



**UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA**

RODOLFO EDUARDO VERTUAN

**PRÁTICAS DE MONITORAMENTO COGNITIVO EM
ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Londrina – PR
2013

RODOLFO EDUARDO VERTUAN

**PRÁTICAS DE MONITORAMENTO COGNITIVO EM
ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito para a obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina – PR
2013

V568p Vertuan, Rodolfo Eduardo.

Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem Matemática. / Rodolfo Eduardo Vertuan. Londrina /PR, 2013.

248 f.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Modelagem Matemática. 3. Mediação semiótica. 4. Metacognição social. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. UEL. III. Título.

CDD: 510.7

AOS MEUS PAIS,
A QUEM TANTO AMO E ADMIRO!

À MINHA ESPOSA DAIANE E AO MEU FILHO MIGUEL,
PELA COMPREENSÃO E PELO ABRAÇO RENOVADOR!

AGRADECIMENTOS

à Deus, pela linda família que colocaste em meu caminho;

à minha esposa Daiane e ao meu filho Miguel pelo incentivo, pelo carinho e por entender meus momentos de ausência, tão constantes principalmente nesse último ano;

ao meu irmão Ronaldo, à minha cunhada Cristiane e aos meus sobrinhos Erick e Ingrid, por terem me aguentado em sua casa todas as semanas em 2010 e quinzenalmente nos últimos dois anos, quando vinha participar de grupos de estudo em Londrina;

aos meus pais, Eduardo e Claudete, pelos exemplos de amor, companheirismo e perseverança que tanto me inspiram. Obrigado pelos telefonemas preocupados de todos os dias, principalmente quando “pegava” a estrada;

aos amigos, de perto e de longe, pelo carinho mesmo diante da minha ausência;

à minha orientadora, Prof^a Dr^a Lourdes Maria Werle de Almeida, pela orientação desse trabalho de tese e pela confiança em mim depositada;

ao Prof. Dr. Dale William Bean, ao Prof. Dr. Dionísio Burak, à Prof^a Dr^a Regina Luzia Corio de Buriasco e à Prof^a. Dr^a Angela Marta Pereira das Dores Savioli pelas relevantes contribuições na construção desse trabalho. São pessoas que admiro!

aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em especial às professoras Regina e Angela Marta, pelas discussões empreendidas nas aulas e por serem exemplos profissionais pra mim desde a graduação;

aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), pessoas muito especiais pra mim: Karina, Adriana, Michele, Camila, Bárbara, Emerson, Renato, Heloísa, Elaine, Ângela e Lourdes. Foi

muito bom conviver com vocês nesses anos de doutorado! Agradeço, em especial, à Karina: irmã de orientação que hoje considero irmã para a vida!

aos meus alunos da UTFPR, câmpus Toledo, pela compreensão e carinho, principalmente aos alunos participantes da pesquisa, pela dedicação, pelo tempo dispensado e pelos momentos agradáveis a mim proporcionados;

à direção da UTFPR, câmpus Toledo, pela oportunidade de realização dessa pesquisa;

à CAPES, pelo apoio financeiro concedido no meu primeiro ano de doutorado;

à todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

Há um tempo em que é preciso abandonar
as roupas usadas que já têm a forma do
nosso corpo, e esquecer os nossos
caminhos que nos levam sempre aos
mesmos lugares...
É o tempo da travessia... e, se não
ousarmos fazê-la, teremos ficado, para
sempre, à margem de nós mesmos.

Fernando Teixeira de Andrade

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática**. 2013. 247p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2013.

RESUMO

Nessa pesquisa, buscamos investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes. Em outros termos, intentamos investigar como os alunos monitoram as próprias ações cognitivas quando desenvolvem atividades de Modelagem e quais as influências deste monitoramento no desenvolvimento da própria atividade de Modelagem. A coleta de dados foi realizada em uma universidade federal a partir de um curso intitulado “Investigações de assuntos do cotidiano por meio da Matemática”. Participaram do curso alunos do Ensino Médio e alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Nessa pesquisa, tomamos o monitoramento cognitivo segundo a vertente processual da metacognição e nesse sentido é que os aspectos da metacognição segundo Flavell e Wellman (1977) e as dimensões do monitoramento de Tovar-Gálvez (2008) foram considerados. Dentre os resultados, inferimos que as práticas de monitoramento cognitivo são aprendidas pelos sujeitos em seu entorno social e cultural, que tais práticas fortalecem a consideração da *unicidade* da atividade de Modelagem Matemática e que o trabalho em grupo, característico das atividades de Modelagem Matemática, instaura práticas de monitoramento que embora sejam inicialmente individuais, tornam-se coletivas quando adquirem configurações do grupo e exercem influência no desenvolvimento da atividade e nas aprendizagens dos sujeitos. Trata-se do que denominamos “metacognição social”.

Palavras-chave: Educação matemática. Modelagem matemática. Monitoramento cognitivo. Mediação semiótica. Metacognição social.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Cognitive monitoring practices in mathematical modeling activities**. 2013. 247p. Doctorate thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematical Education) – State University of Londrina, UEL, Londrina, 2013.

ABSTRACT

In this research, we investigate what evidence or reveal the mathematical modeling activities in relation to cognitive monitoring of students. In other words, intentamos investigate how students monitor their own cognitive actions when they develop modeling activities and what this monitoring influences the development of itself activity Modeling . Data collection was carried out in a federal university from a course entitled "Investigation of affairs of everyday life by means of mathematics." Attended the course for high school students and students of Mathematics degree. In this research, we take the cognitive monitoring according to the procedural aspect of metacognition and in that sense is that the aspects of metacognition according to Flavell and Wellman (1977) and the dimensions of monitoring Tovar-Gálvez (2008) were considered. Among the results, we infer that cognitive monitoring practices are learned by subjects in their social and cultural, that such practices strengthen the consideration of the uniqueness of the activity of Mathematical Modeling and group work, characteristic of mathematical modeling activities, establishes monitoring practices which although initially individual, become collective when sourcing group settings and influence the development of the activity and the learning of the subjects. This is what we call "social metacognition".

Keywords: Mathematical education. Mathematical modeling. Cognitive monitoring. Semiotic mediation. Social metacognition.

LISTA DE TABELAS

Tabela 01: Número de veículos na cidade de Apucarana.....	21
Tabela 02: Cálculo de $k = V_{n+1}/V_n$ na situação dos veículos de Apucarana.....	22
Tabela 03: Validação do modelo na situação dos veículos de Apucarana.....	22
Tabela 04: Número de veículos em Apucarana – PR.....	103
Tabela 05: Relação entre idade (i) e quantidade de doadores (T).....	114
Tabela 06: Total de transplantes realizados no Brasil.....	122
Tabela 07: População em Toledo.....	147
Tabela 08: Consumo de água em Toledo.....	147
Tabela 09: Razão entre o consumo de água (m ³) e a população de Toledo.....	148
Tabela 10: População em Toledo segundo o IBGE.....	161
Tabela 11: Razão entre o consumo de água e o número de habitantes em Toledo.....	167
Tabela 12: Tamanho do transístor em diferentes anos.....	179
Tabela 13: Quantidade de usuários do facebook no Brasil.....	184

LISTA DE QUADROS

Quadro 01: Temas das atividades de Modelagem estudados.....	94
Quadro 02: Informações do monitoramento nos Episódios das atividades.....	098
Quadro 03: Informações das prestadoras de telefonia celular.....	182
Quadro 04: Formas de monitoramento cognitivo referentes à dimensão reflexiva.....	191
Quadro 05: Conhecimentos Metacognitivos manifestados nas atividades de Modelagem.....	210
Quadro 06: Acerca do que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes.....	215

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Gráficos das funções “gastos” para iluminar uma sala de aula advindos de lâmpadas fluorescentes e incandescentes.....	29
Figura 02: Gráfico da função referente à quantidade de mercúrio liberado no meio ambiente advindo de lâmpadas fluorescentes ($Q(t)$)	30
Figura 03: INTEIRAÇÃO – ações cognitivas nessa fase.....	34
Figura 04: INTEIRAÇÃO, MATEMATIZAÇÃO e RESOLUÇÃO – ações cognitivas nessas fases	36
Figura 05: Representação das ações cognitivas em uma atividade de Modelagem Matemática	38
Figura 06: Elementos da metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”	59
Figura 07: Esquema sobre a metacognição na perspectiva de Flavell.....	63
Figura 08: Dimensões da Metacognição em sua vertente processual.....	65
Figura 09: Configuração do Monitoramento Cognitivo para a análise dos dados da pesquisa	66
Figura 10: Idades dos sujeitos participantes da pesquisa.....	89
Figura 11: Representação dos pares ordenados (idade; número de doadores).....	114
Figura 12: Segunda representação dos pares ordenados (idade; número de doadores)	115
Figura 13: Sistema linear na situação doação de órgãos	115
Figura 14: Validação do modelo referente à atividade “Doação de Órgãos”	116
Figura 15: Validação do modelo referente à atividade “Doação de Órgãos”	117
Figura 16: Registros escritos produzidos no decorrer da resolução da atividade de Modelagem	118
Figura 17: Representação do desenho feito no ar do que os alunos denominaram “meia senóide”	129
Figura 18: Esboço dos gráficos das funções quadrática e seno	130
Figura 19: Resolução dos alunos na situação Consumo de água em Toledo.....	150
Figura 20: Resolução dos alunos na situação Consumo de água no decorrer de 2011.....	152
Figura 21: População em Toledo segundo o IBGE.....	161
Figura 22: Tamanho dos transístores em relação aos anos	180
Figura 23: Gasto mensal usando o plano de telefonia da prestadora A.....	182
Figura 24: Gasto para diferentes planos de telefonia celular pré-pago.....	183
Figura 25: Resolução dos alunos na situação “O caso das redes sociais – <i>facebook</i>	184
Figura 26: Gráfico construído na situação referente ao <i>facebook</i>	185

Figura 27: Número de condutores e de veículos no estado do Paraná.....	186
Figura 28: Gráfico do número de condutores e de veículos no estado do Paraná	187
Figura 29: Monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem considerando-a em sua totalidade	218
Figura 30: Monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem considerando-a em suas diferentes fases.....	219

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO I – MODELAGEM MATEMÁTICA	18
1.1 Introdução	19
1.2 Modelagem Matemática e Modelo Matemático.....	24
1.3 As fases da Modelagem Matemática – processos e ações dos alunos.....	31
1.4 Implantação de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula e a familiarização dos alunos com essas atividades	39
1.5 Perspectivas de Modelagem Matemática identificadas por Gabriele Kaiser e Brarath Sriraman.....	41
1.6 Modelagem Matemática – uma atividade essencialmente colaborativa.....	45
1.7 Acerca do papel do professor em uma aula com atividades de Modelagem Matemática	47
CAPÍTULO II – AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO	50
2.1 Introdução	51
2.2 Cognição e Metacognição.....	52
2.3 Metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”	57
2.4 Metacognição em sua vertente “monitoramento	60
2.5 Confluências entre as atividades de Modelagem Matemática e as práticas de monitoramento – algumas considerações.....	67
CAPÍTULO III – MEDIAÇÃO SEMIÓTICA	72
3.1 Introdução	73
3.2 Mediação Semiótica	74
3.3 Zona de Desenvolvimento Proximal.....	79
3.4 A teoria da Mediação Semiótica e as práticas de monitoramento – relações percebidas.....	83
CAPÍTULO IV – ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	86
4.1 Problemática e Objetivos da Pesquisa	87
4.2 A pesquisa – os sujeitos da pesquisa e a coleta de dados	88
4.3 A pesquisa – o desenvolvimento das atividades.....	92
4.4 A pesquisa – a realização das análises	96
CAPÍTULO V - ANÁLISES ESPECÍFICAS: O MONITORAMENTO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM	100
5.1 Análise Específica e Episódios selecionados	101
5.1.1 Atividade 1: Trânsito na cidade de Apucarana-PR	102
5.1.1.1 Descrição da Atividade Trânsito na cidade de Apucarana-PR	102
5.1.1.2 Trânsito na cidade de Apucarana-PR – análise específica	104
5.1.2 Atividade 2: Doação de Órgãos	111
5.1.2.1 Descrição da Atividade Doação de Órgãos	111
5.1.2.2 Doação de Órgãos – análise específica	118
5.1.3 Atividade 3: Consumo de água na cidade de Toledo-PR.....	145
5.1.3.1 Descrição da Atividade Consumo de água na cidade de Toledo-PR.....	145
5.1.3.2 Consumo de água em Toledo-PR – análise específica	155
5.2 Descrições de outras atividades realizadas no curso.....	178

CAPÍTULO VI – ANÁLISE GLOBAL	189
6.1 Análise Global – o Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem	190
6.2 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “reflexão” da Metacognição	190
6.3 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “administração” da Metacognição.....	196
6.4 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “avaliação” da Metacognição.....	205
6.5 Acerca da manifestação de conhecimentos metacognitivos em atividades de Modelagem Matemática	209
 CONSIDERAÇÕES FINAIS - AFINAL, O QUE EVIDENCIAM OU REVELAM AS ATIVIDADES DE MODELAGEM EM RELAÇÃO AO MONITORAMENTO COGNITIVO DOS ESTUDANTES.....	212
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	223
 ANEXOS.....	229

INTRODUÇÃO

Quando um professor opta por utilizar atividades de Modelagem Matemática em suas aulas de modo a discutir conceitos, algoritmos ou procedimentos de resolução, ele o faz influenciado, dentre outros fatores, pelos modos como entende que deve ser o ambiente da sala de aula, como entende o que significa aprender Matemática e como entende o fazer Modelagem Matemática. Todavia, podemos considerar que todo professor, mesmo os que usam em suas aulas procedimentos considerados tradicionais, ao empreender um encaminhamento em vez de outro, intenta promover a aprendizagem de seus alunos. Mesmo diferentes professores de Matemática que desenvolvem atividades de Modelagem Matemática em suas aulas, por exemplo, podem estabelecer dinâmicas de trabalho distintas de acordo com as concepções que têm a respeito de como deve ser o ambiente da sala de aula, do que significa aprender Matemática e do que significa Modelagem.

Embora não faça parte do escopo desse trabalho discutir as diferentes concepções de ensino e de aprendizagem da Matemática e das possíveis configurações de uma aula de Matemática decorrentes dessas concepções, consideramos pertinente apresentar nosso entendimento em relação ao termo aprendizagem, a partir do qual se dá a construção desse trabalho de tese.

Nesse trabalho, entendemos a aprendizagem como um processo no decorrer do qual o sujeito internaliza conceitos. Nesse sentido, a aprendizagem promove o desenvolvimento humano e se relaciona também às experiências do sujeito, vivenciadas na interação com outras pessoas, com seu entorno social e cultural.

Entender a aprendizagem como processo remete à consideração de que, em ambiente escolar, a aprendizagem que cabe ao aluno, está associada à ação e à reflexão desse aluno, não sendo decorrente, por exemplo, da simples apresentação do professor, como acreditam aqueles que prezam mais pela quantidade de informações exibidas nas aulas do que ao espaço para os alunos pensarem nelas.

Esses aspectos da aprendizagem remete-nos à teoria histórico-cultural de Lev Semenovitch Vygotsky, psicólogo bielo-russo que viveu de 1896 até 1934 e para o qual a aprendizagem se dá na interação social. Para ele, é por meio dessa interação que se dá a internalização e o desenvolvimento de funções psicológicas superiores¹, tais como a abstração, a memorização, a dedução e a fala, por exemplo.

Segundo Vygotsky (2007, p.100), “[...] o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo por meio do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam”. Para Rego (2011, p.71), “desse ponto de vista, o aprendizado é o aspecto necessário e universal, uma espécie de garantia do desenvolvimento das características psicológicas [...] culturalmente organizadas”.

Entendendo que o desenvolvimento cognitivo se dá a partir da aprendizagem, e que a aprendizagem, por sua vez, se dá na interação e no intercâmbio do sujeito com seus pares e em um entorno cultural específico, consideramos que em sala de aula é igualmente importante “[...] que todos os envolvidos no processo ensino-aprendizagem *devam falar* e tenham *oportunidade de falar*” (MOREIRA, 1999, p.119), o que nos leva a inferir que a Modelagem Matemática, na condição de alternativa pedagógica, é uma possibilidade para a ocorrência da aprendizagem em Matemática, considerando que são atividades abertas, com múltiplas possibilidades de problematização e encaminhamento, com potencialidades para desencadear a participação ativa e interativa dos alunos, os quais partilham significados, intenções e discussões. Em vista disso, na Modelagem Matemática parece residir uma forma de interação social que possibilita o êxito nas atividades.

A partir desse entendimento em relação à aprendizagem e ao nosso interesse pela aprendizagem em um ambiente de interação social, é que temos como foco maior de nossa investigação as atividades de Modelagem Matemática, já utilizadas pelo pesquisador² em sua prática desde 2004, quando iniciou as

¹ Os termos interação social, internalização e funções psicológicas superiores, são abordadas no capítulo 3 desse trabalho.

² Nesse trabalho utilizamos ora o termo pesquisador, ora o termo professor e ora o termo professor-pesquisador, dadas as especificidades da atuação do professor, também pesquisador, no processo de coleta de dados.

pesquisas nessa linha no âmbito do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Ao implementar atividades de Modelagem Matemática nas aulas temos nos interessado, de modo particular, pela tomada de consciência dos alunos quanto às suas práticas de resolução e à utilização dessa consciência de modo a potencializar a aprendizagem e a realização de novas atividades de Modelagem³. Em outros termos, nos interessa investigar as práticas de monitoramento que os alunos põem em ação quando desenvolvem esse tipo de atividade. Em decorrência disso, buscamos investigar a seguinte questão: *O que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes?*

Com esse intuito objetivamos identificar formas de monitoramento cognitivo expressas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem Matemática; caracterizar elementos das atividades de Modelagem Matemática que promovem o monitoramento cognitivo; e investigar que ações o monitoramento cognitivo desencadeia durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Reconhecemos a possibilidade de manifestação de práticas de monitoramento pelo professor e as possíveis influências dessas práticas no desenvolvimento das atividades, tanto é que as consideramos no momento das análises. Todavia, o foco da investigação está no monitoramento cognitivo dos estudantes.

Diante desses objetivos e da questão dessa pesquisa estruturamos o texto da tese em seis capítulos, além da introdução, das considerações finais e das referências do trabalho. No primeiro deles, apresentamos nosso entendimento em relação à Modelagem Matemática, atentando para as perspectivas a partir das quais a Modelagem tem sido utilizada em sala de aula e para as ações empreendidas pelos alunos e pelo professor ao desenvolverem atividades de Modelagem.

No segundo capítulo discutimos o monitoramento cognitivo, tomando-o como uma das vertentes a partir das quais a metacognição tem sido discutida na literatura,

³ Nesse trabalho, Modelagem e Modelagem Matemática são entendidas como sinônimos.

a saber, a vertente processual⁴. Nesse contexto, consideramos o monitoramento cognitivo como uma ação cognitiva consciente do indivíduo usada para controlar e regular suas ações, no caso, em atividades de Modelagem Matemática. Nesse capítulo, apresentamos os aspectos e as dimensões do monitoramento segundo Flavell e Wellman (1977) e Tovar-Gálvez (2008), ou melhor, abordamos o conhecimento metacognitivo, as experiências metacognitivas, os objetivos cognitivos e as ações cognitivas (aspectos do monitoramento cognitivo segundo Flavell e Wellman (1977)) e as dimensões de reflexão, administração e avaliação (dimensões do monitoramento segundo Tovar-Gálvez (2008)).

Embora os objetivos e a problemática dessa pesquisa não se refiram à teoria histórico-cultural de Vygotsky de modo direto, optamos por abordá-la no terceiro capítulo por considerarmos que as práticas de monitoramento cognitivo são desenvolvidas pelo indivíduo a partir das relações que ele estabelece no seu entorno social e cultural, na e para a interação social. Diante disso, apresentamos ideias a respeito da aprendizagem, do desenvolvimento, da zona de desenvolvimento proximal, do nível de desenvolvimento real, da internalização e da mediação semiótica – conceitos da teoria de Vygotsky.

No capítulo IV, por sua vez, retomamos nosso problema da pesquisa e tecemos considerações em relação aos procedimentos metodológicos. Nesse contexto, caracterizamos os sujeitos da pesquisa, os procedimentos de coleta de dados e o ambiente em que os dados foram gerados, assim como apresentamos o modo como foram realizadas as análises.

As análises são realizadas em dois momentos distintos. Primeiro, considerando-se as especificidades das atividades de Modelagem e as ações dos alunos diante dessas especificidades e, segundo, considerando-se o conjunto dessas atividades e as generalizações passíveis de inferência. Trata-se, respectivamente, do capítulo 5, denominado Análises Específicas, e do capítulo 6, intitulado Análise Global. Esses capítulos são seguidos das considerações finais e da apresentação das referências bibliográficas de que fizemos uso.

⁴ A outra vertente da metacognição refere-se ao conhecimento dos sujeitos a respeito de seus próprios conhecimentos. Exploramos as duas vertentes no segundo capítulo.

CAPÍTULO I

MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresentamos nosso entendimento em relação a Modelagem Matemática no que tange à realização de atividades em sala de aula, à dinâmica possibilitada por esse tipo de atividade, à atitude investigativa dos envolvidos (professor e alunos) quando fazem Modelagem e às perspectivas a partir das quais a Modelagem tem sido discutida na literatura.

ÍNDICE

- 1.1 Introdução
- 1.2 Modelagem Matemática e Modelo Matemático
- 1.3 As fases da Modelagem Matemática – processos e ações dos alunos
- 1.4 Implementação de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula e a familiarização dos alunos com essas atividades
- 1.5 Perspectivas de Modelagem Matemática identificadas por Gabriele Kaiser e Brarath Sriraman
- 1.6 Modelagem Matemática – uma atividade essencialmente colaborativa
- 1.7 Acerca do papel do professor em uma aula com atividades de Modelagem Matemática

1.1 INTRODUÇÃO

Abordar a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática implica em considerar as especificidades de uma atividade de Modelagem em relação a outros tipos de atividades⁵ presentes nas aulas de Matemática. Para além de uma crítica às atividades comumente utilizadas na escola, denominadas muitas vezes de atividades tradicionais, o que pretendemos, nesse momento, é caracterizar uma atividade de Modelagem em termos de um contexto, das possibilidades de encaminhamento da resolução, das ações dos alunos quando lidam com esse tipo de atividade, bem como das implicações dessas ações na aprendizagem e no desenvolvimento cognitivo⁶ de um aluno.

Consideremos inicialmente as seguintes situações:

(i) Seja a função $f : IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = 2^x$. Então, qual o valor da expressão $f(a+1) - f(a)$?

(ii) A produção de uma indústria vem diminuindo ano a ano. Num certo ano, ela produziu mil unidades de seu principal produto. A partir daí, a produção anual passou a seguir a lei $y = 1000 \cdot (0,9)^x$. Qual foi o número de unidades produzidas no segundo ano desse período recessivo?⁷

(iii) O trânsito na cidade de Apucarana⁸.

Para resolver a primeira situação (i), além de interpretar a linguagem matemática utilizada, é preciso a um aluno reconhecer que em $f(a+1) - f(a)$ os valores que x assume são, respectivamente $(a+1)$ e (a) . A partir disso, esse aluno precisa substituir $f(a+1)$ e $f(a)$ por 2^{a+1} e 2^a e operar segundo a linguagem

⁵ Consideramos “atividade” no sentido comumente utilizado em sala de aula, como aquela situação proposta pelo professor e realizada pelos alunos, com vistas a cumprir algum objetivo.

⁶ Os termos “aprendizagem” e “desenvolvimento cognitivo”, ambos adotados numa perspectiva vygotskyana, serão discutidos no terceiro capítulo da tese.

⁷ Questão de vestibular da FIC/FACEM – adaptada.

⁸ Tema oriundo do TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) de uma aluna de um curso de Licenciatura em Matemática que tinha o autor desse texto como orientador.

matemática, obtendo, certamente, o resultado 2^a ou outro equivalente. A atividade, embora pareça tratar do assunto função exponencial, pode ser realizada sem que o aluno tenha essa percepção, com simples manipulações algébricas, as quais podem ter sido memorizadas a partir de exemplos parecidos, anteriormente apresentados pelo professor. Além disso, a questão, do modo como está colocada, não admite outras soluções senão 2^a .

A segunda situação (ii), diferente da anterior, utiliza de um contexto extra matemático, porém fictício no sentido de que, possivelmente, nenhuma indústria pode ter sido consultada para a elaboração do enunciado. Para resolver a questão, no entanto, um aluno precisa interpretar a relação existente entre x e y , bem como entender que x representa o tempo dado em anos a partir de um momento inicial e y representa a produção anual para um tempo percorrido x , produção essa anunciada recessiva já no final do enunciado. A partir disso, deve substituir x por 2, valor referente ao tempo passado após o início do período recessivo, e resolver a expressão $y = 1000.(0,9)^2$ obtendo, certamente, 810 reais. Assim como na atividade (i), embora $y = 1000.(0,9)^x$ represente uma função do tipo exponencial, não é preciso usar de outra representação, nem mesmo relembrar o conceito dessa função, ou ainda, fazer menção à situação extra matemática para responder à questão. Basta a resolução de operações matemáticas simples.

Na situação (iii), por sua vez, a primeira coisa que uma pessoa tem a fazer é decidir em quais atividades se aventurar. Diferente das demais situações, nessa, o que se tem é um **tema** amplo – que no âmbito da sala de aula pode ser escolhido pelos alunos e/ou pelo professor – a partir do qual discussões levarão os alunos a elencarem um problema e a definirem uma questão para investigar. Quando a investigação for feita por meio da Matemática, embora não estritamente por ela, ela pode desencadear uma atividade de Modelagem Matemática.

Diferente dos enunciados (i) e (ii), mais comuns nas aulas de Matemática, esse último (o iii) não tem um problema nem mesmo uma questão previamente definidos; permite diferentes possibilidades de encaminhamento e, conseqüentemente, diferentes possibilidades de aprendizagem e de estudo dos conceitos matemáticos; não possui resposta única; e inclui para sua resolução uma

série de atividades, dentre elas, inclusive, atividades como àquelas requeridas pelas situações (i) e (ii).

Para essa última situação (iii) os alunos poderiam decidir investigar, dentre tantas possibilidades, o problema referente ao aumento no número de veículos na cidade de Apucarana, devido aos transtornos que esse aumento tem provocado no trânsito da cidade. Logo, dado que o trânsito na cidade de Apucarana conta com um número cada vez maior de veículos e, considerando que isso aumenta o tempo de viagem entre um ponto da cidade e outro, dificulta o estacionamento no centro da cidade – donde não há previsão de aumento no número de vagas –, e aumenta o número de acidentes envolvendo veículos, faz-se importante inferir uma previsão para o número de veículos na cidade nos próximos anos, o que pode influenciar, inclusive, políticas públicas relacionadas. Isso remete à investigação, por exemplo, da questão “Qual o número de veículos que Apucarana terá em 2013?”.

Responder essa questão implica, necessariamente, pesquisar informações qualitativas e quantitativas que permitam sua investigação. Na atividade (iii), os alunos poderiam conseguir junto ao DETRAN-PR⁹, informações a respeito do número de veículos registrados na cidade nos últimos anos (Tabela 1) para, a partir da tendência desses dados, realizar uma previsão do número de veículos para o ano de 2013.

Tabela 01 – Número de Veículos na cidade de Apucarana

mês/ano	Número de Veículos
jan/07	42.584
jan/08	46.507
jan/09	50.510
jan/10	54.140
jan/11	57.837
jan/12	61.444

Fonte: DETRAN-PR, capturado em 05 de abril de 2012 em <http://www.detrان.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=194>

Frente aos dados é possível, por exemplo, que um grupo de alunos busque encontrar regularidades lidando com os números da tabela. A partir da observação de algumas dessas regularidades, podem optar por considerar uma

⁹ Departamento de Trânsito do Paraná.

aproximação a uma constante k , tal que k seria a razão entre a quantidade de veículos num dado ano e a quantidade de veículos num ano imediatamente anterior.

Em outros termos, $k = \frac{V_{n+1}}{V_n}$, ou ainda, $V_{n+1} = k.V_n$, o que se justifica nos cálculos

presentes na quinta coluna da Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Cálculo de $k = V_{n+1}/V_n$ na situação dos veículos de Apucarana

mês/ano	t (ano)	n (tempo em anos)	V (Número de Veículos)	k
jan/07	2007	1	42.584	
jan/08	2008	2	46.507	1,092
jan/09	2009	3	50.510	1,086
jan/10	2010	4	54.140	1,072
jan/11	2012	5	57.837	1,068
jan/12	2013	6	61.444	1,062

Usando de recorrência matemática, os alunos poderiam obter um modelo matemático que descrevesse o número de veículos na cidade de Apucarana no mês de janeiro de um determinado ano e, conseqüentemente, o número de veículos nessa cidade em janeiro de 2013. Segue uma possível representação matemática da situação, a validação dessa representação via comparação dos valores observados no DETRAN e os obtidos por meio da função exponencial construída (Tabela 3), bem como a previsão para 2013 (resposta à questão inicial).

$$V_{n+1} = k.V_n$$

$$V_2 = k.V_1$$

$$V_3 = k.V_2 = k.k.V_1 = k^2.V_1$$

⋮

$$V_{n+1} = k^n.V_1$$

considerando a média aritmética dos valores de k , da tabela 2,

$$V_{n+1} = (1,076)^n . 42584$$

ou ainda

$$V_t = 42584 . (1,076)^{t-2007}$$

Segundo a representação matemática obtida, em janeiro de 2013 Apucarana terá uma frota de aproximadamente 66.088 veículos.

Tabela 3 – Validação do modelo na situação dos veículos de Apucarana

n	t	V observado	V modelado
1	2007	42.584	42.584
2	2008	46.507	45.820
3	2009	50.510	49.303
4	2010	54.140	53.050
5	2011	57.837	57.082
6	2012	61.444	61.420

Diante do exposto é possível notar que, embora a resolução que acabamos de apresentar seja uma dentre outras pertinentes, as ações realizadas pelos alunos no desenvolvimento da atividade englobam também, mas não principalmente, àquelas requisitadas nas questões (i) e (ii), o que por si só constitui-se um argumento favorável para o uso, em sala de aula, de situações como a (iii), já que essa última, além de requerer dos alunos o cálculo de valores da função para diferentes anos, bem como a utilização de algoritmos, requereu também a busca de regularidades, o uso de recorrência matemática, dentre outros.

Considerar a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática implica em utilizar nas aulas, portanto, situações que desencadeiam investigações matemáticas. Trata-se de considerar o que D'Amore (2007, p.287) denomina de situações problemáticas. Para o autor, as atividades propostas aos alunos deveriam tratar

[...] de uma situação problemática e não de um problema: o aluno encontra-se diante de um problema no interior de uma atividade mais ampla [...]. Trata-se, portanto, de um verdadeiro obstáculo ao prosseguimento de uma atividade que, por outro lado, se quer continuar e, portanto, a motivação deve ser forte a ponto de o estudante ter a necessidade e o desejo de recorrer à criatividade, fazendo hipóteses, inventando soluções.

Assim como na situação (iii), uma atividade de Modelagem Matemática tem como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto de chegada uma solução para a questão oriunda da situação inicial. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), uma

[...] atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. [...] O termo "problema" é entendido aqui como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a priori para sua solução. Assim, para a resolução de situações problema, de modo geral, não há procedimentos previamente conhecidos ou soluções já indicadas.

Nesse sentido, a caracterização de uma atividade de Modelagem não reside apenas na situação inicial. Para além disso, reside na iniciativa e nas ações dos alunos, na dinâmica estabelecida pelo professor e alunos ao lidar com a

situação, e nas condições dos alunos para atuar na situação – esse último referindo-se ao fato de a situação representar ou não um problema para o aluno, condição essencial em Modelagem.

Maaß (apud FERRI, 2010, p.21) caracteriza as atividades de Modelagem como sendo “[...] abertas, complexas, realísticas, autênticas, problemáticas e resolúveis” por meio de um processo. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15) a atividade de Modelagem

[...] tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema.

À situação final desejada a que se referem os autores (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012) relaciona-se um modelo matemático representativo da situação. Em sala de aula, construir modelos matemáticos e utilizá-los para o entendimento de situações extra matemáticas, na intervenção dos alunos nessas situações e para responder problemas matemáticos, implica em considerar a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO

Ao se considerar atividades de Modelagem Matemática no ensino de Matemática, o que se espera é que os alunos passem a ter uma atitude de investigação frente às situações problemáticas. Isso implica em colocar os alunos na condição de quem faz matemática, de quem precisa elaborar um problema, elencar hipóteses, pensar num plano de ação que verifique (ou não) a validade dessas hipóteses, monitorar os encaminhamentos de resolução, enfim, de quem precisa pensar matematicamente mesmo situações inicialmente não matemáticas. Isso, por si só, já contraria a tradição escolar, aquela que tem acostumado os alunos para reproduzir algoritmos com base em exemplos dados (mesmo que sem a compreensão de seus significados), que tem educado alunos para a resolução de

“problemas palavra”, aqueles que, quando despidos do contexto¹⁰ tornam-se exercícios tais como os de tipo “calcule” e “arme e efetue”.

Mudar do paradigma do exercício¹¹ (SKOVSMOSE, 2000b) para um paradigma do “fazer matemática” não é tarefa imediata, principalmente quando os envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem (professor e alunos) têm todo um histórico de formação realizada no paradigma do exercício. Qualquer tentativa de mudança para alunos e professores com tal histórico implica em carregar para o novo tipo de atividade, características advindas de sua formação. É impossível despir-se do que se entende por educação, por sala de aula, por uma aula de Matemática – ideias construídas no paradigma do exercício – de uma hora para a outra. Isso fica evidente, por exemplo, quando um professor trabalha com uma segunda atividade de Modelagem e seus alunos voltam às folhas do caderno tentando identificar, na atividade anterior, algum indício do que o professor pode “querer” com a nova atividade. Tentativas de resolução usando as mesmas estratégias de uma situação anterior denotam uma ação inerente ao paradigma do exercício, já que nesse paradigma, é comum um professor passar exemplos que os alunos utilizarão na resolução de novos problemas, os quais tratam, geralmente, dos mesmos conteúdos e estratégias anteriormente e imediatamente apresentados. Para Bassanezi (2002, p.43)

[...] a maior dificuldade que notamos para a adoção do processo de modelagem, pela maioria dos professores de matemática [e de seus alunos, acrescentamos], é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional em que o objeto de estudo apresenta-se quase sempre delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada.

Isso remete a importantes considerações: um professor que se propõe a realizar atividades de Modelagem precisa monitorar suas intervenções para não impor resoluções aos alunos – a atividade, embora parecesse de Modelagem seria, nesse caso, uma atividade tradicional “maquiada” –; as atividades de Modelagem precisam começar desde os primeiros anos escolares (FERRI, 2010) de modo que

¹⁰ “Etimologicamente, a palavra ‘contexto’ significa enraizar a referência no texto do qual foi extraído, pois longe dele, a referência perde uma parte substancial do seu sentido” (KLÜBER, 2010, 104).

¹¹ O paradigma do exercício é aquele no qual, em um primeiro momento, o professor apresenta os conceitos e as técnicas para os alunos, os quais, em seguida, resolvem a exercícios parecidos utilizando, para isso, muitas vezes, os argumentos e ideias utilizados pelo professor.

os alunos desenvolvam sensibilidade para resolver problemas abertos e obter resultados diferentes; as atividades de Modelagem não podem se constituir acontecimentos especiais nas aulas de Matemática, isolados, já que é a prática dessas atividades nas aulas que a tornam familiares, tanto para professor quanto para alunos (FERRI, 2010).

Mudar de paradigma, portanto, implica em sair de uma “zona de conforto”, no caso, o de aulas realizadas segundo o paradigma do exercício, nas quais “[...] quase tudo é conhecido ou previsível e há pouco espaço para a ‘imprevisibilidade’ associada às atividades de Modelagem Matemática” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.24) e se aventurar em aulas que utilizem atividades de Modelagem Matemática, o que significa entrar numa aparente “zona de risco”¹², de modo a elaborar “[...] uma nova e própria zona de conforto” (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.24).

Nesse contexto, o novo paradigma poderia ser o da Modelagem Matemática, que por sua vez,

constitui uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação problemática não essencialmente Matemática. Assim, trata-se de uma “maneira” de trabalhar com atividades na aula de Matemática (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.17).

Segundo Stillman et al (2007, p.689, tradução nossa) a Modelagem Matemática pode ser entendida¹³ “[...] como um meio de ilustrar a relevância do conteúdo matemático específico e como um fim educacional. A segunda engloba a primeira. [...] a Modelagem envolve em seu processo componentes essenciais como solução, formulação, interpretação e avaliação”.

Os que se dedicam à realização da atividade de Modelagem – no âmbito da sala de aula, alunos e professores – necessitam conhecer outras realidades, bem como utilizar seus conhecimentos prévios em relação à situação inicial e em relação

¹² Segundo Penteadó e Skovsmose (2008, p.49) “[...] segurança e previsibilidade podem estar associadas à zona de conforto, enquanto novas oportunidades de aprendizagem podem estar associadas à zona de risco. Quando uma aula se torna experimental, coisas novas podem acontecer. O professor pode perder parte do controle sobre a situação, porém os alunos também podem se tornar capazes de ser experimentais e de fazer descobertas”.

¹³ Embora não exista só um entendimento de Modelagem Matemática, Araújo (2007, p.18) afirma que as diferentes perspectivas têm por objetivo comum “[...] a resolução de algum problema da realidade, por meio do uso de teorias e conceitos matemáticos”.

aos conceitos matemáticos. Isso denota, também, que a atividade de Modelagem é particular, construída a partir dos conhecimentos dos sujeitos que lidam com a situação inicial e a partir do equilíbrio permanente entre a orientação do professor e a independência dos alunos.

Aos sujeitos cabem ações que vão desde a elaboração de um problema suscitado pela situação problemática, até uma resolução para tal problema. Nesse caminhar entre a situação problemática inicial e a solução para o problema, os modeladores precisam elaborar hipóteses, buscar dados qualitativos e quantitativos acerca do problema, matematizar a situação extra matemática, validar os resultados encontrados, tais como a resposta obtida para a questão inicial, e construir um modelo matemático da situação.

Por modelo matemático, entendemos, como Bean (2012, p.5), uma “[...] construção simbólica expressa principalmente na linguagem matemática, que se refere a algumas relações consideradas pertinentes a uma situação, de modo que auxilie na interpretação, compreensão e/ou tomada de decisão concernentes a tal situação e em outras situações, nas quais se considere adequado aplicar o modelo”. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.13), um modelo matemático é

[...] um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre esse outro sistema.

Nesse sentido, um modelo matemático pode ser a descrição ou a explicação de parte da realidade, ou ainda, um retrato da realidade sob a ótica do modelador, já que longe de representar “a verdade” em relação a essa parte da realidade, representa tão somente uma adequação empírica da situação ou fenômeno investigado, adequação essa que reflete os conhecimentos e a competência daquele que lida com a situação inicial. Segundo Niss, Blum e Galbraith (2007, p.12, tradução nossa)

competência em Modelagem Matemática significa a capacidade de identificar questões relevantes, variáveis, relações ou suposições em uma dada situação do mundo real, para os traduzir em matemática e interpretar e validar a solução do problema matemático em relação à dada situação, bem como a capacidade de analisar ou comparar modelos dada a investigação dos pressupostos feitos, verificando as propriedades e escopo de um determinado modelo.

Para os autores, ser competente em Modelagem implica em construir modelos através das várias fases do processo de Modelagem Matemática, perpassando tais fases de modo adequado, comparando e analisando os dados modelados (BLUM e FERRI, 2009).

De modo a ilustrar o caráter “particular” da atividade de Modelagem, no sentido de que o modelo matemático é, de certo modo, um retrato da realidade sob a ótica daquele que a desenvolve, relatamos brevemente duas atividades de Modelagem desenvolvidas por dois grupos distintos – um participante de um curso de Modelagem para alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática e o outro participante de um curso de formação continuada de professores – quando lidavam com um mesmo tema: lâmpadas incandescentes e/ou fluorescentes.

Depois de discussões, um dos grupos, o formado por alunos da licenciatura, decidiu estimar a quantidade de mercúrio liberada para o meio ambiente em função da quebra de lâmpadas fluorescentes¹⁴, enquanto o outro decidiu investigar a partir de quanto tempo as lâmpadas fluorescentes, cuja instalação é mais cara, passariam a representar menor custo em relação às incandescentes na iluminação de uma sala de aula, dado o uso e a vida útil de cada tipo de lâmpada. Embora o tema inicial fosse o mesmo, os conhecimentos e interesses dos componentes de cada grupo, naturalmente distintos, conduziram a investigações diferentes, a começar pelo problema elencado e pela questão elaborada.

No que tange à resolução, enquanto o primeiro grupo trabalhou com a ideia de meia vida de um elemento químico – o mercúrio – e utilizou recorrência matemática, função exponencial e soma dos termos de uma progressão geométrica finita, o segundo trabalhou com conceitos da física – lux, lúmen, potência, entre outros –, com função maior inteiro e com função polinomial do primeiro grau. Foram representações dos modelos encontrados:

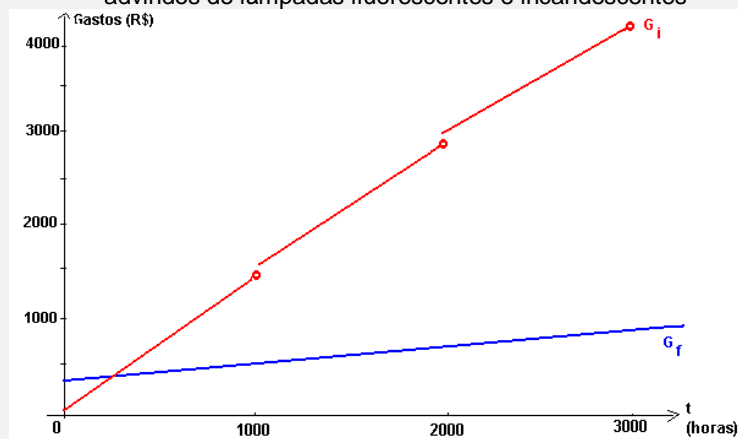
¹⁴ Situação referente ao descarte de lâmpadas fluorescentes em desuso, à céu aberto e sem maiores cuidados, em uma universidade pública paranaense.

- na situação das lâmpadas fluorescentes e incandescentes:

$$G_f = 0,225536.t + 208 + 67,2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{t}{7500} \right\rfloor + 1 \right), t \geq 0 \text{ e } G_i = 1,295217.t + 39,2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{t}{1000} \right\rfloor + 1 \right), t \geq 0$$

para t sendo o tempo, em horas; G_f sendo o gasto com iluminação advindo das lâmpadas fluorescentes e; G_i sendo o gasto com iluminação advindo das lâmpadas incandescentes.

