Universidade
Estadual de Londrina

CARLOS EDUARDO MIRANDA

UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ABSTRATO COM HISTÓRIA

Londrina
2016

CARLOS EDUARDO MIRANDA

UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ABSTRATO COM HISTÓRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva

Londrina
2016

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Carlos Eduardo Miranda.
Um sistema viscoelástico abstrato com história /
Carlos Eduardo Miranda. – Londrina, 2016.
58 f. : il.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Análise matemática - Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3. Equações de evolução - Teses. 4. Estabilidade - Teses. I. Silva, Marcio Antonio Jorge da. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CARLOS EDUARDO MIRANDA

UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ABSTRATO COM HISTÓRIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profa. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior
Universidade Federal do Pará - UFPA

____

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 26 de fevereiro de 2016.

Dedico este trabalho ao meu filho Henrique e minha esposa Elaine.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus Deuses: minha mãe Betinhia e meu pai Altino.

Aos amigos e amigas do PGMAC.

Aos amigos e amigas da UEL.

À todas funcionárias e funcionários da UEL.

Às professoras e professores.

Agradeço imensamente ao meu orientador Marcio A. Jorge da Silva e coorientador Vando Narciso pela paciência, confiança, e todo o ensinamento a mim dedicados.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

MIRANDA, Carlos Eduardo. **Um sistema viscoelástico abstrato com história**. 2016. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

A proposta deste trabalho é mostrar a existência, unicidade e o comportamento assintótico de solução para um sistema viscoelástico abstrato com história. A existência e unicidade de solução é feita pelo método de semigrupos lineares. Para o comportamento assintótico de solução, utilizamos o método de energia perturbada.

Palavras-chave: Sistema viscoelástico. História. Semigrupos. Comportamento assintótico.

MIRANDA, Carlos Eduardo. **An abstract viscoelastic system with history**. 2016. 58 p. Master thesis (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – State University of Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

The purpose of this work is to show existence, uniqueness and asymptotic behavior of solution to an abstract viscoelastic system with history. The existence and uniques of solution is made by the linear semigroup method. For the asymptotic behavior of solution we use perturbed energy method.

Keywords: Viscoelastic system. History. Semigroups. asymptotic behavior.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos os resultados de existência, unicidade e decaimento geral de soluções, com base no artigo de Guesmia e Messaoudi [8], para a seguinte classe de equações integro-diferenciais de segunda ordem

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^\infty g(s)Au(t-s)\,ds = f, \quad \forall\, t > 0, \tag{1}$$

com condições iniciais

$$u(-t) = u_0(t), \;\; t \geq 0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{2}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto e positivo definido no espaço de Hilbert H, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função real dada, conhecida como *núcleo da memória*, f é uma força externa (que neste trabalho assumiremos nula, ou seja, $f \equiv 0$), u_0 e u_1 são dados iniciais com $u_0(\tau)$ sendo definido para todos $\tau \leq 0$ e conhecido como *história* de u. Um trabalho pioneiro para sistemas viscoelásticos foi introduzido por Dafermos [6], onde uma nova variável η é introduzida na equação (1). Desde então, muitos estudos e resultados têm sido apresentados sobre sistemas viscoelásticos com história relativos ao problema (1)-(2). No sentido de estabelecer um decaimento geral para a energia associada a (1)-(2), vamos apresentar inicialmente resultados para o caso em que a história é nula para tempos negativos. Em seguida, expomos os resultados de estabilidade geral conhecidos para o problema com história (1)-(2) e os resultados do presente trabalho.

Usando mudança de variáveis, note que

$$\int_0^\infty g(s)Au(t-s)ds = \int_{-\infty}^t g(t-s)Au(s)ds.$$

Sendo assim, podemos reescrever a equação (1) como

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_{-\infty}^t g(t-s)Au(s)ds = f, \quad \forall\, t > 0. \tag{3}$$

No modelo (3) fica visível que a função u dever ser conhecida para valores negativos $\tau \in (-\infty, 0]$. Sendo assim, para contemplar o caso sem história, assumimos que $u(\tau) = u_0(\tau) \equiv 0$ para todos $\tau \in (-\infty, 0]$. Então, obtemos de (3) o seguinte modelo abstrato sem história

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f, \quad \forall\, t > 0, \tag{4}$$

com condições iniciais

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{5}$$

Em 2008, Messaoudi [12, 13] estudou o problema (4)-(5) com

$$A = -\Delta, \quad D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad f \equiv 0,\ f = |u|^\gamma u,\ \gamma > 0,$$

onde Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Na ocasião, o autor mostrou que se o núcleo de memória g satisfaz a seguinte desigualdade diferencial linear

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

com ξ um função não negativa, diferenciável e decrescente, então a energia $E_1(t)$ associada ao problema de onda viscoelástica

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds = f(u), \tag{7}$$

com $f(u) = 0$ ou $f(u) = u|u|^\gamma,\ \gamma > 0$, decai na seguinte taxa

$$E_1(t) \leq Ce^{-\gamma \int_0^t \xi(s)ds}, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

para algumas constantes positivas C e γ que dependem dos dados iniciais $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$ dados em (5). Observe que o decaimento em (8) é similar (a menos das constantes dependentes do dados iniciais) ao decaimento do núcleo da memória

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)ds}, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

o qual é pré-estabelecido por (6). Há outros tipos de decaimento geral uniforme na literatura relativos aos problemas (4) ou (7). Por exemplo, em Lasiecka et al. [10, 11] os autores mostraram o decaimento uniforme de energia para o problema (4) com g satisfazendo a seguinte desigualdade diferencial não linear

$$g'(t) \leq -\mathbf{H}(g(t)), \quad t \geq 0, \tag{10}$$

onde $\mathbf{H}$ é uma função real satisfazendo condições apropriadas. Mais precisamente, em [10, 11] foi mostrado que o decaimento de energia é governado pela solução de uma EDO não linear correspondente a (10), cuja taxa de decaimento é a mesma imposta ao núcleo da memória. Há ainda outros tipos de decaimento geral para modelos viscoelásticos sem história, os quais fogem ao escopo deste trabalho. No que segue, apresentamos resultados existentes relativos ao problema (1)-(2) e como abordar o decaimento geral para o mesmo sob a hipótese (6).

Retornando a problemas viscoelásticos com história não nula, relembramos o trabalho de Chepyzhov e Pata [5], onde os autores consideraram o seguinte problema abstrato

$$u_{tt}(t) + Au(t) + \int_0^{\infty} g(s)A\left(u(t) - u(t-s)\right) ds = 0, \quad \forall\, t > 0, \tag{11}$$

$$u(-t) = u_0(t), \;\; t \geq 0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{12}$$

onde $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador auto-adjunto e positivo definido no espaço de Hilbert H. Neste caso, a fim de converter o problema (11)-(12) em um sistema autônomo e aplicar a teoria de semigrupos lineares, uma nova variável foi introduzida em (11), denominada *história de deslocamento relativo* e definida por

$$\eta = \eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Assumindo que g satisfaz

$$g'(t) \leq -\xi_0 g(t), \quad t \geq 0, \tag{14}$$

onde $\xi_0 > 0$ é uma constante, foi mostrado em [5] que o sistema equivalente a (11)-(12) é exponencialmente estável, o que corresponde ao decaimento imposto para o núcleo da memória g proveniente de (14), a saber, que

$$g(t) \leq g(0)e^{-\xi_0 t}, \quad t \geq 0.$$

O mesmos resultados de estabilidade exponencial para sistemas viscoelásticos com história sob a condição (14) foram apresentados, entre tantos outros trabalhos, em Pata [14, 15]. Desde problemas viscoelásticos mais antigos até os mais recentes (com ou sem história), a hipótese (14) foi bastante considerada na literatura, o que geralmente produz uma estabilidade exponencial para o sistema envolvido. Para o caso sem história, diversas maneiras de generalizar tal condição foram introduzidas na literatura como vimos anteriormente. Para problemas viscoelásticos com história da forma (1)-(2) (ou ainda (11)-(12)) há poucos trabalhos com intuito de estabelecer o decaimento geral por meio de uma condição que generaliza (14). Vejamos dois deles nos parágrafos seguintes.

Em 2011, Guesmia [7] considerou o seguinte problema abstrato

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} g(s)Bu(t-s)\, ds = 0, \quad \forall\, t > 0, \tag{15}$$

onde os operadores A e B são auto-adjuntos, ambos definidos positivos com $D(A) \subset D(B)$ e as seguintes hipóteses sendo satisfeitas:

(D1) Existem constantes $l_0, l_1 > 0$ tais que

$$l_1\|v\|^2 \leq \|B^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq l_0\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \quad \forall\, v \in D(A).$$

(D2) A função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é diferenciável, não crescente e satisfaz

$$0 < \int_0^\infty g(s)\, ds < \frac{1}{l_0}.$$

(D3) Existe uma função $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ estritamente convexa, não crescente e de classe $C^1(]0, +\infty[) \cap C^2(]0, +\infty[)$ satisfazendo

$$G(0) = G'(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} G'(t) = \infty,$$

tal que

$$\int_0^\infty \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))}\, ds + \sup_{s>0} \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))} < \infty.$$

Sob as condições (D1)-(D3) e introduzindo η como em (13), foi mostrado em [7] que o sistema (equivalente) correspondente a (15) decai de forma geral em termos da inversa de uma função proveniente de G, ver [7, Teorema 2.1], desde que os dados iniciais sejam tomados em um conjunto limitado. Como aplicação, o autor mostrou vários exemplos com taxas distintas de decaimento, inclusive o caso exponencial, ver [7, Seção 2].

Mais recentemente, em Guesmia e Messaoudi [8] os autores estudaram o problema abstrato (1)-(2) com $f \equiv 0$. Introduzindo η como em (13) e assumindo que g satisfaz a condição (6), foi mostrado que a energia $E_2(t)$ associada ao sistema correspondente (1) satisfaz

$$E_2(t) \le C \left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\gamma} ds\right) e^{-\gamma \int_0^t \xi(s) ds} + C \int_t^\infty g(s) ds, \quad \forall\ t \ge 0, \tag{16}$$

para algumas constantes $\gamma \in (0, 1)$ e $C > 0$, desde que os dados iniciais sejam tomados em um conjunto limitado de $D(A^{\frac{1}{2}}) \times H$. Neste caso, nota-se que o funcional de energia não satisfaz necessariamente a mesma taxa de estabilidade do núcleo de memória g, o que pode ser visto comparando as estimativas (9) e (16). Em (16) vemos que aparece o termo adicional

$$\int_t^\infty g(s) ds$$

que, apesar de convergir para zero quando $t \to \infty$ (como nos exemplos do Capítulo 3), é um termo cuja estabilidade pode não permitir recuperar a mesma taxa de decaimento para energia por meio de (16), quando comparada com a taxa que o núcleo g possui em (9). Tal resultado diferencia-se, de certa forma, do caso sem história quando comparamos (8) e (9). No presente trabalho demonstramos os resultados de boa colocação e estabilidade geral estabelecidos por Guesmia e Messaoudi [8, Seções 2 e 3] com respeito ao problema (1)-(2) com $f \equiv 0$. Além disso, assim como em [8, Observação 2.2] apresentamos alguns tipos de decaimento provenientes de (16) e, de acordo com [8, Seção 4], algumas aplicações em casos concretos de equações diferenciais parciais provenientes da física-matemática são determinadas.

