Universidade
Estadual de Londrina

MICHELE REGIANE DIAS VERONEZ

AS FUNÇÕES DOS SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2013

MICHELE REGIANE DIAS VERONEZ

AS FUNÇÕES DOS SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

V549f Veronez, Michele Regiane Dias.
As funções dos signos em atividades de modelagem matemática / Michele Regiane Dias Veronez. – Londrina, 2013.
176 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. Matemática – Semiótica – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

MICHELE REGIANE DIAS VERONEZ

AS FUNÇÕES DOS SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida - Orientadora
Universidade Estadual de Londrina - Londrina

Profª. Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Estadual de Feira de Santana - Bahia

Profª. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul - São Paulo

Profª. Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Cornélio Procópio

Profª. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - Londrina

Londrina, 02 de dezembro de 2013.

Agradecimentos

Seria impossível a realização deste trabalho sem o apoio de quem se ama, sem amigos por perto e sem o olhar de aconchego de algumas pessoas tão especiais. Então, só me resta agradecer...

a Deus, fonte de minha esperança;

ao meu esposo Guilherme, companheiro melhor certamente não existe! Obrigada por entender os vários momentos em que estive ausente e por todo carinho demonstrado;

aos meus pais, minha vovó Maria, meu sogro e minha sogra, pelo incentivo, confiança e carinho. Obrigada pelos inúmeros telefonemas com aquele "arzinho" de preocupação dizendo: venha devagar nessas estradas... ou, você chegou bem?;

às minhas irmãs (Gi e Fabi) e aos meus cunhados (Jeferson e Cleber), por tantas vezes (semanal ou quinzenalmente) terem me acolhido em suas casas durante esses quatro anos e pelo carinho com que se preocupavam comigo;

à minha sobrinha Isa e à minha sobrinha e afilhada Aninha, o sorriso, o olhar e os abraços de vocês me alimentavam a cada viagem para Londrina;

à minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, pelas sugestões, críticas, confiança e amizade;

aos professores Dr. Ademir Donizeti Caldeira, Dra. Andréia Maria Pereira de Oliveira, Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Dra. Norma Suely Gomes Allevato, Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva, que dispensaram tempo para analisar e, com isso, contribuir significativamente na construção deste trabalho. O meu sincero agradecimento e respeito;

aos alunos do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESPAR – Campus União da Vitória, pela participação na pesquisa, pelo carinho e pela amizade;

aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), com os quais laços de amizade foram sendo construídos por motivos diversos. Vocês foram e são muito especiais, cada um do seu jeito, mas todos inesquecíveis. Deixo meu carinho registrado a vocês, Karina, Adriana, Rodolfo, Emerson, Renato, Bárbara, Camila, Ana Paula, Ângela e Elaine;

aos professores do Colegiado de Matemática da UNESPAR – Campus União da Vitória, por serem favoráveis ao meu afastamento integral nos dois últimos anos da tese, em especial, às amigas Celine, Gabi e Maria Ivete e aos amigos Everton e Henrique, por estarem sempre presentes, oferecendo palavras de incentivo e olhar acolhedor;

aos amigos Aurélio, Cleri, Samon, Renata, Armindo, Malu, Karim, que sempre estiveram por perto e com olhares confiantes. Agradeço a força, a solidariedade, a convivência e, principalmente o conforto nesse momento de caminhada solitária que é o doutorado;

à minha querida amiga Loreni. Lo, minha amiga (on-line) de todas as horas (manhã, tarde, noite e madrugada), nem mesmo a distância foi empecilho para que nossa amizade continuasse sólida e que fôssemos também amigas de estudo, assim como no mestrado. Obrigada por me ouvir sempre que eu recorria a você, pelas palavras de conforto e pelos gestos de carinho;

aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelas discussões empreendidas nas aulas;

às minhas ex e para sempre professoras, Denise, Lourdes, Luci, Luciana, Magna, Marie Claire e *Regina;*

à Fundação Araucária, pelo apoio financeiro concedido nos dois primeiros anos do doutorado;

a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Tenho a impressão de ter sido uma criança
brincando à beira-mar, divertindo-me em
descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha
mais bonita que as outras, enquanto o imenso
oceano da verdade continua misterioso diante de
meus olhos".

Isaac Newton

VERONEZ, Michele Regiane Dias. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

Resumo

Ao considerar que em atividades de modelagem os alunos utilizam e/ou produzem signos, durante suas ações cognitivas, atrelados à situação, ao problema, aos objetos matemáticos e à resposta reconhecida como uma solução para o problema, buscamos, nesta investigação, refletir acerca desses signos. Para isso assumimos signo na perspectiva de Charles Sanders Peirce e pautamo-nos nas ideias de Heinz Steinbring, de que o signo tem duas funções, uma semiótica – representa algo – e uma epistemológica – o signo revela conhecimento sobre o que ele representa –, a fim de investigar como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções dos signos. Para tanto, identificamos os signos utilizados e/ou produzidos por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática envolvidos com atividades de modelagem, bem como os papéis desses signos nos encaminhamentos dados pelos alunos no desenvolvimento de suas atividades. A opção metodológica baseia-se nas considerações da pesquisa qualitativa e a análise dos dados segue orientações da Análise de Conteúdo, proposta por Laurence Bardin. Da relação entre os papéis dos signos e os encaminhamentos dos alunos construímos triângulos epistemológicos que nos possibilitaram reconhecer que os signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos na busca por uma solução para o problema em estudo na atividade de modelagem matemática se complementam. Essa complementaridade dos signos, associada às suas funções semiótica e epistemológica, confere ao triângulo epistemológico um caráter dinâmico. Nesse sentido, o que é considerado signo em um momento da atividade, se configura, em outro momento, em contexto de referência, que por sua vez, leva os alunos à produção de outros signos, que em momento posterior assumem conotação de contexto de referência e assim por diante, sempre suscitando diferentes conceitos. A análise revela também que esta dinamicidade e complementaridade dos signos influenciam o encaminhamento que os alunos dão ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, de modo que tais signos representam algo que se pretende comunicar e indicam mobilização e/ou produção de conhecimentos dos alunos acerca do que o signo representa.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semiótica. Funções dos signos. Triângulo epistemológico.

VERONEZ, Michele Regiane Dias. **The functions of signs in mathematical modelling activities.** 2013. 176p. Doctoral thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2013.

Abstract

Considering that in modelling activities learners use and/or produce signs, during their cognitive actions, which are connected to the situation, the problem, the mathematical objects, and the result recognized as the solution for the problem, in this investigation we want to reflect on these signs. For this purpose, we adopt Charles Sanders Pierce´s view of the sign, and base on Heinz Steinbring´s ideas of signs having two functions - a semiotic one – as it represents something – and an epistemological one – the sign reveals knowledge about what it represents - in order to investigate how the development of mathematical modelling activities relates to the functions of signs. In order to do so, we identified the signs used and/or produced by undergraduate students in a mathematics teacher education course involved in modelling activities, as well as the roles of these signs in the proceedings undertaken by the students in the development of activities. The methodological option is based on considerations of qualitative research, and the data analysis follows orientations of the Content Analysis proposed by Laurence Bardin. From the relationship between the roles of signs and the students´ proceedings we built epistemological triangles which made it possible to recognize that the signs used and/or produced by the students in their search for a solution for the problem under study in the mathematical modelling activity complement each other. This complementarity of signs, associated with their semiotic and epistemological functions, favors the adoption of a dynamic character by the triangle. In this sense, what is considered a sign at some point during the activity, at a different time takes the form of a reference context, which in turn takes the students to produce other signs, which later take up the connotation of reference contexts, and so forth, always bringing up different concepts. The analysis also reveals that this dynamicity and complementarity of signs influence the proceedings students undertake during the development of mathematical modelling activities, so that these signs represent something and they indicate mobilizations and/or production students´ knowledge about what the sign represents.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Modelling. Semiotics. Functions of the Signs. Epistemological Triangle.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

A partir do entendimento de que Modelagem Matemática é uma atividade associada à busca por uma solução para uma situação-problema é que temos como foco maior de nossa investigação as atividades de modelagem matemática. Tal interesse por atividades dessa natureza surgiu desde 2003 quando do desenvolvimento de um estudo, no âmbito do mestrado, com professores que atuavam no Ensino Fundamental ou Médio. Desde então, por trabalhar com atividades de modelagem matemática com alunos do Ensino Médio e, atualmente, no Ensino Superior, aspectos relativos a tais atividades em contextos escolares têm nos interessado, e de modo particular, os encaminhamentos dados pelos alunos às atividades de modelagem[1].

Considerando o fato de que os encaminhamentos em uma atividade de modelagem matemática, seja pelo professor, seja pelos alunos, ou por ambos, são amparados nos conhecimentos mobilizados por eles acerca da situação em estudo e dos objetos matemáticos que utilizam na tentativa de encontrar uma solução para o problema advindo dessa situação, intentamos nesta investigação refletir acerca dos signos utilizados e/ou produzidos por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática envolvidos com atividades de modelagem. Sendo assim, o olhar para os signos, em atividades de modelagem, segue orientações da Semiótica.

Muito embora se reconheça que esses dois aportes teóricos – Modelagem e Semiótica – têm raízes em contextos distintos da Educação Matemática, os avanços nas pesquisas em ambas as áreas têm sinalizado contribuições para esse cenário e esta pesquisa vislumbra ampliar o quadro dessas contribuições.

Estudos acerca dos signos em atividades de modelagem também já têm sido desenvolvidos no âmbito do GRUPEMMAT – Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (SILVA, 2008; ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2011; ALMEIDA e SILVA, 2012; SILVA, 2013; VERONEZ e ALMEIDA, 2012; SILVA e VERONEZ, no prelo), de modo que

[1] Para evitar repetições textuais, a palavra *matemática* da expressão *modelagem matemática* algumas vezes será omitida, porém está implícita.

articulações entre Semiótica e Modelagem Matemática constituem o tema *Um olhar semiótico sobre a Modelagem Matemática,* reconhecido como um dos chamados *temas de interesse* desse grupo, no qual esta investigação está inserida.

Considerando que o uso diversificado de signos nas atividades de modelagem matemática é consenso no âmbito das pesquisas que versam sobre interlocuções da Modelagem e Semiótica e, amparados no reconhecimento de que carecem pesquisas que versem sobre aspectos epistemológicos da semiótica e da matemática com atenção para os signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos em contexto de sala de aula, desenvolvemos um estudo que busca evidências da influência das funções semiótica e epistemológica dos signos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A caracterização de signo, assumida nesta pesquisa, é pautada na concepção de Peirce (2012) – de que o signo é algo que está no lugar de outra coisa –, e nas assertivas de Steinbring (2006), de que o signo tem duas funções, uma função semiótica – na qual a ênfase é colocada sobre o caráter de representação do signo – e uma função epistemológica – que está relacionada ao conhecimento que o sujeito tem sobre aquilo que o signo representa (STEINBRING, 2005).

Entendendo que os signos se referem a algo que se quer comunicar ou representar, sem substituir aquilo ao qual ele está relacionado, e que os signos revelam conhecimentos sobre o que comunicam ou representam, intentamos identificar os signos utilizados e/ou produzidos por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática quando envolvidos com atividades de modelagem matemática, bem como os papéis desses signos nos encaminhamentos dados pelos alunos no desenvolvimento de suas atividades.

Para a realização desta pesquisa, corrobora-se com as ideias de Almeida, Silva e Vertuan (2012) de que em atividades de modelagem as opções dos alunos quanto à escolha da situação-problema e do problema a ser estudado devem ser consideradas. Além disso, as opções dos alunos relativas ao encaminhamento dado por eles para se chegar a uma solução para o problema precisam ser respeitadas e assessoradas pelo professor.

Como em atividades de modelagem matemática, os alunos, para chegar a uma resposta para o problema em estudo, adotam procedimentos consoante aos encaminhamentos que eles assumem, é durante suas ações cognitivas que signos são reconhecidos como tal ou são produzidos pelos alunos. Esses signos então têm relação com a situação e com o problema em estudo, além de se relacionarem com os objetos matemáticos mobilizados na resolução desse problema e com a resposta reconhecida como uma solução para ele. Ou seja, os signos se configuram como meios pelos quais os alunos manifestam seus pensamentos e conhecimentos na busca por encontrar uma solução para tal problema.

A partir do entendimento de que os signos em atividades de modelagem matemática se relacionam a aspectos dessas atividades e que os papéis desempenhados por esses signos ao longo de tais atividades, atrelados às funções semiótica e epistemológica dos signos, decorrem das interpretações dos alunos e dos conhecimentos por eles mobilizados, temos como objetivo de pesquisa investigar ***como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos***.

Reconhecemos que conexões entre signos e o que eles referenciam, assumido nesta investigação como contexto de referência, e influências dessas conexões no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser discutidas por meio do modelo – triângulo epistemológico – sugerido por Steinbring (2005, 2006) e assim o fazemos no processo de análise.

As opções metodológicas adotadas nesta investigação se sustentam nas indicações de uma abordagem qualitativa, tanto na coleta como no processo de análise dos dados. Para a condução das análises são consideradas as orientações da Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2011), a qual contempla três fases: pré-análise, exploração do material, inferência e interpretação.

Diante do objetivo de pesquisa e de objetivos periféricos estruturamos o texto da tese em quatro capítulos além da *Introdução* e das *Considerações Finais.*

Na *Introdução*, apresentamos aspectos concernentes aos propósitos desta investigação, bem como a questão investigada.

Os pressupostos teóricos que embasam o estudo realizado são discutidos no Capítulo 1 e no Capítulo 2. No Capítulo 1, intitulado *Modelagem Matemática*, fazemos considerações acerca do nosso entendimento de Modelagem Matemática, atentando para as perspectivas a partir das quais a Modelagem tem sido utilizada em sala de aula e para as ações cognitivas dos alunos envolvidos com atividades de modelagem. Também apresentamos discussões em torno das características de uma atividade de modelagem, dos procedimentos requeridos em seu desenvolvimento e dos objetivos daqueles que a desenvolvem. No Capítulo 2, *Sobre Semiótica*, abordamos aspectos da Semiótica, focalizando os signos e suas funções (semiótica e epistemológica).

Delineamentos da pesquisa e procedimentos metodológicos são descritos no Capítulo 3, *Sobre a Pesquisa – enfoque e opções metodológicas*. É nesse capítulo que discorremos sobre o cenário da investigação, os instrumentos de coleta de dados e o processo de condução das análises, na intenção de compreender o fenômeno investigado.

O Capítulo 4, *As Análises*, é constituído de duas seções. Na primeira – *Análises Locais: focalizando cada atividade*, descrevemos e analisamos três atividades de modelagem à luz dos referenciais teóricos adotados e, na segunda – *Análise Global: influência das funções dos signos em atividades de modelagem matemática*, a partir das análises locais, discutimos acerca dos propósitos desta investigação.

Nas *Considerações Finais* elucidamos nossas reflexões acerca do estudo desenvolvido e apontamos algumas possibilidades para pesquisas futuras.

Por fim, apresentamos as *Referências* e *Apêndices*.

CAPÍTULO 1

1. MODELAGEM MATEMÁTICA

As possibilidades de encaminhamentos para as atividades de modelagem matemática no contexto de sala de aula são foco de discussão neste capítulo. Sendo assim, apresentamos considerações acerca da Modelagem e de modelo matemático referentes às características de uma atividade de modelagem, aos procedimentos requeridos em seu desenvolvimento, aos objetivos daqueles que a desenvolvem e aos alcances e limites dos modelos matemáticos. As diferentes perspectivas, conforme apresentam Kaiser e Sriraman (2006), as quais referem-se aos diferentes aspectos que permeiam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, principalmente quanto ao seu objetivo, são também abordadas. Sob uma perspectiva cognitivista, como caracterizada por esses autores, discutimos sobre o que Almeida e Silva (2012) denotam por *ações cognitivas* dos alunos em atividades de modelagem.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO

A análise de uma situação a partir da Matemática sem, no entanto, desconsiderar os aspectos que permeiam o contexto dessa situação, pode se configurar em uma atividade de sala de aula e pode requerer dos professores e alunos diferentes encaminhamentos e procedimentos.

Diante de qualquer situação que se pretende analisar, cabe o seguinte questionamento: que encaminhamentos e procedimentos se fazem relevantes na análise dessa situação? Ainda, uma situação pode ser aparentemente ampla e não vir acompanhada de um problema para ser investigado, ou seja, a situação pode não suscitar de antemão uma questão previamente definida. Assim, se no contexto de sala de aula, uma situação é proposta pelos alunos, vem com ela a oportunidade de envolvê-los em um conjunto de procedimentos que vão desde a seleção de um problema para ser resolvido até a solução e interpretação da resposta obtida para tal problema.

A atividade de busca por uma solução para o problema que emergiu de um dado contexto é considerada, nessa pesquisa, como uma atividade de modelagem matemática.

Almeida (2010), ao se referir à atividade de modelagem matemática enfatiza que ela

> pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados (ALMEIDA, 2010, p.399).

Se o ponto de partida de uma atividade de modelagem matemática é uma situação, diversas são as possibilidades de investigação a seu respeito. Por exemplo, na situação “aumento do nível de água do rio Iguaçu” são vários os problemas que podem ser investigados, uma vez que esse rio, o maior do estado do Paraná, passa por cidades como Curitiba, Pinhais, União da Vitória, Foz do Iguaçu, e além disso, serve de divisa natural entre os estados do Paraná e Santa Catarina e faz fronteira entre o Brasil e a Argentina (província de Misiones). O “problema das enchentes”[2] ocorridas na cidade de União da Vitória é uma das possibilidades. No entanto, a análise acerca desse problema parece ser mais natural para aqueles que residem nessa cidade e, especialmente, para um grupo de alunos que vive nas redondezas desse rio. Para outros alunos ou alunos de outras regiões, outros problemas poderiam ser de maior interesse.

Isso indica que uma mesma situação pode conduzir a investigações distintas, da mesma forma, mesmo depois de realizar um “recorte” da situação a ser analisada, os problemas que podem ser evidenciados são também diversos, assim como são várias as possibilidades de encaminhamentos que podem ser assumidas. Para Veronez (2007, p. 1015) a formulação de um problema é “também um dos fatores para promover a compreensão daquilo que se pretende analisar” e o recorte da situação inicial, como enfatiza Vertuan (2013, p. 34), “influencia fortemente o problema investigado”.

Atividades de modelagem matemática têm, portanto, a característica de ser abertas e privilegiar encaminhamentos diferenciados, de acordo com os interesses daqueles que a

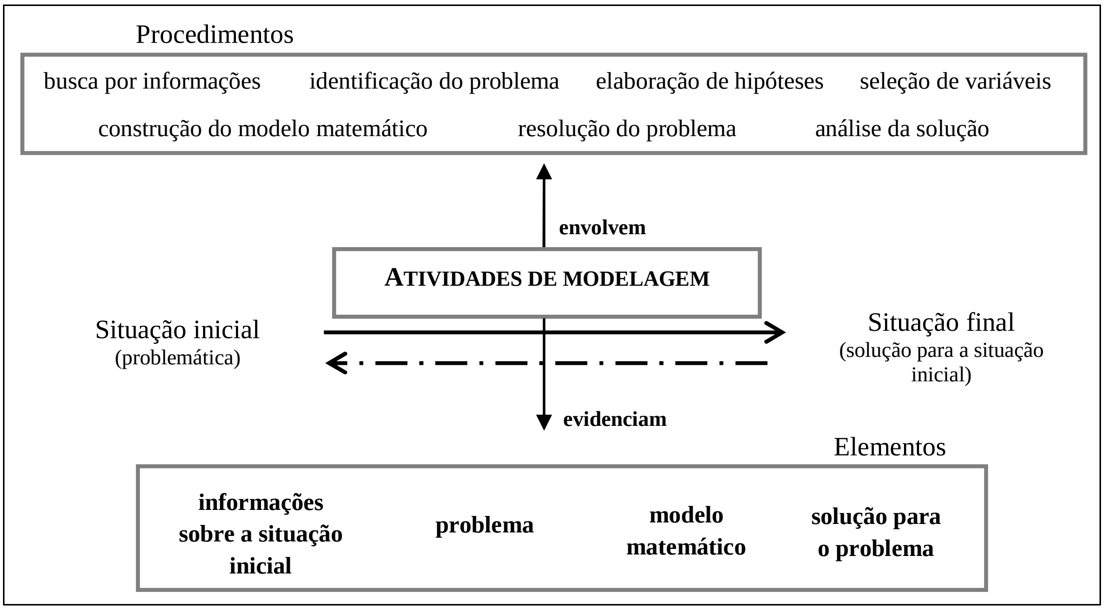
[2] Uma análise em torno das enchentes do rio Iguaçu, na cidade de União da Vitória, é uma das atividades de modelagem matemática que compõem o conjunto de atividades discutidas nesta pesquisa e apresenta-se de forma detalhada na seção 4.1 do Capítulo 4.

desenvolvem, e que culmina em investigações matemáticas[3] que extrapolam o fato de resolver o problema em foco. Porém, se não há um problema para ser investigado, não há uma atividade de modelagem matemática a ser desenvolvida (SILVA, 2013).

É no processo de busca por uma solução para o problema formulado ou identificado que, necessariamente, ocorre o envolvimento daqueles que desenvolvem a atividade com um conjunto de procedimentos. Segundo Dias (2005), esse conjunto de procedimentos refere-se à busca por informações, à identificação e seleção de variáveis, à elaboração de hipóteses, à obtenção de uma representação matemática para o problema, à resolução do problema e à análise da solução encontrada.

A Figura 1 ilustra os procedimentos de uma atividade de modelagem, bem como os seus elementos característicos. Ao longo da atividade, tais elementos se articulam a partir das escolhas e estratégias realizadas com vistas a encontrar uma solução para o problema, pautadas nos procedimentos. A seta no sentido da situação inicial para a final é uma linha contínua por considerar que uma atividade de modelagem inicia-se a partir de uma problemática e tem como meta a solução para o problema nela evidenciado, por sua vez, a seta pontilhada sugere que ao encontrar a solução para o problema se retorne à situação inicial e aos aspectos dela a fim de avaliar a solução obtida e, se necessário, os procedimentos podem ser revistos.

Figura 1 – Atividade de modelagem matemática – procedimentos e elementos



Fonte: A autora.

[3] Investigações matemáticas refere-se a investigar aspectos sob um ponto de vista matemático.

Se uma atividade de modelagem, como denotada por Almeida (2010), envolve, para além de uma situação inicial e final, um conjunto de procedimentos e se realiza mediante a construção e a interpretação de modelos matemáticos que visam descrever e/ou analisar certo fenômeno, “o modelo matemático é o que ‘dá forma’ à solução do problema e a Modelagem Matemática é a ‘atividade’ de busca por essa solução” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.15). Neste sentido, segundo os autores, a atividade de modelagem matemática se insere em um processo dinâmico de busca por soluções para o problema evidenciado na situação inicial.

Se modelo, na acepção do termo, é algo que serve de molde ou de exemplo, falar em modelo no contexto de ensino, essencialmente em Matemática, nos remete a pensar em representações matemáticas, tais como símbolos matemáticos, tabelas, gráficos, equações, inequações, dentre outros. Nesse sentido, a caracterização de modelo apresentada no dicionário etimológico de Cunha (1989) como “representação de alguma coisa” sugere olhar para o verbo representar, assim como proposto por Skovsmose (2008), não no sentido de criar uma cópia fiel ou um modelo do que se pretende representar, mas no sentido de re-apresentar o pretendido em um formato diferente.

Assim, o termo *modelo* é adotado nesse trabalho como uma representação idealizada de um sistema real que é condicionada por objetivos, que podem variar de acordo com a finalidade para a qual os modelos são criados. Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam que um modelo pode “prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras” (p. 13). No entanto, independentemente da finalidade, os autores complementam que o modelo “é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se ‘torna presente’ por meio deste modelo” (p. 13).

No âmbito da Matemática, modelos, adjetivados como matemáticos, são uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam (KEHLE e LESTER, 2003). Independentemente dos propósitos pretendidos com os modelos matemáticos, por meio deles pode-se representar no sentido proposto por Skovsmose (2008) e, portanto, evidenciar neles elementos que privilegiam explicações sobre situações não necessariamente matemáticas, mas que se pretende analisá-las por meio da matemática. Para Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e, em alguns casos, permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Nesse sentido, um modelo possui certo grau de generalidade, ou seja, pode representar situações para além daquela para a qual foi construído.

Todavia, a elaboração de modelos matemáticos não tem um fim em si mesma; visa incentivar a busca por uma solução para o problema evidenciado na situação inicial, alicerçada por atitudes interpretativas. Essa busca também conduz a uma leitura da situação ou à retomada de alguns aspectos não considerados em momento anterior. Para além disso, no contexto de sala de aula, favorece discussões sobre conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos.

Em atividades de modelagem matemática a elaboração de modelos por si só não garante que o problema seja solucionado. É preciso que os alunos façam um exercício de interpretação da solução com o olhar voltado para a situação inicial e reconheçam que outros encaminhamentos podem ser adotados com vista à resolução desse mesmo problema.

A aceitação de uma resposta para o problema para aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem está vinculada ao exercício de interpretação dos resultados obtidos em relação à situação ou problema estudado, que leva em consideração os conceitos matemáticos utilizados e os encaminhamentos assumidos. No contexto da sala de aula, essa aceitação se completa no âmbito da comunicação dos resultados obtidos para os demais alunos da sala e para o professor.

A comunicação de resultados está associada à argumentação acerca da interpretação realizada e se configura em um momento de "convencimento", por um lado, em relação aos outros porque é necessário levá-los a pensar sobre a situação segundo a ótica daqueles que desenvolveram a atividade e, portanto, convencê-los de que "a solução obtida é razoável e consistente tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da situação inicial" (VERTUAN, 2013, p. 36) e, por outro, em relação a si próprios, no sentido de olhar para a resposta obtida com a intenção de avaliar suas escolhas e estratégias.

Na seção a seguir discutimos acerca das atividades de modelagem matemática no que se refere aos alunos e ao professor, considerando os momentos de familiarização com a Modelagem Matemática sugeridos por Almeida e Dias (2004).

1.2 Atividades de Modelagem Matemática – Familiarização dos Alunos e o Papel do Professor

Ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática tem-se como ponto de partida uma situação de um contexto exterior à Matemática e como ponto de chegada uma resposta para o problema advindo dessa situação. É na transição da situação inicial (problemática) para a situação final (solução para a situação inicial) que o professor tem oportunidade de ensinar Matemática à medida em que é possibilitado aos alunos se envolver com conceitos matemáticos e com aspectos de uma situação em estudo e, ainda, estabelecer relações entre eles.

Muito embora a escolha acerca do que estudar de certa situação possa partir do professor, pois é ele quem define metas e estratégias da disciplina e isso acaba por insinuar que os alunos precisam cumprir com o plano e metas delineadas por ele, tal escolha também pode ser fruto de interesses particulares do aluno ou do meio no qual ele está inserido. Almeida e Dias (2004), preocupadas com a implementação de atividades de modelagem matemática nas salas de aula, dadas as especificidades do contexto educacional, sugerem que tais atividades sejam inseridas de forma gradativa, em um formato que essas autoras caracterizam como momentos.

No primeiro momento é recomendado que o professor coloque os alunos em contato com uma situação, acompanhada de um problema a investigar, apresentando-lhes dados e informações necessárias a sua investigação (ALMEIDA e DIAS, 2004). A investigação do problema, a dedução, a análise e a elaboração de um modelo matemático devem ser acompanhadas pelo professor, de modo que procedimentos como definição de variáveis e hipóteses, resolução do problema e análise de sua solução, precisam ser orientadas e avalizadas pelo professor.

Em um segundo momento, conforme Almeida e Dias (2004), compete ao professor sugerir um tema a ser investigado e viabilizar que os alunos, em grupos, complementem ou realizem a coleta de informações, identifiquem um problema a resolver, definam as variáveis, formulem as hipóteses, elaborem o modelo matemático e interpretem e validem a solução. Contudo, diferentemente do primeiro momento, o envolvimentos dos alunos com os procedimentos e com os elementos característicos de uma atividade de modelagem matemática deve ocorrer de forma mais independente em relação aos encaminhamentos que eles visam assumir na tentativa de encontrar uma solução para o problema em estudo.

Por fim, o terceiro momento contempla autonomia dos alunos inclusive na proposição do tema de investigação. Os alunos, portanto, são responsáveis pela condução da atividade de modelagem matemática da escolha do tema à aceitação da resposta obtida para o problema a ele vinculado (ALMEIDA e DIAS, 2004).

Nesta investigação, consideramos atividades de modelagem matemática desenvolvidas nessa configuração em que se caracterizam os três momentos.

Recorrer a esses momentos para implementar atividades de modelagem matemática em salas de aula favorece a familiarização dos alunos e também do professor com Modelagem Matemática no sentido de se compreender quais são as características de uma atividade como essa e que tipos de problemas podem desencadear uma atividade de modelagem. É fato, no entanto, que o papel do professor nesses três momentos é distinto, porém “consiste em incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura por argumentos e razões que permitam aos alunos confirmar ou não suas conjecturas” (DIAS, 2005, p. 43).

Ao considerar as possibilidades para a introdução de atividades de modelagem matemática no ensino há de se levar em conta que alguns alunos podem expressar resistência em relação ao seu papel no desenvolvimento da atividade e reclamar que ‘dá muito trabalho’ desenvolver uma atividade de modelagem. Contudo, essas observações dos alunos depõem a favor da inserção das atividades de modelagem matemática nas salas de aula, pois legitimam que por meio delas os alunos têm a possibilidade de atuar de forma autêntica no seu processo de aprendizagem. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) pontuam que atividades de modelagem matemática em sala de aula viabilizam “um aprendizado matemático crítico – e comprometido!” (p. 51).

Independentemente da abordagem matemática que se faz à atividade de modelagem, segundo Caldeira (2009), ao tratar da modelagem em sala de aula, ao aluno tem que ser possibilitado problematizar, elaborar suas próprias perguntas, caminhar no sentido de resolvê-las, refletir sobre as respostas obtidas e tirar suas próprias conclusões. Também Barbosa (2003) enfatiza que uma modelagem deve ser uma articulação entre a problematização – ato de criar perguntas ou problemas – e a investigação, relacionada à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009), Galbraith (2012), além de outros autores, defendem que é possível ensinar e aprender de forma diferente por meio da Modelagem Matemática.

Barbosa (2004) pontua que existem dois fatores que devem ser considerados centrais nas atividades de modelagem no contexto educacional. O primeiro é que as situações a serem analisadas devem se apresentar como problemas para os alunos; o segundo, que a situação deve envolver dados reais. Entretanto, outros fatores a destacar em uma atividade de modelagem são: a situação e o problema em estudo podem ser sugeridos pelo professor, pelo aluno ou por um acordo entre eles, consoante aos momentos supracitados; a resposta para o problema pode não ser única e, inclusive, conduzir a novas questões.

A resposta para o problema depende, de modo geral, dos encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos e de seus conhecimentos e das intervenções realizadas pelo professor. Todavia, é importante que tais intervenções e a independência dos alunos mantenham certo grau de equilíbrio, de forma a garantir autonomia dos alunos frente ao problema em estudo e em relação às estratégias de resolução adotadas. Para Vertuan (2013, p.25), "um professor que se propõe a realizar atividades de modelagem precisa monitorar suas intervenções para não impor resoluções aos alunos".

Oliveira (2010) destaca aspectos relacionados à insegurança dos professores no que concerne ao modo como intervir na condução das atividades de modelagem matemática com as quais os alunos estão envolvidos. Nesse estudo a autora identifica tensões nos discursos dos professores, constituídas pela "descontinuidade entre os discursos presentes na prática pedagógica e o discurso sobre modelagem matemática, mudando os modos de interações comunicativas em sala de aula" (p. 48). Os discursos da prática pedagógica referem-se àqueles já estabelecidos e consolidados no âmbito do ensino da Matemática, e o discurso sobre Modelagem Matemática pode ser entendido como um discurso que promove autonomicidade dos alunos com as atividades de modelagem matemática.

Dessa forma, em Modelagem Matemática compete ao professor orientar os alunos, principalmente, no sentido de promover que eles estabeleçam relações entre seus conhecimentos, seja da situação em estudo, seja da matemática, ou entre ambos.

> Por vezes, pode ser útil o professor proporcionar um momento de discussão durante a realização da atividade com o objetivo de ajudar os alunos a ultrapassar certas dificuldades, de motivá-los em fases mais críticas da atividade, ou mesmo de enriquecer a investigação sobre o problema em estudo. Esse momento é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre a atividade bem como sobre o papel da Matemática na sociedade (DIAS, 2005, p.43).

Contudo, atividades de modelagem também podem requerer dos alunos conceitos matemáticos “novos” e, nesse sentido, favorecer que o professor os ensine; “apresente os conteúdos matemáticos *necessários* para uma compreensão de sua própria realidade e o fortalecimento dos vínculos sociais” (CALDEIRA, 2009, p. 37).

Se “as discussões que se desenvolvem no âmbito de aulas permeadas por atividades de modelagem estão diretamente relacionadas com interesses de grupos de alunos e com características de cada atividade em particular” (ALMEIDA e DIAS, 2007, p. 265), mobilizando conhecimentos matemáticos articulados com conhecimentos sobre a situação que orienta o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática os alunos podem obter modelos matemáticos que descrevam tal situação. Segundo Bean (2012, p. 3) a elaboração de um modelo incorpora uma variedade de procedimentos que se sobrepõem uns aos outros e se encadeiam de maneira não linear, em uma dinâmica de conceituação e reconceituação.

Nos modelos matemáticos representativos da situação são considerados o recorte e as hipóteses e, nesse sentido, precisam ser interpretados levando-se em conta os limites e os alcances desses modelos. A aceitação da resposta para o problema investigado está vinculada às interpretações dos alunos que desenvolvem a atividade de modelagem matemática e pode sinalizar que o modelo é adequado para responder ao problema ou que há necessidade de considerar outros aspectos da situação, bem como revisitá-los.

No âmbito da sala de aula, considerados o segundo e o terceiro momento propostos por Almeida e Dias (2004), é importante que os alunos comuniquem os resultados da atividade de modelagem aceitos pelo grupo como resposta para o problema. É nessa comunicação que os alunos têm oportunidade de argumentar acerca dos encaminhamentos assumidos por eles na obtenção de tais resultados, além de se configurar em um espaço para os alunos se convencerem e convencerem aos demais alunos da sala e ao professor de que a solução obtida é consistente em relação aos conceitos matemáticos utilizados e à situação em estudo.

Para além desses papéis, a comunicação dos resultados pode assumir um caráter avaliativo e favorecer que o professor evidencie elementos que venham a compor a avaliação das atividades de modelagem, bem como das compreensões dos alunos. Quando se avalia os alunos no âmbito de atividades de modelagem, conforme enfatizado por Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p. 58), “um resultado que poderia ser considerado errado não equivale naturalmente a uma nota baixa”, mas, como bem lembrado pelos autores, “pode indicar novos caminhos e estratégias”. Nesse sentido, ao avaliar os alunos no âmbito de atividades de modelagem matemática é indicado considerar suas iniciativas, os significados por eles atribuídos aos conceitos matemáticos e atentar para os recortes da situação por eles realizados, bem como para as limitações e alcances dos modelos matemáticos que conduzem à solução do problema.

Pensar em atividades de modelagem matemática no contexto das salas de aula remete-nos a considerar as perspectivas segundo as quais o trabalho com modelagem em salas de aula pode estar pautado.

1.3 Perspectivas da Modelagem Matemática

O trabalho com atividades de modelagem matemática em sala de aula, geralmente, é direcionado pelos objetivos pretendidos pelos protagonistas (alunos e professores) desse ambiente. Nesse sentido, tais objetivos podem estar relacionados com a intenção de desenvolver conceitos matemáticos, ensinar e/ou aprender Matemática, aplicar conceitos matemáticos para compreender uma situação aparentemente não matemática ou intervir sobre ela, entre outros.

Como os objetivos para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser de diversas naturezas, o foco das discussões possibilitadas por essas atividades pode residir mais em um aspecto que em outro. Todavia, esses objetivos orientam o trabalho do professor e dos alunos envolvidos com tais atividades. Dependendo do objetivo, não importando se o tema ou o problema em estudo foi proposto pelo professor, escolhido pelos alunos ou aceito a partir de um acordo entre ambos, o foco das discussões possibilitadas pela atividade de modelagem tomam direções diferentes e determinam uma dentre tantas outras possibilidades de encaminhamentos para a atividade de modelagem.

Os encaminhamentos das atividades de modelagem carregam com eles o que Kaiser e Sriraman (2006) definem como perspectivas da Modelagem Matemática. Essas perspectivas, pensadas com base em trabalhos que tratam do envolvimento de alunos, de diferentes países com Modelagem, recebem as denominações: realística ou aplicada, epistemológica ou teórica, educacional, sócio-crítica, contextual e cognitivista. Para esses autores, nessas perspectivas evidenciam-se aspectos relativos aos principais objetivos que orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem.

Uma atividade de modelagem desenvolvida segundo a perspectiva realística prioriza habilidades de resolução de problemas, que têm origem em situações relacionadas às indústrias, ambientes de trabalho ou à ciência, destacando aspectos pragmáticos ou utilitários. Investigar uma situação com atenção voltada para os modos de solucionar o problema e para as habilidades necessárias para a sua resolução exemplifica uma atividade de modelagem matemática nessa perspectiva.

Na perspectiva epistemológica, atividades de modelagem são estruturadas com o intuito de desenvolver conceitos matemáticos. Sendo assim, considera-se a inclusão, em sala de aula, de situações que requerem desenvolvimento da matemática enquanto teoria.

Destaca-se na perspectiva educacional olhar para os modelos matemáticos com relação às suas potencialidades tanto na interpretação da situação quanto como meio para aprender matemática. Essa perspectiva integra a análise de situações de contextos exteriores à Matemática, como na perspectiva realística, mas ao mesmo tempo, se preocupa com os conceitos matemáticos utilizados para responder ao problema, aspecto também presente na perspectiva epistemológica.

Ainda, segundo Kaiser e Sriraman (2006), a perspectiva educacional pode ser considerada a partir de dois objetivos: se a atividade de modelagem desencadear processos de aprendizagem, a perspectiva educacional é didática; agora se o desenvolvimento da atividade conduzir ou favorecer a introdução de conceitos matemáticos, a perspectiva educacional é denominada conceitual. Em ambas as classificações, didática ou educacional, ao professor compete acompanhar e assessorar os encaminhamentos adotados pelos alunos e realizar intervenções quando necessárias.

Em outra perspectiva, a sócio-crítica, o desenvolvimento da atividade de modelagem é envolto por ideias que enfatizam o pensamento crítico dos alunos acerca da natureza, das influências e dos usos dos modelos matemáticos na sociedade. Nesse sentido, as atividades contribuem para a formação da autonomia e preparam os alunos para exercer a cidadania e intervir de forma consciente nos debates baseados em matemática e que nem sempre agregam pessoas que ou não se sentem à vontade com a matemática ou que acreditam que quando algo é mostrado por meio da matemática não pode ser refutado.

Em se tratando da perspectiva contextual, as atividades de modelagem são abordadas a partir de problemas que têm por finalidade a contextualização de situações reais ou a aplicação de conteúdos matemáticos. O interesse com atividades de modelagem nessa perspectiva é motivar os alunos e promover aprendizagem. A resolução do problema está relacionada à interpretação de enunciados, e a obtenção do modelo matemático se configura em um momento de construir e reconstruir ideias matemáticas.

A perspectiva cognitivista, por sua vez, considera atividades de modelagem matemática com o intuito de favorecer que os alunos mobilizem conhecimentos, da situação, de matemática e de ambos, de forma articulada. O desenvolvimento de atividades de modelagem, nessa perspectiva, pode atender a vários objetivos, entre eles, a possibilidade de analisar os encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos na busca por solução para o problema de uma situação, dita na caracterização usada em Modelagem – situação inicial, conforme pretendido nesta investigação.

Analisando essas perspectivas parece razoável considerar que uma mesma atividade de modelagem pode contemplar mais que uma das perspectivas simultaneamente. Para Almeida e Vertuan (2010, p.31), ao trabalhar com atividades de modelagem a partir de várias perspectivas os professores têm oportunidade de “refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas” que, por sua vez, podem trazer “implicações para a forma como o professor conduz o desenvolvimento das atividades”.

Ao assumir, no desenvolvimento desta pesquisa, a perspectiva cognitivista, as *ações cognitivas* dos alunos em atividades de modelagem, como caracterizadas por Almeida e Silva (2012) tornam-se objetos de estudo, pois elas favorecem a análise dos encaminhamentos e procedimentos adotados pelos alunos na investigação relacionada ao tema que suscitou a atividade de modelagem, da identificação de um problema a resolver até a aceitação de uma resposta para tal problema.

1.4 Ações Cognitivas dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática

Ao reconhecer que em atividades de modelagem os alunos se voltam inicialmente para a situação analisada e para o problema que emergiu dessa situação e, no término da atividade, para a solução obtida para o problema, durante tais atividades, os alunos têm oportunidade de desenvolver formas de ver, pensar e agir sobre a situação e sobre seus conhecimentos. Essas formas, segundo Almeida e Silva (2012), com base na Taxonomia de Bloom como instrumento associado à análise do desenvolvimento cognitivo, estão associadas ao que as autoras caracterizam 'ações cognitivas' dos alunos em atividades de modelagem. Discussões acerca das formas de ver, pensar e agir sobre os conhecimentos mobilizados pelos alunos ao se envolverem com atividades de modelagem matemática também são foco de trabalhos de Borromeo Ferri (2007, 2010).

A situação a ser analisada, geralmente, conhecida em alguns aspectos pelos alunos, pode vir acompanhada de uma questão a investigar ou ser identificado um problema a resolver à medida que aspectos que permeiam a situação passam a ser conhecidos. Como conhecer o tema de estudo implica se cercar de informações sobre ele, consultas em jornais, revistas, sites especializados e outros, podem conduzir os alunos, ainda nesse começo do desenvolvimento da atividade de modelagem a estabelecer uma representação mental da situação em estudo, formular um problema para resolver e definir metas e estratégias que possibilitem sua resolução.

Almeida e Silva (2012) consideram que a passagem da situação inicial para a representação mental da situação implica "diversas habilidades como: entendimento da situação, apreensão de significado, interpretação de fatos e informações, agrupamento de ideias" (p. 629). Nessa passagem, identifica-se, segundo as autoras, a ação cognitiva *compreensão da situação* e, com isso, torna-se possível a identificação de um problema.

A formulação de uma questão para ser resolvida também exige dos alunos o reconhecimento de que a questão realmente se configura como um problema para eles e para o professor. Também, na formulação de um problema, além de se conhecer sobre o tema investigado, é necessário selecionar elementos da situação inicial que são relevantes para a investigação pretendida. Para Almeida e Silva (2012, p. 629) a formulação de um problema "requer a estruturação e/ou simplificações deliberadas das informações acerca da situação" e a ela está associada a ação cognitiva *estruturação da situação*.

Embora o inteirar-se da situação possa ocorrer ao longo da atividade de modelagem, pois informações podem ser revisitadas ou vir a ser descartadas ou, ainda, novas informações podem ser consideradas, uma vez elaborado o problema em linguagem natural, busca-se reescrevê-lo em linguagem matemática.

Nessa transição de linguagens, que vem pautada pelo levantamento de hipóteses, pela seleção de variáveis e pela simplificação das informações, ocorre uma transformação do problema. Ele agora vem escrito por meio de representações matemáticas que são mediadas pelas características da situação e pelos conceitos e procedimentos matemáticos.

A ação cognitiva denotada *matematização* (ALMEIDA e SILVA, 2012) é que permeia o trânsito entre a identificação do problema e sua representação mental. Segundo as autoras,

> [...] a situação-problema se apresenta em linguagem natural e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática; gera-se, assim, a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática). Esta linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido; a elaboração de um modelo matemático é mediada por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características, a organização de partes, a identificação de componentes (ALMEIDA e SILVA, 2012, p.629).

A intenção de resolver o problema é o que move os alunos a se envolver com a seleção de variáveis e o levantamento de hipóteses e pode conduzi-los a elaborar modelos matemáticos que considerem aspectos da situação inicial, entendidos como relevantes para o problema investigado e, consequentemente, para a solução assumida como resposta ao problema.

Para encontrar uma solução para o problema os alunos precisam matematizá-lo, resolvê-lo segundo um conjunto de procedimentos e inferir um resultado; assim sendo, tanto a obtenção ou elaboração quanto a interpretação do modelo matemático da situação em estudo vêm revestidas de intencionalidades e interesses. Se intenções e interesses não são estáticos, também não o é o modelo matemático que conduziu à solução para o problema. Como salientado por Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), o "modelo matemático produz ideias que, por sua vez, afetam as hipóteses" (p. 29). Rever as hipóteses, seja para realizar algum tipo de alteração, ou para negá-las, reforça a ideia de que um problema advindo de uma situação pode não ter resposta única. Ele pode assumir diferentes soluções, considerados os limites, as restrições e os alcances dos modelos matemáticos.

Modelos matemáticos evidenciam aspectos da situação analisada e permitem uma análise sobre a mesma, ou ao menos, sinaliza a necessidade de retomar os procedimentos das atividades de modelagem quando da intenção de encontrar uma solução para o problema em estudo.

Almeida e Silva (2012, p. 629) enfatizam que os alunos ao se envolver com a resolução do problema utilizam "conceitos, técnicas, métodos e representações". Levados a apresentar resultados matemáticos para o problema, eles usam seus conhecimentos prévios, buscam por padrões, recorrem a ferramentas computacionais, coordenam diferentes representações de objetos matemáticos[4], aprendem conceitos novos, ressignificam conceitos já conhecidos, entre outros. Essas autoras associam à busca por resultados matemáticos para o problema a ação cognitiva *síntese*.

Analisar a resposta de um problema, por parte dos alunos que desenvolvem a atividade de modelagem, é realizar um processo avaliativo que privilegie tanto a representação matemática associada ao problema quanto a resposta obtida. Assim, a análise acerca do resultado que se configura como resposta para o problema, exige dos alunos um olhar criterioso sobre a representação matemática associada ao problema, sobre os procedimentos matemáticos utilizados e sobre a adequação da resposta para a situação.

[4] Objeto matemático, parafraseando Godino (2002), é qualquer entidade ou coisa à qual é feita referência, indicada, sinalizada, quando se constrói, se comunica ou se aprende matemática.

Tal análise também pode conduzir os alunos a pensar na problemática na qual o problema foi originado e em atitudes que lhes permitam agir sobre ela. Na ação cognitiva *interpretação e validação*, "o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas" (ALMEIDA e SILVA, 2012, p. 629).

Uma vez avaliada a resposta e assumida, por aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem, como sendo razoável ou satisfatória, faz-se importante comunicar tal resposta do problema aos demais alunos da turma. A essas atitudes está atrelada, segundo Almeida e Silva (2012), a ação cognitiva *comunicação e argumentação.*

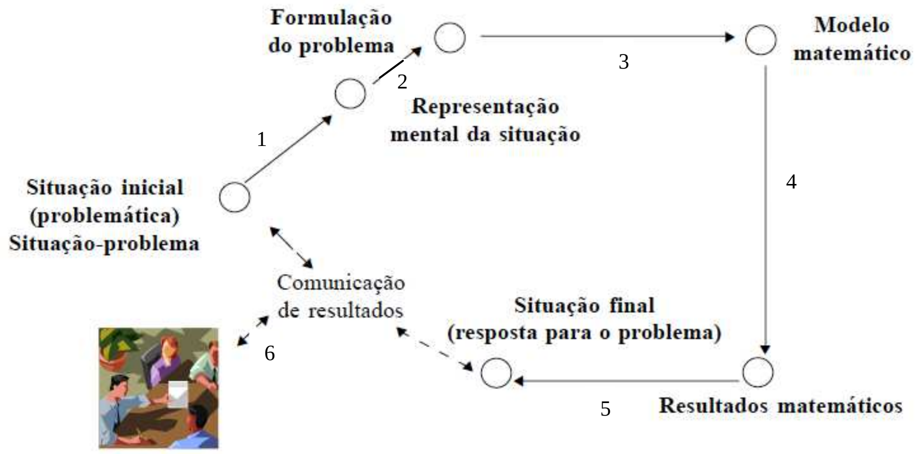
Essa comunicação se dá em um contexto argumentativo no qual as estratégias utilizadas para resolver o problema são expostas e ao mesmo tempo defendidas. Há também a intenção, por parte dos alunos envolvidos com a atividade, de convencer a todos, demais alunos e professor, que a solução encontrada é consistente, seja em relação aos conceitos matemáticos, seja em relação à situação inicial.

> Esta comunicação implica, essencialmente, desenvolver uma argumentação que possa convencer, aos próprios modeladores e àqueles aos quais estes resultados são acessíveis, que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados quanto da adequação desta representação para a situação em estudo (ALMEIDA e SILVA, 2012, p. 629).

Caso o grupo envolvido com a atividade de modelagem não reconheça que a resposta por eles obtida é satisfatória, compete a eles revisitar as informações acerca da situação, bem como buscar novas informações, reestruturar as hipóteses assumidas e recomeçar a atividade.

Os processos, de idas e vindas, de uma atividade de modelagem, mesmo que se tenha como foco a solução para o problema, são acompanhados por atitudes interpretativas e avaliativas dos alunos envolvidos com a atividade e pode levá-los a vivenciar mais de uma vez as ações cognitivas ilustradas na Figura 2.

Figura 2 – As ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática



Ações cognitivas dos alunos

1- Compreensão da situação
2- Estruturação da situação
3- Matematização
4- Síntese
5- Interpretação e validação
6- Comunicação e argumentação

Fonte: Adaptado de Almeida e Silva (2012, p. 630).

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, além de privilegiar o envolvimento dos alunos com essas seis ações cognitivas, os provoca a pensar que qualquer situação que se proponha estudar exige uma dose de subjetividade. Segundo Bassanezi (2003), do problema para a sua resolução, o aluno se envolve em processos investigativos e interpretativos que conduzem à utilização de conceitos matemáticos que representa de alguma forma a situação em estudo. Para D’Ambrosio (2003), as representações dos alunos são subjetivas, pois são resultados de seus procedimentos na interação entre a situação em estudo e a Matemática.