Figura 1: Gráficos das funções “gastos” para iluminar uma sala de aula advindos de lâmpadas fluorescentes e incandescentes



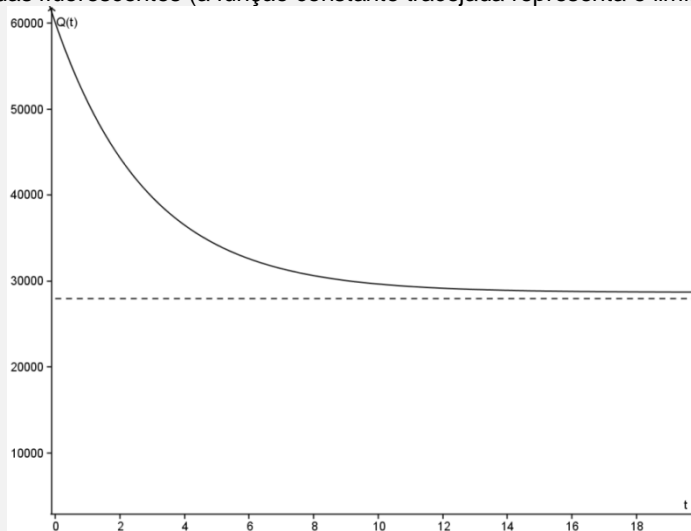
Fonte: Elaborado pelo autor (2013)

- na situação do mercúrio das lâmpadas fluorescentes:

$$Q(t) = (43200 - 8400\sqrt{2}) \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{2}} + 8400\sqrt{2} + 16800$$

para t sendo o tempo, em meses e $Q(t)$ a quantidade de mercúrio (em mg) liberada no ambiente em um tempo t ;

Figura 2: Gráfico da função referente à quantidade de mercúrio liberado no meio ambiente advindo de lâmpadas fluorescentes (a função constante tracejada representa o limite de $Q(t)$)



Fonte: Elaborado pelo autor (2013)

Nesses exemplos é possível perceber ainda que os conteúdos matemáticos que emergem de uma atividade de Modelagem Matemática não seguem uma linearidade como nas aulas consideradas tradicionais, em que um conteúdo é apresentado logo após outro que, a priori, é considerado seu pré-requisito. Em Modelagem, os conteúdos aparecem com vistas a resolver problemas, de modo que se é preciso resolver um sistema linear, por exemplo, os alunos vão estudar resolução de sistemas lineares na primeira vez em que tal conhecimento é requerido, em outra atividade realizada momentos depois e assim continuamente (ou aplicando o que já sabem ou recorrendo à livros ou ao professor).

Logo, os conteúdos são estudados o tempo todo, sempre que necessário e “[...] a construção do conhecimento matemático é favorecida pelas inúmeras possibilidades de um mesmo conteúdo ser visto várias vezes no decorrer do desenvolvimento de um tema” (BURAK, 2010, p.36). Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p.40),

quando trazemos problemas da realidade de fora da escola para a sala de aula, é possível que os conceitos desse currículo não surjam de forma linearmente bem comportada, mas de uma forma espiral em que, muitas vezes, temos de fazer o movimento de ir e de voltar, o que pode acontecer de termos de “misturar” os elementos que estão dentro das gavetas. Agora, além da mistura, há sempre um movimento de pequenos avanços e, às vezes, um retrocesso em alguns elementos para a compreensão do fenômeno que está sendo investigado. Investimos na criatividade, na curiosidade, na insistência e também na tentativa e erro, considerando a tolerância com o outro e com o coletivo, em detrimento de individualidades. Claro que tais individualidades são essenciais, mas numa perspectiva dialógica, de construção comum.

Embora os encaminhamentos dados pelos grupos de alunos nos exemplos apresentados tenham sido distintos quanto à matemática utilizada e à questão elaborada, as fases pelas quais passaram os grupos foram, de modo geral, as mesmas. A seguir, em 1.3, apresentamos tais fases, os processos presentes na atividade de modelar e as ações cognitivas relacionadas a tais processos.

1.3 AS FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA – PROCESSOS E AÇÕES DOS ALUNOS

A atividade de Modelagem Matemática, que tem como ponto de partida uma situação problemática inicial e como ponto de chegada uma solução para a

questão elaborada a partir do problema suscitado pela situação inicial, pode apresentar, no caminhar entre o ponto de partida e o ponto de chegada, algumas fases, essas caracterizadas diante das ações e procedimentos utilizados pelos sujeitos.

Embora tais fases figurem sempre no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, a ordem em que aparecem bem como o tempo dedicado a cada uma e os obstáculos presentes nelas, dependem da dinâmica de cada atividade, essa, por sua vez, constituída no contexto específico em que é realizada. É comum e adequado, por exemplo, que as fases sejam revisitadas sempre que necessário, de modo que o desenvolvimento da atividade de Modelagem seja monitorado pelos alunos de acordo com os planos de ação estabelecidos inicialmente e validados passo a passo. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) essas fases podem ser denominadas de inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) associam a inteiração com o ato de inteirar-se, informar-se sobre, tornar-se ciente de, sendo nesta fase que a elaboração de uma questão emerge.

A inteiração acontece a partir da escolha de um tema a investigar. No âmbito da sala de aula, quando a escolha do tema é incumbência dos alunos, são maiores as chances de envolvimento desses na resolução do problema, talvez porque se sintam corresponsáveis pela investigação já que foram eles a dar o primeiro passo. Se a escolha for feita pelo docente, é importante que esse o faça diante dos interesses de seus alunos, expressos no decorrer das aulas ou em conversas informais. Discutir nas aulas um assunto extra matemático do interesse dos alunos é uma estratégia que intenta obter uma participação efetiva deles. Segundo Kaiser e Maaß (2007) as atitudes positivas dos alunos contribuem para o sucesso do trabalho com Modelagem Matemática e para o desenvolvimento de várias habilidades.

Tomemos como exemplo a situação apresentada em 1.1 referente ao trânsito na cidade de Apucarana. O tema “O trânsito na cidade de Apucarana” surgiu em um projeto de Modelagem realizado com alunos do curso de Licenciatura em

Matemática embora também faça parte do trabalho de conclusão de curso de uma das alunas participantes desse projeto. Em um dos encontros do grupo, uma aluna chegou atrasada e justificou seu atraso dizendo que há pouco tempo conseguia fazer o trajeto de casa para a universidade em pelo menos 15 minutos menos do que conseguia fazê-lo agora e que isso decorria do trânsito na cidade de Apucarana estar cada vez mais congestionado, segundo ela, devido ao aumento no número de veículos na cidade. Em se tratando de um projeto de Modelagem, a “deixa” não poderia ser melhor: o grupo decidiu conhecer melhor o tema trânsito na cidade de Apucarana.

O tema escolhido é, geralmente, conhecido em alguns aspectos pelos alunos, de tal modo que junto do tema, muitas vezes, surge também uma questão a investigar. Essa questão, por sua vez, só ganha status de “questão a investigar” quando os alunos buscam inteirar-se, realmente, do tema selecionado. É possível que, ao conhecer melhor o tema, o problema inicial deixe de existir e outros tomem o seu lugar. Na situação do trânsito, por exemplo, a questão “será que o número de veículos na cidade de Apucarana aumentou?” seria facilmente respondida ao inteirar-se do assunto. Como questão a ser investigada, portanto, os alunos poderiam, depois de pesquisas acerca do assunto, se interessar por “qual o número de veículos que Apucarana terá em 2013?” – questão que utilizamos como exemplo desde o início desse capítulo.

Conhecer o tema em questão implica em investigar informações qualitativas e quantitativas acerca do assunto que possibilitem o desenvolvimento da atividade de Modelagem. Isso remete à necessidade de consulta sobre o assunto junto a especialistas, a sites especializados, a matérias de jornais e revistas, ou mesmo a experimentos para coleta das informações. Inteirar-se é condição, inclusive, para que a situação problemática seja compreendida pelos alunos e professor. Nesse sentido, a escolha de um tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central da fase denominada inteiração. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.16):

[...] ainda que seja uma fase inicial, a inteiração pode se estender durante o desenvolvimento da atividade, considerando que a necessidade de novas informações pode emergir no decorrer do desenvolvimento da atividade de Modelagem.

A elaboração de uma questão a resolver, dada em linguagem natural, também constitui a fase inteiração, de modo que elencar um problema e elaborar uma questão implicam, necessariamente, conhecer o tema a ser investigado, já que tais ações abarcam os conhecimentos prévios dos alunos e a seleção de elementos da situação inicial que são necessários à investigação. Segundo Cifuentes e Negrelli (2011, p.128),

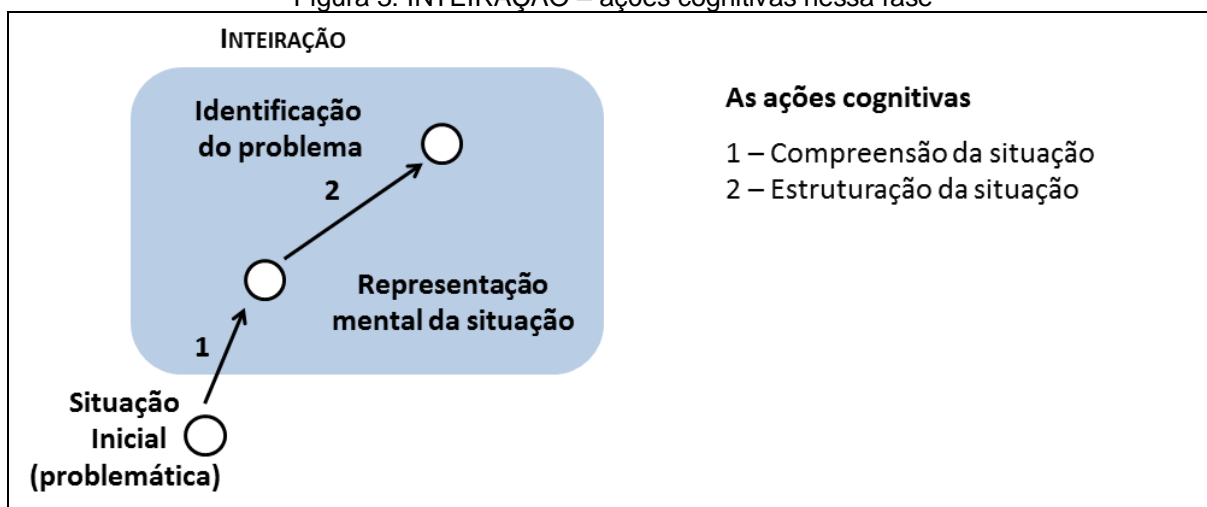
para que a problematização ocorra são necessárias abstrações situando o problema em outro plano que já não é o da realidade da qual se tratou inicialmente. A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, passíveis de serem captados pela percepção e intuição do indivíduo, mas que por tal motivo supõe uma investigação.

Olhar para o que o aluno faz nas diferentes fases de uma atividade de Modelagem Matemática, pode ser associado ao que Ferri (2006) denomina uma perspectiva cognitiva. Nessa perspectiva cognitiva, Almeida, Silva e Vertuan (2012) tratam das ações cognitivas associadas às diferentes fases apresentadas para a Modelagem Matemática.

As ações cognitivas presentes na fase inteiração, constituem-se no entendimento da situação inicial, a interpretação de fatos e informações, o agrupamento de ideias – ações essas que, segundo Bloom et al (1956¹⁵, apud FERRAZ; BELHOT, 2010) já correspondem a um segundo estágio da construção do conhecimento e são relacionadas ao que denominamos de “compreensão da situação” –, bem como a identificação de um problema, a elaboração de uma questão e a definição de metas para a sua resolução – ações que denominamos de “estruturação da situação” (Figura 3).

¹⁵ BLOOM, B.S. et al. Taxonomy of educational objectives. New York: David Mckay, 1956. 262p. (v.1)

Figura 3: INTEIRAÇÃO – ações cognitivas nessa fase



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19)

A partir da inteiração em relação à situação, da obtenção de informações qualitativas e quantitativas e da elaboração de uma questão a investigar via matemática, os estudantes passam, geralmente, à fase de matematização.

A matematização pode ser caracterizada em termos de transição de linguagem, uma vez que os resultados obtidos na fase de inteiração são, em sua maioria, expressos em linguagem natural e não possuem uma linguagem matemática diretamente associada, mas que precisa ser elaborada. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.16)

[...] a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da Modelagem Matemática é caracterizada por “matematização”, considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas.

As descrições matemáticas são realizadas via formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações das informações obtidas na fase de inteiração. Tais processos, no entanto, não implicam em considerar apenas um recorte da situação inicial, mas considerar o quê dessa situação inicial influencia fortemente o problema investigado e, portanto, importa para a solução da questão elaborada, de modo que, ao simplificar tenhamos um retrato da realidade e não uma realidade desconfigurada e, portanto, diferente daquela em que o problema existe. Isso remete à importância de se selecionar variáveis, formular hipóteses e simplificar as

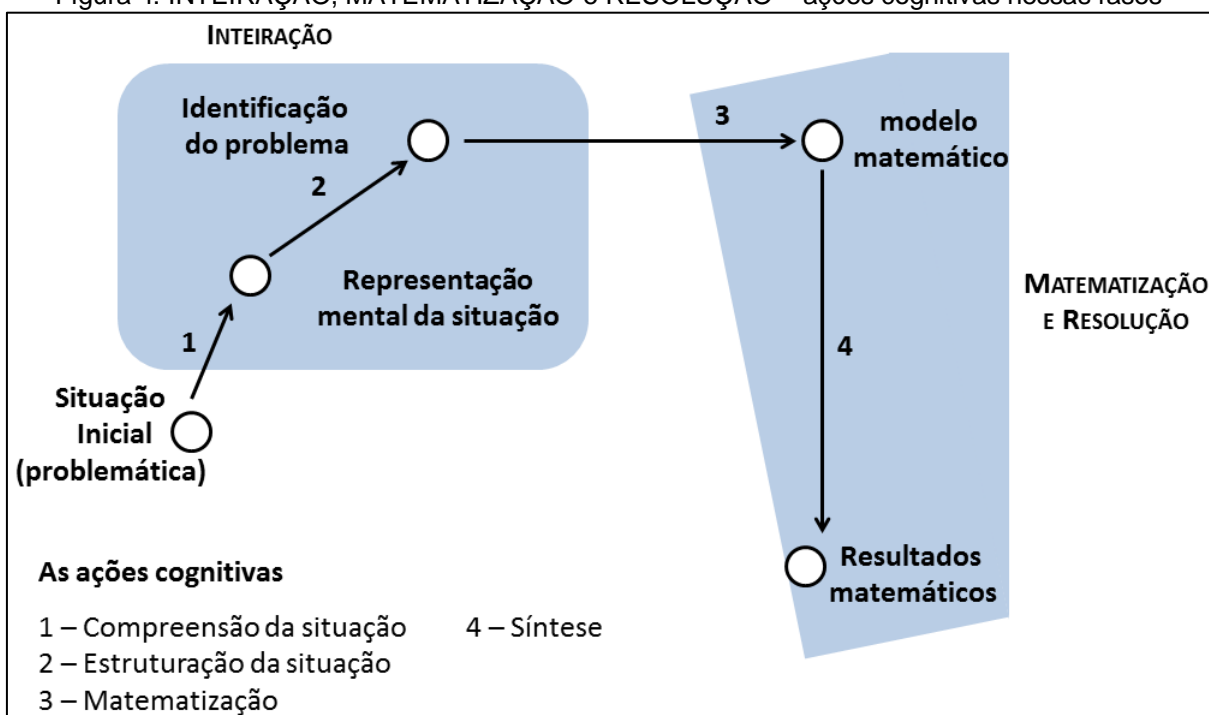
informações de tal modo a construir uma realidade que, segundo Cifuentes e Negrelli (2008) não coincide exatamente com a primeira, mas ainda é uma boa representação dela.

No caso da abordagem que fizemos nesse capítulo da situação do trânsito na cidade de Apucarana, consideramos como variáveis o tempo, dado em anos a partir de janeiro de 2007, e o número de veículos na cidade de Apucarana; consideramos, ainda, que a razão entre a quantidade de veículos num dado ano e a quantidade de veículos num ano imediatamente anterior era aproximadamente constante. A escolha das variáveis, no entanto, foi pautada na questão a investigar (qual o número de veículos na cidade em 2013?), assim como a aproximação considerada pode ser resultado da busca de regularidades entre as informações numéricas que possuíam e da crença de que o número de veículos tende a continuar aumentando segundo a tendência dos últimos anos.

A matematização é, assim, realizada diante dos conhecimentos prévios dos sujeitos em relação à situação inicial, em relação às experiências anteriores na condição de modeladores e em relação à matemática que acreditam, possa ser utilizada no contexto da questão. Nesse sentido, a ação cognitiva que também denominamos “matematização” (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2012) corresponde à transição da linguagem natural em que o problema é dado para uma linguagem matemática que evidencia o problema matemático a ser resolvido.

Na fase resolução, considerando as variáveis selecionadas, as simplificações feitas e as hipóteses elencadas, os alunos constroem um modelo matemático da situação inicial, modelo esse que abarca características do fenômeno e permite interpretá-lo, responder à questão inicial e, em alguns casos, até mesmo, realizar previsões para o problema em estudo. Nessa fase o sujeito utiliza conceitos, técnicas, métodos e representações matemáticas, põe em uso seus conhecimentos prévios, busca padrões, recorre a ferramentas computacionais, coordena diferentes representações dos objetos matemáticos, busca conhecer conceitos novos e ressignifica os já conhecidos, de modo que, nessa fase, com base na caracterização proposta por Bloom (1956, apud FERRAZ; BELHOT, 2010), identificamos a ação cognitiva denominada síntese. A atividade de Modelagem pode ser representada, até a fase de resolução, como na Figura 4.

Figura 4: INTEIRAÇÃO, MATEMATIZAÇÃO e RESOLUÇÃO – ações cognitivas nessas fases



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19)

Na situação do número de veículos em Apucarana, considerando a hipótese apresentada e utilizando recorrência matemática, os alunos obtiveram um modelo matemático representativo da situação do número de veículos em dado ano. Esse modelo, além de abarcar o crescimento observado nos últimos anos, permite realizar uma previsão para a quantidade de veículos na cidade para janeiro de 2013, como propunha a questão inicial.

Segundo o modelo matemático obtido pelos alunos, a previsão é de que haverá cerca de 66000 veículos em Apucarana em janeiro de 2013. Analisar essa resposta diante da situação inicial é ação das fases “interpretação de resultados” e “validação”. Essa fase visa avaliar tanto a representação matemática associada ao problema – em relação aos procedimentos matemáticos e à adequação da representação para a situação, como a questão da razão $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ em termos da situação – quanto a resposta obtida, sempre a partir do contexto inicial.

Caso o grupo de alunos que lida com a situação entenda que a resposta é satisfatória, os alunos comunicam a resposta do problema para os outros alunos de modo a argumentar e convencer o outro de que a solução apresentada é razoável e consistente, tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista da

situação inicial. Segundo Brown e Edwards (2011, p.187, tradução nossa), “[...] a comunicação dos alunos acerca de suas soluções para tarefas de modelagem, dá uma visão sobre a profundidade de suas compreensões matemáticas e como eles utilizam o conhecimento prévio do contexto de uma tarefa na sua solução” – o que constitui um importante espaço de avaliação das atividades de Modelagem e das compreensões dos alunos.

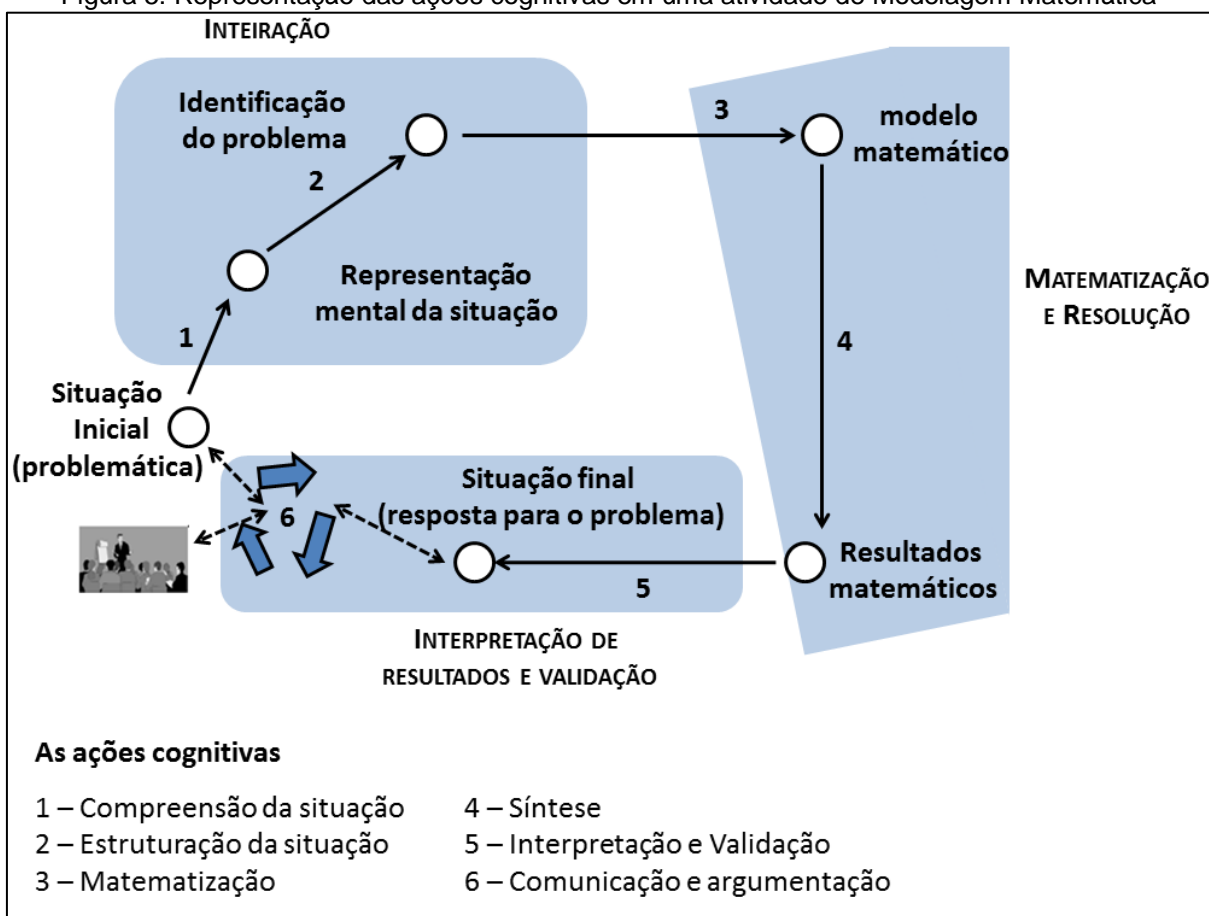
Caso o grupo de alunos entenda que a resposta obtida para o problema não é satisfatória, novas informações precisam ser pesquisadas, reestruturações nas hipóteses passam a ser realizadas e o processo inicia-se novamente. Todavia, em Modelagem Matemática,

[...] um resultado que poderia ser considerado errado não equivale naturalmente a uma nota baixa, a um risco com caneta vermelha. Vale sim, como um resultado testado, rejeitado e que pode indicar novos caminhos e estratégias, novas necessidades e rumos. Erros assim levam, muitas vezes, a uma nova compreensão do problema original e também do modelo matemático (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011, p.58).

Em relação à atividade de Modelagem do número de veículos em Apucarana, a validação foi feita pelos alunos calculando o número de veículos para os diferentes anos da tabela, de sorte que quanto mais próximo do número de veículos observado na tabela fosse o valor obtido pelo modelo matemático, melhor era a validação considerada pelos alunos. Isso se verificou diante da impossibilidade de validar se o número 66000 veículos aconteceria, de fato, em 2013. Uma vez realizada a atividade de Modelagem do trânsito na cidade de Apucarana, os alunos poderiam elaborar um relatório e enviar à prefeitura da cidade, por exemplo, o que se constituiria uma possibilidade de comunicação dos resultados para além da comunicação realizada pelos alunos aos seus pares.

A Figura 5 a seguir ilustra as ações cognitivas e sua relação com as diferentes fases do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

Figura 5: Representação das ações cognitivas em uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19)

1.4 IMPLEMENTAÇÃO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA E A FAMILIARIZAÇÃO DOS ALUNOS COM ESSAS ATIVIDADES

Como já mencionamos em 1.2, qualquer tentativa de implementar atividades de Modelagem Matemática em sala de aula vem carregada do que se entende por uma aula de Matemática, entendimento esse construído durante toda uma formação escolar, geralmente, vivenciada no paradigma do exercício. Logo, qualquer tentativa está, em certa medida, enraizada no “ensino tradicional”.

Em experiências anteriores utilizando a Modelagem verificamos que os alunos tentam, invariavelmente, seguir os mesmos padrões de uma aula considerada tradicional. Alguns expressam resistência em trabalhar com atividades de Modelagem, já que não se sabe ao certo em momento algum o que exatamente

deve ser feito. Outros reclamam que precisam “pensar muito” nesse tipo de atividade, o que depõe a favor e não contra a Modelagem em sala de aula.

No que diz respeito à implementação de atividades de Modelagem Matemática, baseamo-nos em D’Ambrósio (2009, p.89, tradução nossa) quando afirma que “[...] o conhecimento determina o comportamento”. É na prática de tais atividades, no decorrer de experiências, que se dá a familiarização dos alunos e dos professores com Modelagem, que se dá o conhecimento em relação a como funciona uma atividade de Modelagem, quais são as características dessas atividades e que tipos de problemas podem desencadear uma investigação matemática via Modelagem. A partir desses conhecimentos construídos no fazer Modelagem que os sujeitos tornam-se cada vez mais autônomos e responsáveis pela condução de atividades de Modelagem. Nesse sentido, já Almeida e Dias (2004) apresentam três momentos da implementação da Modelagem em sala de aula. Esses momentos delinearam o curso de Modelagem Matemática no qual fizemos a coleta de dados para essa pesquisa. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.26) fazem complementações na descrição desses momentos. Segundo esses autores,

em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.

Posteriormente, em um segundo momento, uma situação problema é sugerida pelo professor aos alunos e esses, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

Finalmente, no terceiro momento, os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação dessa investigação para a comunidade escolar.

Segundo os autores (ALMEIDA e DIAS, 2004; ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012) vivendo experiências de Modelagem nos dois primeiros momentos os alunos adquirem autonomia, confiança e autoridade para realizar, por si sós, uma investigação matemática por completo, ou seja, para vivenciar o terceiro momento da Modelagem, sendo capazes de delimitar uma situação problemática, elencar um problema, elaborar uma questão, buscar uma solução por meio da matemática, enfim, conduzir a investigação como um todo.

A vivência de experiências com Modelagem fornece subsídios para o desenvolvimento de outras investigações. No entanto, o êxito na realização de uma atividade de Modelagem não implica a transferência imediata de conhecimentos de uma situação para outra. Embora os contextos atribuam significados às estratégias e aos conceitos e esses, por sua vez, atribuam significados aos contextos, o que se pretende com a indicação de distintos momentos para a introdução da Modelagem nas aulas é a familiarização dos alunos com tais atividades e não a simples transferência como acontece no paradigma do exercício.

Ao considerar as possibilidades para a introdução de atividades de Modelagem no ensino, Chaves e Espírito Santo (2011, p.168) afirmam que

é importante pensarmos em configurações flexíveis de Modelagem, passíveis de se ajustarem aos mais diversos contextos e objetivos educacionais, de modo a atrair aqueles que podem de fato produzir alterações na sala de aula de matemática, os professores.

Pensar a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica utilizada pelo professor que, na condição de orientador visa promover a aprendizagem de conceitos matemáticos, remete considerar a Modelagem nas diferentes perspectivas com que é tomada na literatura, o que apresentaremos na próxima seção.

1.5 PERSPECTIVAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA IDENTIFICADAS POR GABRIELE KAISER E BHARATH SRIRAMAN

A apresentação que fizemos em 1.1 de uma possível resolução para a situação (iii) do trânsito na cidade de Apucarana é, como já afirmamos, uma dentre

tantas outras que poderiam ser realizadas, já que as abordagens de uma atividade de Modelagem e os conceitos matemáticos utilizados em cada abordagem dependem, essencialmente, dos interesses do grupo de sujeitos (alunos e professores) que lida com a situação. Nessa situação especificamente, o **foco** da discussão poderia residir na relação entre a ideia utilizada como ponto de partida (de que a razão entre o número de veículos em um ano qualquer para o número em um ano imediatamente anterior era constante) e a função do tipo exponencial obtida; poderia residir, ainda, no uso do modelo para cobrar políticas públicas que minimizassem os impactos do aumento no número de veículos na cidade; um professor poderia utilizar a situação ou para ilustrar uma aplicação do conceito de função exponencial, ou para introduzir tal conceito. Ou seja, dependendo dos interesses de quem desenvolve a atividade de Modelagem Matemática, o foco da investigação pode residir em um ou em outro aspecto, o que define, por sua vez, um dentre tantos outros possíveis encaminhamentos.

Portanto, o foco dado a certos aspectos de uma atividade de Modelagem Matemática, seja quando o professor propõe um tema aos alunos, seja quando um grupo de alunos faz as escolhas, depende da perspectiva com que a investigação de um tema é feita, perspectiva essa que está relacionada com os interesses daqueles que lidam com a situação. Nesse sentido, as perspectivas subjacentes às atividades de Modelagem definem os encaminhamentos das atividades e evidenciam aspectos quanto ao objetivo central com que elas são desenvolvidas no contexto educacional.

Esse exemplo do trânsito sinaliza, no entanto, que apesar das perspectivas serem distintas e os procedimentos a que conduz cada uma também, é possível que esses procedimentos – de cunho matemático, social, pedagógico, dentre outras – se combinem no desenvolvimento de uma mesma atividade de Modelagem Matemática.

Kaiser e Sriraman (2006) sistematizaram seis perspectivas para a Modelagem Matemática tomando como referência os diferentes aspectos evidenciados quanto ao objetivo central com que a atividade de Modelagem é desenvolvida no âmbito da sala de aula. Os autores, baseados em trabalhos de Modelagem Matemática envolvendo sujeitos de diferentes países denominaram tais

perspectivas de: realística, contextual, sócio-crítica, epistemológica, educacional e cognitivista.

Quando o foco da atividade de Modelagem é o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas advindos de situações autênticas originadas da indústria ou do ambiente de trabalho, a perspectiva subjacente é a realística. Investigar, portanto, formas de dirimir uma mancha de óleo existente em um trecho de mar atentando para os modos de conduzir a resolução desse problema e para as habilidades necessárias para sua resolução, constitui um exemplo dessa perspectiva.

Na perspectiva contextual, por sua vez, considera-se a inclusão de situações problemáticas nas aulas de Matemática com a finalidade de contextualizar ou mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos pertinentes ao nível de escolaridade em que se encontram os alunos da turma. Nessa perspectiva justifica-se o uso de atividades de Modelagem, muitas vezes, devido ao fator motivacional “inerente” a ela. As situações são expressas, geralmente, via problemas “de palavras”, de interpretação de enunciados, em que obter um modelo matemático é uma atividade de resolução de problemas previamente construída visando que os alunos façam uso de situações significativas que os levem a construir e reconstruir ideias matemáticas.

Na situação do trânsito em Apucarana utilizada no início desse texto, poderíamos considerar o seguinte enunciado como representativo de uma situação de Modelagem segundo a perspectiva contextual: *Considerando o aumento expresso na tabela 1 (ver página 21) referente ao número de veículos na cidade de Apucarana nos últimos anos e tomando a mesma tendência de aumento para os anos que seguem, construa um modelo que expresse o número de veículos de acordo com um dado ano e por meio do modelo, estime o número de veículos para janeiro de 2013.*

A perspectiva sócio-crítica condiz com a ideia de que a Educação Matemática deve preparar os alunos para intervir na sociedade da qual fazem parte, de modo a participar, inclusive, de debates baseados em Matemática, os quais são utilizados, muitas vezes, para impossibilitar a participação daqueles que ou não se

sentem à vontade com a Matemática ou que acreditam que o que é mostrado pela Matemática é isento de dúvida ou intenção. As atividades de Modelagem, nessa perspectiva, contribuem para o exercício da cidadania na medida em que possibilitam aos sujeitos, reflexões acerca da natureza, das influências e dos usos dos modelos matemáticos na sociedade.

Para os autores que têm a perspectiva sócio-crítica como aquela que norteia o trabalho com a Modelagem Matemática, a Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica (BARBOSA, 2001) já que a partir dela “[...] toda sala de aula se torna uma microssociedade e pode representar a democracia em espécie (ou de outra forma)” (SKOVSMOSE, 2000a, p.2). Na situação do trânsito em Apucarana, por exemplo, discutir a influência do aumento no número de veículos na vida da população, bem como o impacto de políticas públicas relacionadas, encaminhar um relatório à prefeitura da cidade com os resultados obtidos via investigação, ou ainda, na investigação, abordar diferentes modelos matemáticos relacionando-os com os possíveis interesses dos envolvidos com a situação do trânsito, ilustram a perspectiva sócio-crítica.

Em outra perspectiva, a epistemológica, as situações problemáticas são estruturadas para gerar o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Nesse sentido, a Modelagem passa a ser considerada, inclusive, no contexto estritamente matemático, tendo como um de seus objetivos o desenvolvimento da Matemática enquanto teoria.

Quando o foco da atividade de Modelagem Matemática consiste na integração de modelos matemáticos nas aulas de Matemática, visando levar os alunos a investigar o modelo quanto às suas potencialidades na interpretação de uma situação e na aprendizagem matemática, quanto à sua natureza e à sua construção em termos matemáticos e extra matemáticos, temos a Modelagem em sua perspectiva educacional. É incumbência do professor, nessa perspectiva, analisar as dificuldades dos alunos no processo de Modelagem (principalmente os relacionados à matematização e à interpretação dos processos) e nos conceitos matemáticos suscitados pela atividade, de modo a orientar suas ações e intervenções no desenvolvimento da atividade. Para Kaiser e Sriraman (2006) a perspectiva educacional pode ter como objetivo central desencadear processos de

aprendizagem (perspectiva educacional didática) ou introduzir conceitos matemáticos e seu desenvolvimento (perspectiva educacional conceitual).

A perspectiva cognitivista, finalmente, tem como principal interesse compreender quais funções cognitivas estão envolvidas na atividade matemática dos alunos enquanto lidam com atividades de Modelagem Matemática. Segundo as autoras, pesquisas que tomam a Modelagem em tal perspectiva se preocupam em analisar os processos cognitivos ativados pelos alunos durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

Segundo Almeida e Vertuan (2010, p.31),

conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de Modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com essas atividades de modo a contemplar diferentes perspectivas e, conseqüentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de Modelagem.

Apesar de, nas atividades de Modelagem, estarem presentes diferentes características das seis perspectivas apresentadas, nesse trabalho de tese, diante do objetivo de pesquisa delimitado, tomamos as atividades de Modelagem segundo as perspectivas educacional e cognitivista. Tais perspectivas, em nosso ver, estão intimamente relacionadas quando o interesse no desenvolvimento de atividades de Modelagem reside tanto na investigação dos processos cognitivos dos alunos, tais como as práticas de monitoramento, quanto no uso dos resultados advindos dessa investigação para potencializar a aprendizagem matemática de cada um, mesmo sendo as atividades realizadas essencialmente em grupo, de modo colaborativo.

1.6 MODELAGEM MATEMÁTICA – UMA ATIVIDADE ESSENCIALMENTE COLABORATIVA

Embora trabalhos em grupo sejam comumente propostos pelos professores, nem sempre o trabalho constitui-se uma “atividade colaborativa”¹⁶. Na disciplina de Matemática, especificamente, muitas vezes os trabalhos em grupo

¹⁶ Entendemos que trabalhos realizados em grupo são colaborativos quando ao trabalharem juntos, os alunos se apoiam uns nos outros, sentem-se corresponsáveis pela condução das ações e visam atingir objetivos comuns elencados coletivamente.

resumem-se à seguinte sequência de ações: cada aluno baixa a cabeça, resolve a atividade proposta – geralmente similar a outras conhecidas –, e se dirige ao outro apenas para questioná-lo com frases do tipo “terminei e você?” ou “o meu deu tanto e o seu?”, de sorte que se houverem divergências nas respostas, aí sim pode haver uma discussão referente aos modos de resolução de cada elemento do grupo.

Essa “tradição” de trabalho em grupo nas aulas de Matemática pode ser alterada quando as situações propostas colocarem os alunos, de fato, frente a uma situação para a qual não possuem, de antemão, ideias ou conhecimentos necessários para sua resolução. Apesar de não saberem como proceder junto à situação, os alunos precisam, ainda, querer fazer isso, ou seja, a situação inicial precisa ser interessante o suficiente para que os alunos decidam, individualmente e coletivamente, “mergulhar” no universo da situação a ser investigada.

Quando a situação for aberta, oriunda de um contexto extra matemático de interesse dos alunos, seja escolhida por eles ou pelo professor, dificilmente a dinâmica estabelecida no grupo vai ser a mesma que tradicionalmente se observa. Primeiro, porque em Modelagem, os estudantes precisam decidir o que investigar, elaborar um problema que seja do interesse do grupo, buscar informações que possibilitem a investigação, elencar hipóteses que carregam as impressões e intenções dos componentes do grupo, bem como construir um modelo representativo da situação e utilizá-lo para responder o problema inicial – atividades essas que requerem, em sua maioria, a existência de diálogos nos quais distintos pontos de vista “conversem”. Segundo D’Ambrosio (2009, p.93),

uma das dificuldades de se trabalhar em conjunto, tanto em sala de aula, como em ambiente de trabalhos, é que as partes têm, muitas vezes, diferentes percepções de uma mesma situação. O desafio é explorar a dinâmica de diferentes percepções e estratégias, transformando-os em uma estratégia de grupo.

Para que se estabeleça um diálogo eficaz entre os componentes do grupo, de modo que duas diferentes percepções e estratégias conversem e constituam uma terceira, por assim dizer, mais coletiva e elaborada, faz-se necessário que os alunos, primeiro, saibam expressar – descrever – seus processos de pensamento e; segundo, estejam abertos a compreender o modo de pensar do outro sob a ótica do outro (na medida do possível) e abertos à reelaboração de suas

ideias. Só assim o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática tende a ser realizado de modo colaborativo.

Em experiência com atividades de Modelagem acerca da criação de frangos de corte com alunos do Ensino Médio Técnico, por exemplo, Scheller e Sant'Ana (2011, p.283) atentam que “[...] as discussões sobre as estratégias a serem escolhidas exigiam argumentos convincentes, uma vez que a primeira sugestão apontada por um colega não era facilmente aceita pelo outro”, sendo essa uma qualidade na comunicação de uma posicionamento – utilizar argumentos fundamentados e, por isso, convincentes.

Quando um professor lança um tema para a turma (ou quando a turma escolhe tal tema para a investigação), diferentes grupos passam a desenvolver atividades de Modelagem tomando como ponto de partida o mesmo assunto – assim como acontece nos momentos 1 e 2 da implementação de atividades de Modelagem já descritos em 1.4. Nesse caso, diferentes resoluções são esperadas para uma mesma situação problemática (tal como exemplificado em 1.2 no caso das lâmpadas fluorescentes). Nesse contexto, a apresentação das diferentes resoluções entre os grupos pode contribuir para a aprendizagem dos conceitos envolvidos nas diferentes resoluções, sejam esses de cunho matemático, de estratégias de resolução ou de assuntos extra matemáticos. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.33)

quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias para resolver um mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

A participação dos alunos nas discussões de seu grupo depende, por um lado, da predisposição e interesse do aluno em realizar a atividade de investigação, por outro, “[...] do grau de incorporação das perspectivas dos alunos no processo (ALRØ e SKOVSMOSE, 2010, p.72)”. Realizar um trabalho em grupo, em colaboração com o outro, implica em assumir uma atitude de corresponsabilidade pela aprendizagem desse outro e é nesse processo de interação entre alunos que a atividade de Modelagem e a aprendizagem, matemática inclusive, se desenvolve de modo colaborativo. Desse modo, por abarcar uma Matemática construída na

interação do aluno com o outro e com o mundo é que a entendemos como uma “matemática com história” (BURAK e KLÜBER, 2010, p.160).

1.7 ACERCA DO PAPEL DO PROFESSOR EM UMA AULA COM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando a especificidade do ambiente escolar proporcionado pelas atividades de Modelagem Matemática e considerando as ações pertinentes a cada fase da Modelagem, a dinâmica estabelecida por esse tipo de atividade no ambiente escolar e a característica de ser essa uma atividade realizada essencialmente em grupo, numa perspectiva colaborativa, cabe reportar-nos às incumbências do professor quando utiliza a Modelagem como alternativa pedagógica, ou seja, como uma “maneira” de desenvolver as atividades na aula de Matemática.

O professor, assim como os alunos, ao utilizar Modelagem Matemática, migra de uma situação de aulas expositivas seguidas de exercícios para situações que são essencialmente investigativas. Embora esse caminho entre paradigmas seja necessário, o “aventurar-se” em aulas investigativas carrega, inevitavelmente, concepções construídas nas aulas consideradas tradicionais. Nesse sentido, o professor deixa de ser um expositor e passa a ser um orientador que atua, muitas vezes, em caminhos não vislumbrados por ele na preparação de sua aula. Isso porque o caminhar é do aluno e não dele – cabe ao aluno criar hipóteses, testá-las, resolver um problema e decidir se a solução é ou não satisfatória.

Considerar o professor um orientador remete considerar que:

a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, [...] é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que “vale-tudo”; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; e) orientar não é despir-se da autoridade de professor (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.24).

Assumir a condição de orientador implica em conhecer o que seu aluno sabe (e principalmente, o que não sabe e está em vias de saber), como ele pensa uma determinada situação e que barreiras o impede de progredir em uma resolução para, a partir de então, baseado nas reflexões oriundas desses conhecimentos,

indicar caminhos. Ser orientador é por si só aventurar-se, já que conhecer um aluno é considerá-lo na sua individualidade, implica necessariamente ouvi-lo e nem sempre o professor está preparado para isso.

Assumindo a condição de orientador, o professor se coloca como co-partícipe no desenvolvimento das atividades de seus alunos no processo de aprendizagem, cabendo a esses últimos, e só a eles – mesmo porque só eles podem aprender por si mesmos – a realização de atividades que promovem a aprendizagem.

Para Blum e Ferri (2009, p.51-52, tradução nossa), o trabalho do professor em Modelagem Matemática compreende:

[...] a orquestração do assunto matemático de modo a permitir que os alunos estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática; a ativação cognitiva permanente dos alunos (estimulando atividades cognitivas e metacognitivas e promovendo a independência dos alunos); uma gestão eficaz e orientada para o aprendiz em sala de aula (com variação nos métodos, usando o tempo de modo eficaz e etc).

Nesse contexto e diante da perspectiva de que a Modelagem tem nos trabalhos em grupo o seu aporte é que consideramos que, em sala de aula, os grupos de alunos desenvolvem as atividades, orientados e estimulados pelo professor, de tal modo que quanto maior a familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática, menor é a interferência do professor no que se refere à indicação de procedimentos aos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

A familiarização dos alunos com as atividades de Modelagem, por sua vez, pode resultar, para além de uma compreensão acerca do que constitui uma atividade de Modelagem, em um aumento no repertório de estratégias de resolução e em certa autonomia frente à utilização dos conceitos matemáticos e de suas propriedades e sua importância no contexto do problema.

Assim, quando um aluno toma consciência dos conceitos matemáticos que conhece, das estratégias que pode utilizar frente a um problema específico e dos modos como se dá sua aprendizagem, pode otimizar suas ações de modo a potencializar a apreensão de conhecimentos e seu desenvolvimento cognitivo. Ao

conhecimento relativo à cognição e às práticas de monitoramento cognitivo, dá-se o nome de metacognição, objeto de estudo de nosso próximo capítulo.

A opção, nesse trabalho, pela metacognição em sua vertente processual vem ao encontro do que expressa Anastácio (1990, p.97) quando afirma que

não é suficiente conhecer os passos na construção, análise e interpretação de um modelo matemático e suas diferentes aplicações. Faz-se necessário desenvolver nos alunos a capacidade de avaliar o processo de construção do modelo e os diferentes contextos de aplicação dos mesmos.

Além disso, não é apenas o que um aluno sabe, mas como esse aluno usa o que sabe que importa (SCHOENFELD, 1987, p.190). E é em relação ao desenvolvimento da autonomia no que tange à prática do monitoramento cognitivo, ao desenvolvimento cognitivo em si e ao conhecimento dos alunos acerca de seus próprios processos cognitivos que o próximo capítulo abordará as práticas de monitoramento cognitivo.

CAPÍTULO II

AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO

Nesse capítulo, visando compreender como as atividades de Modelagem Matemática promovem práticas de monitoramento cognitivo, apresentamos uma caracterização de cognição e metacognição, bem como as duas vertentes da metacognição constantes na literatura: “conhecimento acerca da cognição” e “monitoramento”. Na sequência discutimos cada vertente e focamos a segunda, dado o interesse dessa pesquisa. Finalmente, apresentamos algumas confluências percebidas entre Modelagem e monitoramento.

