a submissão de periódicos, o formato nos limita a certa quantidade de páginas. Além disso, temos como limitação nessa pesquisa o fato de que os alunos, apesar de terem sido orientados, muitas vezes não explicitavam com uma riqueza de detalhes o desenvolvimento de suas atividades, o que nos limitou a realizar certas inferências. Dentre as possibilidades de investigações futuras, ressaltamos a:

- Investigação de interlocuções entre o raciocínio diagramático e a criatividade no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Os resultados dessa pesquisa podem contribuir para a Modelagem Matemática na Educação Matemática, enquanto área de pesquisa, sobre a investigação das relações entre o conhecimento e as experiências dos alunos, mais especificamente no que se refere a constituição do ser modelagem e do fazer modelagem pelo alunos. Buscar elementos da semiótica peirceana para elucidar essas relações evidenciou que a constituição do conhecimento sobre modelagem matemática é mediada pela construção, transformação e intepretação de signos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; RAMOS, D. C.. Sobre ensinar e aprender 'o fazer' modelagem matemática. In **Anais** VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Foz do Iguaçu, 2018.

ALMEIDA, L. M W; SILVA, K.A. P.. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. Boletim de Educação Matemática. **BOLEMA**, v. 32, p. 696-726, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P.. Signos produzidos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos. **In: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática** – ENEM. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-11, 2016.

ALMEIDA, L. M.W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. In VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirenópolis, 2015. **Anais** do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-13, 2015.

ALMEIDA, L. M W; SOUSA, B.N.P. ; TORTOLA, E. . Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. *In*: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM, 2015, Pirenópolis. **Anais** do VI SIPEM. Rio de Janeiro: SBEM, v. 1. p. 1-12, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; Silva, K.A. P. . O significado em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre pesquisas brasileiras. **REVEMAT**, v. 9, p. 124-145, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. ; VERTUAN, R. E. . Modelagem Matemática na Educação Básica. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K.A. P.. (Org.). **Modelagem Matemática em Foco**. 1ed.Rio de Janeiro - RJ: Ciência Moderna, v. 1, p. 1-21, 2014.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias** (En línea), v. 6, p. 8-17, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetike** (UNICAMP), v. 18, p. 379-406, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. ano 17, n.22, p. 19-36, 2004.

BAKKER, A.; HOFFMANN, M. H.G. Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, n. 3, p. 333-358, 2005.

BALSEMÃO, E. Categorias e semiosis. Notas introdutórias ao pensamento do individual em Ch. S. Peirce. **Revista Filosófica de Coimbra**, v. 2, n. 3, p. 115-168, 1993.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. Ed. São Paulo: Contexto Editora, 2011.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modeling problems? In HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W. et al. (Eds.) **Mathematical Modeling (ICTMA12)**: Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing, 2007.

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

BLUM, Werner. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education.** Springer, p. 73-96, 2015.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

CARREIRA, S. et al.. Mathematical Modeling of Daily Life in Adult Education: Focusing on the Notion of knowledge. In KAISER, G.. **Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling**, (ICTMA 14) (p. 199 – 210). New York: Springer, 2011.

CORREA, C. M. C. **Estudo sobre o desenvolvimento verbal na criança**. Tese de Doutorado em Comunicação e Semiótica, PUC – SP, 2009.

D'AMBROSIO, U.. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions**. Journal of mathematical modelling and application**. v.1, n. 1, p. 89-98, 2009.

DEELY, J. **Semiótica Básica**. Tradução: Julio C. M. Pinto. São Paulo: Editora Ática, 1990.

DÖRFLER, W. Diagrammatic Thinking. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, 2005.

DÖRFLER, W. Diagrams as means and objects of mathematical reasoning. In: **Developments in mathematics education in German-speaking countries**. Selected papers from the annual conference on didactics of mathematics. p. 39-49, 2003.

FERRI, R. B.. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Springer, 2018.

GALBRAITH, P., STILLMAN, G. A., & BROWN, J. P.. The primacy of 'noticing': A key to successful modelling. In STILLMAN, G. A; BLUM, W.; KAISER ,G. (Eds.), **Mathematical modelling and applications**: Crossing and researching boundaries in mathematics education (pp. 83–94). Cham: Springer, 2017.

GALBRAITH, P.. Modelling, education, and the epistemic fallacy. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, p. 339–350, 2015.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and learning Modeling – Overview. In KAISER, G., BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Eds.), **Trends in teaching and Learning of Mathematical Modeling**, (ICTMA 14) (pp 301 – 304). New York: Springer, 2011.

HOFFMANN, M. H. G. Learning from people, things, and signs. **Studies in Philosophy and Education**, v. 26, n. 3, p. 185-204, 2007.

HOFFMANN, M.H.G. Signs as Means for Discoveries. In: Hoffmann M.H., Lenhard J., Seeger F. (eds) **Activity and Sign**. Boston: Springer, Boston, 2005.

HOFFMANN, M. H. G. How to get it. Diagrammatic reasoning as a tool of knowledge development and its pragmatic dimension. **Foundations of Science**, v. 9, n. 3, p. 285-305, 2004.

IBRI, Ivo A.. **Kósmos Noétos**: a arquitetura metafísica de Charles S. Peirce. São Paulo: Paulus, 2015.