É por meio das ações cognitivas, sejam elas implícitas (por meio de procedimentos) ou explícitas (por meio de representações, de modo geral, simbólicas), nas quais os alunos se envolvem quando desenvolvem atividades de modelagem que signos são manifestados. Tais signos, que permeiam o desenvolvimento da atividade, retratam as intenções dos alunos na busca por uma solução para o problema e seus conhecimentos acerca da matemática e da situação em foco.

Esses diversos signos, utilizados e/ou produzidos pelos alunos, manifestados no desenvolvimento de atividades de modelagem e que se articulam nos encaminhamentos assumidos por eles, precisam ser compreendidos de um ponto de vista semiótico. É com o propósito de refletir sobre os signos que, no próximo capítulo aborda-se a Semiótica – a ciência dos signos.

CAPÍTULO 2

2. SOBRE SEMIÓTICA

Neste capítulo apresentamos as vertentes que originaram diferentes linhas de estudo da Semiótica e explicitamos qual delas orienta a investigação realizada neste trabalho. Nesse encaminhamento, focalizamos aspectos relativos aos signos, assim como sua caracterização. Um panorama das pesquisas que abordam Semiótica e Educação Matemática é esboçado na sequência, na intenção de se compreender as perspectivas semióticas existentes e sob quais enfoques os signos são nelas discutidos. Por fim, abordamos as funções semiótica e epistemológica dos signos e o modelo – triângulo epistemológico – proposto por Steinbring (2006), relacionado a estas funções.

2.1 TEORIA SEMIÓTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Historicamente, conforme Santaella (1999), a Semiótica se originou em três locais distintos e culturalmente diferentes: União Soviética, Europa Ocidental e Estados Unidos. Como os estudos a respeito dos signos aconteceram, paralelamente, nesses locais, eles têm características específicas e carregam diferenças quanto à natureza e ao papel do signo.

Na União Soviética, o psicólogo Lev Semenovitch Vygotsky desenvolveu seus estudos sobre o signo a partir do resgate de trabalhos dos filósofos Viesse-lovski e Potiebniá que enraizaram as descobertas do estruturalismo linguístico no século XX com o linguista Nicolai Iakovlevici Marr. Contudo, não se encontra nas obras de Vygotsky uma teoria semiótica propriamente dita, mas ideias não sistematizadas a respeito do signo, particularmente o linguístico (a palavra). Segundo Santaella (1999), os estudos de Vygotsky mostram o interrelacionamento da linguagem, dos ritos antigos, dos gestos e da língua articulada.

Na Europa Ocidental, foi Ferdinand de Saussure (1857-1913) quem se dedicou ao estudo dos signos. Para ele, a língua e a fala, inseparáveis, deveriam ter uma ciência de estudo abrangente e vasta. Santaella (1999) coloca que Saussure denominou tal ciência como Semiologia – estudo de todos os sistemas de signos na vida social. Quando ministrou o curso de Linguística Geral, na Universidade de Genebra, no final da primeira década do século XX, o seu trabalho teve grande repercussão por toda a Europa e, posteriormente por todo o mundo e isso possibilitou a Saussure divulgar os seus estudos sobre a língua como sendo uma estrutura direcionada por leis e regras específicas e autônomas. Segundo Santaella (1999), para Saussure, a Linguística seria um subdomínio da Semiologia que, por sua vez, seria um subdomínio da Psicologia Social. Quando se fala de uma concepção derivada dos trabalhos de Ferdinand de Saussure, considerado o pai do estruturalismo linguístico e principalmente em uma tradição mais ligada à linguística verbal, é comum o uso do termo Semiologia ao invés do termo Semiótica. A concepção de signo para Saussure era de uma relação dual ou diádica, entre *significante e significado* – ou a forma externa e a essência mental do conceito – considerando o signo como unidade básica da linguagem, quer dizer, toda linguagem seria um sistema de signos.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), pensador americano contemporâneo de Saussure, ao contrário deste, não se ocupou especificamente da língua. O filósofo, físico e matemático, Peirce, de acordo com Santaella (1999), iniciou a doutrina geral dos signos ao formular sua teoria, reconhecida como *teoria peirceana*. Já em tenra idade, Peirce tinha muito interesse pela Lógica e no início de seus estudos a considerava como um ramo da Semiótica. Mais tarde, ao longo dos seus estudos, caracterizou a Semiótica como sendo uma teoria geral de todos os tipos possíveis de signo, emergindo então, uma teoria lógica, filosófica e científica da linguagem[5]. Sua Semiótica trata dos signos em geral, sem necessidade de estarem organizados em sistemas, como o linguístico. Segundo Santaella (1999), a Semiótica Peirceana possibilitou o desenvolvimento de muitas semióticas especiais, originando a aplicação de diversos processos e produtos da linguagem. Os trabalhos de Peirce foram reconhecidos, somente após a sua morte, por célebres como Karl Popper e Bertrand Russel que o consideraram um dos maiores pensadores de todos os tempos.

Na tradição peirceana, o signo tem unidade triádica, assim como no caso do signo linguístico tratado por Vygotsky. Muito embora o signo tenha unidade triádica em ambas as tradições, americana e russa, enquanto na americana a unidade triádica do

[5] Linguagem é assumida como uma forma de comunicação e de significação.

signo envolve o fundamento[6] do signo, o objeto e seu interpretante, Vygotsky, segundo Nöth (2008), trata o signo linguístico como composto da palavra (realidade física), do referente (aquilo, material ou não, a que a palavra se refere) e do significado (aspecto sob o qual a palavra refere ao referente).

Ainda que os estudos atuais acerca da Semiótica estejam pautados nas tradições vygotskyana, saussureana ou peirceana, Santaella (1999) pontua que na Antiguidade Clássica, filósofos como Platão e Aristóteles haviam dedicado atenção aos signos. Platão, por exemplo, observou, entre outras coisas, a estrutura triádica do signo onde distinguiu: *onona* (o nome), *eidos* ou *logos* (a noção, ideia) e *pragma* (a coisa referente) e Aristóteles incluiu o signo no âmbito da Lógica e da Retórica, definindo-o em uma relação de implicação ou como uma premissa que leva a uma conclusão (BATISTA, 2003).

Mesmo que esses filósofos tenham deixado contribuições relevantes para o desenvolvimento da Semiótica, Santaella (1999) ressalta que as maiores contribuições para essa ciência são advindas dos estudos de Saussure e de Peirce. Contudo, o distanciamento entre a semiótica americana e a europeia deve-se às suas raízes distintas. Enquanto na semiótica europeia os estudos eram pautados nas articulações de formas significantes, considerando a análise dos signos como apenas uma etapa de seu percurso, na americana, a preocupação centrava-se na análise dos diversos tipos de signos, dado sua natureza triádica, e o que eles constituem ou representam. Todavia, são as contribuições de Peirce acerca do signo que orientam a realização desta pesquisa.

Como Peirce emprega o termo semiótica com a preocupação de manter-se fiel às origens gregas do termo *semeion*, que segundo Santaella e Nöth (1998, p. 21), pode ser traduzido como sinal ou signo, ele desenvolve sua teoria – *teoria semiótica peirceana* – pautado em estudos sobre os modos de se obter e comunicar conhecimento a partir de signos. Em sua teoria, Peirce ressalta que o conhecimento consiste em um processo relacionado à cognição, e que se utiliza de signos para ser evidenciado. Santaella (2012) ressalta que as definições peirceanas de signo são muitas e que nelas há primazia por abstrações. Isso certamente influencia na abrangência de situações concretas que podem ser discutidas a partir de tais definições.

---

6 Fundamento é definido por Santaella (2005, p. 43) como “uma propriedade ou caráter ou aspecto do signo que o habilita a funcionar como tal”.

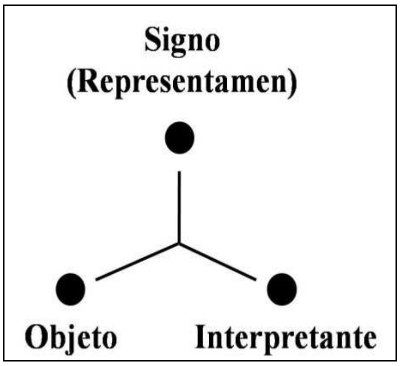
Entre os contributos de Peirce, Santaella (1999) aponta que há de se considerar, sobretudo, três aspectos: a definição de signo, a definição de semiose e a visão pansemiótica de mundo, esse último, ressaltado em vários momentos de sua obra quando enfatiza que nunca esteve em seus poderes estudar qualquer coisa – matemática, ética, astronomia, psicologia, fonética, economia, meteorologia, entre outras – exceto com o olhar voltado para a semiótica (PEIRCE, 2012).

Relativo à noção de signo, Peirce (2012) esclarece que ela é considerada tão ampla, que o signo não precisa ter uma natureza plena de linguagem, podendo ser uma mera ação ou reação, que verbaliza uma emoção ou sentimento. Nesse sentido, ao definir signo, Peirce (1972) estabelece uma relação entre três elementos: o representamen (ou fundamento do signo), o objeto e o interpretante.

> Um signo, ou *representamen*, é algo que, sob certo aspecto ou algum modo, representa alguma coisa para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo melhor desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o *fundamento* do representamen (PEIRCE, 1972, p. 94, grifos do autor).

A definição de signo, portanto, envolve uma estrutura relacional triádica (Figura 3) na qual dois elementos (o signo e o seu objeto) entram em relação com um terceiro (o interpretante). Segundo Santaella (2007, p. 7) "o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete[7])".

Figura 3 – Relação triádica do signo



Fonte: Adaptado de Otte (2006, p. 22) (Tradução nossa).

[7] Santaella (2007) ao ser referir ao intérprete explicita que ele está associado à mente interpretadora capaz de relacionar o signo com o objeto. Relativo à mente interpretadora coloca que ela não precisa ser necessariamente humana, afinal, máquinas também interpretam sinais (SANTAELLA 2005).

Nessa relação, o signo corresponde a uma estrutura que sustenta objeto e interpretante e desenvolve uma função de mediação entre esses dois elementos sígnicos, formando uma tríade do signo. Como ressaltado em Seeger (2004, p. 209), "paradoxalmente, *o signo é a tríade e parte dela*[8]" (Tradução nossa). Ou seja, além de ser a tríade, é um elemento semiótico da tríade, estabelecendo uma relação triádica.

Na tríade semiótica fica expresso que não há relação apenas entre objeto e signo, mas que essa relação está atrelada à condição de que qualquer relação entre objeto e signo só é possível se formulada em relação a um terceiro elemento, caracterizado como interpretante. "Não pode qualquer coisa ser um signo para um objeto; essa coisa, ao mesmo tempo, tem que estar relacionada a um interpretante[9]" (SEEGER, 2004, p. 211, Tradução nossa).

Nesse sentido, o signo existe somente se puder representar[10] algo diferente dele, pois o signo não é o objeto, ele está no lugar do objeto (SANTAELLA, 2012). Ou seja, ele é determinado pelo objeto.

Peirce, ao se referir ao objeto, o caracteriza como "uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir [...]" (PEIRCE, 2012, p. 48). Essa existência do objeto, mencionada por Peirce, sinaliza que o signo é o meio pelo qual o objeto é acessado, todavia, há a necessidade de um intérprete para que a ação do signo seja efetivada. Segundo Almeida (2010), "a ação do signo de 'estar no lugar de' só se completa se houver alguém (ou algo) capaz de interpretar essa relação" (p. 390). Neste sentido, Peirce (1972) afirma que da relação entre signo e objeto resulta outro signo, o interpretante. No entanto, o interpretante é um signo que depende do conhecimento do intérprete sobre o objeto e sobre aquilo que é representado pelo signo. Como afirma Santaella (2007, p. 23), o interpretante corresponde ao "efeito interpretativo que o signo produz em uma mente".

Os signos, portanto, se referem a um certo referente ou a um certo contexto que representa algo que se quer comunicar ou representar. Considerando o que Peirce

[8] Tradução de: "Paradoxically, the sign *is* the total triad and *part* of the triad" (SEEGER, 2004, p. 209).
[9] Tradução de: "Something cannot be a sign for an object if it is at the same time a sign for an interpretant" (SEEGER, 2004, p. 211).
[10] Segundo Peirce (2012, p. 61) representar é "estar em lugar de, isto é, estar em uma tal relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro".

(2012) denota por representar, o signo não possui capacidade de substituir o objeto, mas de estar no lugar dele.

A relação do signo com seu objeto vem pautada na ideia de que o objeto do signo é aquele ao qual o signo se refere. No caso de uma foto de um gato, por exemplo, tem-se que o signo é a imagem visualizada na foto enquanto o objeto é o gato e a forma como ele foi retratado. Entretanto, Peirce estabeleceu uma distinção entre objeto dinâmico e objeto imediato. No objeto dinâmico o assunto é tratado pelo signo. Em um provérbio, por exemplo, a frase que constitui o provérbio é o signo e o assunto nele abordado é o objeto dinâmico. Relativo ao objeto imediato, este é o modo como o objeto dinâmico é representado, sugerido ou abordado. Um exemplo utilizado por Santaella (2007) que ilustra essa classificação refere-se a um fato apresentado em dois jornais diferentes. Como o fato noticiado é o mesmo, o objeto dinâmico, nos dois jornais é também o mesmo, mas o objeto imediato, que é a forma com que esses dois meios de comunicação vão tratar o assunto, vai ser diferente dependendo do perfil e do estilo de cada jornal.

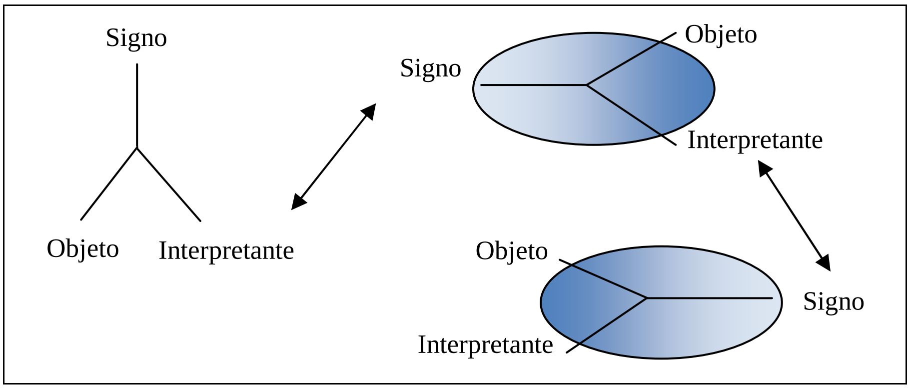
Sendo assim, os efeitos cognitivos exercidos pelo signo estão em consonância com o tipo de objeto – objeto imediato ou objeto dinâmico – que o signo representa para o intérprete. Peirce (1972) afirma que cabe ao intérprete identificar o objeto dinâmico por meio de experiência colateral[11].

Ao observar um quadrado construído em um software de geometria, por exemplo, observa-se um signo, que representa algo em lugar de outra coisa. Para um intérprete que tem experiência colateral no contexto matemático, o signo quadrado pode representar um retângulo. Nesse caso, o retângulo é o objeto dinâmico desse signo. Para um intérprete que não tem experiência colateral com as características das figuras geométricas, o quadrado é um signo cujo objeto é imediato. Neste sentido, existem objetos imediatos de um signo que podem se tornar objetos dinâmicos à medida que o intérprete venha a se familiarizar, ou seja, segundo Santaella (2005, p. 45), à medida com que o "intérprete deve ter tido ou ter experiência colateral ao signo para que o signo possa ser interpretado".

[11] Ao se remeter à experiência colateral, Peirce (1989, p. 61) refere-se "à intimidade prévia com aquilo que o signo denota".

Cada signo, na mente do intérprete, gera um interpretante que, por sua vez, funciona como representamen de um novo signo; “a ação de gerar, cedo ou tarde, interpretantes efetivos é própria do signo” (SANTAELLA, 2012, p.9). Isso faz com que esse processo de geração de interpretantes e, portanto, de signos, seja um processo dinâmico na mente do intérprete. Segundo Santaella (2012, p.18), “faz parte da natureza do próprio signo que ele tenha o poder de gerar um interpretante, e assim por diante”. A Figura 4 ilustra esse processo de geração de signos, em um contexto de trama[12].

Figura 4 – Trama semiótica



Fonte: Adaptado de Seeger (2004, p. 211) (Tradução nossa).

A *trama semiótica*, conforme proposta por Seeger (2004), sugere que o processo de geração de signos seja estendido para o infinito. A esse processo *ad infinitum* Peirce caracterizou como semiose (PEIRCE, 2012). Na palavra semiose, o sufixo *ose*, derivado do grego significa ação, e o prefixo semi, relativo à semion, denota signo, então semiose é a ação do signo. Ou seja, a semiose é uma ação que envolve a cooperação entre os três elementos da tríade: o signo, seu objeto e seu interpretante; é o “processo no qual o signo tem um efeito cognitivo sobre o intérprete” (NÖTH, 2008, p. 66).

Referente à ação específica do signo ou semiose, Peirce (2012), assevera que os signos ganham conotações diferentes considerando que

> *signo* é tudo aquilo que está relacionado com uma Segunda coisa, seu *Objeto*, com respeito a uma Qualidade, de modo tal a trazer uma Terceira coisa, seu *Interpretante*, para uma relação com o mesmo Objeto, e de modo tal a trazer uma Quarta para uma relação com aquele Objeto na mesma forma, *ad infinitum*. Se a série é interrompida, o Signo, por enquanto, não corresponde ao caráter significante perfeito (PEIRCE, 2012, p. 28, grifos do autor).

[12] Seeger (2004) associa o processo de geração de interpretantes a uma trama no sentido de que esse processo é constituído a partir de redes entre cada um dos elementos que compõem a tríade semiótica.

Algo importante aparece quando a tríade semiótica é compreendida em um contexto de trama, pois o signo que representa o objeto, no sentido assumido por Peirce, gera o signo produzido pelo intérprete – o interpretante, que por sua vez, pode se comportar como um signo que evoca outro objeto, que modifica o interpretante anterior. Esse processo de geração de signos – semiose – é um processo característico da capacidade humana. É o sujeito o ser capaz de produzir entendimentos a partir de signos das mais diversas naturezas e da mediação entre eles. Santaella (2012) ao tratar da mediação do signo afirma que “a ação do signo ou autogeração só se consuma porque ele determina o interpretante (terceiro), que, sendo criado pelo signo, estará mediatamente determinado pelo mesmo objeto que determina o signo” (p. 25).

Aspectos relacionados à linguagem sígnica tem despertado o interesse de diversos estudiosos e, nesse sentido, a teoria Semiótica, ainda considerada relativamente nova, tem ocupado lugar de destaque nas Ciências Humanas e Sociais, sobretudo na Educação Matemática. Seus aportes teóricos têm subsidiado inúmeros estudos, como os destacados na seção a seguir.

2.2 Abordagens Semióticas na Educação Matemática

O interesse por compreender aspectos relativos aos signos no âmbito da Matemática tem inquietado diversos estudiosos e os levado a considerar a Semiótica, enquanto ciência da linguagem, a ciência dos signos, como referencial teórico para possibilitar reflexões acerca das mais variadas inquietações. Tal interesse por discutir aspectos relacionados aos signos e suas possíveis relações com a aprendizagem em matemática levou a um crescente número de estudos sobre Semiótica na Educação Matemática. Tais estudos compõem uma variedade de visões a respeito da semiótica nesse cenário.

Hoffmann (2006) discute a variedade de abordagens semióticas encontrada nos trabalhos[13] que abordam os signos e o processo de ensino e de aprendizagem da matemática a partir do que ele denominou *campos principais:*

[13] Os trabalhos segundo os quais Hoffmann (2006) se ancorou para estabelecer as diferentes abordagens semióticas existentes referem-se aos artigos publicados em edição especial do periódico *Educational Studiens in Mathematics,* volume 61 de 2006.

1. Foco nos objetos matemáticos e no uso de representações para tornar esses objetos acessíveis.

2. A significação é assumida como problema central.

3. Aspectos epistemológicos relativos aos signos e à Matemática tomam lugar de destaque.

4. Considera o papel que os signos desempenham na comunicação e na interação e como o significado pode ser estabelecido cooperativamente.

Considerada a abrangência de cada um desses quatro campos propostos por Hoffmann (2006) e o crescente número de pesquisas que versam sobre Semiótica e Educação Matemática, além dos trabalhos apontados por esse autor trazemos para a discussão outros[14] em um esforço de evidenciar como os signos estão neles presentes. Não obstante, como nesses quatro campos, em síntese, são considerados aspectos relativos à cognição que podem ser evidenciados por meio de semioses, alguns dos trabalhos referenciados podem envolver mais de uma das abordagens semiótica contempladas nos campos propostos por Hoffmann (2006).

No primeiro campo abordado por Hoffmann (2006) e que tem como foco os objetos matemáticos e as possibilidades para sua representação aparecem com destaque os trabalhos de Raymond Duval e de Norma Presmeg. O primeiro trata dos registros de representação semiótica em atividades matemáticas (DUVAL, 1988, 2003, 2004, 2011). Porém, considerações acerca de seus trabalhos retratam que Duval, ao mesmo tempo em que dá grandes contribuições a respeito de sistema semiótico, deixa dúvidas quanto aos termos *sistema de representação* e *registro de representação* quando ele se refere aos *registros de representação semiótica.* A segunda autora enfatiza o fato de que para representar conexões entre diferentes áreas do conhecimento é preciso utilizar-se de meios semióticos. Presmeg, em seus trabalhos (PRESMEG, 1992, 2002, 2006), propõe um "modelo de nicho" para descrever os processos de aprendizagem da matemática. Sua intenção com esse modelo é compreender esses processos no curso do seu desenvolvimento. No entanto, o modelo de Presmeg é por vezes questionado, pois se

[14] Foge ao escopo deste estudo evidenciar abordagens semióticas presentes nos trabalhos, publicados a partir de 2006, que focalizam a Semiótica na Educação Matemática, assim, trazemos para compor os campos sugeridos por Hoffmann (2006), apenas alguns destes em uma tentativa de ampliar o quadro ensaiado por esse autor e, em certa medida, justificar o enfoque delineado nesta investigação.

“se pretende descrever os processos de aprendizagem, não se pode supor que estes processos se dão de forma linear[15]” (HOFFMANN, 2006, p. 284, Tradução nossa), como reivindicado pelo seu modelo. Além desse trabalhos, D’Amore (2006), Vertuan (2007), Silva (2008) e Rosa (2009) se inserem no conjunto de discussões que abordam o uso de representações no acesso aos objetos matemáticos.

O problema da ontologia e do conhecimento do objeto matemático é discutido por D’Amore (2006) quando o autor chama a atenção para o problema da conversão entre representações, podendo estas diferentes representações conservar o significado do seu objeto.

Vertuan (2007) desenvolve um estudo acerca dos diferentes registros associados a um objeto matemático e presentes em atividades de modelagem matemática, bem como o potencial que essas atividades têm de possibilitar tratamento, conversão e coordenação entre os registros.

Tomando para análise algumas atividades de modelagem publicadas nos anais de eventos nacional e internacional acerca da Modelagem Matemática, Silva (2008) estabelece relações entre a categorização dos signos estabelecidas por Peirce, os modos de inferência – abdução, indução e dedução – e os fenômenos de congruência e não-congruência das conversões entre registros apresentados nestas atividades.

Em Rosa (2009) a investigação está pautada no fenômeno de congruência em conversões, entre registros, realizadas por estudantes do Ensino Médio, envolvidos com atividades de modelagem.

O segundo campo tem como foco central a significação, assumida, nesse contexto, como o significado atribuído pelo sujeito que representa. Os trabalhos de Adalira Sáenz-Ludlow e Luis Radford são os que recebem destaque nessa perspectiva (HOFFMANN, 2006). Trabalhos como os de Williams e Wake (2007), Berger (2010), Manechine e Caldeira (2010), Almeida, Silva e Vertuan (2011), Almeida e Silva (2012) e Silva (2013) também são discutidos segundo a perspectiva da significação e têm sua base teórica ancorada nas tríades estabelecidas por Peirce.

---

[15] Tradução de: “If we *describe* learning processes, we cannot presuppose that these processes are performed in a linear” (HOFFMANN, 2006, p. 284, grifo do autor).

Sáenz-Ludlow (2002, 2006) com base nas ideias de Peirce de que a atribuição de significado depende da interpretação, desenvolve o conceito de "jogos de interpretação" para descrever a aprendizagem como um processo que ocorre na comunicação. Para ela, a essência dos jogos de interpretação está no processo dialógico no qual significados particulares são constantemente modificados e eventualmente convergem para os significados convencionais estabelecidos na Matemática. Os significados particulares a que se refere essa autora correspondem ao que na teoria de Lev Vygotsky se conhece como 'sentido'. Já os significados convencionais corresponde a significado como caracterizado por Vygotsky.

As assertivas de Sáenz-Ludlow (2006), portanto, contrastam a ingênua acepção de que os significados podem ser "recebidos" pelos alunos e armazenados em sua memória. Daí o forte argumento da autora de que não há comunicação sem signos e, por conseguinte, sem interpretantes. Com isso, ela argumenta que a comunicação pode provocar impactos sobre as práticas de ensino e sobre os processos de aprendizagem.

A dependência da atribuição de significado que ocorre nos tipos de interpretação que os signos despertam nas pessoas que os utilizam é o que orienta as discussões propostas por Luis Radford. Esse autor, uma vez que considera que o significado dos objetos matemáticos parece ser relativo, isto é, relativo às interpretações individuais acerca dos signos matemáticos[16], desenvolve um quadro teórico acerca da atribuição de significado e de objetos conceituais sob uma abordagem cultural da semiótica, no qual ele enfatiza o papel da cultura como central na produção dos objetos do conhecimento. A essa teoria ele denomina *teoria cultural da objetivação*[17].

Williams e Wake (2007) discutem sobre a significação no campo das metáforas[18]. Ao trabalhar com atividades de modelagem, esses autores afirmam que o significado de um modelo é gerado de forma recursiva, seja a outros domínios ou a outras representações,

---

[16] Steinbring (2006), alinhado às ideias de Peirce acerca do signo, coloca que signos matemáticos são acima de tudo signos. O adjetivo matemático acrescentado ao termo signo, tornando-o signo matemático, nesse sentido, pode ser entendido como signos que servem de instrumentos para codificar e descrever conhecimento matemático, além de servir para comunicar, operar e generalizar conhecimento matemático.

[17] Nos trabalhos de Luis Radford a objetivação do conhecimento está relacionada com a produção de significado e com o fato de que a mudança ou evolução da estrutura cognitiva do sujeito é possível quando diversos meios semióticos são combinados. Para esse autor a objetivação do conhecimento é um processo de conscientização progressiva, isto é, quando algo, qualquer objeto (concreto ou mental) é dotado gradualmente de significado pelo sujeito e revelado em gestos, em procedimentos, em símbolos, palavras, ou seja, por meio de signos (RADFORD, 2006).

[18] Metáfora é um tipo de signo na semiótica peirceana.

mas sob a influência de metáforas. Como resultado de pesquisa evidenciam que atividades de modelagem possibilitam produção de signos e a generalização do conhecimento em sistemas semióticos.

Ao tratar o fazer e o aprender matemática como um comportamento semiótico, Berger (2010), no estudo de um problema matemático usando um Sistema de Álgebra Computacional (CAS) com alunos universitários, utiliza a noção de signo triádico (signo-objeto-interpretante) para defender que um quadro semiótico, ancorado no CAS, pode apoiar ou limitar a atividade matemática, na medida em que possibilita ao aluno mudar o *representamen* no estudo de um objeto matemático e produzir vários interpretantes para esse objeto.

Apoiadas à tríade semiótica peirceana, Manechine e Caldeira (2010) estabelecem a tríade pedagógica Sentir-Perceber, Relacionar e Conceituar com relação à construção/representação de signos-pensamento desenvolvidos por alunos das séries iniciais. Para o desenvolvimento dessa tríade as autoras se pautaram na análise das inferências dos alunos em nível perceptível, indutível e dedutível.

Almeida, Silva e Vertuan (2011) buscam aproximações entre as categorizações fenomenológicas, os níveis de relações dos signos estabelecidos por Peirce e a Modelagem Matemática. A análise de uma atividade de modelagem os leva a inferir que há ações que são ‘primeiras’, ações que são ‘segundas’ e ações que são ‘terceiras’ durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, em sintonia com as categorias fenomenológicas Primeiridade, Secundidade e Terceiridade caracterizadas por Peirce.

Os diferentes tipos de raciocínio[19] abordados por Peirce (2012), associados às diferentes ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem conduzem as discussões de Almeida e Silva (2012).

Silva (2013) busca evidências da atribuição de significado para o problema e para o objeto matemático em atividades de modelagem matemática. Para o desenvolvimento dessa pesquisa a autora considera os interpretantes produzidos pelos intérpretes para atribuir significado para o objeto (problema e objeto matemático). A análise revela que os signos interpretantes emergem com o envolvimento do aluno ao longo da atividade e

[19] Esses tipos de raciocínio dizem respeito aos modos de inferência – abdução, indução e dedução – na categorização dos signos estabelecida por Peirce (2012).

se modificam com a familiarização dele com atividades dessa natureza. Ainda, a autora assevera que a atribuição de significado para o problema e para o objeto matemático se intensifica com a familiarização dos alunos com atividades de modelagem.

Trabalhos que consideram os signos como meios de conhecimento que tornam acessíveis os objetos matemáticos, evidenciando aspectos epistemológicos dos signos e da matemática compõem o terceiro campo proposto por Hoffmann (2006). Para esse autor, os estudos desenvolvidos por Michael Otte e Heinz Steinbring estão alocados nesse campo. Essa abordagem semiótica também é contemplada em Almeida (2010).

Otte (2001, 2006) se debruça sobre a análise das tríades peirceanas, principalmente a tríade – ícone, índice e símbolo –, e sinaliza que elas possibilitam compreender o papel dos signos nas atividades matemáticas. Otte (2001) ao trazer à tona a distinção entre ícone, índice e símbolo afirma que a epistemologia matemática pode basear-se em signos porque estes medeiam, de formas diferentes, a cognição e, consequentemente, tornam possível a generalização do conhecimento acerca dos objetos matemáticos. Almeida (2010), neste contexto, discute o papel da metáfora, como signo icônico, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Já Steinbring (2006), não diferencia os termos signos e símbolos, se mantém neutro em relação à tríade peirceana que estabelece relação do signo com seu objeto. Isso pode ser evidenciado, por exemplo, na Figura 5. Todavia, isso certamente não desmerece as contribuições dadas por Steinbring (1998, 2005, 2006). O que se ressalta nos seus trabalhos é que os signos têm papéis decisivos na codificação, construção e comunicação do conhecimento, sobretudo, do conhecimento matemático.

Figura 5 – Relação entre objeto e signo

Objeto/Contexto de Referência ⟷ Signo/Símbolo

Fonte: Steinbring (2006, p.134) (Tradução nossa).

A dimensão social dos signos e a questão do papel que eles desempenham na comunicação e interação e, como seus significados podem ser estabelecidos cooperativamente, são abordados no quarto campo (HOFFMANN, 2006) e discutida nos trabalhos de Candia Morgan. Embora Adalira Sáenz-Ludlow discuta sobre aspectos referentes à comunicação e interação na noção de jogos de interpretação, o foco da contribuição de Morgan é diferente. Ela não tem a intenção de analisar os signos a partir de perspectivas cognitivas ou epistemológicas, que têm como foco a questão de como a atribuição de significado, objetos matemáticos e signos podem estar relacionados com os problemas de conhecimento e aprendizagem matemática, como é feito nos trabalhos que compõem o rol de pesquisas dos três campos supracitados. Ao contrário, ela almeja olhar para os signos no que diz respeito aos seus papéis nas interações sociais. Sendo assim, Morgan (2002, 2006) concentra seus esforços no papel social dos signos, independentemente de outros possíveis aspectos e, para tanto, se utiliza do quadro teórico desenvolvido por Michael Halliday em sua *semiótica social*[20].

Considerando esses quatro campos apontados por Hoffmann (2006) e o entendimento de que é impossível compreender e operar diretamente os objetos matemáticos sem recorrência aos signos, assume-se, alinhando-se às ideias de Hoffmann (2006) que os signos são, por um lado, meios para pensar sobre objetos e relações matemáticas e, por outro, produtos de tais pensamentos. Assim, a problemática em foco nesta pesquisa sugere que ela seja inserida no terceiro campo de discussões, ou seja, na abordagerm semiótica que evidencia relações entre aspectos epistemológicos dos signos e da matemática.

Em um esforço de olhar para os signos na busca por elucidar tais relações requer considerar duas funções deles: a função semiótica e a função epistemológica. É sobre essas funções dos signos que discutimos na próxima seção.

2.3 SOBRE AS FUNÇÕES DOS SIGNOS

A importância dos signos para o pensamento humano é, em geral, incontestável e fundamental. Sem signos não existiriam pensamento e generalizações mentais ou, como assinala Peirce (2012, p.42), "não temos capacidade de pensar sem signos". Nesse sentido, os signos desempenham importantes papéis em todo o processo de geração de pensamentos e de comunicação de conhecimentos. A própria identificação geral e essencial acerca do papel do signo, de que o signo representa alguma outra coisa,

---

[20] Halliday (1978) afirma que o ponto de partida da semiótica social é o reconhecimento de que o significado ocorre em contextos sociais e que a linguagem empregada é funcional dentro desses contextos. As ferramentas conceituais fornecidas pela semiótica social permitem um olhar completamente diferenciado para os vários papéis que os signos desempenham em contextos sociais.

legitima a importância dos signos no acesso aos objetos do conhecimento, entre eles, os objetos matemáticos.

Como os objetos matemáticos são inacessíveis à percepção humana, há necessidade de um conjunto de signos, para apreender e codificar os objetos em questão. Não obstante, se faz necessário distinguir o objeto dos seus signos e compreender que existe uma complexa relação entre os objetos matemáticos e os signos que os referenciam e que, além disso, signos diferentes que possuem a mesma referência (se referenciam a um mesmo objeto) podem ser trocados, uns pelos outros, sem alterar o objeto matemático em foco.

A relação entre objeto e signo ilustrada na Figura 6 e a caracterização de signo de que ele representa algo – está no lugar de outra coisa –, sugere questões como: que papel os signos desempenham na relação entre signos e objetos que eles referenciam? Na tentativa de responder a essa questão considera-se que o papel do signo está atrelado às funções[21] semiótica e epistemológica dos signos. Steinbring (2006) conceitua essas duas funções se referindo a signos matemáticos, porém, nesta pesquisa, assume-se o conceito dessas funções dos signos matemáticos para os signos em geral. Daí o termo signo na Figura 6 em detrimento do termo signo/símbolo que aparece na Figura 5.

Figura 6 – Objeto e signo – uma relação

Objeto/Contexto de Referência $\longleftrightarrow$ Signo

Fonte: Adaptado de Steinbring (2006, p.134) (Tradução nossa).

Na relação entre objetos e signos que os referenciam, os signos estabelecem elos entre as dimensões epistemológica e comunicativa dos processos de geração de pensamentos e de comunicação de conhecimentos que permeiam as atitudes dos alunos nas atividades que eles desenvolvem. Isso porque os signos medeiam as relações entre indivíduo, seu

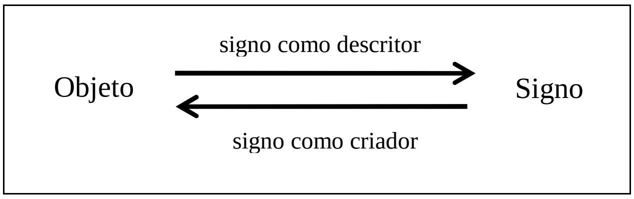
[21] Já Hjelmslev (1943, apud ECO, 2001) tratava das funções dos signos. Contudo, no contexto da teoria da linguagem, esse autor não se reporta à função do signo a partir dos termos semiótica e epistemológica. Esse autor conceitua função do signo como uma dependência entre o texto e seus componentes e entre seus componentes em si. Umberto Eco, em meados de 1979, segundo Eco (2001), ao identificar os tipos de dependências entre partes de um texto, reapresenta a função do signo se referindo a ela como função semiótica. Esse autor aponta que a função semiótica se classifica em representacionais e operacionais e nessa classificação considera que o signo não supõe mera correspondência de um algo que está em lugar de outro algo, sem que alguém deva fazer uma possível interpretação. Sendo assim, função semiótica na concepção de Eco (2001) se aproxima das funções semiótica e epistemológica denotadas por Steinbring (2006).

contexto e objeto em estudo. Segundo Steinbring (2002), à dimensão epistemológica desses processos associa-se a função epistemológica dos signos e a função semiótica deles está relacionada à dimensão comunicativa de tais processos.

A função semiótica expressa uma relação referencial, na qual a ênfase é colocada sobre o caráter de representação do signo. Nesse sentido, essa função diz respeito à capacidade que o sujeito tem de gerar imagens mentais de objetos ou ações, e por meio delas chegar ao signo (da ação ou do objeto). Segundo Steinbring (2006), relacionado à função semiótica, o signo refere-se a 'outra coisa', a um objeto de referência. O autor afirma que na função semiótica é levado em consideração "o papel dos signos matemáticos como 'algo que representa outra coisa'[22]" (STEINBRING, 2006, p. 134, Tradução nossa). Sendo assim, não há, portanto, função semiótica sem a presença simultânea desses dois elementos: objeto e signo.

Steinbring (2009) encaminha uma discussão em torno da relação entre objeto e signo na tentativa de esclarecer como se processa essa questão de interdependência e reciprocidade. O autor, portanto, se refere ao signo separando as duas direções da relação entre objeto e signo (Figura 7).

Figura 7 – Interdependência e reciprocidade entre objeto e signo



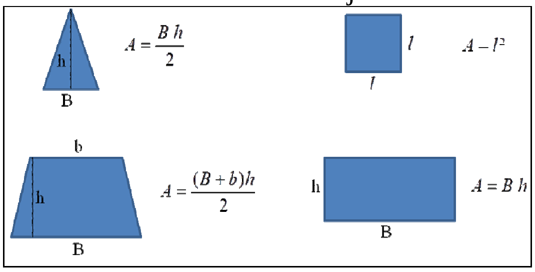
Fonte: Steinbring (2009, LXXXIV) (Tradução nossa).

No sentido objeto-signo, Steinbring (2009) caracteriza o signo como descritor, ou seja, o signo faz lembrar o objeto. Olhando, por exemplo, para $A = \frac{(B+b)h}{2}$ é possível estabelecer uma relação entre essa expressão e uma forma geométrica, isto é, a expressão, na maneira como aparece escrita, evoca um objeto específico, o trapézio (Figura 8). Para o sentido signo-objeto, o autor esclarece que o signo está relacionado a alguma característica do objeto e, assim, é denotado como criador. A expressão dada por $A = b.h$ pode ser referenciada a um retângulo, mas também a um quadrado ou outro

[22] Tradução de: "the role of the mathematical sign as 'something which stands for something else'" (STEINBRING, 2006, p. 134).

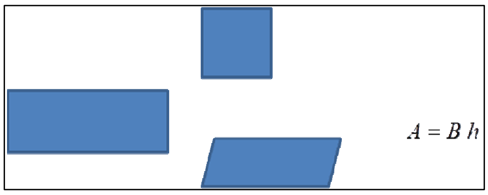
paralelogramo. Desse modo, o signo, no sentido signo-objeto, pode evocar várias formas geométricas (Figura 9).

Figura 8 – Do objeto para o signo: signos descrevendo objeto



Fonte: A autora.

Figura 9 – Do signo para o objeto: signos criando objetos



Fonte: A autora.

Signos e objetos se relacionam de forma a compor um intercâmbio comunicativo entre sujeito e funcionamento cognitivo, gerando formas de pensamento. Essas formas estão associadas aos signos mobilizados pelos alunos acerca do objeto e atrelados à função semiótica dos signos. Porém, quando signos como descritores mudam para signos “criadores”, esses novos signos não somente referem-se ao objeto, mas carregam consigo características epistemológicas desse objeto (STEINBRING, 2009).

Na função epistemológica um aspecto a considerar é o contexto no qual o signo emerge, pois esse contexto determina as condições nas quais se estabelecem as relações entre objeto e signo. Otte (2001) explica que a epistemologia está na relação entre objeto e signo e que é por meio da epistemologia que as características dos objetos podem ser observadas nos signos que os referenciam. Nesse sentido, a função epistemológica está relacionada ao conhecimento que o sujeito tem sobre aquilo que o signo representa.

Para Steinbring (2006), a função epistemológica dos signos matemáticos indica as possibilidades pelas quais os sujeitos dotam os signos de significado e os reconhecem como meios de compreender os objetos matemáticos, ou seja, a influência das características epistemológicas do conhecimento matemático passam a ser consideradas. O autor associa a essa função “o papel do signo matemático no quadro da constituição epistemológica do conhecimento matemático[23]” (STEINBRING, 2006, p. 134, Tradução nossa).

Ambas as funções dos signos – a semiótica e a epistemológica – têm de lidar com o

[23] Tradução de: “the role of the mathematical sign in the frame of the epistemological constitution of mathematical Knowledge” (STEINBRING, 2006, p. 134).

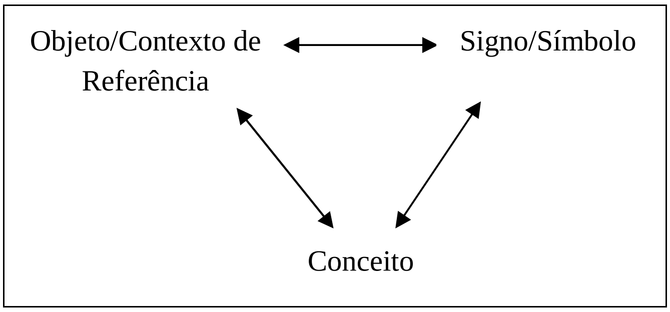
signo que está relacionado com o objeto (do conhecimento). Dependendo da concepção da natureza do conhecimento em foco, diferentes interpretações podem ser interligadas na relação entre signos e objetos. Na intenção de compreender a particularidade dos signos na conexão dessas duas funções, Steinbring (1997, 2005) sugere utilizar o triângulo epistemológico, abordado na próxima seção.

2.3.1 O Triângulo Epistemológico

Se se admite que os signos não têm significados por si só, tais significados têm de ser atribuídos pelo sujeito por meio do estabelecimento de uma conexão, considerada por ele adequada, para os contextos de referência. Esta conexão entre objeto/contexto de referência e signo/símbolo não é totalmente arbitrária e subjetiva; ela é, de certa forma, mediada pelas condições epistemológicas do conhecimento do sujeito acerca do objeto e do signo e pelo modo como ele manifesta os seus pensamentos e/ou conhecimentos, ou seja, pela dimensão comunicativa utilizada por ele para expressar seus pensamentos.

O triângulo epistemológico da Figura 10 considera conexões entre objeto/contexto de referência e signo/símbolo, realizadas ao mesmo tempo em que aspectos relativos às condições epistemológicas dos conhecimentos do sujeito suscitam o conceito atrelado a essas conexões. Além disso, limitações epistemológicas acerca de tais conhecimentos, exercem influência não somente sobre a conexão entre objeto/contexto de referência e signo/símbolo, mas, sobretudo, sobre a construção de novos conhecimentos devido a dificuldades de se estabelecer conexões entre esses dois elementos do triângulo epistemológico. Nesse sentido, os significados dos conceitos emergem na interação entre sistemas de signo/símbolo e objetos/contexto de referência.

Figura 10 – Triângulo epistemológico proposto por Heinz Steinbring



Fonte: Steinbring (2006, p. 135) (Tradução nossa).

Sistemas triangulares similares ao triângulo epistemológico foram introduzidos na filosofia da matemática, na linguística e na filosofia da linguagem para analisar o problema semiótico da relação entre objeto e signo (COLOMBO, FLORES e MORETTI, 2007). De forma geral, todos esses sistemas ao estabeler relações entre os seus três elementos consideram que eles não podem ser analisados separadamente, tampouco, que as conexões dois a dois, excluem o terceiro elemento.

Também o triângulo epistemológico, segundo Steinbring (2005), deve ser entendido como um esquema teórico em que os seus elementos: objeto/contexto de referência, signo/símbolo e conceito, reciprocamente, integram-se um ao outro. Desse modo, nenhum dos elementos do triângulo epistemológico pode ser determinado separadamente, a fim de sozinho, gerar qualquer um dos outros dois. Isso garante com que o triângulo epistemológico seja um sistema equilibrado e, mutuamente, sustentável (STEINBRING, 2006).

As ligações entre os elementos desse triângulo não são definidas explicitamente e, invariavelmente, elas se constroem e se modificam em conformidade com as relações que os sujeitos estabelecem entre os seus conhecimentos, os signos que utilizam e/ou produzem para manifestar seus pensamentos e ações e o contexto de referência ao qual esses signos se referem. Sendo assim, esse esquema triangular não pode ser visto independente do sujeito.

Ronning (2011), ao analisar como os alunos lidam com os conceitos de simetria – reflexão e rotação – utiliza-se do triângulo epistemológico e deixa explícito que os alunos, ao se envolverem com esses conceitos, estabeleceram relações entre o conceito de simetria em si, o contexto de referência referido e os signos acionados mentalmente, na forma escrita ou gestual. O autor discute, sob um ponto de vista semiótico, que os aspectos epistemológicos do conceito de simetria orientaram as relações estabelecidas pelos alunos entre os signos que eles utilizaram e/ou produziram e o contexto de referência ao qual se referiam.

Um ponto importante na teoria de Heinz Steinbring a respeito do triângulo epistemológico é que nenhum dos elementos do triângulo é estável e fixo. À medida que o sujeito ativa seus conhecimentos, aspectos relativos as suas condições epistemológicas e comunicativas alteram os elementos desse triângulo, dando-lhe um caráter de dinamicidade.

O trilhar do sujeito em relação ao desenvolvimento do seu conhecimento, de acordo com Steinbring (2005, 2006) pode ser descrito como extensão dos elementos do triângulo, ou seja, pode-se elaborar uma sequência de triângulos epistemológicos correspondendo a um processo que tenta refletir o desenvolvimento das interpretações realizadas pelo sujeito. No decorrer desse desenvolvimento, as interpretações dos sujeitos acerca dos signos ou do conjunto de signos por eles utilizados e/ou produzidos, juntamente com a seleção dos contextos de referência sofrem alterações e, portanto, ganham novos olhares, novos significados, ou seja, podem ser representadas em novos triângulos epistemológicos. Farrugia (2007) é um exemplo dos trabalhos que se enquadram nesse enfoque. Nesse trabalho, a autora identifica que o estabelecimento de relações entre signo, contexto de referência e conceito, realizados pelos alunos, ocorreu em um processo dinâmico, culminando em diferentes interpretações, ou seja, as interpretações deles se modificavam a cada nova relação estabelecida.

A extensão, dos elementos do triângulo, desejada é aquela que inclui os signos e contextos de referência relativos ao conceito, de modo a obter um sistema que contemple todas as interpretações ocorridas. O desafio é, no entanto, deixar vir à tona esse caráter dinâmico presente no triângulo epistemológico. E é nesse sentido que essa pesquisa se desenvolve.

No Capítulo 3 são apresentadas as opções metodológicas que sustentam a realização desta pesquisa.

CAPÍTULO 3

3. SOBRE A PESQUISA – ENFOQUE E OPÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo apresentamos nossas opções metodológicas, ressaltando que essa pesquisa tem cunho qualitativo. Considerando os quadros teóricos enunciados nos Capítulos 1 e 2, reapresentamos o objetivo desta pesquisa e caracterizamos o seu contexto. Indicamos as atividades de modelagem matemática que serão analisadas bem como os procedimentos de coleta e análise dos dados.

3.1 O OBJETIVO E A CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O levantamento realizado na seção 2.2 do Capítulo 2, acerca das abordagens semióticas, sinaliza que no campo da Educação Matemática há poucos trabalhos com foco nos aspectos epistemológicos da semiótica e da matemática (terceiro campo abordado por Hoffmann (2006)). Isso se configura, portanto, em um dos motivos pelos quais discutimos nessa pesquisa essa abordagem semiótica. Contudo, para além de ampliar o rol de trabalhos inseridos nesse campo, apontamos novos elementos dessa abordagem para a comunidade de pesquisadores na área de Educação Matemática e delineamos um quadro teórico pautado nas considerações sobre Modelagem Matemática e nas assertivas de Peirce em torno da Semiótica com foco nas funções dos signos estabelecidas por Steinbring. De modo geral, a análise dos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos em atividades de modelagem matemática é o que permeia a nossa investigação.

Para chegar a uma resposta para o problema advindo de uma situação, que no âmbito da Modelagem é caracterizada como situação inicial, os alunos, envolvidos com a atividade de modelagem matemática, adotam procedimentos consoante aos encaminhamentos que eles assumem e utilizam e/ou produzem signos. Esses signos estão associados às ações cognitivas dos alunos e, nesse sentido, desempenham alguns papéis nas suas escolhas.

Considerando aspectos da Modelagem Matemática enunciados no Capítulo 1 e de Semiótica, apresentados no Capítulo 2, denotamos um estudo que busca investigar *como* *o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos.*

A partir desse objetivo, elegemos algumas questões que podem viabilizar reflexões acerca dos propósitos desta investigação:

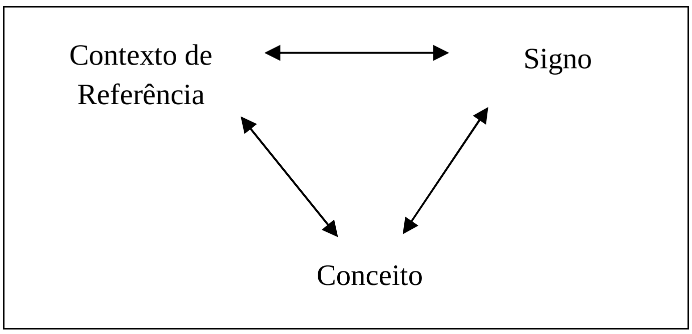
1. Que signos os alunos utilizam e/ou produzem ao longo de uma atividade de modelagem matemática?

2. Que relações existem entre o papel desempenhado por esses signos e os encaminhamentos assumidos pelos grupos de alunos para desenvolver sua atividade de modelagem matemática?