ÍNDICE

- 2.1 Introdução
- 2.2 Cognição e Metacognição
- 2.3 Metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”
- 2.4 Metacognição em sua vertente “monitoramento”
- 2.5 Confluências entre as atividades de Modelagem Matemática e as práticas de monitoramento – algumas considerações

2.1 INTRODUÇÃO

Na condição de professores que utilizam atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica e no Ensino Superior, temos nos interessado, de modo particular, pelas práticas de monitoramento que põe os alunos em ação quando desenvolvem esse tipo de atividade, considerando a especificidade de ser essa uma atividade investigativa, aberta, com múltiplos direcionamentos possíveis e realizada em colaboração por elementos de um grupo.

Considerando a Metacognição, já tratada por John Flavell em 1976, como o conhecimento que uma pessoa tem em relação a seus próprios conhecimentos e o monitoramento que essa pessoa realiza ao resolver uma atividade utilizando-se dos conhecimentos que tem em relação a si própria, em relação a atividade que realiza e em relação as estratégias de resolução, é que investigamos as práticas de monitoramento dos alunos usando a metacognição como referencial teórico.

O monitoramento cognitivo¹⁷, quando considerado em uma perspectiva metacognitiva, pode ser entendido como a supervisão ativa e o controle realizado pelo aluno frente a uma atividade, matemática inclusive. Tal monitoramento, quando existe, pode manifestar-se desde a reflexão inicial e o planejamento do encaminhamento da atividade, até a administração do processo de resolução de um problema e a avaliação desse processo. Em vista disso, nas atividades de Modelagem Matemática, as práticas de monitoramento cognitivo podem influenciar e contribuir para a aprendizagem matemática e para o desenvolvimento cognitivo do aluno, tanto no que tange aos conceitos, quanto no que tange às representações, às estratégias e aos algoritmos que emergem nas atividades.

Nesse capítulo, portanto, com vistas a investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes, apresentamos, inicialmente, uma caracterização de cognição e metacognição. Em seguida, discutimos as duas vertentes a partir das

¹⁷ Nesse trabalho, utilizamos os termos monitoramento cognitivo, monitoramento (simplesmente) e automonitoramento como sinônimos.

quais a metacognição tem sido considerada na literatura, aqui denominadas “conhecimento acerca da cognição” e “monitoramento”. Focamos nossa atenção na segunda vertente por ser o “monitoramento” o interesse desse trabalho de pesquisa. Para finalizar, na última parte do texto, apresentamos confluências entre as atividades de Modelagem Matemática e as práticas de monitoramento percebidas nesse primeiro momento.

2.2 COGNIÇÃO E METACOGNIÇÃO

Consideremos a seguinte atividade: ler o texto a seguir tentando identificar do que ele trata.

Um jornal é melhor que uma revista. Um cume ou encosta é melhor que uma rua. No início parece que é melhor correr do que andar. É preciso experimentar várias vezes. Prega várias partidas, mas é fácil de aprender. Mesmo as crianças podem achá-lo divertido. Uma vez com sucesso, as complicações são minimizadas. Os pássaros raramente se aproximam. Muitas pessoas, às vezes, fazem ao mesmo tempo, contudo isso pode causar problemas. É preciso muito espaço. É necessário ter cuidado com a chuva, pois destrói tudo. Se não houver complicações, pode ser muito agradável. Uma pedra pode servir de âncora. Se alguma coisa se partir, perdemos-lo e não teremos uma segunda chance. (LEVINE¹⁸, apud PEDROSO, 2008, p.9).

É provável que ao realizar a leitura, sem saber do que o texto trata, uma pessoa elabore uma hipótese já no seu início. Ao ler a frase “*um jornal é melhor que uma revista*” é possível que alguém pense, por exemplo, no fato de um jornal ser diário e que isso o torna melhor que uma revista no sentido de suas matérias serem sempre imediatas ao acontecido. No entanto, tal hipótese passa por uma avaliação já na leitura da segunda frase do texto “*um cume ou encosta é melhor que uma rua*”, ou ainda, na terceira frase “*no início parece que é melhor correr do que andar*”, de modo que tal avaliação provavelmente levará à decisão de descartar a primeira hipótese e construir outra que se adapte melhor ao conjunto das três frases. Essa outra, por sua vez, provavelmente também seja descartada (ou refinada) na medida em que a leitura de todo o texto é realizada. É possível que ao terminar a leitura o sujeito ainda não tenha reconhecido do que se trata. Nesse caso, o leitor pode desistir da atividade por julgar não ser possível realizá-la ou questionar a si mesmo

¹⁸ LEVINE, Martin. *Effective Problem Solving*. [s.l.]: 2.ed. Prentice Hal, p.14, 1994.

acerca de como proceder a partir de então. Exemplos desse questionar-se podem ser *“Como fazer para descobrir do que trata o texto? Será que é interessante fazer uma lista com os nomes das coisas que já pensei e não funcionaram de modo a me organizar? Rer ler pode ser uma boa estratégia para ter uma ideia diferente das que já tive? Se não consigo pensar em nada que adapte perfeitamente à descrição, o que melhor se encaixa dentre as coisas que pensei e por quê?”*. Ao realizar novas tentativas, monitorando toda a leitura de modo a complementar as informações contidas nela e de modo a avaliar os resultados alcançados, uma pessoa pode concluir que o texto faz a descrição de um “papagaio” ou “pipa”, aliás, um possível título do texto em questão.

Nessa atividade, tal como a descrevemos, podem ser ações realizadas pelo sujeito: ler, elaborar hipóteses, avaliar os resultados, validar uma ideia, descartar hipóteses, refinar uma ideia, desistir da atividade por julgar não ser possível realizá-la, questionar a si mesmo sobre como proceder, monitorar a leitura, refletir sobre o modo como realizou a atividade na primeira vez e decidir que rer ler pode ser uma boa estratégia. Releitura essa que, provavelmente, o leitor dessa pesquisa também realizou quando viu que o texto referia-se a uma pipa, de modo a verificar se, de fato, todas as descrições eram pertinentes.

Essas ações, no entanto, embora estejam associadas ao entendimento do texto, possuem focos distintos. Enquanto algumas ações visam resolver o problema proposto – diretamente –, como é o caso de ler, elaborar hipóteses, validar uma ideia e refinar uma ideia, outras visam supervisionar as primeiras ações, como é o caso de monitorar a leitura, refletir sobre como a realização da atividade na primeira vez pode permitir uma nova tentativa diferente ou questionar a si mesmo em relação a como proceder, por exemplo. Trata-se de ações de caráter cognitivo e metacognitivo, respectivamente. Todas essas ações, no entanto, remetem à estrutura cognitiva do sujeito e são, ao mesmo tempo, resultado de aprendizagens vivenciadas em seu entorno social e cultural e instrumentos de intervenção.

De acordo com González (2009, p.132-133, tradução nossa), na realização de uma atividade como àquela de interpretação do texto da pipa, aspectos cognitivos, afetivos e metacognitivos podem ser utilizados pelo indivíduo, de modo que:

os aspectos cognitivos referem-se aos processos, habilidades, estratégias que facilitam o manejo da informação, tanto gerais (análise, síntese, analogias, etc) como especificamente disciplinares (para o caso da matemática, tem-se os seguintes: indução, dedução, demonstração, construção de gráficos, fatoração, etc). Os aspectos afetivos referem-se às atitudes, emoções e crenças, tanto acerca de si mesmo, como em relação à disciplina e às demais pessoas. Os aspectos metacognitivos remetem à capacidade que têm os seres humanos de estarem conscientes de sua própria atividade cognitiva, concorrentemente com a realização de alguma tarefa intelectualmente exigente¹⁹.

No contexto da Matemática, mais especificamente, quando se requer do aluno o cálculo da área de um losango, por exemplo, são aspectos cognitivos da resolução do problema o reconhecimento das características de um losango, bem como a utilização e a lembrança de uma fórmula para obter sua área, o cálculo da área em si e a aceitação do resultado como adequado. Os aspectos afetivos, por sua vez, podem ser expressos quando os alunos usam frases do tipo “se é de Matemática eu não sei nem como começar” ou “isso é fácil porque eu adoro geometria“. Essas manifestações estão ligadas às atitudes, emoções e crenças do sujeito quando precisam realizar (ou realizam) uma atividade. Os aspectos metacognitivos, finalmente, estão presentes quando o aluno demonstra estar consciente de sua atividade cognitiva e utilizar dessa consciência para potencializar a aprendizagem dos conceitos ali presentes e o desenvolvimento da atividade, seja em termos de regulação das ações empreendidas, seja em relação ao planejamento e avaliação do processo de resolução como um todo. Frases do tipo “*eu me lembro das características do losango porque sempre relaciono com a figura da parte amarela da bandeira do Brasil*”, “*a resposta ‘tal’ parece adequada para a área do losango dadas as medidas de suas diagonais*” ou “*aqui na fórmula da área do losango eu divido por dois porque é como se eu tivesse a metade de um retângulo cujos lados são as medidas das diagonais do losango (relacionando essa ideia à sua representação geométrica)*” denotam aspectos metacognitivos na resolução da atividade matemática.

¹⁹ Mais à frente, em 2.5, definiremos tarefas intelectualmente exigentes na perspectiva de Fredy E. González.

González (1996, p.18, tradução nossa), referindo-se a Kagan e Lang²⁰, afirma que

Cognição é um termo amplo que se usa para agrupar, de modo geral, os processos que uma pessoa realiza na: (a) extração de informação do mundo exterior, (b) aplicação de conhecimentos prévios à informação recentemente conhecida, (c) integração de ambas para criar novos conhecimentos, (d) armazenamento da informação na memória para, em seguida, poder recuperá-la e usá-la, e (e) avaliação contínua da qualidade e coerência lógica dos processos e produtos mentais dessa pessoa. Em resumo, a cognição refere-se à aquisição, criação, armazenagem, transformação, criação, avaliação e utilização da informação.

A metacognição pode ser entendida como uma reflexão de segundo nível, no sentido de ser uma operação mental que consiste em elaborar conhecimentos sobre a maneira como ele próprio, o sujeito, constrói os seus conhecimentos. Nesse contexto, a metacognição pode ser entendida como uma atividade mental na qual outros processos mentais constituem-se objetos de reflexão e análise do próprio sujeito.

No entanto, por ser a metacognição também um processo mental assim como o são os processos mentais caracterizados como cognição, podemos nos referir à metacognição como um tipo especial de cognição que, ao mesmo tempo em que é também cognição, tem como característica o “olhar” para a sua própria cognição e refletir sobre ela.

Segundo John Flavell (1976, p.232, tradução nossa), o primeiro a utilizar o termo metacognição, ela consiste:

[...] no conhecimento que uma pessoa tem acerca dos próprios processos e produtos cognitivos ou qualquer outro assunto relacionado à eles, por exemplo, o aprendizado das propriedades relevantes da informação ou dos dados. Assim, pratico a metacognição (metamemória, metaatenção, metalinguagem, etc.) quando me dou conta de que tenho mais dificuldades em aprender A que B; quando compreendo que devo verificar pela segunda vez C antes de aceitá-lo como feito; quando me ocorre que seria bom examinar todas e cada uma das alternativas de uma questão de múltipla escolha antes de decidir qual a melhor, quando resolvo tomar nota de D porque posso esquecer-lo. [...] A metacognição refere-se, entre outras coisas, ao monitoramento ativo e à conseqüente regulação e orquestração desses processos em relação aos objetos cognitivos ou dados sobre os quais eles incidem, normalmente, à serviço de alguma meta ou objetivo concreto.

²⁰ KAGAN; LANG. Psychology and Education. An Introduction. New York: Harcourt, Brace y Jovanovich, Inc., 4, 128-150, 1978.

Para González (1996, p.109, tradução nossa),

Metacognição é um termo usado para designar uma série de operações, atividades e funções cognitivas empreendidas por uma pessoa mediante um conjunto interiorizado de mecanismos intelectuais que permitem solicitar, produzir e avaliar uma informação, ao mesmo tempo em que permitem à pessoa conhecer, controlar e autorregular o seu próprio funcionamento intelectual.

Jou e Sperb (2006, p.178) fazem uma breve apresentação da evolução do termo metacognição desde seu surgimento:

Inicialmente, os trabalhos sobre metacognição detiveram-se apenas no conhecimento que os indivíduos tinham sobre sua cognição, a exemplo do que sabiam sobre sua memória (metamemória) e do que sabiam sobre sua atenção, ou metatenção (Flavell & Wellman, 1977). Definiu-se, então, metacognição como a cognição sobre a cognição, ou como o processo mediante o qual o indivíduo realiza operações cognitivas, além de acompanhá-las enquanto elas acontecem (Flavell, 1987). Posteriormente, nas últimas décadas, novos conceitos foram sendo incorporados ao estudo de metacognição. Por exemplo, o enfoque do Processamento de Informação, proposto pela Psicologia Cognitiva, considera que o sistema cognitivo é provido de um subsistema de controle que tem a finalidade de monitorar, planejar e regular seus processos. Esse controle metacognitivo, na maioria das vezes, e, especialmente em crianças pequenas, acontece com pouca participação consciente. Entretanto, à medida que os processos cognitivos são mais exigidos por situações de vida mais complexas, os processos metacognitivos tornam-se mais conscientes, sendo a metacognição definida, então, como a capacidade de refletir conscientemente sobre os próprios processos cognitivos e metacognitivos (Brown, 1997; Leffa, 1996).

Assim, a metacognição pode ser entendida em termos da consciência, do monitoramento e da avaliação dos próprios processos cognitivos. Segundo Poggioli (1999, p.153, tradução nossa)

a metacognição pode ser definida como o grau de consciência ou conhecimento dos indivíduos sobre suas formas de pensar (processos e eventos cognitivos), os conteúdos (estruturas) e a habilidade para controlar esses processos visando organizá-los, revisá-los e modificá-los em função dos progressos e dos resultados da aprendizagem.

A metacognição pode ser tomada, portanto, ou como produto ou como processo. É entendida como produto quando se refere ao conhecimento acerca da cognição e como processo quando se relaciona com o monitoramento que um sujeito exerce sobre sua própria atividade cognitiva. Desse modo, duas são as

vertentes da metacognição: o conhecimento acerca da cognição e o monitoramento. A vertente que denominamos “conhecimento acerca da cognição” refere-se, de modo geral, ao conhecimento que as pessoas têm sobre os próprios processos e produtos cognitivos, ou seja, ao conhecimento sobre quando, onde, por que e como utilizar os conhecimentos que possuem, sobre a utilidade desses, bem como sobre sua eficácia. A vertente “monitoramento”, por sua vez, refere-se à supervisão ativa e à regulação realizadas pelo sujeito em uma atividade quando visa cumprir um determinado objetivo. Nesse caso, a metacognição refere-se às faculdades de planificar, de dirigir à compreensão e de avaliar o que foi aprendido, ou seja, à faculdade de monitorar a própria atividade cognitiva, em termos das estratégias, algoritmos, representações e conceitos matemáticos em desenvolvimento.

Nesse trabalho de pesquisa, embora centremos nossa atenção na segunda vertente, dado nosso interesse em relação ao monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem Matemática, também apresentamos, brevemente, a metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”, isso porque, como discutiremos no decorrer do próximo tópico, a consciência e os conhecimentos que uma pessoa tem sobre seus próprios conhecimentos (de si mesma, das estratégias e das tarefas) ao mesmo tempo em que possibilitam a realização da atividade, são ampliadas e modificadas nessas atividades, nas experiências do sujeito, em contextos de interação social.

2.3 METACOGNIÇÃO EM SUA VERTENTE “CONHECIMENTO ACERCA DA COGNIÇÃO”

Diante de uma situação problemática, seja ela de Matemática ou não, uma primeira ação do aluno consiste, geralmente, na busca em sua estrutura cognitiva de modos de pensar sobre o problema e resolvê-lo. Nesse sentido, o aluno busca ativar a memória e trazer à consciência conhecimentos prévios que possibilitem a solução do problema. Segundo Flavell e Wellman (1977) são dois os aspectos básicos que interferem na execução de uma atividade: a sensibilidade e o conhecimento das variáveis pessoa, tarefa e estratégia.

De acordo com Werner da Rosa (2011, p.43) a sensibilidade consiste na “[...] capacidade do indivíduo de decidir sobre a necessidade ou não de utilizar

estratégias para desenvolver determinada tarefa. [...] É a tomada de decisão do estudante sobre recorrer ou não ao pensamento metacognitivo”.

O conhecimento das variáveis pessoa, tarefa e estratégia (FLAVELL, 1979) diz respeito às crenças que um indivíduo possui acerca dele mesmo e que, por isso mesmo, influenciam a realização de uma dada atividade. Esse conhecimento “[...] é estabelecido por meio da tomada de consciência das próprias variáveis mencionadas bem como pelo modo como interagem e influenciam no alcance do objetivo cognitivo (WERNER DA ROSA, 2011, p.43)”.

Os conhecimentos das variáveis pessoa, tarefa e estratégia, denominados conhecimentos metacognitivos²¹, são constituídos pelos sujeitos, portanto, na reflexão que esses fazem em relação aos próprios processos cognitivos postos em ação nas situações cotidianas e na resolução de problemas.

O conhecimento da variável pessoa, um dos componentes do conhecimento metacognitivo, refere-se ao conhecimento que uma pessoa apresenta sobre si mesma no que tange às suas limitações e capacidades, às suas crenças e aos seus conhecimentos, assim como à identificação dessas características nas outras pessoas. O conhecimento da variável pessoa pode ser de três tipos: universal, intraindividual e interindividual (FLAVELL, 1979).

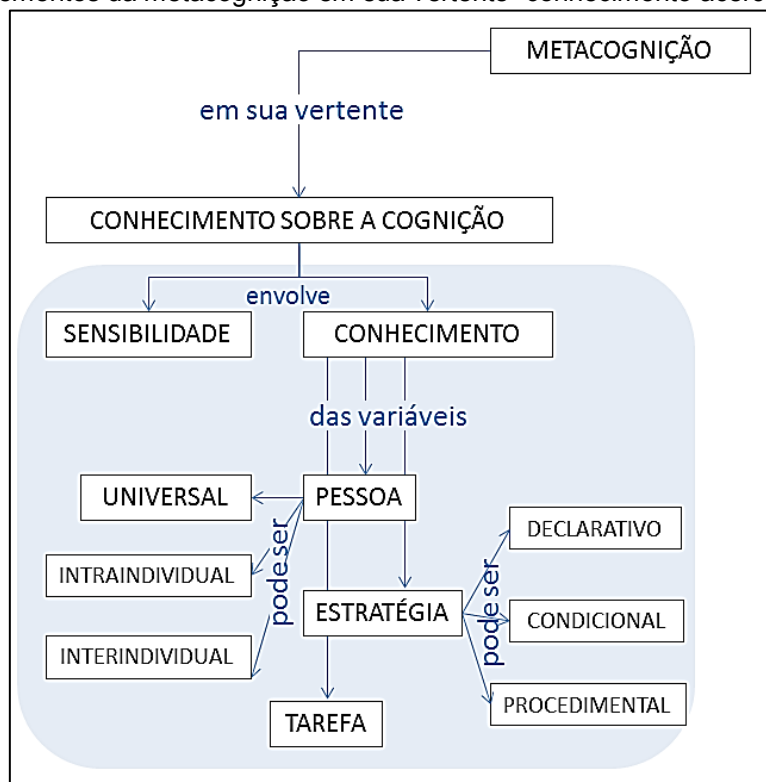
Os conhecimentos universais são aqueles conhecimentos que uma pessoa tem sobre uma característica que, acredita, todos os indivíduos possuem. Reconhecer que “*caminhar faz bem à saúde*” é um exemplo de conhecimento que, geralmente, todas as pessoas possuem, mesmo que por motivos distintos. Os conhecimentos intraindividuais, por sua vez, referem-se aos conhecimentos que as pessoas têm de si mesmas, como quando afirmam que “*precisam anotar uma informação para não esquecê-la*” ou que “*aprendem matemática só de olhar o professor explicando*”. Os interindividuais, conseqüentemente, referem-se aos conhecimentos das pessoas quando estabelecem comparações entre si, tais como “*ele é melhor em Matemática que eu*” ou “*eu só aprendo Matemática se faço muitos exercícios enquanto o fulano aprende só de olhar o professor explicando*”.

²¹ Conhecimento metacognitivo, metaconhecimento e conhecimento acerca da cognição são entendidos, na literatura, como sinônimos.

O conhecimento da variável tarefa diz respeito à identificação das características da tarefa no que tange à sua abrangência, extensão e exigências (WERNER DA ROSA, 2011). Logo, quando um aluno investiga uma situação em Matemática e sabe que precisa recorrer às informações sobre a situação de modo a evitar equívocos causados pelo seu desconhecimento, utiliza o conhecimento das variáveis da tarefa.

Finalmente, o conhecimento da variável estratégia refere-se ao conhecimento que uma pessoa põe em jogo quando se questiona acerca do que precisa ser feito para resolver um dado problema e quais caminhos podem ser seguidos de modo a atingir uma meta. O conhecimento da variável estratégia está relacionado, portanto, ao “quando”, “onde”, “como” e “por que” aplicar uma estratégia em vez de outra. Paris, Lipson e Wixson (1983) afirmam existir três tipos de conhecimentos sobre estratégias, o declarativo (conhecer “que”), o procedimental (conhecer “como”) e o condicional (conhecer “quando”). A Figura 06 representa a constituição da metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”.

Figura 06: Elementos da metacognição em sua vertente “conhecimento acerca da cognição”



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Flavell (1979), Flavell e Wellman (1977) e Paris, Lipson e Wixson (1983)

É possível inferir que os conhecimentos das variáveis pessoa, tarefa e estratégia influenciam fortemente o engajamento de um aluno no desenvolvimento de uma atividade, já que dependendo do julgamento que o aluno fizer dele mesmo na condição de solucionador, do julgamento que fizer da tarefa a partir das características da atividade, bem como dos conhecimentos que possuir em relação às diferentes estratégias, distintas configurações de participação na atividade podem vir a existir. A combinação desses conhecimentos é, inclusive, o ponto de partida da resolução de um problema.

2.4 METACOGNIÇÃO EM SUA VERTENTE “MONITORAMENTO”

O monitoramento cognitivo, outra vertente para o termo metacognição (FLAVELL, 1976; TOVAR-GÁLVEZ, 2008; LANZ, 2006; COHORS-FRESENBERG, 2010; DOLY, 1999), refere-se ao acompanhamento que um sujeito faz do próprio processo cognitivo quando realiza uma tarefa, no sentido de gerir esse processo, desde o planejamento de ações e estabelecimento de metas até o alcance dessas metas. Isso porque a realização de uma atividade requer o uso de instrumentos e signos e tal uso precisa ser controlado, assim como uma análise da situação em termos do que tem sido alcançado, comparando os resultados aos objetivos estabelecidos, precisa ser atividade rotineira. Segundo González (1998, p.64, tradução nossa)

[...] realizar uma ação metacognitiva consiste em converter a própria atividade cognitiva em um objeto sobre o qual se exerce algum tipo de ação cognitiva: monitorar (ou seja, supervisionar, analisar, revisar, modificar), e controlar (ou seja, dirigir, manter sobre o domínio); essas ações podem ocorrer concorrentemente com o desenvolvimento da atividade (interrogatório autorreflexivo) ou de modo retrospectivo (recordação estimulada).

Segundo González (1998) monitoramento e controle são ações cognitivas complementares que denotam a vertente processual da metacognição. Nessa vertente, são processos da gestão metacognitiva de uma tarefa as operações de antecipação, tais como a planificação e a previsão; as operações de avaliação-regulação, como quando o monitoramento intenta controlar e avaliar se o caminho planejado para alcançar o objetivo está sendo executado, se há desvios em relação

a esse caminho, se é importante ou não manter o rumo; e as operações de avaliação final dos resultados obtidos em função do objetivo almejado (DOLY, 1999).

Flavell, em seu artigo “Metacognition and cognitive monitoring: a new área of cognitive – developmental inquiry” de 1979, propõe um modelo de monitoramento cognitivo segundo o qual o monitoramento acontece pela ação e pela interação entre quatro classes de fenômenos, a saber: conhecimento metacognitivo (ou conhecimento acerca da cognição como já apresentamos), experiências metacognitivas, objetivos cognitivos e ações cognitivas. De modo resumido, Flavell (1979, p.906-907, tradução nossa) apresenta esses quatro componentes do monitoramento cognitivo:

O conhecimento metacognitivo é aquele segmento de seus conhecimentos de mundo armazenados (quando criança ou adulto), que tem feito as pessoas serem criaturas cognitivas, com suas diversas tarefas, objetivos, ações e experiências. [...] As experiências metacognitivas são quaisquer experiências cognitivas ou afetivas, que acompanham ou pertencem a qualquer empreendimento intelectual. [...] Objetivos (ou tarefas) referem-se aos objetivos de um empreendimento cognitivo. Ações (ou estratégias) referem-se às cognições ou outros comportamentos utilizados para consegui-las.

Assim, os conhecimentos metacognitivos referem-se, como já apresentamos em 2.2, aos conhecimentos ou crenças que uma pessoa tem sobre si mesma na condição de realizadora de uma tarefa, sobre a tarefa em si (ou atividade), sobre as estratégias, bem como sobre a combinação desses três componentes, de tal modo que as possíveis combinações desses componentes face à realização de uma atividade implicam em um primeiro passo na sua execução assim como determina o engajamento de uma pessoa nessa execução.

De acordo com Flavell (1979) as experiências metacognitivas são experiências conscientes, afetivas e cognitivas, que acompanham um empreendimento cognitivo (antes, durante e/ou após tal empreendimento). Surgem, principalmente, quando o sujeito vivencia alguma dificuldade ou a falta de compreensão de algo.

Os objetivos cognitivos são os responsáveis por impulsionar e mover a realização de ações cognitivas (Flavell, 1979). É a partir de um objetivo cognitivo, tal

como realizar um cálculo, construir um gráfico, que um sujeito busca em seus conhecimentos metacognitivos (que abarcam as experiências metacognitivas) maneiras de pensar a atividade e realizá-la.

A ação cognitiva, por sua vez, pode assumir um caráter cognitivo ou um caráter metacognitivo (FLAVELL, 1979). Quando a ação visa atingir um objetivo cognitivo, tal como encontrar as raízes de um polinômio, a ação é dita cognitiva. Por meio dela, o aluno produz resultados cognitivos, tais como a compreensão do assunto raízes de um polinômio e o cálculo das raízes de um polinômio. Quando a ação cognitiva intenta avaliar a situação em estudo, monitorar o processo de resolução, verificar se o modo como está conduzindo a resolução tende a atingir o objetivo almejado, a ação é dita metacognitiva. Assim como a ação do tipo cognitiva, a ação do tipo metacognitiva também produz resultados cognitivos, no caso específico das raízes do polinômio, os mesmos resultados já apresentados. No entanto, para além de resultados cognitivos, a ação do tipo metacognitiva produz também experiências metacognitivas, que por sua vez, agem e modificam os conhecimentos metacognitivos que, novamente, influenciam os objetivos e ações cognitivos.

Segundo Flavell (1987) trata-se de ações (ou estratégias) metacognitivas sempre que o que está em jogo é a avaliação do progresso cognitivo numa dada situação, ou seja, a avaliação da eficácia das estratégias cognitivas. Essas últimas, por sua vez, segundo o autor, têm por finalidade alcançar um objetivo cognitivo e, por isso, conduzem ao desenvolvimento cognitivo. Podem surgir em decorrência das estratégias metacognitivas em face de uma avaliação da situação (Flavell, 1987).

Portanto, as estratégias “[...] são cognitivas quando usadas para fazer progredir a atividade intelectual de modo a alcançar um objetivo e são metacognitivas quando a função é monitorar esse processo” (LANZ, 2006, p.8).

Uma ação importante para o automonitoramento consiste na formulação de perguntas. Segundo Campanario (2000, p.378)

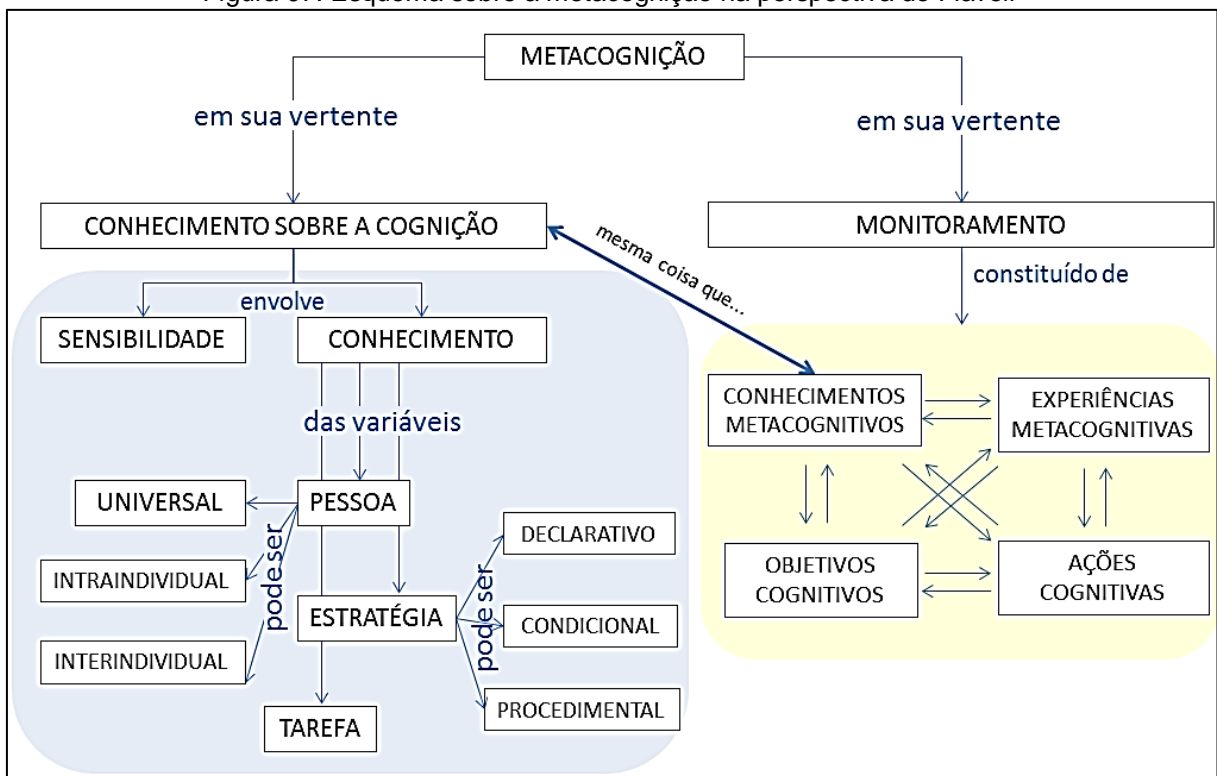
[...] muitas vezes pode ser tão ou mais interessante que os alunos sejam os encarregados por formular suas próprias perguntas a outros alunos, ao invés de responder as perguntas que formula o professor. A formulação de perguntas por parte alunos sobre um tema ou um problema concreto os

obriga a concentrar-se no conteúdo e a representar mentalmente a situação com um maior grau de detalhes. Com esta atividade se almeja um processamento nas informações com maior profundidade, uma vez que os alunos são levados a sistematizar seus conhecimentos e a contrastar o grau de consistência e compreensão dos mesmos.

Os quatro componentes da atividade de monitoramento cognitivo (conhecimento metacognitivo, experiência metacognitiva, objetivo cognitivo e ações cognitivas) estão intimamente relacionados, de modo que só é possível distingui-los do ponto de vista teórico. A relação entre esses componentes é dinâmica e cada um deles modifica-se sempre que um novo empreendimento cognitivo é realizado pelo sujeito.

Na figura 07 apresentamos um esquema acerca da metacognição em suas duas vertentes – conhecimento acerca da cognição e monitoramento.

Figura 07: Esquema sobre a metacognição na perspectiva de Flavell



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em Flavell (1979), Flavell (1987), Flavell e Wellman (1977) e Paris, Lipson e Wixson (1983).

Tovar-Gálvez (2008, p.3), também considerando a metacognição numa perspectiva processual, a define como uma estratégia²² que abarca três dimensões, por meio das quais o sujeito atua e desenvolve as atividades:

a) dimensão de reflexão na qual o sujeito reconhece e avalia suas próprias estruturas cognitivas, possibilidades metodológicas, processos, habilidades e desvantagens; b) dimensão de administração durante a qual o indivíduo, já consciente de seus estados, procede a conjugar esses componentes cognitivos diagnosticados com o objetivo de formular estratégias para dar solução à tarefa; e c) dimensão de avaliação, através da qual o sujeito valida a implementação de suas estratégias e o grau em que se está alcançando o objetivo cognitivo. De igual maneira, o autor sugere que, através de uma estratégia metacognitiva, o sujeito constrói ferramentas para dirigir suas aprendizagens e, por último, adquirir autonomia.

Embora o autor refira-se à dimensão de reflexão como de incumbência do docente ao selecionar instrumentos ou atividades que permitam valorizar os conhecimentos prévios que possuem os estudantes e que se relacionam com a solução da situação problema, consideramos essa dimensão como constituinte da atividade do aluno também, como quando o sujeito, reconhecendo-se solucionador e tomando a responsabilidade de resolução do problema para si, busca avaliar suas próprias estruturas cognitivas como ponto de partida e como condição necessária para poder pensar sobre o problema.

A dimensão de administração, por sua vez,

[...] implica que o sujeito, uma vez ciente dos estados iniciais de seus componentes cognitivos, articule esses componentes nas estratégias para dar solução a uma tarefa vislumbrada. [...] as decisões que se tomam para atuar adiante, assim como as estratégias de execução que se formulam, estão fundamentadas nos resultados da avaliação inicial e tem sua origem na construção conjunta entre estudante e docente (TOVAR-GÁLVEZ, 2008, p.5, tradução nossa).

A administração ocorre, portanto, baseada no planejamento de ações e com vistas a cumprir um objetivo cognitivo (ações pertinentes à dimensão reflexão),

²² Segundo González (2009, p.132) “[...] una estrategia constituye la puesta en juego de una organización sistémica y social, cultural e históricamente situada, de los recursos que dispone una persona (u organización) para alcanzar un fin (meta, propósito), previamente establecido. Así que, cuando el fin se refiere al logro de capacidades, competencias, habilidades, destrezas, conocimientos, que hagan viable la ejecución futura de determinadas acciones, entonces se trata de una estrategia de aprendizaje”.

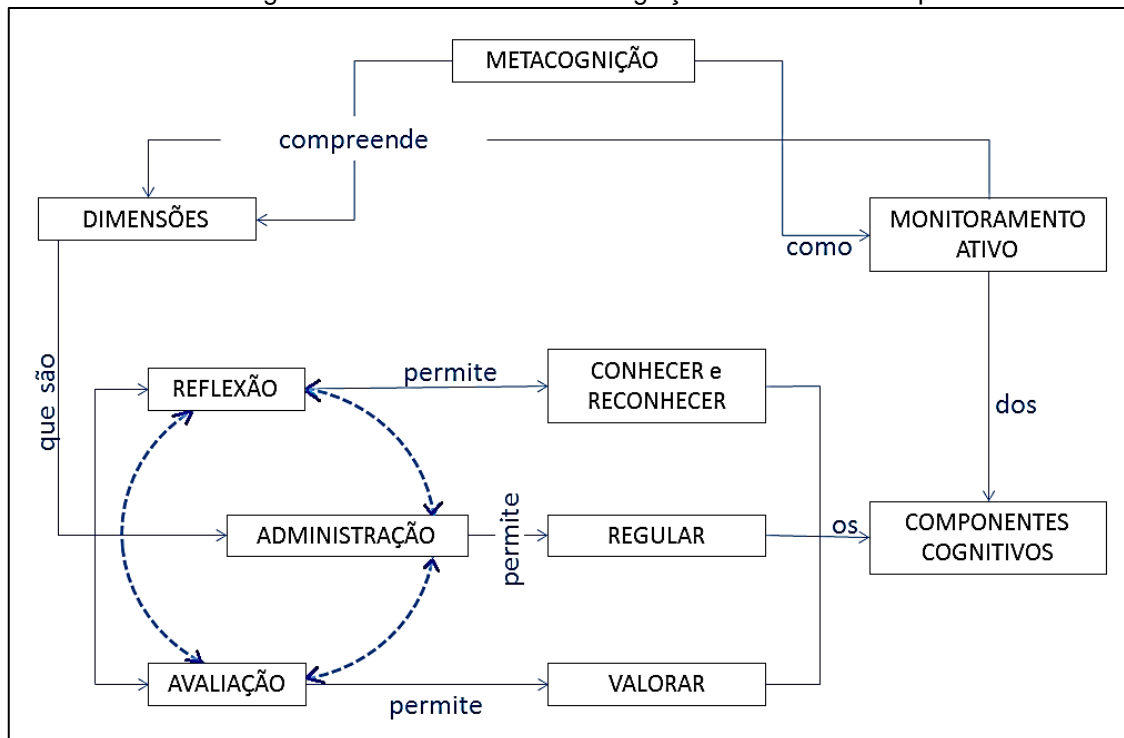
e consiste nas estratégias e nas decisões tomadas pelo sujeito no decorrer da atividade. Finalmente, a dimensão de avaliação

[...] implica na definição de critérios que permitam determinar se o objetivo cognitivo está sendo alcançado, se se está chegando à resolução do problema, se a metodologia proposta e as atividades planejadas estão indo ao encontro do planejado; significa estabelecer um sistema para regular a execução de estratégias (TOVAR-GÁLVEZ, 2008, p.5).

Embora possa parecer que primeiro utiliza-se a dimensão de reflexão, depois a de administração e finalmente a de avaliação, sem que uma dimensão interfira no momento em que outra esteja sendo utilizada, essas dimensões se combinam e atuam durante todo o desenvolvimento de uma atividade, apresentando, portanto, um caráter dinâmico.

A metacognição pode ser representada considerando suas dimensões, embora sem abarcar toda a complexidade do fenômeno de aprendizagem, como no esquema da Figura 08.

Figura 08: Dimensões da Metacognição em sua vertente processual



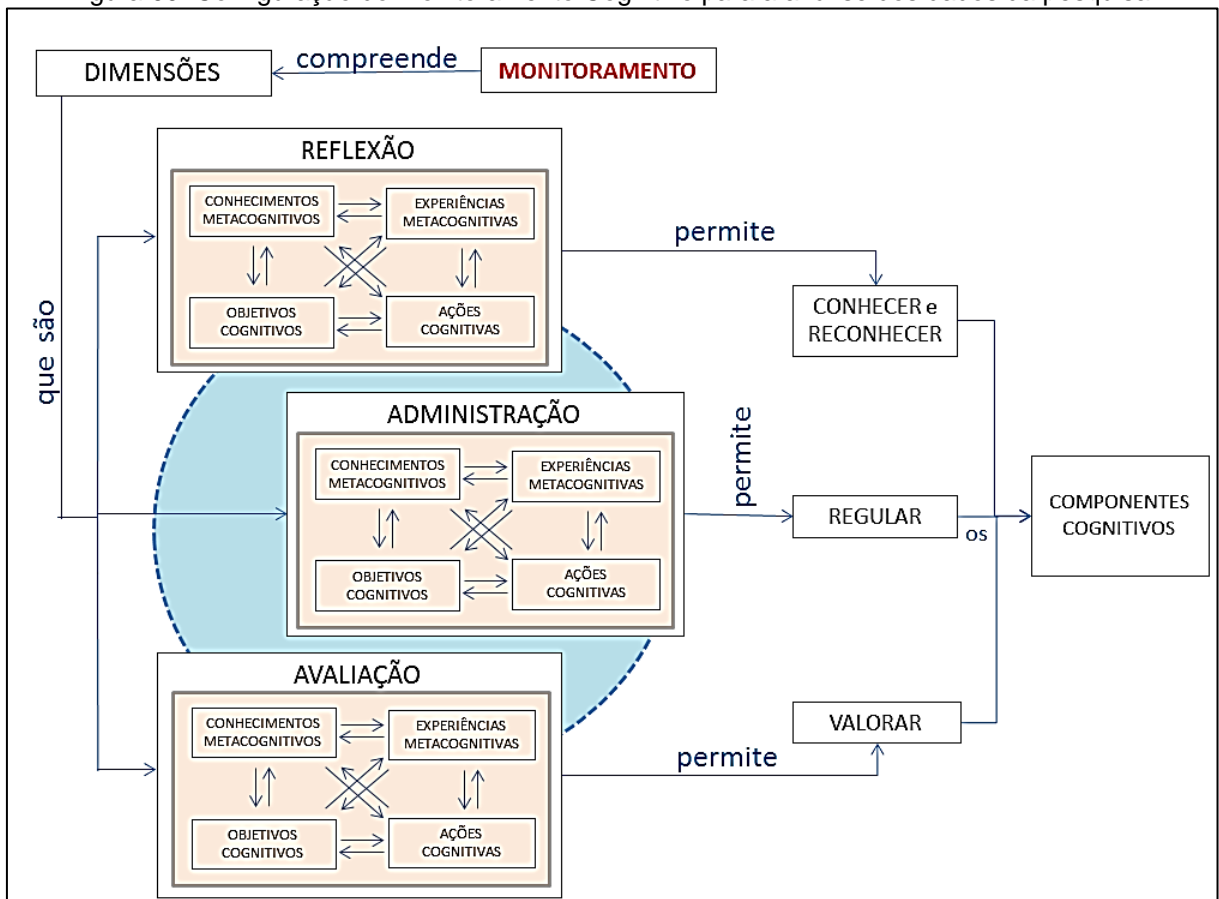
Fonte: Adaptado de Tovar-Gálvez (p.3, 2008)

A metacognição, entendida como monitoramento cognitivo, possibilita que um sujeito torne-se, dadas as suas experiências metacognitivas e a evolução das mesmas, um administrador da própria atividade cognitiva, na medida em que transforma tal atividade em objeto de reflexão e análise. Nesse caso, o sujeito torna-se mediador de si mesmo e passa a usufruir dos conhecimentos construídos para potencializar suas aprendizagens. Segundo Grangeat (1999, p.155),

[...] quando o sujeito sabe que pode controlar a sua ação e, portanto, que pode influenciar a natureza dos seus resultados, e que as interações sociais o vão apoiar nesta regulação, acresce a sua motivação para aprender em vez de pretender sancionar sistematicamente os seus erros.

A partir da definição de metacognição de Flavell (1976), dos elementos que constituem o monitoramento segundo Flavell e Wellman (1977) e das dimensões atribuídas à metacognição quando em sua perspectiva processual de acordo com Tovar-Gálvez (2008) é que tomamos, nessa tese, a seguinte configuração do monitoramento cognitivo (Figura 09).

Figura 09: Configuração do Monitoramento Cognitivo para a análise dos dados da pesquisa



Fonte: elaborado pelo autor baseado em Tovar-Gálvez (2008), Flavell (1976) e Flavell e Wellman (1977)

2.5 CONFLUÊNCIAS ENTRE AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO – ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Um ensino que tenha como uma de suas metas o monitoramento cognitivo, deve proporcionar aos alunos momentos nos quais eles possam discutir com os outros, de modo colaborativo, os planos de ação elaborados, os encaminhamentos trilhados, as avaliações e validações das estratégias utilizadas ao resolver um problema, bem como as influências de um conceito matemático na solução, as características do conceito matemático estudado e as relações desse conceito com outros da própria disciplina ou de outras. Na interação social estabelecida pelos alunos ao desenvolverem atividades, tais como as atividades de Modelagem Matemática, é que as práticas de monitoramento são suscitadas. O refletir sobre as influências dessas práticas no êxito ou não êxito de uma atividade de matemática pode contribuir para a constituição do conhecimento metacognitivo do aluno. Para Grangeat (1999, p.156, tradução nossa),

[...] é conveniente instaurar, na aula, momentos durante os quais os alunos precisam refletir os processos intelectuais que puseram em ação no curso de atividades em cuja resolução obtiveram êxito. Tal reflexão pode conduzi-los progressivamente a identificar as estratégias mentais realmente utilizadas e a associá-las à boa realização da tarefa. [...] Trata-se [...] de levar o aluno a experimentar que ele pode influenciar os produtos desta atividade e, finalmente, de lhe mostrar que pode enriquecer o seu repertório ao coordenar as suas concepções com as de outros.