O presente trabalho está organizado conforme segue. No Capítulo 1, apresentamos algumas definições, notações e resultados básicos de análise funcional, os quais serão necessários ao longo desta dissertação. No Capítulo 2, o principal capítulo deste trabalho, são provados a existência e unicidade de solução via método semigrupos lineares e estabilidade geral de energia via método de energia perturbada. No Capítulo 3, apresentamos algumas taxas explícitas de decaimento de energia. Finalmente, mas não menos importante, apresentamos no Capítulo 4 algumas aplicações do problema abstrato em equações da física-matemática.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de Análise Funcional, Teoria das Distribuições e Espaços de Sobolev que serão de grande utilidade para a compreensão dos capítulos subsequentes. Introduziremos a linguagem de semigrupos, assim como as principais definições e resultados, fundamental para abordar o problema deste trabalho.

1.1 ESPAÇOS DE BANACH

Definição 1.1. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma* ***norma*** *em X é uma função $\|\cdot\|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

- $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\|x\|_X, \quad \forall\, x \in X, \;\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$;
- $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \quad \forall\, x, y \in X.$

O par $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado **espaço vetorial normado**. Quando não houver confusão, denotaremos por X um espaço vetorial normado e por $\|\cdot\|$ a norma em X.

Definição 1.2. *Seja X um espaço vetorial normado. Uma* ***sequência*** *em X é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Denotaremos por $x(n) := x_n$ e $x(\mathbb{N}) := (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uma* ***subsequência*** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição $x|_{\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \longrightarrow X$ da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$.*

Definição 1.3. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço vetorial normado X. Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência:*

- ***convergente em*** *X quando existe $x \in X$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Denotamos a convergência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para x por $x_n \to x$;*
- ***de Cauchy em*** *X se para todo ε, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, para todo $m, n > n_0$.*

Definição 1.4. *Um espaço vetorial normado X é chamado de* ***espaço de Banach*** *quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.*

Definição 1.5. *Um espaço vetorial normado X é chamado de* ***separável*** *quando existe um subconjunto $Y \subset X$ satisfazendo as seguintes condições:*

- *dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ tal que $\|x - y\|_X < \varepsilon$;*
- *existe uma função bijetora $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$.*

1.2 Espaços de Hilbert

Definição 1.6. *Sejam X e Y dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ é chamada de* ***forma sesquilinear*** *em $X \times Y$ se satisfaz as seguintes condições:*

- $a(x+y,z) = a(x,z) + a(y,z), \quad \forall\, x,y \in X, \ \forall\, z \in Y$;
- $a(x,y+z) = a(x,y) + a(x,z), \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, y,z \in Y$;
- $a(\alpha x,y) = \alpha a(x,y), \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, y \in Y, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$;
- $a(x,\alpha y) = \bar{\alpha} a(x,y), \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, y \in Y, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.

No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que a é uma ***forma bilinear****.*

Definição 1.7. *Seja X um espaço vetorial normado e $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear em X.*

- *Dizemos que a é* ***hermitiana*** *quando*
$$a(x,y) = \overline{a(y,x)}, \quad \forall\, x,y \in X.$$
- *Dizemos que a é* ***contínua*** *quando existe uma constante $C > 0$ tal que*
$$|a(x,y)| \leq C\|x\|_X \|y\|_X, \quad \forall\, x,y \in X.$$
- *Dizemos que a é* **coerciva** *quando existe $c > 0$ tal que*
$$Re\, a(x,x) \geq c\|x\|_X^2, \quad \forall\, x \in X.$$

Definição 1.8. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Diz-se que uma forma sesquilinear hermitiana $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é o* ***produto interno*** *em X se satisfaz as seguintes condições:*

- $a(x,x) \geq 0, \quad \forall\, x \in X$;
- $a(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Denotaremos um produto interno em X por $(\cdot,\cdot)_X$.

Definição 1.9. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot,\cdot)_X$ um produto interno em X. A função $\|\cdot\|_X = (\cdot,\cdot)_X^{1/2}$ define uma norma em X denominada* ***norma proveniente*** *do produto interno $(\cdot,\cdot)_X$.*

Definição 1.10. *Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ é chamado de* ***espaço de Hilbert*** *quando a norma $\|\cdot\|_H$ é proveniente do produto interno em H.*

Teorema 1.11. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver Teorema 46-6 em [9]. □

Teorema 1.12 (Lax-Milgram)**.** *Seja $(H, \|\cdot\|_H, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva. Então para todo funcional $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall\, v \in H.$$

Demonstração. Ver Corolário 5.8 em [2]. □

1.3 Operadores definidos pela terna $\{V, H; a\}$

Definição 1.13. *Sejam V e H espaços de Hilbert complexos tais que $dim H = +\infty$, $\bar{V} = H$ e $V \hookrightarrow H$. Considere ainda $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua. Dizemos que um operador T é **definido pela terna** $\{V, H; a\}$ quando $T : D(T) \subset V \longrightarrow H$ é tal que*

$$D(T) = \{u \in V; \exists\, f \in H \quad \textit{tal que} \quad a(u, v) = (f, v)_H, \quad \forall\, v \in V\},$$

onde $a(u, v) = (T(u), v)_H$, para todo $u \in D(T)$ e para $v \in V$.

Teorema 1.14. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e suponhamos que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então, para cada $f \in H$ existe um único $u \in D(T)$ tal que $T(u) = f$.*

Demonstração. Ver Teorema 5.126 em [4]. □

Proposição 1.15. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e assumimos que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então, $D(T)$ é denso em H e T é um operador fechado em H.*

Demonstração. Ver Proposição 5.129 em [4]. □

Proposição 1.16. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Se a é uma forma sesquilinear hermitiana, então T é um operador auto-adjunto.*

Demonstração. Ver Proposição 5.130 em [4]. □

Proposição 1.17. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Se V está contido estritamente em H e a é uma forma sesquilinear hermitiana, então T é um operador não limitado em H.*

Demonstração. Ver Proposição 5.132 em [4]. □

Proposição 1.18. *Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$ e assumimos que a é uma forma sesquilinear coerciva. Então,*

- *$D(T)$ é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v)_{D(T)} = (u,v)_H + (T(u),T(v))_H;$$

- *as normas definidas por*

$$|||u|||_{D(T)} = (u,u)_{D(T)}^{1/2} \quad e \quad \|u\|_{D(T)} = \|T(u)\|_H$$

  são equivalentes;

- *vale a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:*

$$D(T) \hookrightarrow V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \hookrightarrow [D(T)]'.$$

Demonstração. Ver [4]. □

1.4 TEORIA ESPECTRAL

Definição 1.19. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear $T : D(T) \subset H \longrightarrow H$ é auto-adjunto quando $(T(x),y)_H = (x,T(y))_H$, para todo $x,y \in D(T)$.*

Definição 1.20. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em H é um **sistema ortonormal completo** em H quando,*

- $\|w_n\| = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$*;*
- $(w_n, w_m) = 0 \quad$ *para* $\quad n \neq m$*;*
- $\overline{[W]} = H$*, onde* $W = \{w_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Definição 1.21. *Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Dizemos que $0 \neq u \in D(T)$ é um **autovetor** de T quando existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(u) = \lambda u$. Dizemos ainda que λ é um **autovalor** de T associado a u.*

Teorema 1.22 (Teorema Espectral)**.** *Sejam V e H espaços de Hilbert tais que $dim H = +\infty$, $\bar{V} = H$ e $V \hookrightarrow H$ com inclusão compacta. Considere $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear contínua e hermitiana em V tal que existem $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ e $\alpha_2 > 0$ satisfazendo*

$$Re\,[a(v,v) + \alpha_1 (v,v)_H] \geq \alpha_2 \|v\|_V^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Seja T o operador definido pela terna $\{V, H; a\}$. Então,

- *existe um sistema ortonormal completo $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H constituído de autovetores de T;*

- *se* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são os autovalores de* T *associados a* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, então* $\lambda_n \to +\infty$ *sempre que* $n \to +\infty$.

Demonstração. Ver Teorema 5.146 em [4]. □

1.4.1 Raiz quadrada

Consideremos V e H espaços de Hilbert munidos com produtos internos $((\cdot,\cdot))$ e $(\cdot,\cdot)$, respectivamente. Além disso, suponha as seguintes condições:

(i) $a(u,v)$ é uma forma sesquilinear, contínua e hermitiana em $V \times V$;

(ii) Existem $\alpha_0, \alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0$ tais que

$$Re\,[a(u,v) + \alpha_0(u,v)] \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall\, v \in V;$$

(iii) A injeção de V em H é compacta e V é denso em H;

(iv) O operador T é definido pela terna $\{V, H; a\}$;

(v) O operador R é definido pela terna $\{V, H; b\}$, onde $b(u,v) = a(u,v) + \alpha_0(u,v)$, para todo $u, v \in V$.

Proposição 1.23. *Sob as condições acima, tem-se que*

$$D(T^m) = \left\{ u \in H; \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2m} |(u,w_n)|^2 < +\infty \right\},$$

$$T^m(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^m (u,w_n) w_n, \quad \forall\, u \in D(T^m).$$

Demonstração. Ver Proposição 5.151 em [4]. □

Definição 1.24. *Um operador* $T : D(T) \subset H \to H$ *é chamado* ***positivo*** *quando*

$$(T(u), u) \geq 0, \quad \forall\, u \in D(T).$$

Proposição 1.25. *Seja* T *o operador definido pela terna* $\{V, H; a\}$*, então* T *é positivo se, e somente se,* $\lambda_n \geq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver Proposição 5.154 em [4]. □

Proposição 1.26. *Seja* T *um operador positivo. Então, o operador* S *com domínio*

$$D(S) = \{u \in H; \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |(u,w_n)|^2 < +\infty\},$$

e definido por

$$S(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n}(u, w_n)w_n, \quad \forall\, u \in D(S), \tag{1.1}$$

é o único operador auto-adjunto e positivo definido em H tal que $S^2 = T$.