As reflexões que são apresentadas com relação a essas questões decorrem da análise do desenvolvimento de algumas atividades de modelagem matemática (no 3º momento sugerido por Almeida e Dias (2004)) com foco nos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos durante suas ações cognitivas ao longo da atividade por eles desenvolvida.

Como foge ao escopo desta pesquisa estabelecer classificações para os signos, o triângulo epistemológico (Figura 11) que assumimos como uma possibilidade para identificar os papéis que os signos desempenham nas ações cognitivas dos alunos, tem o termo *signo* ao invés de *signo/símbolo* e *contexto de referência* em detrimento do elemento *objeto/contexto de referência* como é proposto por Steinbring (2006), dadas as características das atividades de modelagem matemática. Sobre os papéis dos signos, pautamo-nos, no fato de que eles estão atrelados às funções semiótica e epistemológica dos signos, a partir dos encaminhamentos assumidos pelos alunos quando envolvidos com atividades de modelagem.

Figura 11 – Triângulo epistemológico assumido nesta investigação



Fonte: Adaptado de Steinbring (2006).

A pesquisa se desenvolve segundo uma abordagem qualitativa que, segundo Alves-Mazzotti (1998, p.131), tem como principal característica o fato de seguir “a tradição ‘compreensiva’ ou ‘interpretativa’, em que se pretende compreender de que forma as pessoas em um contexto particular, pensam e agem”. Também Goldenberg (2003) afirma que uma pesquisa de caráter qualitativo “consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos” (p. 53).

Bogdan e Biklen (1994) destacam que na “investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 47). Esses autores reforçam a importância do contato direto com o sujeito da pesquisa, pois é por meio desse contato que se pode complementar os dados recolhidos. Nesse sentido, frequentar o ambiente da pesquisa tem sua relevância para que se conheça o contexto em que a mesma está inserida.

Dadas as características desta investigação, que busca compreender um fenômeno específico em profundidade, utilizando, geralmente, descrições, comparações, análise e interpretações, ela pode ser metodologicamente classificada como qualitativa. Considerando que os dados são compostos por registros escritos e falas dos alunos, para proceder à análise inspiramo-nos na Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2011), abordada na seção 3.4.

3.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com alunos de uma turma de 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, de periodicidade anual, de uma universidade pública do estado do Paraná. Nessa disciplina estavam matriculados 15 alunos – 12 do sexo feminino e 3 do sexo masculino – com idades entre 21 e 27 anos, e todos trabalhavam durante o dia e estudavam no período noturno.

Embora a pesquisadora já conhecesse essa turma de alunos, pois ministrou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I quando eles estavam no primeiro ano do curso, nesse momento, atuava como pesquisadora e, portanto, nas aulas que se configuram como parte do cenário para a pesquisa, participavam além dos alunos e da pesquisadora, a professora da disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Na primeira aula dessa disciplina em que a pesquisadora esteve presente, ela solicitou aos alunos que enunciassem algum tema que gostariam de investigar. Depois disso, os alunos foram agrupados segundo suas indicações, constituindo-se, assim, cinco grupos. É fato que esses alunos, ao longo da disciplina de Introdução à Modelagem Matemática, tiveram contato com aspectos teóricos da Modelagem Matemática a partir da leitura de diversos textos, bem como desenvolveram algumas atividades de modelagem. Contudo, a experiência de desenvolver uma atividade participando ativamente desde a escolha do tema era algo novo.

Após a constituição dos cinco grupos e deles terem definidos seus temas de estudo, os grupos foram incentivados a trabalhar em suas atividades de modelagem. O envolvimento dos alunos com elas aconteceu, a partir de então, nas aulas da disciplina de Introdução à Modelagem, previamente agendadas, pois a pesquisadora estaria presente nessas aulas e, em horário extraclasse[24], quando do interesse dos grupos.

No total, as atividades de modelagem foram desenvolvidas em 20(vinte) aulas, correspondendo a 10(dez) dias com duas hora/aula cada, e todos os grupos foram assessorados fora do horário de aula, alguns, inclusive, mais de uma vez. A duração de cada encontro extraclasse variou de 20(vinte) a 60(sessenta) minutos, dependendo do interesse e disponibilidade de tempo dos integrantes do grupo. Houve encontros em que compareceram dois dos três integrantes do grupo, porém quando isso acontecia, os colegas sempre apresentavam justificativas para a ausência do terceiro integrante do grupo.

Na próxima seção trazemos uma breve descrição das atividades de modelagem desenvolvidas pelos grupos de alunos.

[24] A esses momentos fora do horário de aula denominamos encontros extraclasse.

3.2.1 As Atividades de Modelagem Matemática Desenvolvidas

Esta seção destina-se a uma breve descrição das cinco atividades de modelagem desenvolvidas, cada uma, por um grupo de alunos. Todos os temas que geraram as atividades de modelagem, desenvolvidas em grupos com três integrantes cada um, enunciadas no Quadro 1, foram propostos pelos alunos e sinalizavam o interesse de um ou mais integrantes do grupo em estudar tal tema. Certamente, para o desenvolvimento da atividade, foi necessário todo o grupo ratificar a indicação do tema.

Como a pesquisa se desenvolveu no contexto de uma disciplina, metas e estratégias do professor responsável por ela já tinham sido expostas aos alunos e eram do conhecimento da pesquisadora. Portanto, escolher um tema e desenvolver uma atividade de modelagem era algo previsto no programa da disciplina.

Quadro 1 – As atividades de modelagem desenvolvidas

Grupo	Atividade
Grupo 1	Controle da alimentação no período noturno
Grupo 2	Enchentes na cidade de União da Vitória
Grupo 3	O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) nas escolas do Paraná
Grupo 4	Atendimento aos hipertensos na cidade de Bituruna
Grupo 5	Poupando a futura aposentadoria

Fonte: A autora.

Embora o desenvolvimento dessas atividades tenha sido assessorado pela pesquisadora e durante as aulas, também pela professora da disciplina, os encaminhamentos assumidos pelos alunos em suas atividades são ancorados, em grande parte, nas discussões que eles estabeleceram no grupo.

O tema *Controle da alimentação no período noturno* foi proposto pelo Grupo 1 e surgiu do interesse do grupo em analisar se os alunos da universidade, que estudam no período noturno, fazem uma escolha adequada ao efetuar um lanche entre o período das 18h às 23h. Para o desenvolvimento da atividade o grupo considerou que o lanche era feito nas dependências da universidade. A intenção do grupo com essa atividade era traçar alguns cardápios para uma alimentação equilibrada, considerando as opções disponíveis nas lanchonetes da universidade.

A atividade sobre *Enchentes na cidade de União da Vitória* foi desenvolvida pelo Grupo 2 e retrata uma preocupação dos alunos em compreender como se dá o comportamento do Rio Iguaçu, um dos maiores rios do sul do Brasil, em relação aos períodos em que frequentemente ocorrem enchentes nessa cidade. Com o desenvolvimento dessa atividade, os alunos tinham por objetivo estudar as possibilidades de prever o nível de água que o rio vai atingir em um curto intervalo de tempo, considerando os períodos de cheia e, portanto, estimar a partir de qual dia as regiões da cidade que sofrem com as enchentes ocorridas nesses períodos podem ser afetadas.

O Grupo 3 antes de definir que iria trabalhar com o tema *O Ideb nas escolas do Paraná,* se envolveu com outro tema, que foi abandonado na quarta aula. A mudança de tema ocorreu devido à falta de informações sobre o tema inicial que versava sobre a quantidade de glicerina nos sabonetes. Na atividade de modelagem sobre o Ideb, que foi proposto por um dos alunos do grupo e aceito sem questionamentos pelos demais, os alunos tinham como objetivo investigar se a meta proposta para o Paraná, para o ano de 2021, seria alcançada. Com vistas a atingir tal objetivo e de posse de diversas informações, os alunos formularam o seguinte problema: considerando as políticas atuais, a meta relativa ao Ideb, prevista para o Paraná no ano de 2021 será alcançada? Mais tarde, eles sentiram necessidade de fragmentar esse problema em dois, ou seja, trabalhar separadamente com as informações do Ideb para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio.

O Grupo 4 se dedicou a desenvolver uma atividade de modelagem que tinha como tema *Atendimento aos hipertensos na cidade de Bituruna*. Antes de definir por esse tema os alunos estavam em um impasse porque cada um deles queria estudar um tema distinto. A efetivação dessa escolha ocorreu devido à familiaridade do aluno proponente do tema com as informações que precisavam para desenvolver a atividade. Perante essa justificativa, esse tema foi acatado pelos demais integrantes do grupo. Com essa atividade de modelagem os alunos tinham por interesse encontrar o ano em que todos os hipertensos da cidade de Bituruna teriam atendimento pela Fundação Municipal de Saúde dessa cidade.

A atividade de modelagem com o tema *Poupando a futura aposentadoria* foi desenvolvida a partir do interesse dos alunos do Grupo 5 em analisar como seria aplicar o dinheiro pago ao Instituto Nacional do Seguro Social – INSS – em uma caderneta de poupança. A sugestão desse tema parte de um dos alunos do grupo a partir dos comentários referentes aos descontos do salário pago ao INSS.

Os instrumentos de coleta de dados relativos ao trabalho de cada grupo com sua atividade de modelagem são descritos na seção a seguir.

3.3 A COLETA DE DADOS

Para a coleta dos dados que orientaram as análises foram utilizados instrumentos captando registros escritos e falados dos alunos, em consonância com a estruturação da Análise de Conteúdo. Constituem registros escritos os relatórios das atividades entregues pelos grupos de alunos no decorrer das aulas (versões preliminares das suas atividades de modelagem) e a versão final[25] das atividades por eles desenvolvidas entregues em meio impresso e digital. As gravações em áudio ou em vídeo das aulas e dos encontros que se configuraram como cenário desta investigação, incluindo as aulas nas quais os alunos socializaram suas atividades, apresentando-as em forma de seminários, compuseram os registros falados. Também as entrevistas realizadas com cada um dos grupos, após terem finalizado suas atividades de modelagem, que foram gravadas e transcritas, correspondem a um instrumento de coleta de dados relacionado aos registros falados.

É pertinente salientar que para o desenvolvimento da pesquisa todos os alunos assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice A) autorizando o uso de falas, anotações ou imagens.

Os relatórios e os trabalhos de modelagem

Ao longo da realização da pesquisa os alunos entregaram versões preliminares de suas atividades de modelagem em forma de relatório e ao final, uma versão contemplando todo o desenvolvimento da atividade.

---

[25] Para se referir a essa versão final das atividades de modelagem é utilizado o termo trabalho de modelagem.

Os relatórios continham os encaminhamentos assumidos pelos alunos para suas atividades de modelagem, ou seja, constituíam-se como versões preliminares das atividades por eles desenvolvidas e podiam ser entregues ao término de cada aula. O solicitado era que eles sinalizassem nos relatórios o que haviam realizado em relação à atividade, que avanços teriam tido de uma aula para outra e se haveria necessidade de agendar encontro extraclasse com a pesquisadora.

Considerando a argumentação dos alunos de que, às vezes, de uma aula para outra poderia acontecer de a atividade não ter avançado muito, ficou acordado entre pesquisadora e alunos que não haveria um número pré-fixado de versões a serem entregues. Sendo assim, o número de relatórios entregues por cada grupo foi diferente. Contudo, o combinado era que eles não poderiam entregar menos que dois relatórios.

As aulas, os encontros e as entrevistas

As transcrições das gravações, em áudio ou em vídeo, das aulas, dos encontros e das entrevistas, ampliam o conjunto de documentos de análise, uma vez que um documento é "qualquer registro que possa ser utilizado como fonte de informação" (ALVES-MAZZOTTI, 1998, p.169). Além disso, os documentos são fontes estáveis e ricas, pois podem ser consultados inúmeras vezes e com diferentes interesses de pesquisa. Lüdke e André (1986) afirmam que documentos "não são apenas uma fonte de informação contextualizada, mas surgem em um determinado contexto e fornecem informações sobre esse mesmo contexto" (p.39).

Para gravar o áudio das discussões dos alunos, a pesquisadora entregava, no início da aula, um gravador de áudio para cada grupo, posicionando-o de modo a captar as falas de cada um de seus componentes. Os encontros realizados fora do horário da aula também eram gravados, porém pelos próprios alunos[26], quando a presença da pesquisadora não era requerida pelo grupo.

Durante as aulas, professora e pesquisadora, alternavam momentos de orientação nos grupos conforme eram requisitadas ou quando julgavam que uma intervenção poderia

[26] Aos alunos era emprestado um gravador de voz.

ser pertinente. Além disso, a pesquisadora realizava anotações referentes às suas observações em relação às atitudes dos alunos.

Cabe ressaltar que à medida que os dados iam sendo coletados, eram organizados de modo a possibilitar seu tratamento. As transcrições das entrevistas foram os últimos documentos a compor o material de análise. Isso porque as entrevistas foram realizadas somente após os alunos terem apresentado suas atividades para a turma, em forma de seminário.

De acordo com Rosa e Arnoldi (2006), uma entrevista “não se trata de um simples diálogo, mas, de uma discussão orientada para um objetivo definido, que através de um interrogatório, leva o informante a discorrer sobre temas específicos, resultando em dados que serão utilizados na pesquisa” (p.17). Foi com o intuito de rastrear, através das falas dos alunos, os aspectos envolvidos no uso e na produção de signos que permeiam as atividades de modelagem por eles desenvolvidas que se optou por essa técnica de coleta de dados.

As entrevistas realizadas foram do tipo semi-estruturada, que se fundamentam em questões “formuladas de forma a permitir que o sujeito discorra e verbalize seus pensamentos, tendências e reflexões sobre os temas apresentados” (ROSA e ARNOLDI, 2006, p. 30). A duração da entrevista com cada grupo variou de vinte a quarenta e cinco minutos e todas elas foram gravadas em vídeo e áudio. Embora as entrevistas tenham a característica de ser semi-estruturadas, para alguns grupos foram realizados outros questionamentos, devido a informações coletadas, anteriormente, por outras vias de coleta de dados ou decorrentes das respostas às questões que orientaram a entrevista (Apêndice B).

Segundo Lüdke e André (1986), “a grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos” (p.34).

No Quadro 2 apresentamos os instrumentos de coleta de dados e o cronograma das aulas e encontros extraclasse.

Quadro 2 – Cronograma das aulas e encontros extraclasse e os instrumentos de coleta de dados

Grupos	Datas das aulas previamente agendadas (todos os alunos do grupo estavam presentes)	Datas dos encontros	Instrumentos de coleta de dados
Grupo 1	02/10, 05/10, 16/10, 23/10, 30/10, 06/11, 13/11, 20/11 (apresentação do trabalho de modelagem), 23/11 e 27/11.	25/10	Relatório (2) Trabalho de modelagem Gravação em áudio Entrevista
Grupo 2	02/10, 05/10, 23/10, 30/10, 06/11, 20/11, 23/11 (apresentação do trabalho de modelagem) e 27/11.	24/10 07/11	Relatórios (4) Trabalho de modelagem Gravação em áudio Gravação em vídeo Entrevista
Grupo 3	02/10, 05/10, 16/10, 23/10, 30/10, 06/11, 13/11, 20/11 (apresentação do trabalho de modelagem), 23/11 e 27/11.	06/11 13/11	Relatórios (4) Trabalho de modelagem Gravação em áudio Gravação em vídeo Entrevista
Grupo 4	05/10, 16/10, 23/10, 06/11, 20/11, 23/11 e 27/11(apresentação do trabalho de modelagem).	25/10 07/11	Relatórios (2) Trabalho de modelagem Gravação em áudio Gravação em vídeo
Grupo 5	02/10, 16/10, 23/10, 30/10, 13/11, 20/11, 23/11 (apresentação do trabalho de modelagem) e 27/11.	25/10	Relatórios (5) Trabalho de modelagem Gravação em áudio Gravação em vídeo Entrevista

Fonte: A autora.

A organização dos dados coletados, tendo como pano de fundo os estudos realizados acerca dos quadros teóricos e do objetivo desta investigação, possibilitou levantar características dos signos associados às ações cognitivas dos alunos durante o seu envolvimento com suas atividades de modelagem e direcionou o processo de análise, que aparece descrito na próxima seção.

3.4 A Condução das Análises

Com vistas a estabelecer reflexões acerca da investigação delineada nesta pesquisa, optamos por uma abordagem metodológica também qualitativa no que se refere à análise dos dados, com o propósito de que estes sejam analisados em uma ótica que combine objetividade e sensibilidade.

Nesse sentido, para a análise dos dados utilizamos a Análise de Conteúdo, proposta por Bardin (2011), como meio para compreender como os alunos se envolvem com suas atividades de modelagem na tentativa de encontrar uma solução para o problema por eles proposto. Essa teoria de análise, contempla um conjunto de técnicas de análises textuais em que se inserem: entrevistas, relatórios, respostas a questionários e outros documentos. Segundo Bardin (2011) essa teoria é designada como

> um conjunto de técnicas de análises das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2011, p. 48).

Pertencem ao domínio dessa técnica de análise todas as iniciativas de análise que consistem em sistematizar e explicar o conteúdo das mensagens e da expressão deste conteúdo. Porém, a Análise de Conteúdo não se restringe a uma simples leitura, mas busca um nível de compreensão implícito nos dados, uma interpretação que revela outros significados além daqueles observados em um primeiro momento e que nem sempre se encontram manifestos.

Bardin (2011) enfatiza que a Análise de Conteúdo contempla três fases, que respeitam certa cronologia: 1) a pré-análise, 2) a exploração do material e 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Considerando essas fases, realizamos a análise de duas formas. Uma mais específica, identificada como análise local, na qual ao atentarmos para cada um dos grupos de alunos, em particular, contemplamos as fases de pré-análise e de exploração do material. Na outra, denominada análise global, ao apresentarmos reflexões em relação ao nosso objetivo de pesquisa, olhando para todos os grupos e as atividades que eles desenvolveram, realizamos a terceira fase da Análise de Conteúdo.

Na seção 4.1 do Capítulo 4 destinada às análises locais, fazemos a descrição e análise das atividades desenvolvidas pelos Grupos 2, 3 e 5. As atividades dos Grupos 1 e 4, aparecem descritas de forma abreviada nos Apêndice C e Apêndice D, respectivamente. A opção por realizar a análise local dessas três atividades se deu na fase de organização do material definido para análise, denominada *pré-análise*.

Bardin (2011) apresenta diversas reflexões sobre os documentos que podem compor a pesquisa e que se constituem no seu *corpus* – “conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (p. 126). Contudo, enfatiza que na Análise de Conteúdo, o *corpus* é constituído essencialmente de produções textuais, entendidas como produções linguísticas referentes a certo fenômeno e originadas em um determinado tempo e contexto. Foi na fase de *pré-análise* que o *corpus* desta pesquisa foi constituído, ou seja, a partir da seleção das atividades de modelagem cujos grupos tinham entregue número de relatórios superior a dois. Todavia, a seleção dos documentos que compõem o *corpus* é possível devido ao que Bardin caracteriza como *leitura flutuante*, que consiste em “estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2011, p.126).

Segundo Bardin (2011), para construção de resultados da pesquisa é requerido do pesquisador uma seleção e delimitação rigorosa e, ao mesmo tempo, consistente das informações contidas no *corpus.* Isso porque é por meio dele que o pesquisador expõe os frutos de sua construção, expressando suas apreensões, impressões e conclusões sobre o trabalho que se propôs a realizar.

Organizado o material, é momento de aprofundar o conhecimento sobre os documentos. Essa é a fase de exploração do material e a ela estão associados os procedimentos de codificação dos dados, fundamentados no quadro teórico assumido na investigação ou pelo entrelaçamento dos significados das próprias codificações.

Para Bardin (2011)

> tratar o material é codificá-lo. A *codificação* corresponde a uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão; susceptível de esclarecer o analista acerca das características do texto (p. 133, grifo da autora).

Assumindo as indicações dessas duas fases da Análise de Conteúdo, buscamos, nas análises locais, identificar os signos associados às ações cognitivas dos alunos quando envolvidos com suas atividades de modelagem e analisar os papéis que esses signos desempenham nessas ações e que os levam a encontrar uma solução para o problema por eles proposto. Tais análises, portanto, foram encaminhadas por meio da interpretação acerca dos signos e dos papéis que eles desempenham nas ações cognitivas dos alunos e das relações que existem entre o papel desempenhado pelos signos e os encaminhamentos assumidos por cada um dos grupos de alunos para desenvolver sua atividade de modelagem. Inferimos sobre os papéis dos signos principalmente a partir das falas dos alunos ao desenvolverem as atividades de modelagem matemática no âmbito do seu grupo.

A análise global corresponde à terceira fase da Análise de Conteúdo – tratamento dos resultados obtidos e interpretação. É nessa fase que os resultados obtidos na exploração do material revelam aspectos da problemática em estudo. A interpretação se dá a partir do processo de inferência que é passo intermediário entre a descrição que expressa certa organização dos dados e a interpretação propriamente dita sobre o trabalho realizado a respeito dos dados (BARDIN, 2011).

Sendo assim, na análise global buscamos identificar influências sobre os encaminhamentos dos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem a partir dos signos que eles utilizaram e/ou produziram.

CAPÍTULO 4

4. AS ANÁLISES

Para a realização das análises, locais e global, são seguidas as orientações da teoria de Análise de Conteúdo proposta por Bardin (2011), conforme descrito no Capítulo 3. Nesse sentido, este capítulo é constituído de duas seções.

Na seção denominada *Análises Locais: focalizando cada atividade*, descrevemos e analisamos três atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas por três grupos distintos de alunos. A identificação dos signos utilizados e/ou produzidos por esses grupos de alunos no contexto de suas atividades, à luz dos referenciais teóricos adotados, viabiliza reconhecer a relação entre o papel dos signos e os encaminhamentos dados pelos alunos ao longo de suas atividades de modelagem matemática.

Na seção *Análise Global: influência das funções dos signos em atividades de modelagem matemática,* apresentamos reflexões acerca dos propósitos da investigação anunciada na introdução e retomada no terceiro capítulo.

4.1 ANÁLISES LOCAIS: FOCALIZANDO CADA ATIVIDADE

Nesta seção nossa atenção volta-se para cada uma das atividades de modelagem desenvolvidas pelos alunos envolvidos na investigação, no âmbito do seu grupo.

Para nos referirmos aos alunos de cada um dos grupos, nas subseções a seguir, nas quais apresentamos a descrição e análise de três atividades de modelagem matemática, a saber: *Enchentes na cidade de União da Vitória*, *O Ideb nas escolas do Paraná*, *Poupando a futura aposentadoria,* desenvolvidas, respectivamente, por G2, G3 e G5, utilizamos as letras A, B ou C. Assim, G2-C indica o aluno C do Grupo 2. Para a referência à pesquisadora e à professora da disciplina, utilizamos a letra P e D, respectivamente.

Na descrição e na análise local dessas atividades de modelagem matemática são considerados os encaminhamentos assumidos pelos grupos de alunos em resposta ao problema por eles evidenciado.

Registros escritos produzidos pelos alunos (relatórios e trabalho de modelagem), bem como as notas de campo da pesquisadora compõem as descrições e são considerados nas inferências da pesquisadora, assim como alguns fragmentos das gravações em áudio e/ou em vídeo.

O momento inicial e final dos fragmentos foram determinados, geralmente, por instantes de silêncio nas discussões dos alunos. Embora sejam apresentados na ordem em que aconteceram, nem sempre um fragmento é continuação imediata de outro.

4.1.1 Atividade do G2: Enchentes na cidade de União da Vitória

O tema "Enchentes na cidade de União da Vitória" investigado na atividade de modelagem desenvolvida pelo Grupo 2, surgiu do interesse dos alunos desse grupo em analisar o aumento do nível de água do rio Iguaçu a partir do momento em que ele oferece riscos à população da cidade de União da Vitória.

Para o desenvolvimento da atividade os alunos coletaram alguns dados, relativos ao ano de 2011, junto à Companhia Paranaense de Energia Elétrica (Copel), responsável pelo monitoramento do rio Iguaçu. Esses dados referem-se aos níveis de água do rio (medidos de hora em hora) durante o ano de 2011 (Figura 12[27]).

[27] Os dados foram enviados pela Copel para os alunos do G2, via e-mail, no formato bloco de notas. Devido a extensão do arquivo, essa figura ilustra, parte dos dados disponibilizados para os alunos.

Figura 12 – Nível do rio Iguaçu no ano de 2011

```
Estação: União da Vitória Código AANEL: 65310001 Município: União da Vitória

Data de geração: 10/07/2012 15:45

Data e Hora      ;Nível
dd/MM/yyyy HH:mm; (m)

01/08/2011 00:00;3,73
01/08/2011 01:00;3,75
01/08/2011 02:00;3,78
01/08/2011 03:00;3,81
01/08/2011 04:00;3,84
01/08/2011 05:00;3,87
01/08/2011 06:00;3,90
01/08/2011 07:00;3,94
01/08/2011 08:00;3,99
01/08/2011 09:00;4,02
01/08/2011 10:00;4,07
01/08/2011 11:00;4,11
01/08/2011 12:00;4,15
01/08/2011 13:00;4,20
01/08/2011 14:00;4,24
01/08/2011 15:00;4,28
01/08/2011 16:00;4,33
01/08/2011 17:00;4,37
01/08/2011 18:00;4,41
01/08/2011 19:00;4,45
01/08/2011 20:00;4,49
01/08/2011 21:00;4,53
01/08/2011 22:00;4,57
01/08/2011 23:00;4,60
02/08/2011 00:00;4,64
02/08/2011 01:00;4,67
02/08/2011 02:00;4,70
02/08/2011 03:00;4,73
02/08/2011 04:00;4,76
02/08/2011 05:00;4,78
02/08/2011 06:00;4,81
02/08/2011 07:00;4,84
02/08/2011 08:00;4,87
02/08/2011 09:00;4,89
02/08/2011 10:00;4,91
02/08/2011 11:00;4,93
02/08/2011 12:00;4,95
02/08/2011 13:00;4,97
02/08/2011 14:00;4,98
02/08/2011 15:00;5,00
02/08/2011 16:00;5,01
02/08/2011 17:00;5,03
02/08/2011 18:00;5,04
02/08/2011 19:00;5,05
02/08/2011 20:00;5,07
02/08/2011 21:00;5,08
02/08/2011 22:00;5,09
02/08/2011 23:00;5,10
03/08/2011 00:00;5,11
03/08/2011 01:00;5,12
03/08/2011 02:00;5,12
03/08/2011 03:00;5,13
03/08/2011 04:00;5,14
03/08/2011 05:00;5,15

Data e Hora      ;Nível
dd/MM/yyyy HH:mm; (m)

03/08/2011 06:00;5,15
03/08/2011 07:00;5,16
03/08/2011 08:00;5,17
03/08/2011 09:00;5,18
03/08/2011 10:00;5,18
03/08/2011 11:00;5,19
03/08/2011 12:00;5,20
03/08/2011 13:00;5,20
03/08/2011 14:00;5,20
03/08/2011 15:00;5,21
03/08/2011 16:00;5,22
03/08/2011 17:00;5,23
03/08/2011 18:00;5,24
03/08/2011 19:00;5,25
03/08/2011 20:00;5,26
03/08/2011 21:00;5,26
03/08/2011 22:00;5,27
03/08/2011 23:00;5,28
04/08/2011 00:00;5,29
04/08/2011 01:00;5,29
04/08/2011 02:00;5,30
04/08/2011 03:00;5,30
04/08/2011 04:00;5,31
04/08/2011 05:00;5,32
04/08/2011 06:00;5,32
04/08/2011 07:00;5,33
04/08/2011 08:00;5,33
04/08/2011 09:00;5,33
04/08/2011 10:00;5,33
04/08/2011 11:00;5,34
04/08/2011 12:00;5,34
04/08/2011 13:00;5,34
04/08/2011 14:00;5,34
04/08/2011 15:00;5,35
04/08/2011 16:00;5,35
04/08/2011 17:00;5,35
04/08/2011 18:00;5,36
04/08/2011 19:00;5,37
04/08/2011 20:00;5,37
04/08/2011 21:00;5,37
04/08/2011 22:00;5,38
04/08/2011 23:00;5,38
05/08/2011 00:00;5,38
05/08/2011 01:00;5,38
05/08/2011 02:00;5,38
05/08/2011 03:00;5,38
05/08/2011 04:00;5,39
05/08/2011 05:00;5,39
05/08/2011 06:00;5,39
05/08/2011 07:00;5,39
05/08/2011 08:00;5,39
05/08/2011 09:00;5,39
05/08/2011 10:00;5,39
05/08/2011 11:00;5,39

Data e Hora      ;Nível
dd/MM/yyyy HH:mm; (m)

05/08/2011 12:00;5,39
05/08/2011 13:00;5,39
05/08/2011 14:00;5,39
05/08/2011 15:00;5,39
05/08/2011 16:00;5,39
05/08/2011 17:00;5,39
05/08/2011 18:00;5,39
05/08/2011 19:00;5,39
05/08/2011 20:00;5,39
05/08/2011 21:00;5,39
05/08/2011 22:00;5,39
05/08/2011 23:00;5,39
06/08/2011 00:00;5,39
06/08/2011 01:00;5,39
06/08/2011 02:00;5,39
06/08/2011 03:00;5,39
06/08/2011 04:00;5,39
06/08/2011 05:00;5,39
06/08/2011 06:00;5,39
06/08/2011 07:00;5,39
06/08/2011 08:00;5,39
06/08/2011 09:00;5,39
06/08/2011 10:00;5,39
06/08/2011 11:00;5,39
06/08/2011 12:00;5,39
06/08/2011 13:00;5,38
06/08/2011 14:00;5,38
06/08/2011 15:00;5,38
06/08/2011 16:00;5,38
06/08/2011 17:00;5,39
06/08/2011 18:00;5,39
06/08/2011 19:00;5,39
06/08/2011 20:00;5,39
06/08/2011 21:00;5,39
06/08/2011 22:00;5,39
06/08/2011 23:00;5,39
07/08/2011 00:00;5,39
07/08/2011 01:00;5,39
07/08/2011 02:00;5,39
07/08/2011 03:00;5,39
07/08/2011 04:00;5,40
07/08/2011 05:00;5,40
07/08/2011 06:00;5,40
07/08/2011 07:00;5,40
07/08/2011 08:00;5,41
07/08/2011 09:00;5,41
07/08/2011 10:00;5,41
07/08/2011 11:00;5,41
07/08/2011 12:00;5,41
07/08/2011 13:00;5,42
07/08/2011 14:00;5,42
07/08/2011 15:00;5,42
07/08/2011 16:00;5,42
07/08/2011 17:00;5,43
```

Fonte: Adaptado do Relatório 1 entregue por G2.

O interesse dos alunos pela investigação do tema aumentou a partir dos dados coletados e de informações a respeito da ocorrência de enchentes na cidade de União da Vitória, conforme relatos dos alunos, nos relatórios e no trabalho de modelagem, mostrados no Quadro 3.

Quadro 3 – Sobre o tema – Enchentes na cidade de União da Vitória

As cheias são muito comuns em União da Vitória pelo fato da cidade ter se desenvolvido às margens do rio Iguaçu, quando da passagem das tropas vindas dos campos de Palmas para Palmeiras.

Por causa da geomorfologia de aspecto serrano, a população, sem planejamento, ocupou a planície de inundação. Com isso, o risco de perdas pelas possíveis enchentes é evidente.

Nas últimas décadas, ocorreram duas grandes enchentes que trouxeram muito prejuízo à cidade e à população. Daí o nosso interesse por esse tema.

Trecho do trabalho de modelagem

Encontramos a informação de que quando o rio atinge o nível de 4,89 metros ele sai de sua calha principal, o que pode significar o início de uma enchente.

Trecho do relatório 2

Geralmente no mês de agosto é que acontecem as enchentes mais preocupantes.

Trecho do relatório 1

Tem-se o primeiro registro de enchente em 1891, quando o nível de água do rio atingiu 9,20 metros. Desde então também se registrou enchentes em 1905 com 9,03 metros e em 1911 com 8,39 metros. A partir do início das leituras de vazões diárias em 1930, as maiores enchentes registradas foram a de 1983 com 10,42 metros e a de 1992 com 8,89 metros.

Na enchente de 1983 a cidade ficou praticamente toda debaixo d'água, trazendo grandes implicações para o setor econômico e industrial.

Apesar de terem sido tomadas algumas medidas de prevenção e conscientização da população, a cidade ainda sofre com as inundações. A última cheia ocorrida em 2010 deixou aproximadamente 500 famílias desabrigadas.

Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

Inicialmente os alunos não tinham uma questão específica elaborada acerca do tema definido. O que eles tinham era um conjunto de informações com as quais eles foram se inteirando. O propósito da atividade, no entanto, que era trabalhar com algo relativo à enchente é expresso nos primeiros momentos em que os alunos do Grupo 2 se envolvem com sua atividade de modelagem.

> G2-C: *Eu já tinha a ideia de fazer alguma coisa sobre o rio, a enchente, antes de saber que o trabalho seria em grupo... sabendo que tinha que fazer um trabalho de modelagem* (se referindo às atividades que eles teriam que se envolver ao longo da disciplina, segundo o planejamento de D), *tanto que eu já entrei em contato com a Copel e já mandei e-mail pedindo os dados. Eles me mandaram e ficou parado até a gente começar a fazer.*
> [...]
> G2-B: *Você mandou um e-mail pra Copel e eles mandaram isso aqui?*
> G2-C: *É que no site da prefeitura eles colocam tipo... 3 dias anteriores, daí eu mandei um e-mail perguntando.*
> [...]
> P: *No dia 1 do 1 de 2011 à "meia hora" o rio estava com 4,76 metros, quanto é o muito alto que provoca inundações?*

> G2-B: *Quando chega a seis e pouquinho, cinco e pouco... já começa a ficar falando na rádio de hora em hora.*
> G2-C: *Um acompanhamento assim.*
> G2-B: *Teve uma cheia ele chegou a seis e meio.*
> G2-A: *E a gente não viu quanto que foi a metragem da enchente de 83 só pra ter uma base.*
> G2-B: *É... a gente não achou.*
> G2-A: *Acabamos esquecendo...*
> G2-B: *Mas a gente pensou em ver quando em 83, quanto que chegou o nível.*
> P: *Mas o que vocês pretendem fazer com esses dados que vocês têm? Qual é a intenção de vocês? Analisar o do ano passado, por exemplo? Se vocês analisarem o do ano passado vocês vão ter um comportamento de como esse rio aumentou ou diminuiu ao longo do ano, considerado de hora em hora... esse comportamento ele meio que... se repete de ano em ano?*

O arquivo enviado pela Copel se configurava como signo que informava para os alunos o comportamento do rio ao longo do período observado. As informações do Quadro 3 (*encontramos a informação de que quando o rio atinge o nível de 4,89 metros ele sai de sua calha principal, o que pode significar o início de uma enchente* e *geralmente no mês de agosto é que acontecem as enchentes mais preocupantes*) correspondem a signos que dizem respeito ao contexto de referência, nesse caso, o nível de água do rio Iguaçu.

Os dados coletados e as informações que permearam as conversas dos alunos fizeram emergir algumas questões (Figura 13). Isso sinaliza que a ação cognitiva nesse momento era a *compreensão da situação.*

Figura 13 – Questões iniciais levantadas pelos alunos do Grupo 2

> A partir dos dados e do que sabemos sobre as enchentes, começamos a pensar em possíveis problemas que poderiam ser estudados.
>
> - Quando se daria a próxima enchente como as de 1983 ou 1992?
>
> - Quantos metros o rio deveria subir para que alcançasse um determinado ponto da cidade?
>
> - Qual seria o nível máximo de água que o rio atingiria em uma cheia?

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

Ainda que os alunos tenham elencado estas questões, suas discussões ficaram em torno do nível do rio nos períodos de cheia, como retrata o fragmento do diálogo entre os alunos durante a aula:

> P: *Mas a intenção de vocês é trabalhar com o nível?*
> G2-B: *É... só o nível.*
> P: *Eu acho bem interessante... é bem bacana, olhando aqui para os dados essa variação é muito pequena no mesmo dia né, é muito pequena... bom, estava*

> *4,66 e foi para 4,47... então olha, em um dia só variou pouco... e só diminuiu o tempo todo, não aumentou.*
> G2-B: *Mas diminuiu bastante... não durante o dia.*
> P: *Mas talvez tenha alguma relação com a estação do ano, por exemplo aí é verão, olha... estamos em janeiro e só está diminuindo... 3 e alguma coisa... 3; 2,99 agora 3... mas também, dá praticamente para desconsiderar esse ponto; oh... 2,80, aqui subiu, começou a subir, porque estava 2,75; 2,74... agora foi para 2,81; 2,82; 2,84...*
> [...]
> G2-A: *A partir de que momento é considerado enchente? Eu penso assim... é considerado enchente a partir do momento que a água encosta na casa... se não encosta beleza.*
> G2-C: *Não é bem assim... tem que ter um valor.*
> G2-B: *Sim porque na verdade, ali perto do mercado União ali pra baixo, sabe, quando começa a encher o rio, já começa inundar aquela curva ali perto da ponte, sabe, meio que embaixo da ponte, já fica intransitável. Eu acho que o nível normal é até quatro e meio, cinco, porque daí já começa a pegar as casas perto do rio.*

Com a intenção de definir um problema com relação à enchente, os alunos passaram a olhar para a situação a fim de deliberar sobre o quê dos dados importa para sua resolução.

> G2-B: *Qual é o nosso problema mesmo gente? Analisar o comportamento do rio... e daí estudar as enchentes... enchente não, cheia que eles chamam.*
> G2-A: *São muitos dados... como que a gente vai olhar para tudo isso!*
> P: *Se ao invés de vocês pegarem de hora em hora, vocês verificarem com mais cuidado esses valores e ver como eles variam, por exemplo, de cada dez em dez horas, ou de cada... porque às vezes não varia muito de cada dez em dez horas ou de cada... sei lá, de cada doze em doze horas, porque daí ao invés de ficar de hora em hora de um ano inteiro, vocês simplificam essa quantidade de informações que vocês têm... acho que vale mais a pena... de quantas em quantas horas é que de fato a oscilação ou variação começa a ficar mais longe então estipulem se vocês vão fazer de cada 10 em 10 horas, de cada 8 em 8 horas e se for, por exemplo, de 6 em 6 horas, vocês vão ter 4 medições durante o dia, logo se vocês fizerem de 8 em 8 horas, vão ser 3 medições no dia... isso no ano que tem 365 dias, é medição pra caramba... então verifiquem se vocês vão fazer de 8 em 8, pode ser de 6 em 6, de 12 em 12 de repente pra ficar com duas medições durante o dia, mas verifiquem na variação se vocês não perdem muito, porque vocês precisam ver se não vai dar muita diferença...*
> G2-B: *Vamos fazer isso a princípio, começar a fazer isso.*
> [...]
> G2-A: *Assim oh, de 4 em 4 horas, acho que fica legal!*
> G2-C: *Serão 6 medições no dia daí, 24 horas dividida em cada 4 horas.*
> G2-A: *Mesmo assim vai ser bastante coisa, mas agora já ficou melhor.*
> [...]
> G2-C: *Parece ser bom mesmo a gente pegar de 4 em 4 horas. Eu tava aqui pensando que... ter 6 medições pode ser bem interessante, porque a gente consegue meio que ter duas medições por período do dia... manhã, tarde e noite.*
> G2-B: *É... e considerando que o que importa pra gente é analisar o comportamento do rio ao longo do ano de 2011, ter 6 medições no dia dá pra*

> *ter uma ideia legal de como o rio se comportou ao longo do dia... logo, para como ele se comportou no ano.*
> G2-A: *Sem falar que a gente vai ter medição à beça para trabalhar.*
> G2-C: *Bom, o importante é a gente não perder muito com esse descarte de medições... e a gente não perde. O nível do rio varia muito pouco de uma hora para outra, na maioria das vezes... olha aí na tabela... a variação é de um ou dois centímetros. Dá bem pra gente trabalhar com as medições a cada 4 horas.*

Esse encaminhamento dos alunos de avaliar o que analisar da situação e o que considerar dentre os dados e informações a que eles tinham acesso leva os alunos a assumir que o contexto de referência, nesse momento de eleger um problema para ser estudado, está associado às informações sobre o tema “Enchentes na cidade de União da Vitória” e aos dados disponibilizados pela Copel.

A sugestão de G2-A – *Assim oh, de 4 em 4 horas, acho que fica legal!* – além de ser decisiva sobre o que fariam os alunos a partir de então, constitui um signo cuja função semiótica refere-se à formulação do problema. Esse signo representa uma interpretação dos alunos em relação aos dados da Figura 12 e, nesse sentido, desempenha o papel de simplificar os dados dessa figura. Esse signo produzido pelos alunos também os impulsionam a pensar nos próximos encaminhamentos para a atividade de modelagem.

Nesse sentido, parece adequado inferir que as relações estabelecidas pelos alunos entre contexto de referência e signo se dão por meio dos conhecimentos acerca da situação que eles mobilizam quando buscam elencar um problema para resolver, no esforço de, além de simplificar informações, definir metas e estratégias para avançar na resolução do problema.

A fim de analisar como se comportava o nível de água do rio Iguaçu, os alunos, a partir de discussões, decidiram simplificar os dados fornecidos pela Copel, passando a escrevê-los de 4 em 4 horas (Tabela 1[28]) com a justificativa que isso facilitaria o trabalho e não prejudicaria a análise uma vez que as variações entre os níveis do rio, de hora em hora, era muito pequena.

---

[28] Essa tabela indica o nível do rio Iguaçu em alguns dias. Devido à extensão da tabela construída pelos alunos optamos por apresentar apenas parte dela.

Tabela 1 – Nível do rio Iguaçu, de 4 em 4 horas, no ano de 2011

	02/ago	03/ago	04/ago	05/ago	06/ago	07/ago	08/ago	09/ago	10/ago	11/ago
00:00	4,64	5,11	5,29	5,38	5,39	5,39	5,45	5,55	5,85	6
04:00	4,76	5,14	5,31	5,39	5,39	5,40	5,46	5,58	5,88	6,02
08:00	4,87	5,17	5,33	5,39	5,39	5,41	5,48	5,64	5,91	6,03
12:00	4,95	5,20	5,34	5,39	5,39	5,41	5,49	5,7	5,94	6,04
16:00	5,01	5,22	5,35	5,39	5,38	5,42	5,51	5,74	5,96	6,04
20:00	5,07	5,26	5,37	5,39	5,39	5,43	5,53	5,8	5,99	6,05
	13/ago	14/ago	15/ago	16/ago	17/ago	07/set	08/set	09/set	10/set	11/set
00:00	6,02	5,95	5,83	5,66	5,45	4,87	5,11	5,65	6,48	6,66
04:00	6,02	5,94	5,8	5,62	5,42	4,88	5,15	5,79	6,55	6,66
08:00	6,01	5,92	5,77	5,59	5,38	4,93	5,22	5,95	6,6	6,64
12:00	5,99	5,89	5,74	5,56	5,34	4,99	5,32	6,1	6,63	6,63
16:00	5,98	5,86	5,71	5,52	5,3	5,03	5,42	6,25	6,65	6,62
20:00	5,97	5,84	5,68	5,49	5,26	5,07	5,53	6,38	6,66	6,6
	12/set	13/set	14/set	15/set	16/set	17/set	18/set	19/set	20/set	21/set
00:00	6,58	6,43	6,26	6,12	6,02	5,95	5,89	5,82	5,73	5,63
04:00	6,56	6,4	6,23	6,1	6,01	5,94	5,88	5,81	5,72	5,61
08:00	6,54	6,37	6,21	6,08	6	5,93	5,87	5,79	5,7	5,59
12:00	6,51	6,34	6,18	6,06	5,99	5,92	5,85	5,78	5,68	5,57
16:00	6,48	6,32	6,16	6,05	5,97	5,91	5,84	5,76	5,66	5,54
20:00	6,46	6,28	6,14	6,03	5,96	5,9	5,83	5,74	5,65	5,52

Fonte: Adaptada do Trabalho de modelagem entregue por G2.

As declarações do aluno G2-C (*porque a gente consegue meio que ter duas medições por período do dia... manhã, tarde e noite; bom... o importante é a gente não perder muito com esse descarte de medições... e a gente não perde; o nível do rio varia muito pouco de uma hora para outra; dá bem pra gente trabalhar com as medições a cada 4 horas)* sinalizam que a ação cognitiva *estruturação da situação* viabilizava ao grupo a simplificação das informações e o entendimento da situação. Tais declarações se configuram como signos cuja função epistemológica é a de proporcionar interpretações dos alunos sobre as variações do nível do rio ao longo do dia. A partir desses signos, emergem outros, como a tabela produzida pelos alunos e que aparece de forma parcial na Tabela 1 e os pressupostos constantes no Quadro 4. A Tabela 1 indica o resultado de uma conexão entre o nível do rio e o instante no qual ele foi medido e os pressupostos (Quadro 4) asseveram que os alunos estabeleceram relações entre o conjunto de dados dispostos em formato tabular e as informações acerca do tema que rege o desenvolvimento da atividade.

Quadro 4 – Pressupostos enunciados pelos alunos do Grupo 2

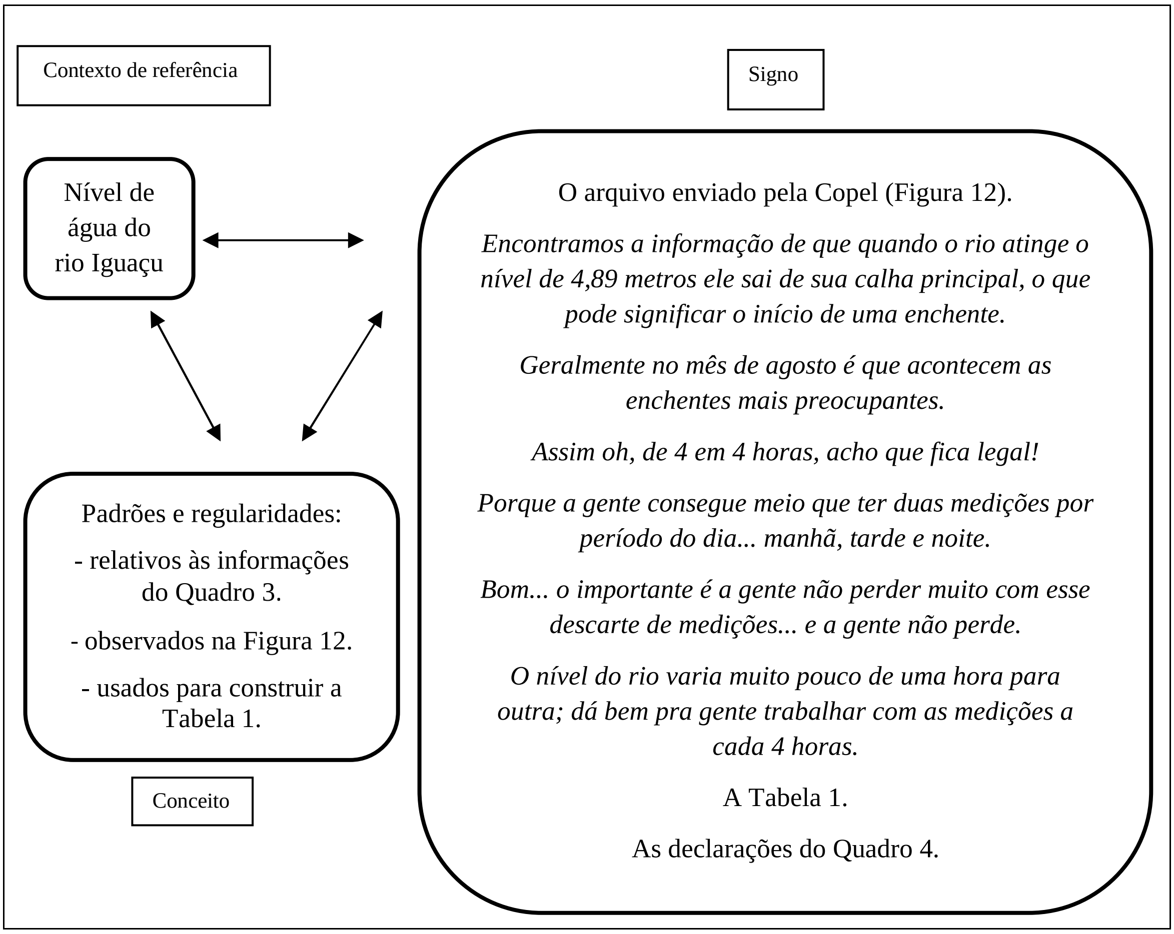
> Considerada a informação de que o rio ultrapassa sua calha quando atinge 4,89m, decidimos trabalhar com os períodos em que o rio ultrapassa a marca de 5 metros.
>
> *Trecho do relatório 3*
>
> Nos períodos selecionados, o tempo que demora até o rio subir e voltar para o mesmo ponto inicial é de cerca de quinze dias.
>
> *Trecho do trabalho de modelagem*

Fonte: A autora.

O reconhecimento de que o intervalo de tempo que o rio demora a voltar aos cinco metros é de quinze dias e a opção por considerar que a partir de cinco metros pode acontecer uma enchente, que no contexto da Modelagem Matemática se caracterizam como hipóteses, são reflexos dos conhecimentos mobilizados pelos alunos acerca de padrões e regularidades. É possível inferir que para a enunciação dessas hipóteses os alunos consideram o caráter representacional dos signos da Figura 12 e do Quadro 3, ou seja, a função semiótica desses signos, como meios para pensar a respeito do problema que sustenta o desenvolvimento da atividade de modelagem e, portanto, para produzir esses outros signos (a escolha por trabalhar com o nível do rio a cada 4 horas, a Tabela 1 e as hipóteses). A produção desses signos revela conhecimentos dos alunos sobre aquilo que os signos representam, evidencia-se então a função epistemológica desses signos. Assim, tanto na ação cognitiva *compreensão da situação* como na *estruturação da situação* os papéis desempenhados pelos signos utilizados e/ou produzidos são subjacentes aos procedimentos adotados pelos alunos na busca por uma solução para o problema por eles identificado.

Na Figura 14 apresentamos as diferentes interpretações interligadas na relação entre signo e contexto de referência, implícitas nos signos produzidos pelos alunos quando o contexto de referência considerado é o nível de água do rio Iguaçu, assim como os conceitos que sustentam essas interpretações e que, de certa forma, permearam os conhecimentos por eles mobilizados.