Nesse sentido, um professor, ao escolher diferentes atividades para uma aula de Matemática, para além de pensar nas investigações e conceitos matemáticos que podem ser requeridos dos alunos nessas atividades, precisa pensar, ainda, nas competências metacognitivas que essas tarefas podem exigir. Segundo Develay (1999b, p.8) a metacognição representa, para aquele que aprende, a possibilidade

[...] de se distanciar do que faz, das situações nas quais está implicado a fim de compreender os meios, as entradas e as saídas, de ter assim consciência, de se mostrar capaz de pensar o seu pensamento. Desenvolver atividades metacognitivas é oferecer aos alunos a possibilidade de se tornarem independentes das situações cognitivas que o professor criou, é favorecer, através da descentralização afetiva e da descentralização cognitiva, o distanciamento que favorece a tomada de consciência. Assim, o ofício do professor consiste em estabelecer situações de aprendizagem que favoreçam a apropriação de saberes. Mas é ainda

mais, é permitir que os alunos analisem as suas representações, criem momentos de recuo em relação às suas ações a fim de compreenderem os meios, os móveis e as características. Tempo de explicitação, momento de lucidez individual que pode enriquecer uma turma com as particularidades de cada um.

Não se trata de almejar que os alunos tenham “receitas” sobre como agir frente a contextos específicos, quais ferramentas matemáticas e/ou quais conceitos matemáticos devem utilizar a partir de “pistas” expressas nesses contextos. Trata-se, ao contrário, de almejar que os alunos aprendam e tornem-se autônomos frente às situações problemáticas vivenciadas no ambiente escolar. Segundo Zuliani e Hartwig (2009, p.363) “[...] quando o aprendiz passa a tomar decisões e controlar as variáveis numa atividade de aprendizagem, suas possibilidades de assumir o controle crescem muito”.

As atividades, por sua vez, devem ser aquelas nas quais os alunos tenham tempo para pensar, oportunidade para falar e ouvir, e condições para refletir sobre sua própria “prática de pensar”, ou seja, condições de refletir sobre seus próprios processos mentais e comunicá-los aos outros. Trata-se de promover, em sala de aula, significativas experiências metacognitivas:

É preciso que o sujeito opere experiências metacognitivas que permitam um controle sobre a sua atividade de modo que ele possa compreender e explicitar as relações entre os procedimentos utilizados, o objetivo visado e o desempenho realizado, o que pode ser obtido com a ajuda de um agente exterior (DOLY, 1999, p.26).

Diante da necessidade de promover significativas experiências metacognitivas aos alunos e de propor situações problemáticas que requeiram dos alunos mais que um mero repetir de procedimentos pré-estabelecidos pelo professor é que consideramos haver confluências entre a Modelagem Matemática e as práticas de monitoramento.

Entendemos que a Modelagem Matemática pode ser investigada em termos do monitoramento que os alunos realizam quando desenvolvem atividades desse tipo, já que dentre as ações dos alunos, como já apresentamos em 1.3, estão o planejamento, a síntese, a validação, a matematização e a avaliação, por exemplo. – todas ações cognitivas sobre as quais devem incidir a reflexão e a análise dos

alunos para haver o desenvolvimento do conhecimento metacognitivo e a aprendizagem. Nesse sentido é que intentamos investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática no que diz respeito ao monitoramento cognitivo dos estudantes.

Atribuímos a essa questão (O que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes?) uma especial importância, por acreditarmos, assim como González (1998, p.109, tradução nossa), que

[...] se os déficits na aprendizagem de algum modo se associam com os déficits do funcionamento metacognitivo, então, ao melhorar ou incrementar positivamente este último, é provável que a pessoa melhore sua aprendizagem ou incremente seus níveis de execução quando realizam tarefas que requeiram algum tipo de exigência intelectual.

Logo, as atividades que os alunos desenvolvem em aula precisam constituir-se em verdadeiras tarefas intelectualmente exigentes, dentre as quais consideramos a Modelagem Matemática. Para González (2009, p.134, tradução nossa)

as tarefas intelectualmente exigentes [...] são aquelas atividades que propiciam o esforço de raciocínio; ou seja, não são realizadas com o mero exercício de memorizações, com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrário, devem merecer a realização de certo esforço intelectual e, além disso, requerer o exercício de variadas habilidades cognitivas básicas; por exemplo, o raciocínio, a leitura, a escrita e/ou o cálculo, o manejo de relações quantitativas ou simbólicas.

Segundo o autor, a metacognição se manifesta frente às tarefas intelectualmente exigentes. Isso porque esse tipo de tarefa exige uma reflexão introspectiva (autoreflexão) que coloca as exigências específicas da tarefa como objetos da ação cognitiva do aluno (GONZÁLEZ, 1998).

Segundo González (2009, p.135, tradução nossa) as tarefas intelectualmente exigentes envolvem, de modo geral, algumas fases:

a primeira fase consiste em construir uma representação da tarefa a partir do entendimento de suas exigências, o que permite selecionar a informação que se considera pertinente e adequada para a realização da tarefa, ou seja, nessa fase a intenção é compreender a tarefa, estabelecer sua essência. [...] A segunda fase consiste em localizar a informação pertinente

e apropriada para a tarefa, no contexto dos conhecimentos que já se possui [...] A terceira fase refere-se à execução do plano de ação. Durante esse processo o sujeito deve estar atento ao que faz, ao como realiza suas ações e à incidência que tem cada uma dessas ações no contexto global da tarefa. [...] Finalmente, na quarta fase, faz-se uma avaliação global do processo como um todo, comparando a realização com os resultados previstos. Ao longo de toda a tarefa, o aluno há de ter em conta o “curso” que segue sua própria atividade cognitiva, de modo que possa monitorá-la.

No contexto da Modelagem Matemática essas fases condizem com as ações cognitivas dos alunos, apresentadas em 1.3. Tais ações acontecem, em atividades de Modelagem, no âmbito de um grupo. Nesse sentido, as diferentes estratégias de resolução, as diferentes impressões sobre o tema investigado, bem como os diferentes planos de ação, são constructos coletivos, que interferem e monitoram a todos os seus componentes coletivamente e, como consequência, individualmente (e vice-versa). Quanto a isso, Gusmão, Font e Cajaraville (2009, p.40) relatam:

[...] observamos a importância do diálogo em grupo para favorecer desenvolvimentos de estruturas de pensamento, principalmente de ordem metacognitivo. Os distintos caminhos que oferecem uns participantes a outros, durante debate/diálogo, proporcionam discussões, reflexões ativas, comprovação de hipóteses, ideias emergentes, estabelecimento de relações... e mais oportunidades para aprender cognitiva e metacognitivamente. O diálogo em grupo possibilita processos de regulação e supervisão próprios [...]. Uns regulam aos outros e a si mesmos.

O trabalho em grupo possibilita, assim, que os alunos monitorem as atividades cognitivas uns dos outros, já que, geralmente, partilham de um mesmo objetivo cognitivo: solucionar um problema que, por algum motivo, interessa a todos.

Os trabalhos em grupo, por sua vez, contribuem para a constituição do conhecimento metacognitivo do sujeito e, embora exista correlação entre o desempenho matemático e a perícia metacognitiva advinda do conhecimento metacognitivo, tal perícia não implica em garantia de sucesso na realização matemática (COHORS-FRESENBORG et al, 2010; YIMER e ELLERTON, 2010).

Portanto, um sujeito que apresenta um monitoramento cognitivo em uma atividade pode não apresentar, necessariamente, em outra. Em pesquisa sobre as

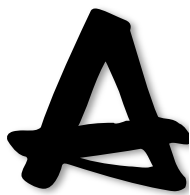
ações cognitivas e metacognitivas de professores em formação inicial, por exemplo, Yimer e Ellerton (2010, p.250, tradução nossa) verificaram que

[...] os processos de solução utilizados pelos diferentes alunos trabalhando com o mesmo problema mostraram significativamente diferentes características individuais, graus de compreensão, profundidade de análise e controle. Um mesmo aluno apresentou diferentes níveis de sofisticação e comportamentos metacognitivos nos diferentes problemas.

Concebendo o monitoramento cognitivo como um constructo coletivo, histórico, social e cultural, e tomando as atividades de Modelagem Matemática como àquelas nas quais o monitoramento pode emergir devido às características dessas atividades e ao trabalho em grupo propiciado por elas, é que apresentamos no próximo capítulo a ideia de mediação semiótica de Vygotsky, segundo a qual a metacognição pode ser entendida, ainda, como uma dentre as funções psicológicas superiores (conceito abordado no próximo capítulo).

CAPÍTULO III

MEDIAÇÃO SEMIÓTICA



mediação semiótica, conceito da psicologia histórico-cultural, é o tema tratado nesse terceiro capítulo. Nele, apresentamos o entendimento de mediação semiótica, bem como as implicações desse entendimento na internalização dos signos, dos conceitos, dos algoritmos, das estratégias e das práticas de monitoramento. Essas práticas são entendidas, tal como expressamos no capítulo anterior, como constructos sociais datados historicamente e localizados culturalmente e, portanto, resultado da interação social. Nesse contexto é que abordamos, nesse capítulo, as ideias de mediação semiótica, zona de desenvolvimento proximal e internalização, segundo Vygotsky.

ÍNDICE

- 3.1 Introdução
- 3.2 Mediação Semiótica
- 3.3 Zona de Desenvolvimento Proximal
- 3.4 A teoria da Mediação Semiótica e as práticas de monitoramento – relações percebidas

3.1 INTRODUÇÃO

Ao refletir acerca da nossa trajetória escolar é frequente lembrarmos de episódios de aulas, de Matemática especialmente, aqueles nos quais os alunos se preocupavam mais em adivinhar uma operação a realizar e o resultado correto, do que em compreender o conteúdo matemático propriamente dito. Tal posicionamento dos alunos frente às situações apresentadas pelo professor sinaliza que, muitas vezes, o que esperava esse professor de seu aluno era, de fato, apenas a apresentação de uma resposta correta, como se isso fosse garantia da aprendizagem. A aprendizagem era inferida, nesse contexto, a partir da repetição pelo aluno de algo já exposto pelo professor, como se os conceitos pudessem ser aprendidos meramente pela exposição de alguém. No entanto, consideramos, assim como expressa Vygotsky (2008, p.104), que

[...] o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante a de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo.

Embora nosso entendimento seja de que a aprendizagem depende essencialmente da ação do indivíduo que aprende, seja ao resolver um problema ou ao refletir acerca de uma apresentação ou leitura de um texto, por exemplo, consideramos que essa ação se faz na interação desse indivíduo com os outros – os demais alunos da turma, o professor, um livro, ou até mesmo “as vozes” que ecoam em sua mente, advindas de relações vivenciadas em momentos anteriores –. Nesse sentido, “[...] construir conhecimentos implica numa ação partilhada, já que é através dos outros que as relações entre sujeito e objeto do conhecimento são estabelecidas” (REGO, 2011, p.109).

Essa perspectiva de aprendizagem corresponde à teoria da mediação semiótica de Lev Seyonovitch Vygotsky, segundo a qual as funções psicológicas

superiores²³ têm origem nos processos sociais, ou ainda, para a qual o indivíduo e o conhecimento são essencialmente sociais. Segundo Duarte (1996, p.35), considerar o indivíduo e o conhecimento como essencialmente sociais, “[...] significa, dentre outras coisas, considerar que o indivíduo não pode elaborar seu conhecimento individual a não ser apropriando-se do conhecimento historicamente produzido e socialmente existente”.

A partir da teoria vygotskyana é que apresentamos nesse capítulo, portanto, a ideia de mediação semiótica, de zona de desenvolvimento proximal, de internalização, de aprendizagem e de desenvolvimento, bem como algumas das implicações desses conceitos para o estudo que realizamos. Não se trata de um estudo aprofundado da teoria Vygotskyana, mas da utilização de alguns dos conceitos da teoria histórico-cultural com vistas ao desenvolvimento desse trabalho de tese, principalmente no que tange à compreensão de como se dá a internalização, a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo.

3.2 MEDIAÇÃO SEMIÓTICA

Quando uma criança pequena vê uma vela acesa e se queima pondo a mão no seu fogo, vivencia a experiência de uma “ação não mediada”. Quando, em uma segunda oportunidade, essa mesma criança se depara novamente com uma vela acesa, é possível que não mais coloque a mão sobre sua chama. Isso pode acontecer porque a criança é mediada pela lembrança da experiência vivida ao se queimar em um momento anterior. Nesse segundo momento, entendemos que a ação é mediada pela consciência da criança referente ao fato vivido, mediada pela lembrança da dor. Essa criança poderia até mesmo não ter se queimado se fosse alertada por um adulto ou criança mais experiente. Nesse caso, a ideia “*se ponho a*

²³ Segundo Rego (2011), as funções psicológicas superiores “[...] consistem no modo de funcionamento tipicamente humano, tais como a capacidade de planejamento, memória voluntária, imaginação, etc. Esses processos mentais são considerados sofisticados e “superiores”, porque referem-se a mecanismos intencionais, ações conscientemente controladas, processos voluntários que dão ao indivíduo a possibilidade de independência em relação às características do momento e espaço presente. [...] esses processos não são inatos, eles se originam nas relações entre indivíduos humanos e se desenvolvem ao longo do processo de internalização de formas culturais de comportamento. Diferem, portanto, dos processos psicológicos elementares (presentes na criança pequena e nos animais), tais como, reações automáticas, ações reflexas e associações simples, que são de origem biológica” (p.39).

mão no fogo da vela, me queimo” seria aprendida pela mediação de outra pessoa, a partir da reflexão que faz da informação recebida de outra pessoa.

Em Matemática, especificamente, tudo o que aprendemos, desde o nome dado a certo objeto matemático, a sua conceitualização, até as suas diferentes representações, depende da mediação “do outro”, mediação que se dá nas interações sociais que realizamos nos espaços em que vivemos. Isso porque os conceitos, inclusive os matemáticos, são, por natureza, construtos sociais, históricos e culturais e, como tal, só podem ser internalizados por meio da mediação “do outro”, a qual se efetiva nas interações do sujeito.

É por meio de elementos de mediação, portanto, que um sujeito internaliza conceitos, atividades e comportamentos sócio-históricos e culturais. Esses elementos são construídos nas relações humanas e para as relações humanas. É o caso dos *instrumentos* (elementos que regulam as ações sobre os objetos, tais como um lápis, por exemplo) e dos *signos* (elementos que regulam as ações sobre os psiquismos das pessoas, tais como o numeral 30, por exemplo) – elementos do ambiente humano carregados de significado cultural – (VYGOSTKY, 2007). Esses signos têm tanto a função de tornar presente o que é da cultura e está ausente, quanto a função de dirigir a ação dos outros e a própria ação. Para Rego (2011, p.50) “[...] o signo pode ser considerado aquilo (objeto, fenômeno, gesto, figura ou som) que representa algo diferente de si mesmo. Ou seja, substitui e expressa eventos, ideias, situações e objetos, servindo como auxílio da memória e da atenção humana”.

O signo pode ser entendido, portanto, como o instrumento por meio do qual conduzimos nossas ações mentais em direção à solução de um problema ou encaminhamento de uma situação (VERONEZI, DAMASCENO e FERNANDES, 2005). Tais signos, construídos a partir da cultura, é que constituem a consciência humana. Para Rivière (1987, p.93, tradução nossa),

[...] os signos, que são utensílios especiais que mediam a relação do homem com os outros e consigo mesmo. Porém, sucede que a consciência humana, em seu sentido mais pleno, é precisamente “contato social consigo mesmo”, e por isso tem uma estrutura semiótica, está constituída por signos, tem literalmente uma origem cultural, e é ao mesmo tempo uma função instrumental de adaptação. Por isso diz Vygotsky que “a análise dos signos” é o único método adequado para investigar a consciência humana.

O registro escrito, assim como a palavra, pensada e falada, é um signo. A palavra pode ser considerada um signo privilegiado, carregado de significações que foram, aos poucos, constituindo o que o signo é para quem o utiliza. Nesse sentido, quando um sujeito utiliza uma palavra num dado contexto, tem nessa palavra muitas “vozes” representadas, ou seja, a palavra é carregada de significações do entorno cultural da pessoa que a utiliza. Isso acontece “[...] exatamente porque um pensamento não tem um equivalente imediato em palavras, a transição do pensamento para a palavra passa pelo significado. [...] A comunicação só pode ocorrer de forma indireta” (VYGOTSKY, 2008, p.186).

Ao utilizar um signo no contexto de uma interação, como a palavra ou o gráfico de uma função, por exemplo, ao mesmo tempo em que o sujeito influencia de algum modo o meio social no qual se encontra e realiza uma mediação via o signo utilizado, ele também pode incorporar a esse signo novas significações ou reestruturar ideias já existentes, via a interação estabelecida com os outros. O que acontece, nesse caso, é o que denominamos “mediação semiótica”. Isso implica em considerar a dinamicidade das significações atribuídas pelo sujeito ao signo e a ideia de que o sujeito, para além de ser um produto do seu contexto social, também é um agente ativo na criação desse contexto. Segundo Marchesi, Coll e Palácios (2004, p.103)

[...] os signos têm um caráter social, são produto das práticas culturais. O acesso a eles por parte dos indivíduos é assegurado por sua vinculação a uma cultura específica. A ação mediada é sempre uma ação situada, dependente do meio no qual ocorre.

Desse modo, a produção de conhecimentos em matemática, o acesso aos signos matemáticos e às significações desses signos, na perspectiva da psicologia histórico-cultural, se dá na interação social e via a mediação semiótica. Segundo Rego (2011, p.110) as interações sociais

[...] passam a ser entendidas como condição necessária para a produção de conhecimentos por parte dos alunos, particularmente aquelas que permitem o diálogo, a cooperação e troca de informações mútuas, o confronto de pontos de vista [...]. Cabe, portanto, ao professor, não somente permitir que elas ocorram, como também promovê-las no cotidiano das salas de aula.

As atividades de Modelagem Matemática constituem-se uma possibilidade para a promoção de interações sociais na sala de aula, já que caracterizam-se como atividades essencialmente colaborativas, nas quais os alunos e professor conversam em relação ao encaminhamento do desenvolvimento da atividade e em relação aos conceitos matemáticos que podem ou não ser utilizados de modo a validar uma estratégia, ressignificar um conceito e resolver um problema. Nesse sentido, a aula com o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem pode ser considerada um espaço privilegiado de interação social em que a palavra falada, o diálogo entre os sujeitos, os registros escritos, são instrumentos necessários para a concretização da atividade. Nesse sentido, as atividades de Modelagem Matemática podem possibilitar que instrumentos e signos correspondentes à Matemática e às práticas de monitoramento sejam internalizados pelos sujeitos via a mediação semiótica.

Em Modelagem Matemática, ou mesmo em outras atividades de um evento educativo, os alunos devem ter a oportunidade de falar, já que é por meio da exposição de como pensam determinado assunto que se dará a interação e a mediação. Para Moreira (1999, p.119) “interação e intercâmbio implicam, necessariamente, que todos os envolvidos no processo ensino-aprendizagem devam falar e tenham a oportunidade de falar”.

É por meio da possibilidade de discutir diferentes modos de pensar o problema que distintos encaminhamentos podem ser dados para a resolução. Os signos, ao mesmo tempo em que conferem significado ao percurso do resolver um problema, ganham significados nesse percurso, o que denota que a interação determina o encaminhamento de uma resolução e as conseqüentes possibilidades de aprendizagem suscitadas pelo problema. Nesse sentido, o professor é um importante agente na interação já que dentre os diferentes sujeitos é ele quem já internalizou significados socialmente compartilhados referentes à temática em questão. Para Moreira (1999)

em um episódio de ensino, o professor, de alguma maneira, apresenta ao aluno significados socialmente aceitos, no contexto da matéria de ensino, para determinado signo – da Física, da Matemática, da Língua Portuguesa e da Geografia. O aluno deve, então, de alguma maneira, “devolver” ao professor o significado que captou (p.118-119).

A internalização, por sua vez, pode ser entendida como uma reconstrução interna de uma operação externa. É por meio dela que se dá o desenvolvimento cognitivo do sujeito. Em outros termos, o desenvolvimento cognitivo pode ser entendido como a conversão das relações sociais em funções mentais (MOREIRA, 1999). “[...] Desse modo, a atividade que antes precisou ser mediada (regulação interpsicológica ou atividade interpessoal) passa a constituir-se um processo voluntário e independente (regulação intrapsicológica ou atividade intrapessoal)” (REGO, 2011, p.61). Moysés (1997), ao escrever acerca do processo de internalização, considera a “mediação semiótica” um elemento auxiliar nesse processo. Para a autora,

[...] embora o elemento auxiliar – a mediação – seja externo, o sujeito lhe atribui um significado, o que lhe permite se lembrar da palavra dada. Ao contrário de ser um simples automatismo, é algo muito mais complexo. É um processo que envolve o estabelecimento de relações entre ideias, ou seja, nele interferem as funções psíquicas superiores. Com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento auxiliar externo, e passa a utilizar signos internos. Esses nada mais são do que representações mentais que substituem os objetos do mundo real (MOYSÉS, 1997, p.26).

O caminho da internalização e do desenvolvimento cognitivo segue, portanto, a direção *do social para o individual*. Desse modo, a aprendizagem passa a ser entendida como processo no qual se dá a internalização e, em decorrência disso, como condição para o desenvolvimento cognitivo. Isso nos remete à concepção vygotskyana de que a aprendizagem deve anteceder o desenvolvimento, no sentido de que uma aprendizagem efetiva é aquela orientada para níveis de desenvolvimento em vias de consolidação no sujeito e não para níveis de desenvolvimento já alcançados.

Segundo Vygotsky (2007, p.103)

[...] o aprendizado não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas.

Para Marchesi, Coll e Palácios (2004, p.105)

A teoria sociocultural entende a aprendizagem como um processo distribuído, interativo, contextual e que é resultado da participação dos alunos em uma comunidade de práticas. Aprender, de acordo com essa concepção, não significa interiorizar um conjunto de fatos ou de entidades objetivas, mas sim participar de uma série de atividades humanas que implicam processos em contínua mudança.

Considerar o desenvolvimento já alcançado por um sujeito para, a partir dele, organizar situações de aprendizagem que incidam sobre os níveis de desenvolvimento em vias de consolidação implica, segundo Vygotsky, em agir na “zona de desenvolvimento proximal” do sujeito, assunto discutido na próxima seção.

3.3 ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL

Frente a uma atividade matemática escolar é possível um sujeito apresentar pelo menos três posicionamentos: executá-la sem dificuldades; encontrar dificuldades, mas enfrentá-las utilizando-se de conhecimentos já existentes em sua estrutura cognitiva; e finalmente, não apresentar condições de executá-las, como quem não sabe nem ao menos por onde começar. Isso pode acontecer inclusive em sala de aula. Embora o professor “torça” para que os alunos consigam sempre realizar as atividades propostas sem grandes dificuldades, o que deveria prevalecer na sala de aula são as atividades em que o sujeito põe em evidência conhecimentos em vias de consolidação, ou seja, atividades para as quais o sujeito necessita da mediação de outros para sua realização. A aprendizagem está relacionada com a ação do sujeito em situações como essa última, que incidem sobre o que Vygotsky denomina Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)²⁴.

Vygotsky (2007) propõe a existência de dois níveis de desenvolvimento: o Nível de Desenvolvimento Real (ou atual) e a Zona de Desenvolvimento Proximal. O nível de desenvolvimento real é aquele expresso quando a criança consegue resolver problemas de modo independente. Já a Zona de Desenvolvimento Proximal refere-se àquilo que a criança não consegue fazer sozinha, mas consegue fazer com a ajuda de outra pessoa.

²⁴ Na literatura, as expressões Zona de Desenvolvimento Imediato, Zona de Desenvolvimento Potencial e Zona de Desenvolvimento Proximal são sinônimas.

Segundo Rivière (1987, p.96, tradução nossa)

a partir do momento em que o desenvolvimento das funções superiores requer a internalização dos instrumentos e dos signos em contextos de interação, a aprendizagem torna-se uma condição para o desenvolvimento destas funções, mas desde que ela se situe precisamente na zona de desenvolvimento potencial do sujeito, definida pela diferença entre o que é capaz de fazer sozinho e o que faz com a ajuda de outros. Esse conceito sintetiza, portanto, a concepção do desenvolvimento como a apropriação de instrumentos (especialmente os signos) proporcionados pela interação social, de modo que o ser humano não é apenas um destilado da espécie, mas também – em um sentido menos metafórico do que possa parecer – uma criação da cultura.

A Zona de Desenvolvimento Proximal não é algo que possa ser determinada na prática. É complexa e está em constante movimento, de tal modo que em uma sala de aula com 30 alunos, por exemplo, existem 30 zonas de desenvolvimento proximal distintas e com possibilidades de intervenção variadas. Tais zonas se modificam a cada nova mediação realizada pelo professor e/ou pelos alunos e mesmo não havendo a mediação desses, ainda assim essa Zona de Desenvolvimento Proximal estaria em constante movimento pelo simples fato de que somos mediadores de nós mesmos, graças à nossa consciência.

Para Marchesi, Coll e Palácios (2004, p.100), a Zona de Desenvolvimento Proximal “[...] não é uma zona estática, mas dinâmica, em que cada passo é uma construção interativa específica desse momento, que, por sua vez, abre diversos canais de evolução futuros”. Para os autores, a Zona de Desenvolvimento Proximal “[...] não é uma propriedade do indivíduo nem do domínio interpsicológico, mas de ambos: é determinada, ao mesmo tempo, pelo nível de desenvolvimento da criança e pelas formas de ensino envolvidos no desenvolvimento da atividade” (MARCHESI, COLL e PALÁCIOS, p.99-100).

Nesse sentido, o desenvolvimento cognitivo de um sujeito depende, também, de sua Zona de Desenvolvimento Proximal. Essa zona implica a existência de múltiplas possibilidades de desenvolvimento cognitivo, dentre as quais algumas são efetivadas a partir das experiências que o sujeito vivencia em seu entorno cultural e das ações que esse sujeito realiza quando é afetado pela mediação “do outro” nessas suas experiências, ou seja, pela aprendizagem. Para Vygotsky (2001, p.334)

A aprendizagem só é boa quando está à frente do desenvolvimento. Nesse caso, ela motiva e desencadeia para a vida toda uma série de funções que se encontravam em fase de amadurecimento e na zona de desenvolvimento imediato. É nisso que consiste o papel principal da aprendizagem no desenvolvimento.

Em relação a isso, Rego (2011, p.74) afirma que

O aprendiz é o responsável por criar a zona de desenvolvimento proximal, na medida em que, em interação com outras pessoas, a criança é capaz de colocar em movimento vários processos de desenvolvimento que, sem ajuda externa, seriam impossíveis de ocorrer.

No âmbito da sala de aula é o professor o maior responsável por criar situações nas quais as ações requeridas dos alunos incidam na Zona de Desenvolvimento Proximal de cada um. Agindo assim, o professor estaria contribuindo para o aparecimento de funções ainda não completamente desenvolvidas (MOYSÉS, 1997). O desenvolvimento dessas funções tende a forçar, por sua vez, o aparecimento de outras não completamente desenvolvidas, assim como num momento anterior. O mesmo acontece em atividades de Modelagem Matemática no que diz respeito às ações relacionadas à compreensão matemática e aos encaminhamentos da resolução.

Para Moysés (1997, p.37) um professor que conhece a zona de desenvolvimento proximal de um aluno (ou melhor, realiza inferências em relação à ZDP de um aluno), “[...] saberá fazer perguntas que irão provocar o desequilíbrio na sua estrutura cognitiva fazendo-a avançar no sentido de uma nova e mais elaborada reestruturação”.

Já o professor que desconhece ou desconsidera a Zona de Desenvolvimento Proximal dos seus alunos pode propor situações que incidam ou no nível de desenvolvimento real do sujeito ou para além da sua Zona de Desenvolvimento Proximal. No primeiro caso, a situação não contribuiria para o desenvolvimento cognitivo do aluno por requerer apenas o que o aluno já é capaz de realizar de modo independente. No segundo caso, por sua vez, a situação também não contribuiria, mas devido ao sujeito não ter condições de pensar sobre ela, nem mesmo com a ajuda de outra pessoa.

Ao requerer que um aluno adicione $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$, por exemplo, é possível que um aluno do 5º ou 6º ano do Ensino Fundamental (antigas 4ª e 5ª séries) apresente alguma dificuldade, momento em que o trabalho em grupo e as intervenções dos colegas e do professor podem esclarecer o algoritmo e os conceitos relacionados. De um aluno do Ensino Médio, no entanto, é esperado que a operação seja realizada sem dificuldades, o que implica considerar que em nada contribuiu essa soma para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Se, finalmente, a mesma soma for requerida de um aluno do 1º ano do Ensino Fundamental, é compreensível que a criança não apresente condições de realizar a operação mesmo com a ajuda de alguém mais experiente, já que a compreensão de números fracionários pode não estar em desenvolvimento ainda. Nesse contexto, Duarte (1996, p.40) comenta que

cabe ao ensino escolar, portanto, a importante tarefa de apresentar à criança os conteúdos historicamente produzidos e socialmente necessários, selecionando o que desses conteúdos encontra-se, a cada momento do processo pedagógico, na zona de desenvolvimento próximo. Se o conteúdo escolar estiver além dela, o ensino fracassará porque a criança é ainda incapaz de apropriar-se daquele conhecimento e das faculdades cognitivas a ele correspondentes. Se, no outro extremo, o conteúdo escolar se limitar a requerer da criança aquilo que já se formou em seu desenvolvimento intelectual, então o ensino torna-se inútil, desnecessário, pois a criança pode realizar sozinha a apropriação daquele conteúdo e tal apropriação não produzirá nenhuma nova capacidade intelectual nessa criança, não produzirá nada qualitativamente novo, mas apenas um aumento quantitativo das informações por ela dominadas.

Disso decorre que a interação social deve acontecer dentro da Zona de Desenvolvimento Proximal para provocar a aprendizagem e que, em havendo aprendizagem, a interação social passa a ter um importante papel na determinação dos limites dessa zona (MOREIRA, 1999).

Nesse cenário, considerando que as práticas de monitoramento cognitivo realizadas por uma pessoa são funções psicológicas superiores (planejar, avaliar, monitorar, administrar,...) e como tal, são aprendidas em contextos de interação social nos quais seu uso se faz necessário, é que apresentamos, na próxima seção, algumas relações percebidas entre a teoria da Mediação Semiótica e as Práticas de Monitoramento.

3.4 A TEORIA DA MEDIAÇÃO SEMIÓTICA E AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO - RELAÇÕES PERCEBIDAS

As práticas de monitoramento cognitivo, conscientes, passam, necessariamente, pela mediação semiótica em contextos de interação social. Tais práticas podem ser entendidas, segundo a psicologia histórico-cultural, como funções psicológicas superiores e seus desenvolvimentos acontecem a partir do momento em que são requeridas, por algum motivo e de algum modo, por uma situação.

Visando o desenvolvimento de práticas de monitoramento, portanto, faz-se conveniente inserir os alunos em um contexto sociocultural em que tais práticas sejam requeridas como condição para o cumprimento de uma atividade. Entendemos que a Modelagem Matemática pode contribuir nesse sentido, já que a realização de uma atividade implica no planejamento de ações, na execução dessas ações e em constantes avaliações dos encaminhamentos trilhados no decorrer da investigação. Um aluno que desenvolve uma atividade de Modelagem Matemática está, portanto, utilizando práticas de monitoramento para investigar uma situação problemática que, por algum motivo, lhe interessa.

É no trabalho em colaboração e/ou nas reflexões que um sujeito faz das informações que recebe do meio, portanto, que as práticas de monitoramento – constituídas de signos carregados de significações advindas do entorno cultural do sujeito – passam a ser internalizadas por ele e a compor sua estrutura cognitiva. Em termos da metacognição, passam a compor seu conhecimento metacognitivo.

Fávaro (2005, p.187) afirma que

A cooperação social na atividade realiza-se por meio de instrumentos, dentre os quais os signos verbais desempenham um papel primordial; é pela interiorização progressiva desses instrumentos de cooperação que se constrói o pensamento consciente, que regula as outras funções psíquicas.

Uma vez internalizadas as práticas de monitoramento, é possível que os alunos passem a utilizar essas práticas para controlar voluntariamente sua atividade psicológica, o que potencializa a realização de outras atividades, sejam elas ligadas

à compreensão de um conceito, à construção de um gráfico ou ao desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, por exemplo. Isso implica considerar que aqueles que utilizam práticas de monitoramento podem intervir intencionalmente em sua Zona de Desenvolvimento Proximal, podem ser mediadores intencionais de si mesmos. Segundo Fávaro (2005, p.226) “é a consciência de estar consciente que permite submeter um conceito à consciência e ao controle deliberado”.

Nesse sentido, conforme se dá o desenvolvimento cognitivo referente a algumas práticas de monitoramento e o aluno passa a utilizar essas práticas para potencializar sua aprendizagem, outras práticas de monitoramento ainda em vias de consolidação podem ser requeridas em outra atividade, de modo que o desenvolvimento cognitivo delimita, dinamicamente, a Zona de Desenvolvimento Proximal do sujeito.

Em relação ao desenvolvimento cognitivo referente às práticas de monitoramento, consideramos ainda que

a medida que a criança fica mais consciente, ou seja, tem mais claros os conteúdos a respeito do que conhece e ao modo como conhece, pode estabelecer parâmetros comuns de atuação, e inclusive, chegar a avaliá-los acerca dos resultados dos outros sujeitos e essa comparação serve como elemento de validação de sua própria atividade cognitiva (UGARTETXEA, 2001, tradução nossa).

As atividades de Modelagem Matemática que consideramos são desenvolvidas por grupos de alunos, os quais precisam trocar ideias, defender pontos de vista, abrir mão de perspectivas para compreender a sugestão do outro, enfim, que precisam falar e dialogar para cumprir objetivos que, a priori, são coletivos.

Moysés (1997, p.52) afirma que ao expressar seus pensamentos para outras pessoas, um aluno tende a organizá-lo, o que implica em um “[...] aumento no grau de articulação e de precisão na verbalização da tarefa quando ele tem de transmiti-la para os colegas”. Nesse sentido, “[...] a linguagem tanto expressa o pensamento da criança como age como organizadora desse pensamento” (REGO, 2011, p.64). Isso porque é por meio da linguagem, principalmente, que se dá a mediação semiótica, a partir da qual conceitos, estratégias e representações, por exemplo, passam a constituir, de modos distintos, a estrutura cognitiva dos

componentes do grupo. É pela linguagem, também, que o sujeito pode controlar seu próprio pensamento, ou ainda, monitorar sua própria atividade cognitiva. Para Vygotsky (2007, p.17-18)

a capacitação especificamente humana para a linguagem habilita as crianças a providenciar instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superar a ação impulsiva, a planejar uma solução para um problema antes de sua execução e a controlar seu próprio comportamento.

Considerando que as práticas de monitoramento cognitivo são constituídas via mediação semiótica é que apresentamos no próximo capítulo o encaminhamento metodológico da pesquisa, segundo o qual buscaremos investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes.

CAPÍTULO IV

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

N

esse capítulo apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, retomando, inicialmente, a questão e os objetivos da investigação, caracterizando os sujeitos da pesquisa e o processo de coleta de dados e apresentando o encaminhamento dado à análise dos dados a partir do referencial teórico adotado. Dadas as características desse estudo, ele insere-se no grupo de pesquisas denominadas qualitativas, àquelas segundo as quais se busca compreender um fenômeno específico em profundidade – no nosso caso: o monitoramento cognitivo de alunos quando realizam atividades de Modelagem Matemática – utilizando-se, geralmente, de descrições, comparações, análise e interpretações.

ÍNDICE

- 4.1 Problemática e Objetivos da Pesquisa
- 4.2 A pesquisa – os sujeitos da pesquisa e a coleta de dados
- 4.3 A pesquisa – o desenvolvimento das atividades
- 4.4 A pesquisa – a realização das análises

4.1 PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS DA PESQUISA

A Modelagem Matemática tem se constituído uma alternativa pedagógica para a qual recorreremos na condição de professores na Educação Básica e no Ensino Superior já há alguns anos. Mesmo frente a aulas prontas, preparadas por terceiros, as quais só deveríamos executar e em dias determinados da semana (tal como acontecia em algumas escolas particulares em que trabalhamos), utilizávamos a Modelagem Matemática como meio de aproximar a “atividade matemática” dos alunos ao “fazer Matemática”.

Ao implementar atividades de Modelagem Matemática nas aulas temos nos interessado, de modo particular, pela tomada de consciência dos alunos quanto às suas práticas de resolução e às implicações dessa consciência em relação à aprendizagem e à realização de novas atividades de Modelagem. Em outros termos, temos nos interessado pelas práticas de monitoramento que os alunos põem em ação quando desenvolvem esse tipo de atividade. Em decorrência disso, buscamos investigar a seguinte questão:

O que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes?

De modo a empreender a investigação dessa questão, elaboramos três objetivos que nortearam nossas análises:

- ✓ *identificar formas de monitoramento cognitivo expressas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem Matemática;*
- ✓ *caracterizar elementos das atividades de Modelagem Matemática que promovem o monitoramento cognitivo;*
- ✓ *investigar que ações o monitoramento cognitivo desencadeia durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.*

4.2 A PESQUISA – OS SUJEITOS DA PESQUISA E A COLETA DE DADOS

Essa pesquisa foi realizada na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR, câmpus Toledo. Para coletar dados, realizamos um curso intitulado “Investigações de assuntos do cotidiano por meio da Matemática”. Foram convidados a participar do curso alunos do segundo ano do curso técnico integrado em Informática (Ensino Médio) e alunos do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática, cujas aulas regulares aconteciam nos períodos matutino e noturno, respectivamente. O dia e o horário de realização dos encontros foram elencados a partir da disponibilidade do pesquisador e da disponibilidade dessas turmas: quintas-feiras, das 16 horas às 18 horas (duas horas semanais).

A previsão para a realização do curso era de início em 13 de outubro e término em 03 de dezembro de 2011. No entanto, como no final de novembro os alunos da licenciatura estavam preocupados com a realização das provas finais e exames, pediram ao professor-pesquisador que analisasse a possibilidade de interromper as atividades e de retornar no primeiro semestre de 2012 para a realização do trabalho final de Modelagem, tal como acontece no terceiro momento da Modelagem como já apresentamos no primeiro capítulo desse texto. Visando o melhor aproveitamento do curso, o professor-pesquisador acatou a sugestão dos alunos e assim procedeu.

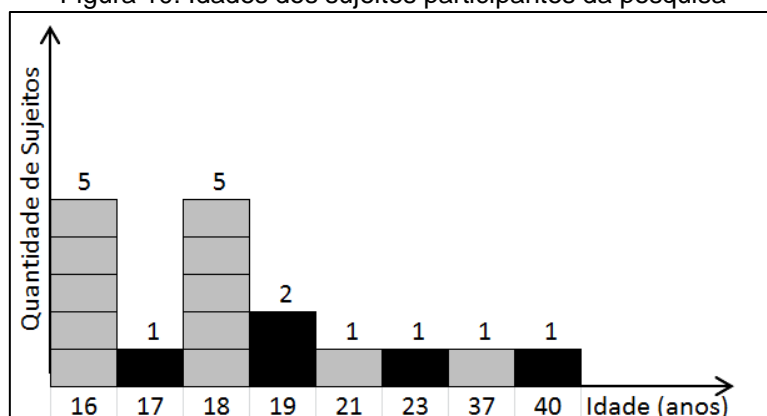
Portanto, embora a coleta de dados tenha iniciado em outubro de 2011 ela só terminou no início de maio de 2012. A partir de março de 2012 os alunos começaram as reuniões, realizadas geralmente, sem a presença do professor. No entanto, alguns encontros foram combinados com os alunos a fim de verificar o andamento das atividades. Por isso, o número de encontros realizado em 2012 dependeu da dinâmica de trabalho de cada grupo e também da disponibilidade de horário do professor.

O curso iniciou com 17 alunos com idades variando entre 16 e 40 anos, conforme Figura 10²⁵. Nenhum dos alunos tinha experiência com atividades de

²⁵ Os inscritos nesse curso foram informados, já no primeiro encontro, que participariam de uma pesquisa de doutoramento e que os dados para essa pesquisa seriam obtidos no curso. Solicitamos a

Modelagem Matemática e, embora demonstrassem interesse pelo curso, quatro desses alunos, no caso estudantes do curso de Licenciatura, acabaram desistindo da graduação no decorrer do semestre e, em consequência, do curso de Modelagem Matemática. Logo, dos 6 alunos do Ensino Médio que iniciaram o curso (5 homens e 1 mulher), todos terminaram e dos 11 alunos do Ensino Superior, apenas 7 o concluíram (todas mulheres).

Figura 10: Idades dos sujeitos participantes da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os dados dessa pesquisa, no caso, os áudios das falas dos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades de Modelagem, os registros escritos produzidos nas resoluções e as anotações do diário de campo do pesquisador, foram coletados em cada um dos encontros do curso. Utilizamos para essa coleta três instrumentos: gravadores de áudio, fotocópias feitas semanalmente do material escrito produzido pelos alunos nos encontros e notas de campo elaboradas pelo professor-pesquisador.

Durante o desenvolvimento das atividades do curso o professor pedia que os alunos se reunissem em grupos, embora não fizesse orientações nem em relação à quantidade de elementos desses nem em relação à sua composição. Percebeu-se, no entanto, que de todos os grupos, um deles permaneceu com os mesmos participantes em todos os encontros. Formado por cinco pessoas, quatro eram alunos do Ensino Médio e uma era aluna da Licenciatura em Matemática. Por esse motivo, esse foi o grupo considerado nas análises realizadas nos próximos capítulos.

autorização dos alunos ou dos pais ou responsáveis por eles (Anexo 01), no caso de alunos do Ensino Médio, no que fomos prontamente atendidos.

Todavia, nas análises da primeira atividade, outros alunos figuram nas descrições. Isso porque essa atividade foi realizada segundo orientações do primeiro momento da Modelagem Matemática e a atividade contou com momentos coletivos de discussão. Os demais grupos tinham composições diferentes a cada novo encontro, alternando-se os participantes.

Esse grupo (o considerado nas análises) era composto por duas mulheres e três homens. (D) – inicial do nome – era uma aluna do curso de licenciatura e tinha 23 anos no início do curso. (A), de 16 anos, era aluna do ensino médio e estudava na mesma turma em que estudavam os três homens, R2²⁶ de 17 anos, R1 e R3 de 16 anos, cujos nomes nesse trabalho serão omitidos.

Os quatro alunos do Ensino Médio que integravam o grupo eram amigos e, por isso, tinham certa afinidade. A aluna da licenciatura, desenvolta, não teve problema algum de adaptação junto ao grupo. Dentre os alunos desse grupo, R1 era considerado “um líder” pelos demais, mesmo que de modo inconsciente. Isso fica evidente quando, nas discussões do grupo, todos se referiam à ele como se buscassem uma aprovação, por exemplo.

Para gravar o áudio das discussões dos alunos, o professor entregava, no início da atividade, um gravador de áudio para cada grupo. Esse ficava posicionado, geralmente, no centro do grupo de modo a captar, da melhor forma possível, as falas de cada um de seus componentes. O professor também ficava próximo a um gravador de áudio, com vistas à captação das interlocuções do professor com cada grupo.

Nesse sentido, o professor-pesquisador alternava momentos de orientação nos grupos conforme era requisitado ou quando julgava que uma intervenção poderia ser pertinente. Nos momentos em que não circulava pela sala, o professor-pesquisador realizava anotações referentes às suas observações, com a intenção de que essas pudessem possibilitar a compreensão de um discurso ou de uma ação de um aluno, por exemplo. A observação direta, tão importante quando se considera a multiplicidade de fatores que influenciam as atitudes dos alunos,

²⁶ Os números ao lado das iniciais dos nomes devem-se à existência de nomes com mesmas iniciais e foram atribuídos diante da ordem em que as primeiras manifestações apareceram nas transcrições.

inclusive no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, permite ao professor-pesquisador inferir, com maior acuidade, o significado que os alunos atribuem às atividades e às suas próprias ações.

