



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

FÁBIO JUNIOR DE ANDRADE

**O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR  
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

---

Londrina  
2013

FÁBIO JUNIOR DE ANDRADE

**O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR  
MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina  
2013

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

A553e Andrade, Fábio Junior de.

O ensino de sistemas de equações lineares por meio da  
resolução de problemas / Fábio Júnior de Andrade. – Londrina,  
2013.

114 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –  
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática (Ensino  
médio) – Teses. 3. Equações lineares – Teses. 4. Sistemas lineares  
– Problemas, exercícios, etc. – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria  
Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências  
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade  
Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

FÁBIO JUNIOR DE ANDRADE

**ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR MEIO DA  
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida  
UEL – Londrina - PR

---

Profa. Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva  
UTFPR – Cornélio Procópio - PR

---

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini  
UEL – Londrina - PR

Londrina, 06 de agosto de 2013.

Dedico este trabalho à minha família,  
em especial à minha esposa,  
que me apoiou em todos os momentos,  
e que lutou comigo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à Deus que me permitiu realizar esse curso, em meio a tantas dificuldades, que me auxiliou nos momentos mais difíceis e me confortou nas angústias e sofrimentos.

À minha orientadora que desde o início me deu o suporte e o auxílio necessário para que conseguisse concluir este trabalho.

Às professoras componentes da banca examinadora pelo tempo dedicado.

Aos meus pais, que fizeram de mim um homem responsável e que me ensinaram a não desistir no meio do caminho.

Aos pais de minha esposa pela dedicação e auxílio prestados quando precisei.

Aos meus filhos, que são a inspiração e a razão pela qual luto a cada dia em busca de um futuro melhor.

Aos meus amigos do PROFMAT, em especial, Fernando, Keyla e Ednilson, com os quais compartilhei momentos inesquecíveis.

Por fim, com muito amor, agradeço à minha esposa, que me enxugou cada lágrima de sofrimento no decorrer desse trabalho, que chorou comigo nos momentos mais difíceis e que me aconselhou a acreditar quando minhas esperanças já não eram tão fortes. Obrigado.

ANDRADE, Fábio Junior de Andrade. **O ensino de sistemas de equações lineares por meio da resolução de problemas.** 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

## RESUMO

Este trabalho aborda a perspectiva para o ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas, sendo os problemas o ponta-pé inicial para o estudo de Sistemas de Equações Lineares, bem como os métodos de resolução mais comuns nas escolas de Ensino Médio (Regra de Cramer, Método de Gauss - Jordan e Método da Eliminação Gaussiana). A ideia principal defendida no presente trabalho é que: quando expostos a situações desafiadoras, os alunos sentem a necessidade de aprender novas técnicas e ferramentas matemáticas, que proporcionam o domínio de habilidades e competências que podem ser aplicadas situações do cotidiano. Um problema motivador tem a finalidade de motivar os alunos nos estudos e na pesquisa sobre temas importantes para sua formação básica. A necessidade de aprender um novo conteúdo deve partir dos próprios alunos, no momento em que forem colocados frente a uma situação que os desafie e motive. Trata-se de uma proposta para o ensino de Sistemas de Equações Lineares mediado pela resolução de problemas. Assim é apresentado um conjunto de problemas resolvidos e comentados, que constituem uma proposta para introduzir e desenvolver o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares com alunos do Ensino Médio, tendo por base o referencial teórico que orienta o desenvolvimento do nosso trabalho.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares. Resolução de problemas. Ensino médio

ANDRADE, Fábio Junior de. **The linear equation systems teaching by the problems solving**. 2013, 114 f. Dissertation (Master's degree in Professional in Mathematics in National Network) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

### **ABSTRACT**

This paper approaches a perspective in the math teaching by the Problems Solving, being them the beginning for the study of the linear equations systems, so as the most common solving methods in high schools (Cramer Rule, Gauss - Jordan Method and Gaussian Elimination Method). The main defended idea in the present work is: when exposed to challenging situations, the students feel the need of learning new mathematical techniques and tools, so that it can provide the mastery of skills and abilities that can be applied in daily situations. A motivator problem has the goal of motivating the students in studies and researches about important topics for their basic formation. The need of learning a new content must come from the students, when they are faced to a situation that challenges and motivates them. It is a proposal for the teaching of linear equation systems mediated by problems solving. This way, it is presented a set of solved and commented exercises, which consists in a proposal to introduce and develop the solving teaching of linear equation systems to high school students, having as a base the theoretical reference that guides the development of our work.

**Keywords:** Linear systems. Problem solving. High school.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Principais competências em matemática para o Ensino Médio .....	11
<b>Figura 2</b> – Estratégias matemáticas para o enfrentamento de situações – problema.....	12
<b>Figura 3</b> – Tabela de Preços – Unimed Fesp - Anasps e Tabela de reembolso .....	17
<b>Figura 4</b> – Classificação dos Sistemas de equações lineares .....	40
<b>Figura 5</b> – Classificação dos Sistemas Lineares.....	41
<b>Figura 6</b> – Exercício sobre a discussão de sistemas lineares.....	59
<b>Figura 7</b> – Interpretação Geométrica do sistema 2 x 2 (SPD).....	62
<b>Figura 8</b> – Interpretação Geométrica do sistema 2 x 2 (SPI) .....	63
<b>Figura 9</b> – Interpretação Geométrica do sistema 2 x 2 (SI).....	64
<b>Figura 10</b> – Planos concorrentes .....	65
<b>Figura 11</b> – Planos coincidentes .....	65
<b>Figura 12</b> – Planos paralelos .....	66
<b>Figura 13</b> – Planos concorrentes dois a dois .....	66
<b>Figura 14</b> – Dois Planos Paralelos e um transversal .....	66
<b>Figura 15</b> – Três planos concorrentes .....	67
<b>Figura 16</b> – Método de Pólya para resolver um problema .....	81
<b>Figura 17</b> – Três planos concorrentes .....	87
<b>Figura 18</b> – Distribuição de unidades de vitaminas A,B,C,D e E entre os alimentos I, II, III, IV, V para uma dieta balanceada.....	88
<b>Figura 19</b> – Duas retas concorrentes.....	96
<b>Figura 20</b> – Desempenho dos competidores nos quatro dias de campeonato .....	97
<b>Figura 21</b> – Secção transversal de uma barra metálica.....	103

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>CAPÍTULO 1 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES</b> .....	15
1.1 O ESTUDO DAS MATRIZES.....	15
1.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES.....	17
1.3 TIPOS DE MATRIZES .....	23
1.4 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ.....	26
1.4.1 Desenvolvimento de Laplace .....	28
1.4.2 Regra de Sarrus.....	31
1.4.3 Propriedades dos Determinantes.....	32
1.5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	38
1.5.1 Forma Matricial de um Sistema de Equações Lineares.....	39
1.5.2 Solução de Um Sistema Linear.....	40
1.5.3 Resolução de Sistemas Lineares.....	42
1.5.3.1 Método da substituição .....	42
1.5.3.2 Método da comparação .....	43
1.5.3.3 Método de Gauss-Jordan .....	47
1.5.3.4 Método da eliminação de Gauss.....	48
1.5.3.5 Regra de Cramer .....	51
1.5.4 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares .....	61
<b>CAPÍTULO 2 – SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> .....	68
2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA.....	68
2.1.1 O Ensino de Matemática por Repetição .....	69
2.1.2 O Ensino da Matemática por Compreensão .....	70
2.1.3 A Matemática Moderna.....	71
2.1.4 O Ensino de Matemática por Meio da Resolução de Problemas.....	72
2.2 DIFERENCIANDO EXERCÍCIO DE PROBLEMA .....	79
<b>CAPÍTULO 3 – UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES MEDIADO PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> .....	83
3.1 PROBLEMA 1: QUANTO CUSTA?.....	83
3.1.1 Resolução.....	84

3.1.2	Interpretação Geométrica do Sistema .....	87
3.2	PROBLEMA 2: UMA DIETA BALANCEADA .....	87
3.2.1	Resolução .....	89
3.3	PROBLEMA 3: O PREÇO DA LIGAÇÃO .....	93
3.3.1	Resolução .....	94
3.3.2	Interpretação Geométrica .....	96
3.4	PROBLEMA 4: JOGO DE CARTAS .....	97
3.4.1	Resolução .....	97
3.5	PROBLEMA 5: A DISTRIBUIÇÃO DA TEMPERATURA INTERIOR EM PLACAS .....	102
3.5.1	Resolução .....	103
3.6	PROBLEMA 6: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÃO QUÍMICA.....	106
3.6.1	Resolução .....	107
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>		<b>111</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>		<b>112</b>

## INTRODUÇÃO

Em muitas situações o ensino de matemática se dá pelo incentivo aos alunos à reprodução de procedimentos e o acúmulo de informações para, posteriormente, aplicá-los em exercícios metódicos e repetitivos, e na resolução de alguns problemas de aplicação de fórmulas com o intuito de testar se os alunos conseguem utilizar os conteúdos matemáticos.

Há, entretanto, grande quantidade de educadores matemáticos que estão apostando na resolução de problemas como instrumento e artifício primordial para o ensino e aprendizagem de matemática, especialmente na educação básica (Ensino Fundamental e Médio). Muito se tem estudado a respeito dessa ideia, de iniciar a aprendizagem de algum tema de matemática partindo da análise e resolução de um problema, no intuito de desafiar os alunos a pensarem e levantarem hipóteses a respeito do assunto em questão. Neste contexto os Parâmetros curriculares Nacionais para a Educação Básica (1998) indicam que

Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, pág. 40)

Alguns sistemas de ensino, escolas e até alguns professores, por iniciativa própria, têm utilizado a resolução de problemas nas salas de aula. Porém, esses problemas algumas vezes são utilizados apenas como uma forma de aplicação de conteúdos ou fórmulas, como testes para saber a capacidade de reprodução intelectual dos estudantes. Esse processo vem sendo desenvolvido da seguinte maneira: os professores ensinam algum conteúdo ou método e em seguida propõe aos alunos alguns problemas para verificar a sua aprendizagem. Dessa forma, a aprendizagem dos alunos está sendo construída por reprodução ou imitação, o que faz da Matemática e dos problemas apenas um grande emaranhado de símbolos abstratos e incompreensíveis.

Muitos professores apostam na resolução de problemas como ponto de partida para a aprendizagem em matemática, dando aos estudantes a oportunidade de mobilizar seus conhecimentos e algumas habilidades para a compreensão do mundo real, conforme afirmado nos PCN (1998).

A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua auto-confiança (BRASIL, 1998, pág. 40)

Vale salientar que não é qualquer questão ou situação proposta que pode ser entendida como problema. O problema não apresenta solução imediata, ou seja, o aluno não a visualiza de início, mas pode ir construindo essa solução a partir do levantamento de hipóteses, observações, operações matemáticas, troca de idéias e discussões. Além disso, há a possibilidade da validação da resposta, o que já contribui para a compreensão do problema, bem como da matemática usada na resolução.

Nessa perspectiva, a aplicação de uma fórmula para a resolução de um problema, chegando ao resultado correto, pode deixar de proporcionar aos alunos a construção do conhecimento matemático. Segundo os PCN (1998, pág. 42), é importante que os alunos consigam fazer questionamentos, analisar as condições de validade das respostas, elaborar problemas a partir de informações já conhecidas e refletir sobre a situação a que foi exposto.

A contribuição da matemática para a formação dos alunos também é indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que associa a formação do aluno ao desenvolvimento de algumas competências conforme mostra a figura 1.

**Figura 1** – Principais competências em matemática para o Ensino Médio

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

**Fonte:** PCNEM (1998, p. 113)

O desenvolvimento dessas competências pode ser associado à metodologias de ensino, como é o caso da resolução de problemas. No entanto os PCNEM também orientam que a resolução de um problema não pode ser demasiadamente simplificada ao ponto de se tornar apenas uma aplicação de conhecimentos já adquiridos. Existem várias estratégias que podem ser abordadas em uma situação problema instigante e motivadora, colaborando para a aprendizagem dos estudantes durante a resolução. Todas elas servem para aperfeiçoar os conhecimentos e habilidades dos alunos quanto a resolução de problemas matemáticos no decorrer do processo ensino – aprendizagem e ao amadurecimento de alguns conhecimentos mobilizados durante outras situações (Figura 2).

**Figura 2** –Estratégias matemáticas para o enfrentamento de situações - problema

<b>Investigação e compreensão</b>	
<b>Na área</b>	<b>Em Matemática</b>
<b>Estratégias para enfrentamento de situações-problema</b>	
Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.</li> <li>• Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica.</li> <li>• Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.</li> </ul>

**Fonte:** PCNEM (1998, p. 115)

Considerando as orientações dos PCN e PCNEM, para o presente trabalho desenvolvem os um estudo sobre a resolução de sistemas lineares por

meio da resolução de problemas. Neste sentido a resolução de problemas pode colaborar para a mobilização dos alunos e a construção de conhecimentos associada à compreensão, argumentação, investigação e dedução no estudo de Sistemas Lineares.

Os PCN (2002) nos orientam para a relevância que a resolução de sistemas lineares apresenta para os alunos do Ensino Médio.

Com relação a álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender o conhecimento que os alunos possuem sobre a resolução de equações do primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para um sistema do tipo  $3 \times 3$  [...] (BRASIL, 2002, pág. 122)

Levando em consideração que a formação dos professores da Educação Básica precisa ser vinculada às orientações dos documentos oficiais e às metodologias para o ensino de Matemática, o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT, 2011) surge com a proposta de

[...] atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O programa opera em ampla escala, com o objetivo de, em médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo território nacional. ([http://www2.profmatt-sbm.org.br/org\\_apresentacao.asp](http://www2.profmatt-sbm.org.br/org_apresentacao.asp))

O presente trabalho de conclusão de curso no âmbito do PROFMAT visa, portanto, contribuir para a formação dos professores de matemática e tem como objetivo apresentar uma proposta de ensino de sistemas lineares mediado pela resolução de problemas.

A estrutura do texto compreende Introdução, três capítulos e considerações finais. No primeiro capítulo, fazemos uma revisita aos conteúdos de matrizes e determinantes (alguns métodos e regras para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas); sistemas de equações lineares e os métodos mais tradicionais de resolução ensinados no 2º ano do Ensino Médio que são a Regra de Cramer; o Método do Escalonamento de Sistemas e o Método da eliminação de Gauss, juntamente com alguns exemplos resolvidos aplicando os métodos apresentados. Além da resolução dos sistemas, há a necessidade de discutir as

possibilidades de respostas, através do método do escalonamento, percebendo que há diferentes tipos de sistemas os quais podem ou não apresentar solução, conforme afirmam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008).

A resolução de sistemas  $2 \times 2$  ou  $3 \times 3$  também deve ser feita via operações elementares (processo de escalonamento), com a discussão de diferentes situações (sistemas com única solução, com infinitas soluções e sem soluções). (BRASIL, 2008, p. 78)

No segundo capítulo, abordamos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino de matemática. O terceiro capítulo é dedicado a elaboração de uma proposta com problemas cuja tradução para a linguagem matemática permita a elaboração de sistemas de equações lineares, e cuja solução dos sistemas coincida com a solução dos problemas propostos, verificando algumas condições pré-estabelecidas. Cada problema é discutido, e são analisadas possíveis formas de resolução, bem como aquelas mais indicadas, na tentativa de minimizar os erros e otimizar o tempo, além de promover a aprendizagem dos alunos sobre sistemas lineares.

Finalmente apresentamos as considerações finais sobre a proposta desenvolvida, bem com as referências bibliográficas que subsidiam nosso trabalho.

## CAPÍTULO 1

### SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O estudo de sistemas lineares requer o conhecimento de conceitos básicos sobre matrizes e determinantes, devido a importância de tais conceitos na resolução dos sistemas a serem estudados. Segundo Lipschutz e Lipson (2011, p. 35), “os sistemas de equações lineares e suas soluções podem ser entendidos eficientemente por meio da linguagem das matrizes”.

Sendo assim, faz-se necessário um estudo inicial sobre matrizes e determinantes, destacando tipos especiais de matrizes e algumas de suas propriedades, bem como alguns métodos para o cálculo de determinantes de matrizes, dentre os quais se destacam a Regra de Sarrus e a Regra de Laplace, frequentemente estudados no Ensino Médio.

Iniciamos este capítulo, desenvolvendo um estudo sobre matrizes, seguido do cálculo de determinantes. Na sequência, abordamos o conteúdo de Sistema de Equações Lineares; alguns métodos de resolução; a discussão e a interpretação dos sistemas.

#### 1.1 O ESTUDO DAS MATRIZES

Em muitos problemas, dos mais variados tipos e áreas, aparecem naturalmente, informações organizadas em linhas e colunas, ou seja, organizações retangulares de valores ou medidas, como as tabelas por exemplo. Essas organizações nos fornecem a idéia do conceito de matrizes, as quais possuem um papel essencial na matemática. Segundo Boldrini (1980) a partir delas podemos estudar diferentes métodos de resolução para determinados problemas, além do que, os dados organizados em matrizes ficam mais simples de serem analisados.

É válido ressaltar que as matrizes não podem ser entendidas apenas como uma forma de notação ou ferramenta para resolver problemas ou sistemas lineares. Anton e Rorres (2001) afirmam que existe uma rica e importante teoria sobre matrizes, ampliando vastamente seu campo de aplicações ao ponto que os estudos vão se aprofundando.

**Definição.** Chama-se *Matriz A*, de ordem  $m \times n$ , um quadro de  $m \times n$  elementos (números, polinômios, funções, etc.) dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas. (Steinbruch e Winterle, 1987)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{lemos: Matriz } A \text{ de ordem } m \times n)$$

A matriz  $A$  também pode ser representada por  $A = [a_{ij}]$  com  $i, j \in N$ . Os índices  $i$  e  $j$  representam respectivamente a linha e a coluna em que se encontra o elemento  $a_{ij}$  na matriz. Por exemplo, o elemento  $a_{13}$  é o número que se encontra na linha 1 e coluna 3 da matriz.

A matriz que apresenta apenas uma linha é chamada de *matriz linha*. Já a matriz formada por apenas uma coluna é chamada de *matriz coluna*. Caso tenha o mesmo número de linhas e colunas, será uma *matriz quadrada*.

### Exemplos:

$A = (2 \quad -1 \quad 0)$  é uma matriz do tipo  $1 \times 3$  (matriz linha)

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  é uma matriz do tipo  $2 \times 1$  (matriz coluna)

$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  é uma matriz do tipo  $2 \times 2$ , ou simplesmente de ordem 2 (matriz quadrada)

De forma geral, qualquer tabela de dados numéricos, cuja apresentação obedeça a uma organização das informações em linhas e colunas, pode ser entendida como uma matriz. Como exemplo, podemos observar a tabela publicada no Diário Oficial da União em 30 de dezembro de 2009 contendo os preços (em reais) de cada tipo de plano de saúde, de acordo com suas especificidades.

**Figura 3** – Tabela de Preços – Unimed Fesp - Anasps e Tabela de reembolso.

PLANO	ABRANGÊNCIA NACIONAL		
	PLANO BÁSICO	PLANO ESPECIAL	PLANO MASTER
FAIXA ETÁRIA	ENFERMARIA	QUARTO INDIVIDUAL	QUARTO INDIVIDUAL
0-18	R\$ 111,90	R\$ 151,26	R\$ 206,01
19-23	R\$ 130,39	R\$ 178,56	R\$ 243,18
24-28	R\$ 139,73	R\$ 190,56	R\$ 259,52
29-33	R\$ 143,04	R\$ 195,65	R\$ 266,45
34-38	R\$ 162,77	R\$ 223,64	R\$ 304,58
39-43	R\$ 186,05	R\$ 256,04	R\$ 348,71
44-48	R\$ 256,42	R\$ 354,17	R\$ 482,34
49-53	R\$ 334,38	R\$ 463,89	R\$ 631,77
54-58	R\$ 374,57	R\$ 629,58	R\$ 857,42
59 OU MAIS	R\$ 670,96	R\$ 907,58	R\$ 1.297,82
Taxa de R\$ 25,00 por contrato pago no ato da adesão			

**Fonte:** Instituto Brasileiro de Benefícios para Cooperativas e Associações (DOU, 30/12/2009)

A esta tabela está associada uma matriz do tipo 10 x 3, de todos os valores (em reais) dos diferentes tipos de planos de saúde. Podemos escrever então a matriz A da forma abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} (111,90) & (130,39) & (139,73) \\ (143,04) & (162,77) & (186,05) \\ (256,42) & (334,38) & (374,57) \\ (670,96) & (151,26) & (178,56) \\ (190,56) & (206,01) & (243,18) \\ (259,52) & (266,45) & (304,58) \\ (348,71) & (482,34) & (631,77) \\ (857,42) & (1.297,82) & \end{pmatrix}$$

Considerando duas matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  com  $i, j \in N$ ,

dizemos que  $A$  e  $B$  são iguais, então  $a_{ij} = b_{ij}$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

O conjunto de todas as matrizes de um mesmo tipo recebe uma conotação generalizada como segue na definição abaixo.