Demonstração. Ver Proposição 5.163 em [4]. □

1.5 Espaços $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Para $1 \leq p < +\infty$ denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto (das classes) de funções Lebesque mensuráveis u, tais que $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em linguagem de conjuntos

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável}, \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma usual

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

No caso particular em que $p = 2$ temos também que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2} = (u, u)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

No caso que $p = +\infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável}, \quad |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Neste caso, dizemos que o número real K é um *majorante essencial* de u e denotando por $A = \{K \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq K \text{ q.s. em } \Omega\}$, podemos definir a norma em $L^\infty(\Omega)$ como

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)| = \text{inf}A.$$

Assim, $(L^\infty(\Omega); \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.27. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. A **convolução** de f por g é definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)\, dy.$$

Em [3] pode-se encontrar vários resultados sobre convolução, os quais omitiremos neste capítulo preliminar.

Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ uma função positiva com $g(0) > 0$.

Definição 1.28. *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Definimos o* **espaço com peso** g *por*

$$L^p_g(0,\infty;X) := \left\{ \eta : [0,\infty) \to X \mid \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X ds < \infty \right\}. \tag{1.3}$$

Proposição 1.29. *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço $L^p_g(0,\infty;X)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|\eta\|_{L^p_g(0,\infty;X)} := \left(\int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|^p_X ds \right)^{1/p}.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2_g(0,\infty;X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\eta,\zeta)_{L^2_g(0,\infty;X)} := \int_0^\infty g(s)(\eta(s),\zeta(s))_X ds.$$

Demonstração. A prova pode ser feita utilizando a mesma ideia para mostrar que os espaços $L^p(0,T;X)$ são espaços de Banach. □

1.6 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.
O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} := \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, |D^\alpha u(x)|.$$

é um espaço de Banach e é denominado espaço de Sobolev. Para o caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, representado por $H^m(\Omega)$, com o produto interno dado por

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \; \forall\, u,\, v, \in H^m(\Omega),$$

e é denominado espaço de Sobolev de ordem m. Quando $m = 0$, $H^m(\Omega)$ identifica-se com $L^2(\Omega)$.

Define-se o espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$ como sendo o fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < \infty$, então a norma em $W^{m,p}_0(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}_0} := \|u\|_{W^{m,p}_0(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é equivalente à norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Proposição 1.30 (Imersões de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de classe C^m.*

(i) *Se $mp < N$, a seguinte inclusão contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega), \quad \text{em que} \quad \frac{1}{q*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$$

é válida. Além disso, a inclusão é compacta para qualquer q, com $p \leq q < q^*$.

(ii) *Se $mp = N$, então a seguinte inclusão é contínua e compacta*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q < +\infty.$$

Além disso, se $p = 1$ e $m = N$, a mesma relação acima vale para $q = +\infty$.

(iii) *Se $k + 1 > m - \frac{N}{p} > k$, $k \in \mathbb{N}$, então, pondo $m - \frac{N}{p} = k + \alpha$, com $0 < \alpha < 1$, temos a seguinte inclusão contínua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

em que $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ representa o espaço das funções em $C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas de ordem k são α-Hölder contínuas. Além disso, se $N = m - k - 1$, $\alpha = 1$ e $p = 1$, a inclusão vale também para $\alpha = 1$ e a inclusão $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ é compacta para todo $0 \leq \beta < \alpha$.

Demonstração. Ver Proposição 4.12 em [1]. □

Proposição 1.31 (Fórmula de Green). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Se $u, v \in H^2(\Omega)$, então*

$$-\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\Omega.$$

Demonstração. Ver Proposição 7 em [3]. □

1.7 Resultados Auxiliares

Proposição 1.32 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então, dados u, $v \in H$, temos que*

$$|(u, v)| \leq \|u\|_H \, \|v\|_H,$$

onde $\|\cdot\|_H^2 = (\cdot,\cdot)$.

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 1.33 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $1 < p, q < +\infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$. *Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver [2]. □

Proposição 1.34 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 < p, q < +\infty$ *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$, *então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |\ u(x)v(x)\ |\ dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

A desigualdade também é válida se $p = 1$ *e* $q = +\infty$.

Demonstração. Ver [2]. □

Proposição 1.35 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado e* $1 < p < +\infty$. *Então, existe uma constante* $C = C(p, |\ \Omega\ |) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [2]. □

1.8 Semigrupo de Operadores

Definição 1.36. *Uma família* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores lineares limitados definida em um espaço de Banach* X *é um* ***semigrupo de operadores lineares limitados*** *ou* ***semigrupo*** *quando:*

(i) $S(0) = I : X \longrightarrow X$, *onde* I *é o operador identidade;*

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, *para cada* $t, s \geq 0$.

Dizemos que o semigrupo S *é de* ***classe*** C_0 *(ou também* C_0-***semigrupo****) quando*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} S(t)x = 0, \ \ \forall\, x \in X.$

Além disso, dizemos que o semigrupo S *é de* ***contração*** *quando*

(iv) $\|S(t)\| \leq 1.$

Definição 1.37. *Um operador* $A : D(A) \longrightarrow X$, *definido por*

$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall\, x \in D(A),$$

onde $D(A)$ é o domínio do operador A e dado por

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\},$$

*é denominado **gerador infinitesimal** de $S(t)$.*

Teorema 1.38 (Hille-Yosida). *Seja A um operador linear definido num espaço de Banach B*

$$A : D(A) \subset B \longrightarrow B.$$

A fim de que A seja um gerador infinitesimal de um semigrupo linear de contrações é necessário e suficiente que:

(i) A seja um operador densamente definido em B;

(ii) para todo $\lambda > 0$, $\lambda I + A$ é uma aplicação bijetiva e

$$\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver Teorema 2.2.1 em [18]. □

Definição 1.39. *Seja H um espaço de Hilbert. O operador linear $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ é **dissipativo** quando*

$$Re\,(Ax, x)_H \leq 0, \quad \forall\, x \in D(A).$$

Definição 1.40. *Seja A um operador linear (não necessariamente limitado) definido sobre um espaço de Banach X. Definimos o **conjunto resolvente** $\rho(A)$ do operador A por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \quad \textit{é invertível e} \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}.$$

*O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é denominado **espectro** de A.*

Proposição 1.41. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador dissipativo tal que o operador $Id - A$ é sobrejetor. Então, $\overline{D(A)} = H$.*

Demonstração. Ver Teorema 4.6 [16]. □

Teorema 1.42 (Lumer-Phillips). *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H.*

(i) Se A é dissipativo e existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $Im(\lambda I - A) = H$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.

(ii) Se A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H, então $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração. Ver Teorema 4.3 em [16]. □

Corolário 1.43. *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se $0 \in \rho(A)$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

Demonstração. Ver Teorema 2.12.3 em [17]. □

1.9 Problema de Cauchy

A teoria geral de semigrupos nos permite estudar problemas de valor inicial para equações de evolução abstrata do tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach (ou Hilbert).

Definição 1.44. *Uma solução do problema de Cauchy (1.4) é uma função $U : [0, +\infty) \to X$ tal que $U(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável com $U(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e satisfaz (1.4) em $[0, +\infty)$ quase sempre.*

Teorema 1.45. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) := e^{At}$ em X. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato (1.4) possui uma única solução U em $D(A)$ dada por*

$$U(t) = T(t)U_0 := e^{At}U_0, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C\left([0, +\infty), D(A)\right) \cap C^1\left([0, +\infty), X\right).$$

Demonstração. Ver Teorema 2.2.2 em [18]. □

Tendo em vista a obtenção de soluções mais regulares, introduzimos o seguinte espaço de Banach (ou Hilbert)

$$D(A^k) = \{U \in D(A^{k-1}) \mid AU \in D(A^{k-1})\}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

munido da norma $\|U\|^2_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \|U\|_{D(A^j)}$. Com isto, temos o seguinte resultado adicional

Teorema 1.46. *Sob as hipóteses do Teorema 1.45, se $U_0 \in D(A^k)$ com $k \in \mathbb{N}$, então a solução U do problema (1.4) satisfaz a seguinte condição*

$$U \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0, +\infty)\,, D(A^j)).$$

Demonstração. Ver Teorema 2.3.1 em [18]. □

2 EXISTÊNCIA E TAXAS DE DECAIMENTO PARA UM SISTEMA VISCOELÁSTICO ABSTRATO COM HISTÓRIA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos a boa colocação e o comportamento assintótico para a seguinte classe de equações integro-diferenciais de segunda ordem

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^{+\infty} g(s)Au(t-s)\,ds = 0, \quad \forall\, t > 0, \tag{2.1}$$

com condições iniciais

$$u(-t) = u_0(t),\ \ t \geq 0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{2.2}$$

onde $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ é um operador auto-adjunto, positivo definido sobre o espaço de Hilbert $(H, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ e g é uma função positiva não crescente. Sendo assim, pela Proposição 1.26 pode-se definir a raiz $S := A^{\frac{1}{2}}$ do operador A, o qual é ainda um operador auto-adjunto e positivo definido em H. Assim como em [6, 14], introduzimos uma nova variável, denominada *história de deslocamento relativo*, definida por

$$\eta = \eta^t(s) = u(t) - u(t-s), \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}^+ := \left]0, +\infty\right[. \tag{2.3}$$

Derivando formalmente em relação a t e a s, obtemos que

$$\eta^t_t(s) = -\eta^t_s(s) + u_t(t), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^+.$$

Note que para $t = 0$ temos a condição inicial

$$\eta_0(s) = \eta^0(s) = u_0(0) - u_0(s), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^+$$

e

$$\eta^t(0) := \lim_{s \to 0^+} \eta^t(s) = 0.$$

Assim, o termo de memória em (2.1) pode ser reescrito como

$$\int_0^{+\infty} g(s)Au(t-s)\,ds = \left(\int_0^{+\infty} g(s)\,ds\right) Au - \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds.$$

Logo, segue que o problema original (2.1)-(2.2) pode ser reescrito no seguinte sistema

$$\begin{aligned} &u_{tt}(t) + \left(1 - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds\right) Au(t) + \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds = 0, \quad \forall\, t > 0,\\ &\eta_t = -\eta_s + u_t, \quad \forall\, t, s > 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

com condições iniciais

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad \eta^t(0) = 0, \quad \eta^0(s) = \eta_0(s), \tag{2.5}$$

onde

$$\begin{cases} u_0 = u_0(t), \quad \forall\, t \geq 0, \\ u_1 = \partial_t u_0(0) \mid_{t=0}, \\ \eta_0(s) = u_0(0) - u_0(s), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.6}$$

No que segue, estudaremos a existência e decaimento de solução para o problema (2.4)-(2.5). Seguindo as mesmas hipóteses como em [8], assumiremos que o operador A e a função g satisfazem:

(H1) Existe uma constante positiva a tal que

$$a\|v\|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2, \quad \forall\, v \in D(A^{\frac{1}{2}}). \tag{2.7}$$

(H2) A função $g : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ é de classe $C^1([0, +\infty[)$ não crescente e satisfaz

$$g(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad g_0 := \int_0^{+\infty} g(s)\, ds \in \,]0, 1[\,. \tag{2.8}$$

(H3) Existe uma função $\xi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ não crescente e diferenciável, tal que

$$g'(s) \leq -\xi(s)g(s), \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Observação. Da hipótese (2.9) note que g satisfaz a seguinte condição de decaimento

$$g(t) \leq g(0)e^{-\int_0^t \xi(s)ds}, \tag{2.10}$$

desde que $\int_0^t \xi(s)ds \to +\infty$ quando $t \to +\infty$. Tal estimativa mostra que a taxa de decaimento do núcleo g depende da função ξ atribuída em (2.10). Exemplos de tais funções serão dados no Capítulo 3.