Visando compreender as ações dos alunos e os registros escritos produzidos por eles na resolução de um problema, o professor pediu que evitassem apagar suas anotações e os cálculos que, por algum motivo, julgassem incorretos. Sugeriu, ainda, que utilizassem de algum sinal para marcar o “campo” invalidado. No entanto, nem sempre isso aconteceu!

Findado cada encontro o professor recolhia todas as anotações e resoluções feitas pelos sujeitos, produzia fotocópias desses registros e devolvia cada material ao aluno correspondente, de modo que ele pudesse consultá-lo quando almejasse. Esses documentos foram utilizados como mais uma fonte de análise e como meio complementar de análise dos áudios, na medida em que permitiam entender, por exemplo, sobre o que os alunos se referiam quando diziam expressões do tipo “pega isso aqui” ou “esse é melhor que esse outro”.

Em dois momentos do curso o professor-pesquisador pediu que os alunos respondessem a um questionário²⁷ (Anexo 02). A intenção inicial do pesquisador era que, findada toda atividade de Modelagem, os alunos o respondessem. No entanto, a partir do andamento das atividades de Modelagem e da aplicação do questionário, percebemos que não era prudente aplicá-lo sempre, devido ao tempo que os alunos levavam para respondê-lo e às poucas discussões que ele promovia, diferente do que esperávamos. Uma análise dos questionários bem como do áudio das conversas dos alunos enquanto respondiam às suas questões mostrou que o “responder o questionário” era tarefa vista pelos alunos como uma obrigação ou mero cumprimento de protocolo. Em pesquisas futuras, uma adequação do questionário em termos do que considerar, de modo a torná-lo mais fluente e eficaz, pode ser realizada. Portanto, não o consideramos nas análises dessa pesquisa.

²⁷ O questionário foi aplicado somente nos encontros referentes às temáticas “Doação de Órgãos” e “Evolução dos aparelhos eletrônicos e os transistores”.

4.3 A PESQUISA – O DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

As atividades de Modelagem foram realizadas segundo orientações de Almeida e Dias (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), já apresentadas no primeiro capítulo. Segundo os autores, quando as atividades são realizadas do primeiro ao terceiro momentos, os alunos passam de atividades em que são mais assistidos pelo professor para atividades que realizam com maior autonomia, assumindo para si a responsabilidade pela condução da investigação de um tema do seu interesse.

Nessa pesquisa, ainda, de acordo com nosso interesse pelas práticas de monitoramento em atividades de Modelagem e atentando para um *continuum* entre os três momentos da Modelagem Matemática, consideramos três diferentes configurações para o segundo momento da Modelagem, de modo que, a partir deles, os alunos podem assumir a responsabilidade pela condução das atividades de modo gradativo, tornam-se, aos poucos, mais autônomos em situações de Modelagem. Tais configurações evidenciam-se nos modos de propor as atividades e não precisam ser realizadas da primeira para a terceira, em ordem, já que não há linearidade e sim complementaridade nas configurações desse momento.

A primeira configuração do segundo momento refere-se à proposição de uma situação estruturada que, embora inicialmente aberta, apresente uma ou duas possibilidades de investigação no que tange à elaboração do problema. Nesse sentido, o professor apresenta maior controle em relação à condução inicial da atividade – àquela que conduz à escolha e à elaboração de um problema a investigar –. Esse “controle” advém do estudo prévio da situação que o docente leva para a sala de aula, mesmo que o faça baseado nos interesses dos alunos, como, inclusive, defendemos. Isso não implica que outros problemas não possam surgir, atividade que, aliás, deve ser estimulada. As atividades “Doação de Órgãos” e “A evolução dos aparelhos eletrônicos e os transístores” foram realizadas segundo essa configuração do segundo momento da Modelagem.

Na segunda configuração consideramos as atividades que colocam os alunos frente a diferentes possibilidades de problematização para uma dada temática, como acontece nas situações em que o professor apresenta diferentes

matérias de jornais e revistas que trazem diferentes dados (qualitativos e quantitativos) de uma mesma temática e que, portanto, podem conduzir a diferentes interesses e possibilidades de formulação do problema a investigar e de dados a utilizar. Nesse caso, o professor pode até ter uma ideia de diferentes problemas que podem ser considerados a partir das informações apresentadas aos seus alunos, mas esses podem elencar justamente problemas antes não vislumbrados pelo docente, principalmente se sua condução for realizada de modo que os alunos tenham a responsabilidade pela elaboração e escolha de um problema. Nessa configuração do segundo momento da Modelagem um tempo considerável pode ser requerido pelos alunos para a elaboração do problema, o que não é ruim, afinal, para quem respondeu a exercícios a vida toda, elaborar um problema não é tarefa tão habitual. A atividade “O caso das redes sociais” foi realizada segundo essa configuração.

A terceira configuração do segundo momento das atividades de Modelagem diz respeito às atividades em que os alunos realizam, por assim dizer, “um ensaio” para o terceiro momento da Modelagem Matemática, momento almejado pelo professor devido à autonomia dos alunos quanto aos empreendimentos cognitivos e quanto à possibilidade de resolução de outros problemas, presentes fora da esfera escolar. Nessa configuração, os alunos decidem, juntos e sob orientação do professor, um tema para pesquisa e investigação. Nesse caso, possíveis questões surgem e tarefas são delineadas para um próximo encontro, como a obtenção de dados, por exemplo. Nesse novo encontro, as informações são socializadas, as questões inicialmente elaboradas são revisitadas e reafirmadas ou reestruturadas e a atividade é desenvolvida. Foi o caso da atividade “Os novos planos de telefonia celular”. Nela, o professor não tem controle algum acerca das possibilidades de problematização que podem vir à tona.

O desenvolvimento das atividades de Modelagem no curso em que se deu a coleta de dados considerou o interesse dos alunos, de modo que, tirando o primeiro tema trabalhado e escolhido pelo professor, todos os demais foram escolhidos a partir da sondagem feita pelo professor acerca dos interesses dos sujeitos da pesquisa. As atividades desenvolvidas no âmbito do curso são apresentadas no Quadro 01, no qual também são explicitados os diferentes

momentos da Modelagem segundo os quais se deu o desenvolvimento das atividades e as questões elaboradas para investigação.

Quadro 01: Temas das atividades de Modelagem estudados

Dia	Duração	Tema da atividade	Momento	Configuração
13/10/2011	2 h	Trânsito na cidade de Apucarana: <i>Qual o número de veículos que Apucarana poderá ter em janeiro de 2013? (situação utilizada no capítulo de Modelagem com vistas a fazer exemplificações)</i>	Primeiro	-
20/10/2011	2 h	Doação de Órgãos: <i>Para qual idade o número de doadores de órgãos é maior considerando as estatísticas de doação de órgãos?</i>	Segundo	Primeira
27/10/2011	2 h			
03/11/2011	2 h	Evolução dos Aparelhos Eletrônicos e os transístores: <i>Encontrar uma lei (uma função) que forneça o tamanho do transistor em função dos anos.</i>	Segundo	Primeira
10/11/2011	2 h			
24/11/2011	2 h	Os novos planos de telefonia celular: <i>Qual o melhor plano de telefonia celular para mim? E para o perfil UTFPR? Compensa ter dois chips?</i>	Segundo	Terceira
01/12/2011	2 h			
08/12/2011	2 h	O caso das redes sociais – Facebook: <i>Qual a estimativa que podemos fazer para o número de usuários do facebook hoje? E para daqui um ano?</i>	Segundo	Segunda
março, abril e maio de 2012	Aprox. 10 h	<p>Trabalho 1: <i>O aumento no consumo de água dos últimos anos na cidade de Toledo deve-se apenas ao aumento na população da cidade ou ao aumento no consumo individual?</i></p> <p>Trabalho 2: <i>Como se dá a variação no consumo de água no município de Toledo no decorrer de um ano?</i></p> <p>Trabalho 3: <i>Quando o número de veículos no estado do Paraná vai ultrapassar o número de condutores? Quando vai chegar a ser o dobro?</i></p>	Terceiro	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

No primeiro encontro do curso o professor questionou os alunos acerca de quais temas gostariam de estudar nos próximos encontros. Nesse momento apresentaram algumas sugestões, como saúde e informática, esse último, aliás, advindo provavelmente do Ensino Médio Técnico Integrado em Informática realizado por alguns dos participantes. Todavia, no decorrer do curso, outros interesses foram surgindo, tais como telefonia celular e redes sociais.

Nas atividades “Doação de Órgãos”, “Evolução dos Aparelhos Eletrônicos e os transistores” e “O caso das Redes Sociais – facebook” o professor trazia para a sala de aula matérias de jornais e revistas que discutiam cada tema em relação às diferentes perspectivas e forneciam dados numéricos acerca de algumas especificidades do tema. Isso permitia que distintos problemas fossem elencados e diferentes abordagens pudessem ser realizadas.

Às vezes os alunos utilizavam uma das matérias apresentadas como referência para a resolução do problema e em outras, os alunos consideravam as diferentes matérias como fonte de dados. Foi o caso, por exemplo, da situação “O caso das Redes Sociais – *facebook*”, na qual o problema elencado pelos alunos diferiu das expectativas do professor, já que para sua elaboração e investigação foram utilizadas diferentes fontes (ver os diferentes textos utilizados no Anexo 03 desse trabalho).

Além disso, percebeu-se no decorrer do curso que a disponibilidade de internet por todo o câmpus aliada ao fato de muitos alunos possuírem notebook permitia a complementação de informações em tempo real, com consultas na internet.

O tema “Os novos planos de telefonia celular”, por sua vez, surgiu no final da aula em que discutíamos a atividade dos transístores. Na ocasião, o professor contava aos alunos sobre o fato de ter que comprar um novo celular dado que o seu havia quebrado e sobre sua dúvida em comprar um celular com um ou dois chips. Nesse contexto, os alunos se interessaram por investigar qual a prestadora, dentre as mais utilizadas no mercado, que oferecia o melhor plano (no sentido de menor custo). Definido um tema para a próxima atividade de Modelagem, os grupos foram incumbidos de pesquisar os planos de telefonia oferecidos por diferentes prestadoras, considerando os planos pré-pagos. Na semana seguinte, o encontro iniciou com a apresentação dos grupos acerca das informações pesquisadas e com a discussão de como realizar a investigação do tema.

Essas atividades constituíram os encontros do curso de Modelagem realizados até dezembro de 2011. A segunda parte do curso aconteceu a partir de março de 2012. Nesse momento, cada grupo combinou um horário diferente para

realizar as atividades na instituição. A orientação do professor, nesse contexto, era de que os alunos marcassem reuniões, preferencialmente, em horários em que o docente pudesse arrumar os gravadores de áudio para os grupos.

Nesses encontros, os alunos se dedicaram à elaboração do trabalho final de Modelagem. Esse trabalho consiste na realização de uma investigação segundo o terceiro momento da Modelagem, no qual todo o desenvolvimento da atividade é responsabilidade dos alunos, desde a escolha do tema até a obtenção de uma resposta para a questão elencada para investigação.

Nessa ocasião apenas dois grupos foram formados, devido às faltas constantes de alguns alunos. O primeiro desenvolveu duas atividades relacionadas ao consumo de água na cidade de Toledo e respondeu às seguintes questões: “O aumento no consumo de água dos últimos anos na cidade de Toledo deve-se apenas ao aumento na população da cidade ou ao aumento no consumo individual?” e “Como se dá a variação no consumo de água no município de Toledo no decorrer de um ano?”. O segundo grupo, por sua vez, investigou a questão “Quando o número de veículos no estado do Paraná vai ultrapassar o número de condutores?”. Ao investigarem o tema e se inteirarem do assunto, os alunos do segundo grupo descobriram que o número de veículos já era maior que o número de condutores e, por isso, resolveram responder à uma segunda questão – “Quando o número de veículos passará a ser o dobro do número de condutores no estado do Paraná?” –, no sentido de verificar quando, ao menos teoricamente, cada paranaense habilitado teria dois veículos.

Dentre essas três atividades realizadas segundo orientações do terceiro momento da Modelagem, nossa atenção incide na primeira, por ter sido essa a primeira desenvolvida pelo grupo que temos considerado nas análises.

4.4 A PESQUISA – A REALIZAÇÃO DAS ANÁLISES

A análise dos dados é realizada frente aos objetivos apresentados em 4.1 e considerando-se o referencial teórico apresentado nos capítulos 1, 2 e 3.

Cientes da complexidade de analisar as práticas de monitoramento utilizadas pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, principalmente por ser esse monitoramento um processo mental e, por isso, interno, passível de inferência somente a partir da observação de expressões e falas dos sujeitos, é que realizamos, nessa pesquisa, dois tipos de análise: uma análise específica e outra análise global.

Na análise específica buscamos refletir acerca das práticas de monitoramento manifestadas pelos alunos diante das especificidades das três atividades de Modelagem consideradas, cada uma correspondente a um dos momentos da implementação da Modelagem. O monitoramento é inferido, nesse contexto, principalmente a partir das falas dos sujeitos ao desenvolverem as atividades de Modelagem no âmbito de um grupo.

Na análise específica, utilizamos como ponto de partida as dimensões apresentadas por Tovar-Gálvez (2008) para a vertente processual da metacognição, ou seja, para o monitoramento: reflexão, administração e avaliação. Além disso, consideramos os elementos que compõem o monitoramento cognitivo segundo Flavell e Wellman (1977), já que a reflexão, a administração e a avaliação são dimensões que emergem na atividade de Modelagem Matemática na medida em que o sujeito que as utiliza põe em ação seus conhecimentos metacognitivos, com vistas ao cumprimento de um objetivo cognitivo, via uma estratégia cognitiva e de modo a desencadear novas experiências metacognitivas. Consideraremos para a análise dos dados, portanto, a configuração do monitoramento cognitivo adotada nesse trabalho e apresentada na página 66, na Figura 09.

Utilizaremos, no caso das análises específicas, análises de “episódios”²⁸ das situações empreendidas em cada atividade de Modelagem, de modo a considerar os seguintes aspectos nesses episódios: o objetivo cognitivo e os conhecimentos metacognitivos segundo Flavell e Wellman (1977) relacionados às atividades, a fase da atividade de Modelagem em que se deu a manifestação da prática de monitoramento, o monitoramento identificado, a dimensão correspondente

²⁸ Para a realização das análises específicas, denominamos “episódios” alguns dos momentos da resolução em que as discussões dos alunos os levaram a tomar decisões em relação ao encaminhamento da atividade. Tais episódios são apresentados seguindo a ordem cronológica do evento estudado, o que possibilita conhecer os percursos trilhados pelos grupos de alunos.

a esse monitoramento (reflexão, administração e avaliação), elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento e ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento. Tais informações serão apresentadas, em alguns momentos, como no quadro resumo abaixo:

Quadro 02 – Informações do monitoramento nos episódios das atividades

Episódio X:
Fase da Modelagem Matemática
Objetivo Cognitivo / Ações Cognitivas
Conhecimento Metacognitivo
Monitoramento Observado
Monitoramento: Dimensão Metacognitiva: Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento:
Algumas considerações

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse quadro resumo não incluímos as experiências metacognitivas. Isso porque consideramos que elas são refletidas nas práticas de monitoramento empreendidas pelos sujeitos, o que nos levaria a preencher o possível campo “experiências metacognitivas” com o mesmo conteúdo de monitoramento. Além disso, as experiências metacognitivas constituem os conhecimentos metacognitivos, esses sim considerados no quadro resumo, já que são inferidos a partir das manifestações dos sujeitos quando expressam conhecimentos em relação às variáveis pessoa, tarefa e estratégias (FLAVELL e WELMANN, 1997).

É a partir das análises específicas e desses quadros resumos construídos a partir dessas análises, que se dá a análise global, na qual buscamos identificar padrões nas práticas de monitoramento cognitivo manifestadas pelos alunos e apresentar reflexões em relação aos objetivos da pesquisa. Essas reflexões nos

levam a realizar inferências acerca da questão de investigação dessa tese, inferências que apresentamos nas considerações finais.

No próximo capítulo consideramos, portanto, as análises específicas desse trabalho.

Frente às caracterizações já apresentadas nessa pesquisa, tais como ser a fonte dos dados o ambiente natural, ser o investigador o instrumento principal de coleta dos dados, ser o processo mais importante do que os resultados e por intentarmos compreender como os indivíduos pensam e agem nos contextos específicos de atividades de Modelagem Matemática, por exemplo, é que essa investigação pode ser metodologicamente classificada como qualitativa. Apresentamos no Anexo 04 algumas considerações acerca da pesquisa qualitativa.

CAPÍTULO V

ANÁLISES ESPECÍFICAS – O MONITORAMENTO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM



Para a realização das análises específicas consideramos as falas e produções escritas de um grupo de alunos em três atividades de Modelagem Matemática, cada uma realizada segundo um dos momentos apresentados em relação à implementação das atividades em sala de aula, respectivamente, “trânsito na cidade de Apucarana”, “doação de órgãos” e “consumo de água em Toledo-PR”. São realizadas reflexões acerca das intenções dessa pesquisa considerando as especificidades de cada uma dessas atividades. Descrevemos, em seguida e de modo sucinto, as outras atividades realizadas no curso.

ÍNDICE

- 5.1 Análise Específica e Episódios Selecionados
 - 5.1.1 Atividade 1: Trânsito na cidade de Apucarana-PR
 - 5.1.1.1 Descrição da atividade Trânsito na cidade de Apucarana-PR
 - 5.1.1.2 Trânsito na cidade de Apucarana-PR – análise específica
 - 5.1.2 Atividade 2: Doação de Órgãos
 - 5.1.2.1 Descrição da atividade Doação de Órgãos
 - 5.1.2.2 Doação de Órgãos – análise específica
 - 5.1.3 Atividade 3: Consumo de água em Toledo-PR
 - 5.1.3.1 Descrição da atividade Consumo de Água em Toledo-PR
 - 5.1.3.2 Consumo de água em Toledo-PR – análise específica
- 5.2 Descrições de outras atividades realizadas no curso

5.1 ANÁLISE ESPECÍFICA E EPISÓDIOS SELECIONADOS

Nesse capítulo apresentamos análises referentes ao monitoramento cognitivo manifestado por alunos de um mesmo grupo ao desenvolverem três atividades de Modelagem Matemática: Trânsito na cidade de Apucarana-PR, Doação de Órgãos e Consumo de água em Toledo-PR.

A escolha dessas atividades deveu-se, primeiramente, ao momento em que cada uma delas foi desenvolvida. Trânsito na cidade de Apucarana-PR foi a primeira atividade do curso, realizada segundo orientações do primeiro momento da Modelagem e durou duas horas. Doação de Órgãos, atividade do segundo momento da Modelagem, foi realizada no segundo e terceiro dias do curso, totalizando quatro horas. Consumo de água em Toledo-PR, por sua vez, fora realizada segundo orientações do terceiro momento e levou em torno de dez horas.

De modo a situar as análises específicas em termos do desenvolvimento das atividades de Modelagem em sala de aula, apresentamos uma breve descrição do encaminhamento dado pelo grupo a cada uma das atividades para, em seguida, realizar as análises em termos das intenções de investigação dessa pesquisa.

As análises são realizadas tomando como ponto de partida alguns Episódios. Os Episódios são recortes das discussões dos alunos sobre os quais lançamos nossos olhares. A escolha desses recortes foi realizada considerando-se a fase da Modelagem em que as discussões presentes neles foram empreendidas e influência dessas discussões no desenvolvimento das atividades.

Na atividade do trânsito na cidade de Apucarana-PR consideramos um episódio referente à fase de inteiração e outro referente à fase de resolução. Na situação Doação de Órgãos, elencamos quatro episódios, o primeiro referente à fase inteiração, o segundo e o terceiro à fase matematização e o quarto referente à fase validação. Finalmente, na situação Consumo de Água em Toledo, também consideramos quatro episódios, o primeiro referente à fase inteiração, o segundo à fase matematização, o terceiro à interpretação e o quarto à fase resolução. O momento inicial e o momento final dos Episódios foram determinados, geralmente,

por instantes de silêncio nas discussões. Embora sejam apresentados na ordem em que aconteceram, nem sempre um Episódio é continuação imediata de outro.

Para a realização das análises específicas consideramos, portanto, principalmente as transcrições dos áudios das discussões dos alunos no desenvolvimento das atividades de Modelagem, já que o monitoramento cognitivo é manifestado essencialmente pelas falas dos sujeitos. Os registros escritos produzidos pelos alunos no decorrer das atividades e as notas de campo do pesquisador complementam as transcrições dos áudios.

5.1.1 ATIVIDADE 1: TRÂNSITO NA CIDADE DE APUCARANA-PR

5.1.1.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE TRÂNSITO NA CIDADE DE APUCARANA-PR

A atividade referente ao Trânsito na Cidade de Apucarana foi a primeira atividade de Modelagem Matemática que os alunos realizaram no curso e, segundo eles, em sua vida escolar. A atividade havia sido elaborada por outros alunos de Matemática (Licenciatura) do referido professor já há três anos, no momento em que participavam de um projeto de Modelagem, intitulado “Conhecendo onde se vive por meio da Modelagem Matemática”, em uma faculdade particular na cidade de Apucarana-PR. Para esse momento, no entanto, as informações foram atualizadas.

A escolha por essa atividade como a primeira a ser realizada no curso não se deu pelo interesse dos alunos, já que tais interesses ainda não eram do conhecimento do professor, mas pela aparente simplicidade da situação, advinda do estudo prévio do docente. Por ser a primeira experiência dos alunos com atividades de Modelagem, a participação do professor no que tange às suas intervenções foi mais intensa nesse momento.

A atividade foi desenvolvida no âmbito da turma como um todo, por todos os participantes do curso juntamente com o professor. Na ocasião, o professor questionava os alunos sobre cada nova ideia e encaminhamento. Em decorrência disso, apenas nessa atividade não contamos com os registros escritos dos alunos.

Para iniciar a discussão, o professor disse que passaria no quadro um tema que iriam investigar. Escreveu no quadro, então, a seguinte expressão: “O trânsito na cidade de Apucarana”. Em um primeiro momento, os alunos ficaram esperando que o professor continuasse com a escrita, quando perceberam que o professor já esperava as discussões. Depois de algumas conversas sobre esse estranhamento, um aluno perguntou sobre o que, de fato, era importante considerar no tema “trânsito em Apucarana”. A partir de então, o professor entregou aos alunos um pequeno texto situando o tema.

O trânsito na cidade de Apucarana tem ficado cada vez mais caótico devido a um crescente aumento na aquisição de veículos e a uma concentração de desenvolvimento urbano em uma avenida central, o que tem dificultado o estacionamento e o deslocamento de automóveis no centro da cidade, principalmente.

“Como proceder a partir de então” foi o tópico da discussão naquele momento. Decidiram que elencar um problema e obter dados eram os próximos encaminhamentos. Elaboraram, portanto, algumas possíveis questões e dentre elas decidiram investigar num primeiro momento, influenciados pelo professor que fizera a coleta de dados para uma delas, a questão “Como se deu o crescimento de veículos na cidade de Apucarana?”. Enquanto realizavam a investigação dessa questão, outra também fora considerada: “Qual o número de veículos que Apucarana poderá ter em janeiro de 2012 e em janeiro de 2013?”. Essa última suscitada pela tabela apresentada pelo docente, contendo a quantidade de veículos na cidade de Apucarana (Tabela 04):

Tabela 04 – Número de Veículos em Apucarana - PR

mês/ano	Número de Veículos
jan/07	42.584
jan/08	46.507
jan/09	50.510
jan/10	54.140
jan/11	57.837

Fonte: DETRAN-PR, capturado em 05 de abril de 2012 em <http://www.detran.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=194>

A partir das informações dessa tabela e de muitas discussões sobre elas, os alunos realizaram, coletivamente, duas abordagens diferentes, as quais

conduziram às expressões $V(t) = 42584 \cdot (1,079)^{t-2007}$ e $V(t) = 3813 \cdot t - 7610107$ (sendo t o ano correspondente e V a quantidade de veículos em Apucarana no ano t) e às consequentes respostas ao problema elencado: 62281 veículos em 2012 e 67201 em 2013 segundo o modelo exponencial e 61649 veículos em 2012 e 65462 em 2013 segundo o modelo linear²⁹.

Os modelos foram construídos assumindo dois pressupostos, no caso da função exponencial, que a razão entre a quantidade de veículos existentes em dado ano pela quantidade existente em um ano imediatamente anterior era aproximadamente constante, sendo a média das razões 1,079 aproximadamente, e no caso da função polinomial do primeiro grau, que a diferença entre a quantidade de veículos existentes em dado ano pela quantidade existente em um ano imediatamente anterior era aproximadamente constante, sendo a média das diferenças 3772 aproximadamente. Esses pressupostos emergiram enquanto os alunos buscavam algumas regularidades nos dados da tabela, incentivados pelo professor. A utilização de recorrência matemática a partir desses pressupostos também foi acompanhada pelo docente.

Frente às diferentes respostas encontradas para as questões, professor e alunos discutiram a subjetividade presente nos modelos matemáticos (e sobre a subjetividade da Matemática vinculada pelos meios de comunicação também) e sobre o fato de que, em Modelagem, nenhuma das respostas é necessariamente melhor ou pior do que a outra, são, no entanto, apenas previsões condizentes aos pressupostos assumidos inicialmente e aos interesses de alguém.

5.1.1.2 TRÂNSITO NA CIDADE DE APUCARANA-PR – ANÁLISE ESPECÍFICA

Por ser a primeira atividade de Modelagem Matemática e diante da tradição escolar de problemas em que quase tudo é conhecido já no início, os

²⁹ No primeiro capítulo, quando apresentamos essa situação de modo a exemplificar uma atividade de Modelagem, consideramos uma informação que não existia no momento em que os alunos desenvolveram a atividade: o número de veículos em janeiro de 2012, no caso, 61444 veículos na cidade, valor esse muito próximo ao estimado pelo modelo linear, 61649. Isso justifica a diferença nas previsões para 2013 presentes no capítulo de Modelagem e aqui. Como o primeiro capítulo da tese fora escrito depois do desenvolvimento da atividade no curso, consideramos nele a mesma abordagem empreendida pelos alunos.

alunos ficaram sem ação no começo da atividade, quando o professor apresentou um tema para discussão. Foi a partir da intervenção do professor que os alunos começaram a discuti-lo. Quando os alunos perguntaram o que daquele tema era para eles estudarem, o professor entregou um pequeno texto que tinha como intenção situá-los em relação ao contexto do qual emergiu a situação referente ao trânsito na cidade de Apucarana.

Depois que os alunos leram esse texto, o seguinte diálogo foi realizado entre todos os alunos dos diferentes grupos – já que essa primeira atividade foi realizada coletivamente³⁰. Denominamos essa transcrição de Episódio I.

EPISÓDIO I

D: Tá, tá... é que na cidade de Apucarana o trânsito cresceu [rs].

Y: Dá pra entender também que tinha um número de vagas e isso era suficiente, vagas para o estacionamento. E depois, como foi aumentando o número de veículos na cidade, diminuiu o número de vagas. As vagas foram diminuindo.

D: Não... na verdade o número de vagas continuou o mesmo eu acho. Só que aumentou a quantidade de carros.

S: O crescimento não foi proporcional ao número de vagas existentes.

Y: O número de vagas então é fixo.

[...]

P³¹: Qual a diferença dessa para as situações de Matemática que vocês costumam trabalhar em sala de aula?

D: Que essa não tem nenhum número [rs]

P: Que mais?

V: Não tem problema.

P: Não tem problema...

Y: Você não chega a lugar nenhum, só fica sabendo o que tá acontecendo.

P: Você pode não chegar a lugar nenhum, como pode chegar a vários lugares diferentes.

[...]

P: Gente, a partir disso, a gente tem que fazer o quê nessa situação?

Y: Dados.

D: A gente tem que elaborar o problema eu acho.

P: O problema! Então são duas coisas que a gente tem que ir atrás: os dados que permitam responder a um problema que ainda nem foi formulado. A única coisa que existe é uma situação: o trânsito em Apucarana. Quais poderiam ser os problemas que nós poderíamos formular a partir do tema maior.

V: Qual a quantidade de vagas para suportar o trânsito de Apucarana?

³⁰ Por isso, nas transcrições das falas dos alunos nessa atividade, outros sujeitos, além de A, D, R1, R2 e R3, também figuram.

³¹ P significa “professor”.

D: Qual foi a proporção de crescimento de veículos na cidade?

P: Qual foi... como se deu o crescimento de veículos na cidade? O que mais?

D: A quantidade de veículos que existe para determinado número de vagas.

V: Quanto tempo demora cada carro em cada vaga, em média?

[...]

P: Das perguntas que vocês fizeram, eu trouxe dados que podem responder a uma delas: como tem acontecido o crescimento no número de veículos na cidade de Apucarana no decorrer dos últimos anos? Pra responder isso aqui, o que precisaríamos fazer?

V: Ir atrás do Detran.

P: Ou no site do Detran, mas para investigar o quê?

D: A quantidade de veículo.

P: Em cada ano pra gente poder comparar e analisar o comportamento do número de veículos.

Depois do diálogo transcrito nesse Episódio, o professor entregou a Tabela 04³² para os alunos, a partir da qual se dá a resolução do problema. Os alunos conversam, ainda, sobre o fato de que muitos dos carros que, segundo o DETRAN, “residem” em Apucarana, são apenas emplacados lá, mas não ficam na cidade. Outros alunos atentam, no entanto, que o mesmo deve acontecer com veículos emplacados em outras cidades e que permanecem em Apucarana, o que permitiria considerar como válido o número divulgado pelo DETRAN, já que os veículos que são emplacados na cidade e saem dela, são compensados pelos veículos que são emplacados fora e ali permanecem.

No diálogo transcrito no Episódio I, os alunos discutem o texto introdutório da situação comparando-o àqueles comumente utilizados em sala de aula. Buscam entender, ainda, como proceder a partir dele. O fato de nenhum aluno saber como proceder, os coloca em pé de igualdade, o que pode ser percebido pelas interações sociais manifestadas.

Quando a aluna Y, ao interpretar o texto e ao considerar as informações da tabela 04, afirma que “As vagas foram diminuindo”, rapidamente duas outras alunas interferem, explicando-lhe que “na verdade, o número de vagas continuou o mesmo [...] só aumentou a quantidade de carros” ou, ainda, recorrendo a termos matemáticos, que “o crescimento [das vagas] não foi proporcional ao número de vagas existentes”, o que leva a aluna a reconsiderar sua interpretação: “O número

³² Ver a Tabela 04 na página 103.

de vagas então é fixo". Esta mediação conjunta possibilitou a interpretação adequada do texto por Y.

Esse Episódio indica que os alunos verbalizam alguns conhecimentos metacognitivos sobre a variável "tarefa". Isso se dá a partir da mediação do professor que pergunta "*Qual a diferença dessa para as situações de Matemática que vocês costumam trabalhar em sala de aula?*". Pelas manifestações dos alunos D, V e Y percebe-se que um problema matemático, para os alunos, precisa ter números ou dados, um problema previamente elaborado e uma resposta certa – e conhecida pelo professor – que deve ser encontrada por eles. A ideia de existirem respostas certas quando a atividade é de matemática é complementada quando Y afirma que, nessa atividade de Modelagem, "*you não chega a lugar nenhum, só fica sabendo o que tá acontecendo*", frase essa que denota, ainda, o estranhamento da aluna em relação à falta de uma questão para resolver.

A partir de então, o professor sugere que os alunos elaborem uma questão para investigar. Dois alunos (D e V) elaboram quatro questões, todas aparentemente passíveis de resolução e potencialmente significativas para desencadear uma atividade de Modelagem Matemática: "*Qual a quantidade de vagas para suportar o trânsito de Apucarana?*" – questão com o foco na problemática referente à falta de vagas de estacionamento no centro da cidade –, "*Qual foi a proporção de crescimento de veículos na cidade?*" – com foco no aumento da quantidade de veículos –, o estudo da "*quantidade de veículos que existe para determinado número de vagas*" – com foco na relação entre vagas e veículos – e "*Quanto tempo demora cada carro em cada vaga, em média?*" – com foco no problema das vagas também.

Quando o professor apresenta o problema para o qual já havia pesquisado as informações necessárias (no caso, um problema próximo ao segundo elaborado pelos alunos) – Como se deu o crescimento no número de veículos na cidade de Apucarana no decorrer dos últimos anos? – questiona os alunos sobre como fazer para responder à questão, ao que os alunos V e D respondem "*ir atrás do DETRAN*" e verificar "*a quantidade de veículos*", respectivamente, o que denota a compreensão do problema a solucionar.

Nesse Episódio, associado às ações realizadas na fase inteiração da Modelagem, embora os alunos tenham participado ativamente, não manifestaram monitoramento cognitivo consciente.

O próximo Episódio contém a transcrição das falas dos alunos quando envolvidos na fase de resolução. Ao discutir uma questão de matemática básica suscitada nas conversas sobre função exponencial – resolver $(2 \cdot 2^a - 2^a)$ – o professor propõe um debate que, entendemos, configura-se segundo a dimensão reflexiva da metacognição, segundo a qual, dentre outras coisas, busca-se avaliar as próprias estruturas cognitivas. Tal discussão segue no Episódio II.

EPISÓDIO II

P: Por que será que a nossa cabeça enxergou uma coisa [um jeito de resolver]. Se tivesse escrito assim ó “ $2x-x$ ” todo mundo já saberia o que dava. Será que alguém, ao olhar pra isso [$2x-x$], faria assim: “coloca o x em evidência, $2-1$, x vezes 1 , x ”.

D: Não.

P: Por que será que, nesse caso, então a nossa cabeça fez a gente colocar em evidência?

D: Porque a gente aprendeu assim.

E: Eu aprendi assim.

D: Quando é com x a gente aprendeu assim, mas do outro jeito a gente aprendeu a pôr em evidência.

E: É muito complexo [se referindo ao método de “pôr em evidência”].

R3: É mais comum.

A discussão a que se refere esse episódio foi provocada pelo professor ao verificar que todos os alunos haviam simplificado a expressão $(2 \cdot 2^a - 2^a)$ colocando 2^a em evidência ao invés de simplesmente pensar sobre a expressão e escrever a resposta. O professor propõe então, uma reflexão do porquê, necessariamente, todos resolveram do mesmo modo: “*Por que será que, nesse caso então, a nossa cabeça fez a gente colocar em evidência?*”. Faz, ainda, uma comparação com vistas a facilitar a compreensão da reflexão proposta: “*Se tivesse escrito assim ó “ $2x-x$ ” todo mundo já saberia o que dava. Será que alguém, ao olhar pra isso [$2x-x$], faria assim: $2x - x = x \cdot (2 - 1) = x \cdot 1 = x$?*”.

Essa intervenção do professor levou a aluna D a refletir sobre essa questão, a refletir, portanto, sobre um conhecimento que já possuía e para o qual não tinha lançado o seu olhar ainda, trata-se da metacognição na sua vertente

conhecimento sobre o conhecimento. Segundo ela (D) “quando é com x a gente aprendeu assim, mas do outro jeito a gente aprendeu a pôr em evidência”, se referindo, primeiro, a $2x-x$ e, segundo, a $(2 \cdot 2^a - 2^a)$. A manifestação da aluna D denota a dimensão refletiva da metacognição, já que ela reconhece e avalia as próprias estratégias cognitivas ao refletir sobre como realiza a simplificação em $2x-x$ e em $(2 \cdot 2^a - 2^a)$.

O monitoramento na dimensão reflexiva da metacognição foi, na transcrição desse Episódio, um monitoramento realizado pelos alunos – ao menos por D, E e R3 que se manifestaram – por meio da mediação do professor, o que pode denotar que o monitoramento ora individual pode passar a ser coletivo na medida em que o professor ou o aluno que o realiza primeiro, o socializa para os demais sujeitos. Nesse sentido, o monitoramento pode ser entendido como social, podendo ser aprendido nas interações entre os sujeitos, via a mediação semiótica.

Na atividade de Modelagem “O trânsito na cidade de Apucarana”, os alunos apresentaram dificuldades tanto na condução da atividade, que diferia das já vivenciadas por eles, quanto nos conteúdos matemáticos que dela emergiram. Não porque os conteúdos matemáticos eram novos para os alunos, mas o modo como eles apareciam e o seu uso pra resolver um problema aberto e com diferentes possibilidades de resolução sim. Esse novo olhar para os conteúdos matemáticos, em especial, função linear e função exponencial, contribui para uma ressignificação dos conteúdos, já que os conceitos ganham sentido nos contextos em que são utilizados. Isso implica em considerar a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica que possibilita a interação social, o embate de diferentes ideias, a reflexão conjunta das características dos conteúdos matemáticos e, portanto, a significação e ressignificação de elementos da Matemática.

Em relação à atividade dos alunos nos momentos da resolução evidenciados nos Episódio I e II podemos considerar o seguinte resumo no que tange às práticas de monitoramento explícito percebidas.

EPISÓDIO I E II

Discussões na situação “trânsito na cidade de Apucarana”

FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Inteiração no Episódio I e Resolução no Episódio II
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
Na inteiração, o objetivo cognitivo consistia em discutir uma abordagem matemática para o tema “trânsito na cidade de Apucarana” enquanto as ações cognitivas correspondentes foram: elaborar uma questão para investigar e planejar encaminhamentos, tais como ir ao DETRAN coletar dados. Na Resolução: refletir sobre a simplificação da expressão $2 \cdot 2^a - 2^a$ é o objetivo e a ação cognitiva.
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
Os alunos D, V e Y manifestam um conhecimento metacognitivo sobre a variável tarefa na inteiração. Segundo eles, uma atividade matemática precisa, necessariamente, ter números ou dados já de antemão, um problema previamente elaborado e uma resposta certa que, embora já conhecida pelo professor, é atividade do aluno encontrar.
MONITORAMENTO OBSERVADO
<p>Monitoramento: Nessa situação, só houve um monitoramento observado em todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem – ao menos explícito, declarado pelo sujeito nas suas falas. Nesse monitoramento, referente à dimensão reflexiva da metacognição, os sujeitos reconhecem e avaliam o modo como realizam uma simplificação a partir de uma representação inicial. Emergiu na fase de Resolução e consistiu na reflexão de três alunos – E, D e R3 – sobre as diferenças nas resoluções para as expressões $2x - x$ e $(2 \cdot 2^a - 2^a)$. Segundo a aluna D “quando é com x a gente aprendeu assim [se referindo à simples subtração], mas do outro jeito a gente aprendeu a pôr em evidência”. Essa manifestação sugere que os algoritmos utilizados pelos alunos dependem da representação matemática utilizada, que os suscitam, e da formação escolar que ensina a lidar com cada representação de um modo.</p> <p>Dimensão Metacognitiva: Reflexão.</p> <p>Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: Possibilidade de revisitar conteúdos já aprendidos, como os de Matemática Básica, como condição necessária para o desenvolvimento da atividade de Modelagem.</p> <p>Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: Não identificadas.</p>

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nessa situação, a mediação do professor é que provocou a reflexão dos alunos sobre os modos como, geralmente, realizamos determinados algoritmos. Essa mediação sugere uma reflexão, primeiramente, do professor – já que possivelmente ele não havia se preparado previamente para suscitar essa discussão – que é socializada e, a partir de então, compartilhada por alguns alunos.

5.1.2 ATIVIDADE 2: DOAÇÃO DE ÓRGÃOS

5.1.2.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE DOAÇÃO DE ÓRGÃOS

A atividade intitulada Doação de Órgãos foi introduzida a partir de matérias que abordavam a temática sobre diferentes perspectivas, desde aquelas vinculadas à igreja, passando por àquelas relacionadas a pesquisas sobre doação de órgãos via eutanásia, até àquelas sob o ponto de vista de transplantados com sucesso. Cada um dos três grupos formados pelos alunos ficou responsável por ler e apresentar as informações de uma ou duas destas matérias. Todos discutiram, portanto, os assuntos relacionados à Doação de Órgãos presentes nos diferentes artigos. Essa dinâmica possibilitou o engajamento dos alunos no desenvolvimento da atividade de Modelagem.

Em seguida, apresentamos aos alunos o seguinte texto sobre doação de órgãos:

Atividade – Doação de Órgãos

Discussões sobre a doação de órgãos, campanhas publicitárias, bem como medidas governamentais de incentivo à doação são muito presentes no âmbito nacional. Em se tratando da doação de órgãos a resistência familiar na hora de tomar a decisão por doar ou não os órgãos de um ente querido dado sua morte recente é um entrave. O potencial doador tem que ter morte encefálica, muitas vezes, decorrente de acidentes graves, o que prejudica a decisão da família em doar ou não os órgãos.

Dentre os problemas que podem impedir a doação, uma vez concedida, está o fato de o paciente sofrer uma parada cardíaca durante a cirurgia de retirada dos órgãos, o que inviabiliza a doação de alguns deles, ou o fato do doador apresentar resultados de sorologia positiva para HIV ou outras doenças infecciosas. No quadro são apresentadas informações sobre condições sobre doação de órgãos o que sinaliza que se os procedimentos necessários para a doação de órgãos não acontecerem rapidamente, os mesmos podem ser perdidos.

Antes da parada cardíaca	Depois da parada cardíaca	Órgãos que podem ser doados em vida
<ul style="list-style-type: none"> • Coração (retirado do doador e mantido fora do corpo por no máximo 6 horas) • Pulmão (retirados do doador e mantido fora do corpo por no máximo 6 horas) • Fígado (retirado do doador e mantido fora do corpo por no máximo 24 horas) • Pâncreas (retirado do doador e mantido fora do corpo por no máximo 24 horas) 	<ul style="list-style-type: none"> • Córneas (retiradas do doador até 6 horas e mantidas fora do corpo por até 7 horas) • Rins (retirados do doador até 30 minutos e mantidos fora do corpo até 48 horas) • Ossos (retirados do doador até 6 horas e mantidos fora do corpo por até 5 anos) • Medula óssea (se compatível, feita por meio da aspiração óssea ou coleta de sangue) • Pele e válvulas cardíacas 	<ul style="list-style-type: none"> • Rim (apenas um) • Pâncreas (uma parte) • Medula óssea (se compatível, feita por meio de aspiração óssea ou coleta de sangue) • Fígado (apenas parte dele, em torno de 70%) • Pulmão (apenas parte dele, em situações excepcionais)

Fonte: Ministério da Saúde

As estatísticas mostram que o número de doações realizadas tem aumentado consideravelmente no decorrer dos últimos anos, conforme se verifica na tabela.

Ano	Tempo	Total de transplantes realizados (órgãos sólidos, córnea e medula) (T)
2003	0	12722
2004	1	14175
2005	2	15570
2006	3	15788
2007	4	17428
2008	5	18989
2009	6	20253

Fonte: http://portal.saude.gov.br/portal/aplicacoes/noticias/default.cfm?pg=dspDetalheNoticia&id_area=124&CO_NOTICIA=11738, capturado em 10 de outubro de 2011

Mesmo com o aumento no número de doações efetivadas, há de se considerar que o tempo que um paciente fica na fila de espera por um transplante depende de múltiplos fatores, dentre eles, o tipo de órgão de que necessita, a compatibilidade com o doador em potencial e a idade que o paciente tem. Em relação à idade, mais especificamente no caso dos doadores de órgãos, consideramos uma tabela na qual são informadas as quantidades de doadores de órgãos para diferentes faixas etárias no estado de São Paulo.

São Paulo – faixa etária									
<01	01-05	06-10	11-17	18-34	35-49	50-64	65-79	>80	Total
0	10	8	25	118	158	119	31	2	471

Fonte: http://www.abto.org.br/abtov02/portugues/populacao/rbt/anoXVI_n2/index.aspx?idCategoria=2, capturado em 10 de outubro de 2011

Frente às informações do texto e considerando as discussões realizadas no momento inicial, o professor questionou os alunos sobre quais questões poderiam ser investigadas sem que fosse necessário recorrer a outras informações além das já existentes. Os alunos do grupo 1 formularam dois³³:

³³ Nessa e na próxima situação, as atividades foram realizadas internamente em cada grupo. Nesse caso, como justificamos no capítulo IV, consideramos apenas as discussões de um grupo nas análises.