**Definição.** Designa-se por  $M_{m \times n}(K)$  o conjunto de todas as matrizes do tipo  $m \times n$  (e lê-se "eme-por-ene") sobre o corpo numérico K.

## 1.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

As principais operações com matrizes são a adição, o produto de matrizes e o produto de uma matriz por um escalar, cujas referidas definições foram baseadas em Boldrini (1980).

**Definição.** Dadas duas matrizes de mesma ordem  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ ;  $i, j \in N$  definimos a matriz soma de  $A$  com  $B$  como  $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$  onde  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

A soma das matrizes  $A$  e  $B$  pode ser calculada da seguinte forma:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

### Exemplo

Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ , temos

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 7+8 \\ -1+0 & 3+5 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

**Proposição.** Dadas as matrizes  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  e  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  com  $i, j \in N$  a operação de soma de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $A + B = B + A$  (propriedade comutativa);
- ii)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (propriedade associativa);
- iii) Existe a matriz  $O$  tal que  $A + O = O + A = A$ . Dizemos que  $O$  é o elemento neutro para a adição de matrizes;
- iv) Existe a matriz  $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$  tal que  $A + (-A) = -A + A = O$ . Dizemos que  $-A$  é o simétrico da matriz  $A$

**Demonstrações:**

- i) Como  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$ , tal que  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , então  $A+B$  e  $B+A$  estão definidas. Assim, adicionalmente temos  $(A + B) = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = (B + A)$
- ii) Como  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  e  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  com  $i, j \in N \in M_{m \times n}(K)$  então  $A + (B + C)$  e  $(A + B) + C$  estão definidas. Assim, adicionalmente temos  $A + (B + C) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A + B) + C$
- iii) Seja  $A \in M_{m \times n}(K)$  e  $B = 0_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$ . Então temos  $(A + B) = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}] = A$
- iv) Seja  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$  e  $-A = [-a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$  tal que  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Então temos  $(A + B) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = 0$

Em algumas situações, há necessidade de se determinar um múltiplo de uma matriz  $A$ , o qual indicamos por  $\lambda A$ . Em casos como esse, determinamos o produto de uma matriz pelo escalar  $\lambda$ , multiplicando todos os elementos da matriz em questão por  $\lambda$ , como segue na definição.

**Definição.** Seja a matriz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  sobre um corpo  $K$  e  $\lambda \in K$  um escalar. Definimos o produto de  $\lambda$  por  $A$  e denotamos por  $\lambda A$  ou  $\lambda \cdot A$  a matriz  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  tal que  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ , em que  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**Proposição.** Sejam  $A, B$  duas matrizes do tipo  $m \times n$  sobre um corpo  $K$  e  $\lambda, \mu \in K$  dois escalares. As seguintes propriedades são verificadas para a multiplicação de uma matriz por escalar:

- i)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$   
 ii)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$   
 iii)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

iv)  $\mathbf{1} \cdot A = A$  (O escalar  $\mathbf{1}$  designa-se por elemento neutro do corpo  $K$ ).

### Demonstrações.

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \lambda(A + B) &= \lambda [(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} \\
 &= [\lambda(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} \\
 &= [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [\lambda a_{ij}]_{m \times n} + [\lambda b_{ij}]_{m \times n} \\
 &= \lambda [a_{ij}]_{m \times n} + \lambda [b_{ij}]_{m \times n} \\
 &= \lambda A + \lambda B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } (\lambda + \mu)A &= (\lambda + \mu)[a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [(\lambda + \mu)a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [\lambda a_{ij}]_{m \times n} + [\mu a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= \lambda [a_{ij}]_{m \times n} + \mu [a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= \lambda A + \mu A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } \lambda(\mu A) &= \lambda (\mu [a_{ij}]_{m \times n}) \\
 &= \lambda [\mu a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [(\lambda \mu) a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= (\lambda \mu) [a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= (\lambda \mu) A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } \mathbf{1} \cdot A &= \mathbf{1} \cdot [a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [1 \cdot a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= [a_{ij}]_{m \times n} \\
 &= A
 \end{aligned}$$

**Definição.** Dadas duas matrizes  $A$  e  $B$  tais que  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{n \times r}$  com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, r$ , definimos a matriz produto de  $A$  por  $B$  como a matriz  $C = A \cdot B$ , onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Cada elemento  $c_{ij}$  da matriz produto  $A \cdot B$  é obtido pela soma dos produtos de cada elemento da linha  $i$  da matriz  $A$ , pelo correspondente elemento da coluna  $j$  da matriz  $B$ . Isso exige que se atenda a condição:

A multiplicação de matrizes exige que o número de colunas de  $A$  seja igual ao número de linhas de  $B$  para que seja possível formar o produto  $A \cdot B$ . Se esta condição não é satisfeita, o produto não é definido (ANTON; RORRES, 2001, p. 43).

**Exemplo:**

Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . O produto de  $A$  por  $B$  é dado por:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

**Proposição.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes de ordens  $m \times n$ ,  $n \times r$  e  $r \times s$  respectivamente, então são satisfeitas as seguintes propriedades abaixo para a multiplicação de matrizes:

- i)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  (propriedade associativa);
- ii) Seja a matriz  $D$  do tipo  $r \times s$ , então  $B \cdot (C + D) = B \cdot C + B \cdot D$  (propriedade distributiva)

**Demonstração:**

i) Notemos primeiramente que as matrizes  $A(BC)$  e  $(AB)C$  são do tipo  $m \times s$ .

Logo temos:

$$\begin{aligned}
 A(BC)_{il} &= \sum_{k=1}^q a_{ik}(BC)_{kl} \\
 &= \sum_{k=1}^q a_{ik} \left( \sum_{j=1}^p b_{kj}c_{jl} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p a_{ik}b_{kj}c_{jl} \\
 &= \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj} \left( \sum_{j=1}^p c_{jl} \right) \\
 &= (AB)_{ij} \sum_{j=1}^p c_{jl} \\
 &= ((AB)C)_{il}
 \end{aligned}$$

ii) Primeiramente percebemos que  $C$  e  $D$  são do tipo  $r \times s$  e  $B$  é do tipo  $n \times r$ , o que indica que as matrizes  $BC$  e  $BD$  serão do tipo  $n \times s$ . Então temos:

$$\begin{aligned}
 (B(C + D))_{ik} &= \sum_{j=1}^p b_{ij}(C + D)_{jk} \\
 &= \sum_{j=1}^p b_{ij}(c_{jk} + d_{jk}) \\
 &= \sum_{j=1}^p b_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^p b_{ij}d_{jk} \\
 &= (BC)_{ik} + (BD)_{ik}
 \end{aligned}$$

Observação: Para o produto de matrizes não vale a propriedade comutativa, ou seja, dadas duas matrizes,  $A$  e  $B$ , pode ocorrer  $AB \neq BA$ .

**Exemplo:**

Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & -2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Percebemos que  $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

### 1.3 TIPOS DE MATRIZES

Dentro do conjunto de todas as matrizes quadradas, podemos destacar diferentes e importantes tipos de matrizes, as quais são definidas segundo Lipschutz e Lipson (2011).

**Definição** (Matriz Diagonal). *Uma matriz quadrada  $D = (d_{ij})$  é chamada de diagonal se todos os elementos que estão fora da diagonal principal forem nulos, ou seja,  $d_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ . Uma matriz diagonal pode ser denotada por  $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$*

Exemplo:

$$D = \text{diag}(5, 8, -1) \text{ também pode ser representada por } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 é chamada de *matriz identidade*. A matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , por exemplo, é a matriz identidade de ordem 3. Podemos indicar por  $I_3$ .

Vale salientar que a soma, o produto por escalar e o produto de matrizes diagonais são também diagonais. E a multiplicação entre duas matrizes diagonais quaisquer é comutativa.

**Definição.** (Matriz Triangular Superior) *Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  é chamada de triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, se  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ .*

Como exemplo, podemos citar a matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  que é uma

matriz triangular superior, visto que  $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$ .

**Definição** (Transposta de uma matriz). *Chama-se transposta de uma matriz  $A$ , e é denotada por  $A^t$ , a matriz obtida escrevendo-se as linhas de  $A$ , em ordem, como colunas, isto é, se  $A$  for tal que  $A = (a_{ij})$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , então temos*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

É fácil ver, pela definição acima, que a transposição de um vetor coluna gera um vetor linha e vice - versa.

**Teorema.** Para a transposição de matrizes são satisfeitas as seguintes propriedades:

i)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;

ii)  $(A^t)^t = A$ ;

iii)  $(kA)^t = kA^t$

Obs: Ficam a cargo do leitor as demonstrações destas propriedades.

**Definição** (Matriz Simétrica). Chama-se *matriz simétrica* toda matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  em que  $A^t = A$ . Isto é,  $A$  é simétrica se os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais, ou seja,  $a_{ij} = a_{ji}$ , quaisquer que sejam  $i$  e  $j$ .

**Definição** (Matriz Anti-simétrica). Chama-se *matriz Anti-Simétrica* toda matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  em que  $A^t = -A$ . Isto é,  $A$  é anti-simétrica se os elementos simétricos em relação a diagonal principal são opostos, ou seja,  $a_{ij} = -a_{ji}$ , quaisquer que sejam  $i$  e  $j$ .

O exemplo a seguir ilustra uma matriz quadrada de ordem 4, onde os elementos simétricos em relação a diagonal principal são opostos. Trata-se, portanto de uma matriz anti-simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -9 & 5 \\ -3 & 9 & 0 & -6 \\ -4 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Outro conceito importante dentro do estudo das matrizes é o de matrizes invertíveis, que atendem a certas condições, inclusive a de ser quadrada.

**Definição.** Uma matriz  $A$  é dita *invertível*, ou *não singular* se existir uma matriz  $B$  tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Dizemos que  $B$  é a *inversa* de  $A$  e denotamos por  $A^{-1}$ .

Podemos sem muito trabalho comprovar a unicidade da inversa de uma matriz  $A$ , quando esta existe.

De fato, seja  $A$  uma matriz invertível e  $B$  a sua inversa. Suponha que exista uma matriz  $B'$  que também seja inversa de  $A$ . Então temos:

$$B^t = B^t \cdot I$$

$$B^t = B^t \cdot (A \cdot B)$$

$$B^t = (B^t \cdot A) \cdot B$$

$$B^t = I \cdot B$$

$$B^t = B$$

Portanto  $B$  é única

#### 1.4 DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

A ideia de determinante requer conhecer o que Anton e Rorres (2001) denominam de produtos elementares de uma matriz.

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Chama-se produto elementar de  $A$ , a todo produto de  $n$  de seus elementos tal que não há dois fatores de mesma linha ou coluna.

**Exemplo:** Considere as matrizes  $A$  e  $B$  de ordens 2 e 3 respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Os produtos elementares da matriz  $A$  devem ser  $a_{11}a_{22}$  e  $a_{21}a_{12}$ . Já para a matriz  $B$  os produtos elementares devem ser  $a_{11}a_{22}a_{33}$ ,  $a_{12}a_{23}a_{31}$ ,  $a_{13}a_{21}a_{32}$ ,  $a_{31}a_{22}a_{13}$ ,  $a_{32}a_{23}a_{11}$  e  $a_{33}a_{21}a_{12}$ .

Percebemos pelos exemplos, que uma matriz de ordem  $n$  tem  $n!$  produtos elementares. Uma matriz de ordem  $n = 4$ , por exemplo, terá então  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  produtos elementares.

Um produto elementar pode receber o sinal + ou - dependendo da quantidade de inversões nas permutações dos números das colunas dos fatores de cada produto. Chama-se "inversão" toda vez que um número maior precede outro menor na permutação. Para fazer essa análise os fatores devem estar organizados com os números de linha em ordem crescente.

Se o número de inversões for par, o produto recebe sinal positivo (+), se esse número for ímpar, o sinal do produto será negativo (-).

Por exemplo, no produto  $a_{12}a_{23}a_{31}$  temos a permutação (2,3,1) para os números das colunas. Essa permutação apresenta duas inversões (par), logo o sinal é +.

**Definição:** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . A função determinante para essa matriz, denotada por  $\det A$  ou  $\det(A)$  é definida como a soma de todos os produtos elementares com sinal de  $A$ . O número  $\det(A)$  é chamado de determinante de  $A$ .

**Exemplo:**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz

Vamos calcular pela definição seu determinante.

Produto Elementar	Permutação Associada	Número de inversões	Par ou Ímpar	Produto elementar com sinal
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	0	Par	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	2	Par	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	2	Par	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	3	Ímpar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	1	Ímpar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	1	Ímpar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$

A partir dos valores da tabela obtemos o determinante de  $B$

$$\det B = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

O cálculo de determinantes pode ser associado ao conceito de função, visto que para cada tipo de matriz, há uma lei específica, uma regra, ou seja, uma função que se aplica aos elementos da matriz em questão para que se calcule o determinante. Este é um valor único que depende exclusivamente dos elementos da matriz e a ordem em que estão dispostos. Podemos dizer que o determinante é

uma função que leva uma matriz quadrada em um número real. Segundo Anton e Rorres, (2001, p 77), “[...] funções determinantes, que são funções reais de uma variável matricial, o que significam que associam um número real  $f(X)$  a uma matriz quadrada  $X$ ”.

A partir de agora utilizaremos a notação  $\det A$  ou  $|A|$  sempre que nos referirmos ao determinante da matriz  $A$ .

Dada uma matriz  $A$  de ordem 2, em que  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ , o determinante de  $A$  pode ser calculado por

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

**Exemplo:**

Consideremos a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , temos  $\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$ . Podemos indicar o determinante da matriz  $A$  por  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ , ou até

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Para o cálculo do determinante de matrizes de ordem  $k$ , com  $k > 2$  podemos utilizar diferentes métodos matemáticos, os quais apresentamos nos próximos tópicos.

#### 1.4.1 Desenvolvimento de Laplace

**Definição.** Considere a matriz  $A$  de ordem 3, definimos o menor complementar de  $A$  relativo ao elemento  $a_{ij}$ , também conhecido como **menor de  $a_{ij}$** , como sendo o determinante da matriz que se obtém retirando de  $A$  a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

Vamos indicar o menor complementar de  $A$ , relativo ao elemento  $a_{ij}$  por  $M_{ij}$ .

**Exemplo:**

Seja  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , menor complementar de  $A$  relativo ao elemento  $a_{12}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Definição.** O co-fator do elemento  $a_{ij}$  é o número  $C_{ij}$  que se obtém multiplicando o menor complementar  $M_{ij}$  por  $(-1)^{i+j}$ . Então temos

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

**Exemplo:**

Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , determinamos  $C_{21}$  fazendo

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \cdot (a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) = -a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{13}$$

Assim, temos que  $C_{21} = -a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{13}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Definição.** Considere a matriz  $A$  como segue:

$$\det A = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \dots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideremos a matriz  $A$ . Vamos calcular, segundo a definição, o valor de  $\det A$ .

Calculando os co-fatores temos:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-8 - 9) = 17$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9$$

Assim;

$$\det A = 1 \cdot C_{11} - 2 \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{13} = 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 17 + 3 \cdot (-9) = -5 - 34 - 27 = -66$$

Logo o  $\det A = -66$

Podemos ampliar esse método para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem  $n$ . Basta fazer;

$$\det A = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \dots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

O método descrito, para calcular o determinante de uma matriz, é chamado de *Desenvolvimento de Laplace* e pode ser usado para obter o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem. Vale observar que no caso de uma matriz de ordem  $n$ , cada co-fator envolve um determinante de ordem  $(n - 1)$ , expresso na definição.

**Definição.** O determinante de uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos seus respectivos co-fatores.

Cada elemento de uma matriz possui seu co-fator, o que indica a existência de um número de co-fatores igual ao número de elementos da própria matriz. Podemos então montar a chamada matriz dos co-fatores, seguindo as posições estabelecidas por  $i$  e  $j$  na matriz inicial.

Assim, a matriz dos co-fatores para a matriz  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  será

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

A transposta dessa matriz é chamada de matriz adjunta de A e denotada por  $\text{adj}(A)$ , que é de grande importância no cálculo da inversa de A, como definido.

**Definição.** *Seja A uma matriz invertível, sua inversa pode ser calculada por*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

A seguir abordamos alguns métodos muito utilizados no cálculo de determinantes na Educação Básica.

#### 1.4.2 Regra de Sarrus

Trata-se de um método usado para calcular determinantes de matrizes de ordem 3. Considere a matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Primeiramente repetimos as duas primeiras colunas da matriz A à direita dela como no esquema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Então, multiplicamos os elementos da diagonal principal e das diagonais paralelas a ela. A cada produto obtido será atribuído o sinal de positivo. Em seguida multiplicamos os elementos da diagonal secundária e das diagonais paralelas a ela, atribuindo-lhes o sinal de negativo. Sendo assim temos os termos para a soma, e o determinante fica definido da seguinte forma:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

**Exemplo:**

Seja a matriz 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Iniciamos o processo repetindo as duas primeiras colunas à direita da matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando o desenvolvimento da Regra de Sarrus obtemos:

$$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot (-2) - 0 \cdot 5 \cdot 0 - (-2) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 6 = 10 + 2 - 36 = -24$$

Assim, temos que  $\det A = -24$ .

### 1.4.3 Propriedades dos Determinantes

Dadas duas matrizes  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  e  $k \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades para o determinante.

#### 1. Linha ou coluna nula

Se uma matriz quadrada possui uma fila (linha ou coluna) nula, seu determinante é zero.

### Demonstração:

Por definição (página 29), o determinante de uma matriz quadrada é a soma de seus produtos elementares com sinal, e cada produto elementar possui um único elemento de cada linha ou coluna da matriz (página 28). Sendo assim, uma linha ou coluna nula implica em pelo menos um fator nulo em cada produto elementar, o que acarretaria em todos os produtos serem nulos. Consequentemente, o determinante da matriz seria nulo.

## 2. Troca de filas paralelas

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ , se trocarmos a ordem de duas linhas ou colunas entre si, obteremos uma nova matriz  $A'$  tal que  $\det A' = -\det A$

### Demonstração:

Vamos utilizar o princípio da indução finita

**1ª parte:** Provemos que a propriedade é válida para matrizes de ordem  $n = 2$

Seja  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Temos  $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

Invertendo as linhas 1 e 2 temos a matriz

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A' &= a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} \\ &= -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \\ &= -\det A \end{aligned}$$

Portanto  $\det A' = -\det A$

**2ª parte: Hipótese de indução:** Suponhamos que a propriedade seja válida para matrizes de ordem  $n - 1$  ;

**Tese:** Vamos provar que também é válida para matrizes de ordem  $n$

Tomemos a linha  $i$  , admitindo que ela não seja nenhuma das duas que foram trocadas de lugar. Desenvolvendo  $\det A$  e  $\det A'$  temos:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \dots + a_{in} \cdot C_{in} \\ \det A' &= a_{i1} \cdot C'_{i1} + a_{i2} \cdot C'_{i2} + \dots + a_{in} \cdot C'_{in}\end{aligned}$$

Como cada  $C'_{ij}$  é obtido de  $C_{ij}$  trocando de posição duas linhas, pela hipótese de indução temos que  $C'_{ij} = -C_{ij}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Então

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \dots + a_{in} \cdot C_{in} \\ &= -a_{i1} \cdot C'_{i1} - a_{i2} \cdot C'_{i2} - \dots - a_{in} \cdot C'_{in} \\ &= -(a_{i1} \cdot C'_{i1} + a_{i2} \cdot C'_{i2} + \dots + a_{in} \cdot C'_{in}) \\ &= -\det A'\end{aligned}$$

Logo  $\det A = -\det A'$

Trocando a posição entre duas colunas a demonstração é análoga.

### 3. Filas paralelas iguais

Se uma matriz de ordem  $n \geq 2$  possui duas linhas ou colunas formadas por elementos respectivamente iguais, então seu determinante é igual a zero

#### Demonstração:

Suponhamos que as linhas  $i$  e  $k$  sejam formadas por elementos respectivamente iguais, ou seja,  $a_{ij} = a_{kj}$ , para  $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

- i) Pela propriedade anterior, se trocarmos a posição entre as linhas  $i$  e  $k$  da matriz  $A$  obtemos outra matriz  $A'$ , tal que  $\det A = -\det A'$ .
- ii) Mas  $A = A'$ , pois as linhas trocadas são formadas por elementos respectivamente iguais. Sendo assim,  $\det A' = \det A$ .

Por i) e ii) temos que

$$\det A = -\det A$$

$$\det A + \det A = 0$$

$$2 \cdot \det A = 0$$

$$\det A = 0$$

Para o caso de duas colunas serem formadas por elementos iguais, a demonstração é análoga.