Para definir o espaço para a variável η é necessário fazermos uso de espaços com peso. Dado o espaço de Hilbert H, o operador $A : D(A) \subset H \to H$ como anteriormente e a função peso

$$g \in C^1([0, +\infty[) \cap L^1([0, +\infty[),$$

consideramos o seguinte conjunto

$$\mathcal{M}_{1/2} = \left\{ z : \mathbb{R}^+ \longrightarrow D(A^{\frac{1}{2}}); \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}z(s)\|^2\, ds < +\infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com produto interno e norma definidos por

$$(z,\eta)_{\mathcal{M}_{1/2}} = \int_0^{+\infty} g(s)(A^{\frac{1}{2}}z(s), A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s))\,ds \quad \text{e} \quad \|z\|^2_{\mathcal{M}_{1/2}} = \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}z(s)\|^2\,ds. \tag{2.11}$$

Observação. Como H é um espaço de Hilbert, então é simples verificar que $\mathcal{M}_{1/2}$ também um espaço de Hilbert com o produto interno e norma supracitados em (2.11).

Consideremos o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = D(A^{\frac{1}{2}}) \times H \times \mathcal{M}_{1/2},$$

com produto interno e norma definidos por

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)_{\mathcal{H}} &= (1-g_0)(A^{\frac{1}{2}}u_1, A^{\frac{1}{2}}u_2) + (v_1,v_2) + \int_0^{+\infty} g(s)(A^{\frac{1}{2}}\eta_1^t(s), A^{\frac{1}{2}}\eta_2^t(s))\,ds,\\
\|\mathcal{U}(t)\|^2_{\mathcal{H}} &= (1-g_0)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

para todos $\mathcal{U}_i = (u_i, v_i, \eta_i)^T \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$.

Com as notações definidas acima, podemos reescrever (2.4) como

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t) + (1-g_0)\,Au(t) + \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds = 0, \quad \text{em} \quad \forall\, t > 0,\\
&\eta_t(s) = -\eta_s(s) + u_t(t), \quad \forall\, t, s > 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

com as condições iniciais dadas em (2.5).

2.2 Formulação do Semigrupo

Vamos reescrever o sistema (2.12) com as condições iniciais (2.5) em um problema de Cauchy abstrato de primeira ordem. De fato, seja o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{A}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} v \\ -(1-g_0)Au - \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds \\ -\eta_s + v \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = (u, v, \eta)^T \in D(\mathcal{A}),$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathcal{H}; v \in D(A^{\frac{1}{2}}), (1-g_0)u + \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \in D(A), \eta_s \in \mathcal{M}_{1/2}, \eta^t(0) = 0 \right\}.$$

Assim, podemos escrever (2.12) com as condições iniciais (2.5) como um problema de Cauchy abstrato de primeira ordem

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t = \mathcal{A}\mathcal{U}, \quad \forall\, t > 0, \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $\mathcal{U}_0 = (u_0, u_1, \eta_0)^T$.

2.3 Existência e Unicidade

Nesta seção veremos o resultado de existência e unicidade para o problema (2.13) e, consequentemente, para o sistema (2.4)-(2.5) como objetivo inicial deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponhamos que as hipóteses $(H1)$-$(H2)$ sejam satisfeitas.*

1. *Se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A})$, então o problema de Cauchy abstrato (2.13) possui uma única solução na classe*

$$\mathcal{U} \in C^1([0,+\infty), \mathcal{H}) \cap C([0,+\infty), D(\mathcal{A})). \tag{2.14}$$

2. *Se $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}^k),\ k \in \mathbb{N}$, então a solução de (2.13) é mais regular*

$$\mathcal{U} \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,+\infty), D(\mathcal{A}^j)). \tag{2.15}$$

Demonstração. Se mostrarmos que $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$, então a prova dos itens 1 e 2 do Teorema 2.1 é consequência dos teoremas 1.45 e 1.46, respectivamente. Para tanto, em virtude do Teorema 1.42, é suficiente mostrar que

(i) $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$;

(ii) $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$;

(iii) $I_d - \mathcal{A}$ é sobrejetor.

A condição (i) seguirá como consequência dos itens (ii) e (iii) e da Proposição 1.41. Assim sendo, verificaremos os itens (ii) e (iii).

(ii) Dissipatividade do operador $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{U} = (u, v, \eta)^T \in D(\mathcal{A})$. Note que

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} &= (1-g_0)\left(A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\right) + \left(-(1-g_0)Au - \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds, v\right) \\
&\quad + \int_0^{+\infty} g(s)\left(A^{\frac{1}{2}}(-\eta_s^t(s)+v), A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right)\,ds \\
&= (1-g_0)\left(A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\right) - (1-g_0)\,(Au, v) - \int_0^{+\infty} g(s)\left(A\eta^t(s), v\right)\,ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} g(s)\left(A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s), A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right)\,ds + \int_0^{+\infty} g(s)\left(A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\right)\,ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\frac{d}{ds}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|_2^2\,ds \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\int_y^{\frac{1}{y}} g(s)\frac{d}{ds}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}\mathcal{U}, \mathcal{U})_{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\left[g\left(\frac{1}{y}\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t\left(\frac{1}{y}\right)\right\|^2 - g(y)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(y)\|^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\int_y^{\frac{1}{y}} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Como $\eta \in \mathcal{M}_{1/2}$, segue que $g\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(\cdot)\|^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e assim

$$
\lim_{y\to 0^+} g\left(\frac{1}{y}\right)\left\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t\left(\frac{1}{y}\right)\right\|^2 = \lim_{\tau\to+\infty} g(\tau)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(\tau)\|^2 = 0. \qquad (2.17)
$$

Além disso, como g é não crescente, segue da Desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
g(y)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(y)\|^2 &= g(y)\left\|\int_0^y A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\,ds\right\|^2 \\
&\leq g(y)\left(\int_0^y \|A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\|\,ds\right)^2 \\
&\leq \left(\int_0^y [g(s)]^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\|\,ds\right)^2 \\
&\leq y\int_0^y g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\|^2\,ds, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}
$$

Como $\eta_s \in \mathcal{M}_{1/2}$, temos que

$$
0 \leq \lim_{y\to 0^+} g(y)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(y)\|^2 \leq \lim_{y\to 0^+} y\int_0^y g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\|^2\,ds = 0,
$$

isto é,

$$\lim_{y\to 0^+} g(y)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(y)\|^2 = 0. \tag{2.18}$$

Assim, de (2.16)-(2.18) e da hipótese (H2), segue que

$$(\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0^+}\int_y^{\frac{1}{y}} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \leq 0.$$

Portanto, $Re(\mathcal{A}\mathcal{U},\mathcal{U})_{\mathcal{H}} \leq 0$ para todo $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$, de onde segue que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

(iii) Sobrejetividade do operador $I_d - \mathcal{A}$. Seja $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}$. Mostraremos que a equação resolvente

$$(I_d - \mathcal{A})\mathcal{U} = \mathcal{F} \tag{2.19}$$

possui uma única solução $\mathcal{U} \in D(\mathcal{A})$. Equivalentemente, reescrevendo (2.19) em termos de suas componentes, vamos encontrar uma única solução $(u, v, \eta)^T \in D(\mathcal{A})$ para o sistema

$$\begin{cases} u - v = f_1, \\ v + (1-g_0)Au + \displaystyle\int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds = f_2, \\ \eta + \eta_s - v = f_3. \end{cases} \tag{2.20}$$

Com efeito, dado $s \geq 0$, multiplicando a terceira equação de (2.20) por e^y, com $0 \leq y \leq s$, e integrando de 0 até s, temos

$$e^s\eta^t(s) = \left(\int_0^s e^y\,dy\right)v + \int_0^s e^y f_3(y)\,dy = (e^s - 1)v + \int_0^s e^y f_3(y)\,dy,$$

ou seja

$$\eta^t(s) = (1 - e^{-s})v + \int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)\,dy. \tag{2.21}$$

Além disso, da primeira equação de (2.20), temos que

$$v = u - f_1. \tag{2.22}$$

Usando (2.22) em (2.21), temos que

$$\eta^t(s) = (1 - e^{-s})(u - f_1) + \int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)\,dy. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) na segunda equação de (2.20), obtemos que

$$u + (1-g_0)Au + \left(\int_0^{+\infty} g(s)(1 - e^{-s})\,ds\right)Au = f_4, \tag{2.24}$$

onde

$$f_4 = I_d(f_1+f_2) + \left(\int_0^{+\infty} g(s)(1-e^{-s})\,ds\right) Af_1 + \int_0^{+\infty} g(s)A\left(\int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)dy\right)\,ds.$$

Afirmamos que a função dada por

$$\Phi(s) = \int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)\,dy$$

pertence a $\mathcal{M}_{1/2}$. De fato, defina $\Phi_1(s) = e^{-s}$ e $\Phi_2(s) = [g(s)]^{\frac{1}{2}}\,\|A^{\frac{1}{2}} f_3\|$, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a hipótese (H2), temos que $\Phi_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\Phi_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\Phi(s)\|^2\,ds &= \int_0^{+\infty} g(s)\left(\int_0^s e^{-(s-y)}\|A^{\frac{1}{2}} f_3(y)\|\,dy\right)^2 ds \\
&\le \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s e^{-(s-y)}\,[g(y)]^{\frac{1}{2}}\,\|A^{\frac{1}{2}} f_3(y)\|\,dy\right)^2 ds \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\Phi_1 * \Phi_2\right)^2(s)\,ds \\
&= \|\Phi_1 * \Phi_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\le \|\Phi_1\|^2_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|\Phi_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\Phi \in \mathcal{M}_{1/2}$. Assim, f_4 assume valores em $\left[D(A^{\frac{1}{2}})\right]'$. Vamos agora definir a constante $K_g = (1-g_0) + \int_0^{+\infty} g(s)(1-e^{-s})\,ds > 0$, assim podemos reescrever (2.24) como

$$(I_d + K_g A)u = f_4 \quad \text{em} \quad \left[D(A^{\frac{1}{2}})\right]'. \tag{2.25}$$