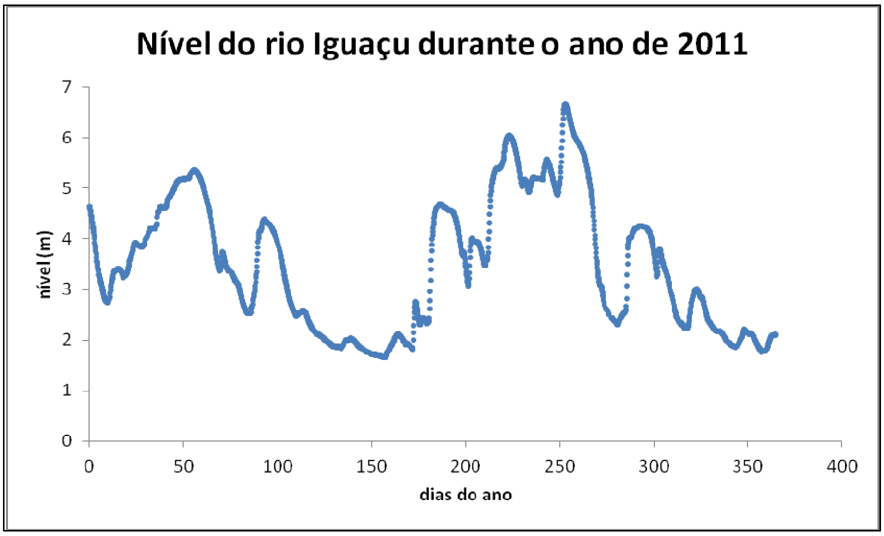
Figura 14 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 2 nas ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação*



Fonte: A autora.

Definido que o problema a investigar refere-se à temática das enchentes, os alunos identificaram a necessidade de olhar para os dados a partir de outra representação matemática – *a gente vai ter que olhar o comportamento desses pontos em outra forma que não só olhando para a tabela* (trecho do relatório 3). Assim, com vistas a obter tal representação, os alunos, utilizando-se da planilha eletrônica *Excel*, representaram o comportamento do nível de água do rio Iguaçu no ano de 2011, considerando os níveis a cada 4 horas, por meio de um gráfico de dispersão (Figura 15). Para tanto, consideraram como variáveis o tempo, dado em dias, e o nível de água, em metros, do rio Iguaçu na cidade de União da Vitória.

Figura 15 – Tendência dos dados referente ao nível do rio Iguaçu



Fonte: Relatório 3 entregue por G2.

A busca dos alunos por uma representação gráfica (Figura 15) dos dados da Tabela 1 parece sinalizar um interesse deles em realizar um ajuste de curva, muito embora a Figura 16 contenha indicativos de que os alunos tinham dúvidas em relação aos próximos encaminhamentos. Todavia, há evidências de que a recorrência ao ajuste de curva foi importante para a definição do problema a resolver, conforme apresentado na Figura 17.

Figura 16 – Dúvidas apresentadas pelos alunos do Grupo 2 em relação ao próximos encaminhamentos

A gente tinha os dados numéricos, analisando, pensamos em fazer o gráfico. Daí a gente tinha o gráfico, e não sabia o que fazer com ele, porque a ideia era analisar a enchente, o período de enchente.

Fonte: Relatório 3 entregue por G2.

Figura 17 – Identificação do problema a resolver

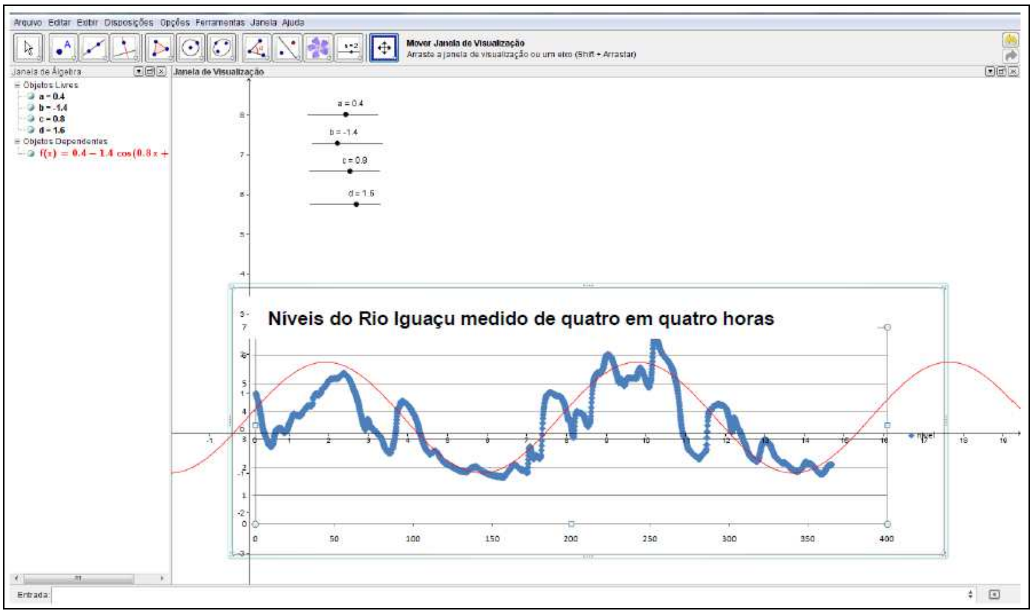
A gente queria fazer um estudo da enchente, mas encontrar uma função ajustada aos pontos da tabela e dizer os períodos mais prováveis de ocorrência de enchente seria muito óbvio, isso é do conhecimento de todos. Então a gente chegou ao problema: verificar o que acontece quando o rio ultrapassa a marca dos 5 metros.

Fonte: Relatório 3 entregue por G2.

A afirmação (Figura 17) *encontrar uma função ajustada aos pontos da tabela e dizer os períodos mais prováveis de ocorrência de enchente seria muito óbvio* sugere aos alunos que fazer um ajuste de curva não os levaria a analisar o comportamento do rio como eles estavam pensando. Tal afirmação, que se configura como signo associado à ação cognitiva *matematização*, aliada aos comentários que os alunos fazem acerca do ajuste (Quadro 5) foi determinante para eles enunciarem um problema a resolver – *Então a gente chegou ao problema: verificar o que acontece quando o rio ultrapassa a marca dos 5 metros.* Dessa forma, o ajuste de curva e os comentários dos alunos presentes no

Quadro 5, correspondem a signos produzidos pelos alunos nas ações cognitivas *matematização* e *interpretação e validação*, respectivamente.

Quadro 5 – Aproximação da situação "Enchentes na cidade de União da Vitória" para uma função trigonométrica



Trecho do trabalho de modelagem

Se nosso interesse fosse analisar em que épocas do ano há ocorrência de enchentes, antes mesmo de aproximarmos os níveis do rio ao longo de um ano a uma função cosseno, já saberíamos a possível resposta que obteríamos.

Trecho do relatório 3

Como já esperávamos, e é do conhecimento de toda a população, a época do ano que o rio atinge os maiores níveis é entre os meses de agosto e setembro, assim como é possível verificar através dos pontos ajustados a uma função trigonométrica.

Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

Os comentários do Quadro 5 revelam indícios de que a realização do ajuste de curva não foi um "bom" encaminhamento. Isso transparece nas constatações que os alunos fazem a partir de alguns fatos observados pela população da cidade de União da Vitória no que se refere às épocas de ocorrência das enchentes.

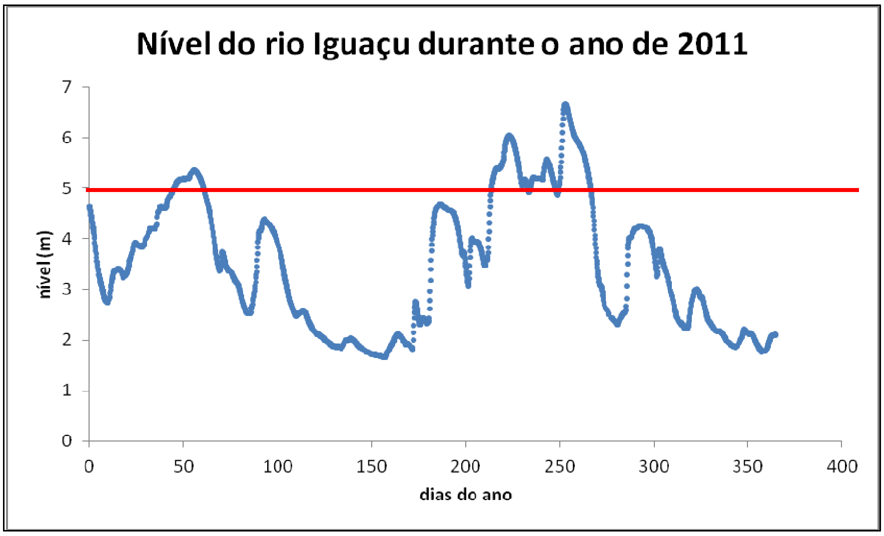
Os conhecimentos que os alunos têm acerca das enchentes e seus conhecimentos matemáticos, mobilizados na ação cognitiva *matematização*, são os responsáveis pelos signos produzidos nessa ação cognitiva e pelo descarte do encaminhamento assumido por eles de aproximar os dados relativos ao nível do rio ao longo do ano de 2011 a uma função trigonométrica. O abandono desse encaminhamento, realizado a partir do caráter de representação dos signos que está associado à sua função semiótica e dos conhecimentos dos alunos sobre aquilo que o signo representa, fazendo submergir a função epistemológica dos signos, evidencia uma característica das atividades de modelagem que é a não linearidade das ações cognitivas dos alunos. Esse abandono leva os alunos a rever aspectos da situação, inclusive com retomada ao problema, e a buscar outro encaminhamento.

A avaliação que os alunos fazem a partir dos signos que eles produziram (Quadro 5) leva-os a pensar a atividade sob outro ponto de vista.

> G2-B: *Nossa gente... o que que a gente precisa... tem que fazer agora será?*
> G2-A: *Como a gente vai trabalhar com essas coisas* (se referindo aos períodos)*... vai ter que ser em separado?*
> [...]
> P: *Vocês mudaram a estratégia de resolução?E a função cosseno?*
> G3-B: *Então professora* (se referindo à pesquisadora), *a gente não gostou daquilo não.*
> G2-C: *A gente tinha até tentado aproximar para o cosseno, o ano inteiro, mas daí isso seria uma coisa muito óbvia, todo mundo sabe que as enchentes na cidade ocorrem naquelas épocas.*
> [...]
> G2-A: *Daí a gente tá pensando em analisar cada parte que passa dos 5 metros, em separado.*
> P: *E no que vocês pensam que isso ajudaria?*
> G2-C: *Assim, oh... se a gente quer analisar os períodos de enchente...*
> G2-B: *E esse é o nosso problema...*
> G2-C: *A gente vai ter que olhar em separado para esses períodos. Seria meio que dar um 'zoom' nesses períodos para analisar eles mais de perto.*
> G2-B: *Com isso a gente pode encontrar uma função para cada um dos períodos e daí tentar responder ao nosso problema. Acho que isso pode dar certo.*
> (Extrato do diálogo dos alunos em sala de aula)

Assim, ao revisitar os signos produzidos nas ações cognitivas *compreensão da situação, estruturação da situação* e *matematização,* os alunos reconhecem que para responder ao problema que eles elencaram precisavam analisar em separado cada um dos períodos (15 de fevereiro a 2 de março, 2 a 17 de agosto, 21 de agosto a 5 de setembro, 7 a 22 de setembro) em que o rio atinge níveis superiores a cinco metros. Na Figura 18 esses períodos estão indicados pelos pontos acima da linha horizontal.

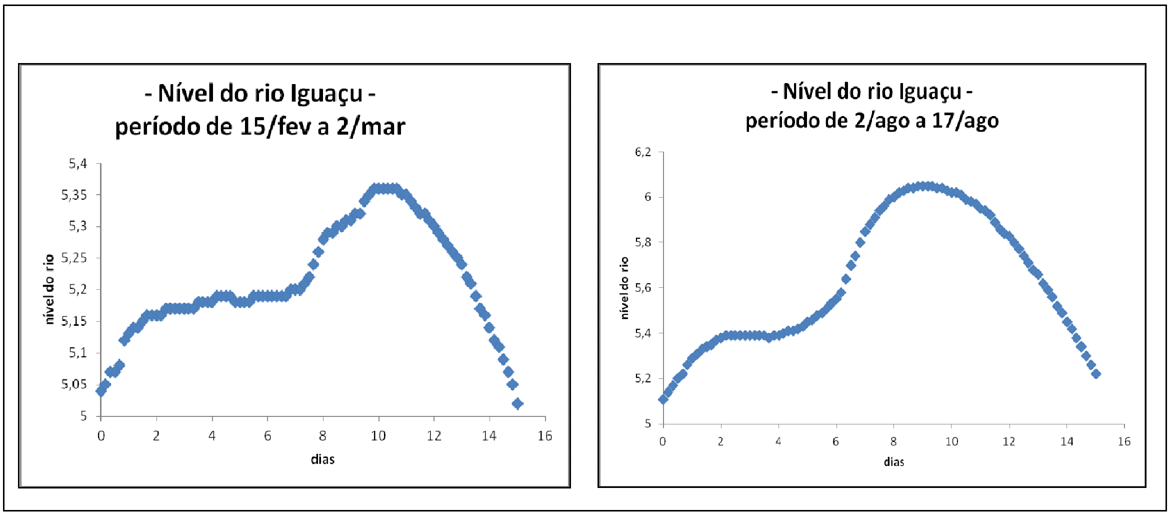
Figura 18 – Identificação dos períodos nos quais o rio ultrapassa o nível de cinco metros

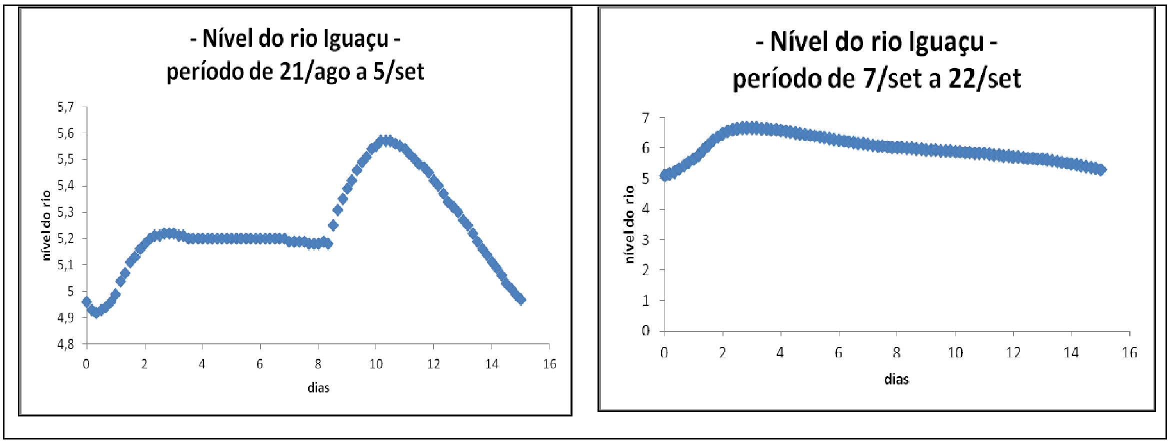


Fonte: Relatório 3 entregue por G2.

O reconhecimento dos alunos de que eles precisariam analisar os períodos de cheia em separado (G2-A – *Daí a gente tá pensando em analisar cada parte que passa dos 5 metros, em separado)* e a sugestão de G2-C – *A gente vai ter que olhar em separado para esses períodos. Seria meio que dar um 'zoom' nesses períodos para analisar eles mais de perto,* os levou a representar cada período, separadamente, conforme mostra a Figura 19.

Figura 19 – Períodos selecionados pelos alunos do Grupo 2





Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

É possível inferir que a declaração de G2-C – *A gente vai ter que olhar em separado para esses períodos... seria meio que dar um 'zoom' nesses períodos para analisar eles mais de perto* – corresponde a um signo que desempenha o papel de direcionar os próximos encaminhamentos do grupo. Esse signo, além de conduzir à obtenção das representações gráficas da Figura 19, que também se configuram como signos emergentes da ação cognitiva *matematização,* sugere uma possibilidade de encontrar uma resposta para o problema, como pode ser observado na fala de G2-B – *Com isso a gente pode encontrar uma função para cada um dos períodos e daí tentar responder ao nosso problema... acho que isso pode dar certo.*

A partir de então, as discussões dos alunos ficam em torno de como encontrar uma solução para o problema:

> G2-A: *Se a gente quer alguma coisa assim do tipo: quando passou de 5 metros então é provável que ele chegue a 6 ou 7 metros... então determinadas casas serão atingidas... porque pelo que a gente pesquisou, passando de 4, 90m ele já passa da calha principal, então 5 metros já é uma enchente... daí a questão seria ver com quantos metros atinge quais locais?*
> P: *Acho que eu não entendi o problema de vocês então... o problema de vocês é analisar isso, que locais vai atingir? E os períodos, daí?*
> G2-C: *Não... passando de 5 metros quantos metros ele pode chegar? porque ele vai estar crescendo pra passar dos 5 metros, então passou dos 5 ele vai chegar a 6 ou 7 metros... então é isso que a gente quer ver.*
> P: *E vocês conseguem analisar quanto ele pode chegar passando dos 5 metros?*
> G2-B: *Na verdade a gente vai analisar a quanto que ele chegou em 2011, que são os dados que a gente tem.*
> [...]
> G2-C: *A gente pegou 4 períodos onde ele passou dos 5 metros, nos outros dias o rio... ele estava baixo. Nesses 4 períodos que ele passou dos 5 metros ele demorou 15 dias pra voltar ao nível normal, na verdade pra voltar aos 5 metros. Ele passou, subiu e... quinze dias depois ele fica normal... então a gente vai analisar esse comportamento pra cima dos 5 metros... em um ele passou de*

> *6, no outro ele chegou perto de 6... assim fazer uma média... passou dos 5m, em média, quanto que ele vai atingir?*
> P: *E quando ele passa dos 5 ele pode chegar a 6, mas ele pode ir... chegar a 7 por exemplo?*
> G2-C: *Isso seria de acordo como está sendo a função que ele está crescendo.*
> P: *E como vocês fizeram ou estão fazendo pra resolver isso?*
> G2-C: *É... ainda não está resolvido. A gente pensou em utilizar a spline e daí ... as funções cúbicas... a cada três dias, que seria onde dá pra ver assim pelo gráfico que houve uma mudança maior. Daí fazer uma média porque tem uma que ele começa crescendo mais, aí estabiliza e cresce de novo pra depois descer, tem outras que ele cresce direto e já desce. Pensei em fazer uma média com o que cresceu bastante com o que ficou mais estabilizado e meio que verificar se ele está crescendo meio rápido demais, até quanto ele chega ou, se está crescendo mais devagar até quantos metros ele chega .*
> P: *Tá, então quer dizer... quando ele tá chegando a 5 metros, de acordo com que ele tá chegando aos 5 metros é que vai dizer se ele vai chegar a 5 ou a 6 ou a 7, é isso que vocês vão analisar? Se existe uma regularidade? Se está crescendo devagar então a quanto vai chegar ou se está crescendo mais rápido a quanto vai chegar?*
> G2-A: *É, porque ali como já foi verificado essa regularidade dos 15 dias até ele abaixar de novo, então acho que faz sentido ver se ele tá crescendo mais até quanto que ele vai atingir ou se vai crescer menos...*
> P: *E como vocês estão pensando em resolver isso?*
> G2-C: *Esses dias a gente vem tentando fazer a interpolação pelo Silab só que não está dando certo, porque a gente não sabe mexer com o Silab e também ainda não tinha trabalhado com esse tipo de interpolação.*
> [...]
> G2-B: *A gente tá estudando Interpolação Spline para tentar resolver o problema que a gente mesmo criou.*
> G2-C: *Porque primeiro tem que descobrir como a coisa funciona pra depois resolver o problema... mas está indo.*

Vale ressaltar que nessa atividade a opção pelo uso do conteúdo matemático *Interpolação Spline* se deu de forma voluntária pelos alunos ao reconhecerem, a partir de consultas em livros de Cálculo Numérico, que esse conteúdo poderia ajudá-los a resolver o “problema das enchentes”.

As intenções dos alunos nesse processo de definir os meios pelos quais eles poderiam se envolver na busca por uma solução para o problema aparecem nas declarações de G2-C – *É... ainda não está resolvido. A gente pensou em utilizar a spline e daí ... as funções cúbicas... a cada três dias, que seria onde dá pra ver assim pelo gráfico que houve uma mudança maior.* – e G2-B – *A gente tá estudando Interpolação Spline para tentar resolver o problema que a gente mesmo criou.* É possível inferir que tais declarações correspondem a signos que indicam que os alunos buscam por determinado conceito para responder ao problema, mesmo sinalizando não conhecer aspectos relativos a esse conceito. No Quadro 6 apresentamos como as intenções dos alunos apareceram no relatório e no trabalho de modelagem.

Quadro 6 – Intenções dos alunos do Grupo 2 para a resolução do problema

A gente chegou que em 4 períodos do ano o rio ultrapassa o nível de 5 metros, coincidentemente, cada um desses períodos leva mais ou menos 15 dias, ou seja, do dia que o rio passou dos 5 metros, vai demorar 15 dias para ele retornar a esse nível de 5 metros. Agora a ideia é achar um polinômio que descreva como o nível do rio se comporta em cada período e daí fazer uma comparação entre esses 4 períodos.

Trecho do relatório 4

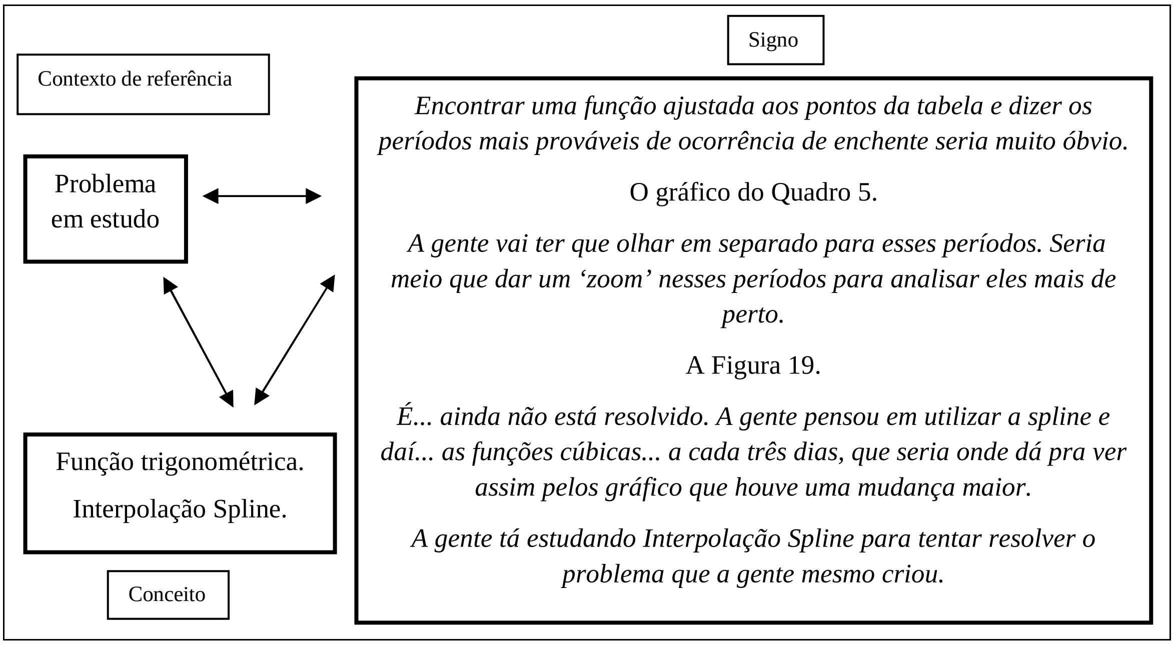
Buscando alternativas, encontramos o método de interpolação Spline cúbica que ajusta um polinômio de grau três a cada intervalo de uma curva de modo que o polinômio resultante seja contínuo. Porém, para utilizar esse método precisamos que a curva estudada retorne à mesma abscissa do início, então, ao invés de utilizarmos os níveis do ano todo decidimos selecionar algumas partes do gráfico para serem estudadas.

Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

Quando das escolhas das estratégias para resolver o problema - *analisar em qual dia, considerado os períodos de cheia, o rio pode atingir níveis que causam enchentes* (trecho do relatório 4), o contexto de referência corresponde aos signos produzidos nas ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação*, logo é o problema em estudo. O conceito refere-se aos objetos matemáticos suscitados para resolver esse problema e o signo às interpretações dos alunos na ação cognitiva *matematização*. Esses três elementos do triângulo epistemológico compõem o triângulo da Figura 20.

Figura 20 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 2 na ação cognitiva *matematização*



Fonte: A autora.

Decidido que para responder ao problema usariam interpolação spline, os alunos passam a estudar aspectos relativos a esse objeto matemático, visto que o mesmo não fora abordado ao longo dos seus estudos e, portanto, era desconhecido por eles.

A possibilidade de estudar objetos matemáticos com vista à resolução de um problema sinaliza que a partir de atividades de modelagem matemática os alunos podem assumir atitudes autônomas e têm oportunidade de estudar conceitos matemáticos que não estão inclusos nos conteúdos programáticos das disciplinas curriculares.

Estudos realizados pelos alunos do Grupo 2, paralelamente ao envolvimento deles com essa atividade de modelagem, os levaram a assumir o encaminhamento apresentado na Figura 21.

Figura 21 – Encaminhamento assumido pelos alunos para o "problema das enchentes"

Para realizar a interpolação Spline decidimos que, como os níveis do rio apresentavam uma mudança mais perceptível a cada três dias, utilizaríamos os dados disponíveis nos dias 0, 3, 6, 9, 12 e 15 em que os dias seriam os x_n e os níveis os $f(x_n) = y_n$, conforme expressos nas tabelas a seguir:

Período de 15 de fevereiro a 2 de março	
x_n (Dia)	y_n (nível do rio em metros)
0	5,04
3	5,17
6	5,19
9	5,31
12	5,3
15	5,02

Período de 2 a 17 de agosto	
x_n (Dia)	y_n (nível do rio em metros)
0	5,11
3	5,39
6	5,55
9	6,05
12	5,83
15	5,22

Período de 21 de agosto a 5 de setembro	
x_n (Dia)	y_n (nível do rio em metros)
0	4,96
3	5,22
6	5,2
9	5,39
12	5,42
15	4,97

Período de 7 a 22 de setembro	
x_n (Dia)	y_n (nível do rio em metros)
0	5,11
3	6,66
6	6,26
9	5,95
12	5,73
15	5,3

Diante dessas informações, percebemos que entre o 6º e o 12 º dia o rio apresenta seus maiores níveis.
Como no problema em estudo, selecionamos 6 pontos, desejamos encontrar 5 polinômios de grau 2, que se aproximem da curva que temos inicialmente:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \\ s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \\ s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 \\ s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2 \\ s_4(x) = a_4 + b_4(x - x_4) + c_4(x - x_4)^2 \end{cases}$$

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

Continuação da Figura 21 – Encaminhamento assumido pelos alunos para o "problema das enchentes"

As equações acima nos dão polinômios que encontram os pontos selecionados em seus extremos, logo, deve ocorrer que o ponto x_1 aplicado no polinômio s_0 resulte na mesma abscissa ($f(x_1)$) que o ponto x_0 aplicado no polinômio s_1, e assim ocorre com os demais polinômios:

$$s_0(x_1) = s_1(x_1) = f(x_1)$$
$$s_1(x_2) = s_2(x_2) = f(x_2)$$
$$s_2(x_3) = s_3(x_3) = f(x_3)$$
$$s_3(x_4) = s_4(x_4) = f(x_4)$$

E quando substituímos estes pontos nas equações que temos, obtemos:

$$s_0(x_1)= f(x_1) = a_0 + b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2$$
$$s_1(x_1)= f(x_1) = a_1 + b_1(x_1 - x_1) + c_1(x_1 - x_1)^2 = a_1$$
$$s_1(x_2)= f(x_2) = a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2$$
$$s_2(x_2)= f(x_2) = a_2 + b_2(x_2 - x_2) + c_2(x_2 - x_2)^2 = a_2$$
$$s_2(x_3)= f(x_3) = a_2 + b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2$$
$$s_3(x_3)= f(x_3) = a_3 + b_3(x_3 - x_3) + c_3(x_3 - x_3)^2 = a_3$$
$$s_3(x_4)= f(x_4) = a_3 + b_3(x_4 - x_3) + c_3(x_4 - x_3)^2$$
$$s_4(x_4)= f(x_4) = a_4 + b_4(x_4 - x_4) + c_4(x_4 - x_4)^2 = a_4$$

Ainda, como sabemos que:

$$s_0(x_0)= f(x_0) = a_0 + b_0(x_0 - x_0) + c_0(x_0 - x_0)^2 = a_0$$

Assim, já conseguimos obter os coeficientes a_n, tais que a_n= f(a_n).

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

A opção de considerar seis pontos em cada período, justificada na Figura 21, é reflexo dos conhecimentos dos alunos acerca da situação (particularmente ao problema a resolver) e da matemática envolvida (interpolação spline), mobilizados na ação cognitiva *síntese*. Dessa opção advém a produção das quatro tabelas presentes na Figura 21 e dos polinômios *S(x)*, apresentados na Figura 22, para cada um dos quatro períodos considerados. Ambos, tabelas e polinômios, correspondem a signos que desempenham o papel de favorecer uma compreensão sobre o problema a partir de objetos matemáticos.

Figura 22 – Representação algébrica dos períodos de cheia

Além disso, como a função desejada deve ser contínua inclusive nos nós, devemos ter:

$s_{0'}(x_1) = s_{1'}(x_1)$
$s_{1'}(x_2) = s_{2'}(x_2)$
$s_{2'}(x_3) = s_{3'}(x_3)$
$s_{3'}(x_4) = s_{4'}(x_4)$

de onde resulta,

$$b_0 + c_0(x_1 - x_0) = b_1$$
$$b_1 + c_1(x_2 - x_1) = b_2$$
$$b_2 + c_2(x_3 - x_2) = b_3$$
$$b_3 + c_3(x_4 - x_3) = b_4$$

Assim, de posse das seguintes igualdades, é possível encontrar os coeficientes b_n e c_n, uma vez que:

$$b_0(x_1 - x_0) + c_0(x_1 - x_0)^2 = f(x_1) - a_0$$
$$b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 = f(x_2) - a_1$$
$$b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2 = f(x_3) - a_2$$
$$b_3(x_4 - x_3) + c_3(x_4 - x_3)^2 = f(x_4) - a_3$$
$$b_4(x_5 - x_4) + c_4(x_5 - x_4)^2 = f(x_5) - a_4$$

$$b_0 + c_0(x_1 - x_0) = b_1$$
$$b_1 + c_1(x_2 - x_1) = b_2$$
$$b_2 + c_2(x_3 - x_2) = b_3$$
$$b_3 + c_3(x_4 - x_3) = b_4$$

Além do fato de que estamos considerando que no ponto x_0, a derivada do polinômio s_0 é zero, ou seja:

$$b_0 + c_0(x_1 - x_0) \quad = 0.$$

Assim, conhecendo os valores de x_n, $f(x_n)$, a_n e b_0, através de sucessivas substituições nas igualdades acima encontramos os coeficientes c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, b_4 e c_4.

Como no problema estudado selecionamos os pontos $x_0=0$; $x_1=3$; $x_2=6$; $x_3=9$; $x_4=12$; $x_5=15$, procuramos polinômios da seguinte forma:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = a_0 \mid b_0(x \quad 0) \mid c_0(x \quad 0)^2, 0 \le x \le 3 \\ s_1(x) = a_1 + b_1(x-3) + c_1(x-3)^2,\ 3 \le x \le 6 \\ s_2(x) = a_2 + b_2(x-6) + c_2(x-6)^2,\ 6 \le x \le 9 \\ s_3(x) = a_3 + b_3(x-9) + c_3(x-9)^2, 9 \le x \le 12 \\ s_4(x) = a_4 \mid b_4(x \quad 12) \mid c_4(x \quad 12)^2, 12 \le x \le 15 \end{cases}$$

E, baseado nos níveis que o rio apresenta nesses pontos, nos intervalos considerados, encontramos as seguintes funções:

- Para o período de 15 de fevereiro a 2 de março:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = 5{,}04 + 0{,}01x^2, 0 \le x \le 3 \\ s_1(x) = 5{,}17 + 0{,}09(x-3) - 0{,}03(x-3)^2,\ 3 \le x \le 6 \\ s_2(x) = 5{,}19 - 0{,}07(x-6) + 0{,}04(x-6)^2,\ 6 \le x \le 9 \\ s_3(x) = 5{,}31 + 0{,}15(x-9) - 0{,}05(x-9)^2, 9 \le x \le 12 \\ s_4(x) = 5{,}3 - 0{,}16(x-12) + 0{,}02(x-12)^2, 12 \le x \le 15 \end{cases}$$

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

Continuação da Figura 22 – Representação algébrica dos períodos de cheia

- Para o período de 2 a 17 de agosto:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = 5{,}11 + 0{,}03x^2, 0 \leq x \leq 3 \\ s_1(x) = 5{,}39 + 0{,}19(x-3) - 0{,}04(x-3)^2,\ 3 \leq x \leq 6 \\ s_2(x) = 5{,}55 - 0{,}08(x-6) + 0{,}08(x-6)^2,\ 6 \leq x \leq 9 \\ s_3(x) = 6{,}05 + 0{,}41(x-9) - 0{,}16(x-9)^2, 9 \leq x \leq 12 \\ s_4(x) = 5{,}83 - 0{,}56(x-12) + 0{,}12(x-12)^2, 12 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

- Para o período de 21 de agosto a 5 de setembro:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = 4{,}96 + 0{,}03x^2, 0 \leq x \leq 3 \\ s_1(x) = 5{,}22 + 0{,}17(x-3) - 0{,}06(x-3)^2,\ 3 \leq x \leq 6 \\ s_2(x) = 5{,}2 - 0{,}19(x-6) + 0{,}08(x-6)^2,\ 6 \leq x \leq 9 \\ s_3(x) = 5{,}39 + 0{,}31(x-9) - 0{,}1(x-9)^2, 9 \leq x \leq 12 \\ s_4(x) = 5{,}42 - 0{,}29(x-12) + 0{,}05(x-12)^2, 12 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

- Para o período de 7 a 22 de setembro:

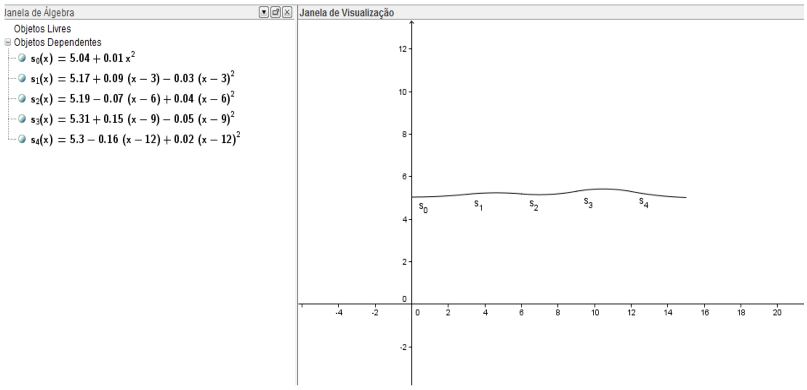
$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = 5{,}11 + 0{,}17x^2, 0 \leq x \leq 3 \\ s_1(x) = 6{,}66 + 1{,}03(x-3) - 0{,}39(x-3)^2,\ 3 \leq x \leq 6 \\ s_2(x) = 6{,}26 - 1{,}3(x-6) + 0{,}4(x-6)^2,\ 6 \leq x \leq 9 \\ s_3(x) = 5{,}95 + 1{,}09(x-9) - 0{,}39(x-9)^2, 9 \leq x \leq 12 \\ s_4(x) = 5{,}73 - 1{,}24(x-12) + 0{,}37(x-12)^2, 12 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

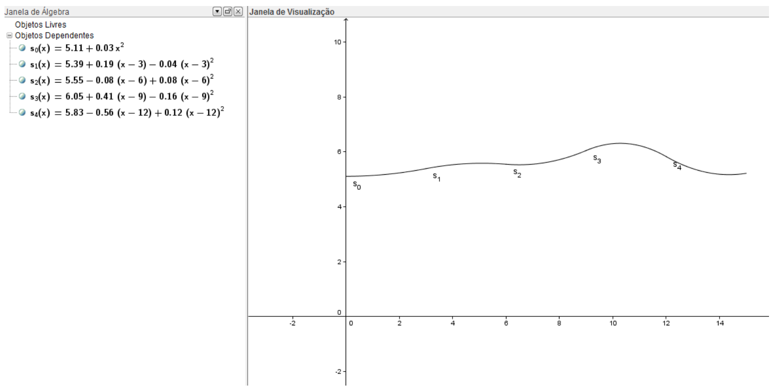
Tanto as tabelas (Figura 21) como os polinômios (Figura 22) produzidos pelos alunos, revelam características atreladas às funções semiótica e epistemológica dos signos na medida em que ao mesmo tempo em que fazem referência ao problema, agora com a Matemática como contexto de referência, carregam aspectos dos conhecimentos dos alunos sobre o conceito em foco, a saber, polinômios, interpolação spline, derivada. Além disso, esses signos são responsáveis pela produção de outros signos, representados pelas curvas construídas no GeoGebra (Figura 23). Tais signos, que carregam conexões entre eles e seus respectivos polinômios escritos na forma algébrica, se referem à interpolação spline em cada período de cheia.

Figura 23 – Representação gráfica dos polinômios correspondentes aos períodos de cheia

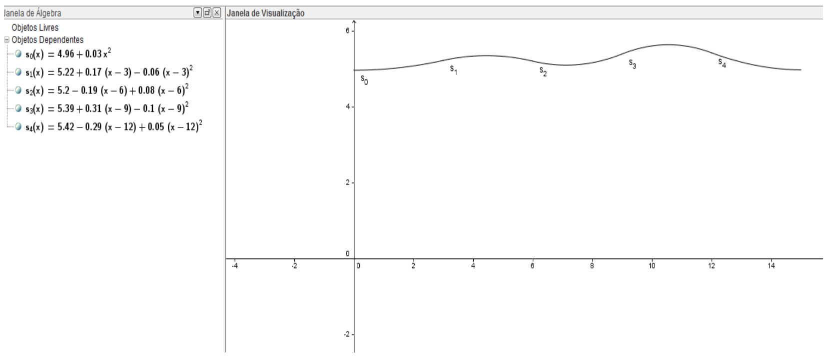
- Curva que representa a interpolação polinomial Spline de 15 de fevereiro a 2 de março:



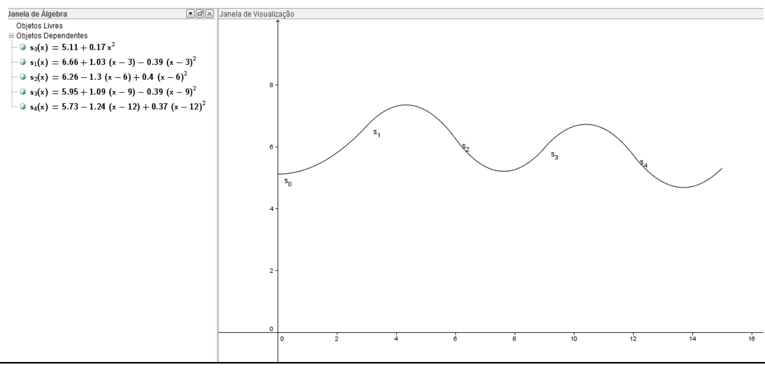
- Curva que representa a interpolação polinomial Spline de 2 a 17 de agosto:



- Curva que representa a interpolação polinomial Spline de 21 de agosto a 5 de setembro:



- Curva que representa a interpolação polinomial Spline de 7 a 22 de setembro:



Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

A representação gráfica, nesse caso, parece revelar que os alunos almejavam visualizar o comportamento dos polinômios obtidos. A recorrência a esses signos utilizando-se de recurso tecnológico, nesse caso o software GeoGebra, constitui-se em uma estratégia comum quando do envolvimento dos alunos com atividades de modelagem e, de forma geral, é movida por um interesse dos alunos em considerar as possibilidades de reflexões advindas desses signos. Afinal, esses signos podem agir como um instrumento de mediação que atenta para aspectos específicos da situação antes não considerados via outras representações.

O trecho a seguir ilustra o momento em que os alunos decidem recorrer à representação gráfica para "visualizar" os polinômios.

> G3-B: *A gente tem agora os polinômios dos períodos que a gente queria, mas como que a gente vai responder ao nosso problema?*
> P: *Quando vocês pensaram em trabalhar com a spline nesses períodos, vocês pensaram em algo, não foi? O que esses polinômios significam para vocês?No que eles podem contribuir para a busca pela solução do problema?*
> G2-A: *A gente conseguiu descrever o comportamento desses períodos de forma... como é mesmo que diz?*
> G3-C: *Algébrica.*
> G3-B: *Mas isso não diz muita coisa... pelo menos não pra mim.*
> G3-C: *E se a gente fizesse o gráfico?*
> G3-B: *Quando a gente fez aquele gráfico* (se referindo à Figura 15) *a gente conseguiu ver coisas interessantes. Foi dele que a gente definiu os períodos.*
> G3-A: *Vamos fazer então... no GeoGebra, pode ser?*

Levando em consideração as tabelas da Figura 21, os polinômios da Figura 22 e as representações gráficas da Figura 23 que no âmbito de uma atividade de modelagem são reconhecidos como modelos matemáticos representativos da situação "Enchentes na cidade de União da Vitória" é que os alunos, na tentativa de encontrar uma solução para o problema, realizaram a resolução apresentada na Figura 24.

Figura 24 – Resolução dos alunos para a situação “Enchentes na cidade de União da Vitória”

Como uma forma de tentar prever como se comportam as cheias do rio Iguaçu fizemos a média dos polinômios encontrados, encontrando:

$$S(x)\begin{cases} s_0(x) = 5{,}05 + 0{,}06x^2, 0 \le x \le 3 \\ s_1(x) = 5{,}61 + 0{,}36(x-3) - 0{,}13(x-3)^2,\ 3 \le x \le 6 \\ s_2(x) = 5{,}55 - 0{,}41(x-6) + 0{,}25(x-6)^2,\ 6 \le x \le 9 \\ s_3(x) = 5{,}67 + 0{,}49(x-9) - 0{,}17(x-9)^2, 9 \le x \le 12 \\ s_4(x) = 5{,}57 - 0{,}56(x-12) + 0{,}14(x-12)^2, 12 \le x \le 15 \end{cases}$$

Considerando que os maiores níveis do rio acontecem entre o 6º e o 12º dia, decidimos derivar os polinômios nos intervalos em questão e verificar se a resposta obtida faria sentido. Obtivemos assim as seguintes derivadas:

$$s_2'(x) = -0{,}41 + 0{,}5(x-6)$$

$$s_3'(x) = 0{,}49 - 0{,}34(x-9).$$

Que quando igualadas a zero indicam os pontos críticos dos referidos polinômios. Assim, temos:

$$-0{,}41 + 0{,}5(x-6) - 0 \rightarrow x - 6{,}82$$

$$0{,}49 - 0{,}34(x-9) = 0 \Rightarrow x = 10{,}44$$

Como S(6,82) = 5,3819 e S(10,44) = 6,023, temos que o ponto de máximo será 10,44, ou seja, aproximadamente no 10º dia de algum período de cheia o rio atingirá um nível máximo.

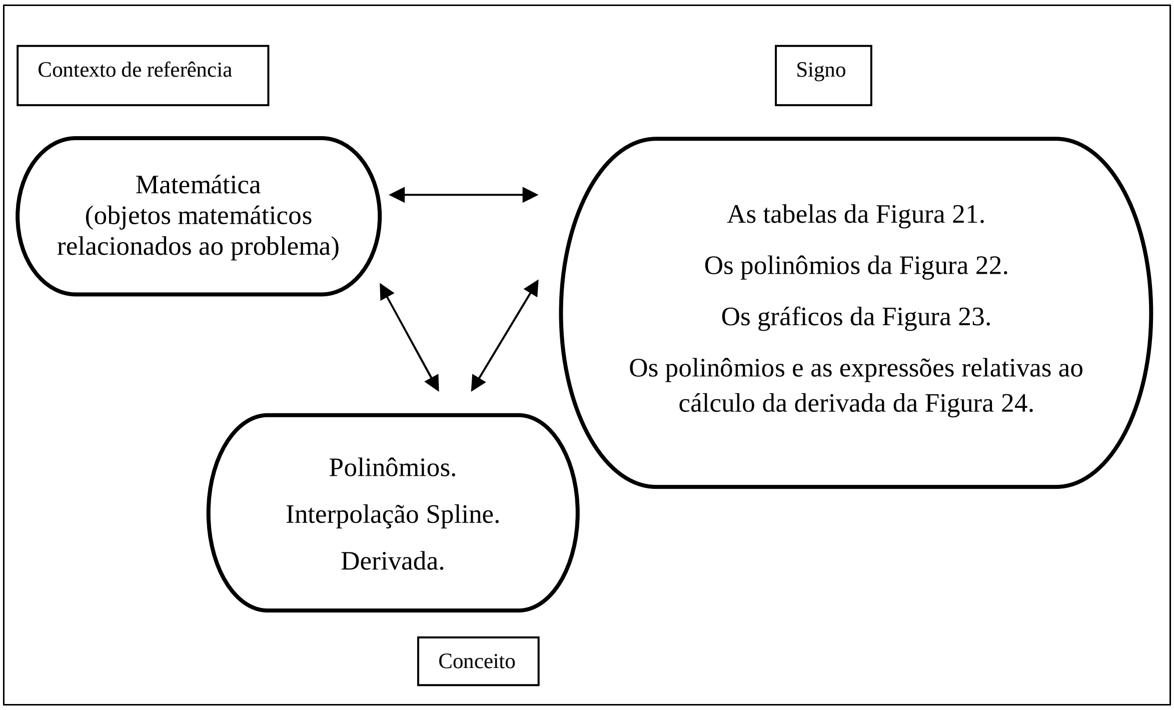
Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G2.

A estratégia de realizar a média dos polinômios, advinda das primeiras interpretações dos alunos e confirmada na ação cognitiva *síntese*, é, nesse momento, amparada na afirmativa dos alunos de que *uma vez que todos os polinômios representam o comportamento do rio quando o mesmo ultrapassa o nível de 5 metros, faz sentido utilizarmos a média porque quando a gente analisa cada período, eles têm comportamento parecido, então fazer a média não é muito problema* (trecho do relatório 4). Tal estratégia leva os alunos a calcular a derivada do polinômio da Figura 24, nos pontos 6 e 12, na intenção de obter uma resposta para o problema.

Desse modo, tanto o polinômio quanto as expressões relativas ao cálculo da derivada, constantes na Figura 24, correspondem a signos produzidos pelos alunos. Esses signos são resultado de uma interpretação realizada pelos alunos e sustentados pela estratégia de fazer a média dos polinômios dos períodos de cheia. Além disso, esses signos retratam conhecimentos mobilizados pelos alunos acerca de conceitos matemáticos por eles usados a fim de encontrar uma solução para o problema cuja mobilização pode ser associada à função epistemológica desses signos.

Os três elementos do triângulo epistemológico na ação cognitiva *síntese* são apresentados na Figura 25.

Figura 25 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 2 na ação cognitiva *síntese*

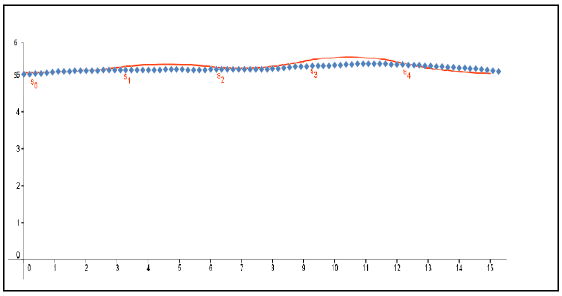


Fonte: A autora.

A partir dessa resolução, os alunos, antes de analisar as respostas obtidas, voltam-se para os polinômios que eles obtiveram para cada período, na intenção de avaliar se, de fato, a situação por eles analisada pode ser descrita por esses polinômios. Esse encaminhamento é apresentado no Quadro 7. Os pontos pontilhados dizem respeito aos dados coletados e a curva tracejada, os polinômios obtidos a partir da interpolação.

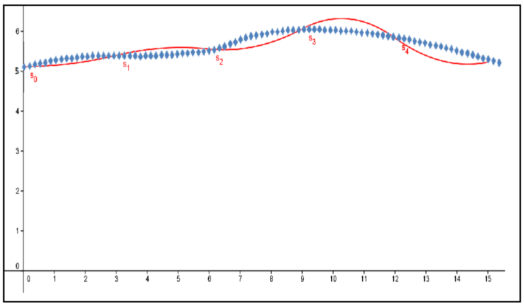
Quadro 7 – Interpretação e validação realizada pelos alunos do Grupo 2

- Para o período de 15 de fevereiro a 2 de março:



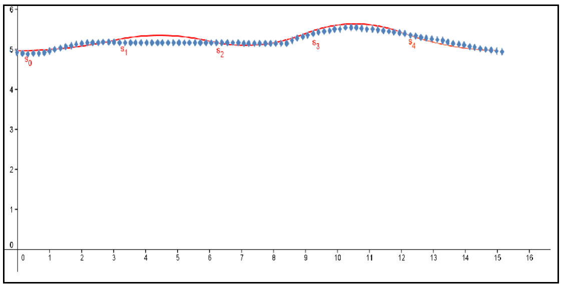
Trecho do trabalho de modelagem

- Para o período de 2 a 17 de agosto:



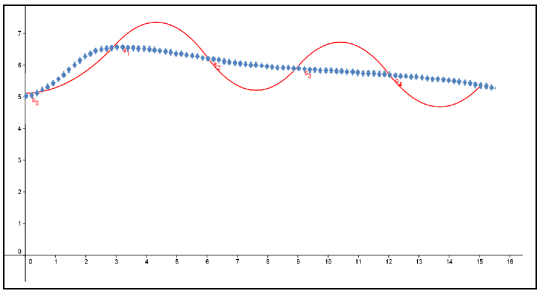
Trecho do trabalho de modelagem

- Para o período de 21 de agosto a 5 de setembro:



Trecho do trabalho de modelagem

- Para o período de 7 a 22 de setembro:



Trecho do trabalho de modelagem

Percebemos que em três dos quatro períodos analisados, o nível do rio começa a crescer mais lentamente e depois acelera. No outro período acontece o contrário.