#### 4. Multiplicação de uma fila por uma constante

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) por um número real  $k$ , o determinante da nova matriz será o determinante da matriz original multiplicado por  $k$ .

#### Demonstração:

Sejam as matrizes ,

$$k \cdot a_{p1}$$

Notemos que os co-fatores da linha  $p$  de  $A$  são os mesmo da linha  $p$  de  $A'$

Desenvolvendo  $\det A$  e  $\det A'$  pela  $p$ ésima linha temos

$$\det A = a_{p1} \cdot C_{p1} + a_{p2} \cdot C_{p2} + \dots + a_{pn} \cdot C_{pn}$$

$$\det A' = k \cdot a_{p1} \cdot C_{p1} + k \cdot a_{p2} \cdot C_{p2} + \dots + k \cdot a_{pn} \cdot C_{pn}$$

Colocando a constante  $k$  em evidência no desenvolvimento  $\det A$  temos

$$\det A' = [k \cdot (a_{p1} \cdot C_{p1} + a_{p2} \cdot C_{p2} + \dots + a_{pn} \cdot C_{pn})]$$

$$\det A' = k \cdot \det A$$

No caso dos elementos de uma coluna qualquer serem multiplicados por uma constante, o procedimento é análogo

### 5. Linhas ou colunas proporcionais

Se uma matriz possui duas linhas (ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então seu determinante será igual a zero.

#### Demonstração:

Vamos supor que as linhas  $i$  e  $p$  sejam formadas por elementos proporcionais, ou seja,  $a_{ij} = k \cdot a_{pj}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Dessa forma temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{p1} & k \cdot a_{p2} & \dots & k \cdot a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Portanto  $\det A = 0$

Para o caso de duas colunas serem formadas por elementos respectivamente proporcionais, a demonstração é análoga.

## 6. Matriz transposta

Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n$  e  $M^t$  a sua transposta. Então temos  $\det M = \det M^t$

### Demonstração:

Vamos realizar a demonstração utilizando o princípio da indução finita sobre  $n$ .

**1ª parte:** Para  $n = 1$ , a propriedade é imediata, pois a matriz só terá um elemento;

**2ª parte:** *Hipótese de indução:* Suponhamos que a propriedade seja válida para matrizes de ordem  $(n - 1)$ ;

*Tese:* Vamos provar que a propriedade é válida para matrizes de ordem  $n$ .

De fato, consideremos a matriz  $M$  e sua transposta  $M^t$ .

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad M^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

onde  $b_{ij} = a_{ji}$ , para  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Calculando o  $\det M$  pela 1ª coluna e  $\det M^t$  pela 1ª linha temos

$$\det M = a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + \dots + a_{n1} \cdot C_{n1}$$

$$\det M^t = b_{11} \cdot C'_{11} + b_{12} \cdot C'_{12} + \dots + b_{1n} \cdot C'_{1n}$$

Mas pela definição de matriz transposta temos que

$$a_{11} = b_{11}; a_{21} = b_{12}; \dots; a_{n1} = b_{1n}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$C_{11} - C'_{11}; C_{21} - C'_{12}; \dots; C_{n1} - C'_{1n}$$

Então

$$a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + \dots + a_{n1} \cdot C_{n1} = b_{11} \cdot C'_{11} + b_{12} \cdot C'_{12} + \dots + b_{1n} \cdot C'_{1n}$$

Logo, concluímos que  $\det M = \det M^t$ .

## 1.5 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O estudo dos sistemas de equações lineares abrange o domínio de técnicas e o desenvolvimento de habilidades necessárias à resolução de grande quantidade de problemas da Álgebra Linear, como afirma Lipschutz e Lipson (2011).

Os sistemas de equações lineares desempenham um papel importante e motivador na disciplina de Álgebra Linear. Na verdade, muitos problemas de Álgebra Linear se reduzem a encontrar uma solução de um sistema de equações lineares. (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2011, p.65)

Para que possamos iniciar nosso estudo sobre sistemas de equações lineares é necessário definir equação linear.

Segundo Lipschutz e Lipson (2011), uma equação linear em  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma equação da forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ; onde,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são constantes de um corpo  $K$ . Não há perda de generalidade se supusermos que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são números reais.

Essa equação também pode ser escrita utilizando a idéia de somatório como

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_k = b_{ij}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, m$$

**Definição.** Chama-se sistema linear com  $n$  incógnitas e  $m$  equações, o conjunto de equações lineares que podem ser organizadas da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{EMBED Equation. 3} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Nesse sistema  $a_{ij}$  e  $b_k$  são as constantes ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 1, 2, \dots, m$ ) e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas do sistema. Dizemos que o sistema é do tipo  $m \times n$ .

No caso em que  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , o sistema (1) é dito *homogêneo*. Se algum  $b_i \neq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  então o sistema é *não – homogêneo*.

### 1.5.1 Forma Matricial de Um Sistema de Equações Lineares

O sistema (1) pode ainda ser escrito sob a forma matricial como  $A \cdot X = B$ , considerando as

matrizes  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  e  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , onde  $A$  é a matriz formada pelos coeficientes do sistema;  $X$  é a matriz formada pelas variáveis e  $B$  é a matriz formada pelos termos independentes. Podemos ainda escrever o sistema linear (1) como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ao desenvolvermos a equação (2), obtemos o sistema linear de  $m$  equações e  $n$  incógnitas definido anteriormente. Na representação matricial de um sistema linear, se  $B$  for nula, então o sistema será *homogêneo*.

O sistema (1) pode ser associado à outra matriz chamada de matriz aumentada. Essa matriz é formada pelos coeficientes do sistema e pelos seus termos independentes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

### 1.5.2 Solução de Um Sistema Linear

Para um sistema linear de  $n$  incógnitas, a solução, caso exista, será

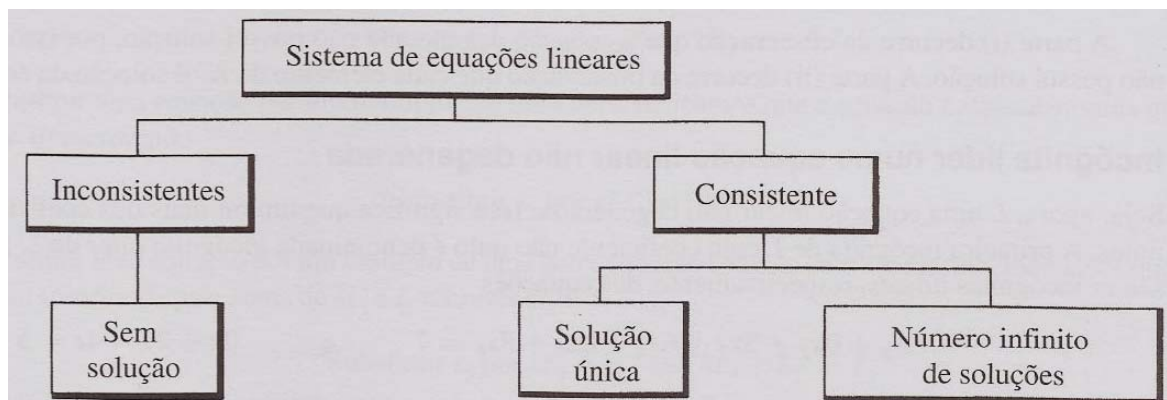
uma  $n$ -tupla  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  que poderá ser representada pela matriz  $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ , desde que  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  satisfaçam as equações do sistema.

Sendo assim, os elementos da matriz  $S$  serão a solução do sistema se  $A \cdot X = B$  desde que  $X = S$ . Dizemos que o conjunto contendo todas as soluções do sistema é o “conjunto solução do sistema linear”.

Quando um sistema é *homogêneo*, ele apresenta no mínimo uma solução, a solução trivial, que é aquela em que todas as incógnitas valem zero, ou seja, a  $n$ -tupla  $(0, 0, \dots, 0)$  é uma solução do sistema. Se esse sistema tiver mais incógnitas do que equações, então terá infinitas soluções

Segundo Lipschutz e Lipson (2011), podemos classificar um sistema pela quantidade de soluções que ele venha apresentar (Figura 4). Tal sistema poderá ter solução (nesse caso será chamado de sistema consistente) ou não ter solução (sistema inconsistente). No primeiro caso, o sistema poderá apresentar apenas uma solução ou infinitas soluções.

**Figura 4** – Classificação dos Sistemas de equações lineares



**Fonte:** Figura tirada do livro Álgebra Linear, 4 ed. Da Coleção Schaum

A classificação utilizada por Lipschutz e Lipson (2011), em alguns livros recebem outros nomes. Os sistemas consistentes e os inconsistentes também

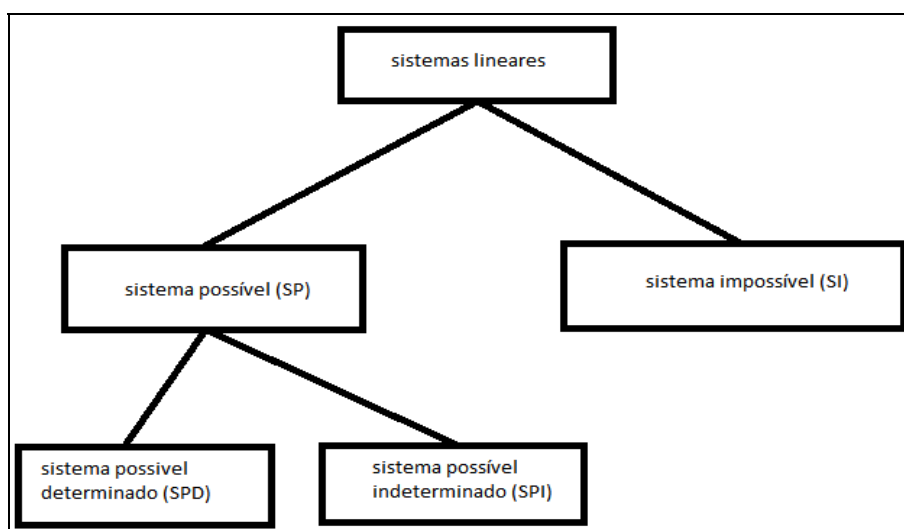
são chamados de possíveis (sistema que possui solução) ou impossíveis (sistema que não possui solução, ou, sistemas impossíveis de resolver) respectivamente. Os sistemas possíveis, que também podem ser chamados de compatíveis, podem ter solução única ou infinitas soluções. No primeiro caso será chamado **sistema possível e determinado** (sistema com apenas uma solução), já no segundo caso, o sistema será chamado de **sistema possível e indeterminado** (sistema com infinitas soluções).

Posteriormente (p. 58 à 64), esse trabalho tratará da *discussão de um sistema linear*, que consiste em verificar para quais valores dos coeficientes o sistema será possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível, no caso de alguns coeficientes serem desconhecidos. Esses coeficientes desconhecidos são chamados de parâmetros e merecem destaque no estudo dos sistemas lineares pela importância que têm no desenvolvimento da solução, independente do método adotado. A partir de agora, para efeito de escrita, utilizaremos as siglas para nos referirmos aos sistemas lineares.

- SPD para sistema possível e determinado;
- SPI para sistema possível e indeterminado e;
- SI para sistema impossível.

A figura 5 ilustra esta classificação.

**Figura 5 – Classificação dos Sistemas Lineares**



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 1.5.3 Resolução de Sistemas Lineares

O estudo da resolução de sistemas lineares da forma  $A.X = B$  é de grande importância no âmbito do ensino de matemática. Segundo Leon (2011).

Provavelmente o problema mais importante da matemática é o da resolução de um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio. Usando métodos modernos da matemática, é frequentemente possível reduzir um problema sofisticado a um simples sistema de equações lineares. Os sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como negócios, economia, sociologia, ecologia, demografia, genética, eletrônica, engenharia e física (LEON, 2011, p. 01).

Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \square \text{ EMBED Equation.3 } \square \square \square \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

quando o número de variáveis e de equações é pequeno, duas, por exemplo, métodos clássicos já tratados no Ensino Fundamental, como os da substituição e comparação podem ser usados.

#### 1.5.3.1 Método da substituição

Esse método consiste em isolar uma das variáveis em uma das equações expressando-a em função da outra variável. Em seguida é necessário substituir essa variável na outra equação pela expressão a ela associada, obtendo uma equação com apenas uma variável. Na sequência, utiliza-se do valor encontrado para determinar o valor da outra variável.

**Exemplo:** Vamos aplicar o método da substituição para resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 5 & (1) \\ x + 5y = 7 & (2) \end{cases}$$

1º passo: Isolamos o  $y$  na equação (1)

$$3x - y = 5$$

$$y = 3x - 5$$

2º passo: Substituímos o  $y$  por  $3x - 5$  na equação (2)

$$x + 5.(3x - 5) = 7$$

$$x + 15x - 25 = 7$$

$$16x = 7 + 25$$

$$16x = 32$$

$$x = \frac{32}{16}$$

$$x = 2$$

3º passo: Atribuímos o valor 2 para o  $x$  na equação  $y = 3x - 5$  para obtermos o valor da variável  $y$

$$y = 3x - 5$$

$$y = 3.2 - 5$$

$$y = 1$$

Logo, a solução do sistema é  $s = (2,1)$

### 1.5.3.2 Método da comparação

Esse método consiste em isolar uma das variáveis nas equações do sistema e então comparar as expressões obtidas por meio de uma igualdade, obtendo o valor de uma das variáveis. Na sequência, substitui-se o valor encontrado em uma das variáveis para determinar o valor da outra variável.

**Exemplo:**

Vamos resolver o sistema  $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x + y = 12 \end{cases}$  aplicando o Método da Comparação.

1º passo: Vamos isolar a incógnita  $x$  nas equações do sistema

$$\begin{array}{ll} x - 2y = 6 & x + y = 12 \\ x = 6 + 2y & x = 12 - y \end{array}$$

2º passo: Igualando as expressões obtidas temos

$$\begin{aligned} 6 + 2y &= 12 - y \\ 2y + y &= 12 - 6 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

3º passo: Substituindo  $y$  por 2 em uma das equações do sistema, temos

$$\begin{aligned} x + 2 &= 12 \\ x &= 12 - 2 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Sendo assim a solução do sistema será  $s = (10, 2)$

Quando o número de incógnitas e equações do sistema (1) não é pequeno, ou seja, mais de quatro equações, a resolução pode ser realizada fazendo, inicialmente, a redução do sistema para um sistema mais simples, mas que tenha a mesma solução.

Sistemas assim são chamados de *sistemas equivalentes*, e as operações realizadas para obter o sistema mais simples são chamadas de operações elementares.

**Definição** (Operações Elementares). *Para obtermos um sistema equivalente a um sistema dado podemos:*

1. Trocar duas equações do sistema de posição;
2. Substituir uma equação pela mesma equação multiplicada por um escalar não nulo.
3. Substituir uma equação pela mesma equação somada ao produto de outra por um escalar.

É importante perceber que ao se efetuar uma das operações elementares, as variáveis permanecem inalteradas, enquanto que os coeficientes das equações passam a ter valores diferentes. Logo, ao operarmos com as equações do sistema, podemos desprezar por hora as variáveis, ou seja, podemos efetuar os cálculos apenas com a matriz formada pelos coeficientes do sistema e os termos independentes. Mais precisamente, com as linhas da matriz aumentada do sistema.

**Teorema.** Sejam  $A.X = B$  e  $C.X = D$  dois sistemas lineares escritos na forma de equações matriciais. Se a matriz aumentada de um deles é obtida a partir da matriz aumentada do outro sistema após serem efetuadas operações elementares sobre suas linhas, então ambos os sistemas possuem a mesma solução. Ou seja, são sistemas equivalentes.

### Demonstração.

Vamos provar que o sistema  $A.X = B$  e  $C.X = D$  são equivalentes, ou seja, que eles têm a mesma solução.

- i) Se trocarmos a posição de duas linhas quaisquer do sistema as equações ainda continuarão sendo as mesmas, e obviamente terão a mesma solução;
  - ii) Ao substituir uma linha pela mesma linha multiplicada por um escalar diferente de 0, obtemos uma equação equivalente a anterior.
- Veja

$$(ka_1)x_1 + [(ka)_2]x_2 + \dots + [(ka)_n]x_n = kb$$

Como  $ka_1$  é múltiplo de  $a_1$ ,  $ka_2$  é múltiplo de  $a_2$ , e assim com todos os coeficientes, então a igualdade se mantém e temos a equivalência entre as equações, o que indica que ambas possuem mesma solução.

Perceba que

$$(ka_1)x_1 + [(ka)_2]x_2 + \dots + [(ka)_n]x_n = kb$$

$$k.(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = kb$$

multiplicando ambos os membros por  $k^{-1}$  temos

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

o que comprova a equivalência entre as equações.

iii) Ao substituirmos uma linha  $i$  pela mesma linha somada ao produto de outra linha  $(i+k)$  por um escalar, obtemos algo da forma

$$(a_{i1} + ka_{(i+k)1})x_1 + [(a)_{i2} + ka_{(i+k)2}]x_2 + \dots + [(a)_{in} + ka_{(i+k)n}]x_n = [(b)_i + kb_{(i+k)}]$$

$$a_{i1}x_1 + ka_{(i+k)1}x_1 + a_{i2}x_2 + ka_{(i+k)2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + ka_{(i+k)n}x_n = b_i + kb_{(i+k)}$$

Pela correspondência de índices temos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

$$ka_{(i+k)1}x_1 + ka_{(i+k)2}x_2 + \dots + ka_{(i+k)n}x_n = kb_{(i+k)}. \quad \text{Ou}$$

seja,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  devem satisfazer a equação  $i$  e a equação  $i+k$ .

Como isso é verdadeiro por serem equações do sistema, então  $x_1, x_2, \dots, x_n$  também satisfazem a nova equação

$$(b)_i + kb_{(i+k)}$$

Sendo assim, fica demonstrada a equivalência entre os sistemas.

Quando aplicamos as operações elementares sucessivas vezes sobre as linhas de uma matriz, até que obtenhamos os elementos iniciais de cada linha nulos, em quantidade crescente a partir da segunda linha, dizemos que a nova matriz está na forma escalonada. Assim o novo sistema associado a essa nova matriz é um sistema escalonado, equivalente ao sistema inicial, ou seja, possui o mesmo conjunto solução.

Uma forma eficiente de escalonar um sistema de equações lineares é aplicar o método da eliminação gaussiana.

### 1.5.3.3 Método de Gauss-Jordan

O método de eliminação de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares, que consiste em aplicar as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada do sistema até que essa se apresente na forma escalonada reduzida. O sistema associado a essa matriz tem solução imediata, enquanto que para resolver um sistema que está apenas na forma escalonada ainda é necessário fazer uma série de substituições para obter a solução final.

Para que uma matriz esteja na forma escalonada reduzida, ela deve atender a algumas condições.

**Definição.** *Uma matriz está na forma escalonada reduzida quando ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula (chamado o pivô da linha) é igual a 1;*
2. *O pivô da linha  $i + 1$  ocorre à direita do pivô da linha  $i$ ;*
3. *Se uma coluna contém um pivô, então todos os outros elementos desta coluna são iguais a 0;*
4. *Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não-nulas.*

**Exemplo:**

Vamos aplicar o método de Gauss-Jordan para escalonar o sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Solução:

A matriz aumentada do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando as operações elementares sobre as linhas da matriz obtemos a matriz na sua forma escalonada reduzida que é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então temos o sistema na sua forma escalonada reduzida

$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 = 0 \\ & x_2 & & +x_4 = 0 \\ & & x_3 & -x_4 = 0 \end{cases}$$

#### 1.5.3.4 Método da eliminação de Gauss

Se ao aplicarmos as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada obtemos simplesmente uma matriz na forma escalonada. Consequentemente o sistema à ela associado será um sistema escalonado, e teremos então o chamado *Método da Eliminação de Gauss*.

**Definição.** Uma matriz está na forma escalonada quando satisfaz as seguintes condições:

1. O primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula (chamado o pivô da linha) pode ou não ser igual a 1;
2. O pivô da linha  $i + 1$  ocorre à direita do pivô da linha  $i$ ;
3. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não-nulas.

### Exemplo:

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 0x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

A matriz aumentada associada a esse sistema é

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 & & \\ 2 & 4 & -10 & 0 & 12 & 28 & & \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 & & \end{array} \right)$$

Vamos elencar cinco passos a serem realizados para que a matriz acima esteja na forma escalonada.