Para resolver (2.25) vamos utilizar do Teorema de Lax-Milgram. Para tanto, considere a forma bilinear

$$\begin{aligned}
a : D(A^{\frac{1}{2}}) \times D(A^{\frac{1}{2}}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
(u_1, u_2) &\longmapsto a(u_1,u_2) = (u_1,u_2) + K_g(A^{\frac{1}{2}}u_1, A^{\frac{1}{2}}u_2).
\end{aligned}$$

Observe que a é uma forma bilinear limitada e coerciva. De fato, sejam $u_1, u_2, u \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Assim, segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|a(u_1,u_2)| \le \|u_1\|\|u_2\| + K_g\|A^{\frac{1}{2}}u_1\|\|A^{\frac{1}{2}}u_2\|. \tag{2.26}$$

Como $D(A) \hookrightarrow D(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então existe constante $K_1 > 0$ tal que

$$\|u\| \le K_1\|A^{\frac{1}{2}}u\|, \quad \forall\, u \in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Assim, de (2.26) temos que

$$|a(u_1,u_2)| \leq (K_1^2+K_g)\|A^{\frac{1}{2}}u_1\|\|A^{\frac{1}{2}}u_2\| = (K_1^2+K_g)\|u_1\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\|u_2\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}.$$

Donde segue que a é limitada. Agora, vemos que

$$a(u,u) = \|u\|^2 + K_g\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \geq K_g\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = K_g\|u\|^2_{D(A^{\frac{1}{2}})}.$$

Daí, segue que a é coerciva. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ tal que

$$a(u,\tau) = \langle f_4, \tau\rangle, \quad \forall\, \tau \in D(A^{\frac{1}{2}}),$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa a dualidade entre $\left[D(A^{\frac{1}{2}})\right]'$ e $D(A^{\frac{1}{2}})$. Logo, u satisfaz a seguinte equação:

$$\langle u + K_g A u, \tau\rangle = \langle f_4, \tau\rangle, \quad \forall\, \tau \in D(A^{\frac{1}{2}}).$$

Portanto, $u \in D(A^{\frac{1}{2}})$ é a única solução de (2.25) em $\left[D(A^{\frac{1}{2}})\right]'$. Da equação (2.21) e como $\Phi \in \mathcal{M}_{1/2}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds &= \int_0^{+\infty} g(s)\|(1-e^{-s})A^{\frac{1}{2}}v + A^{\frac{1}{2}}\Phi(s)\|^2\, ds \\
&\leq 2\left(\int_0^{+\infty} g(s)(1-e^{-s})^2\, ds\right)\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + 2\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\Phi(s)\|^2\, ds \\
&\leq 2\left(\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|\Phi\|_{\mathcal{M}_{1/2}}\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Isto é, $\eta \in \mathcal{M}_{1/2}$. Além disso, para todo $s \in \mathbb{R}^+$, segue que

$$\begin{aligned}
\eta^t(s) + \eta^t_s(s) &= \left[(1-e^{-s})v + \int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)\, dy\right] + \left[e^{-s}v - \int_0^s e^{-(s-y)} f_3(y)\, dy + f_3(s)\right] \\
&= v + f_3(s).
\end{aligned}$$

Assim, η satisfaz a terceira equação de (2.20), com $\eta_s = v + f_3 - \eta \in \mathcal{M}_{1/2}$. De (2.21), (2.22) e (2.24) concluímos que

$$(1-g_0)Au + \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\, ds = f_2 - v \in H.$$

Consequentemente, o sistema (2.20) possui uma única solução $(u,v,\eta)^T \in D(\mathcal{A})$. Logo, o operador $(I_d - \mathcal{A})$ é sobrejetivo, o que prova item (iii).

Portanto, aplicando os teoremas 1.42, 1.45 e 1.46, concluímos a demonstração do Teorema 2.1. □

2.4 Comportamento Assintótico

Nesta seção vamos apresentar um resultado de estabilidade geral para a solução $\mathcal{U} = (u, v, \eta)^T$ do problema problema (2.13) e, consequentemente, para a solução (u, η) do sistema (2.4)-(2.5) (ou ainda (2.12) e (2.5)). Tal resultado é apresentado no teorema a seguir. Antes, relembremos que a norma de $\mathcal{U}(t),\ t \geq 0$, em $\mathcal{H}$ é dada por

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = (1 - g_0)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds,$$

onde $v = u_t$, g_0 é dado em (2.8) e $\|\cdot\|$ representa a norma em H. Além disso, seguindo as notações de [8], usaremos (a partir desta seção) a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para designar o produto interno em H, cuja norma $\|\cdot\|$ é proveniente.

Teorema 2.2. *Suponhamos que* $(H1)$-$(H3)$ *sejam satisfeitas. Além disso, assumimos que existe* $m_0 \geq 0$ *tal que*

$$\|A^{\frac{1}{2}}u_0(s)\| \leq m_0, \quad \forall\, s > 0. \tag{2.27}$$

Então, existem constantes $\gamma_0 \in]0, 1[$ *e* $\delta_1 > 0$ *tais que*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \delta_1 \left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\delta_0}\, ds\right) e^{-\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} + \delta_1 \int_t^{+\infty} g(s)\, ds, \tag{2.28}$$

para todos $t \in \mathbb{R}^+$ *e* $\delta_0 \in\,]0, \gamma_0]$.

Observação. A demonstração do Teorema 2.2 será dada como consequência de vários lemas que demonstraremos a seguir. Em primeiro lugar, consideramos o funcional energia $E(t)$ associado ao sistema (2.12) dado por

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + (1 - g_0)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Lema 2.3. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o funcional energia definido em* (2.29) *satisfaz*

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.30}$$

Em particular, $E'(t) \leq 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração. Tomando o produto interno de (2.1) com $u_t(t)$ em H, obtemos

$$0 = \langle u_{tt}(t), u_t(t)\rangle + (1 - g_0)\langle Au(t), u_t(t)\rangle + \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\, ds, u_t(t)\right\rangle.$$

Usando que $A^{\frac{1}{2}}$ é auto-adjunto e que $\eta_t = -\eta_s + u_t$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2 + (1-g_0)\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), A^{\frac{1}{2}}u_t(t)\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, A^{\frac{1}{2}}\eta_t^t(s) + A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2 + (1-g_0)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\left\langle A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s), A^{\frac{1}{2}}\eta_t^t(s)\right\rangle ds \\
&\quad + \int_0^{+\infty} g(s)\left\langle A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s), A^{\frac{1}{2}}\eta_s^t(s)\right\rangle ds \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2 + (1-g_0)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\frac{d}{ds}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}$$

pois $\eta^t(0) = 0$ e $\eta \in \mathcal{M}_{1/2}$. Observe que, integrando por partes o último termo da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g(s)\frac{d}{ds}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds &= \lim_{\tau\to+\infty} g(\tau)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(\tau)\|^2 - g(0)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(0)\|^2 \\
&\quad - \int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \\
&= -\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}$$

Combinando as duas últimas igualdades vemos que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds. \tag{2.31}$$

Portanto, usando (2.29) e (2.31), obtemos (2.30). Em particular, de (2.9), concluímos ainda que $E'(t) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. □

Lema 2.4. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, então o funcional*

$$I_1(t) = -\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds\right\rangle$$

satisfaz, para cada $\varepsilon > 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
I'_1(t) \leq &-(g_0-\varepsilon)\|u_t(t)\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\
&+ C_\varepsilon\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds - \int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $C_\varepsilon > 0$ é uma constante dependente de ε.

Demonstração. Tomando o produto interno de (2.12) por $\int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds$ em H, obtemos

$$\begin{aligned}0 =& \left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle + (1-g_0)\left\langle Au(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle \\ &+ \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds, \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle.\end{aligned}$$

Usando que $A^{\frac{1}{2}}$ é auto-adjunto, temos

$$\begin{aligned}0 =& \left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle + (1-g_0)\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle \\ &+ \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por outro lado, usando a hipótese (2.8) e o fato que $\frac{\partial}{\partial t}\eta^t(s) = -\frac{\partial}{\partial s}\eta^t(s) + u_t(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial t}\eta^t(s)\,ds \right\rangle \\ &= -I'_1(t) - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)u_t(t)\,ds \right\rangle \\ &\quad + \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial s}\eta^t(s)\,ds \right\rangle \\ &= -I'_1(t) - g_0\|u_t(t)\|^2 + \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial s}\eta^t(s)\,ds \right\rangle.\end{aligned}$$

Usando integração por partes na integral imprópria, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial s}\eta^t(s)\,ds &= \lim_{s\to+\infty} g(s)\eta^t(s) - g(0)\eta^t(0) - \int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds \\ &= \lim_{s\to+\infty} g(s)\eta^t(s) - \int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds.\end{aligned}$$

Agora, como $g(\cdot)\eta^t(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, temos que $\lim_{s\to+\infty} g(s)\eta^t(s) = 0$. Logo

$$\int_0^{+\infty} g(s)\frac{\partial}{\partial s}\eta^t(s)\,ds = -\int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds.$$

Assim,

$$\left\langle u_{tt}(t), \int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle = -I'_1(t) - g_0\|u_t(t)\|^2 - \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle. \tag{2.34}$$

Substituindo (2.34) em (2.33), temos

$$\begin{aligned}I'_1(t) =& - g_0\|u_t(t)\|^2 + (1-g_0)\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle \\ &- \left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle + \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle.\end{aligned} \tag{2.35}$$

No que segue, vamos estimar separadamente os três últimos termos de (2.35).