- 1) Como pode ser descrita a quantidade de transplantados no estado de São Paulo em comparação ao Brasil, nos anos de 2003 a 2009?
- 2) Para qual idade o número de doadores é maior considerando as estatísticas de doação de órgãos?

A elaboração dessas questões proporcionou discussões importantes sobre a caracterização de uma atividade de Modelagem, principalmente no que tange a que tipos de problemas podem conduzir a uma investigação matemática com diferentes possibilidades de resolução. Dentre as questões o grupo decidiu investigar a segunda, considerando a tabela referente ao estado de São Paulo como representativo da situação do número de doadores como um todo – premissa assumida pelos alunos de modo “natural”.

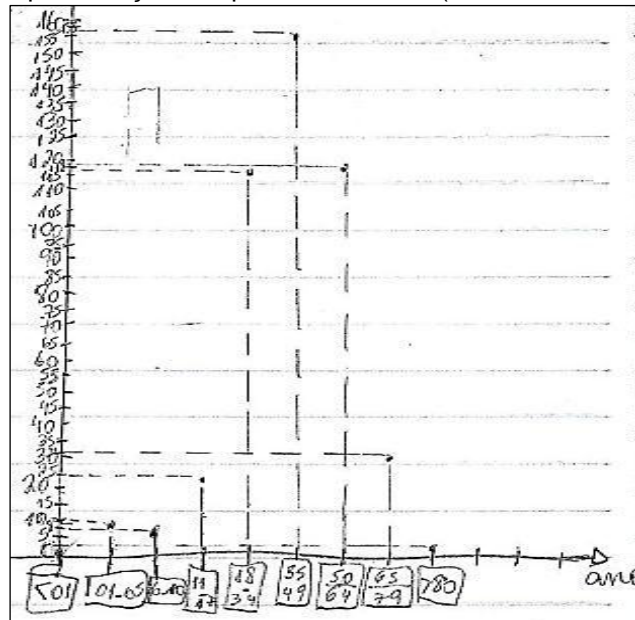
Talvez devido à forte tradição escolar, o grupo de alunos tentava, mesmo sem uma justificativa conceitual para isso, utilizar as mesmas estratégias presentes na situação estudada na semana anterior: encontrar uma razão que representasse, simultaneamente, o crescimento e o decréscimo da quantidade de doadores para diferentes idades (como razões de uma progressão aritmética ou geométrica).

O grupo utilizava uma dinâmica interessante. Nem todos anotavam informações e realizavam os cálculos, mas todos participavam, a seu jeito, da resolução em si. O aluno R1 era quem realizava o registro escrito da resolução do grupo. Os demais membros até registravam alguma coisa, mas sem a preocupação de ter para si todo o desenvolvimento da atividade. Assim, “solto” no material dos alunos é possível encontrar, por exemplo, a resolução de um sistema linear, mas não de onde vem tal sistema e o que ele significa na situação em estudo. Esse tipo de informação consta, no entanto, no registro do aluno R1, considerado, pelos componentes do grupo, o registro “do grupo todo”.

Com vistas a responder o problema elencado e depois de muito procurar uma razão para a sequência de dados, o professor sugere que os alunos construam uma representação gráfica para poder pensar sobre eles. Num primeiro momento, os alunos construíram uma representação gráfica considerando, inclusive, as faixas etárias no eixo das abscissas (Figura 11). O modo como foram representadas essas

faixas etárias sugerem que os alunos não sabiam, a priori, como lidar com essa informação em uma representação gráfica. Essa situação suscitou um tratamento na tabela inicial.

Figura 11: Representação dos pares ordenados (idade; número de doadores)



Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

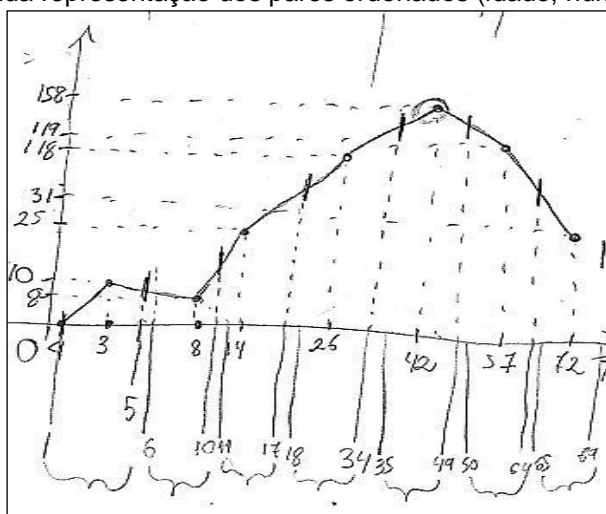
Na nova tabela, os alunos consideram uma idade (i) média para cada faixa etária e consideram que para aquela idade média haveria a mesma quantidade de doadores (T) da faixa etária correspondente (Tabela 05).

Tabela 05: Relação entre idade (i) e quantidade de doadores (T)

Idade (i)	3	8	14	26	42	57	72
Quantidade de doadores (T)	10	8	25	118	158	119	31

A partir dessa tabela um novo esboço de gráfico é construído e uma análise das respectivas representações levam os alunos a considerar a possibilidade de ajustar os dados a uma função quadrática ou a uma função seno. O ajuste é realizado via a função quadrática. Na última representação gráfica, embora não tenham conversado entre si sobre isso, os alunos consideraram a continuidade da função, como podemos verificar na Figura 12.

Figura 12: Segunda representação dos pares ordenados (idade; número de doadores)



Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

Para encontrar os parâmetros de uma função quadrática que se ajustasse aos valores da tabela, os alunos consideraram a expressão geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ e três dentre os pares ordenados da tabela. Discussões em torno de quais três pontos considerar foram realizadas, mas sem nenhuma fundamentação. Decidiram pelos pares (26,118), (42,158) e (72,31), com os quais escreveram o seguinte sistema linear para determinar os valores dos coeficientes a, b e c.

Figura 13: Sistema linear na situação doação de órgãos

$$\begin{array}{l}
 T(i) = a \cdot i^2 + b \cdot i + c \\
 25 = 14^2 a + 14b + c \\
 158 = 42^2 a + 42b + c \\
 31 = 72^2 a + 72b + c
 \end{array}$$

Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

Em seguida, com vistas a resolver o sistema linear, fez-se necessária a intervenção do professor para apresentar (no caso de muitos alunos) e relembrar (no caso de outros) dois métodos de resolução de sistemas lineares: a Regra de Cramer e o escalonamento. A explicação foi realizada para todos os alunos participantes do curso. O grupo em questão, por sua vez, decidiu utilizar a Regra de Cramer, talvez por ser um assunto estudado a pouco pela maioria deles, nas aulas regulares de Matemática do Ensino Médio.

Esse grupo obteve como função que relaciona a idade dos doadores (i) e a quantidade de pessoas doadoras de órgãos (y), a expressão:

$$y = -0,166229 \cdot i^2 + 14,3991 \cdot i - 144,0074 \quad \text{para } i \in R / 14 \leq i \leq 72 \quad (1)$$

O intervalo fora considerado, nas falas dos alunos, quando se referiam ao fato de que o ajuste funcionaria para idades compreendidas entre 14 e 72 anos, intervalo de interesse dada a intenção da atividade de Modelagem: determinar a idade para a qual o número de doadores seria maior.

O grupo realizou a atividade de Modelagem até esse ponto, ainda no primeiro dia destinado à ela, ou seja, realizaram essas ações em duas horas. No próximo encontro, depois de uma rápida revisão geral sobre a atividade de Modelagem já iniciada, os alunos continuaram o desenvolvimento desta, realizando a validação desse modelo (Figura 14) e a resolução da questão – para qual idade o número de doadores é maior?.

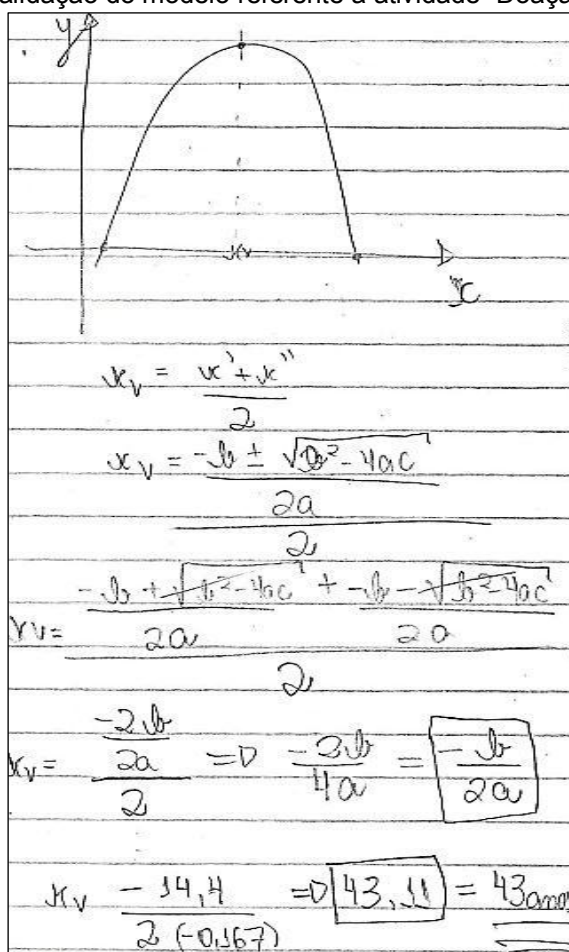
Figura 14: Validação do modelo referente à atividade “Doação de Órgãos”

	$i = 36$	$i = 72$	i	T	T
$y = 14^2 \cdot (-0,166229) + 14 \cdot 14,3991 - 144,0074$	$y = 26^2 \cdot (-0,166229) + 26 \cdot 14,3991 - 144,0074$	$y = 72^2 \cdot (-0,166229) + 72 \cdot 14,3991 - 144,0074$	3	-302	10
$y = 24,999316$	$y = 14,998396$	$y = 30,993$	8	-39	8
			14	24,99	25
			26	14,99	15
			42	167,52	25
			57	126,663	19
			72	30,99	30

Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

Para obter a resposta para essa questão, os alunos decidiram realizar o cálculo do i do vértice. No entanto, embora soubessem que existia uma fórmula para isso, não a recordavam no momento. Em decorrência disso, o professor entrevistou de modo a fazer os alunos pensarem em como obter essa fórmula, usando a média entre as raízes da equação do segundo grau. Nesse contexto é que se dá a obtenção da resposta para a questão inicial, a saber, aproximadamente 43 anos segundo o modelo matemático construído pelos estudantes (Figura 15).

Figura 15: Validação do modelo referente à atividade “Doação de Órgãos”



Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

Essa atividade de Modelagem promoveu discussões acerca da temática abordada, em relação aos conteúdos matemáticos que emergiram em seu desenvolvimento – principalmente função quadrática, resolução de sistemas lineares, x do vértice e y do vértice de uma parábola – e em relação à estratégia utilizada na resolução do problema – ajuste de curvas a partir da análise gráfica da situação inicial. Embora os conteúdos matemáticos fossem de conhecimento dos alunos, com exceção do escalonamento, o modo como esses conteúdos eram utilizados para resolver um problema inicialmente elaborado por eles era tarefa muito diferente das já vivenciadas, o que se refletiu nas intervenções do professor, ainda realizadas em grande número.

Os registros escritos dos alunos nessa atividade são sistematizados na Figura 16 a seguir.

Figura 16: Registros escritos produzidos no decorrer da resolução da atividade de Modelagem

The figure shows a sequence of handwritten mathematical work:

- Graph 1:** A coordinate system with points plotted. The x-axis is labeled with values 3, 8, 14, 26, 42, 57, 72. The y-axis has values 10, 8, 25, 118, 119, 31.
- Table:**

i	T
3	10
8	8
14	25
26	118
42	158
57	119
72	31
- Equation:** $T(i) = a_i^2 + b_i + c$
- System of Equations:**

$$\begin{cases} 25 = 14a^2 + 14b + c \\ 8 = 8a^2 + 8b + c \\ 31 = 72a^2 + 72b + c \end{cases}$$
- Matrix Form:**

$$\begin{bmatrix} 14^2 & 14 & 1 & 25 \\ 26^2 & 26 & 1 & 118 \\ 72^2 & 72 & 1 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 118 \\ 31 \end{bmatrix}$$
- Calculations:**
 - $\det A = -32016$
 - $\det a = 5322$
 - $\det b = -461004$
 - $\det c = 4610544$
- Cramer's Rule:**
 - $a = \frac{5322}{-32016} = -0,166222$
 - $b = \frac{-461004}{-32016} = 14,3991$
 - $c = \frac{4610544}{-32016} = -144,0074$
- Final Graph:** A graph of the parabola $y = -0,166222x^2 + 14,3991x - 144,0074$.

Fonte: Registro escrito dos alunos na atividade

5.1.2.2 DOAÇÃO DE ÓRGÃOS – ANÁLISE ESPECÍFICA

Os registros escritos produzidos no andamento da atividade Doação de Órgãos denotam muitas das ações realizadas pelos alunos e são indícios de seus conhecimentos. Esses registros são em Modelagem, muitas vezes, produto de discussões de elementos de um grupo. Discussões em que a interação dos sujeitos pode agir como mediação semiótica nas ações cognitivas dos alunos e mediação

que pode atuar na zona de desenvolvimento proximal deles, dinâmica e continuamente.

Nessa situação, como já explicitamos na descrição da atividade, o professor apresentou diferentes artigos que discutiam a doação de órgãos. A partir dos textos, os alunos realizaram um debate acerca do tema e de assuntos relacionados à ele, tais como a eutanásia. Essas discussões antecederam a apresentação do texto da atividade e constituíram-se um convite à investigação.

A partir da leitura do texto da atividade é que se dá as discussões entre os alunos e professor apresentadas no Episódio III:

EPISÓDIO III

P: Com estas informações em mãos, que tipo de problema nós poderíamos formular agora sobre o assunto e que pudesse ser respondido com as informações que nós temos, por meio da matemática?

R1: Ah

R2: Dá pra ver se tá aumentando o número de doadores.

R1: Professor... Esta tabela aqui é do Brasil ou de São Paulo?

P: Do Brasil

R1: A gente podia ver, talvez, a participação de São Paulo, a porcentagem em cada ano, talvez...

A: No ano?

R1: É, ou em um ano.

P: Considerando que estes dados de São Paulo se repitam no decorrer dos anos?

R2: Mas é que aqui não diz o ano que é.

R1: Mas a gente faz pra cada um, dizendo que no caso este aqui [tabela de São Paulo em relação às idades] seria todos os anos o mesmo.

P: Mas qual seria o problema então pra gente poder fazer isso?

R1: Qual a porcentagem de participação de transplantes do estado de São Paulo no Brasil?

D: Em um determinado ano, e dá?

P: Vamos escrever isso... Qual a porcentagem de transplantados...

D: no estado de São Paulo por faixa etária...

R1: Não, por faixa etária não dá porque não tem faixa etária nesta do Brasil.

R3: no do Brasil, no total só.

P: Qual a porcentagem de transplantados em São Paulo...

D: nos anos de 2003 até 2009

R1: no Brasil

P: Qual a porcentagem de transplantados em São Paulo em relação ao Brasil

R2: entre 2003 e 2009

P: entre 2003 e 2009

R2: *isso!*

P: *Vamos considerar a hipótese na pergunta?*

R1: *ah, sendo que o total é igual em todos os anos,*

P: *sendo o total em São Paulo*

D: *De 471 doadores*

P: *de 471 doadores todos os anos.*

R1: *ahã*

D: *Dá pra fazer isso?*

[...]

P: *Vamos lá... próxima ideia. Que outras coisas poderíamos estudar?*

[...]

D: *A proporção de transplantes nos outros anos? Não, a não, mas isso a gente...* [como quem se arrepende de ter dito algo]

R1: *Se cada doador destes de São Paulo doasse todos estes órgãos, a quantidade de órgãos transplantados. Porque aí tá dizendo que são órgãos sólidos, córnea e medula.*

P: *Mas a gente tem condições de...*

D: *Não... não com isso aqui, meu Deus do céu, vai ser muito difícil esse! Não... acho que esse não dá!*

P: *Quer dizer, até daria pra investigar algo do tipo se a gente fosse atrás de mais informações.*

R1: *Não, por exemplo, se estes, no caso, 471 doassem... ah, mas já tá considerando esse número.* [como quem encerra a discussão admitindo a impossibilidade de sua ideia]. *Ah tá.*

P: *Mais o quê? Gente? Ideia?*

[...]

P: *Gente, dêem uma olhada nos dados referentes à doação de órgãos. Nos dados da tabela de cima, o número de transplantes tem aumentado ou diminuído?*

D: *Aumentado.*

P: *Em todos os anos? Ou chegou a diminuir?*

R2: *Em todos os anos aumentou.*

P: *Em todos os anos aumentou. Agora olhem para os dados da tabela de baixo, em relação às idades, o que acontece com os dados conforme a idade aumenta?*

R2: *Chega uma hora que ela aumenta e depois começa a diminuir.*

D: *Mas aí tem outros problemas né. Aí depende...*

P: *Ela aumenta e depois diminui.*

R2: *É.*

R1: *No meio é uma parábola.*

D: *Mas aí depende das condições da morte. Imagina, uma pessoa de 80 anos vai... não tem todos os órgãos pra doar.*

R2 ri.

R1: *É quase uma meia senóide.*

R3: *Não gosto de senóide.*

R1: *Eu gosto.*

R3: *É muito louco senóide.*

P: *Quer dizer, estudar a idade das pessoas que doam.*

R2: *A idade ideal, a faixa etária ideal.*

P: *A idade ideal ou aquela faixa etária que mais doa?*

R2: *que mais doa.*

Nas discussões apresentadas nesse Episódio, professor e alunos discutem quais problemas podem ser elencados para o estudo da situação a partir das informações existentes (ou nas matérias lidas sobre doação de órgãos ou no texto-atividade entregue pelo professor). Como mediação inicial, o professor propõe um objetivo cognitivo aos alunos – elencar um problema e elaborar uma questão – dizendo: “*Com essas informações em mãos, que tipo de problema nós poderíamos formular agora sobre o assunto e que pudesse ser respondido com as informações que nós temos, por meio da matemática?*”. Entendemos que os alunos aceitam o objetivo cognitivo pela sua participação no cumprimento desse objetivo.

Ao partilharem do objetivo de elencar um problema e formular uma questão para a situação em estudo, uma ação cognitiva – elaborar a questão em si – precisou ser realizada. Para isso, no entanto, outras ações cognitivas emergiram. Ler e interpretar uma tabela, converter a representação tabular para uma representação gráfica mentalmente de modo a testar uma ideia, são exemplos dessas ações.

Elaborar uma questão foi uma atividade diferente das costumeiramente realizadas na escola, tanto que se percebe, na primeira tentativa de problematização, certa confusão no discurso do aluno R1, como se não houvesse uma ideia organizada em sua mente sobre o que fazer realmente. Pelas falas do aluno, é possível inferir que o elaborar uma questão confundiu-se, no início, com um possível encaminhamento de resolução para uma questão até então inexistente.

Uma primeira ideia deu-se em relação às duas tabelas numéricas apresentadas na folha-atividade. Nesse contexto, elaboraram o seguinte problema: Qual a porcentagem de transplantados em São Paulo em relação ao Brasil, entre 2003 e 2009, sendo o total em São Paulo de 471 doadores todos os anos?

Para a elaboração dessa primeira questão duas intervenções foram feitas pelo professor. Primeiramente, provavelmente por acreditar que uma ideia deve ser sempre anotada para não ser esquecida (uma estratégia metacognitiva), o professor sugere que os alunos escrevam a ideia de problema, ainda em vias de consolidação: “*Vamos escrever isso...*”. Em seguida, sugere que os alunos considerem na escrita da questão o pressuposto elencado inicialmente: “*Vamos considerar a hipótese na*

pergunta?”. Provavelmente, por se constituir uma autoridade na sala de aula, os alunos iniciam a escrita do problema imediatamente à proposta do professor e os alunos R1 e D completam o problema com o referido pressuposto: “Ah, sendo que o total é igual em todos os anos” e “de 471 doadores”.

“Dá pra ver se tá aumentando o número de doadores” foi uma colocação feita por R2 ainda no início da discussão. No entanto, logo em seguida, R1 chama a atenção do professor e do grupo, de modo que o próprio aluno R2 começa a participar da discussão e não retoma sua ideia. A ideia do aluno, no entanto, poderia ter sido aproveitada pelo docente, principalmente na abordagem de um problema que utilizasse em sua investigação a primeira tabela apresentada na folha-atividade. Essa tabela já havia sido preparada pelo professor o qual esperava que os alunos vissem nela uma possibilidade de problematização, tal como “Qual o total de transplantes que podem ser realizados ao final de 2011 considerando a tendência dos dados?”, tanto que já havia colocado uma coluna para a variável auxiliar “tempo” (Tabela 06). No entanto, uma questão considerando apenas essas informações não foi elaborada por esse grupo de alunos.

Tabela 06: Total de Transplantes Realizados no Brasil

Ano	Tempo	Total de transplantes realizados (órgãos sólidos, córnea e medula) (T)
2003	0	12722
2004	1	14175
2005	2	15570
2006	3	15788
2007	4	17428
2008	5	18989
2009	6	20253

Fonte: http://portal.saude.gov.br/portal/aplicacoes/noticias/default.cfm?pg=dspDetalheNoticia&id_area=124&CO_NOTICIA=11738, capturado em 10 de outubro de 2011

Por ser a primeira atividade do segundo momento da Modelagem e os alunos não estarem habituados ao trabalho colaborativo, em grupo, muitas falas dos colegas acabam sendo ignoradas pelos demais alunos. Foi o que aconteceu com R1 na situação acima e com D, por exemplo, ao perguntar “Dá pra fazer isso?” e não obter comentários dos demais alunos, bem como ao propor “A proporção de

transplantes nos outros anos? Não, a não, mas isso a gente...” e ao comentar “*Mas aí tem outros problemas né. Aí depende...*”.

Nas transcrições desse Episódio, os alunos manifestaram conhecimentos metacognitivos sobre si mesmos e sobre a tarefa. Quando D diz “*Não... não com isso aqui, meu Deus do céu, vai ser muito difícil esse! Não... acho que esse não dá!*” expressa um conhecimento metacognitivo sobre a variável tarefa. Tal conhecimento pode ter sido construído no momento da discussão, provavelmente devido à proposta de R1 que antecedeu esse posicionamento: considerar que cada doador de São Paulo (referente à segunda tabela da folha-atividade) fosse doador de todos os seus órgãos e, nesse sentido, a investigação se daria em torno da quantidade de órgãos transplantados. Essa mesma aluna manifesta mais adiante o motivo pelo qual, nesse momento, não concebia a ideia de R1. Ela pensava nas pessoas de 80 anos ou mais que não teriam todos os órgãos para doar e na influência que as condições da morte teriam sobre alguns órgãos: “*Mas aí tem outros problemas né. Aí depende... Mas aí depende das condições da morte. Imagina, uma pessoa de 80 anos vai... não tem todos os órgãos para doar*”. Essa interpretação, no entanto, não fora feita em tempo real, no momento de realização da atividade.

O conhecimento metacognitivo sobre a variável pessoa se deu a partir da hipótese considerada pelos alunos de que uma parábola e uma “meia senóide” poderiam ser utilizadas para denotar o comportamento da quantidade de doadores diante de faixas etárias (segunda tabela da folha atividade). Ao ouvir o termo “senóide”, R3 manifesta “*Não gosto de senóide*” e “*É muito louco senóide*”, enquanto R1 afirma “*Eu gosto*”.

Nessa mesma parte do Episódio, quando R1 utiliza a ideia de que uma parábola ou uma meia senóide poderiam representar o comportamento da quantidade de doadores diante da idade, apresenta ideias já existentes em sua estrutura cognitiva, o que denota níveis de desenvolvimento já alcançados, ou ainda, conceitos que podem estar em seu nível de desenvolvimento real.

Para o professor, tanto a primeira quanto a segunda questão elaborada pelos alunos consideravam aproximações que se distanciavam muito do real – “considerar que embora o número de transplantes realizados com sucesso

aumentaria no Brasil no decorrer dos anos, em São Paulo esse número permaneceria constante e igual a 471 doadores sempre” e “considerar que todos os doadores doariam todos os seus órgãos, visando determinar o número de órgãos doados”. Diante disso, o professor intervém de modo a possibilitar a elaboração de uma terceira questão, considerando, no entanto, o tópico do tema que os alunos mais discutiam – a idade dos doadores. Para isso, pergunta: “*Deem uma olhada nos dados referentes à doação de órgãos. Nos dados da tabela de cima [sobre a evolução no número de transplantes realizados com sucesso] o número de transplantes tem aumentado ou diminuído?*” e “*Agora olhem para os dados da tabela de baixo [sobre a idade dos doadores], em relação às idades, o que acontece com os dados conforme a idade aumenta?*”.

Quando R2 responde a segunda pergunta (“*Chega uma hora que ela aumenta e depois começa a diminuir?*”) intervém em conjunto com o professor (ou seja, realiza uma mediação) influenciando o aluno R1, que expressa conhecimento de gráficos de funções que assim podem se comportar: a parábola e a senóide. Em um próximo Episódio, verificaremos que esse conhecimento será importante na resolução do problema e é aqui que ele tem origem: na própria elaboração do problema. Isso pode denotar que elencar um problema (o número de doadores de órgãos dada a sua idade é diferente) e elaborar uma questão (para qual idade o número de doadores é maior?) implicam em reconhecer nessa questão possibilidades de encaminhamento, resolução e respostas, o que bem justificaria a dificuldade que os alunos encontram nessa tarefa.

A elaboração desse terceiro problema foi finalizada quando R2 e professor reconheceram a possibilidade de estudar a idade para qual haveria maior número de doadores de órgãos: “Para qual idade o número de doadores é maior considerando as estatísticas de doação de órgãos?”. Questão selecionada pelo grupo por ser de interesse dos sujeitos e por conter um maior número de informações. A questão pode ter sido elaborada, nesse caso, de modo a se ajustar às informações conhecidas naquele momento.

Portanto, em relação à atividade dos alunos no momento das discussões apresentadas no Episódio III, podemos considerar o seguinte resumo:

EPISÓDIO III

Elaboração de uma questão na situação Doação de Órgãos

FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Inteiração

OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS

Elencar um problema e elaborar uma questão sobre o assunto investigado – é ao mesmo tempo objetivo e ação cognitiva.

CONHECIMENTO METACOGNITIVO

D manifestou conhecimento metacognitivo sobre a variável tarefa ao julgar ser difícil calcular a quantidade de órgãos transplantados considerando que todos os doadores doariam todos os órgãos, usando, para isso, de conhecimentos extra matemáticos: “uma pessoa de 80 anos não doaria todos os órgãos” e “dependendo da causa da morte, nem todos os órgãos poderiam ser doados”.

R1 e R3 manifestaram conhecimento metacognitivo sobre a variável pessoa ao expressarem “*Não gosto de senóide*” e “*É muito louco Senóide*” – falas de R3 – e “*Eu gosto*” – fala de R1 se referindo ao posicionamento de R3.

D manifesta conhecimento metacognitivo sobre a variável estratégia ao perguntar aos demais componentes do grupo e ao professor “*Dá pra fazer isso?*” na formulação do primeiro problema. Isso denota que o problema elaborado, por ser diferente dos habitualmente trabalhados na escola e por considerar um pressuposto não justificável – considerar que embora no Brasil o número de transplantes aumente, em São Paulo isso não aconteceria – causou o estranhamento da aluna.

MONITORAMENTO OBSERVADO

Embora na situação, o monitoramento tenha sido realizado mais pelo professor que pelos alunos, R1 foi o único que manifestou algum monitoramento. Esse o fez em apenas dois momentos.

1) **Monitoramento:** R1 ao supervisionar a fala de D, avaliou a impossibilidade de considerar as faixas etárias na investigação, já que na tabela referente ao número de transplantados com sucesso no Brasil, não havia essa informação.

Dimensão Metacognitiva: Avaliação e administração. Primeiro R1 avaliou a formulação de D e, em seguida, desconsiderou a ideia de faixas etárias, o que denota,

por sua vez, o controle da tarefa em termos das informações provenientes da situação inicial.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento:

Diferentes possibilidades de problematizar um tema e de elaborar questões acerca dele.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A elaboração de uma questão, considerando-se o conjunto das informações da situação inicial e os pressupostos considerados pelos alunos.

- 2) **Monitoramento:** O mesmo aluno, R1, realiza o monitoramento de si mesmo quando, na tentativa de formulação do segundo problema diz “Não, por exemplo, se esses, no caso, 471 doassem... ah, mas já tá considerando esse número”. Esse trecho denota que o aluno avaliou a própria ideia, incompleta para o ouvinte, e que desistiu da mesma em face da avaliação.

Dimensão Metacognitiva: Avaliação.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A mediação realizada nas discussões do trabalho em grupo. Tal monitoramento surgiu diante da colocação do professor de que para investigar o problema que propunha R1 seria necessário conseguir mais informações.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A avaliação de um encaminhamento de resolução em face de conhecimentos sobre a situação e sobre matemática.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nessa atividade de Modelagem, como os alunos não estavam habituados ao trabalho colaborativo, em grupo, muitas das falas dos colegas acabaram sendo ignoradas pelos demais alunos.

A partir da consideração de um problema para investigar, já sem a presença do professor, os alunos começam a conversar sobre a possível resposta e sobre um encaminhamento que possibilitasse a solução. O diálogo estabelecido pelos alunos está transcrito no Episódio IV a seguir:

EPISÓDIO IV

R3: Ô R1...

R1: *Ãh...*

R3: *Não vai ser 41,11?*

R1: *O que?*

R3: *A idade ideal.*

R2: *42*

R3: *Ãh, 41,5*

R2: *42*

R1: *É 42*

R3: *É verdade... devo ter colocado um número, calculado algo errado. Sim, mas não vai ser 42 de qualquer maneira.*

R2: *Eu acho, foi o que eu falei já antes.*

R3: *Porque pelo que dá pra ver ele segue a ordem de uma senóide, daí o 42 vai ser o ápice que era 158 e a partir deste 158 ele vai começar a decrescer para chegar a ser 119.*

R1: *Sim, eu pensei nisso também.*

R3: *Porque tem que chegar à conclusão de que é esse número multiplicado por menos... não, não pode ser menos... por menos alguma coisa...*

R1: *Não precisa ser necessariamente uma senóide, pode ser uma, uma quadrá..., não*

R3: *Não é*

R1: *Não, não é uma quadrática. Não, porque aqui, no caso, ela tá fazendo só isso, ela vem fazendo assim ó (desenha uma parábola no ar).*

R2: *Mas ela começa assim ó (desenha no ar).*

R3: *Ela segue picos, não?*

R2: *Daí começa a subir e depois começa a descer.*

R1: *Tá... mas do jeito que eu fiz ela sobe e desce.*

R3: *Então... tá, mas de qualquer maneira ela vai chegar a um ápice, que provavelmente... Não, mas vai ter que chegar a alguma conclusão, alguma razão. Eu acho que...*

Rápida conversa paralela.

R3: *Não vai ter um número multiplicado por menos alguma coisa?*

R1: *Eu não lembro como ele fez! [se referindo à situação do trânsito na cidade de Apucarana e ao professor] **Ta... de que jeito chega a razão mesmo?***

R3: *Calcula tudo a média, e o resultado da média vai...*

R1: *É, mas não dá pra fazer isso aqui.*

D: ***A gente tem que fazer em todos os anos, certo?***

R3: *Daí tem que chegar a conclusão de que seria um número menos elevado a um x. [o aluno fazia menção à cara de uma PG]*

R1: *Menos?*

R2: *É um número multiplicado por um valor decimal, véio!*

[...]

R1: *A gente tá querendo fazer aqui por idade.*

R3: *Por idade... faixa etária.*

R1: *Isso quer dizer que, por exemplo, entre 26 e 42 anos, de 27 até 41 eles vão tá aumentando.*

R3: *27 e 41?*

R1: *Sim, entre 27 e 41 eles vão tá aumentando!*

A: *27?*

R1: Não [como quem diz sim], porque ó... 42 é maior que 26...
R3: Então, você não pode considerar isso sem você ter a noção do... sem você ter a noção do... não dá pra ter a noção do “hábito” tendo em vista que... a gente não tem uma ideia da razão.

[alguns alunos ignoram o que diz o R3]

[...]

R1: É uma suposição, então daí, em cima, disso a gente faz uma razão.

D: Daí a gente tem que fazer de todos os anos né?

R1: Sim, deixa eu tentar. Será que uma PA

R3: Não, não é nenhum dos dois. Nem PA e nem PG.

R1: É... tem que ser PG no caso.

R3: Então você vai ter que pegar e fazer uma PG da faixa etária. Pra daí se unir e fazer a razão de tudo.

R1: Calma, a PA ela pode ser infinita e ela ou é pra cima ou pra baixo e ela não varia. A PG pode variar.

R3: Não varia.

R1: A PG pode variar.

R3: A PG pode variar?

R1: Qual é o termo geral da PG? [pergunta pra A]

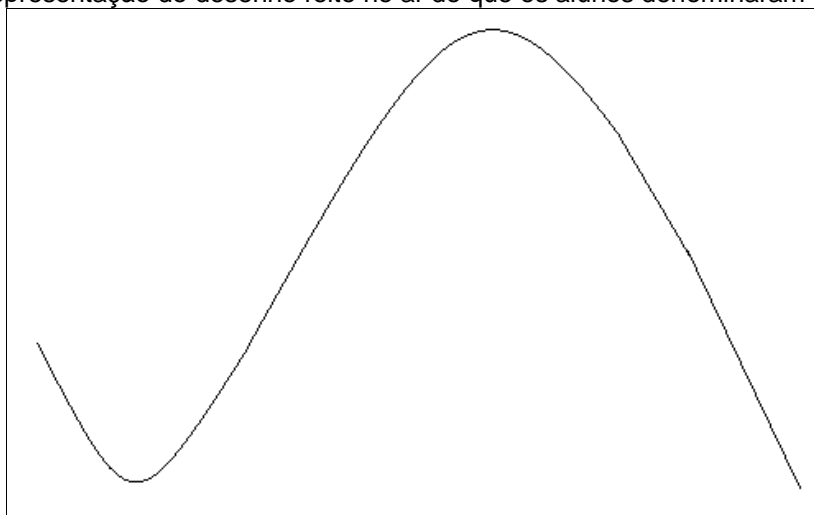
Assim que o problema sobre determinar a idade em que há maior número de doadores foi escolhido para a investigação, os alunos começaram a conversar sobre qual seria a possível resposta para o problema. Nessa conversa, baseada nos dados da Tabela 05, R2 afirma que 42 anos seria a idade em questão (média entre 35 e 49 anos, idades limites da faixa etária com 158 doadores), enquanto R3 julgava que seria um valor não inteiro menor que 42, propondo 41,11 num primeiro momento e 41,5 em outro. R3, no entanto, ao ouvir de R1 que a idade seria 42 anos, demonstra um conhecimento metacognitivo referente à dimensão “avaliação” ao afirmar “*é verdade... devo ter colocado um número, calculado algo errado*”. Não é possível identificar, porém, se R3 verificou de fato o erro no cálculo da média aritmética das idades 49 e 35 anos, ou se simplesmente concordou com a previsão de 42 anos frente à influência que R1 exerce nos posicionamentos do grupo.

R3 explicita, ainda, uma preocupação de mostrar, por meio de cálculos, por meio da Matemática, que a possível resposta inferida via análise dos dados iniciais é, de fato, a resposta do problema: “*Sim, mas não vai ser 42 de qualquer maneira*”. Essa mediação inicial é que leva o grupo a pensar em encaminhamentos que conduzam à obtenção da resposta já vislumbrada para o problema – 42 anos. A ação cognitiva relacionada à essa mediação é o planejamento. R3 sugere, então, que uma senoide pode se ajustar bem aos pares ordenados da Tabela 05. Segundo

ele “*pelo que dá pra ver segue a ordem de uma senóide, daí o 42 [se referindo à idade média da faixa etária de 35 à 49 anos] vai ser o ápice que era 158 [quantidade de doadores na faixa etária] e vai começar a decrescer para chegar a 119 [quantidade de doadores na faixa etária seguinte]*”. Essa sugestão denota que R3 considera apenas parte do gráfico da senóide, ou seja, que considera restrições no domínio da função seno, talvez devido ao evento não apresentar comportamento periódico.

R1 compartilha da ideia de R3 e sugere, como quem ainda pensa sobre o assunto enquanto fala, na possibilidade de ajustar os dados via uma função quadrática: “*Não precisa ser necessariamente uma senóide, pode ser uma, uma quadrá... não. [...] Não, não é uma quadrática. Não, porque aqui, no caso, ela tá fazendo só isso, ela vem fazendo assim ó [desenha uma parábola no ar]*”. R3 e R2 argumentam que não pode ser uma parábola. R2 representa, também via um desenho feito no ar (Figura 17), porque não julga que uma parábola possa ser uma ideia a considerar. No caso, R2 diz “*Mas ela começa assim ó*”, considerando que a dificuldade para ajustar a uma parábola estivesse no início dos dados.

Figura 17: Representação do desenho feito no ar do que os alunos denominaram “meia senóide”

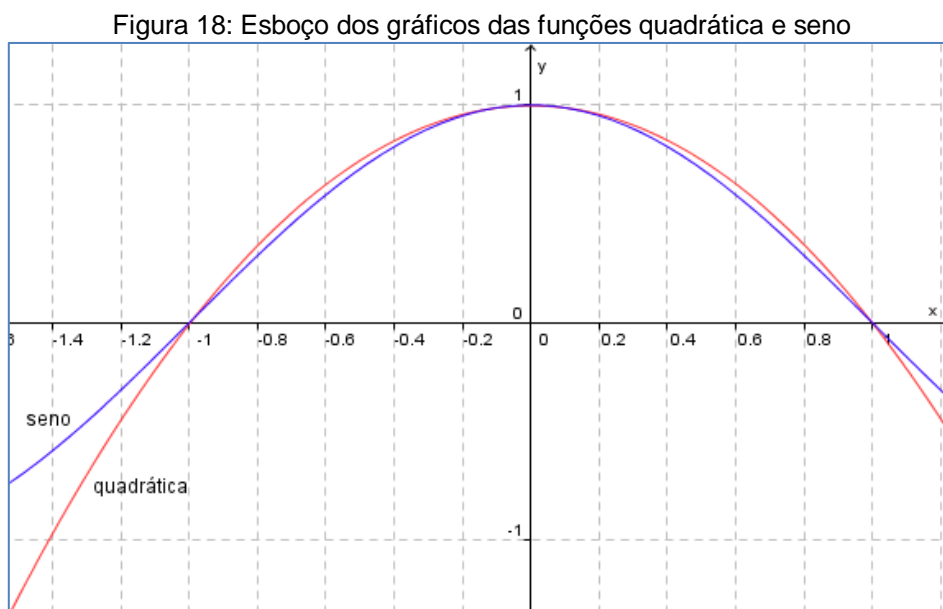


Fonte: Elaborado pelo autor.

R1, no entanto, argumenta que do jeito que ele pensou, usando uma parábola, o gráfico também “*sobe e desce*” assim como acontece no gráfico de uma função seno. R3 concorda que “*de qualquer maneira*”, independente do que escolherem – uma senóide ou uma parábola – a função “*vai chegar à um ápice*”, que é o que interessa para responder ao problema inicialmente elaborado. Essa

discussão denota conhecimentos dos alunos sobre os gráficos das funções seno e polinomial do segundo grau, possivelmente pertencentes ao nível de desenvolvimento real dos alunos, a partir dos quais se dá o encaminhamento da atividade de Modelagem.

A partir desse diálogo, desconhecido pelo professor, uma intervenção poderia se dar no sentido de os alunos explicitarem as diferenças entre os gráficos das duas funções. Por exemplo, se considerarmos uma restrição no domínio da função seno de modo que as funções seno e quadrática se sobreponham, essa “sobreposição” seria possível? Por quê? Como se dá o crescimento e o decrescimento em cada gráfico? Na situação em estudo, isso seria importante? Para responder a essas questões o gráfico da Figura 18 poderia contribuir.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nas discussões realizadas nesse Episódio os alunos não decidiram entre a função quadrática e a função seno, mas chegaram ao consenso de que tanto uma quanto outra eram alternativas para responder à questão, o que implica em considerar que, para os alunos, a resolução de uma questão em Modelagem Matemática pode se dar utilizando-se diferentes encaminhamentos no que tange aos conteúdos utilizados.

Isso pode ter sido resultado da experiência metacognitiva vivenciada no andamento da primeira atividade de Modelagem desenvolvida no curso, para a qual,

alunos e professor, construíram dois encaminhamentos diferentes que, por sua vez, resultaram de interpretações diferentes e conduziram a respostas diferentes.

A influência da atividade do trânsito na cidade de Apucarana foi tão marcante para R3 que, em momentos distintos, esse aluno sugeriu que uma razão deveria ser encontrada para a construção do modelo matemático, mesmo que a função seno e a função quadrática fossem utilizadas. Para R3, era preciso “*chegar à conclusão de que é esse número [a idade média nas faixas etárias] multiplicado por menos [...] por menos alguma coisa...*”, ou ainda, que “*vai chegar a alguma razão*”, “*a gente não tem uma ideia da razão*” ou quando se fez ouvir pelos demais: “*Não vai ter um número multiplicado por menos alguma coisa?*”. Essa última mediação de R3 foi considerada pelos demais alunos, os quais passam a tentar relembrar a resolução da atividade desenvolvida no encontro anterior. Isso fica evidente quando R1 afirma: “*Eu não lembro como ele [o professor] fez! Tá... de que jeito chega à razão mesmo?*”.

Todas essas tentativas de R3 em levar o grupo a pensar na obtenção de uma razão, como aconteceu na atividade anterior, denota o monitoramento do aluno, o qual monitora todas as discussões com vistas a fazer surgir, delas, a razão previamente almejada. Trata-se da dimensão metacognitiva intitulada administração – administração de um encaminhamento vislumbrado a priori pelo aluno.

Se por um lado R1, ao refletir sobre a ideia de encontrar uma razão como fizeram na situação anterior, afirma “*mas não dá pra fazer isso aqui*”, por outro, R3, que já tem ideia de qual poderia ser a “cara” dessa razão, afirma que “*seria um número menos elevado a um x* ”. Para R3, desde o início, encontrar uma razão para solucionar o problema por recorrência, assim como na atividade de Modelagem anterior, era um encaminhamento pelo qual passariam, obrigatoriamente. No entanto, não se tratava nem da razão da Progressão Aritmética, nem da Progressão Geométrica: “*Não, não é nenhum dos dois. Nem PA e nem PG*” – afirma R3.

Influenciado pela intervenção de R3, R1 reflete sobre as progressões aritmética e geométrica, procurando entender qual das duas poderia representar o comportamento dos dados presentes na situação “Doação de Órgãos”. Para ele, “*a PA pode ser infinita e ela ou é pra cima ou pra baixo e ela não varia. A PG pode*

variar". R1 considera que uma progressão geométrica alternada, de razão negativa, possa ser a saída para a situação em estudo, a qual possui comportamento crescente e decrescente, respectivamente. Embora a ideia não seja válida para a situação, ela é resultado de tentativas realizadas pelo aluno usando progressões aritméticas e geométricas com diferentes valores para a razão. Só mais tarde, via intervenção do professor, é que R1 esclarecerá esse seu posicionamento.

Quando o professor se aproxima do grupo, as discussões cessam momentaneamente. O professor tenta conhecer e entender o que já fizeram os alunos enquanto ficava auxiliando outros grupos. É nesse contexto que evolui as discussões apresentadas no Episódio V a seguir.

EPISÓDIO V

P: Eu já vi que vocês estão querendo criar algum modelo, né?

R1: Hã, hã...

P: O que vocês já fizeram? Deixa eu ver?

R3: É uma PG!

R1: PG!

P: PG!

R1: Porque exponencial ele não iria ter essa oscilação.

P: Mas qual seria o problema da PG?

R3: Ter uma razão fixa?