1. Localizar a coluna mais da esquerda que não tenha todos os elementos nulos, que neste caso é a 1ª coluna;
2. Permutar se necessário, a 1ª linha com qualquer outra de forma conveniente, a fim de obter um elemento não nulo no topo da coluna;

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccc} 2 & 4 & -10 & 6 & -5 & -1 & & \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 & & \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 & & \end{array} \right) \leftarrow \text{(Permuta da 1ª com a 2ª linha na matriz inicial)}$$

3. Supondo que o primeiro elemento do topo da coluna do item anterior seja  $a$ , então multiplicamos a linha inteira por  $1/a$  de forma a encontrar um pivô para a 1ª linha;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \quad (\text{multiplicou-se a } 1^{\text{a}} \text{ linha por } \frac{1}{2})$$

4. Some múltiplos convenientes da 1ª linha às linhas inferiores afim de todos os elementos abaixo do pivô seja nulo;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \leftarrow \quad (\text{Somou-se } -2 \text{ vezes a } 1^{\text{a}} \text{ Linha com a } 3^{\text{a}} \text{ linha})$$

5. Esconda (ou ignore) agora a 1ª linha e aplique novamente os passos acima nas linhas inferiores até que toda a matriz esteja na forma escalonada;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3,5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \leftarrow \quad (\text{multiplicou-se a } 2^{\text{a}} \text{ linha por } -0,5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3,5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \quad (-5 \text{ vezes a } 2^{\text{a}} \text{ Linha somada com a } 3^{\text{a}} \text{ linha})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3,5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \quad (\text{multiplicou-se a } 3^{\text{a}} \text{ linha por } 2 \text{ para obter o pivô})$$

Essa ultima matriz está na forma escalonada. Porém, não está na forma escalonada reduzida, visto que não há somente zeros acima de cada pivô. Dizemos que a matriz foi escalonada pelo método da eliminação gaussiana, ou simplesmente método de Gauss.

O novo sistema associado a essa matriz fica assim:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 14 \\ x_3 + 0 - 3,5x_5 = -6 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

que é um sistema linear na forma escalonada, equivalente ao sistema inicial do exemplo.

De acordo com Anton e Rorres (2001), o método da eliminação de Gauss-Jordan é mais eficiente que o método de Gauss para sistemas pequenos. Para sistemas mais complexos, com um grande número de equações e incógnitas, a eliminação gaussiana requer, em média, 50% menos de operações que o método de Gauss-Jordan. Em casos em que o problema necessita da resolução de sistemas muito grande, faz-se necessário a utilização de algum programa computacional para resolvê-lo de maneira a minimizar os erros e otimizar o tempo de resolução.

### 1.5.3.5 Regra de Cramer

Segundo Boldrini (1980), utilizando o conceito de matriz inversa, podemos caracterizar um novo método para a resolução de sistemas lineares de ordem  $n \times n$ , ou seja, com  $n$  equações e  $n$  incógnitas.

Seja o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{EMBED Equation.3} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Escrevendo o sistema em forma de equação matricial temos,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Considere também as matrizes, obtidas da matriz  $A$  trocando a coluna  $j$  pela matriz  $B$  dos termos independentes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Suponhamos que  $\det A \neq 0$ , o que garante que  $A$  é invertível e vamos representar sua inversa por  $A^{-1}$ . Então podemos escrever

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot b$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$I_n \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

$$X = A^{-1} \cdot b$$

Como já vimos anteriormente, por Anton e Rorres (2001) temos que se  $A$  é uma matriz invertível, então  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$ , em que  $\text{adj}(A)$  é a transposta da matriz dos co-fatores de  $A$ . Assim temos

$$X = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Considerando que  $\frac{1}{\det A}$  é um escalar e realizando as multiplicações necessárias obtemos  $x_1 = \frac{b_1 \cdot C_{11} + \dots + b_n \cdot C_{n1}}{\det A}$ , onde  $b_1 \cdot C_{11} + \dots + b_n \cdot C_{n1}$  nada mais é do que o determinante da matriz obtida de  $A$  quando trocamos a 1ª coluna pela matriz  $b$  dos termos independentes, calculado pelo desenvolvimento de Laplace sobre os elementos da 1ª coluna. Sendo assim, podemos escrever

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$

Analogamente podemos obter todas as soluções do sistema inicial que são:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}; \dots; x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

Podemos utilizar esse método somente quando  $\det A \neq 0$ , pelo fato dele compor o denominador das frações acima e também por garantir a existência da inversa da matriz dos coeficientes  $A$ .

### Exemplo:

Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Vamos, a partir da aplicação de determinantes, resolver esse sistema utilizando a Regra de Cramer. Para isso, primeiramente é necessário calcular o determinante da matriz dos coeficientes escrita abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a Regra de Sarrus temos que

$$\det A = (1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1)$$

$$\det A = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1$$

$$\det A = 5$$

Precisamos dos determinantes das matrizes  $A_1, A_2$  e  $A_3$  que são aquelas obtidas quando se troca a  $j$ -ésima coluna pela matriz coluna dos termos independentes. Para isso utilizaremos a Regra de Sarrus. Assim,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 9 - 1 + 6 + 15 - 1 = 20$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 30 - 3 \cdot 2 - 9 \cdot 5 = -10$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 5 + 20 + 1 - 3 = 15$$

Sabemos que para encontrar a solução do sistema pela Regra de Cramer, temos que utilizar as fórmulas:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}; \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

Precisamos apenas adaptá-las fazendo  $x = x_1$ ;  $y = x_2$ ;  $z = x_3$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} \rightarrow x = \frac{20}{5} \rightarrow x = 4$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-10}{5} = -2$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{15}{5} = 3$$

Dessa forma, a solução não nula desse sistema é  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

A regra de Cramer é um instrumento importantíssimo na discussão de sistemas lineares, quando algum parâmetro impõe condições de existência para as soluções do sistema. A discussão de um sistema se resume em analisá-lo, em termo de seus parâmetros, verificando para quais os valores dos parâmetros o sistema será SPD, SPI ou SI.

lezzi & Hazzan (1997), no livro “*Fundamentos de matemática elementar: seqüências, matrizes, determinantes e sistemas*”; propõem a discussão de um sistema fazendo uso da Regra de Cramer e do escalonamento do sistema. Observe então a discussão do sistema abaixo.

Considere o sistema de equações lineares, vamos discuti-lo e resolvê-lo em termos do parâmetro  $m$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$$

**Resolução:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Considere a matriz dos coeficientes  $A$  e a matriz dos

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

termos independentes  $B$ . Podemos escrever as matrizes  $A_1, A_2, A_3$  substituindo as colunas 1,2 e 3 pela matriz linha dos termos independentes, respectivamente, obtendo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Pela Regra de Cramer, sabemos que se  $\det A \neq 0$ , o sistema possui uma solução única, que será a solução trivial. Dessa forma, os valores de  $m$  para os quais  $\det A = 0$  fazem com que o sistema seja SPI ou S. Vamos então resolver o sistema supondo que  $\det A \neq 0$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = -1 + m^2 + 2 + m - 2m - 1 = m^2 - m$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - m + 4 - 1 - 0 - 2 = -m + 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 1 - 2m + m - 0 = -m + 1$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2m + 0 - 0 - 4 + 1 = 2m - 2$$

Pela Regra de Cramer temos:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-m + 1}{m^2 - m} = \frac{-(m - 1)}{m(m - 1)} = -\frac{1}{m}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-m + 1}{m^2 - m} = \frac{-(m - 1)}{m(m - 1)} = -\frac{1}{m}$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{2m - 2}{m^2 - m} = \frac{2(m - 1)}{m(m - 1)} = \frac{2}{m}$$

Portanto a solução do sistema é:

$$s = \left( -\frac{1}{m}, -\frac{1}{m}, \frac{2}{m} \right)$$

Agora, se  $\det A = 0$ , temos dois casos a considerar:

- Se  $m = 0$  temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 & I \\ x - y + 0 = 2 & II \\ 0 + 2y + z = -1 & III \end{cases}$$

Escalonando o sistema temos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 0 = 2 \\ 0 + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 + 2y + z = -1 \\ x - y + 0 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 + 2y + z = -1 \\ 0 - 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 0 & I \\ 0 + 2y + z = -1 & II \\ 0 + 0 + 0 = 1 & III \end{cases}$$

Por  $III$  temos  $0 = 1$  (absurdo), logo o sistema é SI.

- Se  $m = 1$  temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 & I \\ x - y + z = 2 & II \\ x + 2y + z = -1 & III \end{cases}$$

Escalonando o sistema temos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 - 2y + 0 = 2 \\ 0 + y + 0 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 + y + 0 = -1 \\ 0 - 2y + 0 = 2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 0 & I \\ 0 + y + 0 = -1 & II \\ 0 + 0 + 0 = 0 & III \end{cases}$$

Suprimindo a equação *III* do sistema temos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & I \\ 0 + y + 0 = -1 & II \end{cases}$$

- i) Por *II* temos que  $y = -1$  ;
- ii) Substituindo o valor de  $y$  na equação *I* temos

$$\begin{aligned} x - 1 + z &= 0 \\ x - 1 - z & \end{aligned}$$

Perceba que temos  $x$  em função de  $z$ , ou seja, para qualquer valor que se atribua a  $z$ , obtemos valor diferentes para  $x$ , o sistema é SPI, cuja solução é  $s = (1 - \alpha, -1, \alpha)$  para  $z = \alpha$ .

Resumindo temos a seguinte discussão para o sistema inicial.

- $m \neq 0$  ou  $m \neq 1$  → o sistema é SPD;
- $m = 0$  → o sistema é SI;
- $m = 1$  → o sistema é SPI

A discussão de sistemas lineares envolve a Regra de Cramer e o processo de escalonamento. Apenas por Cramer não conseguimos tirar todas as informações necessárias para uma discussão verdadeira e precisa. Um exemplo disso está na questão do vestibular da Universidade Federal do Espírito Santo.

**Figura 6** – Exercício sobre a discussão de sistemas lineares

**13.21.** (UFES) – Em um livro, o autor fez a seguinte afirmação a respeito de um sistema de equações lineares: “sistema possível e indeterminado, quando  $\det M_i = 0$  e  $\det M_{x_1} = \det M_{x_2} = \dots = \det M_{x_n} = 0$ ”.

Na notação do autor,  $M_i$  é a matriz incompleta (ou matriz dos coeficientes) do sistema e  $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}$  são as matrizes definidas na regra de Cramer. Discuta o sistema linear, em função do parâmetro real  $a$ , e depois opine sobre o citado trecho do livro.

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + ay - z = 1 \\ x + y - az = -2 \end{cases}$$

**Fonte:** Sistema de Ensino Positivo (Apostila do Curso Pré-vestibular)

### Resolução:

Pelo sistema temos a matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Pela Regra de Cramer, temos que se  $\det A \neq 0$ , então o sistema admite solução única (SPD), caso contrário teremos SPI ou SI. Sendo assim temos:

$$\det A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ -a & 1 \end{matrix} = -a^3 - 1 - 1 + a + a + a = -a^3 + 3a - 2$$

Se  $\det A = 0$ , temos  $-a^3 + 3a - 2 = 0$ , que é uma equação de 3º grau de raízes  $-2$  e  $1$ .

As matrizes obtidas trocando a  $j$ -ésima coluna de  $A$  pela matriz dos termos independentes são:

$$\text{Det}A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & a \\ -2 & 1 \end{matrix} = -a^2 + 2 - 1 - 2a + 1 + a = -a^2 - a + 2$$

$$\text{Det}A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -a^2 - 1 + 2 + 1 - 2a + a = -a^2 - a + 2$$

$$\text{Det}A_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 1 \end{matrix} = -2a^2 + 1 + 1 - a - a + 2 = -2a^2 - 2a + 4$$

- Se  $a = 1$  temos

$$\text{Det}A_1 = -1^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\text{Det}A_2 = -1^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\text{Det}A_3 = -2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 0$$

Pela proposta do livro, no enunciado do problema temos um SPI.

Porém, com  $a = 1$ , temos o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & I \\ x + y - z = 1 & II \\ x + y - z = -2 & III \end{cases}$$

Escalonando o sistema fazendo  $(-1) \cdot I + III$  temos  $0 = -3$ , que é um absurdo, portanto o sistema é SI, contrariando a afirmação do livro

- Se  $a = -2$  temos:

$$\begin{cases} -2x + y - z = 1 & I \\ x - 2y - z = 1 & II \\ x + y + 2z = -2 & III \end{cases}$$

Escalonando o sistema temos:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & I \\ 0 - 3y - 3z = 3 & II \\ 0 + 0 + 0 = 0 & III \end{cases}$$

Suprimindo a equação *III* do sistema temos

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & I \\ 0 - 3y - 3z = 3 & II \end{cases}$$

Por *II* temos que

$$-3y - 3z = 3$$

$$y + z = -1$$

$$y = -z - 1$$

Substituindo  $y = -z - 1$  na equação *I* temos

$$x - 2(-z - 1) - z = 1$$

$$x + 2z + 2 - z = 1$$

$$x + z = -1$$

$$x = -1 - z$$

Logo, fazendo  $z = \alpha$  temos um SPI de solução  $s = (-\alpha - 1, -\alpha - 1, \alpha)$ .

Conclusão da discussão do sistema:

Se  $\alpha = 1$ , temos SI; se  $\alpha = -2$ , temos SPI; se  $\alpha \neq 1$  e  $\alpha \neq -2$ , temos SPD.

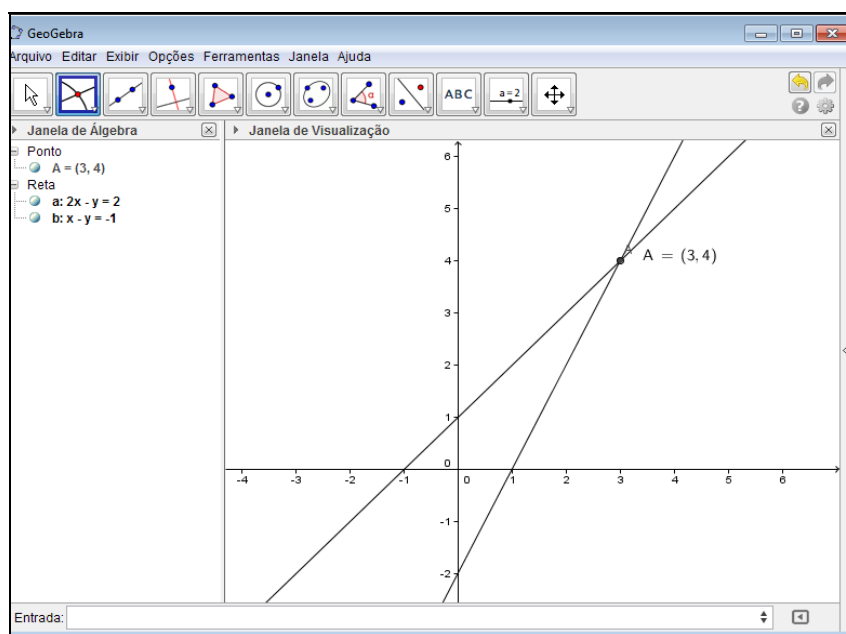
#### 1.5.4 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares

Quando tentamos determinar o conjunto solução de um sistema estamos preocupados em determinar uma ou mais soluções que satisfazem todas as equações do sistema. O entendimento e a compreensão dessa solução podem ficar mais acessíveis quando a solução é analisada por uma perspectiva geométrica.

Quando tratamos da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas ( $2 \times 2$ ), obtemos como solução, um par ordenado de números que pode ser representado por um ponto no plano cartesiano, que será o ponto de interseção das retas concorrentes, obtidas da representação geométrica das equações do sistema. Neste caso o sistema é possível e determinado. Abaixo foram

plotadas, através do software Geogebra, as retas do sistema  $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$  as quais se intersectaram no ponto A de coordenadas (3,4) que é a solução do sistema. Observe a figura 7 que ilustra a interpretação geométrica do sistema

**Figura 7 – Interpretação Geométrica do sistema  $2 \times 2$  (SPD)**

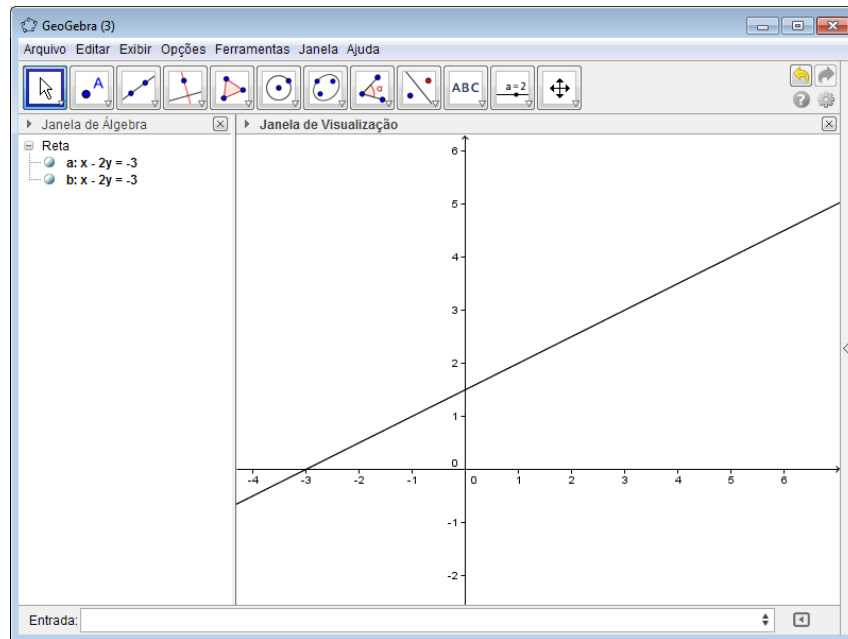


**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Podemos também ter situações em que as retas são coincidentes, que é o caso dos sistemas possíveis e indeterminados, ou seja, possuem infinitas soluções. Para sistemas SPI a solução é um conjunto de infinitos pontos que pertencem as duas retas comumente. Quando duas retas possuem mais do que um ponto em comum, então elas possuem infinitos pontos, ou seja, são coincidentes.

Perceba que as equações do sistema  $\begin{cases} 3x - 6y = -9 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$  geraram retas coincidentes, como podemos visualizar na figura 8, também através do Geogebra.

**Figura 8** – Interpretação Geométrica do sistema 2 x 2 (SPI)

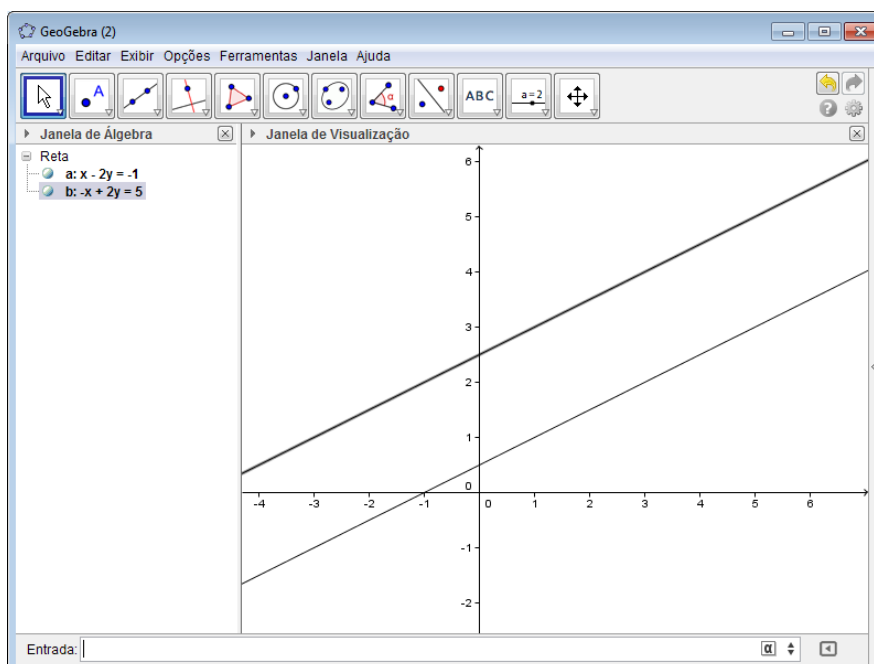


**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Quando o sistema é impossível de resolver (SI), as suas equações geram retas paralelas, ou seja, não há o ponto de interseção entre elas, visto que se este ponto existisse, ele representaria a solução do sistema e o sistema SI não apresenta solução, como podemos perceber na figura 9 que ilustra a interpretação geométrica do sistema

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$

**Figura 9 – Interpretação Geométrica do sistema 2 x 2 (SI)**

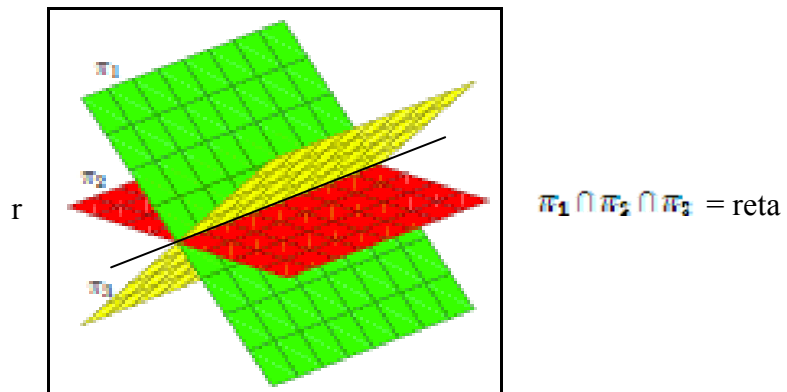


**Fonte:** Elaborado pelo autor.

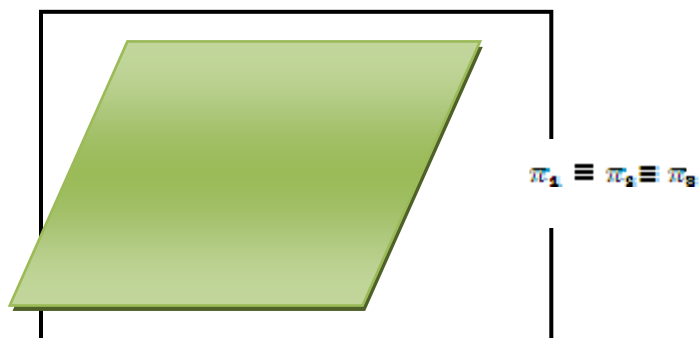
Para sistemas 2 x 2, essas são as três possíveis interpretações geométricas a respeito das suas soluções. Vale salientar que toda equação de duas variáveis pode ser representada no plano por uma reta, o que não acontece com as equações de três incógnitas. Estas são representadas por planos no espaço, com pontos formados por três coordenadas cartesianas. Sendo assim, é necessário um sistema com três eixos. Essa interpretação geométrica para sistemas 3 x 3 não é tão usual quanto à sua construção, no Ensino Médio, apesar de ser importante para a compreensão dos sistemas e suas soluções.