Trecho do relatório 3

Apesar da curva que representa o período de 7 a 22 de setembro não estar muito próxima do polinômio encontrado, ela pode ser encarada como uma medida de prevenção, uma vez que se água atingir determinados níveis pode continuar subindo no intervalo de tempo considerado.

Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

Para avaliar os polinômios obtidos os alunos recorrem novamente à construção de gráficos no *Excel* com o propósito de confrontar os dados coletados com os calculados. Essa avaliação se reflete também nos comentários apresentados no Quadro 7.

Esse processo avaliativo sinaliza que em decorrência da ação cognitiva *interpretação e validação*, os alunos assumiram que *aproximadamente no 10º dia de algum período de cheia o rio atingirá um nível máximo* (G2-A em entrevista) pode ser uma possível resposta para o problema. Sendo assim, essa resposta se configura como signo que foi produzido a partir de uma interpretação dos alunos à luz da situação e dos conceitos matemáticos usados na obtenção dessa resposta.

Da ação cognitiva *comunicação e argumentação,* os alunos do Grupo 2 produzem novos signos (Quadro 8). Isso ocorre quando eles reconhecem e aceitam a resposta por eles obtida como solução para o problema que originou a atividade de modelagem.

Quadro 8 – Argumentações dos alunos do Grupo 2 acerca da solução obtida para o problema

> Acompanhando o aumento do nível de água do rio ao longo de um período de cheia pode-se tomar algumas providências se, de repente, logo nos primeiros dias o rio já tiver alcançado um nível preocupante como no caso das enchentes de 1983 e 1992. Talvez se as pessoas soubessem que no 10º dia de um período de cheia o rio alcançaria o maior nível, teriam retirado suas coisas de casa para não perderem tudo o que perderam.

Trecho do trabalho de modelagem

> Pensamos também em realizar interpolação polinomial nestes mesmos períodos, porém a vantagem da Spline era que a função obtida seria contínua e derivável mesmo nos pontos denominados nós, coisa que não teríamos garantia de ocorrer com outro método de interpolação [...] ainda aprenderíamos um método de interpolação que não foi abordado na nossa grade curricular.

Trecho do relatório 4

> A resposta que obtivemos para o problema viabiliza que previsões sejam realizadas no sentido de que quando o rio ultrapassa cinco metros, de acordo com as características dos períodos de cheia, é possível estimar a partir de qual dia (dia que o rio atinge seu nível máximo) o rio vai começar a abaixar.

Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

É possível inferir, a partir desses signos, que há uma preocupação dos alunos em justificar as escolhas que eles fizeram para desenvolver essa atividade de modelagem, aliando suas experiências e de seus familiares em relação à situação em estudo ao encaminhamento dado por eles a fim de encontrar uma solução para o problema. Nesse sentido, esses signos carregam com eles características da situação e dos conceitos matemáticos utilizados para responder ao problema.

Apesar de destacar que a atividade de modelagem como um todo tem limitações, os alunos consideram satisfatória a solução por eles obtida.

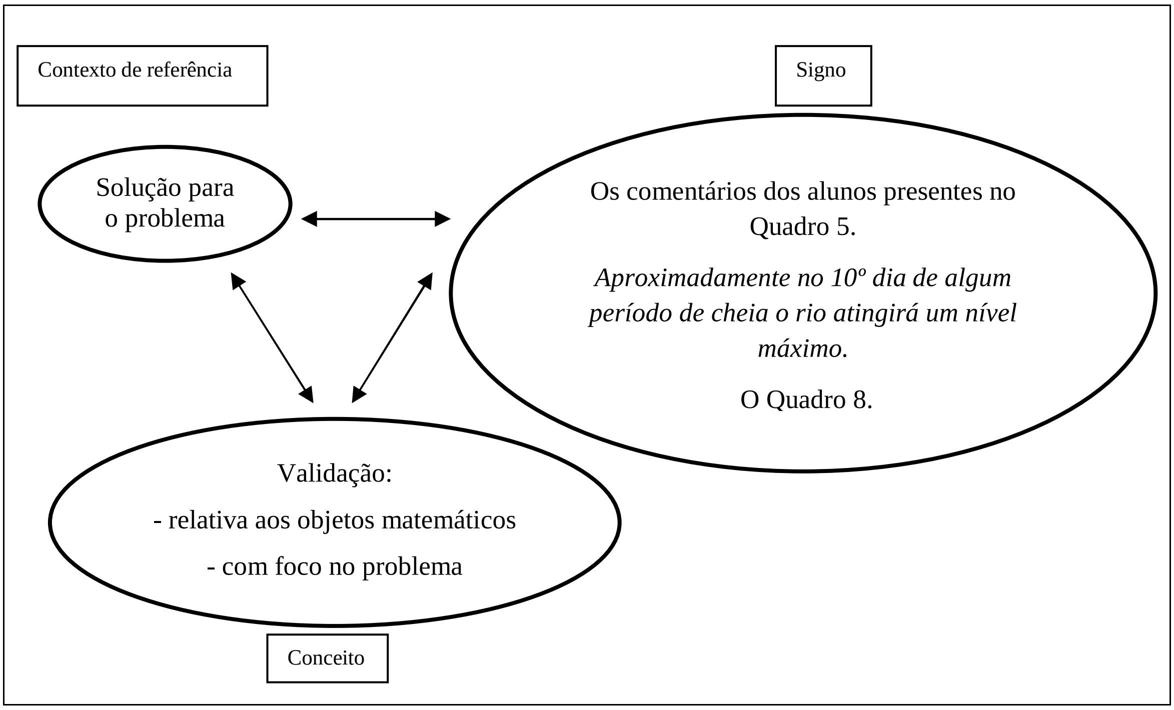
> *Essa atividade apenas analisa o que aconteceu em 2011... também a gente não conseguiu de outros anos... [...] é fato que os períodos de cheias são praticamente os mesmos todos os anos, mas... bom... de qualquer forma, mesmo acontecendo algumas variações, pelo que as pessoas falam... sempre que o rio começa a subir demora alguns dias para ele atingir as casas que ficam ali por*

> *perto... e por que esse dia não pode ser 10 dias depois que o rio começou a subir? Acho que a nossa modelagem está bem boa...* (G2-C em entrevista).

Nesse fragmento fica evidente que os alunos fazem ressalvas quanto aos períodos de cheias analisados serem relativos ao nível de água do rio em um único ano e expõem, implicitamente, a dificuldade de obter dados de outros anos.

Os signos manifestados nas ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação* estão atrelados à solução obtida para o problema e fazem emergir conhecimentos dos alunos acerca do conceito validação. No triângulo epistemológico da Figura 26 esses signos aparecem em conexão com o contexto de referência ao qual eles se referem que é a resolução, considerada solução para o problema, advinda das reflexões e interpretações realizadas ao longo da atividade de modelagem e permeada pelo conceito em questão.

Figura 26 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 2 nas ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação*



Fonte: A autora.

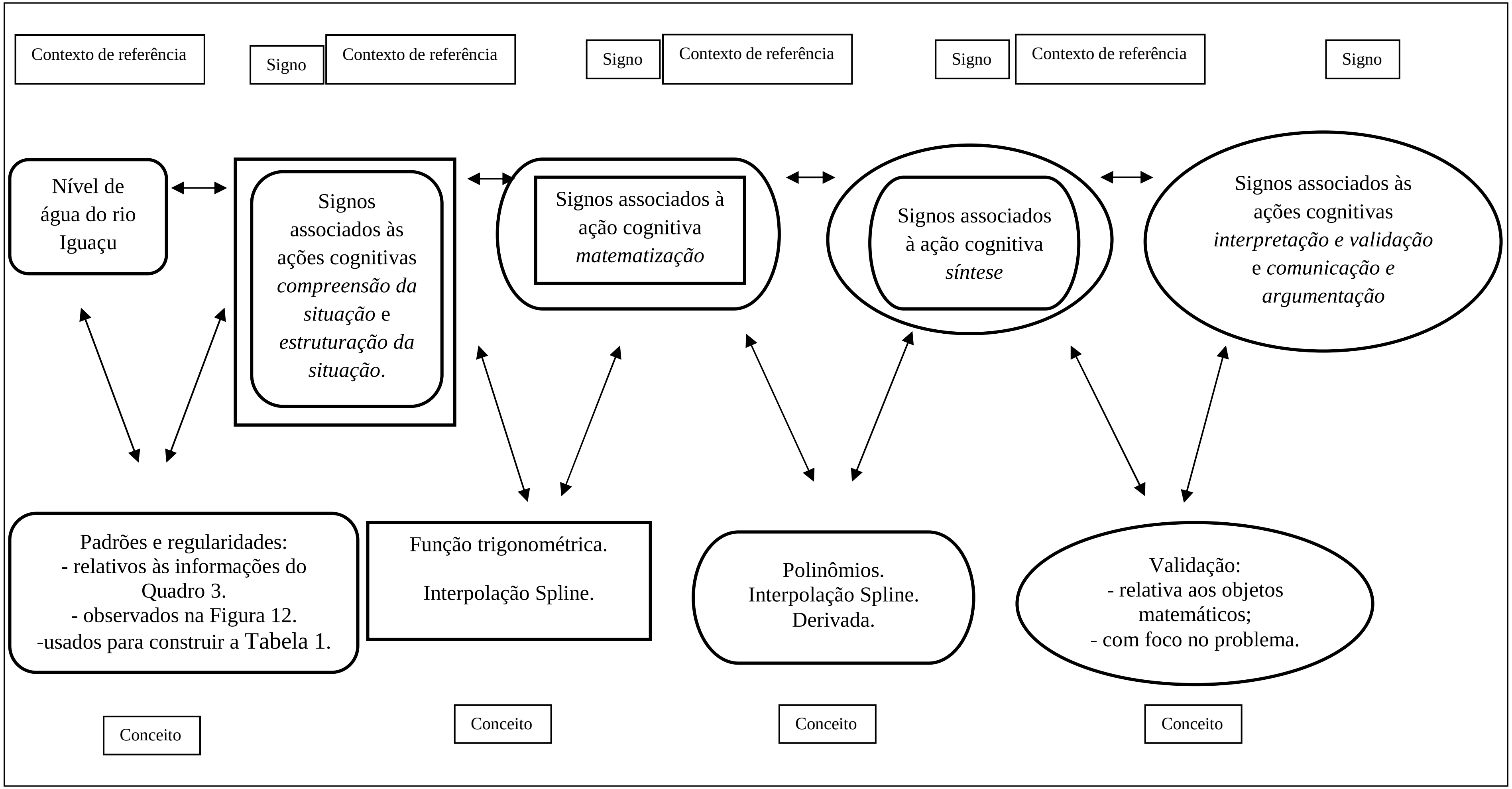
A sequência de triângulos epistemológicos da Figura 27 ilustra que inicialmente os signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos carregam somente características da situação. Porém, ao longo da atividade outros signos vêm compor o conjunto de signos que leva à solução do problema e, nesse sentido, alguns se relacionam, além da situação, ao problema, aos objetos matemáticos e à resposta reconhecida como uma solução para o problema.

As formas geométricas atreladas à sequência de triângulos da Figura 27 referem-se aos diferentes triângulos epistemológicos construídos ao longo da análise dessa atividade e associados às ações cognitivas dos alunos.

Os signos associados às diferentes ações cognitivas dos alunos levam à identificação de diferentes contextos de referência à medida que os alunos interpretam, analisam e articulam os signos de cada um dos triângulos epistemológicos. Inferimos, portanto, que o envolvimento dos alunos com a atividade de modelagem “Enchentes na cidade de União da Vitória” possibilita que os elementos de cada um dos triângulos se modifiquem a cada nova interpretação dos alunos.

A articulação entre esses signos e a complementaridade entre eles são decorrentes das funções semiótica e epistemológica desses signos. Conexões entre signos, contexto de referência e conceito evidenciam a função semiótica do signo quando nelas é considerado o caráter de representação dos signos. Por outro lado, quando os conhecimentos dos alunos sobre aquilo que o signo representa orientam as interpretações dos alunos nas conexões entre esses três elementos do triângulo epistemológico, o que é demandado é a função epistemológica dos signos.

Figura 27 – Triângulos epistemológicos dos alunos do Grupo 2



Fonte: A autora.

4.1.2 Atividade do G3: O Ideb nas escolas do Paraná

A temática da atividade de modelagem *"O Ideb nas escolas do Paraná"* foi decorrente da sugestão de um dos alunos do Grupo 3 depois de, durante quatro aulas, terem se envolvido com outro tema, porém sem avançar na sua investigação. O fragmento do diálogo a seguir retrata o momento no qual os alunos abandonam o tema anterior e decidem se envolver com o *"Ideb"*.

> P*: Vocês disseram que iriam trabalhar com a questão da glicerina... no que vocês avançaram?*
> G3-A, G3-B: *Em nada. Na verdade a gente não está conseguindo dados.*
> G3-A: *A gente tem um tema, mas não sabemos se vai dar certo. A gente não achou nada sobre a glicerina.*
> P: *Não acharam?*
> G3-C: *Só tem receitas.*
> P: *Nos produtos não têm a quantidade que vai?*
> G3-B: *Não, não tem.*
> G3-A: *Tem que vai, mas não tem as quantidades.*
> P: *Então... o que pensaram então?*
> [...]
> D: *Pessoal, vocês já estão há algum tempo tentando fazer sobre isso... até agora nada?*
> G3-A: *Também a gente não acha dados.*
> G3-C: *É... acho que eu nem estou gostando de fazer sobre isso.*
> G3-B: *Vamos deixar pra lá então. Não tem dados pra gente fazer algo legal.*
> D: *Tudo bem abandonarem esse tema* (se referindo ao tema "glicerina"), *mas precisam pensar em outro.*
> [...]
> G3-B: *Vamos estudar sobre o Ideb, sabe... aquela avaliação que fazem na Educação Básica.*
> G3-C: *Que que é o Ideb?*
> G3-A: *É aquele negócio que mede o desempenho das escolas, né?*
> G3-B: *É... tá relacionado a uma prova que as escolas fazem. Daí assim... do que eu consegui achar foi do Ideb, do Ideb geral. Ainda tenho que achar alguns dados, mas esse aqui* (folheando o material pesquisado que estava impresso) *que é até 2009 é por escolas. O Ideb geral conta as escolas particulares, públicas... todas elas, municipal, estadual e tudo... e esse dali* (apontando para as outras folhas do material impresso) *já não, é só para as escolas públicas. E esse* (se referindo ao material impresso que estava em suas mãos) *usa as escolas particulares.*

A iniciativa do Grupo 3 em relação à mudança de tema foi amparada na dificuldade dos alunos de encontrar dados suficientes para desenvolver uma atividade pautada no tema "glicerina". Tal iniciativa também foi decorrente das declarações de G3-C – *É... acho que eu nem estou gostando de fazer sobre isso.* – e de G3-B – *Vamos deixar pra lá então. Não tem dados pra gente fazer algo legal.* – que denunciam pouco interesse por parte desses alunos de desenvolver uma atividade de modelagem matemática relacionada a esse tema.

O aluno G3-B, a partir da declaração v*amos estudar sobre o Ideb, sabe... aquela avaliação que fazem na Educação Básica,* provavelmente por já ser docente de uma escola pública, sugere o tema Ideb. No entanto, era preciso definir um problema específico a ser investigado em relação a essa temática. A seleção de um problema a resolver é também sinalizado pelo aluno G3-B, após todos do grupo concordar em estudar esse tema.

> G3-B: *Daí no estado eu pensei, só no estado do Paraná. Ou a gente trabalha com os três estados do sul.*
> P: *Mas o que vocês pensaram em resolver?*
> G3-B: *Aqui, das coisas aqui que eu tenho, eles* (se referindo aos estados do Brasil) *têm uma meta para atingir. Eles têm uma meta para 2021.*

Nesse fragmento há indicativos de que o aluno G3-B delimita o número de informações coletadas quando propõe estudar o Ideb no Paraná ou nos estados do sul do país (*Daí no estado eu pensei, só no estado do Paraná. Ou a gente trabalha com os três estados do sul.*). É possível inferir que, nesse momento inicial da atividade, apenas o aluno G3-B se sente responsável por buscar informações e socializá-las com os demais colegas do grupo. Isso se confirma também na informação proferida por G3-B – *Eles têm uma meta para 2021* – que implicitamente, sugere um problema a ser resolvido. Constatamos, que as declarações desse aluno correspondem a signos que atuam como responsáveis pelo engajamento dos alunos do Grupo 3 para com o tema *"O Ideb nas escolas do Paraná"* e denotam, respectivamente, as ações cognitivas *estruturação da situação* e *compreensão da situação.*

No Quadro 9 estão algumas informações consideradas pelos alunos com vistas a se envolver com o problema relacionado à meta. É a partir dessas informações que os alunos do Grupo 3 procuram entender a situação, ou seja, o inteirar-se com a situação ocorre por meio da interpretação das informações coletadas. Nesse sentido, tais informações orientam o envolvimento inicial desse grupo com sua atividade de modelagem matemática.

Quadro 9 – Informações sobre o Ideb

O Ideb foi criado pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) e é um indicador que combina dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: fluxo escolar e médias de desempenho nas avaliações. Embora tenha sido criado em 2007, em 2005 as escolas brasileiras foram submetidas a um sistema de avaliação. É nesse contexto que surge o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, que tem por objetivo estabelecer metas de qualidade para a educação e contribuir para qualificar o debate sobre o ensino. O indicador é calculado com periodicidade de 2 anos e a partir dos dados sobre aprovação escolar obtidos no Censo Escolar e médias de desempenho nas avaliações do Inep, o Saeb – para as unidades da federação e para o país, e a Prova Brasil – para os municípios. *Trecho do trabalho de modelagem*	O Ideb mede a qualidade da educação. Cada estado tem uma meta a alcançar. *Trecho do relatório 1* Inicialmente os resultados do Ideb não eram divulgados. Atualmente, além de divulgados nos meios de comunicação, como na televisão, há divulgação das metas que devem ser alcançadas. *Trecho do relatório 1*

Fonte: A autora.

As informações do Quadro 9 indicam que os alunos intencionavam analisar aspectos relativos à meta, porém, para quais escolas? Municipais? Estaduais? Privadas? E ainda, no Brasil ou por estado? Tal intenção também é registrada no fragmento do diálogo do aluno G3-B com a pesquisadora.

> G3-B: *O que eu pensei é olhar para o Ideb geral. Todas as escolas.*
> P: *E vão olhar para...* (olhando para o material dos alunos)
> G3-B: *Acho que só para o Paraná.*
> P: *E tem a meta por estado?*
> G3-B: *Aqui tem* (folheando o material). *Na verdade acho que não é por estado, é a meta geral, não tem por estado. Mas acho que tinha que procurar, acho que por estado encontra também.*
> [...]
> P: *Tem sim, oh...* (folheando o material dos alunos) *Paraná.*
> G3-B: (pega o material para folhear)

É a sugestão de G3-B – *Acho que só para o Paraná.* – que firma a opção dos alunos em analisar a meta prevista para 2021 para esse estado. Essa sugestão reflete o engajamento dos alunos com a atividade a partir da delimitação do foco de estudo. Sendo assim, tal sugestão é um signo que favorece a simplificação dos dados coletados. Informações a respeito do Ideb no estado do Paraná são apresentadas na Figura 28.

.

Figura 28 – Informações sobre o Ideb no estado do Paraná

Tabela: Nota do Ideb no Paraná 2005 - 2011

Ano	Período	Ensino Fundamental (anos finais)	Ensino Médio
2005	1	3,6	3,6
2007	2	4,2	4,0
2009	3	4,3	4,2
2011	4	4,3	4,0

O Paraná possui Ideb de 4,3 para os anos finais do Ensino Fundamental e de 4,0 para o Ensino Médio, no ano de 2011; a meta para 2021 é de, respectivamente, 5,6 e 5,4.

Fonte: Relatório 2 entregue por G3.

As informações da Figura 28 se configuram como signos associados à ação cognitiva *compreensão da situação* e a partir delas os alunos definem um problema a resolver (Figura 29).

Figura 29 – Indicativo de um problema a resolver, proposto pelo Grupo 3

Considerando as políticas atuais, a meta relativa ao Ideb, prevista para o Paraná no ano de 2021 será alcançada?

Fonte: Relatório 2 entregue por G3.

Na enunciação desse problema evidenciamos que foi considerada pelos alunos a hipótese de que *as condições atuais, em termos de políticas públicas para o Ideb, seriam mantidas* (trecho do relatório 2). No contexto de uma atividade de modelagem hipóteses são levantadas a partir de interpretações dos alunos em relação à situação em estudo ou aos dados coletados. É nesse sentido que parece se revelar a função epistemológica do signo para o desenvolvimento da atividade. Nesse caso, a definição da hipótese é um signo que requer dos alunos conhecimentos sobre taxa de variação.

Embora o problema já estivesse previamente definido (analisar se a meta referente ao Ideb para o ano 2021 seria alcançada), os alunos tinham dúvidas quanto a qual nível de escolaridade analisar, conforme indica o fragmento do diálogo dos alunos.

> P: *E vocês pensam em trabalhar com os dois, tanto com o Ensino Fundamental quanto com o Médio?*
> G3-B: *Ou só com o Ensino Fundamental.* (olhando para G3-A e G3-C com ar de dúvida) *porque assim...*
> G3-A: *A gente quer na verdade ver se ele* (se referindo ao estado do Paraná) *vai conseguir alcançar a meta.*
> G3-C: (interferindo a fala de G3-A) *Alcançar a meta para 2021. Se consegue, como é que vai ficar ou não. Ou trabalhar só com o Fundamental ou só com o Médio, porque se for trabalhar com os dois...*

> P: *Ah... acho que vocês poderiam trabalhar com os dois. Até para poder estabelecer um comparativo do tipo olha o Ensino Fundamental está melhor que o Médio, nesse sentido... por que será?*
> G3-B: *Então, tem até uma notícia aqui que eu achei interessante que o ministro da educação, ele comentou que o Ensino Médio decai muito porque tem muito aluno que estuda a noite e daí como já têm outras influências, da parte externa, do trabalho, que a noite é mais cansativo, então eles não têm o mesmo aproveitamento quanto tem o Ensino Fundamental. Isso é uma das...*
> P: *Então procurem olhar para as informações que vocês têm e como poderiam trabalhar com elas.*

É a partir da "ideia" do problema apresentada na Figura 29 e da sugestão de P – *Acho que vocês poderiam trabalhar com os dois.* –, que os alunos reestruturam o problema inicial (Figura 29), especificando que a atividade vai tratar do Ideb no estado do Paraná para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Decorre daí, a formulação de dois problemas (Figura 30).

Figura 30 – Problemas formulados pelos alunos do Grupo 3

Para o Ensino Fundamental...	Para o Ensino Médio...
Problema 1: O Paraná possui Ideb de 4,3 para os anos finais do Ensino Fundamental, no ano de 2011, e a meta para 2021 é 5,6. Considerando as políticas atuais, a meta para 2021 será alcançada?	*Problema 2*: O Paraná possui Ideb de 4,0 para o Ensino Médio, no ano de 2011, e a meta para 2021 é 5,4. Considerando as políticas atuais, a meta para 2021 será alcançada?

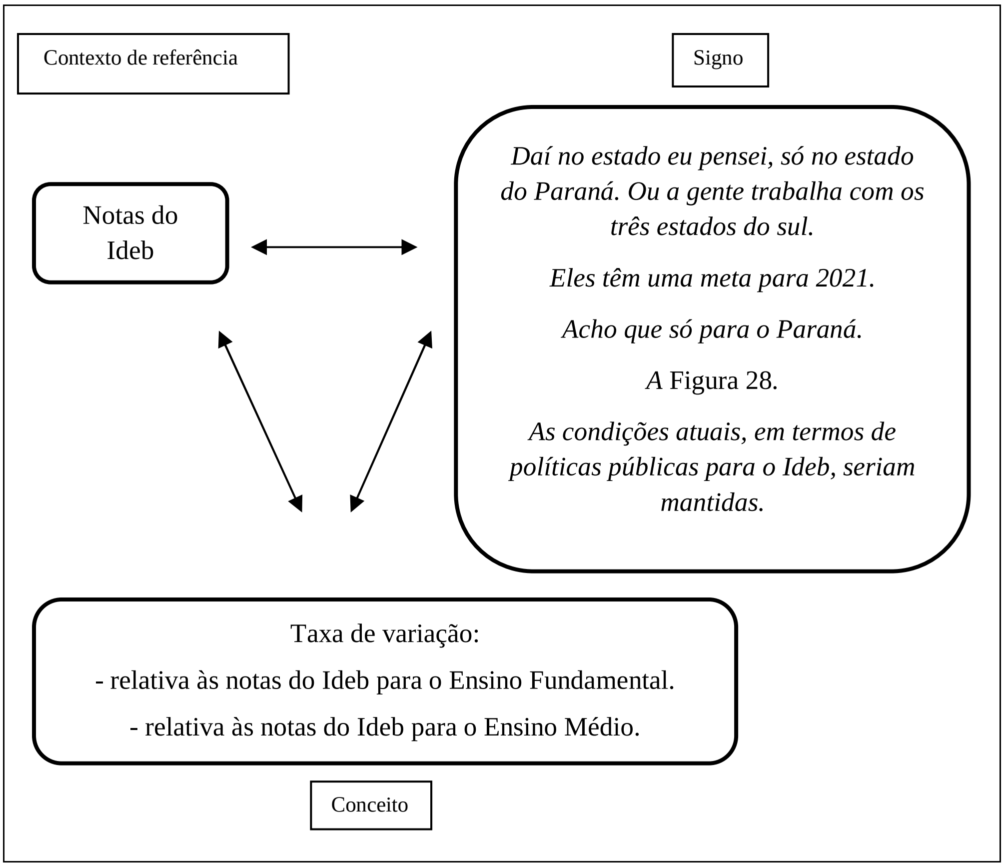
Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G3.

É possível inferir que foi a inteiração dos alunos com o tema que os levou a reconhecer que eles poderiam tratar do Ideb nas escolas do Paraná a partir de dois problemas, um correspondendo ao Ideb dos anos finais do Ensino Fundamental e outro relativo ao Ideb do Ensino Médio.

A condução da atividade, até a identificação desses dois problemas, realizada pelos alunos do Grupo 3, foi brevemente relatada por G3-B, durante a entrevista: *De um montão de dados que a gente tinha, e olha que era bastante coisa, a gente foi olhando para o que dava para fazer, daí a gente pensou em trabalhar com o Ideb geral. E trabalhar alguma coisa que envolvesse a meta. Só depois que a gente percebeu, percebeu que tinha a meta por estado. Daí a gente podia fazer para o nosso, e então, trabalhamos com a meta para o estado do Paraná* (relato de G3-B em entrevista). Inferimos que, embora nesse relato haja evidências de que o problema se originou dos dados, é o problema o gerador do desenvolvimento da atividade, pois se não há um problema a ser investigado, não há uma atividade de modelagem a ser desenvolvida.

Interpretações dos alunos acerca do contexto de referência *notas do Ideb* são manifestadas, de certa forma, nos signos utilizados e/ou produzidos por eles durante as ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação.* Da relação entre contexto de referência e signo, que culminou no reconhecimento de dois problemas a resolver, os alunos mobilizaram diversos conhecimentos, suscitando o conceito que vem compor o triângulo epistemológico da Figura 31.

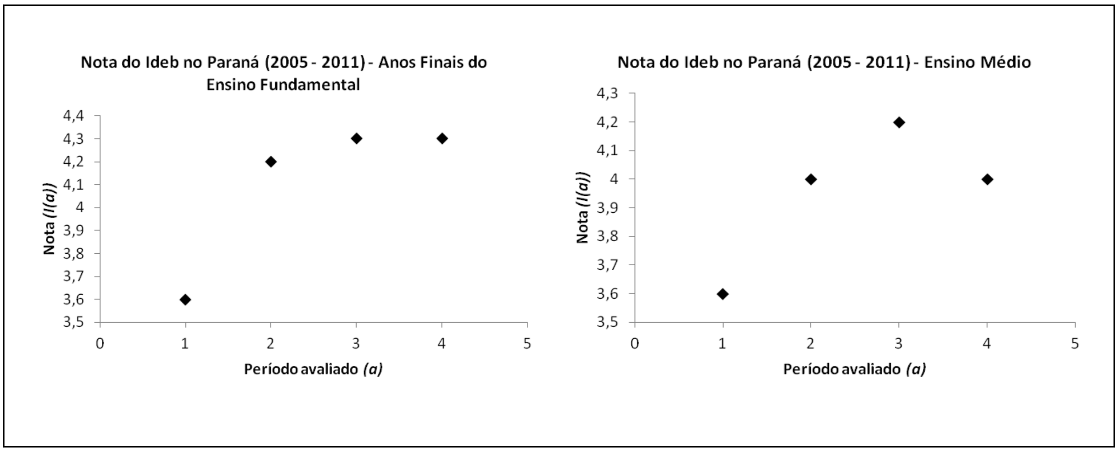
Figura 31 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 3 nas ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação*



Fonte: A autora.

Com o propósito de encontrar resposta para cada um dos problemas apresentados na Figura 30, os alunos representaram os dados da tabela, da Figura 28, no plano cartesiano (Figura 32). Para isso, utilizaram o software *Curve Expert* e assumiram *a* e *I(a)* como variáveis, em que *a* corresponde ao período no qual as escolas realizam a prova que computa a nota do Ideb e *I(a)* a nota do Ideb no período *a*.

Figura 32 – Tendência dos dados referentes ao Ideb no Paraná



Fonte: Relatório 2 entregue por G3.

É na intenção de analisar se o Paraná conseguirá atingir a meta estipulada para 2021 que os alunos recorreram à representação dos dados coletados no plano cartesiano. Nesse momento, de buscar uma representação matemática para a situação, a ação cognitiva correspondente é a *matematização* e é dela que emergem os gráficos da Figura 32, que são signos que desempenham o papel de possibilitar que a situação seja analisada sob outro ponto de vista, que não só no âmbito das informações em linguagem natural. Na ocasião, ocorre na atividade, o que no âmbito da Modelagem Matemática costuma-se dizer transição entre linguagens. Os alunos a partir de então, começam a pensar em estruturas matemáticas para abordar o problema e passam a fazer uso de linguagem matemática.

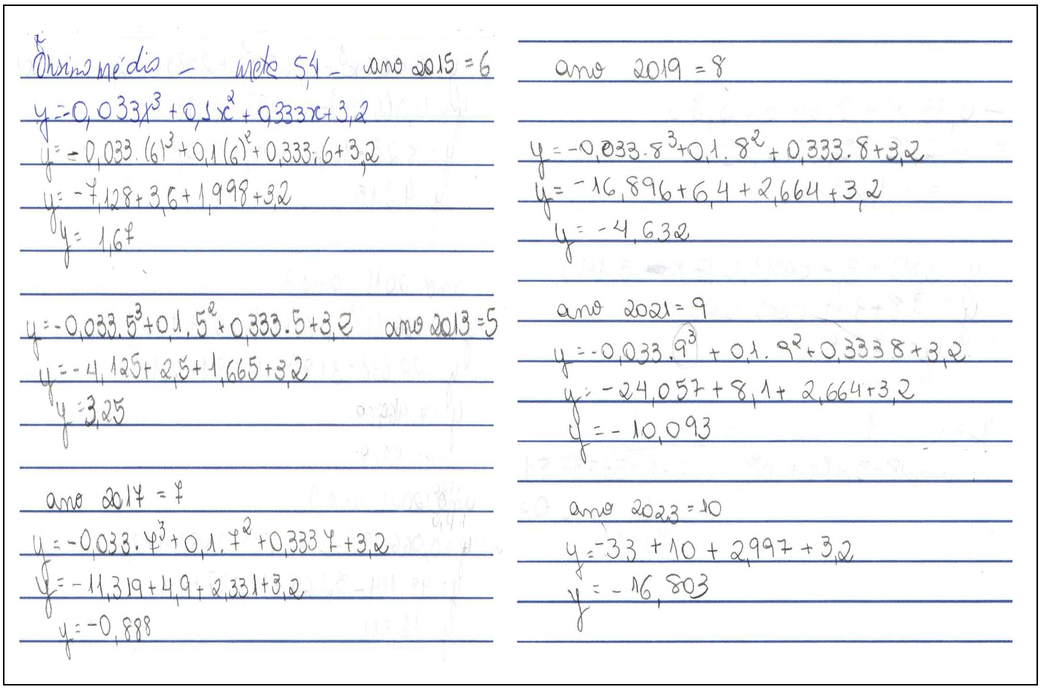
Contudo, como eles não realizaram, até o momento, uma análise sobre as funções indicadas pelo software, os gráficos que representam a tendência dos dados coletados funcionam para os alunos como signos que apenas representam algo – as notas do Ideb no Paraná de 2005 a 2011. Inicialmente, os alunos utilizam-se do software *Curve Expert* somente para visualizar o comportamento das notas do Ideb ao longo das avaliações que foram realizadas de 2005 a 2011, sem, no entanto, se atentar para os modelos fornecidos por esse software. Nesse caso, a função semiótica do signo é que fica evidenciada, já que o signo nesse contexto tem função de representação.

Sem uma análise interpretativa dos dados, os alunos optaram pelo primeiro modelo indicado pelo software – função polinomial de grau três. Todavia, em momento posterior, os alunos concluem que esse modelo não era adequado para analisar o *Problema 2.* Indícios disso aparecem no fragmento a seguir.

> G3-B: *Eu andei fazendo uns gráficos e a do Ensino Médio* (se referindo à tendência dos dados) *vai cair em uma função do 3º grau. Só que sei lá. Vai chegar uma hora que ele vai subir né. Porque se é uma função do 3º grau ela não vai só... só cair, ela uma hora vai chegar a subir.*
> G3-A: *A gente fez o gráfico e encontrou a nossa função e daí não dava certo...*
> P: *O que não dava certo?*
> G3-B: *Teve uns cálculos lá que deu Ideb -4.*
> G3-A: *E Ideb -10; tinha outro que dava -16.*
> G3-B: *Coisas assim que não condiz com a realidade, nunca que vai dar isso.*

Da declaração de G3-B – *Porque se é uma função do 3º grau ela não vai só... só cair, ela uma hora vai chegar a subir* – que é um signo que revela sua função semiótica associada à representação do *Curve* e tem sua função epistemológica ressaltada nos conhecimentos dos alunos acerca desse objeto matemático, os alunos descartam o modelo polinomial como representativo da situação. Tal descarte também é alicerçado nos cálculos apresentados na Figura 33, que corresponde a um signo associado à ação cognitiva *síntese*. Esse signo, além de retratar um tratamento matemático, leva à produção de outro signo: c*oisas assim que não condiz com a realidade, nunca que vai dar isso* (G3-B) que denuncia que os alunos analisaram os resultados fornecidos pelo modelo com atenção à situação. Isso sinaliza que a ação cognitiva nesse momento é a *interpretação e validação*.

Figura 33 – Solução do *Problema 2* com base em uma função polinomial de grau três


Ensino médio – meta 5,4 – ano 2015 = 6
y = -0,033x³ + 0,1x² + 0,333x + 3,2
y = -0,033.(6)³ + 0,1(6)² + 0,333.6 + 3,2
y = -7,128 + 3,6 + 1,998 + 3,2
y = 1,67
y = -0,033.5³ + 0,1.5² + 0,333.5 + 3,2   ano 2013 = 5
y = -4,125 + 2,5 + 1,665 + 3,2
y = 3,25
ano 2017 = 7
y = -0,033.7³ + 0,1.7² + 0,333.7 + 3,2
y = -11,319 + 4,9 + 2,331 + 3,2
y = -0,888
ano 2019 = 8
y = -0,033.8³ + 0,1.8² + 0,333.8 + 3,2
y = -16,896 + 6,4 + 2,664 + 3,2
y = -4,632
ano 2021 = 9
y = -0,033.9³ + 0,1.9² + 0,333.8 + 3,2
y = -24,057 + 8,1 + 2,664 + 3,2
y = -10,093
ano 2023 = 10
y = -33 + 10 + 2,997 + 3,2
y = -16,803

Fonte: Relatório 2 entregue por G3.

Embora os signos anteriores sejam relativos ao *Problema 2*, nos relatos do Quadro 10 consta uma análise dos alunos acerca dos modelos polinomial de grau três fornecidos pelo *Curve* para ambos os problemas e que resultaram no descarte desse encaminhamento dado pelos alunos à atividade.

Quadro 10 – Relatos acerca da situação *"O Ideb nas escolas do Paraná"* associada a uma função polinomial de grau três

Ideb do Ensino Fundamental...	Ideb do Ensino Médio...
G3-A: *Daí a gente pegou a função que o gráfico deu e calculamos até... a gente só tem até o ano quatro, que foi o último... daí calculamos para o ano 2013, 2015, 2017, 2019 e 2021.* G3-B: *Para o Ensino Fundamental...* G3-A: *Deu certo. Para 2013 o Ideb seria 4,5, para...* G3-B: *2015 vai ser 5,4; vai aumentar.* G3-A: *E a meta é 5,6... em 2017 ele até passa, 7,4.* G3-C: *E daí em 2019 o Ideb vai dar 10,95.* G3-A: *E em 2021, 16 e alguma coisa.* G3-B: *Isso não faz sentido. Uma nota acima de dez... ficou meio esquisito isso.*	G3-A: *Para o Ensino Médio, olha... para 2013 deu 3,25.* G3-B: *Então vai cair. Na verdade, já caiu porque 2011, para o Ensino Médio, deu... 2011 deu 4. Ele caiu, e daí em 2013 caiu...* G3-A: *2015 vai cair para 1,67 e daí para 2017 vai ficar negativo. Para 2019 vai decair cada vez mais... -10,093, - 16...* P: *E isso pode...* G3-A: *Isso não pode acontecer.* G3-B: *É, não condiz com o que a gente está analisando.* P: *Como vocês justificam isso então?*

Fonte: A autora.

A partir do descarte do modelo polinomial, os alunos encaminharam-se para a análise de outro modelo indicado pelo software. Essa atitude pode ser observada no seguinte fragmento do diálogo dos alunos:

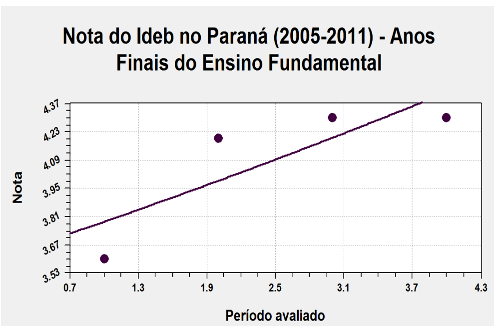
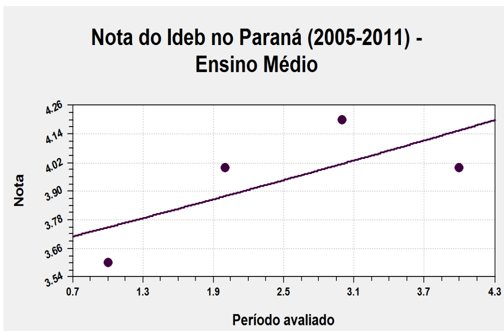
> G3-A: *Daí a gente tentou buscar outra função que ajudasse a gente resolver os problemas.*
> [...]
> G3-A: *Daí a gente ficou entre duas... essas* (apontando para as funções escritas no relatório – função exponencial e função trigonométrica). *Tinha outras, mas a gente optou por essas porque dá para trabalhar no Ensino Médio.*
> [...]
> G3-C: *Acho que está mais para uma função trigonométrica.*
> G3-A: *O que estou pensando é que a função, tanto a seno quanto a cosseno, ela vai dar um valor máximo que aqui é 4,2 e um valor mínimo 3,6. Ela então vai variar nesse intervalo.*
> G3-B: *Hum... então como tem máximo e mínimo ela nunca vai passar desses valores. Então essa função não é boa, porque nunca vai atingir a meta. Melhor, nunca vai passar de 4,2.*
> G3-C: *É verdade. Por isso os valores estavam sempre muito parecidos.*
> G3-B: *Não é parecido. É no intervalo.*
> [...]
> G3-C: *Então a função cosseno não pode ser. Nem a seno. Elas são limitadas em cima e embaixo. Daí não vai chegar na meta. A meta está acima do intervalo que a função está.*

Interessados em analisar a situação a partir de outros objetos matemáticos, o aluno G3-C cogita a possibilidade de utilizar uma função trigonométrica ao mencionar: *acho que está mais para uma função trigonométrica*. Porém, ele reconsidera sua ideia pautado na declaração de G3-A – *O que estou pensando é que a função, tanto a seno quanto a cosseno, ela vai dar um valor máximo que aqui é 4,2 e um valor mínimo 3,6. Ela então vai variar nesse intervalo.* A afirmação de G3-A, que corresponde a um signo produzido durante a ação cognitiva *matematização*, favorece que o grupo mobilize conhecimentos em relação a esse objeto matemático e produza outro signo (G3-C – *Então a função cosseno não pode ser. Nem a seno. Elas são limitadas em cima e embaixo. Daí não vai chegar na meta. A meta está acima do intervalo que a função está.*) também associado a essa ação cognitiva. Nesse novo signo fica retratado o descarte da utilização do modelo trigonométrico em relação à situação em estudo.

O descarte de um modelo ou outro, pautado em cálculos e na interpretação de que o modelo polinomial traz resultados não condizentes com a situação e o trigonométrico inviabiliza o alcance da meta, deixa transparecer o conhecimento dos alunos acerca da matemática aliados com seus conhecimentos sobre a situação.

Considerando que esses modelos não atendem às características da situação, os alunos retomam os problemas e passam a analisar "*O Ideb nas escolas do Paraná*" por meio de modelos exponenciais, conforme indica o Quadro 11.

Quadro 11 – Representações exponenciais para os problemas

Modelo Matemático para o Ideb nos Anos Finais do Ensino Fundamental	Modelo Matemático para o Ideb no Ensino Médio
	
$I(a) = 3{,}59\ e^{0{,}052a}$ *(Trecho do trabalho de modelagem)*	$I(a) = 3{,}62\ e^{0{,}034a}$ *(Trecho do trabalho de modelagem)*

Fonte: A autora.

A aceitação desses modelos, resultado da ação cognitiva *síntese*, acontece quando os alunos, ao se envolverem com a resolução dos problemas, a partir dos signos do Quadro 11, produzem novos signos (Quadro 12). Para a produção desses novos signos, associados à ação cognitiva *interpretação e validação*, os alunos consideram os modelos fornecidas pelo *Curve.* Esses novos signos representam os cálculos das notas do Ideb para os anos correspondentes a 2009, 2011 e 2021, para o Ensino Fundamental e a 2021, 2025 e 2027 para o Ensino Médio.

Quadro 12 – Interpretação da solução com base em um modelo exponencial

Ideb do Ensino Fundamental... $y = a.e^{bx}$ $y = 3{,}59 . e^{(0{,}052)x}$ Ano 3 $y = 3{,}59 . e^{(0{,}052)3}$ $y = 3{,}59\, e^{0{,}156}$ $y = 3{,}59\,(1{,}16)$ $y = 4{,}1$	Ano 4 $y = 3{,}59\, e^{(0{,}052)4}$ $y = 3{,}59\, e^{0{,}208}$ $y = 3{,}59 . 1{,}23$ $y = 4{,}41$ *Trecho do relatório 3*	Ano 9 $y = 3{,}59\, e^{(0{,}052)9}$ $y = 3{,}59\, e^{0{,}468}$ $y = 3{,}59 . 1{,}59$ $y = 5{,}7$ Por esta alcançam a meta
Ideb do Ensino Médio... Ano 9 → 2021 $y = 3{,}62\, e^{0{,}034(9)}$ $y = 3{,}62\, e^{0{,}306}$ $y = 3{,}62 . 1{,}35$ $y = 4{,}8$ *Trecho do relatório 3*	Ano 11 → $y = 3{,}62\, e^{0{,}034(11)}$ $y = 3{,}62\, e^{0{,}374}$ $y = 3{,}62 . 1{,}45$ $y = 5{,}2$	Ano 12 → 2027 $y = 3{,}62\, e^{0{,}034(12)}$ $y = 3{,}62\, e^{0{,}408}$ $y = 3{,}62 . 1{,}50$ $y = 5{,}4$ Por esta atingirão a meta proposta para 2021 somente em 2027

Fonte: A autora.

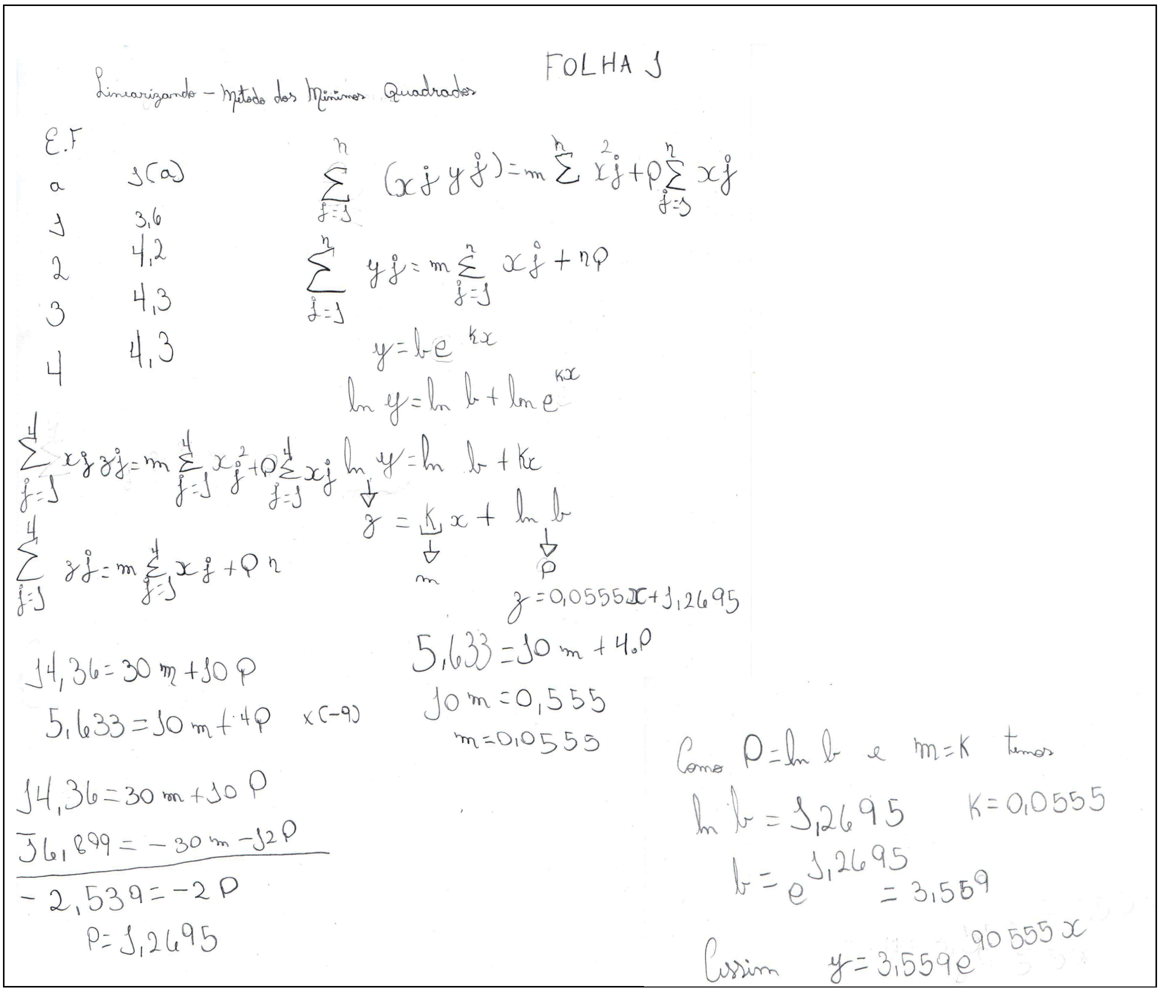
A análise dos alunos referente a cada modelo indicado pelo software (polinomial, trigonométrico e exponencial) com o olhar voltado para os dados observados e, consequentemente, para a situação em estudo, é reflexo de uma característica das atividades de modelagem que é a não linearidade entre as ações cognitivas. Nesse sentido, acontecem, nas atividades de modelagem, idas e vindas quando se busca encontrar uma solução para o problema em estudo na atividade.

A partir dos cálculos do Quadro 12, os alunos elaboram uma resposta para os problemas. Porém, antes de se envolverem com essa elaboração, conforme fragmento a seguir, são incentivados pela pesquisadora a encontrar modelos exponenciais, fazendo cálculos “à mão”.

P: *Mas vocês vão só assim, aceitar as funções que o computador deu?*
[...]
G3-A: *Não pode?*
G3-B: *Hum... dá para fazer daquele outro jeito* (se referindo a alguma atividade anteriormente desenvolvida em sala de aula com a professora da disciplina).
G3-A: *Eu não lembro.*
G3-C: *Acho que tenho alguma coisa no caderno.*
[...]
P: *Acho interessante vocês desenvolverem esses modelos 'à mão'. Vocês sabem como fazer. Por que não tentam?*
G3-C: *Ah... sério? Mas o do software é certo que vai ser o melhor.*
P: *Vocês podem ver se conseguem chegar a modelos bem próximos desses dados pelo software.*
G3-B: *Sei não hein professora* (se referindo à pesquisadora). *Será que a gente consegue?*
P: *Só tentando para saber, mas eu tenho certeza que vocês dão conta. Comecem aí e se precisarem me chamem.*
G3-A: *Tá. A gente vai tentar.*

A partir do método dos mínimos quadrados para obtenção dos parâmetros, os alunos obtêm os modelos exponenciais da Figura 34 e Figura 35.