P: Porque daí aqui na frente ia acontecer o quê?

R1: Diminuir!

P: E na verdade...

R2: Não pode.

D: Não dá.

P: Ela só iria aumentar!

R3: Não dá pra fazer uma PG pra cada parte? Por exemplo, dos 3 ao 18 anos que você sabe que aumenta ela vai ter uma razão e daí dos 18 aos 58 ele vai ter outra razão.

R1: Mas a PG não varia? Ela não pode variar, por exemplo, fazendo isso? [se remetendo à PG alternada]

R2: A razão não pode.

R3: Mas a razão não pode.

R1: Não, a razão sim, mas é...

P: Para os dados seria interessante que essa tal razão fosse positiva e aí, quando chega aqui [no topo] sendo positiva ela não daria mais conta do recado.

R2: Não sendo positiva, é... maior que um!

P: Maior que um, verdade, Obrigado! Entre zero e um daí que é decrescente, depois menor é alternada.

R1: Então, vai ser menor...

P: Mas aí o "alternada" seria um de cada vez.

R1: A tá, não seria então tipo um, outro, depois... então não é.

D: Hein, mas como seria o gráfico dessa... Hein, como seria o gráfico dessa...

P: Perfeito! Comecem por aí, como seria o gráfico desses pares ordenados. O gráfico pode dar uma ideia do que é esse negócio, de como pode ser esse negócio.

R2: Vamos fazer o gráfico.

[professor se retira]

O professor intervém no grupo questionando os alunos sobre quais os encaminhamentos já realizados até então, ao que lhe informam que pensam em usar conceitos de progressão geométrica. Nesse momento, R1 manifesta que a PG constitui-se uma possibilidade já que exponencial não poderia ter a oscilação – referindo-se ao crescimento e ao decréscimo dos dados. É aqui que R1 começa a manifestar porque acredita que uma PG pode ser uma possibilidade. Ele se refere ao fato de que uma função exponencial é definida como toda função da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, o que implica em ser a função exponencial crescente ou decrescente sempre [conceitos lembrados, inclusive, na situação do trânsito na cidade de Apucarana], quando a PG, por sua vez, tem a possibilidade de ter como razão um número negativo, o que a torna “alternada”, por alternar valores positivos e negativos. Como o aluno imaginava utilizar essa ideia, no entanto, na elaboração do modelo matemático da situação, não foi possível inferirmos diante da coleta de dados.

O professor, aliás, só demonstra entender a perspectiva do aluno R1 quando faz um pequeno resumo do comportamento de uma PG, considerando o primeiro termo positivo – já que na situação esse número refere-se à uma quantidade – e tomando diferentes valores para a razão. Quando diz “*Entre zero e um daí que é decrescente, depois menor [que zero] é alternada*”, o aluno R1 rapidamente emenda “*Então vai ser menor...*”. Ao compreender a perspectiva do aluno, condição, aliás, para haver intervenções pertinentes, o professor explica que no caso da PG alternada, ter-se-ia um valor de cada vez (positivo, negativo, positivo, negativo,...) quando o aluno acreditava que seria possível outra sequência (positivo, positivo,..., negativo, negativo,...). Frente a isso, R1 demonstra refletir e desistir da ideia: “*Ah tá, não seria então tipo um, outro, depois... então não é*”.

Quando o professor pronuncia, já no início do Episódio, “*Mas qual o problema da PG?*”, ao mesmo tempo em que tira a possibilidade de ser o aluno a

verificar a impossibilidade de utilizar uma PG para construir um modelo matemático da situação, causa certo desequilíbrio nas ideias dos alunos, os quais precisam pensar em características da PG que a impede de ser usada para a situação em estudo (ou nas características da situação que a impede de ser representada via conceitos de PG).

O professor atua, assim, na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, os quais precisam repensar para reconstruir conceitos de PG inicialmente “já consolidados”, o que denota que os conceitos são construídos ao longo de toda a existência do sujeito e não em um único momento, o que depõe à favor da Modelagem Matemática, alternativa pedagógica em que os conteúdos matemáticos são revisitados e ressignificados a cada nova atividade, já que nelas os conteúdos não se apresentam de modo linear.

Frente à colocação do professor sobre o problema da PG, R3 considera a possibilidade de trabalhar com duas progressões geométricas, uma para a sequência crescente e outra para a decrescente: “*Não dá pra fazer uma PG pra cada parte. Por exemplo, dos 3 aos 18 anos que você sabe que aumenta ela vai ter uma razão e daí dos 18 aos 58 ele vai ter outra razão*”. No entanto, tal ideia não é considerada nem pelo professor e nem pelos demais colegas do grupo.

Nas transcrições desse Episódio, ainda, quando o professor sugere que “*para os dados seria interessante que essa tal razão fosse positiva e aí, quando chega aqui [no topo] sendo positiva ela não daria mais conta do recado*”, R2, atento e acompanhando a sugestão do professor, faz uso de seus conhecimentos para corrigir o professor “*Não ‘sendo positiva’, é... maior que um!*” referindo-se ao fato de que uma PG com primeiro termo positivo e razões com valores entre 0 e 1, apresenta comportamento decrescente. Tal manifestação denota a dimensão reflexiva da metacognição, devido ao sujeito fazer uso de seus conhecimentos para monitorar a fala do professor. Ao intervir na fala do professor, o aluno contribui para a compreensão, pelos demais elementos do grupo, de conceitos relacionados à PG e suscita, por parte do professor, uma rápida explanação sobre o que acontece para diferentes valores da razão da PG quando o primeiro termo da sequência é positivo.

Quando, nas transcrições do Episódio V, o professor atua junto do grupo, desconhece as discussões que antecederam sua chegada e, portanto, não intervém de modo a considerar as especificidades manifestadas pelos alunos no momento anterior (apresentadas no Episódio IV). Se por um lado, no entanto, conhecer tais especificidades poderia contribuir para a intervenção do professor frente aos conhecimentos dos diferentes sujeitos, por outro, se estivesse presente no momento apresentado no Episódio IV, poderia ter interferido demais e talvez impossibilitado todas as discussões empreendidas, tão importantes no âmbito da resolução do problema. Poderia, assim, ter impossibilitado a tomada de consciência dos sujeitos sobre como pensavam alguns conceitos matemáticos.

O Episódio V termina quando D, influenciada pelas discussões sobre uma PG alternada, pergunta “*Hein, mas como seria o gráfico dessa... Hein, como seria o gráfico dessa...*”. O professor entende essa mediação como propícia para fazer o grupo pensar em uma estratégia diferente de resolução, ao menos diferente da primeira experiência vivenciada no curso. Por isso, intervém de modo a apoiar a ideia de D: “*Perfeito! Comecem por aí, como seria o gráfico desses pares ordenados. O gráfico poder dar uma ideia do que é esse negócio, de como pode ser esse negócio*”. A partir de então, ainda na fase de matematização no que tange às fases da Modelagem Matemática, as discussões se dão em torno da construção de uma representação gráfica para a situação.

Discutir as atividades de Modelagem Matemática partindo de diferentes estratégias (como encontrando alguma regularidade entre as informações numéricas (atividade 1) ou pensando em uma curva que se ajusta a uma série de pontos desenhados em um plano cartesiano (atividade 2), por exemplo) pode contribuir para o conhecimento metacognitivo do sujeito em relação às variáveis tarefa e estratégia, no sentido de, a partir da experiência metacognitiva, permitir ao sujeito avaliar dentre as estratégias conhecidas para cada tarefa realizada, qual pode ser a mais indicada para uma situação nova, dadas as semelhanças da situação nova com outra já realizada.

Sobre as manifestações dos alunos nos Episódios IV e V, elaboramos o seguinte resumo:

EPISÓDIOS IV E V
Episódio IV: discussão de um encaminhamento matemático na investigação do problema referente à doação de órgãos; Episódio V: estudo de PA e PG.
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Matematização
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
De modo geral, em ambos os Episódios os alunos tinham o objetivo cognitivo de construir uma representação matemática para a situação em estudo. As ações cognitivas “estimar uma solução” e “recorrer a conteúdos matemáticos conhecidos”, foram ações pertinentes à ação “construir uma representação matemática da situação”.
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
R1 manifesta conhecimento metacognitivo sobre a variável estratégia quando, ao avaliar a ideia de R3 no Episódio IV, afirma “ <i>é, mas não dá pra fazer isso aqui</i> ”, referindo-se a ideia de obter uma razão para o conjunto de dados como na situação do trânsito na cidade de Apucarana.
MONITORAMENTO OBSERVADO
<p>No que tange ao monitoramento realizado pelos alunos nos Episódios IV e V, atentamos para quatro deles, já apresentados no decorrer do texto que antecede esse resumo, mas que passaremos a analisar considerando especificamente os tópicos de investigação da pesquisa.</p> <p>1) Monitoramento: No Episódio IV, R1, R2 e R3 conversam sobre uma possível resposta para o problema elencado para investigação. Nesse contexto, calculam a idade média entre 35 e 49 anos. R3, depois de avaliar o resultado dos demais, reconhece o erro: “<i>É verdade... devo ter colocado um número, calculado algo errado. Sim, mas não vai ser 42 de qualquer maneira</i>”. Nesse monitoramento, provocado na interação com os colegas, R3 expressa a ideia de que entende necessário realizar um encaminhamento que possibilite confirmar ou não a previsão de 42 anos, o que denota administração.</p> <p>Dimensão Metacognitiva: Avaliação e Administração. Primeiro R3 avalia a idade de 42 anos frente aos 41,5 e aos 41,11 pensados inicialmente por ele, reconhecendo que havia feito algum “cálculo errado”. Logo em seguida, R3 atenta para a necessidade de pensar em um encaminhamento que conduza à resposta prevista, o que denota planejamento de R3 em relação à formulação de estratégias para solucionar o</p>

problema. Ao chamar a atenção do grupo para a necessidade de se obter 42 via uma matemática para além da média aritmética do intervalo com maior número de doadores, podemos inferir que R3, ao propor 41,5 e 41,11 anos, não estivesse calculando a média, mas pensando em outra possibilidade de resolução que conduziria a esses valores.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: O fato de as situações serem abertas e possibilitarem diferentes encaminhamentos, tais como pensar em uma representação gráfica da situação que ajude a pensar sobre o problema.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: O planejamento do desenvolvimento da atividade de Modelagem.

2) **Monitoramento:** R3 realiza a administração da discussão, chamando a atenção do grupo para a necessidade em, acredita, encontrar uma razão a partir da qual os alunos vão construir o modelo matemático da situação: “*a gente não tem uma ideia da razão*” ou “*Não vai ter um número multiplicado por menos alguma coisa?*”, frases essas que, por sua vez, denotam reflexão.

Dimensão Metacognitiva: Administração e Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A verificação da pertinência de estratégias já utilizadas na nova atividade.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A validação (ou não) de pressupostos e estratégias consideradas no planejamento da situação. No caso, a não validação da estratégia referente à identificação de uma razão como acontece com as progressões aritmética e geométrica. Isso influencia a decisão em construir um gráfico com as informações da tabela para poder pensar diferente a resolução do problema.

3) **Monitoramento:** R1, ao refletir sobre a ideia de encontrar uma razão – provocada por R3 no âmbito do grupo – afirma “*mas não dá pra fazer isso aqui*”, o que denota a avaliação do sujeito sobre a implementação da estratégia referente à obtenção de uma razão, assim como na situação do trânsito de Apucarana.

Dimensão Metacognitiva: Avaliação, uma vez que o monitoramento de R1 acontece

frente à reflexão e validação da sugestão de encaminhamento apresentado por R3.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A O trabalho em grupo, em colaboração, em que os sujeitos procuram entender a perspectiva do outro, comunicar a sua, e construir novas perspectivas, não existentes senão pela interação dos sujeitos e pelo debate das perspectivas individuais.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: O desencadeamento de momentos de discussão acerca dos conteúdos matemáticos utilizados no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática.

- 4) **Monitoramento:** R2, atento e acompanhando o comentário do professor, faz uso de seus conhecimentos sobre o conteúdo Progressão Geométrica e corrige o docente “*Não ‘sendo positiva’, é... maior que um!*” referindo-se à ideia de que uma PG com primeiro termo positivo e razão com valores entre 0 e 1, apresentam comportamento decrescente e não crescente como generalizava o professor.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão, uma vez que o monitoramento de R2 surge frente ao uso que faz dos seus conhecimentos para entender a intervenção do professor, o que acaba monitorando tal intervenção.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A discussão de especificidades de conteúdos matemáticos no desenvolvimento da atividade de Modelagem.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: O fato de, no desenvolvimento de atividades de Modelagem, emergirem momentos de discussão acerca dos conteúdos matemáticos utilizados.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nessa atividade de Modelagem, R3 insistia em utilizar a mesma estratégia empreendida na atividade do trânsito de Apucarana, como se a nova atividade fosse sequência da anteriormente realizada.

Mesmo inferindo uma possível resposta para a questão a partir da tabela e da representação gráfica – informações iniciais – os alunos denotam o entendimento de que é preciso realizar uma abordagem que os permita confirmar (ou justificar), via cálculos, a previsão.

No próximo Episódio consideramos o momento em que os alunos realizam a validação do modelo matemático obtido no desenvolvimento da atividade Doação de Órgãos. A validação, objetivo cognitivo das discussões realizadas no Episódio VI, foi ação empreendida pelos alunos a partir da intervenção do docente, que os questiona se o modelo poderia ou não ser considerado válido. Nesse caso, os alunos consideraram que o modelo seria considerado válido se os dados fornecidos pelo modelo fossem próximos, segundo julgamento do grupo, dos dados observados.

Quando a validação é realizada por iniciativa do grupo, advinda da necessidade de avaliar se o modelo matemático construído poderia ou não ser utilizado para responder a questão de investigação, ela (a validação) constitui-se uma prática de monitoramento. Nas transcrições desse Episódio, no entanto, o monitoramento surgiu de uma mediação do professor e não de uma necessidade dos elementos do grupo.

EPISÓDIO VI

R1: Tipo, quanto que deu igual a 26?

R2: Deu 231,08.

R1: E 42?

R2: 894,61.

R1: Oitocentos e?

R2: 94

R1: Vírgula?

R2: 61

R1: Daí que os nossos valores estão crescendo, eles não estão variando. Não estão fazendo uma parábola.

R2: Mas não ia chegar o momento que ele ia parar de crescer e começar a diminuir?

D: Não porque os pontos que a gente pegou já...

R1: Eu acho que isso não vai dar, porque...

[...]

D: É porque nossos dados só estão aumentando eles não estão diminuindo...

R1: É que isso aqui deveria ser negativo. Porque o único que poderia variar, seria o a ao quadrado... o a. Quer dizer, o a x ao quadrado. Porque o a x ao quadrado é que faz a parábola ter o formato de parábola.

D: hã hã

R1: Aí como ele vai ser sempre ao quadrado, esse valor vai ser sempre positivo. E qualquer valor que tiver aqui vai ser positivo. Vai fazer a fórmula ficar positiva. E não tem idade negativa!

[...]

R1: Ah verdade! A não ser que a gente dê sinal negativo pra ele.

R3: O a, ser pra cima ou pra baixo, da parábola, era um ponto p!
R2: Não, não era o p. Era uma formulazinha com esses valores a, b e c.
[R1 pensa independente da conversa dos demais].
R1: Olha só, a gente não fez a idade aqui né? Tá... ele deveria ter essa forma!
D: Será que não tem alguma coisa assim, tipo óh, da concavidade.
R1: Foi isso o que eu pensei... a concavidade fica negativa quando o a é igual, tipo é, negativo, daí fica negativo.
D: Fica assim ó, menos, menos, menos, mais, mais, mais, menos, menos, menos. Se ele ficar assim aí dá tipo [desenha a curva com a mão].
R1: É o que determina isso é o a negativo.
D: hãhã
R1: E o nosso a é sempre positivo!?!? [pensando alto] Não! É o valor de a ou o valor de x?
[...]
R1: Então faz assim, calcula o último de novo com o 72 negativo!
R3: 72 negativo?
R1: Sim, daí vai fazer ela decrescer.
[...]
R1: Se ele continuar pra cima, então com ele sendo o valor de a... Ai, calma, não, esse não é o valor de a! Esse é o valor de...
R3: Não, 72 não é a!
R2: 72 é o valor no caso do x.
R1: ah
[...]
R1: Faz uma coisa: calcula o terceiro com o valor desse aqui negativo.
R2: Mas não vai mudar nada, porque é ao quadrado.
R1: Ah é.
A: Só que se não for o a ao quadrado não vai ser uma parábola!
R1: Ele é o x no caso. Ahhhhh, entendi!!! A gente fez o a ao quadrado ao invés do x. Não, olha, eu entendi o erro, empresta aqui [se referindo à calculadora], deixa eu procurar.
R3: Então é o a ao quadrado?
R1: Não, é a x ao quadrado.
D: É a x ao quadrado.
R1: Então, a gente fez o a ao quadrado, por isso.
D: Tem que ser esses valores aqui, os valores que a gente determinou, e usou pro x: o 14, o 26 e o 72 ao quadrado.
R1: Sim, sim, então, a gente fez ao contrário.
D: Ah entendi!
[...]
R2: Então, todos esses 14 aqui serão ao quadrado!
R1: Não, só o primeiro.
R2: Só o primeiro, tá.
R1: E no outro é o 26.
[...]
R2: Deu 24,99.
R1: Agora sim!
R2: É 25 no caso.
[...]
R2: Com 26: 117,99

R3: Melhorou de novo.

R1: Ah muleque!!!

R2: E o terceiro, 31,99.

Logo no início dos cálculos, dois dos resultados obtidos causaram estranhamento ao grupo (231,08 e 894,61), principalmente ao aluno R1: “*daí que os nossos valores estão crescendo, eles não estão variando. Não estão fazendo uma parábola*”. Essa mediação pode ser entendida segundo a dimensão administrativa da metacognição, segundo a qual o aluno, por utilizar como referência os valores observados constantes da folha atividade, monitora o encaminhamento da resolução de modo verificar proximidades entre os dados obtidos via modelo e os dados observados. Essa mediação é corroborada por R2 quando atenta: “*Mas não ia chegar o momento que ele ia parar de crescer e começar a diminuir?*”.

A partir da mediação de R1 e R2, os integrantes do grupo passam a refletir sobre esses resultados estranhos. A dimensão reflexão do monitoramento é motivada, portanto, pela dimensão administração. A reflexão manifestada em vários momentos do Episódio, tais como quando D afirma “*é porque nossos dados só estão aumentando, eles não estão diminuindo*” ou quando R1 completa “*é que isso deveria ser negativo*”, promoveu a exposição pelos alunos de muitos conhecimentos prévios existentes em sua estrutura cognitiva, ou ainda, que compõem seu nível de desenvolvimento real, na perspectiva vygotskyana. Dentre eles, que “*o ax^2 é que faz a parábola ter o formato de parábola*” (R1) e que “*ele vai ser sempre ao quadrado, esse valor vai ser positivo. E qualquer valor que tiver aqui vai ser positivo. Vai fazer a fórmula ficar positiva*” (R1).

Esse último exemplo, no entanto, denota um possível entendimento da origem dos resultados estranhos obtidos na validação dos alunos. Por acreditar que o resultado de ax^2 seria sempre positivo independente dos valores atribuídos à a e à x , os alunos consideram o resultado do termo $-0,166229.i^2$ do modelo matemático ($y = -0,166229.i^2 + 14,3991.i - 144,0074$) sempre positivo, ou seja, no ato da validação elevavam ao quadrado tanto os valores das idades quanto o sinal do coeficiente a .

Interessante nas transcrições desse Episódio, é que os alunos não identificaram esse erro pela análise dos cálculos ou pela lembrança de como

proceder frente à expressão $-0,166229.i^2$, mas pelo reconhecimento de que se o valor correspondente a ax^2 resultasse negativo, o valor da expressão como um todo seria próximo ao apresentado na folha atividade (o observado), ou seja, o modelo validaria. Isso se evidencia quando R1 propõe que o grupo considerasse o sinal negativo mesmo não havendo, de fato, o sinal negativo: “A não ser que a gente dê sinal negativo para ele”, ou ainda, “Tá... ele deveria ter essa forma!”.

Foi a partir dessa mediação de R1 que se deu o entendimento do algoritmo. A ideia de considerar negativo o que, para eles, não era, aliada aos conhecimentos prévios manifestados por R1 sobre uma função quadrática – “fica negativa quando o a é negativo” (R1), “o que determina parábola com concavidade para baixo é o a negativo” (R1) – levou R1 a centrar sua atenção no sinal de a e no sinal de x no modelo matemático: “E o nosso a é sempre positivo!?!? Não! É o valor de a ou o valor de x ?”.

R1 decide realizar um teste com o valor 72 negativo, o que causa estranhamento em R3 – “72 negativo?” – por 72 representar, no contexto, o valor da idade de uma pessoa. Essa administração expressa por R3 aliada às demais discussões já realizadas, leva R1 a entender a origem dos erros nos cálculos: “Ai, calma, não, esse não é o valor de a ! Esse é o valor de...” e, em seguida, “Ele é o x no caso. Ahhhhh, entendi!!! A gente fez o a ao quadrado ao invés do x . Não, olha, eu entendi o erro, empresta aqui [se referindo à calculadora], deixa eu procurar”.

A partir da exposição de R1, os demais integrantes do grupo também manifestam compreender a situação: “Tem que ser esses valores aqui, os valores que a gente determinou e usou para o x : o 14, o 26 e o 72 ao quadrado” (D), “Ah, entendi!” (D), “Só o primeiro [ao quadrado], tá” (R2) e “Melhorou de novo” (R3). Nas transcrições desse Episódio, portanto, foi a situação problemática que levou à identificação e compreensão do algoritmo e não o contrário.

Sobre as manifestações dos alunos no Episódio VI elaboramos o seguinte quadro resumo.

EPISÓDIO VI
Validação do modelo matemático construído na situação Doação de Órgãos
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Validação
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
O objetivo e a ação cognitiva, nesse Episódio, referem-se em validar o modelo matemático construído na investigação do tema Doação de Órgãos.
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
Não foram manifestados.
MONITORAMENTO OBSERVADO
<p>Nesse Episódio, o monitoramento foi realizado com vistas a administrar a atividade de validação do modelo matemático, a refletir sobre o erro identificado no momento da “administração” e a avaliar os resultados obtidos pós-identificação do erro. Retomamos três dos monitoramentos manifestados pelos alunos.</p> <p>1) Monitoramento: R1 estranha os resultados obtidos pelo modelo matemático quando comparados aos constantes na folha atividade e ao pressuposto de considerar uma parábola: <i>“daí que os nossos valores estão crescendo, eles não estão variando. Não estão fazendo uma parábola”</i>. Essa mediação, realizada frente ao planejamento inicial do grupo, leva os demais alunos a pensarem sobre a questão, tanto que R2 corrobora com o monitoramento com a questão <i>“Mas não ia chegar o momento que ele ia parar de crescer e começar a diminuir?”</i>.</p> <p>Dimensão Metacognitiva: Administração.</p> <p>Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: O próprio processo de validação que, nesse caso, embora provocado pelo professor fora realizado pelos alunos com afinco.</p> <p>Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: Discussões acerca de especificidades dos conteúdos matemáticos considerando-se as informações da situação inicial. O próprio processo de validação com vistas a utilizar o modelo matemática para interpretar a situação inicial em termos da problemática investigada.</p>

2) **Monitoramento:** Os alunos passam a discutir possíveis incoerências relacionadas à validação, tomando como base os conhecimentos sobre uma função quadrática e as informações sobre a situação problemática.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão, manifestada em vários momentos do Episódio, tais como quando D afirma “*é porque nossos dados só estão aumentando, eles não estão diminuindo*” ou quando R1 completa “*é que isso deveria ser negativo*”.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A validação de um modelo matemático com vistas à sua utilização para responder ao problema considerado.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A validação do modelo matemático construído, considerando-se as características da situação inicial investigada e as características dos conteúdos matemáticos utilizados.

3) **Monitoramento:** R3 intervém no pedido feito por R1 à ele – “*Então faz assim, calcula o último de novo com o 72 negativo!*” – por entender que a idade não poderia assumir valores negativos, o que causou certo estranhamento em R3. Para R3, o erro que procuravam, certamente, não estaria nesse fato.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão e Administração. Considerando que a idade não poderia assumir valores negativos, intervém no cálculo proposto por R1 de modo a levar o grupo a pensar sobre o fato.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A validação de um modelo matemático com vistas à sua utilização para responder ao problema considerado.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A validação do modelo matemático construído, considerando-se as características da situação inicial investigada e as características dos conteúdos matemáticos utilizados.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

—

5.1.3 ATIVIDADE 3: CONSUMO DE ÁGUA NA CIDADE DE TOLEDO-PR

5.1.3.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE CONSUMO DE ÁGUA NA CIDADE DE TOLEDO

A atividade aqui denominada “consumo de água na cidade de Toledo” foi realizada segundo orientações do terceiro momento da Modelagem Matemática, aquele segundo o qual os alunos escolhem um tema a investigar, elencam um problema relacionado ao tema, elaboram uma questão e realizam a investigação como um todo. Nesse momento, os alunos são mais autônomos no que tange ao desenvolvimento da atividade de Modelagem e recorrem ao professor sempre que julgam necessário, de modo a partilhar as ideias e os encaminhamentos e a buscar orientações.

Essa atividade foi a última realizada no curso e aconteceu no primeiro semestre de 2012. Os dois grupos de alunos formados nesse momento não participavam de reuniões com o docente como nos momentos anteriores do curso. No entanto, a pedido do professor-pesquisador que tinha como intenção gravar o áudio dos encontros dos alunos, esses se reuniam na universidade para realizar a atividade e gravavam suas falas usando o gravador do professor.

Essa dinâmica, no entanto, não garantiu que os alunos não se reunissem em outros horários para fazer o trabalho, o que, por um lado, prejudica a coleta de dados na medida em que informações sobre como os alunos procederam para tomar uma decisão não constam em áudio, mas por outro lado, denota o interesse e engajamento dos alunos em relação à atividade.

O grupo de alunos que desenvolveu a atividade sobre o consumo de água na cidade de Toledo é o mesmo utilizado como referência para as análises anteriores. Os registros escritos do grupo constam apenas em um documento enviado ao professor no formato pdf (formato portátil de documento), documento esse não corrigido pelo professor³⁴.

³⁴ Finalizado o curso, alunos e professor analisaram a atividade de Modelagem e realizaram pequenas modificações, de modo a submeter um relato de experiência em evento da área usando-a como exemplo.

É por meio das transcrições dos áudios de três encontros, bem como por meio desse documento em pdf contendo todo o desenvolvimento da atividade, aqui denominado “trabalho”, que se dá essa análise específica.

Nessa atividade os alunos não elaboraram uma questão especificamente. O propósito da atividade, no entanto, é expresso ainda no primeiro parágrafo do trabalho:

Coletou-se dados referentes ao consumo de água nos últimos 11 anos junto à Sanepar e dados populacionais do município de Toledo segundo informações dos Censos 2000 e 2010 e das Contagens de população de 1996 e 2007, para assim afirmar se o aumento notado no consumo de água nesse período de 2001 a 2011 se deve ao crescimento populacional ou ao aumento do consumo por habitante.

Embora tenham escrito que pretendiam verificar se o aumento no consumo de água em Toledo, expresso na coleta de dados, devia-se “*ao crescimento populacional ou ao aumento do consumo por habitante*”, o que os alunos fizeram, realmente, foi verificar se tal aumento devia-se “exclusivamente ao aumento da população ou se essa população, além de aumentar em número, também havia consumido mais água”.

Para realizar essa verificação os alunos decidiram calcular a razão entre o consumo de água (em metros cúbicos) e a população da cidade em cada um dos anos considerados, de modo que, segundo os alunos, se a razão fosse aproximadamente constante, considerariam o aumento do consumo de água como advindo apenas do crescimento populacional. Se a razão fosse crescente, considerariam o aumento como advindo, além do aumento populacional, do aumento no consumo por habitante.

Os alunos conseguiram dados referentes ao consumo de água junto à Sanepar (Companhia de Saneamento do Paraná) de Toledo. Obtiveram tanto o consumo de água na cidade para cada ano, de 2001 a 2011, quanto o consumo de água para cada mês do ano de 2011. Em relação a esses últimos dados, os alunos realizaram uma segunda abordagem: estudaram como se deu o consumo de água

no decorrer do ano de 2011 em Toledo e relacionaram a diminuição e o aumento do consumo às estações do ano, conhecidas por serem bem extremas na cidade.

Para obter informações sobre a população de Toledo nos mesmos anos que haviam conseguido informações sobre o consumo de água, os alunos recorreram ao site do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). No site verificaram que só havia contagem de população correspondente aos Censos de 2000 e de 2010 e às Contagens de População de 1996 e 2007. Desse modo, antes de calcular a razão entre o consumo de água e a população, os alunos precisaram calcular a população de Toledo para alguns anos, a partir das informações de que dispunham. As informações obtidas junto ao site do IBGE (Tabela 07) e junto à Sanepar (Tabela 08) são, respectivamente, as seguintes:

Tabela 07: População em Toledo

Ano	População
1996	90417
2001	98200
2007	109857
2010	119313

Fonte: Registro utilizado pelos alunos na atividade

Tabela 08: Consumo de água em Toledo

Ano	Consumo de água (m ³)
2001	3599822
2002	3749588
2003	3878301
2004	3994728
2005	4155683
2006	4318282
2007	4466858
2008	4627740
2009	4864255
2010	5066462
2011	5268782

Fonte: Registro utilizado pelos alunos na atividade

Diante das informações sobre a população de Toledo e considerando que o crescimento populacional poderia ser relacionado a uma função do primeiro grau – aproximação considerada a partir da construção da representação gráfica dos pares ordenados (ano, população) –, é que os alunos realizaram a seguinte resolução:

Aplicando a lei da função da equação do primeiro grau ao problema, podemos descobrir primeiramente o valor de b . Para isso, o valor do produto ax deve ser igual a 0. x é a variável independente que representa o ano, logo o ano deve ser 0, porém o primeiro ano de estudo é o ano de 1996. Assim, foram usadas variáveis auxiliares, em que o primeiro ano é 0, 2000 que é o próximo é 4 e assim por diante. Então:

$$90417 = ax + b$$

$$90417 = 0 + b$$

$$b = 90417$$

Para descobrir o valor de a , o índice x passou a ser 14, representando o ano 2010, o último ano com dados populacionais. O ano de 2010 também foi escolhido para que o valor de a fosse mais refinado, já que pequenas variações no crescimento populacional do município podem ter acontecido. Nesse ano a população era de 119313 habitantes. Então:

$$119313 = 14a + 90417$$

$$14a = 119313 - 90417$$

$$a = 28896 / 14$$

$$a = 2064$$

Logo, a função que representa o crescimento populacional do município de Toledo em função do ano através de uma variável auxiliar é:

$$f(x) = 2064x + 90417$$

Podemos formular uma equação que represente a variável auxiliar através do ano em si:

$$\text{ano} = x + 1996$$

Substituindo na função do crescimento populacional:

$$f(\text{ano}) = 2064(\text{ano} - 1996) + 90417$$

$$f(\text{ano}) = 2064(\text{ano}) + 4119744 + 90417$$

$$f(a) = 2064(a) + 4029327$$

Os alunos utilizaram o modelo construído para estimar a população de Toledo – $f(a) = 2064.a + 4029327$ – e encontraram um possível número de habitantes para os anos em que o IBGE não realizou a contagem. Desse modo, puderam calcular a razão entre o consumo de água e a população, de modo a conhecer como se deu o aumento no consumo de água por habitante da cidade. Nesse sentido, construíram a próxima Tabela 09.

Tabela 09: Razão entre o consumo de água (m^3) e a população de Toledo

Ano	Consumo de água (m^3) / habitante
2001	35,73
2002	36,47
2003	36,98
2004	37,35

2005	38,12
2006	38,88
2007	39,48
2008	40,17
2009	41,48
2010	42,46
2011	43,55

Fonte: Registro utilizado pelos alunos na atividade

A partir da tabela principalmente, os alunos concluíram:

É notável o crescimento no consumo de água por habitante. A variação de consumo é de aproximadamente $7,82 \text{ m}^3$, ou seja, 7820 litros. Assim, cada habitante de Toledo em 2011, consumiu 7820 litros a mais de água do que os habitantes de Toledo em 2001. Ou ainda, cada habitante de Toledo em 2011 consumiu 21,42 litros de água a mais diariamente do que em 2001.

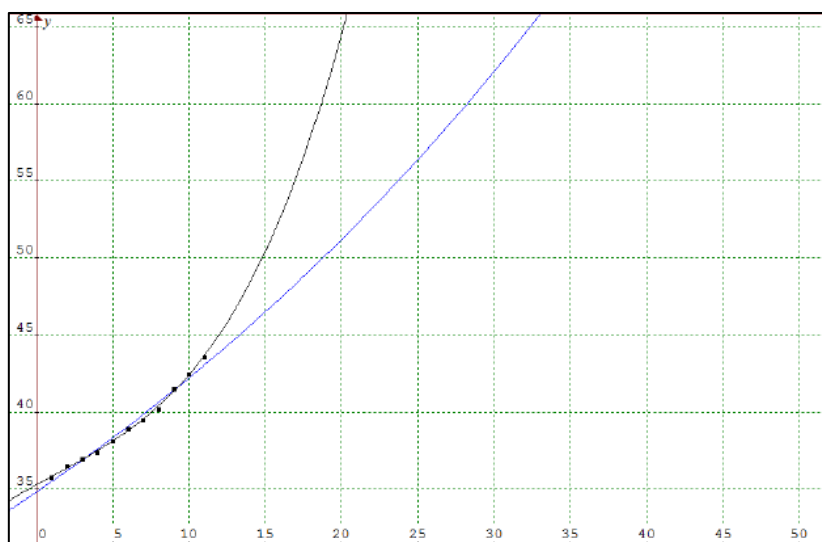
Nesse momento da resolução os alunos já haviam cumprido com o propósito inicial. No entanto, surpresos diante do aumento na quantidade diária de água consumida por habitante, os alunos decidiram construir um modelo que pudesse descrever a quantidade de metros cúbicos de água consumidos por habitante no decorrer dos próximos anos, no caso de o aumento continuar conforme a leitura dos dados parecia sugerir.

Para isso, construíram uma representação gráfica utilizando o software livre Graphmática e a partir dela consideraram que uma função exponencial poderia representar esse aumento. Optaram por considerar que a razão entre os valores do consumo de água por habitante em um ano pelo consumo em um ano imediatamente anterior era aproximadamente constante $\left(k = \frac{C(a)}{C(a-1)} \right)$. A partir disso e usando recorrência, encontraram o modelo $C(a) = 35,73 \cdot 1,02^{a-2001}$ como representativo da situação, estratégia essa utilizada nas situações anteriores de Modelagem e, nesse momento, revisitada pelos alunos.

Na Figura 19 apresentamos a resolução dos alunos. Na resolução, nem sempre os alunos usam a notação utilizada no parágrafo anterior.

Figura 19: Resolução dos alunos na situação Consumo de água em Toledo

O gráfico abaixo mostra os pontos no gráfico. Em azul está a linha do gráfico de uma exponencial e em preto de um gráfico polinomial. O consumo de água tende a crescer, porém não tão acentuadamente, assim, o gráfico exponencial representa de forma mais fiel o crescimento do consumo real da água.



O crescimento pode ser ligado a uma constante, que por nos utilizarmos de uma função exponencial tem a seguinte equação de definição: $k = \frac{C(x)}{C(x-1)}$.

Nesse caso, a constante está ligada ao crescimento do consumo de água por habitante, sendo, portanto: $k = \frac{\text{consumo/habitante}(x)}{\text{consumo/habitante}(x-1)}$. Operando essa equação algebricamente, podemos obter: $C(x) = k \times C(x - 1)$.

Quando o ano com o uso de uma variável auxiliar for 1, a expressão se torna: $C_1 = k \times C_0$.

Quando ano for 2, a expressão se torna: $C_2 = k \times C_1$.

Assim, podemos reescrever a equação anterior substituindo o valor de C_1 de quando ano é 1, tornando-se: $C_2 = k \times k \times C_0$ e portanto, $C_2 = k^2 \times C_0$.

Desse modo, podemos obter um termo geral: $C_x = k^x \times C_0$.

A tabela abaixo mostra o valor da constante k em cada ano. O valor médio da constante é 1,020009, logo, assume-se que o valor do crescimento do consumo por habitante a cada ano se dá por essa constante.

Fonte: Registro dos alunos na atividade

Continuação da Figura 19: Resolução dos alunos na situação Consumo de água em Toledo

Ano	k
2001	
2002	1,020691
2003	1,010138
2004	1,010138
2005	1,020592
2006	1,019815
2007	1,015533
2008	1,017452
2009	1,032605
2010	1,023552
2011	1,025742

Substituindo os valores de k e do consumo por habitante no ano com variável auxiliar igual a 0, 2001, temos a seguinte equação: $C_x = 1,02^x \times 35,73$.

A variável auxiliar pode ser substituída pela expressão: $x = \text{ano} - 2001$, tendo como resultado, uma equação do consumo de água por habitante em função do ano:

$$C_a = 35,73 \times 1,02^{a-2001}$$

Fonte: Registro dos alunos na atividade

Como os alunos haviam obtido dados sobre o consumo de água na cidade de Toledo para todos os meses do ano de 2011, consideraram a possibilidade de investigar a variação no consumo de água na cidade no decorrer de um ano caso a primeira ideia, referente a investigar se o aumento no consumo de água devia-se apenas ao aumento populacional ou também ao aumento no consumo individual, não fosse possível. No entanto, diante do tempo de que dispunham enquanto os outros grupos realizavam suas atividades, esse grupo decidiu empreender esforços na realização dessa segunda abordagem.

Como, segundo os dados, o consumo de água em Toledo no decorrer do ano de 2011 variou bastante, os alunos consideraram que tal variação deveu-se fortemente às estações do ano serem bem extremas na cidade, de modo que no verão o consumo tenderia a ser maior e no inverno, menor. Diante disso, os alunos recorreram à representação gráfica dos dados para pensar sobre o problema, ao que decidiram realizar um novo ajuste, dessa vez, via função trigonométrica seno.

Os alunos consideraram, para isso, a expressão $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e realizaram os cálculos dos parâmetros da função a partir do contexto investigado. Obtiveram o modelo $f(x) = 430696 + 28111 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{5\pi}{6}\right)$ e o consideraram válido diante da proximidade de sua representação gráfica aos dados obtidos na Sanepar. A resolução, na íntegra, consta na Figura 20.

Figura 20: Resolução dos alunos na situação Consumo de água no decorrer de 2011

Consumo de água no município de Toledo no ano de 2011.

O consumo de água em um ano varia conforme a estação. No inverno o consumo diminui e no verão aumenta. Utilizando o software Graphmatica e dados de consumo de água em Toledo no ano de 2011 fornecidos pela Sanepar pode-se notar a variação esperada, que é demonstrada a seguir:

Mês	Consumo (m³)
Janeiro	453827
Fevereiro	438044
Março	449607
Abril	458807
Maio	422654
Junho	428809
Julho	402585
Agosto	411256
Setembro	438454
Outubro	455520
Novembro	453772
Dezembro	473447



Fonte: Registro dos alunos na atividade

Continuação da Figura 20: Resolução dos alunos na situação Consumo de água no decorrer de 2011

O gráfico do consumo de água por mês no ano de 2011 apresenta a forma semelhante a um gráfico de uma função seno.

A função seno é dada por: $f(x) = a + b \times \text{sen}(cx + d)$, onde a é responsável por deslocar o gráfico verticalmente, b altera a amplitude, c muda o período da função (o período de uma função seno é $2\pi/|c|$) e d desloca o gráfico horizontalmente.

Num gráfico da função seno a imagem varia de -1 a 1 ($Im=[-1,1]$). Segundo os dados, o ponto mais alto foi em abril com um consumo de 458807 m^3 de água e o mais baixo em Julho, com consumo de 402585 m^3 . Desconsideramos dezembro, pois o consumo havia sido maior do que a média, o que quando aplicado à função seno do problema os pontos estariam muito distantes dos valores reais. Desconsideramos também o mês de janeiro porque ele não segue a forma da função do seno, pois quando construído, o novo gráfico não passará próximo a esse ponto.

O ponto médio do gráfico do problema é onde y é igual a 430696 , pois $Im = [402585, 458807]$. O valor de a é o mesmo do ponto médio, 430696 . O valor de b é igual a $(\text{ponto máximo} - \text{ponto mínimo})/2$, logo $b = 28111$. Para descobrir c precisamos do período, sendo que o período de uma função é a distância entre dois cumes do gráfico. Os dois pontos mais altos do gráfico são abril e outubro, assim, a distância entre os dois meses é de 6 meses. Substituindo na equação do período:

$$6 = 2\pi/c$$

$$c = 2\pi/6$$

$$c = \pi/3$$

O valor de c é $\pi/3$. Para se descobrir o valor de d , substituímos os valores de x e y do mês de abril para que o valor do seno seja 1. Usando o mês de abril, onde $x = 4$ e $y = 458807$:

$$458807 = 430696 + 28111 \times \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + d\right)$$

$$28111 = 28111 \times \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + d\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + d\right) = 1$$

O seno de $\pi/2$ é 1, substituindo no valor de 1:

Fonte: Registro dos alunos na atividade

Continuação da Figura 20: Resolução dos alunos na situação Consumo de água no decorrer de 2011

$$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + d\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{4\pi}{3} + d = \frac{\pi}{2}$$

$$d = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$$

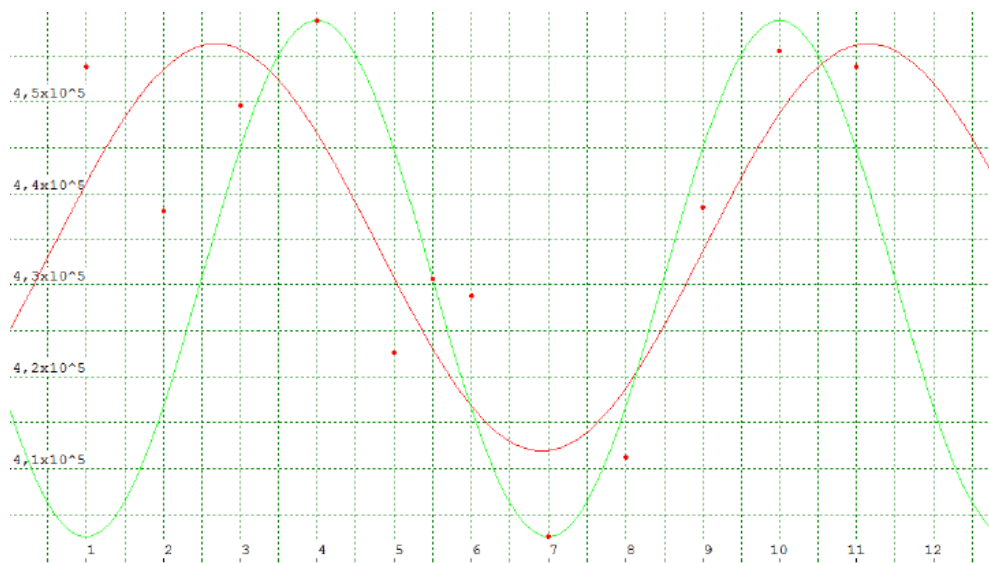
$$d = \frac{3\pi - 8\pi}{6}$$

$$d = -\frac{5\pi}{6}$$

Assim, temos que a função final é:

$$f(x) = 430696 + 28111 \times \text{sen}\left(\frac{\pi x}{3} + d\right)$$

O gráfico da função criada é representado em verde no gráfico. Nota-se que a linha passa muito próximo a todos os pontos do gráfico, o que demonstra a sua precisão. É visto também que a linha não passa próximo ao ponto em janeiro, o que mostra que esse ponto realmente não segue a forma do gráfico de uma função seno.



Fonte: Registro dos alunos na atividade

A análise específica que segue compreende três Episódios e uma análise dos registros apresentados nas Figuras 19 e 20. Os Episódios referem-se apenas à abordagem inicial do tema, ou seja, até o momento em que os alunos concluem que o aumento no consumo de água em Toledo deve-se, para além do aumento na população, ao aumento no consumo individual de água.