Os sistemas 3 x 3, quando analisados sob uma abordagem geométrica, geram três planos que podem estar no espaço tridimensional posicionados entre si de diferentes maneiras.

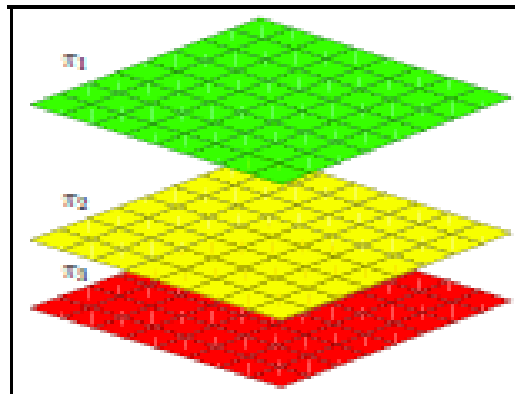
Para os *Sistemas possíveis e indeterminados* temos a interseção dos três planos concorrentes formando uma reta, ou até mesmo um plano, no caso dos planos em questão serem coincidentes.

**Figura 10** – Planos concorrentes

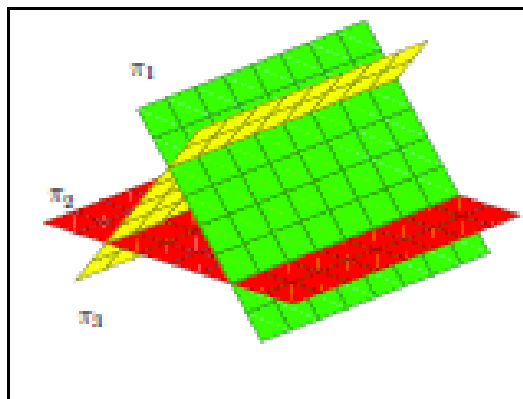
Também podemos ter essa interseção de planos quando os três planos são coincidentes

**Figura 11** – Planos coincidentes

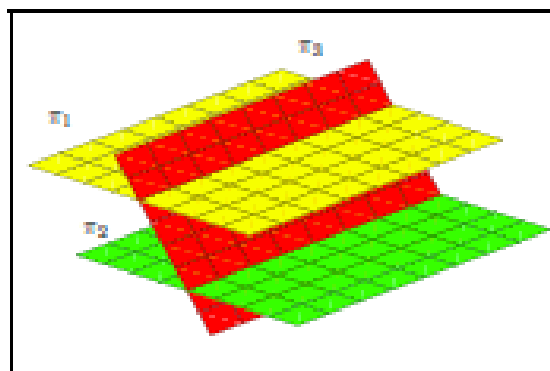
Para os *sistemas impossíveis (SI)*, as posições dos planos devem ser tais que não haja nenhum ponto pertencente à interseção dos três planos. Dessa forma os planos podem ser paralelos entre si.

**Figura 12 – Planos paralelos**

Podemos também ter situações de planos concorrentes dois a dois. Neste caso existe uma reta como interseção de cada dois planos, porém nenhum ponto é interseção dos três planos.

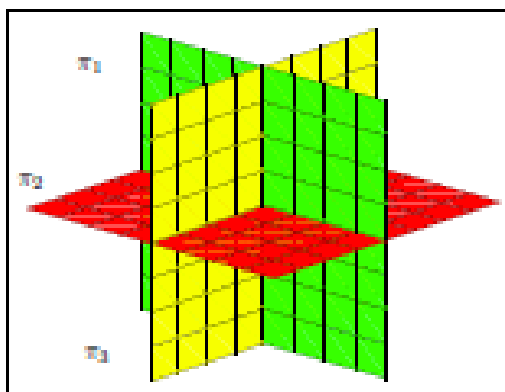
**Figura 13 – Planos concorrentes dois a dois**

Temos abaixo uma situação em que dois planos paralelos são cortados por outro plano transversal. Também é um caso de sistema impossível, visto que a interseção dos planos é o conjunto vazio.

**Figura 14 – Dois Planos Paralelos e um transversal**

Já para os sistemas possíveis e determinados os planos devem se intersectar de forma a obtermos como interseção apenas um ponto do espaço, como na figura.

**Figura 15** – Três planos concorrentes



$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P$$

Vale salientar que, de acordo com o currículo oficial, os conteúdos de Geometria Analítica são ensinados após os Sistemas Lineares, porém a interpretação geométrica dos sistemas de equações lineares pode ser contemplada de forma a enriquecer o trabalho em sala e dar mais significado aos desenvolvimentos algébricos nas soluções dos sistemas.

## CAPÍTULO 2

### SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

#### 2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA

Desde muito tempo, se fala em resolução de problemas de matemática. Chineses, egípcios e gregos deixaram em seus registros da antiguidade problemas matemáticos que são analisados até os dias de hoje.

Segundo Onuchic (1999), em muitas escolas da atualidade, a resolução de problemas permeia uma metodologia de repetição, com um exemplo de situação-problema que é resolvida na lousa e em seguida uma lista com inúmeros problemas semelhantes aos quais se pode aplicar o mesmo método de resolução, ou seja, vários problemas com a mesma “cara” ou ideia.

Na sequência, Onuchic(1999) também afirma que as mudanças na sociedade, com a migração de muitas pessoas do campo para a cidade a procura de empregos e melhor qualidade de vida por conta das indústrias, da mecanização e produção em massa, que ofertava muitos empregos, houve uma necessidade maior da população em aprender matemática. A procura por aprendizagem matemática, em função da industrialização, do avanço da tecnologia e da globalização, os educadores matemáticos vêm se preocupando com a formação dos professores e repensando a Educação Básica e o Ensino Superior, a fim de sanar as exigências da sociedade moderna.

Há uma luta muito forte travada com sistemas de ensino e professores ortodoxos que ainda não perceberam que a resolução de situações-problema como aplicação de métodos não é a solução mais viável para a melhoria da aprendizagem de matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) afirmam que:

Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil a partir dos anos 20 não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino bem como melhorar sua qualidade. Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p. 19).

O século XX foi marcado, não só no Brasil, mas em nível mundial, por uma série de propostas de reforma no Ensino de Matemática nas quais a matemática é ensinada de várias maneiras. Dentre elas, Onuchic (1999) destaca: o Ensino de Matemática por repetição; o Ensino de Matemática por compreensão; a Matemática Moderna e a Resolução de Problemas.

### 2.1.1 O Ensino de Matemática por Repetição

Decorar a tabuada, as fórmulas, os nomes das figuras geométricas dentre outras coisas, era o instrumento principal do ensino de matemática no início do século XX. Os alunos eram obrigados a repetir nos cadernos aquilo que viam o professor fazer na lousa. Pela quantidade exagerada de repetição de exercícios que utilizavam a mesma sistemática de resolução, alguns alunos conseguiam se sair bem nas avaliações e obtinham destaque escolar. Porém, muitos deles, em pouquíssimo tempo, não se lembravam mais do que haviam estudado e seus conteúdos matemáticos se perdiam com tempo. Até hoje, algumas escolas ou sistemas ainda utilizam esse método como ferramenta de ensino matemático, fazendo da sala de aula um local de adestramento dos alunos em função dos vestibulares e concursos. Como exemplo, segue um problema do 9º ano do Ensino Fundamental, onde vemos a aplicação de um método muito objetivo de resolução que não oferece desafio, nem coloca os saberes dos alunos a prova em momento algum. Veja:

*“A soma de dois números é igual a 15 e a diferença entre eles é 1. Quais os números em questão?”*

**Resolução:** Chamando os números do problema de  $x$  e  $y$  podemos escrever duas equações em forma de um sistema.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Aplicando o método da adição obtemos  $2x = 16$ , o que indica que  $x = 8$ . E por fim, substituindo  $x$  por 8 na primeira equação temos que  $8 + y = 15$ . E

aplicando a operação inversa concluímos que  $y = 7$ . Logo a solução do problema são os números 7 e 8.

Em vários livros didáticos, segundo Onuchic (1999), após a resolução de problemas como esse, segue uma seção de vários problemas semelhantes para que os alunos possam memorizar o método de resolução que, às vezes, é executado mecanicamente sem mobilizar nos alunos conhecimento algum. A autora também afirma que a resolução de problemas desse tipo não contribui para aprendizagem matemática dos alunos que as realizam.

É necessário que os professores ao inserir um problema para os alunos possa se questionar quanto à sua adequabilidade, ou seja, se tal problema mobilizará adequadamente as habilidades e conhecimentos dos alunos, se os desafiará de algum modo e se os motivará a aprenderem matemática com mais vontade e responsabilidade. É o que afirma Dante (2003) em seu livro *“Didática da resolução de problemas de matemática”* ao citar uma frase de Thomas Butts que diz:

Estudar matemática é resolver problemas. Portanto a incumbência dos professores de matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente (DANTE, 2003, p. 43).

### 2.1.2 O Ensino da Matemática por Compreensão

Durante a reforma, que defendia o Ensino da Matemática por compreensão, o ensino acontecia sob outra perspectiva, em que os alunos não tinham mais a necessidade de memorização como anteriormente. A idéia então, segundo Onuchic (1999) era a de que a compreensão das operações era o mais importante para aprendizagem de matemática. Havia, porém um despreparo dos professores em trabalhar segundo esse aspecto, pois muitos vinham de uma formação tradicional de memorização e repetição. Os alunos eram ensinados por meio da resolução de problemas, chamados de problemas – padrão, pelos quais se treinavam técnicas operatórias que poderiam ser utilizadas na aprendizagem de novos conteúdos.

Essa reforma foi importante historicamente pelo fato de introduzir a resolução de problemas como um meio de se aprender a matemática, embora fosse de uma forma equivocada, quando comparada com a perspectiva atual.

Os estudos sobre a resolução de problemas realizados até o final da década de 1950, nos EUA, em sua maioria indicavam que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolver problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas. Bloon e Broder ainda na década de 1950 questionavam as pesquisas, até então desenvolvidas sobre a solução de problemas, pela ênfase que vinha sendo dada aos produtos das soluções em vez de valorizar os processos implícitos na resolução criativa de problemas. (GAZIRE apud ONUCHIC, 1999, p. 202).

Na reforma descrita, os alunos eram motivados a compreender o porquê de se utilizar tal método ou propriedade na resolução de alguns problemas. Porém, o problema não era o ponto de partida, lançado como desafio, para motivação dos alunos em aprender determinado conteúdo. Para alguns profissionais da Educação Matemática esse foi o ponto falho dessa reforma e também o que fez com que se pensasse na resolução de problemas com outra perspectiva.

### 2.1.3 A Matemática Moderna

Após o fracasso obtido com o Ensino de Matemática por compreensão, não só o Brasil, mas outros países passaram a utilizar a matemática de forma mais sistemática, com uma linguagem própria e fazendo uso de propriedades de certa forma abstrata demais ao nível dos alunos da Educação Básica. Essa renovação na forma de apresentar a matemática aos alunos causou transtornos enormes na educação, pelo fato de, os alunos não conseguirem abstrair os conteúdos em função da linguagem e complexidade com a qual era passada.

O excessivo grau de formalidade, apoiado na Lógica, Álgebra, Topologia e na Teoria dos Conjuntos fez com que o ensino de matemática a partir da então chamada Matemática Moderna não obtivesse os resultados esperados pelos idealizadores do projeto. Além do despreparo e má formação dos professores da rede, que não tinham domínio do conteúdo e não conseguiam fazer com que os alunos enxergassem a ligação entre a matemática da sala de aula com os problemas que enfrentariam na sociedade, ou seja, os alunos não conseguiam perceber as aplicações dos conteúdos que tentavam aprender. Isso levou os profissionais da época (1960-1970) a se questionarem quanto à credibilidade da reforma no que dizia respeito à formação dos alunos enquanto cidadãos conscientes.

#### 2.1.4 O Ensino de Matemática por Meio da Resolução de Problemas

Nas décadas de 1980 e 1990, surgiram propostas para mudanças na educação matemática em âmbito mundial, as quais dariam ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas, na tentativa de melhorar o Ensino de Matemática.

No Brasil as recomendações para a Educação Básica como é o caso dos PCN, já incorporam estas indicações de necessidade de alterações nos métodos de ensino da Matemática.

Em 1980, o National Council Teachers of Mathematics – NCTM –, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento “Agenda para Ação”. Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares (BRASIL, 1998, p. 21).

Os processos de ensino da Matemática ainda eram desenvolvidos, por alguns professores, por meio de aulas em que os alunos são treinados a partir de exercícios repetitivos, os quais não contribuem para a construção dos conhecimentos e habilidades necessárias à resolução dos problemas aplicáveis na vida prática, ou seja, problemas reais ou do cotidiano dos alunos. A resolução de problemas como instrumento de ensino pode auxiliar significativamente na construção de conhecimentos matemáticos, bem como no desenvolvimento cognitivo dos alunos, o que pode melhorar o raciocínio e capacidade de interpretação e compreensão de conceitos matemáticos.

O ensino-aprendizagem de Matemática com ênfase na memorização de regras e algoritmos não proporciona o desenvolvimento de capacidades cognitivas, de análise e de produção do conhecimento matemático. O trabalho educacional na área de matemática por meio da resolução de problemas tem relevante significado na formação de um cidadão consciente e crítico em sua atuação na sociedade. Diferentemente da metodologia adotada na reforma anterior (Matemática Moderna), nessa havia uma preocupação com o processo de resolução, e não apenas com os resultados, como questionavam Blonn e Broder em citação anterior. Apesar de recente, essa importância dada à resolução de

problemas na Educação Matemática tem grande prestígio, pois como afirma Onuchic (1999), o ensino nessa perspectiva trata o aluno como protagonista, ou seja, participante ativo na construção de seu conhecimento e a resolução de problemas como instrumento preciso no desenvolvimento do processo de aprendizagem da matemática.

Esta é uma perspectiva de ensino que além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, promove a inserção social dos mesmos, já que estreita a relação entre a sala de aula e a realidade, a partir de problemas que simulam situações reais que podem ser vivenciadas pelos alunos sem seu cotidiano.

Quando se fala em resolução de problemas, há a necessidade de salientar que estes exigem a mobilização ou aprendizagens de habilidades e competências em sequência, de maneira que a solução não se apresente de forma tão trivial, necessitando de uma construção pautada em saberes e conteúdos com significado real. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1998, p. 41).

Nessa perspectiva, cabe ressaltar que a resolução de problemas não se resume na memorização de conteúdos, mas pode ser entendida como um processo de importância fundamental para a construção de conhecimentos, fazendo dos alunos protagonistas de seu próprio aprendizado, com a oportunidade de criar seus próprios métodos e estratégias de resolução, construindo, desenvolvendo e estruturando seu pensamento lógico matemático.

Para Zorzan (2007), as propostas de atividades sugeridas em sala devem surgir de situações, de exigências e necessidades que circundam determinado contexto histórico, ou até regional. Sendo assim, ao se mencionar a palavra (termo) ensino, tanto de matemática, como de outras áreas do conhecimento, é preciso repensar alguns princípios epistemológicos e ideologias que permeiam o saber e o método de ensino adotado. O ensino por meio da resolução de problemas vem revolucionar a educação e o ensino de matemática, ou seja, é a educação passando por uma espécie de reforma.

Como essas reformas, evidenciam-se a ênfase na resolução de problemas, a exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano, a compreensão da importância do uso da tecnologia, o direcionamento para a aquisição de competências básicas ao cidadão e a ação do aluno no processo da construção do conhecimento. (ZORZAN, 2007, p. 79)

A aprendizagem da matemática mediada pela Resolução de Problemas surgiu como uma afronta àquela velha metodologia de repetição para memorização, que fazia da matemática apenas uma aplicação de fórmulas infundadas, ou métodos práticos para se resolver um exercício, ou até mesmo uma família de exercícios parecidos. Nessa nova perspectiva, a Resolução de Problemas torna-se um meio de aprender e compreender os conhecimentos teóricos e práticos desta disciplina, os quais se verificam em situações de aplicação cotidiana. O processo ensino-aprendizagem parte da análise de uma situação-problema, partindo em seguida para o estudo abstrato dos conceitos ou conteúdos matemáticos, os quais serão necessários para a resolução. A partir daí, são observadas as operações exigidas para os problemas tratados por meio da representação simbólica pertinente, proporcionando aos alunos: o desenvolvimento de habilidades matemáticas, a construção do conhecimento e o desenvolvendo sua própria compreensão sobre o tema estudado.

Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (ONUCHIC, 1999, p. 208)

Os PCN (1998) orientam os professores a ensinar matemática através da Resolução de Problemas, sendo este instrumento o ponto de partida para atividades matemáticas, além de discutir diferentes formas de ensinar (fazer aprender) matemática na sala de aula, dando devida importância da História da Matemática e da Tecnologia de Comunicação, para uma melhor compreensão dos conceitos estudados. Os alunos devem pesquisar construir e compreender os conceitos matemáticos, bem como suas aplicações em situações problemas, entendendo a ligação existente entre o mundo real e o abstrato.

A resolução de problemas está diretamente ligada com as descobertas, em diferentes níveis de aprofundamento. Quando uma pessoa tenta resolver um problema, ela está utilizando de suas habilidades e competências já

adquiridas na tentativa de encontrar uma solução. Porém, nesse momento, seus conhecimentos vão sendo aos poucos mobilizados de forma que se defronte com descobertas novas, dentro da compreensão e do entendimento do problema. Segundo Pólya (1995), há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema, por mais simples que possa parecer. Sendo assim, os professores devem instigar seus alunos a tentar resolver os problemas e instruí-los sempre que necessário, na tentativa de fugir das operações rotineiras. Para Pólya (1995) um problema matemático pode ser tão divertido como um jogo. O diferencial está na motivação, na forma como o professor apresenta o problema e como conduz o trabalho dos alunos.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá inculcar-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes alguns meios para alcançar este objetivo. (PÓLYA, 1995, p. 05)

Quando os alunos se encontram desanimados para aprender matemática, em função do intenso trabalho mental que lhe é exigido e por estar em desacostumados a pensar de forma sistemática e profunda, o professor deve intervir, fazendo da aula um desafio para seus alunos. Se um estudante encontra prazer, ou ao menos, satisfação na aprendizagem de matemática, Pólya (1995) afirma que há uma grande chance de enxergar na matemática algo a mais, como um instrumento profissional, ou até a própria profissão.

Cada vez mais, encontra-se nos jornais e revistas a palavra cruzada e outros pequenos, porém complicados enigmas. Esse fato nos leva a pensar se por detrás dessa vontade e possível prazer em passar o tempo resolvendo pequenos problemas sem aplicação prática consistente não haveria algo mais profundo.

É importante que o professor saiba dosar a sua participação no processo de aprendizagem de seus alunos, para que não lhe seja dado todo o mérito da resolução, para que o aluno possa ter o auxílio necessário quando precisar, como afirma Pólya,

o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (PÓLYA, 1995, p. 01)

O professor deve fazer algumas indagações que proporcionem aos alunos ativar sua curiosidade, ou até indicar algum passo, sempre focando no trabalho e esforço do aluno como ato principal. Dessa forma, podemos instigar os alunos a pensar de várias formas, através de questionamentos como: Qual é a incógnita? Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar?