Figura 34 – Dedução do modelo exponencial para o *Problema 1*


FOLHA 1

Linearizando – Método dos Mínimos Quadrados

E.F

a	1(a)
1	3,6
2	4,2
3	4,3
4	4,3

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j y_j) = m\sum^{n} x_j^2 + p\sum_{j=1}^{n} x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = m\sum_{j=1}^{n} x_j + np$$
$$y = be^{kx}$$
$$\ln y = \ln b + \ln e^{kx}$$
$$\sum_{j=1}^{4} x_j z_j = m\sum_{j=1}^{4} x_j^2 + p\sum_{j=1}^{4} x_j \qquad \ln y = \ln b + kx$$
$$z = \underbrace{k}_{m} x + \underbrace{\ln b}_{p}$$
$$\sum_{j=1}^{4} z_j = m\sum_{j=1}^{4} x_j + pn$$
$$z = 0{,}0555x + 1{,}2695$$

$5{,}633 = 10m + 4.p$
$10m = 0{,}555$
$m = 0{,}0555$

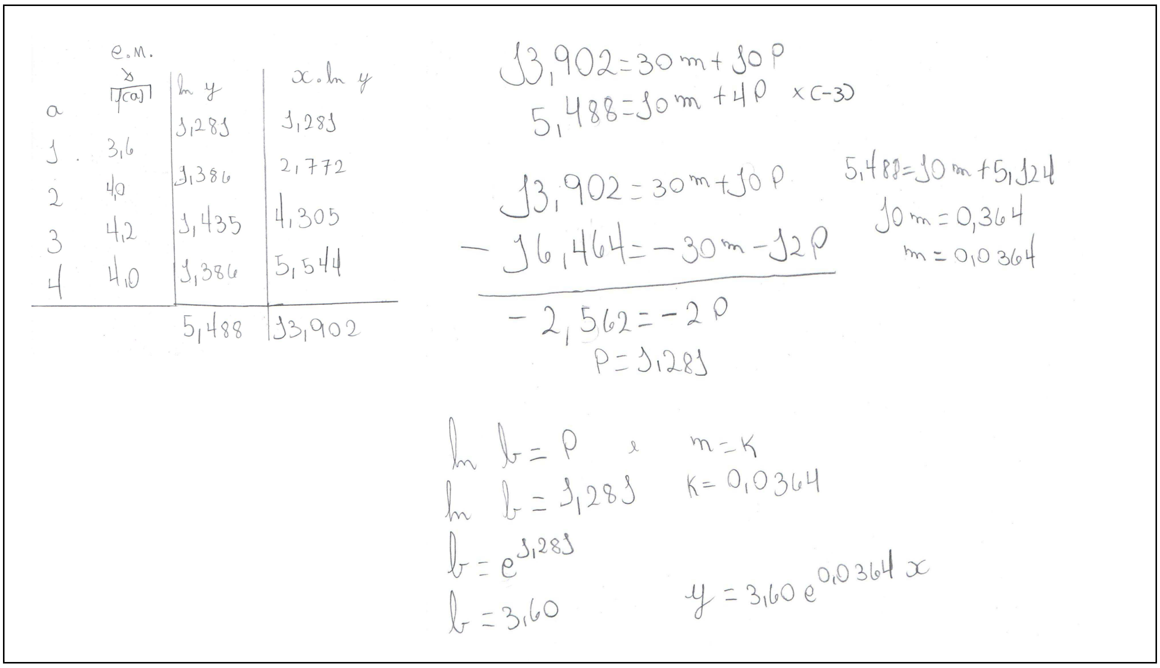
$14{,}36 = 30m + 10p$
$5{,}633 = 10m + 4p \quad x(-3)$

$14{,}36 = 30m + 10p$
$16{,}899 = -30m - 12p$
$-2{,}539 = -2p$
$p = 1{,}2695$

Como $p = \ln b$ e $m = k$ temos
$\ln b = 1{,}2695 \qquad K = 0{,}0555$
$b = e^{1{,}2695} = 3{,}559$
Assim $y = 3{,}559e^{0{,}0555x}$

Fonte: Relatório 4 entregue por G3.

Figura 35 – Dedução do modelo exponencial para o *Problema 2*



Fonte: Relatório 4 entregue por G3.

Nas Figura 34 e Figura 35, que correspondem a signos produzidos pelos alunos mediante a ação cognitiva *matematização*, os alunos explicitam, passo a passo, os procedimentos que resultaram nos modelos do Quadro 13. Relativa à obtenção desses modelos, o aluno G3-A atenta para o fato de que *foi legal fazer o modelo na mão, deu pra gente trabalhar mesmo com a Matemática. Assim a gente não fica só com o modelo do software. A gente olha para o nosso e vê que ele é bom também* (G3-A em entrevista).

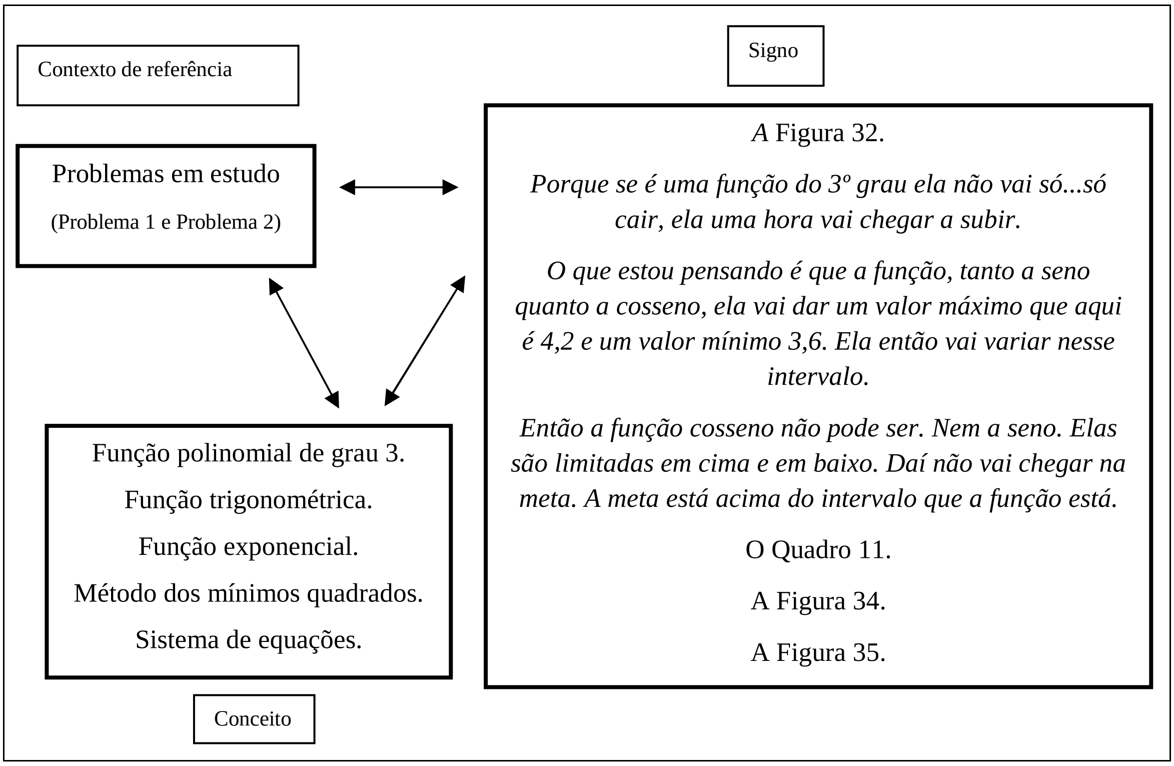
Quadro 13 – Modelos matemáticos representativos para a situação "*O Ideb nas escolas do Paraná*"

Modelo Matemático para o Ideb nos Anos Finais do Ensino Fundamental	Modelo Matemático para o Ideb no Ensino Médio
$I(a) = 3{,}559\ e^{0{,}555a}$ *(Trecho do trabalho de modelagem)*	$I(a) = 3{,}60\ e^{0{,}0364a}$ *(Trecho do trabalho de modelagem)*

Fonte: A autora.

Os diferentes signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos em associação com a ação cognitiva *matematização* têm como contexto de referência os problemas em estudo. Interpretações interligadas na relação entre signo e contexto de referência, implícitas nos signos emergentes dessa ação favorece que os alunos mobilizem conhecimentos atrelados ao conceito que equilibra o triângulo epistemológico da Figura 36.

Figura 36 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 3 na ação cognitiva *matematização*



Fonte: A autora.

Apesar dos alunos considerarem que ambas as estratégias são meios para buscar uma solução para os problemas, como eles já haviam chegado a alguns resultados (Quadro 12) utilizando os modelos fornecidos pelo software, as respostas apresentadas na Figura 37 e que correspondem a signos associados à ação cognitiva *síntese*, estão pautadas também nesses modelos. Nesse sentido, é possível inferir que os modelos obtidos pelos alunos serviram apenas para comparar com os fornecidos pelo software.

Figura 37 – Respostas aos problemas elaboradas pelos alunos do Grupo 3

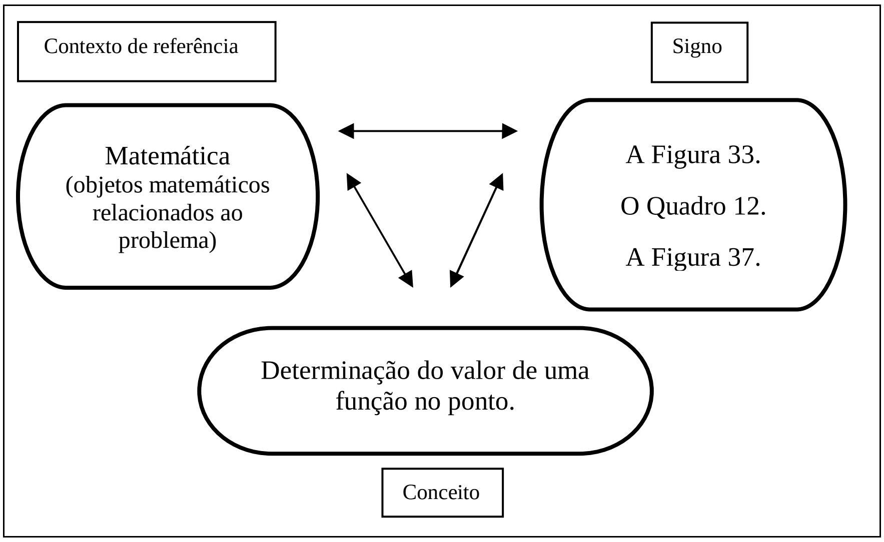
Para o Ensino Fundamental...	Para o Ensino Médio...
O Paraná atingirá a meta proposta para 2021, que é de 5,6.	O Paraná apenas atingirá a meta prevista para 2021, no ano 2027.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G3.

A questão de aceitar ou não aceitar algo como resposta para os problemas foi vivenciada pelos alunos do Grupo 3 durante todo o desenvolvimento da atividade de modelagem. Isso porque a cada ajuste de curva que eles reconheciam como uma possibilidade de obtenção de respostas para os problemas, validavam e interpretavam os valores calculados por meio dos modelos fornecidos pelo software *Curve*, confrontando-os com as informações coletadas. No caso dos ajustes polinomial e trigonométrico, para além da realização dos cálculos, os alunos também usaram características dos modelos para a sua análise.

Ao revisitar os signos produzidos na ação cognitiva *matematização*, os alunos pensam e repensam acerca de possíveis soluções para os problemas, segundo os diferentes modelos que descartam, ou aceitam, para a situação. Isso indica que podemos considerar um triângulo epistemológico em que o contexto de referência são os objetos matemáticos relacionados aos problemas, conforme Figura 38. Nesse caso, os signos correspondem às interpretações dos alunos em relação a cada um dos modelos analisados com atenção à situação. Já o conceito, nesse triângulo, é a determinação de valores de uma função em um ponto.

Figura 38 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 3 na ação cognitiva *síntese*



Fonte: A autora.

A análise das respostas aos problemas leva os alunos a considerar que a meta prevista para o estado do Paraná no ano 2021, a respeito do Ideb, será alcançada apenas para o Ensino Fundamental.

> G3-C: *De acordo com o modelo que a gente encontrou, a meta para o Ensino Fundamental será alcançada. O índice será até um pouquinho maior.*
> G3-B: *Agora para o Ensino Médio, a meta não será alcançada. Somente em 2027 é que meta prevista para 2021 será atingida.*
>
> (trechos da entrevista)

As declarações de G3-C e G3-B sinalizam que as respostas obtidas por meio dos modelos exponenciais são aceitas por todos os alunos do Grupo 3. No entanto, é possível inferir que, talvez, para aceitar essas respostas, os alunos tenham sido mais influenciados pelos resultados numéricos que pelo comportamento das funções. Afinal, eles não discutem, em momento algum, sobre o comportamento da função exponencial como fizeram para a polinomial de grau três e para a trigonométrica.

Ao longo da atividade de modelagem os alunos se envolveram com o processo de avaliação, e como resultado da ação cognitiva *interpretação e validação* destacaram que se o Paraná tem interesse em atingir a meta é importante que iniciativas sejam tomadas, principalmente em relação ao Ensino Médio, já que a meta prevista para esse nível de escolaridade somente seria alcançada em 2027.

> *O Ensino Médio tem muita desistência e os alunos parecem que não levam muita coisa a sério. Então tem que ser feito algo. Alguma coisa para conscientizar os alunos da importância dessa nota do Ideb... e outras coisas.*
> (G3-A em entrevista)

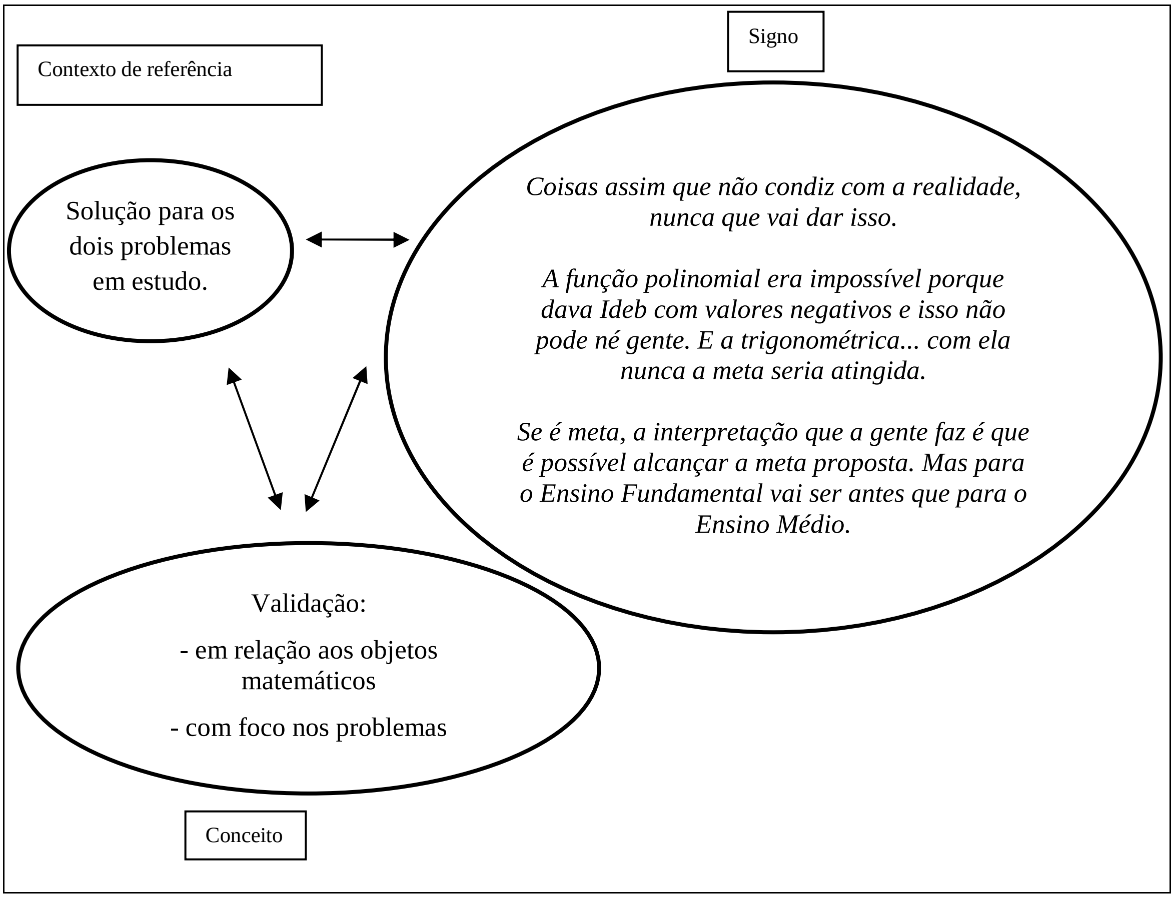
Ao comunicar os resultados provenientes do desenvolvimento dessa atividade aos colegas da turma, os alunos do Grupo 3 expõem os encaminhamentos utilizados para encontrar soluções para os problemas que originaram o desenvolvimento de tal atividade. Nessa comunicação há uma preocupação dos alunos em convencer os colegas de que o modelo exponencial é a melhor aproximação para a situação.

> G3-A: *A gente tentou buscar uma função que ajudasse a gente a resolver os nossos problemas. Daí a gente tentou um monte, polinomial, trigonométrica... Mas a exponencial foi a melhor. Com ela a gente viu que a meta poderia ser alcançada.*
> G3-B: *Na verdade, a gente já assumiu, desde o início, que a meta prevista era um valor possível de ser alcançado. Acho que foi por isso que a gente ficou buscando funções que davam certo. De todas que a gente tentou, a função exponencial foi a melhor.*
> G3-C: *A função polinomial era impossível porque dava Ideb com valores negativos e isso não pode né gente. E a trigonométrica... com ela nunca a meta seria atingida.*
> [...]
> G3-A: *A gente considerou válida a nossa solução.*
> G3-B: *Se é meta, a interpretação que a gente faz é que é possível alcançar a meta proposta. Mas para o Ensino Fundamental vai ser antes que para o Ensino Médio.*

A declaração de G3-C neste diálogo é decisiva para convencer os colegas de que a função exponencial era a que possibilitava a meta ser alcançada. A afirmação de G3-B – *se é meta, a interpretação que a gente faz é que é possível alcançar a meta proposta. Mas para o Ensino Fundamental vai ser antes que para o Ensino Médio* – vem confirmar a declaração de G3-C. Tais declarações dos alunos correspondem a signos associados à ação cognitiva *comunicação e argumentação.*

Quando da interpretação das soluções obtidas e da socialização da atividade desenvolvida, o contexto de referência corresponde aos signos relacionados à solução dos dois problemas. O conceito refere-se à validação realizada pelos alunos tanto em relação à matemática como à situação e o signo refere-se às conexões que os alunos estabelecem entre contexto de referência e signos associados às ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação.* Na Figura 39 ilustramos o triângulo epistemológico dessas ações cognitivas.

Figura 39 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 3 nas ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação*



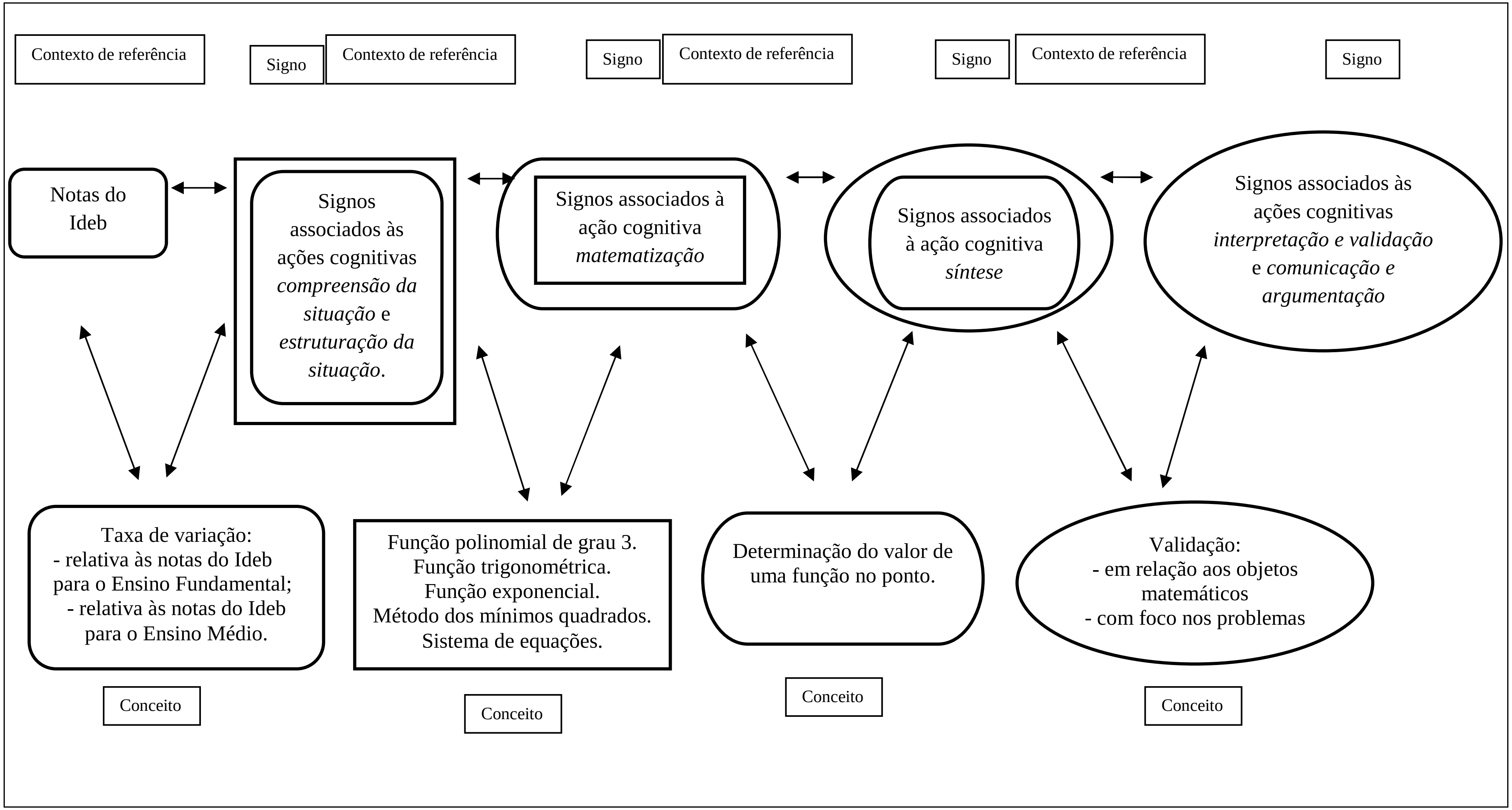
Fonte: A autora.

O envolvimento dos alunos com a atividade "*O Ideb nas escolas do Paraná*" favoreceu que, por meio das ações cognitivas, eles utilizassem e/ou produzissem signos que se relacionavam ora ao tema, ora ao problema, ora aos objetos matemáticos e ora à solução obtida. Na Figura 40, conexões entre contexto de referência, signo e conceito aparecem em um contexto de trama. A complementaridade dos signos em cada um dos triângulos epistemológicos, possível devido às funções semiótica e epistemológica dos signos, é o que favorece que o que é considerado signo em um momento da atividade se configure, em um outro, como contexto de referência, que por sua vez, leva os alunos à produção de outros signos, que vão em momento posterior assumir conotação de contexto de referência e assim por diante, sempre suscitando diferentes conceitos.

A função semiótica dos signos promove a integração entre os signos de cada triângulo epistemológico, levando ao reconhecimento de que esses signos são relativos ao contexto de referência em questão. Por outro lado, a função epistemológica orienta os encaminhamentos assumidos pelos alunos e, inclusive, leva à produção de novos signos e por vezes, à identificação de um novo contexto de referência.

As diferentes formas geométricas que aparecem na Figura 40 são relativas aos diferentes triângulos epistemológicos identificados ao longo da atividade de modelagem matemática desenvolvida pelo Grupo 3, durante a análise dessa atividade.

Figura 40 – Triângulos epistemológicos dos alunos do Grupo 3



Fonte: A autora.

4.1.3 Atividade do G5: Poupando a futura aposentadoria

O valor referente ao Instituto Nacional do Seguro Social – INSS, descontado na folha de pagamento de um dos alunos do Grupo 5, foi o que levou esse grupo a desenvolver a atividade de modelagem “Poupando a futura aposentadoria”. Juntamente com a definição do tema para estudo os alunos elencaram um problema a resolver: *Será que se nós não contribuíssemos com o INSS e aplicássemos esse valor em uma poupança, conseguiríamos viver bem ou pelo menos sobreviver com esse dinheiro quando não pudéssemos mais trabalhar?* (G5-B durante diálogo com o grupo em sala de aula).

A partir dessa pergunta, realizada por G5-B, o propósito dos alunos para com a atividade que eles se envolveram ficou aparentemente delineado, conforme delata o seguinte fragmento do diálogo de aula:

> G5-A: *Acho que a gente poderia fazer o seguinte então, dentro do que você deu de ideia, sobre o assunto do INSS. A gente poderia ver então, qual é a base de cálculo que eles usam para descontar o imposto do salário do trabalhador. Aí, em cima desse desconto que eles fazem a gente poderia ver se seria mais viável aplicar esse valor do desconto.*
> G5-B: *É... mas a gente tem que ver porque tem o juro. A gente tem que analisar que o juro vai aumentando. Como a gente vai daí considerar? Porque todo ano vai aumentar o salário, daí, consequentemente, todo ano tem que ser depositado a quantia referente ao desconto. Por exemplo, assim: se você vai lá e deposita R$ 70,00, não será ao longo da vida inteira que você vai depositar R$ 70,00, esse valor vai aumentando.*
> [...]
> G5-A: *E se a gente considerar um valor. E considerar também que não vai mexer na conta. Daí o juro...*

A declaração de G5-A – *A gente poderia ver então, qual é a base de cálculo que eles usam para descontar o imposto do salário do trabalhador* – de que eles precisavam conhecer mais sobre a Previdência Social, principalmente acerca dos descontos na folha de pagamento, levou os alunos do Grupo 5 a coletar informações como as do Quadro 14. Tais informações denunciam que houve envolvimento dos alunos para com o tema e, nesse sentido, como resultado da ação cognitiva *compreensão da situação* eles reestruturam o problema inicial, reformulando-o da seguinte forma: *Depositar mensalmente 8% do valor do salário mínimo em uma poupança, por um período de 35 anos, possibilitará à pessoa que ganha esse salário uma aposentadoria tranquila?* (trecho do relatório 3).

Quadro 14 – Informações sobre a Previdência Social

A renda transferida pela Previdência Social é utilizada para substituir a renda do trabalhador contribuinte quando ele perde a capacidade de trabalho, seja por doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário, ou mesmo a maternidade e a reclusão. Para ter esses benefícios é necessário se inscrever e contribuir todos os meses.

No caso de trabalhador com registro em carteira de trabalho, ou vinculado a órgãos públicos, a contribuição mensal é automática; vem descontado mensalmente na folha de pagamento.

Trecho do trabalho de modelagem

A aposentadoria por tempo de contribuição pode ser integral ou proporcional. Para ter direito à aposentadoria integral, o trabalhador homem deve comprovar pelo menos 35 anos de contribuição e a trabalhadora mulher, 30 anos.

Trecho do trabalho de modelagem

Para requerer a aposentadoria proporcional, o trabalhador tem que combinar dois requisitos: tempo de contribuição e idade mínima.

Trecho do trabalho de modelagem

Segundo a Portaria nº 2, de 6 de janeiro de 2012, para segurados empregados, empregados domésticos e trabalhos avulsos, a contribuição ao INSS é dada segundo faixas salariais: quem recebe até R$ 1.174,86 contribui com 8%; de R$ 1.174,87 até R$ 1.958,10, contribui com 9% e quem recebe de R$ 1958,11 até R$ 3.916,20, contribui com 11% de seu salário.

Considerado que o teto máximo de base de cálculo é R$ 3.916,20, mesmo que o trabalhador tenha salário superior a esse valor, sua contribuição é de 11% do teto máximo.

Trecho do relatório 2

Fonte: A autora.

Nesse envolvimento inicial dos alunos com a atividade de modelagem, tanto a declaração de G5-A, anteriormente destacada, como as informações do Quadro 14 referentes às taxas de desconto do salário segundo às faixas salariais e o tempo de contribuição, correspondem a signos atrelados ao tema em estudo. Nesse caso, esses signos têm como contexto de referência o desconto na folha de pagamento do trabalhador, ou seja, a contribuição ao INSS.

Dentre as informações do Quadro 14, maior atenção é dada, pelos alunos, às taxas relativas à contribuição ao INSS. Isso também acontece em seus diálogos, conforme indica o fragmento a seguir. Contudo, nesse fragmento eles também reafirmam aspectos considerados no problema, como o tempo de contribuição do trabalhador e a taxa de desconto do salário.

> G5-B: *E se a gente seguisse um padrão... que é sempre 8% que vai ser descontado. No caso, trabalhar só com aquela faixa dos 8%, porque até*

> *determinado salário é de 8% o desconto. Vamos trabalhar com essa faixa porque acho que a grande maioria da população está nessa faixa.*
> [...]
> G5-C: *Mas a gente vai trabalhar com o salário mínimo, né?*
> G5-B: *Tem que ser. Acho melhor a gente fazer com o mínimo, a gente pode daí olhar os valores.*
> G5-A: *A gente tinha que ver na internet os valores dos salários anteriores.*
> G5-B: *A gente tem meio que analisar os aumentos dos salários anteriores pra gente ver como ele está aumentando ano a ano.*
> G5-A: *Assim a gente vai ter que considerar esses aumentos e também considerar os juros porque o valor vai estar na poupança e daí tem juro por mês.*
> [...]
> G5-C: *Então o que que a gente vai fazer? Trabalhar com o salário mínimo, considerar que será feito depósito por mês?*
> G5-B: *Mas vamos trabalhar com a taxa dos 8%. Na verdade acho que temos que fixar o valor do salário. Vamos pegar o salário mínimo, mesmo sabendo que às vezes a pessoa não ganha só o mínimo.*
> G5-A: *Senão a gente não vai conseguir fazer... tem muita coisa que varia aqui... salário, juro...*
> G5-C: *A gente considera algumas coisas e manda ver!*
> [...]
> G5-B: *A gente colocou para 35 anos* (se referindo ao tempo citado no problema enunciado)*, mas a gente sabe que tem a questão da idade também.*
> P: *Vocês vão trabalhar com qual faixa de desconto?*
> G5-C: *Acho que só com o 8% de desconto. A maioria da população deve estar nessa faixa.*
> P: *Então vocês têm duas situações, a princípio. Analisar o que acontece com o salário mínimo e trabalhar com esses 8% do desconto do salário, sendo depositados mês a mês.*
> G5-C: *É. E durante 35 anos.*
> P: *Vocês vão trabalhar com que valor do salário dentro dessa faixa de desconto?*
> G5-C: *A gente pensou em trabalhar com o salário mínimo mesmo.*
> G5-B: *No primeiro ano seria 622. Todos os meses do ano a pessoa ganharia 622.*
> G5-C: *Daí a gente trabalha com os 8% desse valor, durante os 12 meses do ano.*

O engajamento dos alunos com a atividade ocorre a partir de duas sugestões do aluno G5-B. A primeira (*E se a gente seguisse um padrão... que é sempre 8% que vai ser descontado*), embora seja um signo que se refere a uma delimitação das informações relativa ao valor de contribuição ao INSS, é algo que parece ser consenso entre os alunos do Grupo 5 e, portanto, não leva à produção de outros signos vinculados diretamente a esse. Já a segunda (*A gente tem meio que analisar os aumentos dos salários anteriores pra gente ver como ele está aumentando ano a ano*), corresponde a um signo que sugere que os alunos encontrem informações sobre os salários mínimos nos últimos anos (Tabela 2) e como têm se comportado seus aumentos.

Tabela 2 – Salários mínimos – 2000 a 2012

Vigência	Valor (R$)
03/04/2000	151,00
01/04/2001	180,00
01/04/2002	200,00
01/04/2003	240,00
01/05/2004	260,00
01/05/2005	300,00
01/04/2006	350,00
01/04/2007	380,00
01/03/2008	415,00
01/02/2009	465,00
01/01/2010	510,00
01/03/2011	545,00
01/01/2012	622,00

Fonte: www.guiatrabalhista.com.br/guia/salario_minimo.htm
(Relatório 2 entregue por G5).

De posse das informações da Tabela 2, signo utilizado pelos alunos para pensar acerca dos aumentos do salário mínimo desde o ano 2000, eles produzem a Tabela 3, que indica os procedimentos adotados por eles na tentativa de encontrar uma taxa que represente o aumento salarial. Além disso, a Tabela 3 retrata a intenção dos alunos de calcular o total depositado por uma pessoa, nas condições que eles estabeleceram no problema.

Tabela 3 – Aumentos do salário mínimo no período de 2000 a 2012

Vigência	Valor (R$)	Aumento em relação ao ano anterior (R$)	Aumento em relação ao ano anterior (%)
03/04/2000	151,00		
01/04/2001	180,00	29,00	19,21
01/04/2002	200,00	20,00	11,11
01/04/2003	240,00	40,00	20,00
01/05/2004	260,00	20,00	8,33
01/05/2005	300,00	40,00	15,38
01/04/2006	350,00	50,00	16,67
01/04/2007	380,00	30,00	8,57
01/03/2008	415,00	35,00	9,21
01/02/2009	465,00	50,00	12,05
01/01/2010	510,00	45,00	9,68
01/03/2011	545,00	35,00	6,86
01/01/2012	622,00	77,00	14,13

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

Os aumentos do salário mínimo a cada ano, apresentados na Tabela 3, assim como a taxa anual dos aumentos, correspondem a signos que sugerem que os alunos pensem em estratégias para encontrar a taxa de aumento salarial.

Para o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática, como os alunos já partiram de uma pergunta, que no contexto da Modelagem se configura como um problema oriundo de uma situação dita inicial, eles também, inicialmente, tinham ideias de como avançar na investigação desse problema, conforme denuncia os comentários do Quadro 15. O reconhecimento de quais aspectos da situação devem ser considerados, bem como que encaminhamentos assumir, é consequência da ação cognitiva *estruturação da situação.*

Quadro 15 – Comentários que refletem algumas estratégias dos alunos do Grupo 5

Reunimos algumas informações à respeito dos últimos salários mínimos e tentamos encontrar alguma regularidade com a qual fosse possível definir a taxa com que os salários mínimos vem aumentando.

Trecho do relatório 1

A gente buscava uma regularidade para o aumento do salário ao longo dos anos, só que a gente viu que isso não ocorria. Tinha ano ali que aumentava 6% tinha ano que era 8, no outro 12, não tinha uma regularidade. Daí a gente fez o cálculo da média, que deu 12,6%.

Trecho da entrevista (G5-B)

Temos que calcular o valor dos depósitos mensais de 8% do salário mínimo e depois ainda pensar em um jeito de calcular os juros desses depósitos.

Trecho do relatório 3

Vamos ter que considerar uma taxa de juro para a poupança mensal e também para um valor que fica no banco rendendo o ano todo, sem que tenha sido movimentado esse dinheiro.

Trecho do relatório 3

Fonte: A autora.

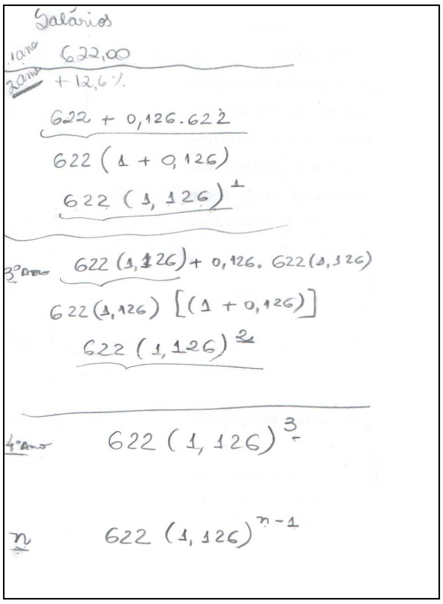
Todas essas informações acerca do tema registradas e discutidas pelos alunos, constituem o que na Modelagem Matemática é chamado o ato de inteirar-se sobre o assunto em questão. Nesse momento de inteiração os alunos se familiarizam com o tema e podem tanto identificar um problema a resolver como definir metas para um problema já estabelecido por eles.

Reconhecido que para resolver o problema – *Depositar mensalmente 8% do valor do salário mínimo em uma poupança, por um período de 35 anos, possibilitará à pessoa que ganha esse salário uma aposentadoria tranquila?* – precisavam saber a taxa de aumento do salário mínimo, os alunos conversam sobre o valor a considerar como representativo desses aumentos a cada ano, conforme ilustrado no extrato de aula a seguir. Paralelamente, os alunos analisam suas escolhas a partir da representação matemática que retrata o valor do salário mínimo a cada ano (Figura 41), com base no histórico desses aumentos.

> G5-B: *Nossa, não tem regularidade* (se referindo aos aumentos do salário mínimo dispostos na Tabela 3).
> G5-A: *E variou meio maluco isso. Quero ver o que a gente vai fazer.*
> G5-C: *Ah... vamos fazer a média disso.*
> G5-B: *Sei não. Uma vez um professor me disse, eu 'to' lembrando disso agora, que não vale muito fazer a média quando os valores são muito discrepantes. Acho que foi esse termo que ele usou. E nesses valores acho que acontece isso.*
> G5-A: *E o que você sugere então?*
> G5-B: *Não sei. Vocês querem fazer a média, fazemos.*
> G5-A: *Vai dar 12,6%. A média vai dar isso.*

> [...]
> G5-B: *Nossa, mas esse salário tá muito alto. Pode o salário mínimo subir mil reais por ano?*
> G5-C: *É?! Nada a ver isso.*
> P: *E se vocês retomassem o valor da taxa do aumento do salário? Esse 12,6%.*
> G5-A: *Ele é que não está bom?*
> G5-B: *Pra mim é bem ele que não está bom. Já tinha falado...*
> P: *É que ele, olhando na tabela* (se referindo à Tabela 3), *as taxas de aumento na maioria, ficaram abaixo desse valor.*
> G5-C: *E se a gente trabalhasse com a moda?*
> G5-B: *Mas não tem valores que se repetem.*
> G5-C: *E se... vamos pegar os valores mais próximos, que mais se repetem, e daí fazer a média.*

Figura 41 – Estratégia esboçada pelos alunos do Grupo 5 para obtenção da taxa dos aumentos do salário mínimo.



Fonte: Relatório 2 entregue por G5.

> [...]
> G5-C: *Professora* (chamando a pesquisadora para o grupo), *chegamos a uma conclusão. Se o salário mesmo, que eu ouvi falar, for para seiscentos e setenta e cinco reais, daí vai ter mais um valor oito ponto alguma coisa, oito ponto cinco dois.*
> G5-B: *Vamos pegar esses valores de oito e alguma coisa e fazer a média entre*

> *eles.*
> P: *Ok então. Vamos ver no que isso vai dar.*
> G5-C: *É... acho que fica mais real pelo menos.*
> G5-B: *Essa taxa gera um acréscimo de cinquenta e três reais.*
> G5-C: *Ah... e não vai aumentar mais que isso mesmo, olha os anos anteriores* (apontando para a Tabela 3).
> [...]
> G5-B: *Isso vai dar um salário de nove mil e pouco... daqui a trinta e cinco anos. Agora sim. Parece mais razoável isso.*

A sugestão de fazer a média indicada por G5-C – *Ah... vamos fazer a média disso* – não foi corroborada por todos os integrantes do grupo, porém é assumida por eles devido à fragilidade da argumentação de G5-B – *Sei não. Uma vez um professor me disse, eu to lembrando disso agora, que não vale muito fazer a média quando os valores são muito discrepantes. Acho que foi esse termo que ele usou. E nesses valores acho que acontece isso.* A sugestão de G5-C configura-se como um signo que indica uma estratégia a seguir. Contudo, a declaração de G5-B – *Nossa, mas esse salário tá muito alto. Pode o salário mínimo subir mil reais por ano?* – após ter calculado o salário mínimo no ano trinta e cinco a partir da representação algébrica apresentada na Figura 41, sugere reflexão acerca da estratégia de usar a média dos aumentos dos salários para generalizar o valor do salário mínimo a cada ano.

O argumento usado por esse aluno de perguntar se é possível o salário mínimo aumentar mil reais por ano é considerado “forte” pelos demais alunos do grupo; tanto que o grupo retoma a discussão sobre a taxa de aumento do salário mínimo. Parece-nos possível inferir que a declaração de G5-B corresponde a um signo que desempenha o papel de provocar que decisões tomadas sejam revistas e que leva os alunos a reconhecer que ter usado a taxa de 12,6% para o aumento do salário não foi o mais adequado.

Todavia, foi a informação enunciada por G5-C – *Se o salário mesmo, que eu ouvi falar, for para seiscentos e setenta e cinco reais, daí vai ter mais um valor oito ponto alguma coisa, oito ponto cinco dois* – a decisiva nesse processo de rever uma decisão tomada. Essa informação também se constitui um signo que impacta o procedimento anteriormente adotado, de fazer a média dos aumentos do salário mínimo, e provoca os alunos a pensar em outra estratégia para encontrar a taxa de tais aumentos.

Além disso, dessa declaração emerge outro signo (G5-B – *Vamos pegar esses valores de oito e alguma coisa e fazer a média entre eles.*) que conduz os alunos a determinar a taxa de aumento do salário mínimo, como sendo 0,0845%, a partir do cálculo do seu valor no ano trinta e cinco usando a expressão $S_n = 622.(0{,}0845)^{n-1}$. A afirmação de G5-B – *Isso vai dar um salário de nove mil e pouco... daqui a trinta e cinco anos. Agora sim. Parece mais razoável isso* – retrata esse fato e ratifica esse novo procedimento adotado pelo Grupo 5 que aparece ilustrado na Figura 42.

Para a produção de todos esses signos os alunos mobilizam seus conhecimentos matemáticos relativos à média e à moda, atrelados a aspectos da situação. Nesses signos, fica subjacente tanto o seu caráter representacional como o fato de carregarem consigo os conhecimentos dos alunos sobre o que esses signos representam. Essa mobilização, bem como a representação dos dados, indicam as funções semiótica e epistemológica desses signos.

Figura 42 – Sobre o aumento do salário mínimo ao longo dos anos

Podemos descrever o aumento do salário mínimo ao longo dos anos da seguinte maneira:

Ano 1: *622,00*

Ano 2: *622,00 +8,45% de 622,00, ou seja,* $622{,}00 + 0{,}0845\cdot622{,}00 = 622{,}00\cdot(1+0{,}0845) = 622{,}00\cdot(1{,}0845)$

Ano 3: $622{,}00\cdot(1{,}0845) + 0{,}0845\cdot[(622{,}00.(1{,}0845)] = 622{,}00\cdot(1{,}0845)\cdot[(1+0{,}0845)] = 622{,}00\cdot(1{,}0845)^2$.

Percebemos, então, que a cada ano o salário mínimo é dado pelo valor do salário inicial multiplicado pelo valor 1,0845 elevado ao número do ano em questão menos um. Então:

Ano n: $622\cdot(1{,}0845)^{n-1}$

Nesse contexto podemos dizer, por exemplo, que daqui a 35 anos o salário mínimo será:

Ano 35: $622\cdot(1{,}0845)^{35-1} = 9808{,}33$.

R$ 9.808,33 é um salário mínimo razoável se pensarmos que será daqui a 35 anos.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

Determinada a taxa relativa ao aumento do salário mínimo, os alunos fazem algumas suposições (Quadro 16) que contribuem para os encaminhamentos futuros a serem assumidos por eles ao longo da atividade. É também a essas suposições que os alunos recorrem quando, por algum motivo, sentem necessidade de reconsiderar alguns aspectos ou considerar outros, inicialmente não usados.

Quadro 16 – Suposições realizadas pelos alunos do Grupo 5

> Consideramos que o salário mínimo aumenta a cada ano a uma taxa de 8,45%. Também estamos considerando que não ocorrerá mudança de plano ou de moeda com as trocas de presidentes no país.

Trecho do trabalho de modelagem

> Os depósitos seriam feitos na poupança com juros de 0,5% a.m. e dessa forma, com depósitos mensais, não haveria contribuição ao INSS.

Trecho do relatório 2

> A gente não comentou antes, mas estamos considerando que o tempo que será realizado os depósitos é de 35 anos, devido ao tempo que o trabalhador contribui com a previdência.

Trecho do relatório 4

> A taxa de juro da poupança ao ano é considerada com sendo de 6%, se o dinheiro ficar no banco sem ser movimentado. Porém, será de 2,8% ao ano, se durante o ano o dinheiro estiver sendo movimentado.

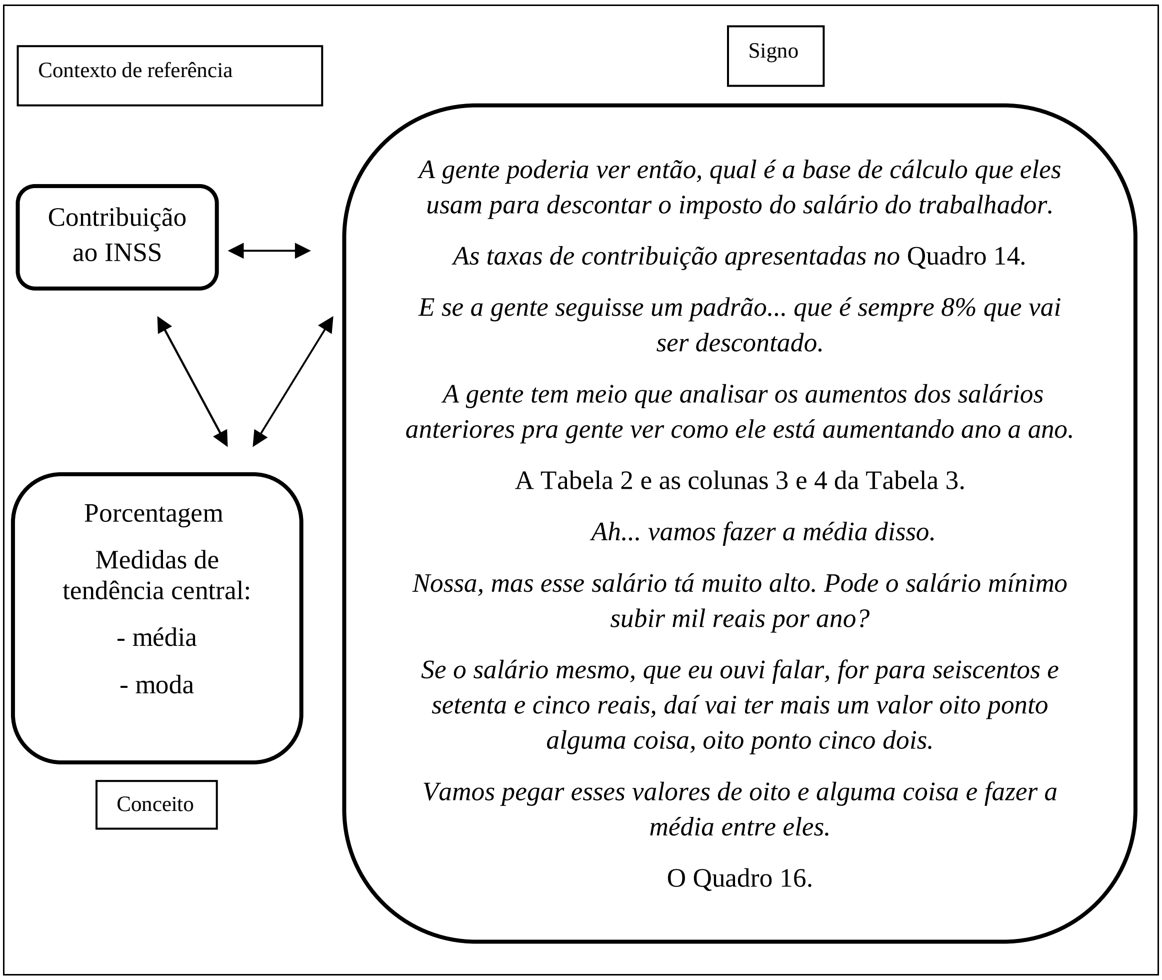
Trecho do trabalho de modelagem

Fonte: A autora.

Essas suposições, reconhecidas no âmbito da Modelagem Matemática como hipóteses, se configuram como signos que resultaram de interpretações dos alunos acerca das informações sobre o tema em questão e, nesse sentido, retratam alguns conhecimentos mobilizados por eles, ou seja, conhecimentos matemáticos (sobre média, moda, porcentagem) e conhecimentos sobre a situação (sobre o INSS, poupança, taxas de juros, entre outros) que circundam o problema por eles evidenciado.

Dessa forma, podemos constatar que todos esses signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos estão conectados, direta e indiretamente, ao contexto de referência contribuição ao INSS, assim como aos conceitos mobilizados pelos alunos nas ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação.* Tais conexões aparecem implícitas nos signos associados a essas ações cognitivas e relacionadas ao contexto de referência e aos conceitos que dão suporte às interpretações realizadas pelos alunos. A Figura 43 ilustra os três elementos do triângulo epistemológico nessas ações cognitivas.

Figura 43 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 5 nas ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação*



Fonte: A autora.

A partir da definição da taxa de aumento do salário mínimo, os alunos investem na busca por uma representação que associe os depósitos em relação à quantia depositada na poupança, mês a mês, ao longo de trinta e cinco anos (Figura 44). Tal busca é alicerçada pelo diálogo estabelecido pelos alunos durante a aula e que aparece no fragmento a seguir.