JABLONKA, E.; GELLERT, U.. Mathematisation–demathematisation. In: Mathematisation and demathematisation. **Brill Sense**, 2007. p. 1-18.

KANDUNZ, G. Diagrams as Means for Learning. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and mathematical modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, Madison, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application, Blumenau**, v. 1, n. 2, p.16 - 48, 2010.

LINGEFJARD, T. Learning Mathematics Through Mathematical Modelling. **Journal Of Mathematical Modelling and Application**. v. 1, n.5, p. 41-49, 2012.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. Construção de Conceitos Matemáticos na Educação Básica numa Abordagem Peirceana. **Bolema**. Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 887-904, dez. 2010.

MASS, K.; ENGELN, K. Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. **ZDM Mathematics Education**. v. 50, n.1,2, Berlin., p. 273-285, 2018.

NISS, M. Prescriptive modelling—Challenges and opportunities. In STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.), **Mathematical modelling in education research and practice**: Cultural, social and cognitive influences (pp. 67–79). Cham: Springer, 2015.

Niss, M. et al.. Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, &M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education**. New York, NY: Springer, p. 3-32, 2007.

NOTH, W.. **Handbook of Semiotics**. Bloomington and Indianapolis. 1990.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1-2, p. 11-38, 2006.

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. What is Mathematics, Really? Who Wants to Know? **Bolema**. Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 756-772, ago. 2015.

PEIRCE, C.S **Semiótica e Filosofia**: textos escolhidos. 1.ed. São Paulo: Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 2 reimpressão da 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 2015.

PEIRCE, C. S. **The essential Peirce**: selected philosophical writings, Vols. 1. Peirce Edition Project (ed.). Bloomington: Indiana University, 1992.

PEIRCE, C. S. **The essential Peirce**. Peirce Edition Project, Bloomington, IN: Indiana University Press, 1998.

PIETARINEN, A.-V. Peirce's theory of communication and its contemporary relevance. In: NYÍRI, K. (Ed.). **Mobile Learning**. Wien: Passagen, p. 81-98, 2003.

PRESMEG, N. Trigonometric connections through a semiotic less. In: RADFORD, L.; GERT, S.; SEEGER, F. (Eds.). **Semiotic in Mathematics Education**: Epistemology, History, Classroom, an Culture. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, p. 103-119, 2008.

PRESMEG, N. C. A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In: **Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. p. 19-34, 2006.

PRESMEG, N. Semiotics in Mathematics Education. In: **INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION: TOPICAL SURVEYS**. Hamburg: Springer, p. 49, 2016.

POLLAK, H. O. What is Mathematical Modeling?. **Journal of Mathematics Education at Teachers College**, v. 2, n. 1, 2011.

RAMOS, D. C.. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.** Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G. Constructing Knowledge Seen as a Semiotic Activity. In: SÁENZ-LUDLOW, A.; KANDUNZ, G (org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**, Sense Publishers, 2016.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

SANTAELLA, L.. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. de 2000. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SANTAELLA, M. L.. **A teoria geral dos signos**: semiose e autogeração. Editora Ática, 1995.

SHAHBARI, J. A.; TABACH, M. Adopting the Modelling Cycle for Representing Prospective and Practising Teachers' Interpretations of Students' Modelling Activities. In: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**. Springer, p. 179-196, 2019.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.. The Exponential Function Meaning on Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, 2018.

SILVA, K.A. P.; ALMEIDA, L. M. W.. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática (Online), v. 29, p. 568-592, 2015.

SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D.. Um Olhar Semiótico Sobre a Modelagem Matemática. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.. (Org.). **Modelagem Matemática em foco**. 1ed.Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, v. 1, p. 79-104, 2014.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. **Educação Matemática em Revista,** p. 28-36, 2011.

SILVEIRA, L. F. B. Charles Sanders Peirce: science as semiotics. **Trans/form/ação**, v. 12, p. 71-83, 1989.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, v. 26, n. 43, p. 1021-1047, 2012.

SOUZA, E. G.; ALMEIDA, L. M. W.; KLÜBER, T. E. Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In: **Mathematics Education in Brazil**. Springer, Cham, 2018. p. 211-228.

STILLMAN, G. A. State of the art on modelling in mathematics education—Lines of inquiry. In: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.. **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education**. Springer, Cham, p. 1-20, 2019.

TYLEN, K. et al. Diagrammatic reasoning: Abstraction, interaction, and insight. **Pragmatics & Cognition**, p. 264–283, 2014.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 175p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013

WALL, C. **Peirce:** a guide to the perplexed. New York: Bloomsbury, 2013.

ANEXO A- MODELO DO TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, autorizo Daiany Cristiny Ramos, regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, sob o número de matrícula nº 201612350060, a utilizar parcial ou integralmente, os meus registros escritos, impressos, fotos arquivos eletrônicos e gravações em áudio e vídeo na realização das atividades desenvolvidas na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática do curso de Licenciatura em Matemática durante o primeiro e segundo semestres de 2017. Autorizo que minhas informações sejam utilizadas somente para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que sejam tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a minha identidade. Igualmente abdico dos meus direitos e de meus descendentes.

Declaro ainda que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	**CPF**	**Assinatura**

Londrina, 20 de dezembro de 2017.

____

Daiany Cristiny Ramos