É fácil perceber que a finalidade de tais indagações é direcionar a atenção do aluno na incógnita, para que se tenha certeza daquilo com que está lidando, provocando uma operação mental. Uma indagação motivadora é sempre pertinente, independente do tipo do problema ou área da matemática a qual esteja inserido.

O nosso problema pode ser algébrico ou geométrico, matemático ou não, um problema científico importante ou um mero enigma. Não há diferença, as indagações fazem sentido e podem auxiliar-nos a resolver o problema. (PÓLYA, 1995, p. 05)

O intuito das indagações ou sugestões, por parte do professor é levar os alunos a perceberem algo que não esteja tão distante de sua linha de pensamento, mas que por desatenção ou falta de conhecimento não estejam alcançando. As indagações geralmente são as mesmas que o próprio aluno poderia fazer a si mesmo, por estar ativo na resolução do problema. Se o professor as fizer regularmente, elas ficarão gravadas na mente dos alunos e estes poderão ser capazes de, em momento oportuno, indagar-se a si mesmo, pois saberá que isso poderá suscitar ideias pertinentes à resolução do problema em si.

Para Pólya (1995), resolver problemas deve ser entendido como uma habilidade, ou uma competência prática, ou seja, que aprendemos fazendo. Tais competências podem ser adquiridas por imitação e prática. Por exemplo, quando tentamos nadar, aprender alguma arte marcial, ou jogar futebol, imitamos os atos de outras pessoas que temos como referência, então aprendemos pela prática a partir da imitação. Para resolver problemas, o processo é o mesmo, primeiramente

temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus problemas para depois aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os, com a prática.

O professor que tem a ambição de desenvolver nos seus alunos a habilidade de resolver problemas deve inculcar nas suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitá-lo e praticar a resolução dos problemas, ou seja, o professor deve praticar para servir de exemplo aos seus alunos. Isso é feito durante as aulas, quando o professor resolve um problema na lousa, indagando-se como faz com seus alunos tantas vezes, com naturalidade, até que os estudantes possam descobrir o uso correto das indagações e sugestões e que, ao fazer, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer, mas a compreensão de como agir, quais ideias são levantadas no enunciado, o que é preciso calcular, qual o objetivo do problema.

Onuchic (1999) apresenta três modos diferentes de abordar a resolução de problemas que são:

- Ensinar sobre resolução de problemas, onde o professor pode se apoiar no método sugerido por George Pólya em seu livro "A arte de resolver problemas", ou em algum outro que se baseia neste. Tal método é composto por quatro fases que norteiam a resolução de um problema, são elas: compreender o problema, criar um plano, desenvolver o plano e revisar o problema (retrospectiva).
- Ensinar a resolver problemas, onde o professor se atém aos conteúdos e artifícios matemáticos que podem ser aplicados na resolução de problemas sendo eles rotineiros ou não. Visto que o intuito principal no ensino de matemática é que os alunos consigam aplicá-la. Sendo assim, resolvem-se muitos exemplos de problemas, frisando a aplicação de algum conceito ou propriedade matemática já estudada. Neste enfoque, a resolução de problemas passa a ser entendida como um meio de aprender e aperfeiçoar a matemática, os problemas são formulados com o propósito de contribuir para a formalização dos conceitos.
- Ensinar matemática através da resolução de problemas. Nesse caso os problemas são ponto de partida para se aprender matemática, onde um problema é lançado para que os alunos reflitam sobre o aspecto-chave do tópico matemático a ser ensinado. A partir daí são desenvolvidas técnicas matemáticas para que se alcance a solução de tal problema e para que o problema de certa forma real possa desencadear a compreensão de conceitos abstratos, fazendo uso da simbologia matemática e suas operações. (ONUChic, 1999, p. 206)

Onuchic(1999) também destaca a importância dos PCN (1998) para o desenvolvimento da educação no país. Segundo ela esse documento foi elaborado com base em situações educacionais de todas as regiões do país e preza por

nortear a prática escolar de forma a proporcionar a todas as crianças e jovens sua inserção na sociedade e mercado de trabalho com uma formação matemática completa, focando a formação continuada dos professores, a produção de livros e de outros materiais de uso em sala de aula ou em função dela.

Os PCN (1998) indicam a resolução de problemas como ponto de partida para as atividades matemáticas, com devida importância à história da matemática e à tecnologia da comunicação, para que as crianças possam pensar matematicamente, escrever e criar conjecturas, melhorar seu raciocínio, relacionar a matemática com outras áreas, estabelecer relações, levantar e analisar ideias, desenvolver sua capacidade de resolver problemas e saber se comunicar utilizando da linguagem matemática. Esses itens são próprios de uma educação construtivista, em que os alunos são preparados constantemente a construir seu próprio conhecimento, a partir de saberes prévios que podem ser lapidados em função de habilidades que se deseja que os alunos adquiram.

Essas reformas pelas quais passou a educação no Brasil aconteceram devido a ineficácia dos projetos educacionais que não estavam rendendo resultados favoráveis dentro da realidade nacional, como encontramos escrito nos PCN.

Por outro lado, as propostas curriculares mais recentes são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que ideias ricas e inovadoras, veiculadas por essas propostas, não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis. (BRASIL, 1998, p. 21)

É interessante pensar sobre as reformas educacionais ocorridas ao longo dos anos, pois elas sempre surgem de uma necessidade coletiva. E nessa última, a resolução de problemas assumiu seu lugar de destaque, visto que a matemática quando ensinada através da resolução de problemas se torna mais atraente e produtiva.

Pólya (1995) ressalta que o mais importante na resolução de problemas é que se permita que os alunos pensem por si só, e que o professor apenas oriente quando houver necessidade. Aprender o “como pensar” é o foco na resolução de problemas. “O que fazer” e “o que pensar” são itens simples quando os alunos percebem que o “como pensar” pode fazer a diferença na sua aprendizagem.

Para que esse processo se concretize é necessário que os professores proporcionem tempo para os alunos pensarem, que não avancem antes que eles tirem algumas conclusões ou que possam pelo menos propor justificativas para as respostas encontradas. Ouvir o que os alunos têm a dizer, indagar constantemente e provocar sua curiosidade sobre o tema são atitudes que têm como consequência uma aprendizagem mais concreta e abrangente.

Os fatores que mais contribuem para os persistentes problemas com relação ao ensino de matemática no Brasil são a falta de formação profissional qualificada, péssimas condições de trabalho em algumas regiões e a ausência de políticas educacionais coerentes com a realidade do país, além de interpretações equivocadas de algumas concepções pedagógicas. Muitas vezes a ignorância não é dos alunos, mas daqueles que se dizem responsáveis pela educação. Nesse sentido, Onuchic (1999), afirma que: “A preparação do professor tem um efeito direto na realização dos alunos, pois ninguém dispense tanto tempo ou tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores”. (Onuchic, 1999, p. 211)

Inúmeros cursos são oferecidos à distância, para que os professores possam realizar sua formação continuada sem ter que se afastar dos afazeres. Alguns sistemas de ensino até colocam cursos em horário de aula para que não comprometam a vida pessoal dos professores. Porém, poucas são as situações em que os conhecimentos adquiridos nos cursos de formação são aplicados em sala, pois podem exigir um pouco mais de dedicação dos educadores em preparar suas aulas e isso pode não ser viável em consequência da grande quantidade de aulas que os professores brasileiros ministram semanalmente.

## 2.2 DIFERENCIANDO EXERCÍCIO DE PROBLEMA

Pela definição clássica de problema dada por Pozo&Echeverria (1998) podemos dizer que a situação apresentada recebe essa nomenclatura quando traz algo novo e desafiador para o aluno, ou seja, não se dispõe de um caminho rápido e direto que leve à sua solução, sem que haja antes, um processo de reflexão, uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. Se dispusermos de mecanismo que nos leve a solução de forma imediata ou direta, caracteriza-se um exercício. Dessa forma, uma mesma situação pode ser uma problema complexo para uma pessoa a ao mesmo tempo um exercício muito

direto para outra, deixando então a classificação como tal em função do contexto da situação e a mercê do indivíduo que ponha-se a resolvê-la.

De forma sintética podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas sobre aprendidas (ou seja, transformadas em rotina automatizadas como consequência de uma prática contínua). Limitamo-nos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais. (POZO & ECHEVERRÍA, 1998, p. 16)

Uma situação que é estudada e resolvida várias vezes passa a se tornar rotineira e então a ser entendida como um exercício, pois deixa de ser motivadora ou não oferece mais algo de novo ou desafiador para os alunos. Essa distinção deve ficar bem clara ao se trabalhar em sala de aula com a resolução de problemas, por isso é importante que o professor conheça seus alunos e os limites de sua aprendizagem.

A realização de exercícios apesar de ajudar a memorizar técnicas e métodos, não ajuda muito quando os alunos são expostos a situações diferentes daquelas em que estavam acostumados a treinar. Há a necessidade de propor aos alunos problemas bem elaborados, orientando-os para que consigam tomar as decisões de forma a se aproximar cada vez mais da solução esperada. Para que isso aconteça, eles devem dispor de conhecimento previamente adquiridos e muito bem assimilados, com os exercícios que já foram resolvidos.

Ensinar matemática por meio da resolução de problemas é como ensinar alguém a andar de bicicleta; podemos andar várias vezes para que o outro veja o que e como fazemos, podemos dar todas as dicas e explicar compassadamente os passos a serem tomados da maneira como fazemos, mas o aluno só irá aprender quando ele for o sujeito da situação, quando subir na bicicleta, cair alguns tombos e por si mesmo poder prever, tomar as decisões, errar, acertar, escolher o caminho, tentar.

[...] procurar explicar o que fazemos para resolver um problema, o que deve ser feito, é como tentar explicar a um amigo que jamais andou de bicicleta quais são os movimentos e equilíbrios que realizamos normalmente para que a bicicleta não somente se mantenha de pé, mas, além disso, nos transporte na direção que desejamos. (POZO & ECHEVERRÍA, 1998, p. 18)

Sendo assim, ao se tratar de resolução de problemas, sempre há a necessidade do novo, do inesperado, algo que possa colocar os alunos em xeque e que lhes permita pensar em alguma forma de alcançar a meta, ou seja, o resultado esperado para aquela situação. Para resolver um exercício, utilizamos de alguma técnica pré-estabelecida ou um conjunto de operações previamente testadas para aquele tipo de situação, diferentemente do problema que requer mais que a aplicação de um método ou uma técnica. Segundo Pólya (1995), para resolvermos um problema com excelência, devemos realizar vários passos, utilizar de inúmeros recursos matemáticos ou não, diferentes instrumentos que nos permitam conduzir a resolução até o final, sem nos afastarmos do foco.

Nessa perspectiva, elaborou uma sequência de passos que, segundo ele, devem ser seguidos para resolver um problema de qualquer que seja a área ou nível de complexidade. Pozo&Echeverría (1998) apresenta um quadro contendo um resumo dessa sequência de passos formulados por Pólya (1995) para resolver um problemas.

**Figura 16 – Método de Pólya para resolver um problema**

<p><b>Compreender o problema</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Qual é a incógnita? Quais são os dados?</li> <li>- Qual é a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? É suficiente? Redundante? Contraditória?</li> </ul>
<p><b>Conceber um plano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Já encontrou um problema semelhante? Ou já viu o mesmo problema proposto de maneira um pouco diferente?</li> <li>- Conhece um problema relacionado com este? Conhece algum teorema que possa lhe ser útil? Olhe a incógnita com atenção e tente lembrar um problema que lhe seja familiar ou que tenha a mesma incógnita, ou uma incógnita similar.</li> <li>- Este é um problema relacionado com o seu e que já foi resolvido. Você poderia utilizá-lo? Poderia usar o seu resultado? Poderia empregar o seu método? Considere que seria necessário introduzir algum elemento auxiliar para poder utilizá-lo?</li> <li>- Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia apresentá-lo de forma diferente novamente? Refira-se às definições.</li> <li>- Se não pode resolver o problema proposto, tente resolver primeiro algum problema semelhante. Poderia imaginar um problema análogo um pouco mais acessível? Um problema mais geral? Um problema mais específico? Pode resolver uma parte do problema? Considere somente uma parte da condição; descarte a outra parte. Em que medida a incógnita fica agora determinada? De que forma pode variar? Você pode deduzir dos dados algum elemento útil? Pode pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode mudar a incógnita? Pode mudar a incógnita ou os dados, ou ambos, se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximos entre si?</li> <li>- Empregou todos os dados? Empregou toda a condição? Considerou todas as noções essenciais concernentes ao problema?</li> </ul>
<p><b>Execução do plano</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ao executar o seu plano de resolução, comprove cada um dos passos.</li> <li>- Pode ver claramente que o passo é correto? Pode demonstrá-lo?</li> </ul>
<p><b>Visão retrospectiva</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pode verificar o resultado? Pode verificar o raciocínio?</li> <li>- Pode obter o resultado de forma diferente? Pode vê-lo com apenas uma olhada? Você pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?</li> </ul>

Fonte: *Solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. POZO, I. Juan (1998, p. 23)

Essa relação entre a resolução de problemas e a aprendizagem matemática deve ser percebida pelos alunos, por meio das intervenções feitas pelo professor no decorrer das aulas, o qual deve despir-se daquela ideia de que matemática se aprende com repetição e aplicação de conceitos transferidos previamente. O professor de matemática, enquanto educador matemático deve saber que:

[...], a solução de problemas requer que o treinamento técnico seja complementado por um conhecimento estratégico que permita utilizar essas técnicas de modo deliberado, no contexto de tarefas ou situações abertas, que admitem soluções diversas, as quais chamamos de problemas. Somente quando o aluno tiver praticado com situações desse tipo, e não somente com tarefas rotineiras fechadas, estará em condições de transferir estrategicamente seu conhecimento para outros problemas. (POZO & ECHEVERRÍA, 1998, p. 31)

Contudo, há sempre a necessidade de conhecer bem os conteúdos relacionados ao problema em questão, visto que a eficiência na solução de problemas depende muito da disponibilidade e da ativação de conhecimentos conceituais adequados. A base teórica e conceitual não pode ser abandonada em detrimento da resolução constante de problemas, pois ambos os enfoques se complementam, quando a aula é bem direcionada e preparada de acordo com um fim claro e específico. Assim, não restarão dúvidas ao professor, quanto à classificação da tarefa em exercício ou problema, desde que suas estratégias para alcançar a aprendizagem dos alunos sejam muito bem elaboradas.

Nesse sentido, no próximo capítulo apresentamos alguns problemas que contextualizam os conteúdos de Sistemas de Equações Lineares, cuja resolução é mediada pela Resolução de Problemas.

### CAPÍTULO 3

## UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES MEDIADO PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesse capítulo apresentamos alguns problemas que podem ser aplicados durante a introdução do conteúdo de sistemas lineares, ou no decorrer do processo para que os alunos se sintam motivados e desafiados a encontrar as soluções, estabelecer estratégias de ação executá-las, além revisar alguns conteúdos sobre sistemas lineares já estudados em anos anteriores.

Esses problemas têm a finalidade de suscitar nos alunos a necessidade, a curiosidade e a vontade de aprender novos conteúdos, os quais serão necessários para resolver os problemas propostos e outros no decorrer do processo. As resoluções apresentadas fazem parte da proposta, porém não são as únicas formas possíveis de resolver cada problema. A ordem em que estão apresentados não é, necessariamente, a ordem de aplicação em sala, visto que não se trata de uma sequência didática, mas de uma proposta de atividades resolvidas.

#### 3.1 PROBLEMA 1: QUANTO CUSTA?

Uma entidade filantrópica que abriga crianças carentes numa cidade do interior, necessitando de recursos para melhorar suas instalações, promoveu uma festa beneficente para arrecadar fundos. Os funcionários foram divididos em três equipes de trabalho. Cada equipe montou uma barraca, as quais foram chamadas de  $B_1$  (barraca 1),  $B_2$  (barraca 2) e  $B_3$  (barraca 3). As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentos que eram: espetinhos, pastéis e cachorros-quentes. Cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas.

No fim da festa, ao ser realizado o balanço sobre o consumo nas três barracas, foi constatado que:

- Na barraca 1 foram consumidos 28 espetinhos, 42 pastéis e 48 cachorros-quentes;
- Na barraca 2 foram consumidos 23 espetinhos, 50 pastéis e 45 cachorros-quentes;

- Na barraca 3 foram consumidos 30 espetinhos, 45 pastéis e 60 cachorros-quentes.

Sabendo que as barracas lucraram R\$ 102,00, R\$ 95,00 e R\$ 117,00 respectivamente, qual é o preço de cada espetinho, pastel e cachorro-quente nas barracas?

### 3.1.1 Resolução

#### Compreendendo o problema

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?

As incógnitas do problema são os preços de cada um dos alimentos vendidos nas três barracas. Temos a arrecadação total de cada barraca e a quantidade de unidades vendidas em cada uma. A condicionante é que os preços dos alimentos em cada barraca são os mesmos e essa informação é o suficiente para determinarmos o valor das incógnitas

#### Estabelecendo um plano para a resolução:

Consiste em determinar as estratégias que serão usadas para resolver o problema.

Primeiramente, como os preços são os mesmos em todas as barracas, podemos associar o valor de cada produto a uma incógnita. Assim temos uma equação para cada barraca, relacionando os preços de cada alimento entre si e o valor total arrecadado. Nesse caso podemos elaborar três equações com três incógnitas, formando um sistema linear.

O plano é esse, elaborar o sistema e resolvê-lo para determinar as variáveis que representam os preços de cada alimento vendido. Usamos a Regra de Cramer para resolver o sistema.

#### Execução do plano:

Primeiramente consideremos  $x$  sendo o preço de um espetinho;  $y$  o preço de um pastel e  $z$  o preço de um cachorro-quente em cada barraca.

- Pelas informações de consumo da barraca 1 podemos escrever a seguinte equação  $28x + 42y + 48z = 102$  ;
  - Para a barraca 2 escrevemos a equação  $23x + 50y + 45z = 95$  ;
  - Já para a barraca 3 podemos escrever  $30x + 45y + 60z = 117$
- Como as três equações apresentam as mesmas incógnitas e possuem o mesmo conjunto solução, podemos montar o sistema

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102 \\ 23x + 50y + 45z = 95 \\ 30x + 45y + 60z = 117 \end{cases} \quad (1)$$

O sistema será resolvido a partir da aplicação da Regra de Cramer.

Consideremos então a matriz  $A$  dos coeficientes para o sistema (1) e aplicando a regra de Sarrus temos.

$$\det A = \begin{vmatrix} 28 & 42 & 48 & 28 & 42 \\ 23 & 50 & 45 & 23 & 50 \\ 30 & 45 & 60 & 30 & 45 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 28 \cdot 50 \cdot 60 + 42 \cdot 45 \cdot 30 + 48 \cdot 23 \cdot 45 - 30 \cdot 50 \cdot 48 - 45 \cdot 45 \cdot 28 - 60 \cdot 23 \cdot 42$$

$$\det A = 84000 + 56700 + 49680 - 72000 - 56700 - 57960 =$$

$$\det A = 3/20 \neq 0$$

Como  $\det A \neq 0$ , podemos seguir com o plano. Então sejam  $A_1, A_2$  e  $A_3$  as matrizes obtidas de  $A$  ao trocar a  $j$ -ésima coluna pela matriz  $B$  dos termos

independentes que é  $B = \begin{pmatrix} 102 \\ 95 \\ 117 \end{pmatrix}$ . Temos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 102 & 42 & 48 \\ 95 & 50 & 45 \\ 117 & 45 & 60 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 28 & 102 & 48 \\ 23 & 95 & 45 \\ 30 & 117 & 60 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 28 & 42 & 102 \\ 23 & 50 & 95 \\ 30 & 45 & 117 \end{pmatrix}$$

Calculando os determinantes de cada matriz pela Regra de Sarrus temos:

$$\det A_1 = 102.50.60 + 42.45.117 + 48.95.45 - 117.50.48 - 45.45.102 - 60.95.42 = 5580$$

$$\det A_2 = 28.95.60 + 102.45.30 + 48.23.117 - 30.95.48 - 117.45.28 - 60.23.102 = 1488$$

$$\det A_3 = 28.50.117 + 42.95.30 + 102.23.45 - 30.50.102 - 45.95.28 - 117.23.42 = 3348$$

Sendo assim, pela Regra de Cramer temos:

$$x = \frac{5580}{3720} = 1,50 \quad y = \frac{1488}{3720} = 0,40 \quad z = \frac{3348}{3720} = 0,90$$

Logo a solução do sistema é  $S = (1,50; 0,40; 0,90)$

**Resposta:** Cada espetinho custa R\$ 1,50; cada pastel custa R\$ 0,40 e cada cachorro-quente custa R\$ 0,90.

#### Retrospectiva:

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

Para verificar a validade da solução, podemos substituir as incógnitas das equações pelos devidos valores encontrados e efetuar as operações pertinentes. Ao substituir  $x$  por 1,50,  $y$  por 0,40 e  $z$  por 0,90, respectivamente verificamos que as equações são satisfeitas, o que comprova a validade da solução encontrada.