(i) Usando as proposições 1.32, 1.33 e 1.34 temos

$$\begin{aligned}
\left\langle A^{\frac{1}{2}}u(t), \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle &\leq \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\| \left\| \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\| \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\| \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\|^2 \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&= \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} (g(s))^{\frac{1}{2}}(g(s))^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{g_0}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \right) \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{g_0}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}$$

(ii) Usando novamente as Proposições 1.32, 1.33 e 1.34, juntamente com a hipótese (H1) para estimar $\|\eta^t(s)\|^2$ por $\frac{1}{a}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2$, e o fato de que g é não crescente, temos

$$\begin{aligned}
-\left\langle u_t(t), \int_0^{+\infty} g'(s)\eta^t(s)\,ds \right\rangle &\leq \|u_t(t)\| \left\| \int_0^{+\infty} (-g'(s))\eta^t(s)\,ds \right\| \\
&\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\| \int_0^{+\infty} (-g'(s))\eta^t(s)\,ds \right\|^2 \\
&\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} (-g'(s))\|\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&= \varepsilon\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} (-g'(s))^{\frac{1}{2}}(-g'(s))^{\frac{1}{2}}\|\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&\leq \varepsilon\|u_t(t)\|^2 - \frac{g(0)}{4a\varepsilon}\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds
\end{aligned}$$

(iii) Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\rangle &= \left\| \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\|^2 \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&= \left(\int_0^{+\infty} (g(s))^{\frac{1}{2}}(g(s))^{\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&\leq g_0\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \right).
\end{aligned}$$

Assim, substituindo estas três últimas estimativas em (2.35), chegamos a

$$\begin{aligned} I'_1(t) \leq & - (g_0 - \varepsilon)\|u_t(t)\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + g_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \\ & - \frac{g(0)}{a\varepsilon}\int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I'_1(t) \leq & - (g_0 - \varepsilon)\|u_t(t)\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\ & + C_\varepsilon\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds - \int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right), \end{aligned}$$

onde denotamos $C_\varepsilon = \dfrac{g(0)}{a\varepsilon} + g_0\left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\right) > 0$ o que conclui a prova de (2.32) como queríamos. $\square$

Lema 2.5. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, o funcional*

$$I_2(t) = \langle u_t(t), u(t)\rangle$$

satisfaz, para cada $\varepsilon > 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}^+$,

$$I'_2(t) \leq \|u_t(t)\|^2 - (1 - g_0 - \varepsilon)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \tilde{C}_\varepsilon\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds, \tag{2.36}$$

onde $\tilde{C}_\varepsilon > 0$ é uma constante dependente de ε.

Demonstração. Tomando produto interno de (2.12) por $u(t)$ em H, obtemos

$$\langle u_{tt}(t), u(t)\rangle + (1 - g_0)\langle Au(t), u(t)\rangle + \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A\eta^t(s)\,ds, u(t)\right\rangle = 0.$$

Usando que $A^{\frac{1}{2}}$ é auto-adjunto e notando que

$$\begin{aligned} \langle u_{tt}(t), u(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle u_t(t), u(t)\rangle - \langle u_t(t), u_t(t)\rangle \\ &= I'_2(t) - \|u_t(t)\|^2, \end{aligned}$$

obtemos ainda

$$I'_2(t) = \|u_t(t)\|^2 - (1 - g_0)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 - \left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\rangle. \tag{2.37}$$

Agora, vamos estimar o último termo de (2.37). Com efeito, usando as proposições 1.32, 1.33

e 1.34, segue que

$$
\begin{aligned}
-\left\langle \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds, A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\rangle &\leq \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\| \left\| \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\| \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\| \int_0^{+\infty} g(s)A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\,ds \right\|^2 \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_0^{+\infty} |g(s)|\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|\,ds \right)^2 \\
&\leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \frac{g_0}{\varepsilon}\int_0^{+\infty} |g(s)|\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \\
&= \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \tilde{C}_\varepsilon\int_0^{+\infty} |g(s)|\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}
$$

com $\tilde{C}_\varepsilon = \frac{g_0}{\varepsilon} > 0$. Assim, substituindo esta última estimativa em (2.37), concluímos

$$
I'_2(t) \leq \|u(t)\|^2 - (1-g_0-\varepsilon)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \tilde{C}_\varepsilon\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds,
$$

o que prova a estimativa (2.36). □

Lema 2.6. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, existem constantes* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ *tais que o funcional*

$$
I_3(t) = I_1(t) + \frac{g_0}{2}I_2(t) + \alpha_0 E(t)
$$

satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}^+$,

$$
I'_3(t) \leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds. \tag{2.38}
$$

Demonstração. Multiplicando (2.36) por $\frac{g_0}{2}$ e somando com (2.32), temos

$$
\begin{aligned}
I'_1(t) + \frac{g_0}{2}I'_2(t) \leq &-(g_0-\varepsilon)\|u_t(t)\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\
&+ C_\varepsilon\left(\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds - \int_0^{+\infty} g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right) \\
&+ \frac{g_0}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 - (1-g_0-\varepsilon)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \tilde{C}_\varepsilon\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Usando (2.30) segue que

$$
\begin{aligned}
I'_1(t) + \frac{g_0}{2}I'_2(t) + 2C_\varepsilon E'(t) &\leq \frac{1}{2}\left(-(g_0-2\varepsilon)\|u_t(t)\|^2 - (g_0(1-g_0-\varepsilon)-2\varepsilon)\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2\right) \\
&\quad + \left(C_\varepsilon + \frac{g_0}{2}\tilde{C}_\varepsilon\right)\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \\
&\leq \alpha_1\left(-\frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right)\right) \\
&\quad + \left(C_\varepsilon + \frac{g_0}{2}\tilde{C}_\varepsilon + \frac{\alpha_1}{2}\right)\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds,
\end{aligned}
$$

em que $\alpha_1 = min\{g_0 - 2\varepsilon, g_0(1 - g_0 - \varepsilon) - 2\varepsilon\} > 0$, com a escolha de $\varepsilon = \dfrac{g_0(1-g_0)}{2(2+g_0)} > 0$. Observe que

$$E(t) \leq \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds\right) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, tomando $\alpha_0 = 2C_\varepsilon > 0$ e $\alpha_2 = C_\varepsilon + \dfrac{g_0}{2}\tilde{C}_\varepsilon + \dfrac{\alpha_1}{2} > 0$, segue que

$$I'_3(t) \leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds,$$

como desejado. □

Lema 2.7. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, existe $M_0 > 0$ tal que o funcional definido por*

$$I_4(t) = ME(t) + I_3(t)$$

satisfaz, para todo $t \in \mathbb{R}^+$,

$$M_0 E(t) \leq I_4(t) \leq 3M_0 E(t) \tag{2.39}$$

e

$$I'_4(t) \leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds, \tag{2.40}$$

onde as constantes α_1 e α_2 são as mesmas dadas no Lema 2.6 e $M = 2M_0 > 0$.

Demonstração. De (2.8) e (2.29) temos

$$E(t) \geq \frac{(1-g_0)}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds\right). \tag{2.41}$$

Usando (2.7), (2.41) e das definições de I_1 e I_2, existem constantes positivas d_1 e d_2 tais que

$$|I_1(t)| \leq d_1 E(t) \quad \text{e} \quad |I_2(t)| \leq d_2 E(t).$$

De fato, usando as proposições 1.32, 1.33 e 1.34 e da definição de I_1, temos

$$\begin{aligned}
|I_1(t)| &\leq \|u_t(t)\| \left\|\int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\, ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\int_0^{+\infty} g(s)\eta^t(s)\, ds\right\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{g_0}{2a}\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds \\
&\leq d_1\left(\frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds\right)\right) \\
&\leq d_1 E(t),
\end{aligned}$$

com $d_1 = \max\left\{1, \dfrac{g_0}{a}\right\} > 0$. Usando as proposições 1.32, 1.33, a definição de I_2 e a hipótese (H1), temos

$$
\begin{aligned}
|I_2(t)| &\leq \|u_t(t)\|\|u(t)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2a}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{a}\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds\right)\right),
\end{aligned}
$$

em que $C = 1 + \dfrac{1}{a} > 0$. Daí, segue que

$$|I_2(t)| \leq d_2 E(t),$$

onde $d_2 = \dfrac{C}{1-g_0} > 0$. Assim, da Desigualdade Triangular, obtemos que

$$
\begin{aligned}
|I_3(t)| &\leq |I_1(t)| + \frac{g_0}{2}|I_2(t)| + \alpha_0 E(t) \\
&\leq \left(d_1 + \frac{g_0}{2}d_2 + \alpha_0\right)E(t) \\
&= M_0 E(t).
\end{aligned}
$$

Pela definição de valor absoluto temos

$$-M_0E(t) \leq I_3(t) \leq M_0E(t).$$

Somando $ME(t)$ na desigualdade acima (com $M > 0$ qualquer), obtemos

$$(M - M_0)E(t) \leq ME(t) + I_3 \leq (M + M_0)E(t).$$

Em particular, para $M = 2M_0 > 0$ temos que

$$M_0E(t) \leq I_4(t) \leq 3M_0E(t),$$

o que prova (2.39). Além disso, como $E'(t) \leq 0$ e $I'_4(t) = ME'(t) + I'_3(t) \leq I'_3(t)$, segue que

$$I'_4(t) \leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\,ds \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+,$$

provando a estimativa (2.40) como desejado. □

No próximo resultado, vamos estimar o termo $\xi(t)I'_4(t) + \beta_1 E'(t)$.

Lema 2.8. *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, existem constantes positivas β_1 e β_2 tais que, para todo $t \in \mathbb{R}^+$,*

$$\xi(t){I'}_4(t) + \beta_1 E'(t) \leq -\alpha_1 \xi(t)E(t) + \beta_2 \xi(t) \int_t^{+\infty} g(s)\, ds. \tag{2.42}$$

Demonstração. Usando (2.9) e o fato de que ξ é não crescente, temos

$$\xi(t) \int_0^t g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds \leq \int_0^t \xi(s)g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds \leq -\int_0^t g'(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds.$$

Assim, usando (2.30) e o fato de que g é não crescente, obtemos

$$\xi(t) \int_0^t g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds \leq -2E'(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.43}$$

Por outro lado, de (2.41) e o fato que de E é não crescente, segue que

$$\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \leq \frac{2}{1-g_0}E(t) \leq \frac{2}{1-g_0}E(0), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Assim, para todo $s > t$,

$$\begin{aligned}
\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s))\|^2 &\leq 2\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + 2\|A^{\frac{1}{2}}u(t-s)\|^2 \\
&\leq 2\|A^{\frac{1}{2}}u(\tau)\|^2 + 2\sup_{\tau<0}\|A^{\frac{1}{2}}u(\tau)\|^2 \\
&\leq \frac{4}{1-g_0}E(0) + 2\sup_{\tau>0}\|A^{\frac{1}{2}}u_0(\tau)\|^2, \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Da desigualdade anterior e de (2.27) temos, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, que

$$\xi(t) \int_t^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s))\|^2\, ds \leq \left(\frac{4}{1-g_0}E(0) + 2m_0^2\right)\xi(t)\int_t^{+\infty} g(s)\, ds. \tag{2.44}$$

Multiplicando (2.40) por $\xi(t)$, obtemos

$$\xi(t){I'}_4(t) \leq -\alpha_1\xi(t)E(t) + \alpha_2\xi(t)\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds.$$

Agora, observe que por (2.43) e (2.44), podemos estimar o último termo do lado direito da desigualdade acima por

$$\begin{aligned}
\alpha_2\xi(t)\int_0^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds &= \alpha_2\xi(t)\left[\int_0^t g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds + \int_t^{+\infty} g(s)\|A^{\frac{1}{2}}\eta^t(s)\|^2\, ds\right] \\
&\leq -2\alpha_2 E'(t) + \alpha_2\left(\frac{4}{1-g_0}E(0) + 2m_0^2\right)\xi(t)\int_t^{+\infty} g(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\xi(t){I'}_4(t) + \beta_1 E'(t) \leq -\alpha_1 \xi(t) E(t) + \beta_2 \xi(t) \int_t^{+\infty} g(s)\, ds,$$

onde tomamos $\beta_1 = 2\alpha_2 > 0$ e $\beta_2 = \alpha_2 \left(\frac{4}{1-g_0} E(0) + 2m_0^2 \right) > 0$. Isto conclui a prova de (2.42). □

Lema 2.9. *Sejam*

$$F(t) = \xi(t) I_4(t) + \beta_1 E(t) \quad e \quad h(t) = \xi(t) \int_t^{+\infty} g(s)\, ds.$$

Sob as hipóteses do Teorema 2.2, existe $\gamma_0 \in \,]0,1[$, tal que

$$F(T) \leq e^{-\delta_0 \int_0^T \xi(s)\, ds} \left(F(0) + \beta_2 \int_0^T e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} h(t)\, dt \right), \tag{2.45}$$

para todos $\delta_0 \in \,]0, \gamma_0]$ e $T > 0$.