> G5-C: *No ano uma pessoa vai ter poupado zero ponto zero oito de seiscentos e vinte e dois e no ano dois, zero ponto zero oito de...*
> G5-B: *Do salário que vai estar no ano dois. Que não será mais o seiscentos e vinte e dois porque já terá tido um aumento.*
> G5-C: *Então vai ser... zero ponto zero oito de seiscentos e vinte e dois, um ponto zero oito, quatro cinco?*
> G5-A: *Nossa, é isso?*
> [...]
> P: *Vocês fizeram para o ano um, ano dois, ano três, mas daí... o que podem concluir?*
> G5-B: *No quarto ano vai dar então zero ponto zero oito vezes seiscentos e vinte e dois vezes um ponto zero oito quatro cinco, com expoente três.*

> G5-C: *Então no ano n, o expoente vai ser n-1.*
> [...]
> P: *Mas, na verdade o que vocês querem saber é a soma desses depósitos, certo? É isso que vocês querem saber. Ano 1, ano 2, ano 3 até o ano n.*
> G5-C e G5-B: *Mas tem uma coisa. Tem o vezes doze.*
> P: *Mas a gente pode fazer tudo isso aqui oh vezes doze* (Escrevendo a expressão (Ano 1 + Ano 2 + Ano 3 + ... + Ano n).12). *Porque vai ficar vezes doze aqui, vezes doze aqui, vezes doze aqui e...*

Figura 44 – Sobre o depósito de parte do salário mínimo ao longo dos anos

Agora, considerando que seja depositado 8% do salário mínimo, podemos calcular o valor do depósito feito na conta poupança:

Ano 1: *0,08 . 622,00*

Ano 2: *0,08 . 622,00 (1,0845)*

Ano 3: *0,08 · 622,00.(1,0845)²*

Ano n: $0{,}08 \cdot 622{,}00.(1{,}0845)^{n-1}$

Para calcular a soma dos valores dos depósitos, faremos:

(Ano 1 + Ano 2 + Ano 3 + ... + Ano n).12

Multiplicamos a soma dos anos por 12 porque os depósitos são mensais e não anuais, ou seja, totalizam 12 depósitos a cada ano.

Reescrevendo,

$$[0{,}08\cdot622{,}00 + 0{,}08\cdot622{,}00.(1{,}0845) + 0{,}08.622{,}00.(1{,}0845)^2 + \ldots + 0{,}08.622{,}00.(1{,}0845)^{n-1}].12$$

Mas ainda pode ficar assim:

$$[px + px\ .\ (1{,}0845) + px\ .\ (1{,}0845)^2 + \ldots + px\ .\ (1{,}0845)^{n-1}].12$$

se considerarmos p como sendo a porcentagem relativa aos depósitos mensais em relação ao salário e x o valor do salário (assim, uma pessoa pode saber o valor do depósito acumulado, sem os juros da poupança, para qualquer valor de salário que a pessoa ganha e também colocar a taxa de desconto do salário de acordo com a faixa estipulada pelo INSS).

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

A expressão $[px + px\ .\ (1{,}0845) + px\ .\ (1{,}0845)^2 + \ldots + px\ .\ (1{,}0845)^{n-1}].12$ da Figura 44 sinaliza que os alunos representaram a soma dos depósitos mensais de forma genérica e, de certa forma, amplia o contexto contemplado no problema que eles buscavam solucionar. Indícios disso são ratificados no fragmento de aula a seguir.

> G5-C: *Daí, dá pra gente deixar meio que geral* (Pensando em um jeito de não fixar o valor do salário, nem da taxa de desconto).
> P: *É... mas daí o que vocês precisam fazer?*
> G5-B: *Então esse seiscentos e vinte e dois pode ser um x.*
> [...]
> G5-C: *Isso é legal porque a pessoa pode ter uma ideia de quanto vai guardar, sem os juros é claro, do salário dela só jogando o salário dela aqui* (apontando para a expressão) *e usando a taxa que a ele se refere.*

G5-B: *Então o zero ponto zero oito pode, tem que ser uma letra também.*

Tal expressão constitui um signo que viabiliza aos alunos uma análise da formulação inicial do problema, sendo essa análise um indicativo das funções semiótica e epistemológica desse signo. A primeira pode ser evidenciada a partir do caráter representacional do signo; a expressão representa algo, ou seja, representa o valor acumulado pelos depósitos mensais de 0,0845% do salário mínimo durante trinta e cinco anos. Entretanto, nessa expressão também estão implícitos os conhecimentos que os alunos têm sobre o que esse signo representa, ou seja, a qual objeto está relacionado, a saber: o problema em estudo. Isso sinaliza a função epistemológica desse signo.

Interessados em saber qual o valor, referente aos depósitos, acumulado ao longo dos trinta e cinco anos os alunos associam a soma dos depósitos à soma de uma progressão geométrica. Embora tenham escrito uma expressão geral, *p* e *x*, foram considerados pelos alunos como valores fixos, conforme retrata o fragmento a seguir.

P: *Isso* (se referindo à expressão que representa a soma dos depósitos da Figura 44) *é algo familiar para vocês?*
G5-C: *É uma PG, a soma de uma PG. Por causa do zero zero oito, agora esse ao quadrado aí... ixi, não sei não.*
P: *O que precisa para ser uma PG?*
G5-C: *Tem que ter um valor multiplicando... cada termo.*
P: *E qual o valor que está sempre multiplicado a cada termo?*
G5-C: *O zero zero oito.*
G5-B: *Não! O zero zero oito é constante em todos os termos. Tem que ser o um ponto zero oito quatro cinco. A única coisa que varia é o expoente.*
P: *Se está variando o expoente, o que está sendo multiplicado então?*
G5-C: *Todo o termo. Não, não... só o um ponto zero oito quatro cinco.*
G5-B: *É verdade, aqui não tem o um ponto zero oito quatro cinco* (se referindo ao primeiro termo), *mas ele pode estar elevado a zero.*
G5-C: *Então é mesmo uma PG.*
P: *Então a sequência que a gente tem aqui é...* (escrevendo a expressão: [px, px (1,0845), px $(1,0845)^2$, ... , px $(1,0845)^{n-1}$]
G5-B: *Agora a gente tem que fazer a soma dessa PG, e é uma PG finita.*

A Figura 45 ilustra o procedimento dos alunos no que concerne ao cálculo do valor do depósito acumulado nos trinta e cinco anos, sem considerar os juros da poupança. É em decorrência desse procedimento no qual assumem que o depósito mês a mês se comporta segundo uma progressão geométrica que os alunos calcularam o valor que seria depositado ao longo desses anos.

Figura 45 – Sobre o valor acumulado pelos depósitos realizados, mês a mês, por 35 anos

A sequência *(px, px(1,0845), px(1,0845)^2, ..., px(1,0845)$^{n-1}$)* é uma Progressão Geométrica Finita de razão *q=1,0845* e primeiro termo $a_1=px$.

Logo, fazendo a soma dos termos da PG, temos:

$$S_n = \frac{px(1{,}0845^n - 1)}{1{,}0845 - 1}$$

$$S_n = \frac{px(1{,}0845^n - 1)}{0{,}0845}$$

Assumindo *p=0,08, x=622,00 e n=35:*

$$S_{35} = \frac{0{,}08.622(1{,}0845^{35} - 1)}{0{,}0845}$$

$$S_{35} = \frac{49{,}76(16{,}1015)}{0{,}0845} = 9.481{,}7827$$

$$S_{35} \cdot 12 = 9481{,}7827 \cdot 12 = 113.781{,}39$$

Descobrimos, então, que o montante depositado ao final de 35 anos é de R$113.781,39.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

Somente depois que os alunos encontraram o valor acumulado por trinta e cinco anos de depósitos mensais de 8% do salário mínimo é que eles reconheceram que o problema não fora solucionado. Tampouco, que esse procedimento os levaria a sua solução, conforme apresentado na Figura 46. Nesse sentido, a Figura 45 se revela como determinante para os alunos reconhecerem que essa não era a melhor opção de encaminhamento para a atividade e, portanto, o que eles deveriam fazer era considerar os depósitos já embutindo os juros. Então, a Figura 45 corresponde a um signo que sinaliza que outro encaminhamento deve ser assumido para que seja possível responder ao problema por eles proposto.

Figura 46 – Reconhecimento de que outro encaminhamento precisava ser assumido

A gente quer o valor acumulado dos depósitos com os juros, daí a gente foi lá e resolveu sem os juros. Agora a gente tem essa resposta e ela não serve para nada. O que a gente fez responderia um outro problema, mas não o nosso

Fonte: Relatório 4 entregue por G5.

São os conhecimentos mobilizados pelos alunos acerca do problema e do encaminhamento por eles assumido, na ação cognitiva *matematização*, que os faz simular (Figura 47) outro encaminhamento que considera os depósitos com os juros.

Figura 47 – Simulação realizada pelos alunos do Grupo 5

No primeiro mês temos os 8% do salário mínimo depositado na conta. Por exemplo, se fosse o salário desse ano o depósito de todo mês seria de quarenta e nove reais e pouquinho. No segundo mês nós teríamos o juro do valor que estava na conta no mês anterior mais o valor que estava na conta no mês anterior mais o depósito desse mês. No terceiro mês a gente tem o valor anterior vezes a taxa de juro, mais o valor do mês anterior, mais o depósito dos 8% do salário. Vamos fazer... acho que até o 6º mês para ver o que acontece.

Fonte: Relatório 4 entregue por G5.

Buscando meios para responder ao problema e considerando a simulação da Figura 47, os alunos procuram por uma representação matemática que retrate além dos depósitos efetuados mês a mês, os juros contabilizados sobre esses depósitos (Figura 48). A Figura 47 é o signo que revela a intenção dos alunos de encontrar uma representação matemática para o problema.

Figura 48 – Sobre o montante acumulado ao longo dos anos, incluindo os juros.

Considerando px o valor do depósito mensal, buscamos o saldo da poupança, fazendo:

1º mês: px

2º mês: $(px)t + px + px = px(t+2)$

$(px)t$ representa o juro mensal aplicado ao saldo da conta do mês anterior adicionado de px, que é o saldo anterior e de px novamente, que é o valor fixo mensal de depósito para o primeiro ano. Nos próximos meses ocorre a mesma coisa:

3º mês: $[px(t+2)]t + px(t+2) + px = pxt^2 + px2t + pxt + px3 = px(t^2+3t+3)$

4º mês: $[px(t^2+3t+3)]t + px(t^2+3t+3) + px = px(t^3+4t^2+6t+4)$

5º mês: $px(t^3+4t^2+6t+4)t + px(t^3+4t^2+6t+4) + px = px(t^4+5t^3+10t^2+10t+5)$

6º mês: $px(t^4+5t^3+10t^2+10t+5)t + px(t^4+5t^3+10t^2+10t+5) + px = px(t^5+6t^4+15t^3+20t^2+15t+6)$

Ou seja, a cada mês temos os juros que renderam em cima do valor do mês anterior adicionado do valor do mês anterior e do depósito do mês atual.

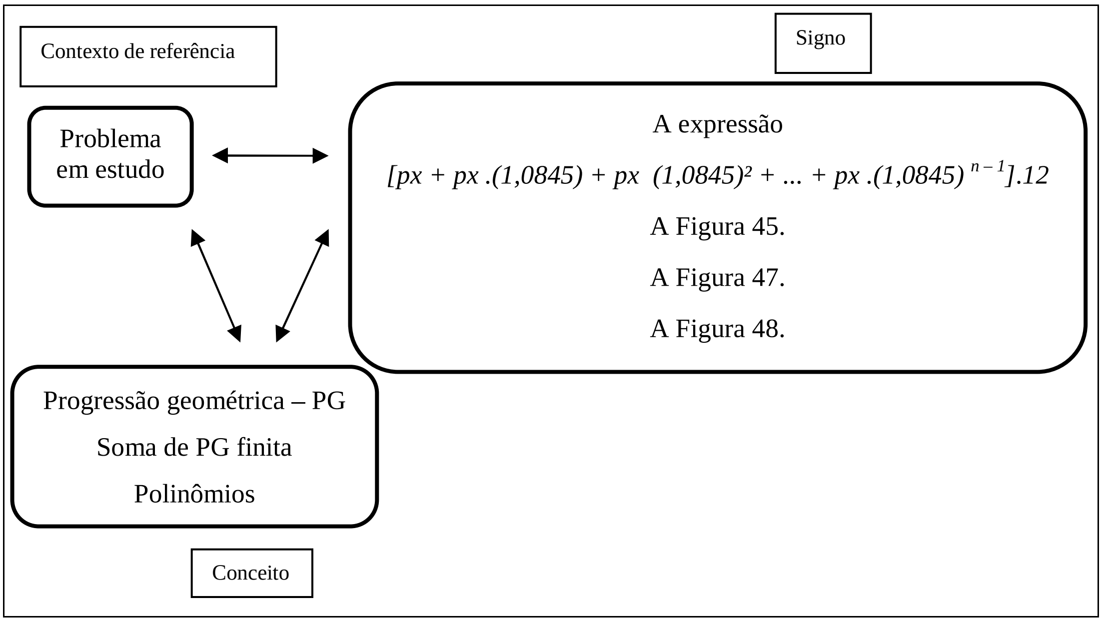
Percebemos que a cada mês temos um polinômio com um grau a mais que no anterior, logo, ao final do primeiro ano, encontraremos um polinômio de grau onze.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

O encaminhamento assumido pelos alunos (Figura 48), que no âmbito da Modelagem Matemática refere-se à construção de um modelo matemático para a situação é um signo que retrata o trânsito da situação inicial para uma situação final. Nesse signo os alunos não deixam explícito o valor do salário assumido e a taxa de desconto. Inferimos, portanto, que eles têm a intenção de apresentar um modelo matemático que contemple outros salários e, consequentemente, outras faixas de desconto.

Quando a atenção dos alunos está nas escolhas de estratégias para resolver o problema, os signos emergentes das ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação* se comportam como contexto de referência. No triângulo epistemológico da Figura 49, esse contexto de referência conecta-se aos signos associados às interpretações dos alunos na ação cognitiva *matematização* e ao conceito referente aos objetos matemáticos que emergiram na transição do problema em linguagem natural para uma representação matemática.

Figura 49 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 5 na ação cognitiva *matematização*



Fonte: A autora.

A partir do modelo matemático, o encaminhamento dos alunos visa encontrar uma solução para o problema. Nessa busca, identificado que a cada mês aumentava um grau no polinômio, os alunos precisariam determinar os coeficientes dos polinômios.

> G5-C: *Olha... a cada mês aumenta um grau no polinômio; um coeficiente a mais também.*
> G5-B: *Tá, mas...*
> G5-C: *E o px continua... não muda.*
> G5-A: *Credo gente o que que vai dar isso.*
> [...]
> G5-C: *Olha o que tá acontecendo aqui!* (trabalhando apenas com os coeficientes dos polinômios)
> G5-B: *A gente já viu uma coisa assim... é triângulo de Pascal não é?*
> G5-C: *Hummm...*

A observação de G5-C – *Olha o que tá acontecendo aqui!* –, além de provocar os demais alunos do Grupo 5 a se atentar para aquilo que ele tinha descoberto, os direciona a pensar em um objeto matemático (triângulo de Pascal) com vista a encontrar uma generalização dos coeficientes dos polinômios. Podemos inferir que tal observação é um signo que contribui para a produção de outro signo (Quadro 17).

Quadro 17 – Indicativos para a solução do “problema da aposentadoria”

1											
2	1										
3	3	1									
4	6	4	1								
5	10	**10**	**5**	1							
6	15	20	**15**	6	1						
7	21	35	35	21	7	1					
8	28	56	70	56	28	8	1				
9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Calculando encontramos até o polinômio de grau cinco, mas olhando em separado para os coeficientes dos polinômios percebemos uma regularidade. Os dois números de uma linha, somados, formam o número exatamente da linha abaixo. Então fizemos isso para chegar até a linha que representava a linha do mês 12, que daria um polinômio de grau 11.

Trecho do trabalho de modelagem

Usando a última linha do triângulo que a gente construiu a gente consegue saber quanto será o valor do depósito com os juros ao final de um ano. O polinômio dessa linha será o seguinte:

$$px(12+66t+220t^2+495t^3+792t^4+924t^5+792t^6+495t^7+220t^8+66t^9+12t^{10}+t^{11})$$

Trecho do relatório 5

Se conseguíssemos colocar, ao invés de 12 meses, linhas referentes à 35 anos, ou seja, 420 linhas, a última linha nos daria um polinômio de grau 419, que nos daria o valor acumulado na poupança, após 35 anos, que é o que queremos saber.

Trecho do relatório 5

Fonte: A autora.

As conclusões dos alunos na intenção de encontrar uma solução para o problema, apresentadas no Quadro 17, retratam suas intenções na tentativa de resolver o problema e, nesse sentido, se constitui em um signo. Esse signo carrega interpretações dos alunos concernentes à generalização matemática que eles fazem com foco na situação em estudo e indica um encaminhamento que pode levar à solução do problema. Indícios dessas interpretações também podem ser observados no seguinte fragmento de aula:

> G5-C: *Mas daí para um ano a gente precisa da linha 12.*
> G5-B: *Na linha 12 a gente vai ter o valor dos depósitos com os juros, em um ano. Agora como a gente vai calcular isso para 35 anos? Para isso a gente teria que construir um triângulo com... 420 linhas!*
> G5-C: *Mas... o que a gente precisa, seriam as linhas que correspondem aos múltiplos de doze. Linha 12, linha 24, linha 36, ... ou seja, de 35 linhas desse triângulo. Agora fazer esse triângulo na mão nem pensar né gente?*
> [...]

> G5-A: *Deve ter um jeito de fazer isso diferente* (se referindo ao uso de software), *mas... eu não sei e nem vai dar tempo da gente correr atrás disso agora. Vamos tentar de outra forma.*

Muito embora os alunos tenham delineado uma solução para o problema, que aparece expressa na declaração de G5-B – *Na linha 12 a gente vai ter o valor dos depósitos com os juros, em um ano. Agora como a gente vai calcular isso para 35 anos? Para isso a gente teria que construir um triângulo com... 420 linhas!* –, a do aluno G5-A – *Vamos tentar de outra forma.* – é decisiva para os alunos assumirem outro encaminhamento para resolver o problema por eles proposto (Figura 50). Sendo assim, tanto a declaração de G5-B como a de G5-A correspondem a signos que levam os alunos a repensar a resolução do problema. O aluno G5-B indica um meio para encontrar uma solução para o problema a partir do encaminhamento que o grupo tinha assumido. Por outro lado, G5-A convida os demais alunos a abandonar esse encaminhamento e a assumir outro.

Figura 50 – Encaminhamento assumido pelos alunos do Grupo 5 para responder à situação "*Poupando a futura aposentadoria*"

Então a gente recorreu ao Excel e daí, fizemos uma planilha com os cálculos dos valores depositados com os juros durante 35 anos, que é o tempo de contribuição.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

Mesmo que no diálogo que orientou a obtenção de uma representação matemática para os depósitos acumulados ao longo de trinta e cinco anos os alunos tenham definido algumas variáveis, nesse momento, eles descartam todos os encaminhamentos anteriores e se pautam nas informações ilustradas na Figura 51, que geraram inclusive as suposições reapresentadas no Quadro 18.

Figura 51 – Informação acerca dos juros para poupança

Em conversa com um amigo que trabalha na Caixa, ele falou que a taxa anual da poupança está perto de 6%, só que 6% é em cima de uma valor que deposita agora e depois de doze meses você vai calcular e vai ver que rendeu 6%. O dinheiro no banco, um ano, 365 dias, vai render 6%. Mas no nosso caso, o depósito não é feito todo de uma vez, é feito depósito a cada mês do ano. Então não vai render 6%.

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

Quadro 18 – Suposições relacionadas ao dinheiro aplicado em poupança

Estamos usando 0,05% ao mês como a taxa de juro da poupança. *Trecho do trabalho de modelagem*
Então a gente optou por usar o valor de 2,8% ao ano de rendimento da poupança. Para chegar no valor de 2,8% a gente fez a diferença entre o valor depositado durante um ano e o quanto ficou com o juro. Fizemos isso para alguns anos e percebemos que dá em torno de 2,8% ao ano. *Trecho do trabalho de modelagem*

Fonte: A autora.

A partir de então, os alunos admitem o encaminhamento da Figura 50 e apresentam a Tabela 4 como uma solução para o problema. Esse encaminhamento já tinha sido sinalizado pelos alunos no início do envolvimento deles com a atividade. Naquela ocasião eles o abandonaram após considerar o convite da pesquisadora de que eles tentassem generalizar a situação em estudo.

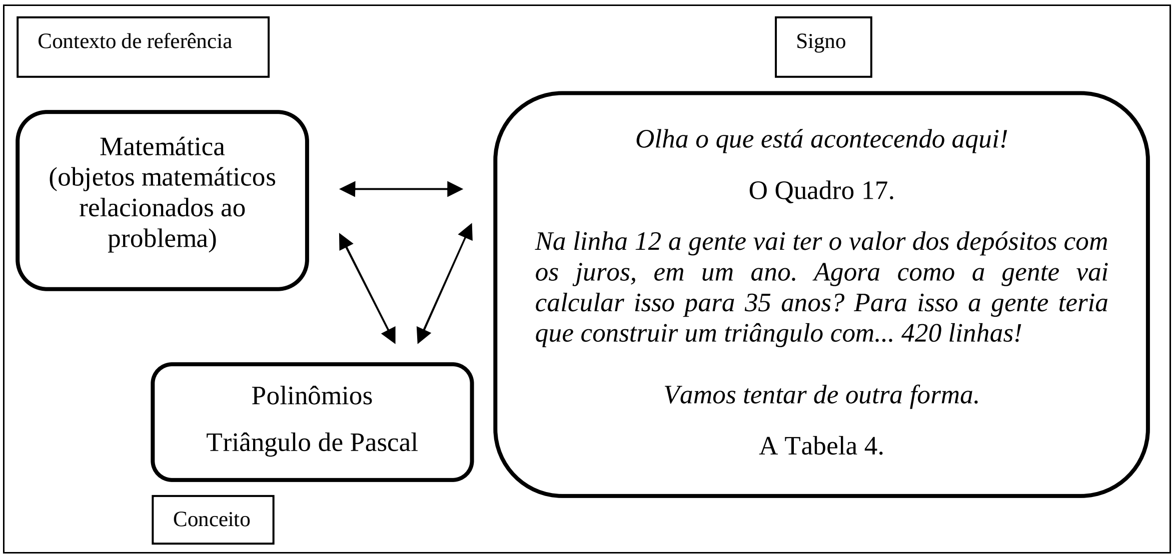
Tabela 4 – Solução para o problema apresentada pelos alunos do Grupo 5

Tempo de depósito (ano)	Valor do salário	Depósito total	Juro anual	Total (com juro)	JUROS NO PERÍODO DE 35 ANOS
1	622,00	597,12	16,72	613,84	4450,96
2	674,56	647,58	18,13	665,71	4553,84
3	731,56	702,30	19,66	721,96	4659,09
4	793,38	761,64	21,33	782,97	4766,78
5	860,42	826,00	23,13	849,13	4876,96
6	933,12	895,80	25,08	920,88	4989,68
7	1011,97	971,49	27,20	998,69	5105,01
8	1097,48	1053,58	29,50	1083,08	5223,00
9	1190,22	1142,61	31,99	1174,60	5343,72
10	1290,79	1239,16	34,70	1273,86	5467,23
11	1399,86	1343,87	37,63	1381,50	5593,60
12	1518,15	1457,43	40,81	1498,23	5722,88
13	1646,44	1580,58	44,26	1624,84	5855,16
14	1785,56	1714,14	48,00	1762,13	5990,49
15	1936,44	1858,98	52,05	1911,03	6128,95
16	2100,07	2016,07	56,45	2072,52	6270,61
17	2277,53	2186,42	61,22	2247,64	6415,54
18	2469,98	2371,18	66,39	2437,57	6563,82
19	2678,69	2571,54	72,00	2643,55	6715,53
20	2905,04	2788,84	78,09	2866,92	6870,75
21	3150,51	3024,49	84,69	3109,18	7029,56
22	3416,73	3280,06	91,84	3371,91	7192,03
23	3705,45	3557,23	99,60	3656,83	7358,26
24	4018,56	3857,82	108,02	3965,83	7528,34
25	4358,13	4183,80	117,15	4300,95	7702,34
26	4726,39	4537,33	127,05	4664,38	7880,37
27	5125,77	4920,74	137,78	5058,52	8062,51
28	5558,89	5336,54	149,42	5485,96	8248,86
29	6028,62	5787,48	162,05	5949,53	8439,52
30	6538,04	6276,52	175,74	6452,26	8634,58
31	7090,50	6806,88	190,59	6997,48	8834,15
32	7689,65	7382,06	206,70	7588,76	9038,34
33	8339,43	8005,85	224,16	8230,01	9247,24
34	9044,11	8682,34	243,11	8925,45	9460,98
35	9808,34	9416,00	263,65	9679,65	9679,65
TOTAL		**113.781,47**		**116.967,35**	**235.900,31**

Fonte: Trabalho de modelagem entregue por G5.

A Tabela 4 é um signo resultante de interpretações realizadas pelos alunos quando o contexto de referência situa-se no âmbito da Matemática e o conceito refere-se aos objetos matemáticos atrelados à solução para o problema. Contudo, além desse signo, outros, também associados à ação cognitiva *síntese*, estão em conexão com esse contexto de referência e com o conceito em questão. A Figura 52 ilustra os três elementos do triângulo epistemológico nessa ação cognitiva.

Figura 52 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 5 na ação cognitiva *síntese*



Fonte: A autora.

A Tabela 4, reconhecida como um modelo matemático para a situação, estruturada na ação cognitiva *síntese*, conduziu os alunos a elaborar uma resposta para o problema (Figura 53).

Figura 53 – Resposta para o problema apresentada pelos alunos do Grupo 5

> Pegando o valor do montante acumulado e dividindo pelo salário no ano 36, que seria de R$ 10.637,14, a gente vê que o trabalhador conseguirá se manter apenas por 22 meses. Portanto, a gente acredita, ao contrário do que a gente acreditava antes de se envolver com essa atividade de modelagem, que o ideal é continuar contribuindo com a Previdência Social.

Fonte: Relatório 5 entregue por G5.

Essa resposta dos alunos, além de corresponder a uma solução para o problema, reflete uma interpretação que eles fizeram a partir dos valores da Tabela 4 com o olhar voltado para o problema e sinaliza que a ação cognitiva em foco é a *interpretação e validação.* Tal resposta é um signo que carrega aspectos epistemológicos dos conhecimentos dos alunos acerca da situação e do problema em si, confrontando, inclusive suas conjecturas inicias denunciadas por G5-B – *Eu sempre pensei que não valia a pena contribuir... agora tenho certeza que vale* (trecho da entrevista).

A interpretação da solução no contexto do problema, de acordo com os pressupostos da Modelagem Matemática, se revela no momento em que os alunos, de certo modo, validam seus encaminhamentos e, se necessário, revisitam suas suposições e procedimentos adotados ao longo da atividade de modelagem. Nessa atividade, interpretar a solução foi muito mais que comparar a solução obtida com a situação em estudo, foi ter de reconhecer que suas suspeitas acerca da solução estavam equivocadas.

A aceitação da resposta, porém, acontece de forma mais efetiva no momento de socialização. É nesse momento, para trabalhos com Modelagem Matemática, que os alunos apresentam o desenvolvimento da atividade para os colegas e argumentam sobre os procedimentos adotados por eles a fim de encontrar uma solução para o problema. Nessa socialização, os alunos têm a oportunidade de avaliar seus encaminhamentos e argumentar a respeito da solução obtida, como que em um movimento de mão dupla; eles argumentam na tentativa de convencer os colegas de que os modelos matemáticos representativos da situação são “bons”, ou como é comum dizer no âmbito da Modelagem, esses modelos são consistentes e adequados para representar matematicamente a situação e, ao mesmo tempo, se convencem disso também. Desse movimento, os alunos produziram os comentários do Quadro 19, que correspondem a signos associados à ação cognitiva *comunicação e argumentação.* Esses signos desempenham o papel de convencer os colegas de sala e a si próprios que é mais adequado contribuir com a Previdência Social do que depositar, em uma poupança, o valor descontado mensalmente do salário.

Quadro 19 – Comentários dos alunos do Grupo 5 acerca da situação “Poupando a futura aposentadoria”

Agora vou parar de reclamar do desconto na minha folha de pagamento. *Trecho da entrevista (G5-B)*	A gente deposita todo mês um valor pequeno... e ele vai render juro. Só que esse juro não é capaz de suprir ao longo dos 35 anos o valor que a gente receberia por uma aposentadoria. Todo mês aqueles R$ 50,00 que é descontado faz falta, a gente fica pensando o que poderia comprar ou ajudar a comprar. Mas a gente chegou à conclusão que é melhor continuar contribuindo mesmo que esse dinheiro agora faça falta. *Trecho do relatório 5*
Esse resultado nos causou surpresa. Pensávamos que compensava poupar esse dinheiro. *Trecho do trabalho de modelagem*	

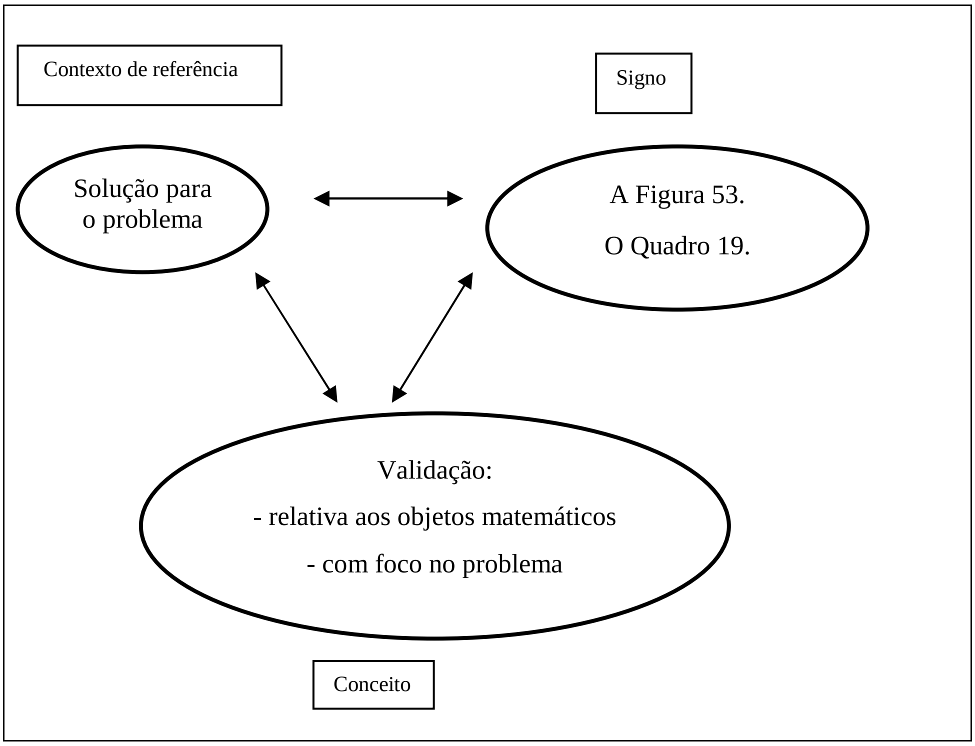
Fonte: A autora.

Desse modo, os alunos respondem à questão que os motivou a estudar esse tema e deixam evidências que suas conjecturas acerca do tema sofreram alterações após o término da atividade de modelagem.

Embora considerem terem respondido ao problema, na entrevista, os alunos comentam sobre as limitações desse problema, enfatizando que "*na prática a gente sabe que não é possível deixar de contribuir com o INSS, então o nosso problema é algo que nós criamos, mas agora pelo menos a gente entende um pouco sobre essa questão da contribuição*" (G5-B em entrevista).

No triângulo epistemológico da Figura 54 os signos produzidos pelos alunos nas ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação* aparecem em conexão com a solução para o problema e com a validação realizada. Esses signos advêm de reflexões e interpretações realizadas pelos alunos quando a solução para o problema corresponde ao contexto de referência e a validação ao conceito.

Figura 54 – Triângulo epistemológico dos alunos do Grupo 5 nas ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação*



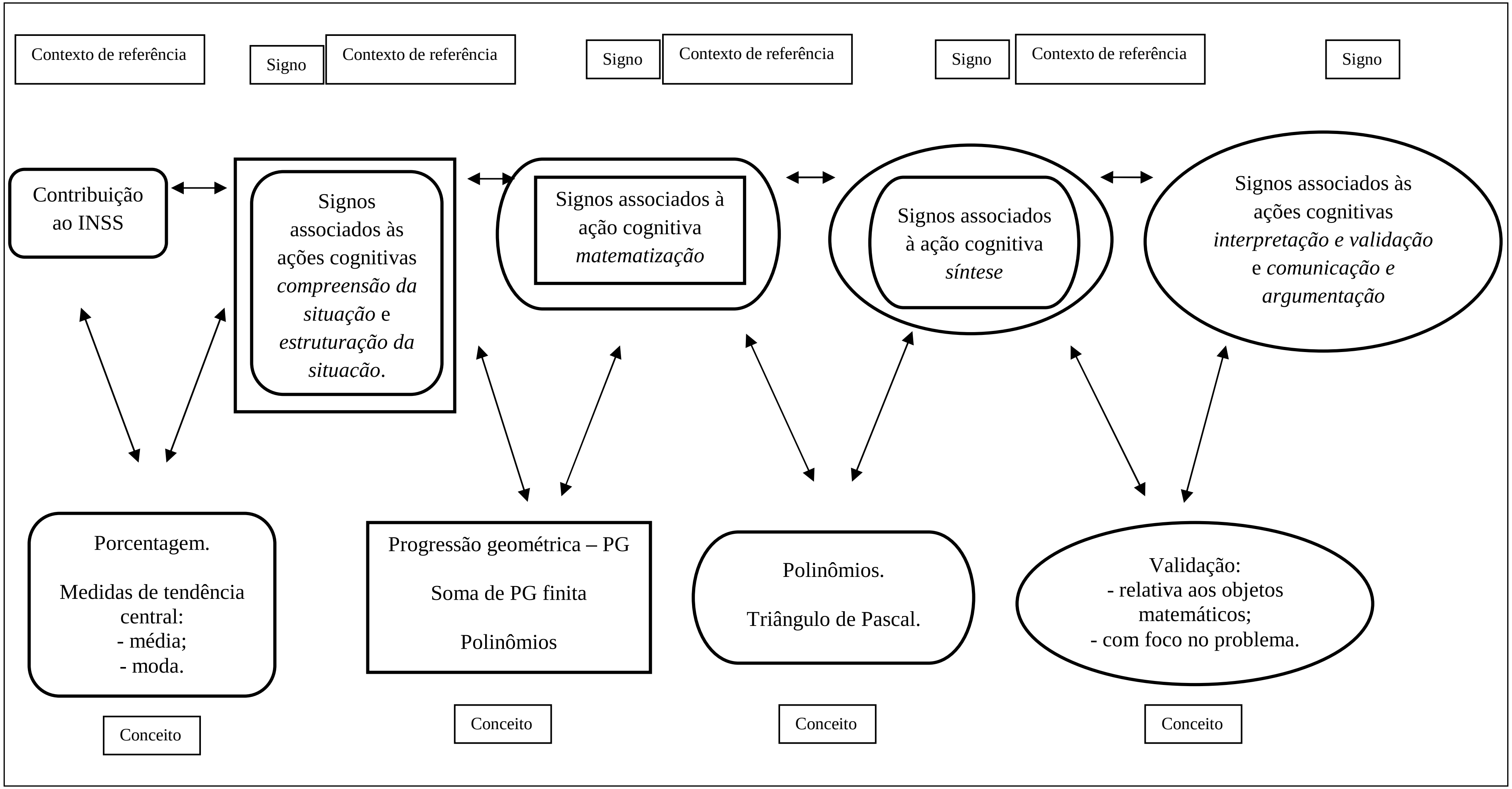
Fonte: A autora.

Olhando para cada um dos triângulos epistemológicos identificados no desenvolvimento dessa atividade podemos inferir que as interpretações dos alunos acerca dos signos utilizados e/ou produzidos por eles, em suas ações cognitivas, favorecem que diferentes contextos de referência sejam reconhecidos, assim como dessas interpretações suscitam diferentes conceitos associados aos signos e ao contexto de referência em foco.

A mudança desses três elementos dos triângulos epistemológicos sugere que o triângulo da Figura 55 seja compreendido em um contexto de trama semiótica, na qual signos se complementam e se articulam em decorrência de suas funções semiótica e epistemológica.

As formas geométricas que aparece nessa sequência de triângulos epistemológicos dizem respeito aos triângulos identificados ao longo dessa atividade de modelagem matemática e estão relacionadas às ações cognitivas dos alunos envolvidos com essa atividade.

Figura 55 – Triângulos epistemológicos dos alunos do Grupo 5



Fonte: A autora.

4.2 ANÁLISE GLOBAL: INFLUÊNCIA DAS FUNÇÕES DOS SIGNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando o interesse em investigar ***como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos***, voltamos nossa atenção para as duas questões que orientaram as análises locais: *que signos os alunos utilizam e/ou produzem ao longo de uma atividade de modelagem matemática?* e *que relações existem entre o papel desempenhado por esses signos e os encaminhamentos assumidos pelos grupos de alunos para desenvolver sua atividade de modelagem matemática?*

Ao olhar para cada atividade em particular, buscamos a partir dos dados coletados, discutir a respeito dessas questões, com base nas fases de pré-análise e exploração do material da Análise de Conteúdo, para nesse momento, apresentar reflexões acerca delas, tendo como foco nosso objetivo de pesquisa. As inferências relativas ao objetivo de pesquisa correspondem à terceira fase da Análise de Conteúdo e se fundamentam em reflexões acerca dos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos nos encaminhamentos assumidos por eles, quando envolvidos com a busca por uma solução para o problema que suscitou o desenvolvimento de suas atividades de modelagem matemática.

Ao longo desta investigação constatamos que as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos a partir de um tema proposto por eles viabilizaram autonomia em relação ao que analisar a respeito desse tema. Foram os conhecimentos de diversas naturezas mobilizados pelos alunos que desencadearam discussões nos grupos em relação ao que fazer para investigar tal tema ou avançar em sua investigação. É nesse *o que fazer para* que signos foram utilizados e/ou produzidos pelos alunos.

Observamos que a cada estratégia esboçada com vista à investigação acerca do tema ou de um problema a ele relacionado, os alunos, na dinâmica de um grupo, mobilizaram seus conhecimentos, ora matemáticos, ora acerca da situação em estudo e, inclusive, conhecimentos articulados entre Matemática e situação e os comunicaram por meio de signos no sentido proposto por Peirce (2012), de que os signos representam algo que se quer comunicar.

O fato de as atividades de modelagem matemática serem abertas e permitirem múltiplas possibilidades de resolução, tanto no que diz respeito à elaboração de um problema a partir da escolha do tema de estudo quanto no que se refere aos procedimentos e conhecimentos mobilizados no desenvolvimento da atividade, favorece, como aponta Almeida (2010), a produção de signos.

A partir das análises locais identificamos que informações coletadas sobre a situação em estudo, considerações dos alunos em relação à situação ou aos conhecimentos mobilizados por eles, representações gráficas, representações algébricas, entre outros, compuseram o conjunto de signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos. Constatamos ainda que nas atividades de modelagem matemática de todos os grupos essa variedade de signos aconteceu tanto naqueles manifestados por meio de registro escritos como nos signos "falados". Contudo, nessas duas manifestações os signos foram produzidos no âmbito do processo de comunicação de conhecimentos e de geração de pensamentos e relacionam-se, direta ou indiretamente, ao tema em estudo.

Como ao longo das atividades de modelagem matemática os alunos se envolvem com um problema a investigar, com a busca por uma solução para ele e com a análise da resposta considerada por eles como solução para tal problema, signos são produzidos durante todo o desenvolvimento das atividades de modelagem, associados às ações cognitivas dos alunos. Porém não somente signos matemáticos são decisivos em tal desenvolvimento.

Nas atividades de modelagem matemática discutidas nesta investigação, alguns signos matemáticos produzidos pelos alunos são considerados por eles apenas como uma forma de "visualizar" ou estruturar a situação em foco. Nesses casos, os encaminhamentos assumidos no desenvolvimento das atividades de modelagem são pautados, também, nos signos que são não matemáticos, ou seja, naqueles produzidos nos diálogos estabelecidos nos grupos, seja com ou sem a presença da pesquisadora. Na atividade da "enchente", por exemplo, a representação gráfica obtida pelos alunos a partir dos dados coletados junto à Copel, se configurou como um signo que permitiu um entendimento a respeito do comportamento do rio, porém consideramos que foram os outros signos, não matemáticos, produzidos a partir desse, que viabilizaram aos alunos planejar e delimitar o desenvolvimento da atividade.

De qualquer modo, ressaltamos a importância de usar um conjunto de signos, matemáticos ou não, para poder pensar a respeito do problema, seja no processo de inteiração, como quando na situação referente à enchente do rio Iguaçu os alunos discutem a elaboração de uma questão e consideram uma tabela para isso, ou como quando os alunos, na busca por uma representação matemática para a situação da aposentadoria, determinam uma taxa para o aumento anual do salário mínimo, ou finalmente, quando decidem levantar dois problemas para analisar a situação em estudo como no caso da atividade do Ideb, com vistas a compreender a possibilidade das metas previstas para 2021 serem alcançadas; seja ao final da atividade, quando os alunos analisam suas soluções.

Todos os signos utilizados e/ou produzidos pelos grupos de alunos ao desenvolverem suas atividades de modelagem estão associados às suas ações cognitivas e, portanto, retratam interpretações dos alunos em relação ao tema em estudo, ao problema, aos objetos matemáticos vinculados ao problema e à resposta aceita como solução para o problema.

Se interpretações acontecem no âmbito das ações cognitivas dos alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática dando origem a signos, pode acontecer, como no caso da atividade da “aposentadoria”, que ao revisitar um signo, novas interpretações ocorram e a partir delas, outros signos sejam produzidos e deles, inclusive, decorrer o abandono daquele encaminhamento assumido, até o momento, para a atividade. Nessa atividade, por exemplo, isso aconteceu quando os alunos abandonaram a ideia de usar o triângulo de Pascal como meio para encontrar a solução para o problema e assumiram a tabela construída na planilha do *Excel*.

Essa questão das interpretações dos alunos acerca dos signos aconteceu também na atividade da “enchente” quando, na ação cognitiva *matematização*, eles produziram signos que complementaram signos anteriormente produzidos nessa mesma ação ao reconhecer que deveriam trabalhar com os períodos de cheia em separados, determinando, portanto, o encaminhamento assumido para essa atividade. Já na atividade do “Ideb”, interpretações dos alunos em relação aos signos produzidos nas ações cognitivas *síntese* e *interpretação e validação*, os levaram a rever signos resultantes da ação *matematização* e, por conseguinte, não mais considerá-los na busca por uma solução para o problema. Para tanto, os alunos precisaram confrontar as soluções obtidas a partir dos modelos polinomial de grau três que foram, inicialmente, reconhecidos como modelos representativos da situação, para abandonar esse encaminhamento e, consequentemente, assumir outro.

Ocorrem então, ao longo de uma atividade de modelagem matemática, processos de idas e vindas vinculados às ações cognitivas dos alunos, ressaltando a não linearidade das ações cognitivas. São esses processos que favorecem a produção de signos a partir de signos anteriormente utilizados e/ou produzidos, constituindo um processo de geração de signos denominado semiose. Esse processo de geração de signos é denotado por Peirce (2012) como sendo dinâmico na mente do intérprete. Nesse sentido, os signos além de se relacionar entre si, se referenciam a algo que se pretende representar e pode gerar outros signos, que por sua vez, ao se relacionar entre si, podem fazer referência a outra coisa e gerar novos signos, constituindo uma trama semiótica como apontado por Seeger (2004).

Esse fato ocorreu nas atividades de modelagem matemática discutidas nesta pesquisa quando os alunos, durante suas ações cognitivas, utilizaram e/ou produziram signos que se relacionavam entre si e se referiam ora ao tema, ora ao problema, ora aos objetos matemáticos e ora à solução obtida.

A interdependência e reciprocidade entre signos e os que eles referenciam discutida por Steinbring (2009) e abordada nesta investigação entre signo e contexto de referência, aconteceu quando o que foi considerado como signo em um momento da atividade de modelagem matemática, em um outro, foi reconhecido como contexto de referência. Esse novo contexto, por sua vez, levou os alunos envolvidos com a atividade a produzir novos signos que, em momento posterior se configuraram em um novo contexto de referência e assim por diante.

Essa alteração de signos e contextos de referência, observada em todas as atividades de modelagem matemática, provocada em decorrência das interpretações dos alunos a partir de seus conhecimentos possibilitou que diversos conceitos fossem suscitados.

Na atividade *Enchentes na cidade de União da Vitória* a tabela que contém as medições do nível do rio a cada quatro horas corresponde a um signo que representa o contexto de referência nível de água do rio Iguaçu e está conectada ao conceito padrões e regularidades. Segundo Santaella (2012), representa porque carrega aspectos do comportamento do rio. Esse signo suscita os gráficos dos períodos de cheia selecionados pelos alunos, que por sua vez, se comportam também como um signo. Porém esse signo evoca outro contexto de referência (problema em estudo), que se relaciona a outro conceito – interpolação spline – e assim por diante.

Nas demais atividades isso também ocorre quando a afirmação *eles têm uma meta para 2021,* sendo um signo conectado ao contexto de referência notas do Ideb e conceito de taxa de variação favorece a produção do gráfico que representa as notas do Ideb no período de 2005 a 2011 que corresponde a um signo conectado aos problemas em estudo e às funções polinomial de grau três, trigonométrica e exponencial, ou seja, a novos contexto de referência e conceito, respectivamente. No caso da atividade da "aposentadoria" isso se efetiva quando o cálculo relativo ao montante acumulado considerando os juros se comporta como um signo que tem correspondência com o problema em estudo (contexto de referência) e a polinômios (conceito), em um momento, e leva à declaração *Olha o que está acontecendo aqui* que é um signo conectado aos objetos matemáticos relacionados ao problema (contexto de referência) e ao triângulo de Pascal (conceito), em um outro.

Assim, das conexões entre signo e contexto de referência, que acontecem devido às características das atividades de modelagem matemática, interpretações dos alunos e dos conhecimentos por eles mobilizados, faz mudar também o conceito que vem conectado ao signo e ao contexto de referência.

Do reconhecimento de que esses três elementos – signo, contexto de referência e conceito – se modificam e ganham novas interpretações à medida que os alunos se envolvem com a atividade de modelagem matemática, construímos triângulos epistemológicos em associação com as ações cognitivas dos alunos.

A partir dos triângulos epistemológicos identificados nas ações cognitivas dos alunos, nas quais as ligações entre os elementos de cada triângulo se constroem e se modificam em conformidade com as relações que os alunos estabelecem entre seus conhecimentos, os signos que eles utilizam e/ou produzem para comunicar seus pensamentos e o contexto de referência ao qual esses signos se referem reconhecemos que os signos se complementam.

Na atividade *Enchentes na cidade de União da Vitória*, por exemplo, observamos essa complementaridade dos signos quando os dados fornecidos pela Copel, que correspondem a um signo que representa o nível de água do rio Iguaçu gera a tabela que contém as medições do nível do rio a cada quatro horas, que por sua vez, é também um signo. Esse signo modifica o signo anterior apresentando-o, por meio de gráficos de dispersão, os períodos de cheia selecionados pelos alunos. Esses gráficos se constituem como signos que leva à produção da afirmação *a gente tá estudando interpolação spline para tentar resolver o problema que a gente mesmo criou*, que também é um signo. Desse signo, os alunos obtêm outros signos – polinômios representados na forma algébrica e gráfica, que levam à identificação de um novo signo – *aproximadamente no 10º dia de algum período de cheia o rio atingirá um nível máximo*, que corresponde a um signo relacionado à solução para o problema. Por sua vez, desse signo outros signos foram produzidos no processo de socialização da atividade desenvolvida pelo Grupo 2 para os demais alunos da turma.

Inferimos então que a complementaridade dos signos está presente nos triângulos epistemológicos dos alunos dos Grupos 2, 3 e 5, apresentados na primeira seção desse capítulo e, a partir dela, evidenciamos a dinamicidade, assinalada por Steinbring (2005), dos elementos do triângulo epistemológico. Essa inferência está embasada na afirmação de Steinbring (2005, 2006), de que é na conexão entre os conhecimentos mobilizados pelos alunos e os meios pelos quais eles comunicam e expressam seus pensamentos que os elementos do triângulo vão sendo alterados.

Nas atividades de modelagem discutidas nesta investigação as alterações desses três elementos do triângulo epistemológico foram descritas por meio de uma sequência de triângulos epistemológicos como ilustrada nas Figura 27, Figura 40 e Figura 55. Cada triângulo epistemológico que compõe essas sequências apresenta-se interligado, retratando que a cada nova interpretação, novos signos são gerados, pois novas relações se estabelecem entre os três elementos do triângulo.

Pautados nas análises locais constatamos, alinhados às ideias de Steinbring (1998), que o papel desempenhado pelo signo é o que sugere alterações para o contexto de referência e para o conceito. Ao longo das atividades de modelagem, durante as ações cognitivas dos alunos, é que se definiram os papéis dos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos. Isso corrobora com Steinbring (2006) quando pontua que o papel do signo não é determinado de antemão em virtude do contexto de referência, ele é definido pelo aluno a partir do processo de geração de pensamentos e de comunicação de conhecimentos. Contudo, esse autor ressalta que os papéis dos signos também podem sofrer alterações.

Tais alterações, no entanto, são decorrentes do trânsito de signos descritores para signos criadores (STEINBRING, 2009), ou seja, quando o signo além de se comportar como algo que representa o que se pretende comunicar, devido ao seu caráter representacional, vinculado à sua função semiótica, carrega características do conhecimento do aluno sobre a coisa representada – função epistemológica do signo.