Esse problema pode ser resolvido de outra forma aplicando outros métodos para resolver o sistema como, por exemplo, o Método de Gauss-Jordan ou o Método da Eliminação de Gauss, ambos resultarão no mesmo resultado. Vale salientar que o mesmo método usado nesse problema pode ser aplicado em outros problemas, desde que possam ser traduzidos por um sistema do tipo 3 x 3, em que a matriz dos coeficientes tenha determinante não nulo.

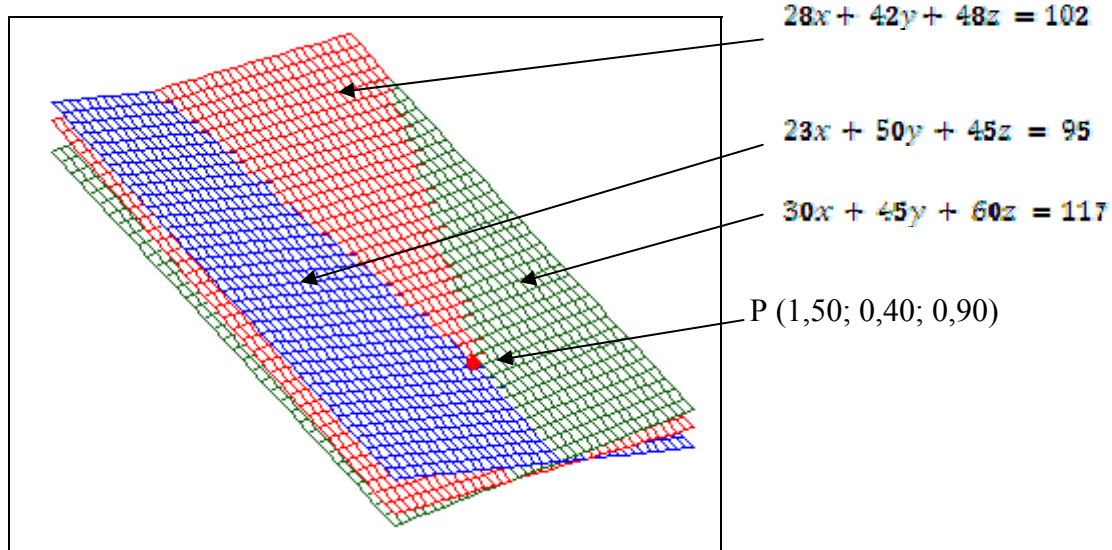
### 3.1.2 Interpretação Geométrica do Sistema

Cada equação do sistema pode ser representada por um plano no espaço.

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102 \\ 23x + 50y + 45z = 95 \\ 30x + 45y + 60z = 117 \end{cases}$$

Como o sistema apresentou como solução  $S = (1,50; 0,40; 0,90)$  e essa solução é única, então podemos classificá-lo como um sistema possível e determinado. Os valores encontrados serão as coordenadas do ponto P de interseção dos três planos no espaço. A figura construída com auxílio do software Winplot ilustra a situação.

**Figura 17** – Três planos concorrentes



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 3.2 PROBLEMA 2: UMA DIETA BALANCEADA

Uma alimentação diária equilibrada requer uma dieta balanceada a qual deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E. Cinco alimentos foram estudados a fim de se obter uma refeição que atenda a essa dieta. Para cada 1 grama de cada alimento, ficou determinado que:

- i. O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 9 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E;
- ii. O alimento II tem 1 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidades de vitamina C, 2 unidade de vitamina D e 13 unidade de vitamina E;
- iii. O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E;
- iv. O alimento IV tem 9 unidade de A, 1 unidade de B, 0 unidade de C, 1 unidades de D e 1 unidades de E.
- v. O alimento V tem 1 unidade de A, 10 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 2 unidades de E.

Podemos organizar essas informações na seguinte tabela.

**Figura 18** – Distribuição de unidades de vitaminas A,B,C,D e E entre os alimentos I, II, III, IV, V para uma dieta balanceada

VITAMINAS	ALIMENTOS					Total de vitaminas
	I	II	III	IV	V	
A	1	1	2	9	1	170
B	1	1	2	1	10	180
C	1	1	5	0	1	140
D	9	2	1	1	2	180
E	2	13	2	1	2	350

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Pensando em uma alimentação diária equilibrada, obedecendo rigorosamente os dados da tabela, qual a quantidade de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir?

### 3.2.1 Resolução

#### Compreendendo o problema:

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?
- O que podemos observar no problema?

As incógnitas do problema são as quantidades (em gramas) de cada alimento que deve constar em uma refeição para termos uma alimentação equilibrada. As condicionantes são as quantidades de vitamina contidas em cada alimento e o total de vitaminas que devemos ingerir. Essas informações são suficientes para encontrarmos os valores das incógnitas. Podemos observar que os dados já estão organizados, o que facilita nosso trabalho.

#### Estabelecendo um plano:

Vamos estabelecer as estratégias que serão usadas na resolução. Visto que esse problema é parecido com o das três barracas, porém com mais incógnitas. Podemos elaborar com as informações do problema 5 equações, formando um sistema do tipo  $5 \times 5$ . Como não é viável a resolução desse sistema pela Regra de Cramer, pela quantidade de operações necessárias, vamos resolvê-lo aplicando o método de Eliminação de Gauss, ou seja, por meio do escalonamento da matriz aumentada do sistema. Esse é o plano.

#### Executando o plano:

Podemos chamar de  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  cada uma das quantidades de gramas dos cinco alimentos que devemos ingerir. Como os dados já estão bem organizados em uma tabela, não temos dificuldade em escrever o sistema abaixo que traduz a situação.

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 1x_5 = 170 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 10x_5 = 180 \\ 1x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 140 \\ 9x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 180 \\ 2x_1 + 13x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 350 \end{cases}$$

Vamos aplicar o método do escalonamento de Gauss. Para isso, seja A, a matriz aumentada do sistema.

$$A = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 10 & 180 & \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 140 & \\ 9 & 2 & 1 & 1 & 2 & 180 & \\ 2 & 13 & 2 & 1 & 2 & 350 & \end{array} \right)$$

Substituindo a 2ª e a 3ª linha pela subtração entre a 1ª e essas duas temos:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 & \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 & \\ 9 & 2 & 1 & 1 & 2 & 180 & \\ 2 & 13 & 2 & 1 & 2 & 350 & \end{array} \right)$$

Permutando a 2ª com a 5ª e a 3ª com a 4ª linha temos:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 & \\ 2 & 13 & 2 & 1 & 2 & 350 & \\ 9 & 2 & 1 & 1 & 2 & 180 & \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 & \end{array} \right)$$

Substituindo a 2ª linha pela diferença entre o produto da 1ª linha por 2 e a 2ª linha; e substituindo a 3ª linha pela diferença entre o produto da 1ª linha por 9 e a 3ª linha temos:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 & \\ 0 & -11 & 2 & 17 & 0 & -10 & \\ 0 & 7 & 17 & 80 & 7 & 1350 & \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 & \end{array} \right)$$

Substituindo a 3ª linha pela soma entre os produtos da 2ª linha por 7 e da 3ª linha por 11 temos:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 & \\ 0 & -11 & 2 & 17 & 0 & -10 & \\ 0 & 0 & 201 & 999 & 77 & 14780 & \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 & \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 & \end{array} \right)$$

Permutando a 3ª com a 4ª linha temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 \\ 0 & -11 & 2 & 17 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1602 & 77 & 16790 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 \end{array} \right)$$

Substituindo a 4ª linha pela soma entre o produto da 3ª por 67 e a 4ª linha temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 \\ 0 & -11 & 2 & 17 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1602 & 77 & 16790 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 \end{array} \right)$$

Substituindo a 5ª linha pela diferença entre o produto da 4ª linha por 8 e o produto da 5ª linha por 1602 temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 9 & 1 & 170 \\ 0 & -11 & 2 & 17 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1602 & 77 & 16790 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 & -10 \end{array} \right)$$

A partir dessa nova matriz podemos montar o sistema equivalente ao sistema inicial.

Esse sistema possui a mesma solução que o sistema inicial do problema. Podemos resolver esse sistema de baixo para cima.

Pela 5ª equação temos:

$$15034x_5 = 150340$$

$$x_5 = \frac{150340}{15034}$$

$$x_5 = 10$$

Substituindo esse resultado na 4ª equação temos:

$$1602x_4 + 77x_5 = 16790$$

$$1602x_4 + 77 \cdot 10 = 16790$$

$$x_4 = \frac{16790 - 770}{1602}$$

$$x_4 = 10$$

Substituindo o valor  $x_4$  por 10 na 3ª equação temos:

$$-3x_3 + 9x_4 = 30$$

$$-3x_3 + 9 \cdot 10 = 30$$

$$x_3 = \frac{30 - 90}{-3}$$

$$x_3 = 20$$

Substituindo os valores encontrados na 2ª equação temos:

$$-11x_2 + 2x_3 + 17x_4 = -10$$

$$-11x_2 + 2 \cdot 20 + 17 \cdot 10 = -10$$

$$x_2 = \frac{-10 - 170 - 40}{-11}$$

$$x_2 = 20$$

Por fim, substituindo todos os valores na 1ª equação temos:

$$1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 1x_5 = 170$$

$$1x_1 + 20 + 2 \cdot 20 + 9 \cdot 10 + 10 = 170$$

$$x_1 = \frac{170 - 10 - 90 - 40 - 20}{1}$$

$$x_1 = 10$$

Logo a solução do sistema é  $S = (10, 20, 20, 10, 10)$

**Resposta:** Pelos valores encontrados podemos concluir que para que se tenha uma alimentação diária equilibrada deve-se ingerir 10 gramas do alimento I, 20gramas do alimento II, 20gramas do alimento III, 10gramas do alimento IV e 10gramasdoalimento V.

**Retrospectiva:**

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

Podemos verificar a validade da solução, substituindoas incógnitas das equações pelos devidos valores encontrados e efetuar as operações pertinentes. Ao substituir  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  por 10, 20, 20, 10 e 10 respectivamente nas equações, Percebemos que todas as equações são satisfeitas, o que garante a validade da solução encontrada.

Esse problema também pode ser resolvido aplicando o método de Gauss-Jordan, ambos resultarão na mesma solução. Apesar de que pelo método de Gauss-Jordan seria necessário um número muito maior de operações para deixar a matriz na forma escalonada reduzida. Muitos outros problemas (sobre alimentação, vendas, dentre outros) com grande número de variáveis, cuja tradução para a linguagem matemática dê origem à sistemas lineares podem ser resolvidos por esse mesmo método.

### 3.3 PROBLEMA 3: O PREÇO DA LIGAÇÃO

Pensando em aumentar a quantidade de clientes, uma empresa de telefonia móvel elaborou a seguinte promoção. Para ligações feitas entre aparelhos habilitados por ela (mesma operadora), o valor de cada minuto é de R\$ 0,20. Quando a ligação é feita para aparelhos de outras operadoras, o valor cobrado é de R\$ 0,30 por minuto. Um cliente cadastrado nessa promoção pagou R\$ 24,00 referentes a 100 minutos de ligações, tanto entre aparelhos da mesma operadora, quanto para outras. Determine a quantidade de minutos que foram utilizados entre aparelhos habilitados pela empresa de telefonia e para aparelhos de outras operadoras.

### 3.3.1 Resolução

#### **Compreendendo o problema:**

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?

As incógnitas do problema são as quantidades de minutos em que foram feitas ligações para telefones de mesma operadora e para operadoras diferentes. Temos o valor de cada tipo de ligação, bem como o total pago pelo cliente e o total de minutos que foram utilizados. As condicionantes são que cada tipo de ligação tem um preço diferente, os quais são conhecidos totalizando R\$ 24,00, e que o total de ligações resulta em 100 minutos. Essas informações são suficientes para determinarmos as incógnitas do problema.

#### **Estabelecendo um plano:**

Vamos determinar quais as estratégias que serão usadas para resolver o problema.

Percebemos que sua estrutura já é conhecida, pois no Ensino de Matemática são abordados problemas relativos a moedas de diferentes valores, veículos com quantidades de rodas diferentes, animais e suas quantidades de pernas, os quais apresentam a mesma estrutura de organização das informações que o problema em questão. Nesse caso poderemos elaborar duas equações com duas incógnitas, formando um sistema linear. Uma equação relaciona o tempo de duração das ligações de cada tipo e o total de minutos, a outra relaciona o total de reais pagos pelas ligações e o valor de cada uma.

Sendo assim, o plano é elaborar o sistema e resolvê-lo para determinar as variáveis que representam as quantidades de minutos gastos em ligações dos dois tipos. Como o sistema é do tipo  $2 \times 2$ , resolveremos pelo Método da Substituição.

#### **Execução do plano:**

Primeiramente consideremos  $x$  sendo o tempo gasto em ligações entre aparelhos da mesma operadora e  $y$  o tempo gasto em ligações entre aparelhos de operadoras diferentes.

Como o tempo total das ligações é de 100 minutos, podemos escrever a equação  $x + y = 100$ .

Visto que nas ligações entre mesma operadora o preço é R\$0,20 por minuto, e entre operadoras diferentes R\$0,30 o minuto então podemos escrever a equação  $0,20x + 0,30y = 24$ .

Temos então o sistema 
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0,20x + 0,30y = 24 \end{cases}$$

Isolando o  $x$  na 1ª equação temos:  $x = 100 - y$

Substituindo essa expressão na 2ª equação podemos encontrar o valor de  $y$ .

$$0,20x + 0,30y = 24$$

$$0,20 \cdot (100 - y) + 0,30y = 24$$

$$20 - 0,20y + 0,30y = 24$$

$$0,10y = 24 - 20$$

$$y = \frac{4}{0,10}$$

$$y = 40$$

Para determinarmos o valor de  $x$  basta substituímos o valor encontrado para o  $y$  na 1ª equação.

$$x + y = 100 \rightarrow x + 40 = 100 \rightarrow x = 60$$

Logo a solução do sistema será  $S = (60, 40)$

**Resposta:** Pelos valores encontrados podemos afirmar que foram realizadas ligações entre aparelhos de mesma operadora num total de 60 minutos. Já as ligações para aparelhos de outras operadoras as ligações totalizaram 40 minutos.

## Retrospectiva

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

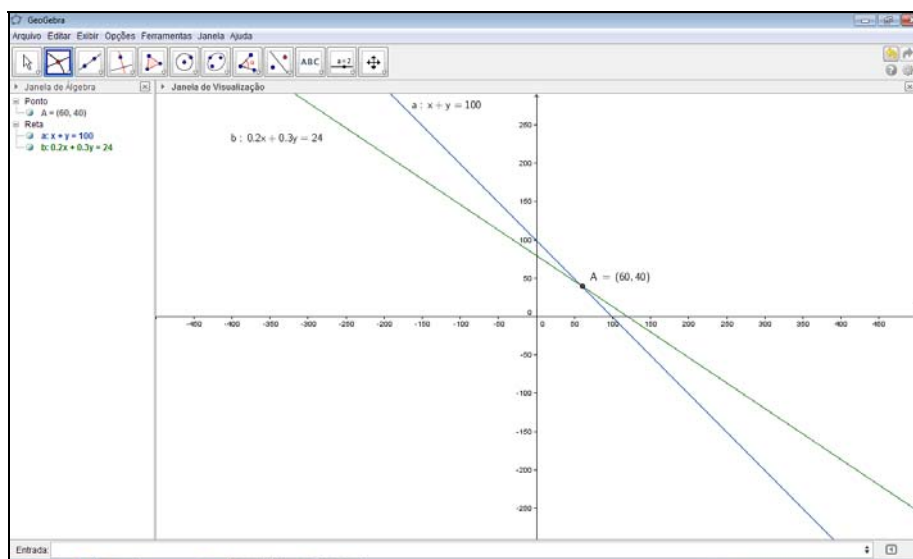
Para verificar a validade da solução, podemos substituir as incógnitas das equações pelos devidos valores encontrados e efetuar as operações pertinentes. Ao substituir  $x$  por 60 e  $y$  por 40 verificamos que as duas equações são satisfeitas, o que comprova a validade da solução encontrada.

Esse problema também pode ser resolvido pelo método da comparação, ambos resultarão na mesma solução. Esses métodos (substituição e comparação) podem ser aplicados a qualquer problema que possa ser traduzido por um sistema do tipo  $2 \times 2$ .

### 3.3.2 Interpretação Geométrica

Como sabemos cada equação do sistema pode ser representada por uma reta no plano cartesiano. O sistema apresentou uma única solução, ou seja, é SPD, a solução do sistema representa o ponto de interseção das retas das equações no plano. A figura 19 ilustra a situação.

**Figura 19** – Duas retas concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor

### 3.4 PROBLEMA 4: JOGO DE CARTAS

Um campeonato de jogo de cartas foi disputado em quatro dias, de forma que em cada dia foi realizada certa quantidade de rodadas do jogo. As rodadas têm pontuações diferentes em dias diferentes, e quando um jogador ganha a rodada ganha os pontos referentes a ela, se perde, perde os pontos da rodada. Quatro amigos que participaram desse campeonato marcaram seus desempenhos na tabela da figura 20.

**Figura 20** –Desempenho dos competidores nos quatro dias de campeonato

Participantes	Desempenho (vitórias, empates ou derrotas)				Total de pontos
	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	
Lucas	2	1	0	-1	1
Pedro	0	-2	3	1	4
Paulo	-1	1	5	0	12
Matheus	2	-3	-1	1	-5

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Na tabela, os números positivos indicam o número de vitórias a mais que as derrotas, os negativos indicam o número de derrotas a mais que as vitórias, e o zero indica que não houve vitória nem derrota.

Por exemplo: Lucas teve 2 vitórias a mais que as derrotas no 1º dia, no 2º dia teve 1 vitória a mais que as derrotas, no 3º dia, venceu o mesmo número de rodadas que perdeu, já no 4º dia teve 1 derrota a mais que as vitórias. Seu total de pontos foi de 1 ponto.

Com base nas informações acima, determine qual é a pontuação de cada rodada nos quatro dias de campeonato.

#### 3.4.1 Resolução

##### **Compreendendo o problema:**

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?

As incógnitas do problema são as pontuações referentes a cada rodada nos quatro dias de campeonato. Temos o desempenho dos quatro amigos, que nos fornece as vitórias e as derrotas em cada dia, além da quantidade total de pontos acumulados no jogo. As condicionantes são que a cada vitória são somados os pontos da rodada e a cada derrota os pontos são subtraídos.

### Estabelecendo um plano:

Precisamos deixar claras as estratégias que serão usadas para resolver o problema, que é bem parecido com o problema da quantidade de vitaminas para a dieta balanceada, porém com menos equações e incógnitas. Vamos, a partir dos dados do problema, montar um sistema do tipo 4 x 4 e resolvê-lo aplicando o Método de Gauss-Jordan, que consiste em transformar o sistema em outro equivalente a ele, porém na forma escalonada reduzida, onde os pivôs são todos iguais a 1, único elemento não nulo na sua coluna. Esse é o plano.

### Execução do plano:

Primeiramente consideremos  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  as quantidades de pontos das rodadas nos quatro dias respectivamente. A partir dos dados da tabela podemos escrever o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 1 \\ 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 4 \\ -1x_1 + x_2 + 5x_3 + 0x_4 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 1x_4 = -5 \end{cases}$$

Considere a matriz aumentada do sistema

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 12 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

Permutando a 1ª e a 3ª linha temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Multiplicando a 1ª linha por 2 e somando com a 3ª e 4ª temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & -1 & 25 \\ 0 & -1 & 9 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

Permutando a 2ª com a 4ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 9 & 1 & 19 \\ 0 & 3 & 10 & -1 & 25 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 2ª linha por 3 e somando com a 3ª; multiplicando a 2ª linha por -2 e somando com 5ª temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 9 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 37 & 2 & 82 \\ 0 & 0 & -15 & -1 & -34 \end{pmatrix}$$

Multiplicando 1ª e a 2ª linha por -1, a 3ª linha por  $\frac{1}{37}$  e a 4ª linha por  $\frac{-1}{15}$  temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{37} & \frac{82}{37} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & \frac{34}{15} \end{pmatrix}$$

Somando a 3ª linha com o oposto da 4ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{37} & \frac{82}{37} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{555} & \frac{28}{555} \end{pmatrix}$$

Multiplicando a 4ª linha por  $-\frac{55s}{7}$  temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{37} & \frac{82}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo a 3ª linha pela diferença entre o produto da 4ª linha por  $\frac{2}{37}$  e a 3ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & -1 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo a 2ª linha pela soma entre ela e a 4ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo a 2ª linha pela diferença entre o produto da 3ª linha por 9 e a 2ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & -12 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo a 1ª linha pela diferença entre o produto da 3ª linha por 5 e a 1ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo a 1ª linha pela soma dela com a 2ª linha temos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as três primeiras linhas por -1 e substituindo-as temos a matriz na sua forma escalonada reduzida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Perceba que ao escrevermos o novo sistema, a partir da matriz obtida, este estará na forma escalonada reduzida.

$$\begin{cases} x_1 & & & & = 1 \\ & x_2 & & & = 3 \\ & & x_3 & & = 2 \\ & & & x_4 & = 4 \end{cases}$$

Por fim, obtemos o valor das incógnitas do problema que são  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 3$ ;  $x_3 = 2$  e  $x_4 = 4$

Logo a solução do sistema será  $S = (1, 3, 2, 4)$

**Resposta:** Pelos valores encontrados como solução do sistema podemos concluir que cada rodada vale 1 ponto no 1º dia, 3 pontos no 2º dia, 2 pontos no 3º dia e 4 pontos no 4º dia de realização do campeonato.