Demonstração. Usando (2.39) e o fato de que $\xi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ é não crescente, obtemos

$$\beta_1 E(t) \leq F(t) \leq (3\xi(t) M_0 + \beta_1) E(t) \leq (3\xi(0) M_0 + \beta_1) E(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.46}$$

Como $F'(t) = \xi'(t) I_4(t) + \xi(t){I'}_4(t) + \beta_1 E'(t)$, usando (2.39) e (2.42) segue que

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq \xi'(t) I_4(t) - \alpha_1 \xi(t) E(t) + \beta_2 h(t) \\ &\leq -\alpha_1 \xi(t) E(t) + \beta_2 h(t). \end{aligned}$$

Agora, de (2.46), observe que

$$-E(t) \leq -\frac{1}{(3\xi(0) M_0 + \beta_1)} F(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Disto e do fato que ξ é não crescente, chegamos a

$$F'(t) \leq -\gamma_0 \xi(t) F(t) + \beta_2 h(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.47}$$

onde $\gamma_0 = \dfrac{\alpha_1}{3\xi(0) M_0 + \beta_1}$. Observe que $\beta_1 = 2C_\varepsilon + g_0 \tilde{C}_\varepsilon + \alpha_1 > \alpha_1$ e, consequentemente, $\gamma_0 \in \,]0,1[$. Assim, a desigualdade (2.47) vale para todo $\delta_0 \in \,]0, \gamma_0]$, ou seja,

$$F'(t) \leq -\delta_0 \xi(t) F(t) + \beta_2 h(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.48}$$

Segue de (2.48) que

$$\delta_0 \xi(t) e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} F(t) + e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} F'(t) \leq \beta_2 e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} h(t),$$

isto é,

$$\left(e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} F(t)\right)' \leq \beta_2 e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t).$$

Integrando ambos os membros da última desigualdade de 0 até T, com $T > 0$, temos

$$e^{\delta_0 \int_0^T \xi(s)\,ds} F(T) - F(0) \leq \int_0^T \beta_2 e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t)\,dt,$$

de onde vem que

$$F(T) \leq e^{-\delta_0 \int_0^T \xi(s)\,ds} \left(F(0) + \beta_2 \int_0^T e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t)\,dt\right).$$

Isto conclui a prova de (2.45) como queríamos. $\square$

Finalmente, de posse das estimativas fornecidas pelos lemas anteriores, estamos aptos a concluir a prova do Teorema 2.2.

Conclusão da prova do Teorema 2.2. Por (2.46), vem que

$$E(T) \leq \frac{1}{\beta_1} F(T), \quad \forall\, T \in \mathbb{R}^+.$$

Além disso, de (2.45), obtemos

$$E(T) \leq \frac{1}{\beta_1} e^{-\delta_0 \int_0^T \xi(s)\,ds} \left(F(0) + \beta_2 \int_0^T e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t)\,dt\right), \tag{2.49}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Agora, vemos que

$$e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t) = \frac{1}{\delta_0} \left(e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds}\right)' \int_t^{+\infty} g(s)\,ds, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+.$$

Integrando por partes a igualdade acima, lembrando $\lim\limits_{s \to +\infty} g(s) = 0$ e notando que

$$\left(\int_t^{+\infty} g(s)\,ds\right)' = -g(t)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} h(t)\,dt &= \frac{1}{\delta_0} \int_0^T \left[\left(e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds}\right)' \int_t^{+\infty} g(s)\,ds\right] dt \\ &= \frac{1}{\delta_0} \left(e^{\delta_0 \int_0^T \xi(s)\,ds} \int_T^{+\infty} g(s)\,ds - \int_0^{+\infty} g(s)\,ds + \int_0^T e^{\delta_0 \int_0^t \xi(s)\,ds} g(t)\,dt\right). \end{aligned}$$

Usando (2.8), isto é, que $g_0 \in \,]0,1[$ e combinado a igualdade acima com (2.49), segue que

$$
\begin{aligned}
E(T) \leq \frac{1}{\beta_1}\left(F(0)e^{-\delta_0\int_0^T \xi(s)\,ds} + \frac{\beta_2}{\delta_0}\int_T^{+\infty} g(s)\,ds\right)& \\
+ \frac{\beta_2}{\beta_1\delta_0}e^{-\delta_0\int_0^T \xi(s)\,ds}\int_0^T e^{\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds} g(t)\,dt.& \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da hipótese (2.9) segue que $(e^{\int_0^t \xi(s)\,ds}g(t))' \leq 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T e^{\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds} g(t)\,dt &= \int_0^T e^{\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds}(g(t))^{\delta_0}(g(t))^{1-\delta_0}\,dt \\
&\leq (g(0))^{\delta_0}\int_0^T (g(t))^{1-\delta_0}\,dt. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Combinando (2.50) e (2.51), relembrando a identidade (2.29) e escrevendo t no lugar de T, concluímos

$$
\begin{aligned}
2E(t) = \|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{2}{\beta_1}\left(F(0)e^{-\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds} + \frac{\beta_2}{\delta_0}\int_t^{+\infty} g(s)\,ds\right) \\
&\quad + \frac{2\beta_2}{\beta_1\delta_0}(g(0))^{\delta_0}e^{-\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds}\int_0^t (g(s))^{1-\delta_0}\,ds \\
&= \frac{2}{\beta_1}\left(F(0) + \frac{\beta_2}{\delta_0}(g(0))^{\delta_0}\int_0^t (g(s))^{1-\delta_0}\,ds\right)e^{-\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds} \\
&\quad + \frac{2\beta_2}{\beta_1\delta_0}\int_t^{+\infty} g(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \delta_1\left(1 + \int_0^t (g(s))^{1-\delta_0}\,ds\right)e^{-\delta_0\int_0^t \xi(s)\,ds} + \delta_1\int_t^{+\infty} g(s)\,ds,
$$

onde denotamos $\delta_1 = \frac{2}{\beta_1}\max\{F(0), \frac{\beta_2}{\delta_0}, \frac{\beta_2}{\delta_0}(g(0))^{\delta_0}\} > 0$. Portanto, fica provado o decaimento (2.28). Isto completa a demonstração do Teorema 2.2. $\square$

3 TIPOS DE DECAIMENTO

Neste capítulo apresentaremos alguns tipos de decaimento dado pela fórmula (2.28). Inicialmente, note que se existir $\varepsilon_0 \in \,]0,1[$, tal que

$$\int_0^{+\infty} (g(s))^{1-\varepsilon_0} \, ds < +\infty, \tag{3.1}$$

então podemos obter $\delta_0 \in \,]0, \gamma_1]$, onde $\gamma_1 = min\{\varepsilon_0, \gamma_0\}$, tal que

$$\int_0^{+\infty} (g(s))^{1-\delta_0} \, ds < +\infty.$$

Assim, o decaimento (2.28) pode ser reescrito em uma forma mais simplificada como segue

$$||\mathcal{U}(t)||^2_{\mathcal{H}} \leq \tilde{\delta}_1 \left(e^{-\delta_0 \int_0^t \xi(s)\, ds} + \int_t^{+\infty} g(s)\, ds \right), \tag{3.2}$$

para algum $\tilde{\delta}_1 > 0$.

Nas seções seguintes apresentaremos alguns tipos mais comuns de taxas de decaimento geradas pelas estimativas (2.28) ou (3.2).

3.1 Decaimento exponencial

Consideremos o caso em que g possui decaimento exponencial, por exemplo, quando $g(t) = e^{-kt}$, onde $k > 1$. Neste caso, assumimos que $\xi(t) = k$. Assim, as condições (2.8), (2.9) e (3.1) são satisfeitas e temos

$$\int_0^t \xi(s)\, ds = kt$$

e

$$\int_0^{+\infty} g(s)\, ds = \frac{1}{k} < +\infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{U}(t)||^2_{\mathcal{H}} &\leq \delta_1 \left(e^{-\delta_0 kt} + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) \\ &\leq c_1 e^{-c_2 t}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

3.2 DECAIMENTO POLINOMIAL

Vamos considerar o caso em que a função g possui um decaimento polinomial, por exemplo, quando $g(t) = \dfrac{d}{(1+t)^q}$, com $q > 1$ e $d > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que são satisfeitas as condições (2.8), (2.9) e (3.1). Neste caso, consideramos $\xi(t) = q(1+t)^{-1}$. Sendo assim,

$$\int_0^t \xi(s)\,ds = q\ln(1+t)$$

e

$$\int_0^{+\infty} g(s)\,ds = \frac{d}{q-1} < +\infty.$$

Logo, de (3.2) segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}(t)\|^2_{\mathcal{H}} &\leq \delta_1 \left(e^{-\delta_0 q \ln(1+t)} + \frac{d(1+t)^{1-q}}{q-1} \right) \\
&\leq \delta_1 \left((1+t)^{-\delta_0 q} + \frac{d(1+t)^{1-q}}{q-1} \right) \\
&\leq \frac{c_1}{(1+t)^{c_2}}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+,
\end{aligned}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