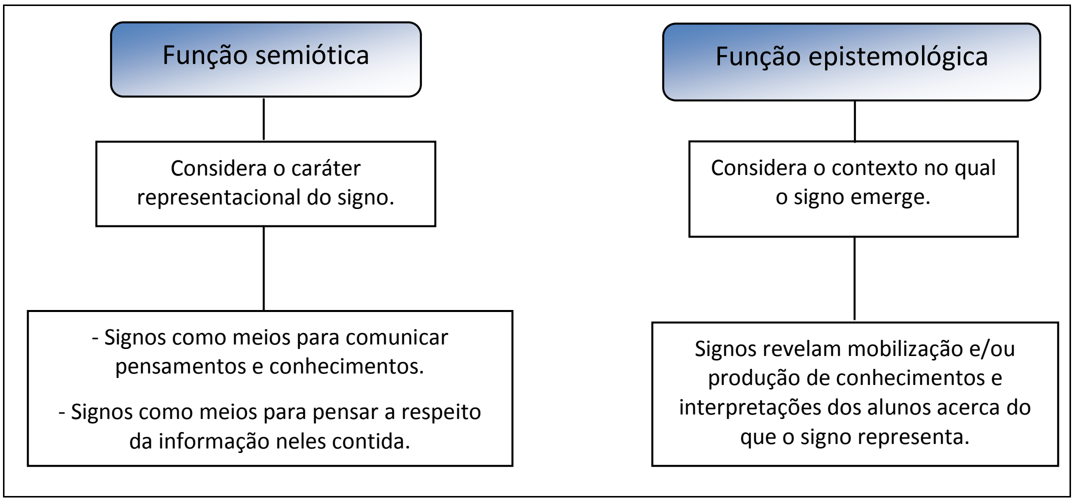
Nas atividades de modelagem matemática o papel do signo também não está previamente determinado, ao contrário, ele se define nas ações cognitivas dos alunos e está atrelado à função semiótica e à função epistemológica do signo, como sugere Steinbring (2005).

A tabela dos salários mínimos, na atividade da "aposentadoria", é um signo associado às ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação* que tem caráter representacional e está conectado, direta ou indiretamente, à contribuição ao INSS. Esse signo corresponde a um conjunto de valores relacionados aos salários mínimos a cada ano e, portanto, desempenham o papel de representar, que está atrelado à sua função semiótica. Quando os alunos passam a investigar sobre o aumento do salário, se envolvendo com o que aqueles valores da tabela significam, evidencia-se a função epistemológica desse signo, pois os alunos trazem para a discussão seus conhecimentos sobre aquilo que o signo representa.

Na atividade *O Ideb nas escolas do Paraná*, os modelos polinomial de grau três assumidos pelos alunos como modelos representativos da situação têm, inicialmente, um caráter representacional; eles representam o que a lei determina que eles representem. Revela-se, portanto, a função semiótica desses signos. Tais signos indicados pelo software, neste momento, não têm significado por eles mesmos, então, como afirma Steinbring, (2006) esse significado precisa ser produzido pelo aluno, por meio do estabelecimento de uma conexão adequada para o contexto de referência – problemas em estudo. Ainda, essa conexão não é arbitrária, ela precisa estar relacionada com os aspectos epistemológicos do objeto matemático em questão. Assim, quando os alunos passam a interpretar esses modelos fornecidos pelo *Curve* investigando se a meta prevista para 2021 seria alcançada emergem aspectos epistemológicos dos conhecimentos dos alunos. Esses aspectos advêm das características do objeto matemático função polinomial de grau três ressaltadas pelos alunos quando associam os resultados encontrados por meio desse objeto à situação analisada. Essa associação entre objeto matemático, situação e conhecimentos dos alunos acerca de ambos, indica a função epistemológica desses signos.

Sendo assim, os encaminhamentos dados pelos alunos às atividades de modelagem são pautados nas ligações entre os elementos do triângulo, que estão associadas à complementaridade dos signos, devido suas funções semiótica e epistemológica (Figura 56) e, portanto, mediados pelas dimensões comunicativa e epistemológica dos processos de geração de pensamentos e de comunicação de conhecimentos que permeiam as ações cognitivas dos alunos quando envolvidos com a busca por uma solução para o problema evidenciado na situação inicial.

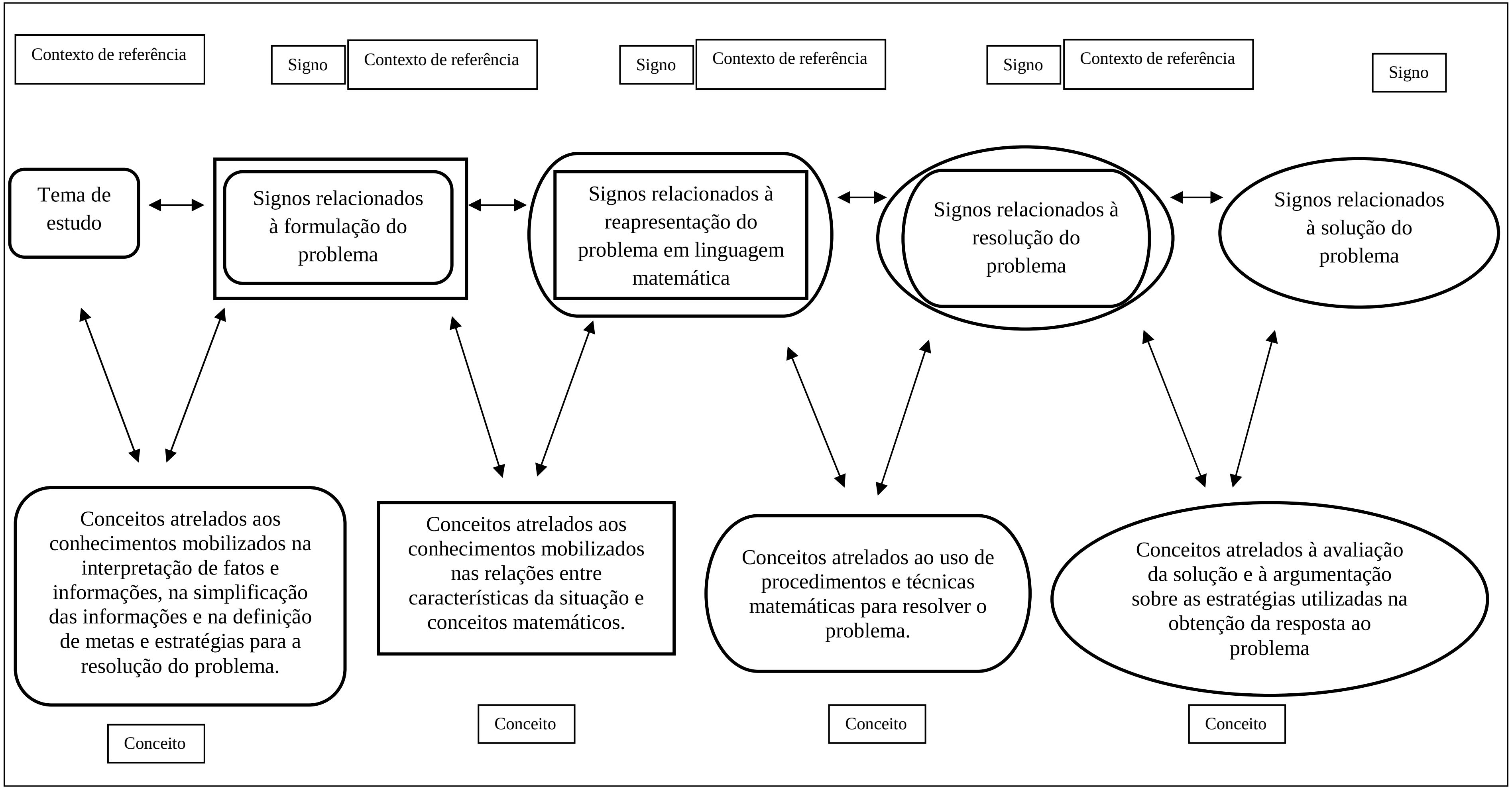
Figura 56 – As funções dos signos em atividades de modelagem matemática



Fonte: A autora.

Por meio das reflexões realizadas a partir do desenvolvimento desta pesquisa, para além das considerações supracitadas, identificamos um modelo que considera as conexões que podem ser estabelecidas entre contexto de referência, signo e conceito ao longo de uma atividade de modelagem, a partir dos papéis desempenhados pelos signos atrelados às suas funções semiótica e epistemológica (Figura 57). Além dessa figura conter o aspecto dinâmico enfatizado por Steinbring (2005), o conceito de semiose proposto por Peirce (2012) também pode ser observado.

Figura 57 – Triângulos epistemológicos ao longo de uma atividade de modelagem

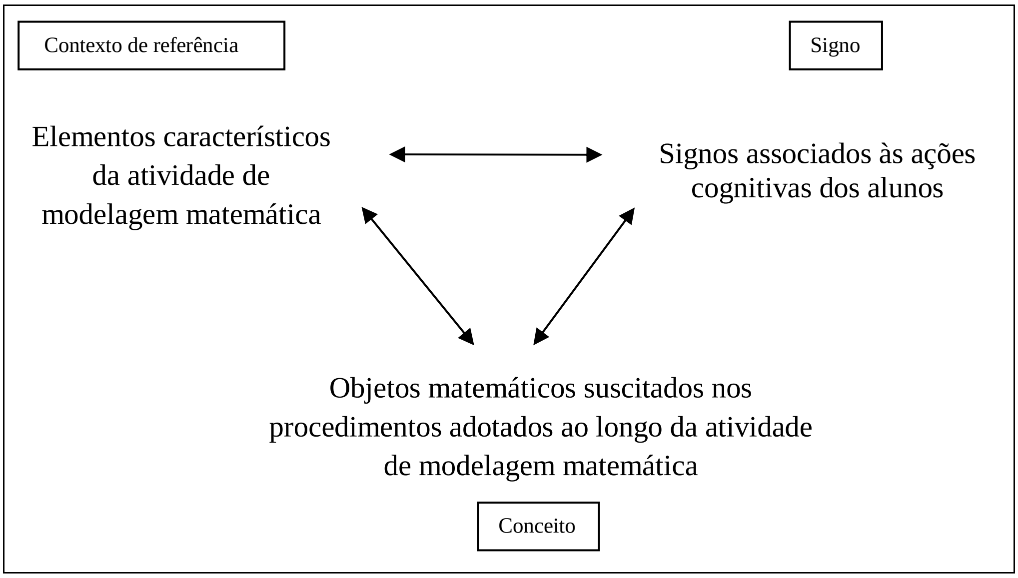


Fonte: A autora.

A Figura 57 sinaliza que das ações cognitivas *compreensão da situação* e *estruturação da situação* são produzidos signos relacionados à formulação do problema, da ação cognitiva *matematização* signos se relacionam à reapresentação do problema em linguagem matemática, da ação cognitiva *síntese* tem-se signos conectados ao problema e das ações cognitivas *interpretação e validação* e *comunicação e argumentação* são produzidos signos atrelados à solução do problema. Esta constatação elucida o que Almeida e Silva (2012) asseveram acerca das ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática.

Ademais, explicitamos que o contexto de referência de cada triângulo epistemológico que compõe a Figura 57, está relacionado aos objetos matemáticos característicos das atividades de modelagem matemática e que o conceito nessa sequência de triângulos epistemológicos associa-se indiretamente aos procedimentos requeridos em atividades de modelagem matemática e diretamente com os objetos matemáticos suscitados nesses procedimentos. Isso leva-nos à construção de um triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática (Figura 58).

Figura 58 – Triângulo epistemológico no contexto da modelagem matemática



Fonte: A autora.

Neste triângulo, o contexto de referência fica associado aos elementos característicos da atividade de modelagem, o signo refere-se aos signos associados às ações cognitivas dos alunos no trânsito da situação inicial (problemática) para uma situação final (solução para a situação inicial) e ao conceito, relacionam-se os objetos matemáticos suscitados nos procedimentos adotados pelos alunos ao longo da atividade de modelagem. Ainda, este triângulo, assim como o triângulo epistemológico proposto por Steinbring (2006) apresenta caráter dinâmico, pois à medida que os alunos se envolvem com a atividade de modelagem, os signos utilizados e/ou produzidos por eles se modificam e ganham novas interpretações, assim como o contexto de referência e o conceito. Isso sugere que os elementos deste triângulo não podem ser vistos separadamente, pois eles integram-se um ao outro.

Inferimos, portanto, que a complementaridade dos signos, implícita nos triângulos epistemológicos, decorre do papel desses signos nas ações cognitivas dos alunos, que atrelados às funções semiótica e epistemológica dos signos favorecem que o triângulo assuma um caráter dinâmico. Sendo assim, são as funções dos signos que possibilitam que os alunos modifiquem e atribuam novas interpretações aos signos utilizados e/ou produzidos por eles ao longo da atividade de modelagem, a partir de relações que eles estabelecem, durante suas ações cognitivas, entre signo, contexto de referência e conceito (Figura 56). Ou seja, é a complementaridade dos signos elucidados na dinamicidade dos triângulos epistemológicos, devido às funções semiótica e epistemológica dos signos que conduzem os grupos de alunos a assumir esse ou aquele encaminhamento para a atividade de modelagem na qual estão envolvidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As argumentações apresentadas ao longo desta investigação, cujo objetivo consistia em investigar como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática se relaciona com as funções semiótica e epistemológica dos signos, orientaram nossas análises e discussões e, nesse momento, possibilitam uma visão holística do estudo desenvolvido, em um formato de considerações.

Com vistas a obter dados que permitissem analisar aspectos relativos aos signos em atividades de modelagem matemática, delimitamos que este estudo se realizaria em uma turma de 4º ano de um curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Considerando que a ementa dessa disciplina contempla um momento no qual os alunos, em grupo, desenvolvem atividades de modelagem matemática a partir de temas propostos por eles, acompanhamos o envolvimento desses grupos de alunos com suas atividades de modelagem. A coleta de dados, entretanto, aconteceu no segundo semestre do ano de 2012.

As atividades de modelagem matemática desenvolvidas, cada uma, por um dos cinco grupos formados na turma, bem como os registros escritos e a transcrição dos áudios e dos vídeos das discussões relativas ao desenvolvimento dessas atividades e notas da pesquisadora constituíram o *corpus* da pesquisa, sendo tomados como fonte para algumas reflexões.

Destacamos que o uso da Análise de Conteúdo na condução das análises dos dados foi relevante no sentido de viabilizar, a partir do que sugere essa teoria de análise, um olhar atento e cuidadoso para os dados. Realizar as análises pautados nessa teoria nos fez compreender os dados em suas entre linhas e em sua complexidade.

Dentre os grupos participantes desta investigação, três deles, Grupo 2 (G2), Grupo 3 (G3) e Grupo 5 (G5) figuram nas análises locais e global. Contudo, encaminhamentos assumidos por G1 e G4 em suas atividades também são considerados nas inferências realizadas na análise global.

Interessados em apresentar reflexões acerca da questão que orientou esta investigação, buscamos identificar os signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos quando envolvidos com atividades de modelagem matemática, bem como os papéis desses signos nos encaminhamentos dados pelos alunos no desenvolvimento de suas atividades. Para tanto, assumimos que ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem os alunos utilizam e/ou produzem signos associados às suas ações cognitivas.

A noção de que o signo é algo que está no lugar de outra coisa (PEIRCE, 2012) e que a ação do signo somente se completa em uma trama semiótica, ou seja, em um processo de geração de signos, reconhecido como semiose, no âmbito desta investigação, está alinhada ao reconhecimento de que os signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos sempre se referem a algo que eles querem comunicar ou representar e de que o processo de geração de signos é o que leva os alunos a transitar da situação em estudo para uma solução para o problema.

Além dessas considerações de Charles Sanders Peirce acerca do signo, a assertiva de Steinbring (2006) de que o signo tem duas funções, uma semiótica – o signo representa algo – e uma epistemológica – o signo indica conhecimento sobre o que ele representa, se revela nas dimensões comunicativa e epistemológica dos processos de geração de pensamento e de comunicação de conhecimento que permeiam as ações cognitivas dos alunos quando eles utilizam e/ou produzem signos como algo que representa outra coisa e quando seus conhecimentos sobre aquilo que o signo representa ficam evidentes. Na primeira relação, signo representando algo, os signos se referenciam a um objeto, assumido nessa pesquisa como contexto de referência, e a ele estão conectados diretamente. Nessa relação, o signo tem uma função semiótica. Quando conhecimentos dos alunos são manifestados de forma associada ao signo, ou seja, ao que ele representa, a função do signo subjacente é a epistemológica.

Constatamos que nas atividades de modelagem matemática que orientaram nossas análises, signos foram manifestados em diversas formas (fala dos alunos, representações gráficas, representações algébricas, informações coletadas, entre outros) e a eles atribuímos os encaminhamentos assumidos pelos alunos e, de modo geral, à obtenção da solução para o problema em estudo. Entretanto, tal solução não é entendida no contexto desta pesquisa como sendo única, mas precisa ser uma solução aceita e validada pelos alunos que desenvolvem a atividade.

Os resultados desta investigação sugerem que as intervenções do professor e a dinâmica dos alunos no grupo podem favorecer que signos com características de descritores assumam conotações de criadores à medida que haja familiarização dos alunos com a situação em foco, com o problema identificado para estudo, com os objetos matemáticos utilizados na busca por uma solução para o problema e com a resposta reconhecida como solução para ele.

Da relação entre os papéis dos signos e nos encaminhamentos dados pelos alunos ao desenvolvimento de suas atividades identificamos que a articulação entre os signos (descritores e criadores) se dá quando os alunos mobilizam seus conhecimentos em relação à situação, aos objetos matemáticos e a ambos de forma articulada. Dessa mobilização de conhecimentos que acontece em associação com as ações cognitivas dos alunos, os papéis dos signos são determinados, culminando nas escolhas para essa ou aquela estratégia de encaminhamento dada à atividade de modelagem matemática. A cada escolha, novos signos são produzidos em conexão com o contexto de referência. A interdependência e reciprocidade entre contexto de referência e signo favorece, para além da produção de novos signos, a complementaridade entre eles. Ademais, amplia-se o conjunto de signos que conduzem ao desenvolvimento da atividade e, consequentemente, à resolução do problema.

A partir das análises que realizamos, observamos que conexões entre signo e contexto de referência aconteceram ao longo de todas as atividades de modelagem matemática, todavia, sempre suscitando diferentes conceitos. Tais conexões foram ilustradas nos triângulos epistemológicos que construímos no contexto das análises das atividades de modelagem descritas no Capítulo 4 e que estão relacionados às ações cognitivas dos alunos envolvidos com suas atividades.

Como as conexões entre os elementos de cada um dos triângulos epistemológicos identificados revelam interpretações dos alunos acerca dos conhecimentos por eles mobilizados, inferimos que as funções semiótica e epistemológica dos signos são as responsáveis pela complementaridade dos signos que os alunos utilizam e/ou produzem e, consequentemente, pela dinamicidade dos elementos desses triângulos. Isso porque se por um lado os signos relacionam-se a outra coisa, devido a seu caráter representacional, por outro, carregam conhecimentos dos alunos sobre aquilo que o signo representa.

De modo geral, essa complementaridade dos signos, devido suas funções semiótica e epistemológica, nos leva a reconhecer que a cada encaminhamento assumido pelos alunos podem-se mudar os contextos de referência e os conceitos, dando ao triângulo epistemológico um caráter dinâmico.

Signos de cada ação cognitiva estão associados a diferentes contextos de referências e, como que em um contexto de uma trama, dão origem a outros signos que, atrelados a outra ação cognitiva se relacionam a outro contexto de referência que geram outros signos e assim por diante, sempre em conexão com o conceito suscitado em cada ação cognitiva dos alunos. Na dinamicidade do triângulo epistemológico, signos se modificam e ganham novas interpretações, devido suas funções semiótica e epistemológica.

Conforme mostram as análises, as opções dos alunos são, ao longo da atividade de modelagem matemática, regidas pelas funções dos signos. Ou seja, estão atreladas aos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos para comunicar seus pensamentos e conhecimentos, da situação ou do objeto matemático, para os seus pares e para o professor e, ao conhecimento que os alunos têm sobre os signos que eles fazem uso.

Por meio das reflexões realizadas a partir do desenvolvimento desta pesquisa e do reconhecimento da dinamicidade implícita nos triângulos epistemológicos associados às ações cognitivas dos alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática inferimos que, em decorrência das funções dos signos, os alunos ratificam, mudam ou redirecionam os encaminhamentos dados por eles às atividades de modelagem.

É pertinente ressaltar que no desenvolvimento desta investigação os alunos tiveram autonomia tanto em relação ao problema a investigar como aos objetos matemáticos utilizados na intenção de encontrar uma solução para tal problema. Essa autonomia dos alunos no desenvolvimento de suas atividades é refletida, por exemplo, quando eles delimitam que aspectos da situação considerar, elaboram as hipóteses, selecionam as variáveis, entre outras.

Embora reconheçamos a importância dos alunos serem autônomos nas atividades que se envolvem, nesta investigação, a questão da autonomia aliada às sutis intervenções do professor e da pesquisadora, privilegiando que os alunos desenvolvessem suas atividades segundo suas intenções, gerou algumas inquietações por parte da pesquisadora no sentido de que os alunos pouco se utilizaram de conhecimentos discutidos no âmbito da graduação em Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de suas atividades de modelagem matemática. Na maioria das atividades discutidas, os alunos demonstraram preferência em utilizar conceitos matemáticos vinculados ao Ensino Fundamental ou Médio, justificando em entrevistas que eles poderiam "*usar essas atividades em suas salas de aulas, para ensinar matemática para os alunos ou para mostrar aplicações da matemática*" (G5-C em entrevista).

A caracterização de um triângulo epistemológico no contexto da Modelagem Matemática (Figura 58) é decorrente de um diálogo da Semiótica Peirceana com Falk Seeger e Heinz Steinbring. É o conceito de *trama semiótica* proposto por Seeger (2004) e que contempla o processo de geração de signos – semiose – denotado por Peirce (2012) e o caráter dinâmico do triângulo epistemológico assinalado por Steinbring (2005), presentes nos triângulos epistemológicos ilustrados de forma interligados na Figura 57, que possibilitam tal caracterização.

Considerando que, de modo particular, nosso olhar nesta investigação incidiu sobre as funções dos signos em atividades de modelagem matemática, pesquisas futuras poderiam atentar-se para as interações entre os alunos na dinâmica de um grupo, ou entre professor e alunos, com vista a evidenciar aspectos relativos à construção de conhecimento subjacente à dinamicidade dos elementos do triângulo epistemológico. Uma análise acerca do papel dos signos matemáticos e não matemáticos utilizados e/ou produzidos pelos alunos no âmbito das atividades de modelagem matemática que eles desenvolvem também pode figurar o desenvolvimento de outras pesquisas.

Em suma, acreditamos que as reflexões acerca da complementaridade dos signos, decorrente de suas funções e implícitas nos triângulos epistemológicos, colaboram com as discussões concernentes à representação dos objetos matemáticos e a atribuição de significado para esses objetos no âmbito das atividades de modelagem matemática. Além disso, as reflexões advindas desta investigação, alinhadas às práticas de sala de aula, colaboram com questões relativas às ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática, promovem um pensar acerca das articulações entre representação e conhecimento viabilizadas por meio dos signos associados a tais ações e sinalizam implicações para a aprendizagem dos alunos. De modo geral, as reflexões ora apresentadas também podem influenciar o modo como o professor conduz atividades de modelagem matemática na sala de aula, pois sugerem um olhar atento às atitudes e às produções dos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetikè.* FE – Unicamp. Campinas, v.18, número temático, pp. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (orgs.) Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, pp. 253-268, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, ano 17, n.22, pp. 19-35. Rio Claro SP: SBEM, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: algumas relações. *Ciência & Educação.* V.18, n.3, pp. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática. *Revista de Modelagem na Educação Matemática*, v. 1, nº 1, pp. 28-42, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. *Reiec – Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, v. 6, nº 1, julho, pp. 1-10, 2011.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica.* São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A. Parte II – O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.* São Paulo: Pioneira, 1998.

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. *Anais...* Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. *Anais...* Piracicaba: UNIMEO, 2003.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo.* Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. 1ª reimp. da 1ª edição. São Paulo: Edições 70, 2011.

BASSANEZI, R. C. Sobre a Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. *Anais...* Piracicaba: UNIMEO, 2003.

BATISTA, M. F. B. de M. A semiótica: caminhar histórico e perspectivas. *Revista de Letras.* nº 25, v. 1/2 jan/dez, pp. 60-68, 2003.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. *Anais...* Petrópolis – RJ, CD-ROM, 2012.

BERGER, M. A semiotic view of mathematical activity with a Computer Algebra System. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa,* Distrito Federal, México, v. 13, n. 2, p. 159-186, 2010.

BLUM, W; BORROMEO FERRI, R. Mathematical Modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application,* v. 1, nº 1, pp. 45-58, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* 336 p. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education,* Karlsruhe, v. 31, pp. 99-118, 2010.

BORROMEO FERRI, R. Personal experiences and extra-mathematical knowledge as na influence factor on modelling routes of pupils. CERME – CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5, Larnaca. *Proceedings…* Larnaca: University of Cyprius. pp. 2080-2089, 2007.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria* – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, V. 2, n. 2, pp. 33-54, jul. 2009.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. *Educação Matemática Pesquisa.* São Paulo. v. 9, n.2, pp. 181-203, 2007.

CUNHA, A. G. da. *Dicionário etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

D'AMBROSIO, U. História, Etnomatemática, Educação, e Modelagem. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: FURB, 2003. 1 CD-ROM.

D'AMORE, B. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa.* Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 177-195, 2006.

DIAS, M. R. *Uma experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores*. 2005. Dissertação (Mestrado) – Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

DUVAL, R. Graphiques et equations: L'Articullation de deux registres. In: DIDACTIQUE ET SCIENCES COGNITIVES. IREM, Strasbourg. *Annales*... p. 235-253, 1988.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, pp. 11-34, 2003.

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1. ed. v. 1. São Paulo: PROEM, 2011.

ECO, U. *Semiótica e Filosofia da Linguagem*. Coleção: Teoria das Artes e Literatura. Stória Editores, 2001.

FARRUGIA, M. T. The use a semiotic model to interpret meanings for *multiplication* and *division.* CERME – CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5, *Proceedings…* Lanarca. University of Cyprus. pp. 1200-1209, 2007.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Aplication.* v. 38, n. 5, pp. 3-16, 2012.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3)*, pp. 237-284, 2002.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar:* como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

HALLIDAY, M. A. K. *Language as Social Semiotic: the social interpretation of language and meaning.* Edward Arnold, London, 1978.

HOFFMANN, M. H. G. What is a "semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics, 61.* Springer, pp. 279-291, 2006.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 3, pp. 302-310, 2006.

KEHLE, P.; LESTER F. K. A semiotic look at modeling behavior. In: LESH, Richard; DOERR, Hellen (Eds.). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 97-122, 2003.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Working group: models and modeling. In: PME-NA, 2006, Mérida. *Proceedings…* Mérida, pp. 1-4, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.* EDU, São Paulo, 1986.

MANECHINE, S. R. S.; CALDEIRA, A. M. A. Construção de conceitos matemáticos na Educação Básica em uma abordagem Peirceana. *Bolema. Rio Claro*, v. 23, n. 37, p. 887-904, dez. 2010.

MEYER, J. F. da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. *Modelagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MORGAN, C. *The linguistic construction of social identities in mathematical communities: a Critical Linguistic Approach to Mathematical Text*. In: *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From thinking to interpreting to knowing.* Legas, Ottawa, pp. 109-128, 2002.

MORGAN, C. What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, Springer, 61, pp. 219-245, 2006.

NÖTH, W. *Panorama da semiótica*: de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P. de. *Modelagem Matemática e as tensões nos discursos dos professores*. Tese (Doutorado). Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia, Bahia, 119 f. 2010.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*. Springner. v. 61, pp. 11-38, 2006.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. In: *PME International Conference*, 25, University of Utrecht, The Netherlands, 2001.

PEIRCE, C. S. *Escritos coligidos*. Seleção de Armando Mora D'Oliveira, Tradução de Armando Mora D'Oliveira e Sérgio Pomerangblum. 4. ed. São Paulo: Nova Cultural, 1989. (Os Pensadores).

PEIRCE, C. S. *Semiótica e Filosofia*: textos escolhidos. Tradução de Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg. São Paulo: Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. *Semiótica*. Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 1. reimpr. da 4. ed. de 2010. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2012. (Estudos)

PRESMEG, N. C. A triadic nested lens for viewing teachers' representations of semiotic chaining. *Representations and mathematics visualization*. Cinvestav – IPN. Editado por Fernando Hitt. pp. 263-276, 2002.

PRESMEG, N. C. Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 595-610, 1992.

PRESMEG, N. C. Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), pp. 163-182, 2006.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*. número especial, pp.103-129, 2006.

RONNING, F. Epistemological and semiotic issues related to the concepto f symmetry. CERME – CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 7, *Proceedings…* Poland. University of Rzeszów. pp. 1-10, 2011.

ROSA, C. C. da. *Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) –

Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ROSA, M. V. F. P. C.; ARNOLDI, M. A. G. C. *A entrevista na Pesquisa Qualitativa – mecanismos para validação dos resultados*. Belo Horizonte, Autêntica, 2006.

SÁENZ-LUDLOW, A. Learning mathematics: increasing the value of initial mathematical wealth. *RELIME – Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa. Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa,* Distrito Federal, México, número especial, pp. 225-245, 2006.

SÁENZ-LUDLOW, A. Sign as a process of representation: a peircean perspective. *Representations and mathematics visualization.* Cinvestav – IPN. Editado por Fernando Hitt. pp. 277-296, 2002.

SANTAELLA, L. *A teoria geral dos signos*: como as linguagens significam as coisas. 4. reimpr. da 1. ed. de 2000. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

SANTAELLA, L. *Matrizes da linguagem e pensamento*: sonora visual verbal: aplicações na hipermídia. 3. ed. São Paulo: Iluminuras: FAPESP, 2005.

SANTAELLA, L. *O que é Semiótica*. 27. reimpr. da 1. ed. v. 103. São Paulo: Brasiliense, 1999. (Coleção Primeiros Passos).

SANTAELLA, L. *Semiótica aplicada.* São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTAELLA, L.; NÖTH, W. *Imagem: cognição semiótica, mídia*. São Paulo: Iluminuras, 1998.

SEEGER, F. Beyond the Dichotomies – Semiotics in Mathematics Education Research. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 36, n. 6, pp. 206-216, 2004.

SILVA, K. A. P. da. *Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática e Semiótica*: implicações para a atribuição de significado. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P. da. *Modelagem Matemática e Semiótica*: algumas relações. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Um olhar semiótico sobre a Modelagem Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. (orgs.) *Modelagem Matemática em foco.* (no prelo).

SKOVSMOSE, O. *Desafios da Educação Matemática Crítica.* São Paulo: Papirus. 2008.

SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling conceptions revisited. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) – The International Journal on Mathematics Education*, Karlsruhe, v. 38, n. 3, pp. 247-254, 2006.

STEINBRING, H. Basic Characteristics of Algebraic Thinking: Signs as Descriptors vs. Signs as Creators. CERME – CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 6, *Proceedings…* Institut Français de L'Éducation. Lyon: France. LXXXII – LXXXVI, 2009.

STEINBRING, H. Elements of epistemological knowledge for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education.* 1(2), pp. 157-189, 1998.

STEINBRING, H. Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics.* 32(1), pp. 49-92, 1997.

STEINBRING, H. How do Mathematical Symbols Acquire their Meaning? – The Methodology of the Epistemology-based Interaction Research. In: Hans-Georg Weigand, Neville Neill, Andrea Peter-Koop, Kristina Reiss, Günter Törner, Bernd Wollring (Eds.): Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics, Bern, 1999. Franzbecker: Hildesheim, S. pp. 113-123, 2002.

STEINBRING, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective.* Mathematics Education Library, vol. 38, New York: Springer, 2005.

STEINBRING, H. What makes a sign a *Mathematical Sign*?: an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics. Springer*, v. 61, pp. 133-162, 2006.

VERONEZ, M. R. D.; ALMEIDA, L. M. W. A objetivação do conhecimento em atividades de Modelagem Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. *Anais*... Petrópolis – RJ, CD-ROM, 2012.

VERONEZ, M. R. D. Um olhar sobre a formulação de problemas em Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5. *Anais*... Ouro Preto – MG, CD-ROM, 2007.

VERTUAN, R. E. *Práticas de Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem Matemática*. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

WILLIAMS, J.; WAKE, G. Metaphors and models in translation between college and workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64, p. 345-371, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE AUTORIZAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Considerando os esclarecimentos acerca do desenvolvimento da tese de doutorado de Michele Regiane Dias Veronez, professora lotada no Colegiado de Matemática da UNESPAR – Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória, regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, sob o número de matrícula 201012350158, autorizo a mesma a utilizar, parcial ou integralmente, respostas a questionários, gravações em áudio ou vídeo de minhas falas ou imagem, minhas anotações, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área.

Referente à condição de anonimato, pode-se referir a mim apenas como participante da pesquisa.

União da Vitória, 26 de julho de 2012.

NOME DO ALUNO:____

RG:____

ASS.:____

____

Michele Regiane Dias Veronez

APÊNDICE B – ROTEIRO DE ENTREVISTA

QUESTÕES QUE ORIENTARAM A ENTREVISTA REALIZADA COM OS GRUPOS DE ALUNOS

- Qual foi o tema de estudo?
- Que problemas levantaram a partir desse tema? Por que escolheram esse problema para resolver?
- Que atitudes vocês tiveram, inicialmente, para buscar uma solução para o problema?
- Como foi transitar dos dados (informações coletadas) para a matemática (parte matemática)? Comente sobre as tentativas de vocês.
- Como foi conduzida a resolução matemática da situação em estudo?
- Quais informações o grupo precisou para responder ao problema proposto?
- Todos os encaminhamentos que vocês deram contribuíram para a solução obtida?
- Como foi o desenvolvimento da atividade até a obtenção de uma solução para o problema?
- A solução obtida por vocês foi considerada válida? Por quê?

APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO GRUPO 1

ATIVIDADE DO G1: CONTROLE DA ALIMENTAÇÃO NO PERÍODO NOTURNO

O Grupo 1 tinha por interesse analisar quais opções de alimentos são mais adequadas para uma alimentação noturna, considerando os cardápios disponíveis nas dependências das lanchonetes da universidade?

Visando encontrar resposta para esse problema eles selecionaram os lanches mais consumidos nas lanchonetes (x-salada, cachorro-quente, pastel de frango assado e pastel de frango frito) e analisaram seus valores nutricionais pautados em alguns parâmetros encontrados na literatura, conforme tabela a seguir:

	Carboidratos	Proteínas	Gorduras totais	Fibras	Sódio
Pão de hamburger	46	4,2	1,5	0,9	0,402
Hamburger	30,51	12,32	11,82	0	0,387
Queijo (fatia)	1,09	7,36	5,68	0	0,15
Presunto (fatia)	2,14	9,3	4,82	0,7	0,73
Alface (folha)	0,15	0,04	0,01	0,1	0
Tomate (rodela)	0,59	0,13	0,03	0,2	0,001
Maionese (sachê)	0,53	0	2,33	0	0,074
Cachorro-quente (1 salsicha)	26,74	10	28,12	1,94	0,847
Pastel de frango assado	13	3	2,64	0,3	0,393
Pastel de frango frito	13	3	6,03	0,3	0,393

No caso do x-salada os alunos tiveram que considerar seus ingredientes para encontrar seu valor nutricional. Para isso fizeram:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccc} \text{pão de hambúrger} & \text{queijo (fatia)} & \text{hambúrger} & \text{presunto (fatia)} & \text{folha de alface} & \text{rodela de tomate} & \text{sachê de maionese} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{carboidratos} \\ \text{proteínas} \\ \text{gorduras totais} \\ \text{fibras} \\ \text{sódio} \end{array} & \begin{pmatrix} 46 & 1{,}09 & 30{,}51 & 2{,}14 & 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}53 \\ 4{,}2 & 7{,}36 & 12{,}32 & 9{,}3 & 0{,}04 & 0{,}13 & 0 \\ 1{,}5 & 5{,}68 & 11{,}82 & 4{,}82 & 0{,}01 & 0{,}03 & 2{,}33 \\ 0{,}9 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}402 & 0{,}15 & 0{,}387 & 0{,}73 & 0 & 0{,}001 & 0{,}074 \end{pmatrix} \end{array} \text{x} \begin{array}{c} \text{Quantidades} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Nutrientes totais} \\ \begin{pmatrix} 81{,}69 \\ 33{,}39 \\ 28{,}53 \\ 2 \\ 1{,}818 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como o interesse dos alunos do Grupo 1 estava em torno de uma alimentação saudável, eles consideraram as informações do quadro e da tabela a seguir.

Percentual para o consumo de nutrientes (estes percentuais consideram uma dieta de 2.000 Kcal):

- de 55 a 75% das calorias consumidas devem ser decorrentes do consumo de carboidratos,
- de 10 a 15% provenientes de proteínas,
- de 15 a 30% de gorduras,
- consumo de 25 g de fibras e
- menos de 2,4 g de sódio.

	Calorias equivalentes
Carboidratos	4
Proteínas	4
Gorduras totais	9
Fibras	0
Sódio	0

De posse das informações da tabela acima, eles encontraram o valor equivalente de carboidratos, proteínas, gorduras totais, fibras e sódio de cada um dos alimentos considerados.

pastel assado de frango — matriz calorias — composição das calorias do pastel assado de frango

$$\begin{array}{r}\text{carboidratos}\\\text{proteínas}\\\text{gorduras totais}\\\text{fibras}\\\text{sódio}\end{array}\begin{pmatrix}13\\3\\2{,}64\\0{,}3\\0{,}393\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 4 & 9 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52\\12\\23{,}76\\0\\0\end{pmatrix}$$

pastel frito de frango — matriz calorias — composição das calorias do pastel frito de frango

$$\begin{array}{r}\text{carboidratos}\\\text{proteínas}\\\text{gorduras totais}\\\text{fibras}\\\text{sódio}\end{array}\begin{pmatrix}13\\3\\6{,}03\\0{,}3\\0{,}393\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 4 & 9 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}52\\12\\54{,}27\\0\\0\end{pmatrix}$$

cachorro quente — matriz calorias — composição das calorias do cachorro quente

$$\begin{array}{r}\text{carboidratos}\\\text{proteínas}\\\text{gorduras totais}\\\text{fibras}\\\text{sódio}\end{array}\begin{pmatrix}26{,}74\\10\\28{,}12\\1{,}94\\0{,}847\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 4 & 9 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}106{,}96\\40\\253{,}08\\0\\0\end{pmatrix}$$

X-salada — matriz calorias — composição das calorias do X-salada

$$\begin{array}{r}\text{carboidratos}\\\text{proteínas}\\\text{gorduras totais}\\\text{fibras}\\\text{sódio}\end{array}\begin{pmatrix}81{,}69\\33{,}39\\28{,}53\\2\\1{,}818\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 4 & 9 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}326{,}76\\133{,}56\\256{,}77\\0\\0\end{pmatrix}$$

Levando em conta que a ingestão diária de uma pessoa pode ser de 2000 calorias, eles calcularam quantas calorias têm cada um dos alimentos analisados.

$$\underset{\text{matriz calorias}}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \times \overset{\text{pastel assado de frango}}{\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2{,}64 \\ 0{,}3 \\ 0{,}393 \end{pmatrix}} = 87{,}76 \text{ kcal}$$

$$\underset{\text{matriz calorias}}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \times \overset{\text{pastel frito de frango}}{\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 6{,}03 \\ 0{,}3 \\ 0{,}393 \end{pmatrix}} = 118{,}27 \text{ kcal}$$

$$\underset{\text{matriz calorias}}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \times \overset{\text{cachorro quente}}{\begin{pmatrix} 26{,}74 \\ 10 \\ 28{,}12 \\ 1{,}94 \\ 0{,}847 \end{pmatrix}} = 400{,}04 \text{ kcal}$$

$$\underset{\text{matriz calorias}}{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \times \overset{\text{X-salada}}{\begin{pmatrix} 81{,}69 \\ 33{,}39 \\ 28{,}53 \\ 2 \\ 1{,}818 \end{pmatrix}} = 717{,}09 \text{ kcal}$$

A Tabela 1, constuída pelos alunos do Grupo 1, sintetiza os resultados obtidos.

Tabela 1: Composição das calorias dos alimentos selecionados (gramas)

nutrientes	**pastel de frango assado**	**pastel de frango frito**	**cachorro quente**	**X-salada**
carboidratos	52,00	52,00	106,96	326,76
proteínas	12,00	12,00	40,00	133,56
gorduras totais	23,76	54,27	253,08	256,77
Calorias totais	**87,76**	**118,27**	**400,04**	**717,09**

Na intenção de responder ao problema em estudo os alunos do Grupo 1 calcularam, em porcentagem, as calorias dos alimentos considerados (Tabela 2).

Tabela 2: Composição das calorias dos alimentos selecionados (em % sobre as calorias totais)				
nutrientes	**pastel de frango assado**	**pastel de frango frito**	**cachorro quente**	**X-salada**
carboidratos	59,25 %	43,97 %	26,74 %	45,57 %
proteínas	13,67 %	10,15 %	10,00 %	18,63 %
gorduras totais	27,07 %	45,89 %	63,26 %	35,81 %

Na resposta para o problema enunciada no quadro a seguir eles assumiram as informações a respeito do percentual para o consumo de nutrientes.

> Analisando os alimentos considerados, chegamos às seguintes considerações:
>
> - com relação aos carboidratos, somente o pastel de frango atende às proporções diárias, ou seja está entre 55 e 75%;
> - com relação às proteínas, todos os alimentos estão dentro dos percentuais recomendados;
> - somente o pastel de frango assado atende o percentual de gordura indicado;
> - todos os alimentos analisados são pobres em fibras.
>
> Desta forma, concluímos que o pastel de frango assado é a opção mais adequada para uma alimentação saudável, lembrando que é necessário suprir a carência de fibras com outros alimentos.

No momento de socialização da atividade os alunos comentaram sobre as limitações da atividade por eles desenvolvidas, ressaltando que embora consideraram uma dieta de 2000 calorias diárias compreendem que esse valor pode variar muito de uma pessoa para outra, principalmente se houver prática de exercícios físicos envolvida.

Também enfatizaram que, apesar da atividade ser bastante simples, conseguiram refletir sobre diversos aspectos e que isso os motivou a se envolver com atividades de modelagem matemática em outros momentos.

APÊNDICE D – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO GRUPO 4

ATIVIDADE DO G4: ATENDIMENTO AOS HIPERTENSOS NA CIDADE DE BITURUNA

Para o desenvolvimento dessa atividade de modelagem matemática, que surgiu do interesse em investigar quando a Fundação Municipal de Saúde da cidade de Bituruna conseguiria atender todos os hipertensos dessa cidade, os alunos assumiram como hipótese que 30% da população total é hipertensa. Essa hipótese foi pautada na informação de que a Sociedade Brasileira de Hipertensos (SHB) estima que 30% da população adulta é hipertensa.

A tabela a seguir apresenta alguns dados referentes à população de Bituruna de 2003 a 2011 e a quantidade de hipertensos atendidos nesses anos.

Tabela : Dados da População Biturunense

Ano	População Total	Hipertensos (HA)
2003	13770	633
2004	14457	662
2005	14995	760
2006	16421	906
2007	16996	1137
2008	17034	1247
2009	16644	1319
2010	15110	1472
2011	16440	1796

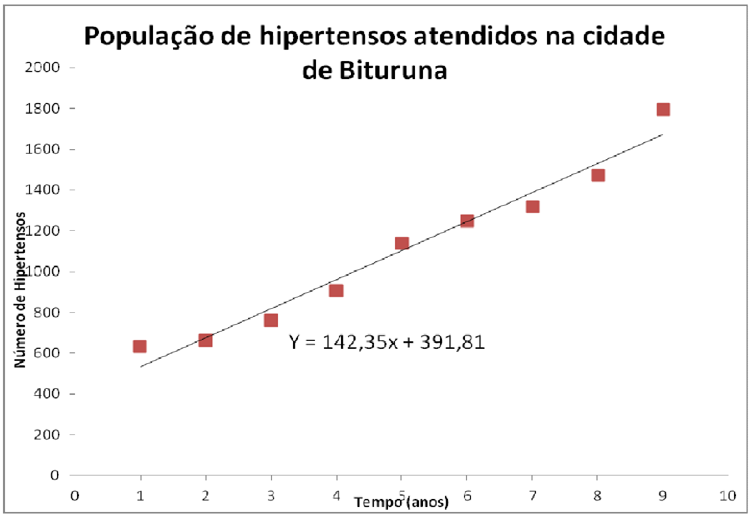
Frente a essas informações, os alunos calcularam o percentual de hipertensos atendidos em cada ano pela FMS (ver tabela a seguir) e observaram que embora o número de hipertensos cadastrados esteja aumentando, o objetivo de atender 100% da população hipertensa está longe de ser atingido.

Tabela : Dados da População Biturunense

Ano	População Total	Hipertensos (HA)	Percentual de Hipertensos (%)
2003	13770	633	4,60%
2004	14457	662	4,58%
2005	14995	760	5,07%
2006	16421	906	5,52%
2007	16996	1137	6,69%
2008	17034	1247	7,32%
2009	16644	1319	7,92%
2010	15110	1472	9,74%
2011	16440	1796	10,92%

Entendendo que o percentual da população de hipertensos era limitado (30% da população total), os alunos buscaram um modelo que descrevesse esse comportamento. Porém, embora indicaram que o modelo logístico poderia ser um modelo representativo da situação, eles não o utilizaram. A justificativa para o abandono desse modelo era que eles não haviam estudado curva logística e tinham pouca disponibilidade de tempo para estudá-la nesse momento.

Sendo assim, os alunos optaram por utilizar um modelo linear para descrever o crescimento do número de hipertensos atendidos pela FMS da cidade de Bituruna e um modelo com duas sentenças para descrever os dados coletados relativos ao crescimentos da população dessa cidade. Para isso, os alunos utilizaram $x = n - 2002$.



Modelo representativo do crescimento da população da cidade de Bituruna:

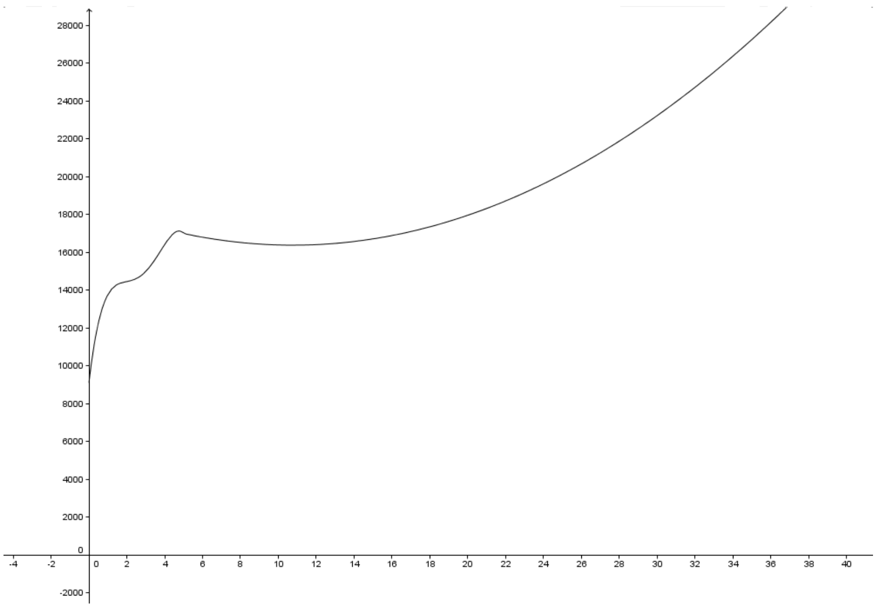
$$P(x) = \begin{cases} -115.67\,x^4 + 1329.5\,x^3 - 5159.85\,x^2 + 8594.96\,x + 9121.21 & : 0 < x \leq 5 \\ 18.5\,x^2 - 398\,x + 18523.5 & : (x > 5) \wedge (\neg((0 < x) \wedge (x \leq 5))) \end{cases}$$

em que, *P(x)* corresponde a população total de Bituruna e *x* o tempo medido em anos.

Além da representação algébrica, os alunos representaram esse crescimento graficamente:

Representação gráfica do crescimento da população da cidade de Bituruna

População



tempo (anos)

Visando responder ao problema, os alunos utilizaram a segunda sentença do modelo que representa o total de habitantes da cidade e o modelo linear que representa a população de hipertensos, fazendo:

$$H(x) = \frac{100\,(142.35\,x + 391.81)}{18.5\,x^2 - 398\,x + 18523.5} \rightarrow H(x) = \frac{769.5\,x + 2118}{x^2 - 21.51\,x + 1001}$$

em que H(x) corresponde ao percentual de hipertensos da cidade de Bituruna.

Como a intenção dos alunos era prever quando a FMS de Bituruna conseguiria atender o total de 100% da população hipertensa da cidade, isto é, 30% da população total da cidade, eles fizeram:

$$H(x) = \frac{100\,(142.35\,x + 391.81)}{18.5\,x^2 - 398\,x + 18523.5}$$

$$30 = \frac{100(142.35x+391.81)}{18.5x^2-398x+18523.5}$$

$$30(18.5x^2 - 398x + 18523.5) = 100(142.35x+391.81)$$

$$555x^2 - 11940x + 555700 = 14240x + 39180$$

$$555x^2 - 26180x + 516520=0$$

Ao buscar pelas raízes dessa equação, os alunos obtiveram **Δ = -** 1139862300. Daí concluíram que a FMS nunca atingirá a cobertura de 100% da população hipertensa já que a equação não têm raízes reais.

Reconhecendo que não seria possível atender os 30% da população, usando o *Excel* os alunos estimaram qual percentual da população total da cidade a FMS conseguiria atender.

Anos	Percentual atendido
10	11,08
11	11,95
12	12,80
13	13,61
14	14,39
15	15,12
16	15,81
17	16,44
18	17,02
19	17,55
20	18,03
21	18,45
22	18,82
23	19,14
24	19,40
25	19,62
26	19,79
27	19,92
28	20,00
29	20,05
30	20,07
31	20,05
32	20,00

Frente aos cálculos apresentados, os alunos concluíram que o maior percentual atendido será 20,07% da população total da cidade e que isso acontecerá em $x = 30$, logo, no ano 2032. A resposta obtida, portanto, foi aceita por todos do grupo e considerada razoável uma vez que nem sempre as pessoas hipertensas realizam o cadastramento na FMS.

Argumentando sobre a resolução do problema, no momento de socialização da atividade desenvolvida para os demais alunos da turma, os alunos para além de apresentar considerações acerca do tema em estudo, comentaram que poderia tê-lo resolvido calculando o ponto de máximo da função, seja por meio do cálculo da coordenada do vértice ou por meio do cálculo da derivada, igualando-a a zero.