### Retrospectiva:

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

Para verificar a validade da solução, substituímos as incógnitas das equações pelos devidos valores encontrados e efetuamos as operações pertinentes. Ao substituir  $x_1, x_2, x_3, x_4$  por 1, 3, 2, e 4 respectivamente nas equações, percebemos

que todas as equações são satisfeitas, o que garante a validade da solução encontrada. Esse problema pode ser resolvido de outra forma aplicando o Método da Eliminação de Gauss, ou pela Regra de Cramer, que não é recomendada pela quantidade de operações necessárias.

É bom percebermos que quando aplicamos o método de Gauss-Jordan, ao resolvermos o sistema já escalonado a solução é imediata. Isso acontece pelo fato do sistema estar na forma escalonada reduzida, onde os pivôs são iguais a 1 e são os únicos elementos não nulos de suas colunas. Porém, durante o processo de escalonamento da matriz aumentada, o número de operações é bem maior do que no Método da Eliminação de Gauss, quando o sistema tem grande número de equações e incógnitas (4 ou mais).

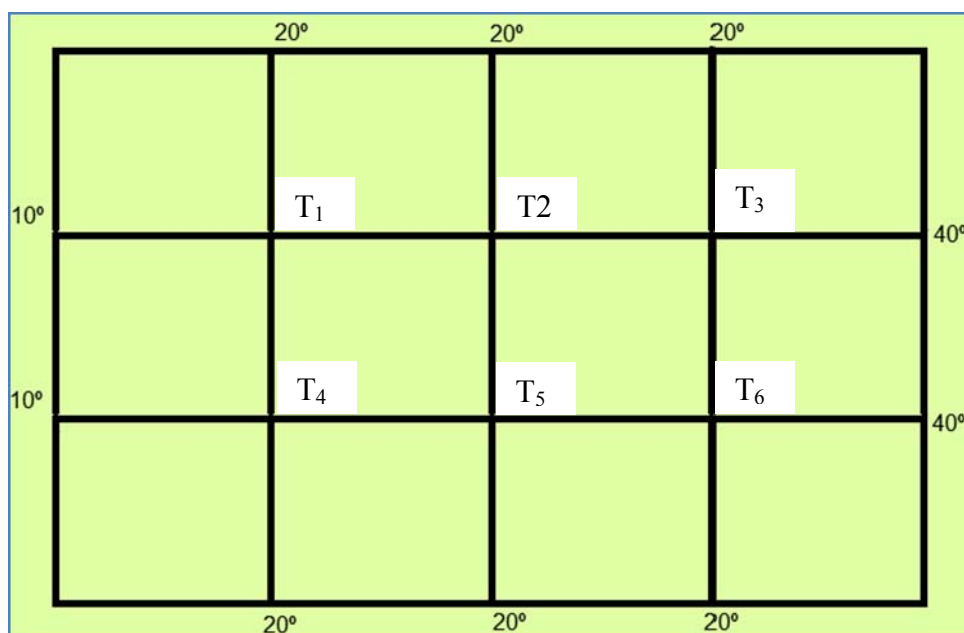
Se aplicássemos o método de Gauss-Jordan para o sistema 5 x 5 do problema das quantidades de vitaminas teríamos muito trabalho para escalonar o sistema até sua forma escalonada reduzida. Quando o sistema é grande, ou seja, número de equações maior do que quatro, o número de operações durante o processo de escalonamento é cerca de 50% maior pelo Método de Gauss-Jordan do que pelo Método da Eliminação de Gauss. Já para sistemas pequenos o número de operações é praticamente o mesmo.

O Problema 5 é uma adaptação baseada no artigo de Silva (2009) intitulado “*Aplicação da Álgebra Linear na Engenharia Química*”, postado no site <http://www.ebah.com.br>

### 3.5 PROBLEMA 5: A DISTRIBUIÇÃO DA TEMPERATURA INTERIOR EM PLACAS

No estudo da transferência de calor podemos saber como fica a distribuição da temperatura assintótica de uma placa fina visto que são conhecidas as temperaturas em pontos de seu bordo. A Figura 20 representa uma seção transversal de uma barra de metal, onde o fluxo de calor é desprezível na direção perpendicular à placa. Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_6$  as temperaturas nos seis vértices interiores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 da Figura 20. A temperatura num vértice interior é aproximadamente igual à média aritmética das temperaturas dos quatro vértices vizinhos mais próximos a ele.

**Figura 21** –Secção transversal de uma barra metálica



Fonte: Construída pelo autor

A partir das informações faça uma estimativa dos valores de  $T_1, T_2, \dots, T_6$

### 3.5.1 Resolução

#### Compreendendo o problema

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?

As incógnitas do problema são as temperaturas nos vértices interiores da secção da placa. Temos todos os valores dos bordos. A condicionante é que a temperatura de cada vértice interior da secção é igual a média aritmética das temperaturas dos vértices vizinhos mais próximos. Essa informação é suficiente para determinarmos os valores das incógnitas, pois a figura nos fornece os valores já organizados.

#### Estabelecendo um plano:

Para dar início à resolução, é necessário determinarmos as estratégias que serão usadas para resolver o problema.

Com as informações do enunciado e os dados da figura podemos escrever seis equações nas incógnitas  $T_1, T_2, \dots, T_6$  que são as temperaturas desconhecidas. Sendo assim, o plano é elaborar um sistema do tipo 6 x 6 e resolvê-

lo para determinar as temperaturas. Para isso, será utilizado o Método da Eliminação de Gauss.

### Execução do plano:

Primeiramente consideremos  $T_1, T_2, \dots, T_6$  sendo as temperaturas dos vértices 1, 2, 3, 4, 5 e 6 respectivamente. Com base nas informações podemos escrever as relações:

$$T_1 = \frac{10 + 20 + T_2 + T_4}{4}; T_2 = \frac{20 + T_1 + T_3 + T_5}{4}; T_3 = \frac{40 + 20 + T_2 + T_6}{4}$$

$$T_4 = \frac{10 + 20 + T_1 + T_5}{4}; T_5 = \frac{20 + T_2 + T_4 + T_6}{4}; T_6 = \frac{40 + 20 + T_3 + T_5}{4}$$

A partir delas escrevemos as equações:

$$\begin{aligned} 4T_1 - T_2 - T_4 &= 30 \\ 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 &= 20 \\ 4T_3 - T_2 - T_6 &= 60 \\ 4T_4 - T_1 - T_5 &= 30 \\ 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 &= 20 \\ 4T_6 - T_3 - T_5 &= 60 \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ 4T_2 - T_1 - T_3 - T_5 = 20 \\ 4T_3 - T_2 - T_6 = 60 \\ 4T_4 - T_1 - T_5 = 30 \\ 4T_5 - T_2 - T_4 - T_6 = 20 \\ 4T_6 - T_3 - T_5 = 60 \end{cases}$$

Organizando as equações do sistema obedecendo a ordem crescente de índices temos:

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 - T_5 = 20 \\ -T_2 + 4T_3 - T_6 = 60 \\ -T_1 + 4T_4 - T_5 = 30 \\ -T_2 - T_4 + 4T_5 - T_6 = 20 \\ -T_3 - T_5 + 4T_6 = 60 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 60 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 60 \end{pmatrix}$$

Aplicando as operações elementares sobre as linhas da matriz A obtemos sua forma escalonada

$$1 \quad -\frac{120}{28}$$

Podemos então resolver o sistema

$$\begin{cases} T_1 - 4T_2 + T_3 + T_5 = -20 \\ T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -20 \\ T_3 + 8T_4 - 16T_5 + 4T_6 = -70 \\ T_4 - \frac{17}{8}T_5 - T_6 = -\frac{10}{8} \\ T_5 - \frac{120}{287}T_6 = -\frac{2250}{287} \\ T_6 = -\frac{65550}{2415} \end{cases}$$

Fazendo as substituições de baixo para cima obtemos:

$$T_1 \cong 17,1^\circ; T_2 \cong 21,4^\circ; T_3 \cong 27,1^\circ; T_4 \cong 17,1^\circ; T_5 \cong 21,4^\circ; T_6 \cong 27,1^\circ$$

Esses valores indicam como fica, aproximadamente, a distribuição da temperatura no interior da placa, conhecendo-se a temperatura em pontos do bordo.

**Resposta:** Pelos valores obtidos podemos concluir que as temperaturas nos vértices inferiores 1, 2, 3, 4, 5, 6 são aproximadamente  $17,1^\circ$ ;  $21,4^\circ$ ;  $27,1^\circ$  ;  $17,1^\circ$  ;  $21,4^\circ$  e  $27,1^\circ$  respectivamente.

#### Retrospectiva:

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

Podemos verificar a validade da solução substituindo as incógnitas das equações pelos devidos valores encontrados e efetuar as operações pertinentes. Mas temos que lembrar que os valores obtidos são aproximados por causa das aproximações decimais feitas em cada divisão.

Esse problema pode também ser resolvido, aplicando o Método de Gauss-Jordan, ambos resultarão na mesma solução. Vale salientar que esse sistema possui grande número de equações e incógnitas, sendo assim sua resolução pelo Método da Eliminação de Gauss, economiza operações elementares aos escalonar a matriz aumentada. Porém ao resolver o sistema equivalente, a solução não é imediata.

O Problema 6 é uma adaptação de um exercício proposto por Dante (2011) em seu livro “*Matemática: Contexto e Aplicações*”.

### 3.6 PROBLEMA 6: BALANCEAMENTO DE EQUAÇÃO QUÍMICA

Ao escrever uma equação química, é importante verificar se o número de átomos de cada elemento é o mesmo em ambos os membros da equação. Caso não seja, é necessário realizar o balanceamento da equação. Ou seja, é necessário determinar os coeficientes estequiométricos (os números que antecedem cada fórmula química em uma reação indicando a quantidade de mols de cada substância química presente na reação). Esses coeficientes são sempre os menores números inteiros possíveis.

Faça o balanceamento da equação química  $C_6H_6 + O_2 = CO_2 + H_2O$  determinando seus coeficientes estequiométricos.

### 3.6.1 Resolução

#### Compreendendo o problema

- Quais as incógnitas, os dados do problema?
- As condicionantes são suficientes para determinar as incógnitas?

As incógnitas do problema são os coeficientes de cada átomo ou molécula para que a equação fique balanceada. A condicionante é que após o balanceamento, o número de átomos de cada elemento deve ser o mesmo em ambos os membros da equação. Essa informação é suficiente para determinarmos o valor das incógnitas do problema.

#### Estabelecendo um plano:

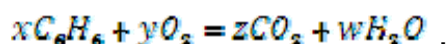
Precisamos determinar quais são as estratégias que serão usadas para resolver o problema.

Percebemos que este é um tanto diferente dos anteriores, visto que é uma aplicação de sistemas lineares na Química. Com as informações do enunciado podemos escrever quatro equações nas incógnitas  $x, y, z$  e  $t$  que são os coeficientes desconhecidos.

A estratégia a ser usada para resolver esse problema será traduzir essa equação química para a linguagem matemática, através de equações lineares. Sendo assim, o plano é elaborar um sistema e resolvê-lo para determinar as temperaturas. Para a resolução será utilizado o Método da Eliminação de Gauss.

#### Execução do plano:

Primeiramente consideremos as variáveis  $x, y, z$  e  $t$  como os coeficientes estequiométricos desconhecidos. A equação balanceada ficará da seguinte forma



Com base na equação química, podemos escrever as equações

$$\begin{cases} 6X = Z \\ 6X = 2W \\ 2Y = 2Z + W \end{cases}$$

Podemos organizar esse sistema da seguinte maneira

$$\begin{cases} 6X - Z = 0 \\ 6X - 2W = 0 \\ 2Y - 2Z - W = 0 \end{cases}$$

Percebemos que esse sistema é do tipo 3 x 4. Não é possível sua resolução pela Regra de Cramer pelo fato da matriz dos coeficientes não ser quadrada. Sendo assim será utilizado o Método da Eliminação de Gauss. A matriz aumentada desse sistema será a matriz A, onde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos realizar algumas operações elementares sobre as linhas dessa matriz para deixá-la na forma escalonada.

Substituindo a 2ª linha pela diferença entre a 1ª e a 2ª temos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Permutando a 2ª com a 3ª linha obtemos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema na forma escalonada será

$$\begin{cases} 6X + 0Y - Z + 0W = 0 \\ 0X + 2Y - 2Z - W = 0 \\ 0X + 0Y - Z + 2W = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima obtemos na 3ª equação que

$$-z + 2w = 0$$

$$-z = -2w$$

$$z = 2w$$

Pela 2ª equação, ao substituirmos  $z$  pela expressão encontrada temos:

$$2y - 2.2w - w = 0$$

$$2y = 5w$$

$$y = \frac{5w}{2}$$

Por fim, obtemos da 1ª equação

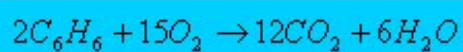
$$6x - z = 0$$

$$6x = z$$

$$x = \frac{z}{6}$$

$$x = \frac{w}{3}$$

Logo a solução do sistema será  $S = \left( \frac{w}{3}, \frac{5w}{2}, w \right)$  e percebemos que é um sistema possível e indeterminado, com as solução em função de  $w$ . Porém, há uma condição para a validade da solução que é a de que cada coeficiente deve ser sempre o menor inteiro possível. Para que essa condição seja satisfeita, é necessário fazermos  $w = 6$ , que é o mínimo múltiplo comum entre 2 e 3. Assim teremos  $S = (2, 15, 12, 6)$ . Portanto a equação balanceada fica da forma



**Retrospectiva:**

- É possível verificar o resultado?
- É possível aplicar o mesmo método em outro problema?
- Há outra forma de resolver o problema?

Podemos verificar a validade da solução substituindo as incógnitas  $x, y, z$  e  $w$  das equações pelos devidos valores encontrados  $2, 15, 12$  e  $6$  respectivamente e efetuar as operações. Percebemos que essa solução é uma das infinitas soluções desse sistema, porém é a única para o problema por ser a única que satisfaz a condição de que cada coeficiente deve ser o menor inteiro possível.

Esse problema pode também ser resolvido, aplicando o Método de Gauss-Jordan, ambos resultarão na mesma solução. Pelo fato de ser um sistema  $3 \times 4$ , usar a Regra de Cramer não é pertinente para resolvê-lo.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desinteresse dos alunos gera, em muitas situações, desconforto e preocupação para professores. Essa é uma realidade na vida de muitos professores que não conseguem dispor de situações pelas quais consigam motivar os alunos, que os desafiem e façam se interessar pela Matemática. Sabemos que elaborar problemas verdadeiros, interessantes e desafiadores, estabelecendo relações entre o conteúdo da sala de aula e o cotidiano não é fácil. É, porém, importante.

Por meio deste trabalho percebemos, mesmo sem a aplicação das atividades propostas, que a resolução de problemas pode viabilizar o desenvolvimento de habilidades que os ajudarão os alunos a solucionar problemas nas mais variadas áreas de atuação na sociedade. Além de tornar as aulas de matemática mais atrativas, pois os alunos fazem parte do processo, participam da construção do seu conhecimento. Sua criatividade é aguçada e eles começam ter mais facilidade em desenvolver estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações.

Ao iniciar o estudo de Sistemas de Equações Lineares por meio da Resolução de Problemas que dizem respeito a situações não matemáticas, eles podem apresentar suas ideias e sugestões. Nesse momento, conseguimos com que os alunos participem das aulas, interagindo com o professor e com os pares. Percebemos assim a importância da Resolução de Problemas como metodologia para o Ensino da Matemática.

As atividades contempladas no capítulo 3 foram elaboradas com o intuito de proporcionar ao leitor uma reflexão sobre a metodologia adotada no Ensino de Matemática das salas da Educação Básica, dando condições aos professores de repensarem suas práticas, colocando seus alunos em contato com situações cotidianas que possam instigá-los, dar ânimo para que estudem matemática com mais dedicação e seriedade. Neste sentido, o trabalho representa uma proposta da qual os professores podem se valer para tratar do estudo de sistemas de equações lineares em suas aulas de Matemática.

## REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de: Claus Ivo Doering, 8ed, Porto Alegre: Bookman, 2001.
- BATTAGLIOLI, C.S.M **Sistemas lineares na 2ª série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos** Dissertação (Mestrado profissional PUCSP) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.
- BEAUMONT, R. A., 1914. **Álgebra linear**. Tradução de: Adalberto P. Bergamasco, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1970;2011.
- BOLDRINI, L. J. et al. **Álgebra linear**, 2 ed, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- BRASIL. **Ministério da Educação**. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, Brasília: MEC/SEF, 2002.
- BRASIL. **Ministério da Educação**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **Secretaria da Educação Básica** – Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. – (Orientações Curriculares para o Ensino Médio), Brasília: Ministério da Educação, 2008.
- BUENO, P. H. **Álgebra linear: um segundo curso**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- CARVALHO, P. J. de, 1938. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: Impa, 1972.
- DANTE, R. L. **Didática da resolução de problemas de matemática**. Série Educação, 6 ed. São Paulo: Ática, 2003.
- DANTE, R. L. **Matemática: contextos e aplicações**. 4 ed, v. 2. São Paulo: Ática, 2011.
- HERNSTEIN, N. I. **Tópicos de álgebra**. Tradução de: Adalberto P. Bergamasco, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1970.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. “**Fundamentos de matemática elementar: sequencias, matrizes, determinantes e sistemas**”. São Paulo, v. 4. Atual, 1997.
- KRULIC, S.; REYS, E. R. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de: Hygino H. Domingues, Olga Corbo, São Paulo: Atual, 1997.
- LEON, J. S. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de: Sergio Gilberto Taboada 8 ed. Dartmouth: University os Massachusetts, 1943, Rio de Janeiro: LTC, 2011.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Álgebra linear**. Tradução de: Claus Ivo Doering. 4 ed, Porto Alegre: Bookman, 2011.

ONUCHIC, L. R. Ensino – aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Vigiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. Rio Claro: Editora Unesp, 1999.

ONUCHIC, L. R. & ALLEVATO, N. G. Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Vigiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

PÒLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução de: Heitor Lisboa de Araujo, Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I.; ECHEVERRIA, M. P. P; CASTILLO, J. D.; CRESPO, M. A. G.; ANGÓN, Y. P. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Tradução de: Beatriz Afonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2 ed. São Paulo, Makron-Books, 1987

#### **Artigos consultados na internet:**

BIEZUNER, R. **Sistemas lineares**. Disponível em: <[http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas\\_de\\_aula/sistemas\\_lineares.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/sistemas_lineares.pdf)>. Acesso em: 15 abr. 2013.

CARVALHO, P J. **Introdução a álgebra linear**. Disponível em: <[http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/mono/Mon\\_05.pdf](http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/mono/Mon_05.pdf)>. Acesso em: 06 abr. 2013.

KILPATRICK, J. **Pólya e as capacidades matemáticas**. Disponível em: <[http://www.apm.pt/files/\\_EM114\\_pp28-36\\_4e64896c05f9d.pdf](http://www.apm.pt/files/_EM114_pp28-36_4e64896c05f9d.pdf)>. Acesso em: 29 maio 2013.

SEBENTA, Material de Álgebras. **Álgebra linear**. Disponível em: <<http://ginasiomental.com/material/algebra/sebenta.pdf>>. Acesso em: 10 abr. 2013.

SILVA, N. N. Daniel. **Aplicação da álgebra linear na engenharia química**. 2009. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABmWIAL/aplicacao-algebra-linear-na-engenharia-quimica#>>. Acesso em: 24 ago2013

SOUZA, O. T. E. de. **Uma abordagem prática no estudo de sistemas de equações lineares para o Ensino Fundamental**. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2458-8.pdf>>. Acesso em: 06 abr. 2013.

ZORZAN, L., S. A. **Ensino – Aprendizagem**: algumas tendências na educação matemática, 2007. Disponível em:  
<<http://www.revistas.fw.uri.br/index.php/revistadech/article/view/303/563>>. Acesso em: 28 abr. 2013.