3.3 DECAIMENTO LOGARÍTMICO

Consideremos agora um caso onde a condição (3.1) não é satisfeita, por exemplo, quando $g(t) = \dfrac{a}{(2+t)(\ln(2+t))^q}$, com $q > 1$ e $a > 0$ suficientemente pequeno de modo a satisfazer (2.8) e (2.9). Neste caso, assumimos que $\xi(t) = \dfrac{q+\ln(2+t)}{(2+t)\ln(2+t)}$. Logo,

$$\int_0^t \xi(s)\,ds = \ln(2+t) - \ln 2 + q(\ln(\ln(2+t)) - \ln(\ln 2))$$

e

$$\int_0^{+\infty} g(s)\,ds = \frac{a}{q-1}(\ln(2+t))^{1-q}.$$

Neste exemplo, utilizaremos o decaimento (2.28) com $\delta_0 \in]0, \gamma_0]$ suficientemente pequeno tal que $(1-\delta_0)q > 1$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \delta_1 \left(1 + \int_0^t \frac{a^{1-\delta_0}}{(2+s)^{1-\delta_0}(\ln(2+s))^{(1-\delta_0)q}}\, ds\right) \left(\frac{2^{\delta_0}(\ln 2)^{q\delta_0}}{(2+t)^{\delta_0}(\ln(2+t))^{q\delta_0}}\right) \\
&\quad + \frac{a\delta_1}{q-1}(\ln(2+t))^{1-q} \\
&\leq \delta_1 \left(1 + \int_0^t \frac{a^{1-\delta_0}}{(2+s)(\ln(2+s))^{(1-\delta_0)q}}\, ds\right) \left(\frac{2^{\delta_0}(\ln 2)^{q\delta_0}}{(\ln(2+t))^{q\delta_0}}\right) \\
&\quad + \frac{a\delta_1}{q-1}(\ln(2+t))^{1-q} \\
&\leq c\left(\frac{1}{(\ln(2+t))^{q-1}} + \frac{1}{(\ln(2+t))^{q\delta_0}}\right),
\end{aligned}$$

onde c é uma constante positiva. Daí,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{c}{(\ln(2+t))^{q-1}}.$$

Tal estimativa coincide com o decaimento primeiramente obtido no artigo [7], cujas hipóteses e exemplos de decaimento podem vistos em [7, Seção 2].

Observação. Seguindo as notações introduzidas por [7, 8] foi assumido neste trabalho que vale a condição (2.8). No entanto, os mesmos resultados são válidos usando apenas que a integral em (2.8) seja finita.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do problema abstrato (2.1), como em [7] e [8], em casos concretos de equações diferenciais parciais provenientes da física-matemática. Em outras palavras, os mesmos resultados de existência e comportamento assintótico são válidos para os casos concretos abaixo mencionados.

4.1 MODELO DE ONDAS

Os resultados fornecidos pelos teoremas 2.1 e 2.2 mantêm-se para o seguinte problema de valor inicial e de fronteira associado a equação da onda viscoelástica

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^{+\infty} g(s)\Delta u(x,t-s)\,ds = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+,\\
&u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,\\
&u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,
\end{aligned}
$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Neste caso, temos que $A = -\Delta$, $H = L^2(\Omega)$, $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$ e $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Usando o produto interno e norma canônicos em $L^2(\Omega)$, definidos (1.2), pode-se mostrar facilmente que o operador A é auto-adjunto, positivo definido e a hipótese (H1) é satisfeita. De fato, usando a proposição 1.31, temos para todos $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que

$$
\begin{aligned}
(Au, v) = (-\Delta u, v) &= -\int_\Omega \Delta u v\,dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,d\Omega}_{=0}\\
&= -\int_\Omega u \Delta v\,dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\Omega}_{=0} = (u, -\Delta v) = (u, Av).
\end{aligned}
$$

Portanto, $A = -\Delta$ é auto-adjunto. Além disso, o operador $A = -\Delta$ é positivo definido, pois

$$
(Au, u) = -\int_\Omega \Delta u u\,dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq 0.
$$

Por fim, pelas proposições 1.30 e 1.35, temos

$$
\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} = C_p \|A^{\frac{1}{2}} u\|_H, \quad u \in H_0^1(\Omega),
$$

onde $C_p > 0$ é a constante de Poincaré. Assim, a hipótese (H1) é satisfeita como queríamos.

4.2 Modelo em Elasticidade Linear

Os teoremas 2.1 e 2.2 também são aplicáveis no seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \int_0^{+\infty} g(s)\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u(t-s)}{\partial x_k}\right) ds = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times\mathbb{R}^+,\\
&u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times\mathbb{R}^+,\\
&u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+,
\end{aligned}
$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e os coeficientes $a_{jk} \in C^1(\bar{\Omega})$, $j,k = 1,\ldots,n$, satisfazem as condições clássicas de simetria

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x), \quad \forall\, j,k = 1,\ldots,n,\ \forall\, x\in\Omega,$$

e coercividade, ou seja, existe $\tilde{a} > 0$ tal que

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)y_k y_j \geq \tilde{a}\sum_{j=1}^{n} y_j^2, \quad \forall\, y = (y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall\, x\in\Omega.$$

Neste caso, definimos $H = L^2(\Omega)$ e $A : D(A)\subset H \to H$ como

$$Au = -\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right),$$

para todo $u\in D(A) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Aqui, também tem-se que $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$, de acordo com [7]. Resta verificar que o operador A é auto-adjunto, positivo definido e satisfaz a hipótese (H1). Com efeito, sejam $u,v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Usando o Teorema de Integração por Partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
(Au, v) &= \left(-\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right), v \right) \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) v \, dx \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \, dx \\
&= -\sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \, dx \\
&= \left(u, -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right) \\
&= (u, Av),
\end{aligned}
$$

ou seja, o operador A é auto-adjunto. Além disso, A é um operador positivo definido, pois

$$
\begin{aligned}
(Au, u) &= \left(-\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right), u \right) \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) u \, dx \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\Omega} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx \\
&\geq \tilde{a} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \, dx \\
&= \tilde{a} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
&= \tilde{a} \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Por fim, a condição (H1) é verificada como no caso anterior, visto que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

4.3 Modelo de placas (Sistema do tipo Petrovsky)

Por fim, veremos uma aplicação dos teoremas 2.1 e 2.2 no seguinte problema de valor inicial e de fronteira associado a uma equação da placa viscoelástica

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \int_0^{+\infty} g(s)\Delta^2 u(x,t-s)\,ds = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+,\\
&u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+,\\
&u(x,-t) = u_0(x,t), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+,
\end{aligned}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave e ν é o vetor normal exterior a Ω. Neste caso, definimos $H = L^2(\Omega)$ e o operador $A : D(A) \subset H \to H$ como

$$Au = \Delta^2 u = \Delta(\Delta u),$$

para todos $u \in D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Além disso, $D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^2(\Omega)$. No que segue, verifiquemos que $A = \Delta^2$ é auto-adjunto, positivo definido e que a hipótese (H1) é trivialmente satisfeita em virtude das imersões de Sobolev. De fato, sejam $u, v \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, usando a fórmula de Green (Proposição 1.31) quatro vezes e observando que os termos de fronteira se anulam, segue que

$$\begin{aligned}
(Au, v) = (\Delta^2 u, v) &= \int_\Omega \Delta^2 u v\,dx = \int_\Omega \Delta(\Delta u) v\,dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\nabla v\,dx\\
&= \int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla(\Delta v)\,dx = \int_\Omega u\Delta^2 v\,dx\\
&= (u, \Delta^2 v) = (u, Av).
\end{aligned}$$

Logo, o operador $A = \Delta^2$ é auto-adjunto. Mais ainda, usando novamente o Teorema de Green duas vezes, obtém-se

$$(Au, u) = (\Delta^2 u, u) = \int_\Omega \Delta^2 u u\,dx = \int_\Omega |\Delta u|^2\,dx = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \geq 0,$$

isto é, o operador $A = \Delta^2$ é positivo definido. Finalmente, notando que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (ver também proposições 1.30 e 1.35), então para todo $u \in H_0^2(\Omega)$ concluímos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2} &\leq C\|\Delta u\|_{L^2}\\
&= C\|u\|_{H^2 \cap H_0^1}\\
&\leq C\|u\|_{H_0^2}\\
&= C\|A^{\frac{1}{2}} u\|_H,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Assim, o operador $A = \Delta^2$ satisfaz a hipótese (H1) como queríamos.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, baseados no artigo de Guesmia e Messaoudi [8], estudamos a boa colocação e o comportamento assintótico para um sistema viscoelástico abstrato com história não nula. Mostramos a existência e unicidade de solução via método de semigrupos lineares. O comportamento assintótico foi estabelecido utilizando método de energia perturbada. No Capítulo 2, Seção 2.4, ficou mostrado que a taxa de decaimento de solução depende do comportamento do núcleo da memória g. No Capítulo 3 detectamos que, para uma certa classe de núcleos g e certos dados iniciais, a energia decai com taxa semelhante ao decaimento de g. No entanto, isto não ocorre de uma forma geral como pode ser visto na Seção 3.3, ou seja, o decaimento de energia neste caso pode não ter taxa semelhante ao núcleo da memória. Além disso, conforme vimos no Capítulo 4, os mesmos resultados de existência e comportamento assintótico obtidos para o problema abstrato abordado neste trabalho podem ser aplicados em problemas de Equações Diferenciais Parciais concretas provenientes da física-matemática.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, NY, 2010.

[3] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. EDUEM, Maringá, 2009.

[4] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., AND KOMORNIK, V. *Introdução à Análise Funcional*. EDUEM, Maringá, 2011.

[5] CHEPYZHOV, V. V., AND PATA, V. Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity. *Asymptot. Anal. 46* (2006), 251–273.

[6] DAFERMOS, C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal. 37* (1970), 297–308.

[7] GUESMIA, A. Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. *J. Math. Anal. Appl 382* (2011), 748–760.

[8] GUESMIA, A., AND MESSAOUDI, S. A. A new approach to the stability of an abstract system in the presence of infinite history. *J. Math. Anal. Appl 416* (2014), 212–228.

[9] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley, New York, 1989.

[10] LASIECKA, I., MESSAOUDI, S. A., AND MUSTAFA, M. I. Note on intrinsic decay rates for abstract wave equations with memory. *Journal of Mathematical Physics 54*, 3 (2013), 031504.

[11] LASIECKA, I., AND WANG, X. Intrinsic decay rate estimates for semilinear abstract second order equations with memory. In *New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations*. Springer, 2014, pp. 271–303.

[12] MESSAOUDI, S. A. General decay of solutions of a viscoelastic equation. *J. Math. Anal. Appl. 341* (2008), 1457–1467.

[13] MESSAOUDI, S. A. General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Analysis 69*, 8 (2008), 2589–2598.

[14] PATA, V. Exponential stability in linear viscoelasticity. *Quart. Appl. Math. LXIV (3)* (2006), 499–513.

[15] PATA, V. Stability and exponential stability in linear viscoelasticity. *Milan J. Math. 77* (2009), 333–360.

[16] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operator and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences v. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[17] RIVERA, J. E. M. *Estabilização de semigrupos e aplicações*. Séries de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.

[18] ZHENG, S. *Nonlinear Evolutions Equations*. Chapman & Haal/CRC Research Notes in Mathematics, Boca Raton, FL, 2004.