5.1.3.2 CONSUMO DE ÁGUA EM TOLEDO – ANÁLISE ESPECÍFICA

Algumas semanas antes dos encontros destinados especificamente para a atividade referente ao terceiro momento da Modelagem, o professor apresentou aos alunos como seria a dinâmica desses encontros bem como a incumbência que teriam pela frente: desenvolver uma atividade de Modelagem, a começar pela escolha de um tema e a seleção de um problema que interessasse aos componentes do grupo, até chegar à obtenção de respostas para o problema selecionado. Por isso inclusive, já no primeiro desses encontros os alunos do grupo que consideramos nessa análise tinham ideias de temas e até de encaminhamentos a considerar. O Episódio a seguir, advindo do interesse do professor em conhecer o tema (ou os temas) de trabalho selecionado pelos alunos, ilustra essas ideias.

EPISÓDIO VII

P: Vocês já tem o modelo e vocês o consideraram válido pelo que percebi.

R1: Sim.

R1: A primeira ideia foi a D que deu, um tema mais voltado pro consumo da água aqui em Toledo daí a gente ia pegar os dados do consumo da água e a gente poderia fazer uma previsão de gastos para daqui alguns anos baseado nesse consumo e também no aumento da população porque o gasto praticamente aumenta, todo ano aumentou, e daí pode comparar com o crescimento da população, já que tem dados de 2001 a 2011 e a gente poderia pegar dados do censo do município.

[...]

R2: Todo ano aumentou, porque a tendência da cidade é crescer.

P: Podemos pensar... esse aumento da população está atrelado a quê?

R1: Ao crescimento da população.

P: Então seria interessante saber qual era a população em cada um desses anos em Toledo.

R1: Por isso que a gente pegou a de 2001, porque poderia pegar o censo porque o único jeito de saber é através do censo, ou tem alguma outra forma?

P: É, tem o censo.

[...]

R2: Professor, e ele também me mostrou o consumo de janeiro desse ano, mas ele só me mostrou lá na tela...

P: Que legal, você já foi lá então [se referindo à Sanepar].

R2: Fui lá!

P: Que legal!

R2: Daí dá pra ver 442, 458 e 463, e o desse ano foi 500 e pouco. Subiu muito, o desse ano acho que vai ser muito maior. Só que

também faltou água esses dias aqui em Toledo, em vários locais da cidade.

R1: Isso tem a ver com a estação e período do ano.

A: É, dá pra ver aqui no meio, diminui bastante [se referindo ao consumo mensal em um ano – o meio seriam os meses do meio do ano, inverno em Toledo].

[...]

R3: Quantos metros cúbicos têm por pessoa?

A: Talvez, ficaria até mais interessante.

R1: Quantos metros cúbicos têm por pessoa? Tem que dividir a água pela população, não é?

R3: Água pela população?

R1: Sim, de repente o número permanece praticamente o mesmo.

P: Como assim?

R1: É que se der o mesmo, daí o aumento do consumo de água vai ser por causa do aumento da população só, entendeu? Se der mais, quer dizer que as pessoas tão usando mais.

P: Sim, perfeito...

No início da transcrição R1 apresenta ao professor o tema escolhido pelo grupo. Se por um lado a ideia de tema foi da aluna D, o interesse do grupo também teve influências do aluno R1 que desenvolvia no momento trabalhos de iniciação científica relacionados à sustentabilidade. Além disso, ser um tema da atualidade e estar relacionado à cidade de Toledo são características que podem ter contribuído para o engajamento dos alunos.

Na apresentação inicial feita por R1 é possível perceber os encaminhamentos vislumbrados pelo grupo. São encaminhamentos que remetem às atividades de Modelagem já realizadas, como quando o aluno afirma “*a gente poderia fazer uma previsão de gastos para daqui alguns anos baseado nesse consumo e também no aumento da população*”. É possível inferir que as experiências metacognitivas realizadas com Modelagem no âmbito do curso tenham constituído o conhecimento metacognitivo dos alunos em relação às variáveis tarefa e estratégias, de modo que ao considerar o aumento no consumo de água na cidade, ideias sobre o que fazer (realizar uma previsão de consumo de água para os próximos anos) e o que considerar (dados de 2001 a 2011 sobre o consumo de água e dados sobre o censo populacional da cidade) surjam nas discussões dos alunos. A dimensão “reflexão” da metacognição presente no planejamento inicial dos alunos se dá, portanto, a partir do conhecimento metacognitivo dos alunos sobre as variáveis tarefa e estratégia.

Esse planejamento inicial é resultado, também, da inteiração dos alunos sobre o tema. No momento dessa conversa, os alunos já haviam até procurado a Sanepar para coletar dados sobre o consumo de água na cidade, o que deixou o professor surpreso – *“Que legal, você já foi lá então”* e *“Que legal”*. Essa iniciativa além de ter sido tomada antes mesmo de qualquer encontro na universidade, reflete o engajamento dos alunos na investigação do tema.

Essa inteiração sobre o tema levou os alunos a elencarem duas possibilidades de trabalho: o estudo da dinâmica do consumo de água em Toledo no decorrer de um ano e a verificação se o aumento no consumo de água na cidade era correspondente apenas ao aumento da população ou se as pessoas, de fato, haviam consumido mais água.

A primeira possibilidade surge quando R2 comenta que em janeiro de 2012 o consumo já havia sido maior que o consumo dos meses anteriores. A partir dessa colocação R1 intervém de modo a explicar que esse aumento do consumo em janeiro deve-se às estações do ano, como quem considera que o consumo, a exemplo dos dados correspondentes a 2011, vai diminuir nos meses mais frios – *“Isso tem a ver com a estação e o período do ano”*. Essa intervenção é compreendida por A que corrobora com a explicação de R1 utilizando os dados sobre o consumo de água nos diferentes meses de 2011 – *“É, dá pra ver aqui no meio – diminui bastante”*.

A outra possibilidade começa a ser delineada a partir da intervenção do aluno R3, quando pergunta *“Quantos metros cúbicos tem por pessoa?”*. Essa pergunta muda os rumos da discussão sobre a dinâmica do consumo de água no decorrer de um ano, principalmente quando A reforça essa mediação – *“Talvez ficaria até mais interessante”*. Essa fala da aluna A pode refletir o conhecimento metacognitivo da variável tarefa, já que manifestar a opinião de que realizar a abordagem B ficaria “até mais interessante” que a abordagem A, pode implicar no entendimento da aluna das duas abordagens e no vislumbre de possíveis resoluções.

Em relação à segunda possibilidade – investigar o consumo de água por pessoa na cidade – R1 compartilha da questão de R3 e sugere uma estratégia

quando pergunta “*Quantos metros cúbicos têm por pessoa? Tem que dividir a água pela população, não é?*”. Ao ser questionado por R3 – “*Água pela população?*” – e pelo professor – “*Como assim?*” –, R1 apresenta sua sugestão: “*Sim, de repente o número permanece praticamente o mesmo [...] É que se der o mesmo, daí o aumento do consumo de água vai ser por causa do aumento da população só, entendeu? Se der mais, quer dizer que as pessoas tão usando mais*”. A sugestão de R1, além de ser decisiva sobre o que fariam os alunos a partir de então, denota um conhecimento metacognitivo da variável “estratégia”, pois além de o aluno reconhecer nessa estratégia – dividir o consumo de água de um determinado ano pela população do respectivo ano – uma tradução da intenção manifestada por R3 em verificar quantos metros cúbicos de água haviam sido consumidos por pessoa, explícita, também, o que entende que podem significar os possíveis resultados, manifestação da dimensão “reflexão” da metacognição.

Embora nessa análise específica consideremos a segunda abordagem, os alunos realizaram também o estudo sobre a dinâmica do consumo de água na cidade de Toledo no decorrer do ano de 2011, utilizando conceitos de funções trigonométricas na abordagem.

Em relação ao Episódio VII, consideramos o seguinte resumo no que tange às práticas de monitoramento explícito percebidas.

EPISÓDIO VII
Discussões iniciais sobre possibilidades de abordagem do tema “consumo de água em Toledo”
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Inteiração
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
Com o objetivo cognitivo de apresentar ao professor as ideias iniciais do trabalho de Modelagem Matemática que realizariam, bem como os encaminhamentos de investigação vislumbrados para a situação, os alunos empreenderam ações cognitivas de comunicação e argumentação.

CONHECIMENTO METACOGNITIVO

Identificamos a manifestação de conhecimentos metacognitivos relacionados às variáveis tarefa e estratégia, como quando R1 apresenta o tema de interesse do grupo ao professor e na apresentação demonstra ideias sobre o que fazer e o que considerar na abordagem do tema, talvez devido a experiências metacognitivas anteriores vivenciadas no âmbito do curso de Modelagem.

O conhecimento metacognitivo sobre a variável “tarefa” pode ser inferido, também, quando a aluna A manifesta que “*talvez ficasse até mais interessante*” a segunda abordagem da situação do que a primeira, o que pode ser resultado da reflexão da aluna sobre as duas tarefas e suas possíveis resoluções.

Em relação à variável “estratégia”, ainda, R1 demonstra um conhecimento metacognitivo quando sugere um modo de verificar quantos metros cúbicos foram utilizados por pessoa e o que os possíveis resultados dessa verificação significariam.

MONITORAMENTO OBSERVADO

Foram manifestados dois monitoramentos nas transcrições desse Episódio, ambos por R1.

- 1) **Monitoramento:** Ao apresentar ao professor as ideias iniciais do grupo sobre o tema “consumo de água em Toledo” R1 demonstra refletir sobre um possível encaminhamento de investigação, quando diz: “*a gente ia pegar os dados do consumo de água e a gente poderia fazer uma previsão de gastos para daqui alguns anos baseado nesse consumo e também no aumento da população*”.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: Diferentes possibilidades de problematizar um tema e de elaborar questões acerca dele.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A ação de planejar o desenvolvimento da atividade de Modelagem considerando as informações da situação inicial.

- 2) **Monitoramento:** Quando R3 sugere que o grupo estude o consumo de água por pessoa, R1 além de apresentar a estratégia correspondente a dividir o consumo de água anual pelo número de habitantes no respectivo ano, explica o que significariam os possíveis resultados dessa divisão. Se a divisão apresentasse resultados

aproximados nos diferentes anos, o aumento no consumo poderia ser atribuído somente ao aumento da população e se os resultados forem crescentes, então o aumento no consumo poderia ser atribuído, além do aumento populacional, ao aumento no consumo individual de água.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: As discussões realizadas pelo grupo na fase de inteiração e a existência de diferentes possibilidades de encaminhamento para um mesmo tema.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: Delimitação do encaminhamento que seria considerado na atividade de Modelagem.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nessa atividade de Modelagem, devido às experiências metacognitivas empreendidas no decorrer do curso, conhecimentos metacognitivos relacionados à Modelagem emergiram, tais como quando consideraram realizar uma previsão do consumo de água na cidade para os próximos anos, por exemplo. Conhecimento metacognitivo relacionado à variável tarefa.

A partir das discussões empreendidas e apresentadas no Episódio VII os alunos decidiram investigar, de fato, se o aumento no consumo de água na cidade de Toledo devia-se exclusivamente ao aumento populacional ou, também, a um aumento no consumo de água por habitante.

A obtenção de dados junto à Sanepar sobre o consumo de água na cidade nos anos de 2001 e 2011, levou os alunos a buscarem dados da população de Toledo para o mesmo período, dada a ideia de calcular a razão entre o consumo de água pela população. No entanto, no site do IBGE encontraram dados apenas para os anos em que houve algum tipo de contagem da população, no caso, 1996, 2001, 2007 e 2010, instaurando-se, a partir de então, a necessidade de estimar a população na cidade para os anos de 2001 a 2011 não contemplados pelos censos. Nesse contexto, o grupo de alunos decidiu construir um modelo matemático.

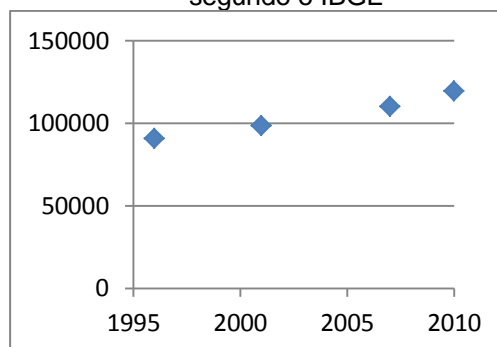
As discussões que seguem no Episódio VIII consideram os dados do IBGE expressos na Tabela 10 e na representação gráfica da Figura 21, construída pelos alunos no Excel. Os alunos discutem um possível ajuste para os dados.

Tabela 10: População em Toledo segundo o IBGE

Ano	População
1996	90417
2001	98200
2007	109857
2010	119313

Fonte: Registro utilizado pelos alunos na atividade

Figura 21: População em Toledo segundo o IBGE



Fonte: Registro utilizado pelos alunos na atividade

EPISÓDIO VIII

R1: Eu acho que vai ser uma linear.

R3: Vai ser uma linear mesmo.

R1: Não vai crescer muito de cada vez, porque uma exponencial cresceria e aqui não...

R2: Como é que a gente faz para saber se o crescimento é linear, é sempre o mesmo de um ano para o outro?

R1: ã

R3: Boa pergunta!

[...]

R3: Pega a régua. [risos]

R1: Tem que fazer a diferença? E faz a média depois?

R2: Faz pra ver.

[...]

R1: Não é só fazer a média deles?

R2: Não! Não é né... É a média das diferenças!

R3: Média das diferenças?

R1: É, porque vai ser o tanto que cresceu desse pra esse e desse pra esse... É? [...] Não!

R3: Porque vai achar... diminuir esse por esse, esse por esse, esse por esse, certo?

R1: Sim

R3: E divide por 3.

R1: Por três? É pela quantidade de anos ou de diferenças?

R3: É pela quantidade de tempo que se passou entre um ano e outro.

R1: Vamos fazer.

[...] alunos fazem os cálculos. Em seguida, constroem diferentes ajustes utilizando o software livre Graphmática. Continuam o ajuste linear.

R3: Como que é uma reta mesmo? A equação?

R1: $bx + c$

R3: O que a gente tem que fazer?

R1: O c é referente a altura né, no eixo y.
R3: Hum. E quanto que é esse valor?
R1: Esse valor... seria o primeiro né?
R3: 90417?
R1: É né, porque é quando o x é zero. E o b?
 [...]

R3: Boa pergunta!
R1: Eu lembro que a gente já fez isso.
 [...]

R3: Não tem como usar os outros valores?
 [...]

R3: E se substituir?
R1: Sim, sim, sim. Se substituir o x e o y vai ficar sobrando o b.
 [...] R1 começa a escrever.

R3: O que seria o b daí?
R1: O b tem haver com a inclinação da reta.
R3: Ah.

Nas transcrições desse Episódio os alunos conversam sobre a possibilidade de realizar um ajuste linear para representar o aumento populacional de Toledo. Pensar em um ajuste linear foi uma ação cognitiva recorrente da visualização do gráfico construído pelos alunos no Excel (Figura 21). R1 até cogita a possibilidade de utilizar uma função exponencial, mas descarta a ideia devido a acreditar que o crescimento não seria tão acentuado – *“Não vai crescer muito de cada vez, porque uma exponencial cresceria e aqui não...”* – o que remete à dimensão reflexiva da metacognição que, nesse caso, advém da análise conjunta do gráfico, da tabela e das opiniões dos alunos sobre como se daria o crescimento populacional.

A dimensão “administrativa” da metacognição também figura nas transcrições desse Episódio. A primeira vez, quando R2 chama a atenção do grupo para que eles pensem em uma maneira de verificar se o crescimento da população de um ano para outro era realmente linear – *“Como é que a gente faz para saber se o crescimento é linear, é sempre o mesmo de um ano para o outro?”*. A colocação de R2, na verdade, já denota um conhecimento sobre como proceder na situação, uma vez que utiliza como sinônimo as expressões “crescimento linear” e “crescimento é o mesmo de um ano para o outro”, no entanto, o próprio aluno não se dá conta disso.

Os alunos demoram um pouco até decidirem calcular a diferença de população entre dois dados da tabela e dividir o resultado pelo número de anos

compreendidos entre um dado e outro. Esse raciocínio foi sendo elaborado aos poucos pelos alunos, de modo que R1 manifesta “*Tem que fazer a diferença? E faz a média depois? [...] É, porque vai ser o tanto que cresceu desse pra esse e desse pra esse...*” e R3 completa dizendo que a diferença deve ser dividida “*pela quantidade de tempo que se passou entre um ano e outro*” dentre os presentes na tabela – falas que remetem à reflexão sobre uma estratégia, sobre o como proceder nessa situação.

Os alunos realizaram os cálculos e decidiram considerar aproximadamente constante o aumento na população de Toledo entre um ano e outro, talvez mais influenciados pela representação gráfica do que pelos resultados numéricos. Mesmo porque, nesse momento da resolução, enquanto alguns alunos realizavam os cálculos, outros utilizavam o software livre Graphmática para plotar diferentes ajustes, dentre os quais o ajuste via uma função polinomial do primeiro grau foi considerado, pelos alunos, aquele que melhor representava a situação.

A partir de então, os alunos conversam sobre a obtenção de uma expressão algébrica que possibilitasse estimar a população de Toledo em diferentes anos. Os alunos poderiam simplesmente adotar a expressão algébrica fornecida pelo software, mas diante da dinâmica dos encontros de Modelagem e da exigência do professor de os alunos mostrarem os cálculos que levavam à obtenção dessas expressões, os alunos optaram por construir um modelo realizando os cálculos à mão. Nesse contexto é que R3 manifesta a dimensão “administrativa” da metacognição. Enquanto conversa com R1, R3 tenta relembrar a expressão de uma função do primeiro grau e a relação dos coeficientes numéricos da expressão com o gráfico da função.

R3: Como que é uma reta mesmo? A equação?

R1: $bx + c$

R3: O que a gente tem que fazer?

R1: O c é referente a altura né, no eixo y .

R3: Hum. E quanto que é esse valor?

R1: Esse valor... seria o primeiro né?

R3: 90417?

R1: É né, porque é quando o x é zero.

O modo como R3 questionou o grupo (em especial, R1) funcionou como se estivesse questionando a si próprio, o que se constitui uma possível prática de monitoramento cognitivo. Um sujeito que faz indagações desse tipo à aqueles que com ele se dedicam a resolver um problema, pode influenciar práticas de monitoramento em seus pares, dado que tais práticas parecem ser aprendidas nas interações que os sujeitos estabelecem entre si. Essa prática de monitoramento parece denotar, ainda, experiências metacognitivas já internalizadas pelo sujeito. De certo modo, a prática de intervir na discussão interrogando os sujeitos como se interrogasse a si mesmo, lembra intervenções realizadas pelo docente em alguns momentos do curso.

R3 continua questionando o grupo. Ele questiona como quem administra a resolução do grupo e como quem elabora as questões para pensar sobre elas. Em consequência, intervém de modo a influenciar R1 em relação a como proceder para encontrar o valor do parâmetro b na expressão $f(x) = bx + c$. R3 pergunta se “*não tem como usar os outros valores?*” para obter b e ainda sugere “*e se substituir?*” – conhecimentos que remetem à variável estratégia do conhecimento metacognitivo.

É a partir das falas de R3 que R1, que antes havia dito “*eu lembro que a gente já fez isso*” – um conhecimento da variável pessoa do conhecimento metacognitivo –, recorda como proceder de modo a obter o valor de b na expressão do primeiro grau: “*sim, sim, sim, se substituir o x e o y vai ficar sobrando o b* ”.

Antes mesmo de o grupo começar a realizar os cálculos, R3 realiza uma nova intervenção – “*o que seria o b daí?*” – se referindo à influência do parâmetro b no gráfico da função polinomial do primeiro grau, ao que R1 responde ter relação com “*a inclinação da reta*”. R3 parece concordar e não prossegue com a discussão.

Na sequência das discussões apresentadas nesse Episódio, os alunos escolhem o último par ordenado da tabela (2010; 119313) para obter o valor de b no modelo matemático referente ao crescimento populacional de Toledo. Justificam a escolha apenas no trabalho escrito: “*O ano de 2010 também foi escolhido para que o valor de a [b na transcrição] fosse mais refinado, já que pequenas variações no crescimento populacional do município podem ter acontecido*”. Não é possível saber, no entanto, se os alunos utilizaram os diferentes pares ordenados de modo a optar

pelo modelo que apresentasse melhor validação. O grupo obteve o modelo $f(a) = 2064.a + 4029327$ como representativo da situação, em que a representa o ano e $f(a)$ representa o número de habitantes em Toledo no ano a .

No que se refere ao Episódio VIII, portanto, o seguinte quadro resumo pode ser considerado.

EPISÓDIO VIII
Discussões sobre a utilização de um ajuste linear para representar o aumento populacional de Toledo e construção de uma expressão algébrica relacionada.
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Matematização
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
Construir um modelo matemático que pudesse estimar a população de Toledo em um determinado ano e, de modo específico, avaliar se uma reta se ajustaria aos dados.
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
<p>Nas discussões desse Episódio, R3 realiza intervenções que denotam conhecimento metacognitivo da variável estratégia. Em certo momento R3 questiona o grupo sobre como encontrar os valores de b na expressão $f(x) = bx + c$. Sem resposta, o próprio aluno pergunta se “<i>não tem como usar os outros valores?</i>”, se referindo aos valores ainda não utilizados da tabela e sugere uma substituição dos valores de x e $f(x)$ uma vez que c já era conhecido.</p> <p>R1 também manifesta um conhecimento metacognitivo, mas referente à variável pessoa. Ele afirma “<i>eu lembro que já fiz isso</i>” se referindo à obtenção do valor de b na expressão $f(x) = bx + c$. A partir da intervenção de R3, R1 recorda uma estratégia a ser utilizada.</p>
MONITORAMENTO OBSERVADO
<p>Consideramos quatro monitoramentos nesse Episódio, dois relacionados à dimensão reflexiva da metacognição e dois relacionados à dimensão administrativa.</p> <p>1) Monitoramento: R1 considera a possibilidade de utilizar uma função exponencial ao invés de uma função linear para representar o crescimento populacional em Toledo, mas descarta a ideia devido a acreditar que o crescimento não seria tão acentuado: “<i>Não vai crescer muito de cada vez, porque uma exponencial cresceria e aqui não...</i>”.</p>

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: As diferentes possibilidades de encaminhamento na matematização.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A ação de matematizar e discutir características de conteúdos matemáticos frente às informações da situação.

- 2) **Monitoramento:** R2 chama a atenção do grupo para que eles pensem em uma maneira de verificar se o crescimento da população de um ano para outro era realmente linear – *“Como é que a gente faz para saber se o crescimento é linear, é sempre o mesmo de um ano para o outro?”*.

Dimensão Metacognitiva: Administração.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A possibilidade de diferentes encaminhamentos de resolução, no caso, de diferentes ajustes para a situação do aumento populacional em Toledo.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: O planejamento de ações locais, nesse caso, para verificar a pertinência do ajuste linear.

- 3) **Monitoramento:** R1 e R3 conversam sobre uma estratégia que possibilitasse ao grupo verificar se o aumento populacional havia sido aproximadamente constante no decorrer dos anos. R1 manifesta *“Tem que fazer a diferença? E faz a média depois? [...] É, porque vai ser o tanto que cresceu desse pra esse e desse pra esse...”* e R3 completa dizendo que a diferença deve ser dividida *“pela quantidade de tempo que se passou entre um ano e outro”* dentre os presentes na tabela.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: O compartilhamento de tarefas comuns entre diferentes componentes de um grupo e as discussões dos alunos sobre as estratégias de resolução.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A ação de matematizar e discutir características de conteúdos matemáticos frente às informações da situação.

4) **Monitoramento:** Em diferentes momentos do Episódio, R3 questiona os demais componentes do grupo como se questionasse a si próprio, o que no âmbito do grupo funcionou como uma prática de monitoramento que administrava a dinâmica de trabalho e da resolução em si. Em um dos momentos, R3 tenta relembrar a expressão de uma função do primeiro grau e a relação dos coeficientes numéricos da expressão com o gráfico da função.

Dimensão Metacognitiva: Administração.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A ação de matematizar e de recordar procedimentos já estudados.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A ação de matematizar e discutir características de conteúdos matemáticos frente às informações da situação.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Na sequência das discussões realizadas nesse Episódio os alunos obtiveram um modelo matemático para estimar o número de habitantes em Toledo nos anos em que o IBGE não realizou a contagem da população ($f(a) = 2064.a + 4029327$). Depois de encontrar os valores correspondentes à população nesses anos, os alunos calcularam a razão entre o consumo de água em certo ano e a população correspondente. Obtiveram a quarta coluna da Tabela 11:

Tabela 11: Razão entre o consumo de água e o número de habitantes em Toledo

Ano	População	Consumo de água (m ³)	Consumo de água (m ³) / habitante
2001	100737	3599822	35,73
2002	102801	3749588	36,47
2003	104865	3878301	36,98
2004	106929	3994728	37,35
2005	108993	4155683	38,12
2006	111057	4318282	38,88
2007	113121	4466858	39,48
2008	115185	4627740	40,17
2009	117249	4864255	41,48
2010	119313	5066462	42,46
2011	121377	5268782	43,55

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado nos registros dos alunos na atividade.

As discussões dos alunos sobre o cálculo da referida razão e algumas conclusões advindas da sua utilização na interpretação da situação inicial constituem o próximo Episódio.

EPISÓDIO IX

R1: Agora a gente tem que fazer uma previsão? A não... é quanto cada um...

R3: Faz uma divisão.

R1: O consumo pela população... né?

R3: Acrescenta uma linha [se referindo à linha para realizar a divisão no excel]. Acho que esse daí tem que fazer...

R1: Esse... dividido por esse.

[...]

R3: Tô curioso para saber o resultado.

R1: Tchãrãrãrã...

R3: Aumentou o consumo!

R1: Realmente, aumentou o consumo!

R3: Nossa!

R1: Mas a população também aumentou.

R3: Ah sim, sim, mas tipo... o consumo não foi tipo... o consumo não aumentou em relação à população. Entendi. Aumentou porque a população consumiu mais. Só o aumento da população não é o motivo para...

R1: O aumento no consumo de água, se você for ver, foi muito grande. Se você pensar no aumento por habitante, parece que não foi tão grande assim... Quer dizer, foi se a gente pensar de 2001 até 2011, dez anos depois as pessoas estão consumindo em média... quanto que dá?

R3: Quase 10

R1: 8 litros a mais!

R3: Litros? 8 mil metros quadrados, cúbicos

R1: Estão consumindo 8 metros cúbicos a mais por ano.

[...]

R1: Será que se a gente fizesse por dia não ficaria mais real, porque às vezes a gente não sabe quanto por dia.

R3: Só que não dá pra fazer por dia porque no verão se gasta mais.

R1: Ah é verdade, mas dá pra fazer uma média pra ter uma noção, tipo, por mais que tenha estação que você não bebe e nem toma banho direito... [risos]

[...]

R3: É 21 litros, 22 litros a mais por dia.

R1: Geeeennnte!

[...]

R3: O que são 22 litros?

[...]

R3: Muita água [risos]

R1: [risos] são quase 3 daqueles baldinhos pequenos, aqueles baldinhos de 1,99.

Já no início das falas apresentadas no Episódio os alunos manifestam a dimensão administrativa da metacognição quando, findada a atividade de construir um modelo matemático para estimar a população em Toledo, buscam pensar na próxima atividade a desenvolver. R1 pergunta “*Agora a gente tem que fazer uma previsão?*” – o que remete às experiências anteriores com atividades de Modelagem Matemática – e ele mesmo completa, como quem monitora a atividade e recorda o planejamento inicial: “*A não... é quanto cada um...*”, se referindo ao consumo de água por pessoa em Toledo.

R3 sugere a R1 que acrescentasse uma coluna (embora tenha utilizado o termo “linha” no Episódio) na planilha de cálculos eletrônica que o grupo utilizava e calculasse a razão entre o consumo de água e a quantidade de habitantes. Como os alunos partilhavam de uma mesma opinião sobre o que significariam os valores que obteriam nessa coluna – no caso de os valores serem crescentes e no caso de os valores serem aproximadamente os mesmos –, assim que a planilha forneceu os resultados, o grupo começou a emitir avaliações:

R3: Aumentou o consumo!

R1: Realmente, aumentou o consumo!

R3: Nossa!

R1: Mas a população também aumentou.

R3: Ah sim, sim, mas tipo... o consumo não foi tipo... o consumo não aumentou em relação à população. Entendi. Aumentou porque a população consumiu mais. Só o aumento da população não é o motivo para...

R1: O aumento no consumo de água, se você for ver, foi muito grande. Se você pensar no aumento por habitante, parece que não foi tão grande assim... Quer dizer, foi se a gente pensar de 2001 até 2011, dez anos depois as pessoas estão consumindo em média [...] 8 metros cúbicos a mais no ano.

Na avaliação realizada, os alunos concluíram que o aumento no consumo de água da cidade advém tanto do aumento da população quanto do aumento no consumo por pessoa. Nesse sentido, R1 atenta para o fato de que o aumento total no consumo de água na cidade parece ser muito grande, enquanto o aumento por habitante parece não ter sido tão acentuado, principalmente ao considerar uma medida não tão usual para eles: 8 metros cúbicos no ano.

O estranhamento dessa medida (8 metros cúbicos no ano) instaura um momento de reflexão dentre os alunos. R1 sugere - “*Será que se a gente fizesse por dia não ficaria mais real, porque às vezes a gente não sabe quanto por dia*”-. Essa intervenção de R1 resulta no cálculo da quantidade de litros consumidos a mais por cada habitante de Toledo em relação ao ano de 2001, ou seja, o aumento diário no consumo de água por habitante no período de 10 anos. Como resposta, os alunos encontram “21 litros, 22 litros a mais por dia” como afirma R3.

Nesse momento de reflexão, R3 ainda questiona o grupo sobre o que seriam 22 litros e ele mesmo brinca ao responder que seria “*muita água*”. R1 utiliza uma comparação “*são quase 3 daqueles baldinhos pequenos, aqueles baldinhos de 1,99*”. O fato é que o aumento na quantidade de água no consumo individual dos habitantes da cidade nos últimos 10 anos impressionou os componentes do grupo, os quais, a partir de então, começam a elencar alguns motivos, desde a instalação de novas indústrias na cidade (informação que foi desconsiderada no início da investigação, conscientemente) e o aumento da temperatura nos últimos anos, até o desperdício resultante de nossas ações diárias, tais como escovar os dentes e deixar a torneira aberta, realizar banhos demorados, dentre outros.

A resposta escrita do grupo para a atividade de Modelagem Matemática foi a seguinte:

É notável o crescimento no consumo de água por habitante. A variação de consumo é de aproximadamente $7,82 \text{ m}^3$, ou seja, 7820 litros. Assim, cada habitante de Toledo em 2011, consumiu 7820 litros a mais de água do que os habitantes de Toledo em 2001. Ou ainda, cada habitante de Toledo em 2011 consumiu 21,42 litros de água a mais diariamente do que em 2001.

Sobre a transcrição apresentada no Episódio IX consideramos o seguinte quadro resumo.

EPISÓDIO IX
Interpretação dos resultados encontrados na investigação.
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Interpretação

OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
<p>O objetivo cognitivo: responder ao propósito inicial da atividade de Modelagem Matemática: verificar se o aumento no consumo de água no período compreendido entre 2001 e 2011 se deve exclusivamente ao crescimento populacional ou se há influências de um possível aumento no consumo médio de água por habitante. As ações cognitivas: responder ao questionamento inicial e interpretar a solução obtida.</p>
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
<p>R3 sugere à R1 e ao grupo como um todo que considerem na planilha de cálculos uma nova coluna para realizar a divisão do consumo de água pela população, o que denota um conhecimento metacognitivo da variável “estratégia”, no caso, um conhecimento sobre como proceder junto ao Excel para realizar cálculos.</p> <p>O conhecimento metacognitivo da variável “pessoa” surge quando os alunos decidem converter o aumento no consumo de água por pessoa que era “anual” e dado em “metros cúbicos”, para uma unidade de medida em que pudessem melhor compreender o significado, no caso, o aumento “diário” e dado em “litros”. É como se os alunos considerassem entender melhor o aumento no consumo de água por pessoa ao utilizar as medidas litros e dias em vez de as medidas metros cúbicos e ano.</p>
MONITORAMENTO OBSERVADO
<p>Alguns monitoramentos foram realizados pelos alunos nesse Episódio, dentre eles:</p> <p>1) Monitoramento: Findada a atividade de encontrar os valores estimados da população para anos compreendidos entre 2001 e 2011, R1 monitora o desenvolvimento da Modelagem em relação ao planejamento inicial – <i>“agora a gente tem que fazer uma previsão? A não... é quanto cada um...”</i>, se referindo ao consumo de água por pessoa.</p> <p>Dimensão Metacognitiva: Administração.</p> <p>Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: a interpretação de resultados considerando-se o planejamento inicial da atividade de Modelagem e as características da situação inicial.</p> <p>Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A consideração do contexto da atividade de Modelagem e do planejamento inicialmente vislumbrado pelos alunos quando realizam a interpretação de resultados.</p>

2) **Monitoramento:** Os alunos concluem, a partir do estudo realizado, que o aumento no consumo de água da cidade advém tanto do aumento da população quanto do aumento no consumo por pessoa, embora não se sintam tão à vontade com o resultado – oito metros cúbicos por ano e por pessoa.

Dimensão Metacognitiva: Avaliação.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A interpretação de resultados à luz dos pressupostos assumidos na atividade.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: Também a interpretação de resultados à luz dos pressupostos assumidos no desenvolvimento da atividade.

3) **Monitoramento:** Os alunos refletem acerca de como tornar mais fácil a compreensão do aumento no consumo individual de água na cidade e convertem 8 metros cúbicos anuais em 22,41 litros diários.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A interpretação de resultados via uma representação matemática (nesse caso, uma unidade de medida) familiar aos alunos.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A mudança de uma representação para outra que melhor permita a compreensão dos alunos acerca dos resultados matemáticos obtidos.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Na situação do consumo de água em Toledo, os alunos realizaram ações com maior autonomia do que quando realizavam as primeiras atividades do curso, o que implicou na diminuição das intervenções do professor e no desenvolvimento da atividade de modo integral, considerando-se, nos diferentes momentos, o planejamento vislumbrado inicialmente e as informações da situação inicial.

Essa atividade, que aparentemente havia terminado, suscitou uma nova investigação. Os alunos ficaram curiosos em conhecer qual seria a quantidade de água consumida anualmente em Toledo por habitante nos próximos anos. Por isso,

começaram uma nova empreitada: construir uma expressão matemática que possibilitasse estimar o consumo médio de água anual por habitante de Toledo. É nesse contexto que se dá a resolução já apresentada na Figura 19 (página 150 desse texto).

Já no início da referida figura, os alunos apresentam um gráfico contendo os valores obtidos para o consumo individual de água em diferentes anos. Nesse gráfico, apresentam duas curvas sugeridas pelo software para ajustar os dados. Em um texto, os alunos justificam porque consideraram uma curva ao invés de outra: “o consumo de água tende a crescer, porém não tão acentuadamente, assim, o gráfico exponencial representa de forma mais fiel o crescimento real da água”. Essa frase denota o monitoramento cognitivo referente à dimensão reflexiva da metacognição, já que os alunos relacionaram características das funções exponencial e polinomial do terceiro grau, com a situação investigada e com o pressuposto assumido pelo grupo de que o consumo não tenderia a crescer “tão acentuadamente” e, nesse caso, a polinomial cresceria mais rapidamente que a exponencial.

A representação gráfica, nesse caso, foi construída pelos alunos com vistas a suscitar ideias de encaminhamento. Recorrer a esse signo no início de uma atividade por si só constitui-se uma estratégia metacognitiva desenvolvida pelos alunos no decorrer do curso de Modelagem. É possível inferir que os alunos passaram a utilizar esse signo diante das possibilidades de reflexões advindas dele, por esse signo agir como um instrumento de mediação que atenta para aspectos específicos da situação antes não considerados via outras representações.

Ao considerar uma função exponencial para representar a situação, os alunos escrevem: “O crescimento pode ser ligado a uma constante, que por nós utilizarmos de uma função exponencial tem a seguinte equação de definição: $k = (x)/(x-1)$ ”. Nesse caso, diferente do que acontecia em atividades anteriores, os alunos primeiro reconheceram a possibilidade de fazer uso de uma função exponencial, para depois utilizar de recorrência. Ou seja, os alunos decidiram utilizar uma função exponencial e só depois buscaram a constante relacionada à exponencial. Em atividades anteriores, os alunos realizavam investigações em relação aos dados e quando encontravam uma constante é que passavam a

construir o modelo matemático da situação, identificando se tratar de uma função do tipo exponencial apenas no final do processo. Essa mudança denota a constituição do conhecimento do sujeito que passa a considerar a relação entre duas diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Na Figura 19, os alunos explicam, passo a passo, o encaminhamento que utilizaram e que resultou em $C_a = 35,73 \times 1,02^{a-2001}$. Essa explicação minuciosa, apresentada mesmo sem uma orientação do professor para isso, denota por um lado a organização mental das ideias apresentadas e a importância dada pelo grupo em se fazer entender via o registro escrito, e por outro lado a administração no que tange à execução do algoritmo.

Tanto a utilização dessa estratégia de resolução quanto o fato de os alunos recorrerem a uma variável auxiliar (nesse caso, $x = \text{ano} - 2001$) para facilitar os cálculos na obtenção de um modelo matemático, foram ações realizadas pelos alunos com certa naturalidade nesse momento do curso, o que não acontecia nas primeiras atividades. Isso nos leva a considerar que tais encaminhamentos passaram a constituir os conhecimentos metacognitivos do sujeito no que se refere à variável estratégia e que essa constituição se deu a partir das experiências do sujeito com as atividades de Modelagem Matemática. É possível inferir, ainda, que tais estratégias não constituíam a zona de desenvolvimento real dos alunos no início do curso, sendo internalizada pelos sujeitos no decorrer das atividades. Essa mudança de “não utilizava” a estratégia para “passou a utilizar” denota a ocorrência de aprendizagem.

Além dessa atividade, referente ao construir uma expressão matemática que possibilitasse estimar o consumo médio de água anual por habitante de Toledo, o mesmo grupo decidiu realizar um estudo sobre a dinâmica do consumo de água na cidade no decorrer de um ano, com vistas a verificar, inclusive, se o oscilar desse consumo acompanharia ou não as estações do ano. Os dados que possuíam, também fornecidos pela Sanepar, referiam-se aos diferentes meses do ano de 2011. Nesse contexto, os alunos decidiram encontrar um modelo matemático que pudesse representar o consumo de água em Toledo no decorrer de 2011. O desenvolvimento dessa atividade foi apresentado na Figura 20 (página 152 desse texto).

No início do texto apresentado na Figura 20, os alunos denotam considerar o pressuposto de que “o consumo de água em um ano varia conforme a estação”. Isso se confirma quando, no mesmo parágrafo, escrevem que os dados fornecidos pela Sanepar para o consumo de água nos diferentes meses e a representação gráfica desses dados indicam “a variação **esperada**”.

Essas informações, aliadas à ideia de que a variação no consumo de água no decorrer de um ano tenderia a se repetir para outros anos, levam os alunos a considerar a função seno como possibilidade para ajustar os dados. As ações dos alunos nesse contexto decorrem da dimensão reflexiva da metacognição e constituem a fase de matematização da Modelagem Matemática. A representação gráfica constitui-se, também nessa atividade, um importante recurso utilizado pelos alunos para decidir que conceitos considerar na investigação. Na situação, os alunos escrevem “o gráfico do consumo de água por mês no ano de 2011 apresenta a forma semelhante a um gráfico de uma função seno”. A partir de então, no momento da realização da atividade, recorrem ao professor para saber como utilizar a função seno no contexto da situação inicial.

Embora os alunos apresentassem conhecimentos sobre a função seno, de modo a reconhecer na situação do consumo de água em 2011 a possibilidade de sua utilização, eles não sabiam como utilizá-la no desenvolvimento da atividade de Modelagem. É possível inferirmos, portanto, que o conceito de função seno estaria relacionado à zona de desenvolvimento proximal dos alunos. Nesse caso, o professor buscou discutir as influências dos parâmetros a , b , c e d da expressão $f(x)=a+b.\text{sen}(cx+d)$ no gráfico da função, de modo que os alunos pudessem, em seguida, construir um modelo matemático da situação.

O processo de construção do modelo matemático foi apresentado passo a passo pelos alunos no trabalho entregue ao professor, como consta nos registros escritos da Figura 20. Cada parâmetro da função foi calculado considerando-se as informações da situação inicial. Desse modo, podemos inferir que as três dimensões do monitoramento cognitivo foram utilizadas pelos alunos na resolução: reflexão – quando os alunos pensavam sobre quais informações considerar no cálculo de cada um dos parâmetros da função; avaliação, com vistas a verificar a pertinência de

cada parâmetro calculado; e administração, suscitada no diálogo constante entre as informações da situação inicial e os cálculos realizados.

No texto do trabalho (Figura 20) os alunos insinuam terem realizado outras tentativas de resolução quando afirmam “*desconsideramos dezembro pois o consumo havia sido maior do que a média, o que **quando aplicado** à função seno do problema os pontos estariam muito distante dos valores reais*”. Se realizaram outras tentativas, é possível inferir que os alunos validaram modelos obtidos em tentativas anteriores, o que remete à dimensão avaliação da metacognição; que os alunos administraram o processo de resolução de modo a realizar ajustes na resolução; bem como que os alunos refletiram sobre as respostas encontradas, de modo que tais reflexões conduziram, por exemplo, os alunos a descartar o mês de dezembro na construção do modelo matemático.

Em relação às resoluções dos alunos apresentadas nas Figuras 19 e 20, consideramos o seguinte quadro resumo.

RESOLUÇÃO DOS ALUNOS APRESENTADA NAS FIGURAS 19 E 20
Resolução dos alunos no que se refere à construção de uma expressão matemática que possibilitasse estimar o consumo médio de água anual por habitante em Toledo e no que se refere à variação no consumo mensal de água em Toledo no decorrer do ano de 2011.
FASE DA MODELAGEM MATEMÁTICA
Embora diferentes fases da Modelagem figurem nas resoluções apresentadas, a fase Resolução é a que mais os registros dos alunos evidenciam.
OBJETIVO COGNITIVO / AÇÕES COGNITIVAS
O objetivo cognitivo: construir dois modelos matemáticos, um representativo do consumo médio anual de água na cidade de Toledo por habitante, de modo a possibilitar previsões para o consumo em anos próximos, outro representativo da variação no consumo de água no decorrer do ano de 2011. As ações cognitivas: planejar o desenvolvimento da atividade de Modelagem e construir representações matemáticas para cada uma das situações.
CONHECIMENTO METACOGNITIVO
Nos registros escritos dos alunos constam apenas conhecimentos metacognitivos relacionado à variável estratégia. São exemplos: a utilização de representações gráficas para decidir quais conceitos matemáticos considerar nas resoluções; e o uso de uma

variável auxiliar para simplificar os cálculos que utilizam dados considerados “grandes”, como os anos de 2001, 2011, por exemplo.

MONITORAMENTO OBSERVADO

Podemos inferir a realização de alguns monitoramentos a partir do trabalho escrito, dentre eles:

- 1) **Monitoramento:** Os alunos consideraram que o aumento no consumo médio individual de água em Toledo no decorrer dos anos tenderia a não ser tão acentuado. Isso desencadeou, nesse caso específico, a escolha por uma função exponencial em vez de uma função polinomial do terceiro grau – duas sugestões do software Graphmática para ajustar os dados.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: a possibilidade de considerar diferentes encaminhamentos de resolução, tomados a partir de pressupostos assumidos pelos alunos, como quando afirmam “*tende a crescer, porém não tão acentuadamente*”.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A delimitação de um encaminhamento de resolução e de conceitos matemáticos a considerar nesse encaminhamento.

- 2) **Monitoramento:** Os alunos realizam uma explicação passo a passo das resoluções – nas duas situações consideradas –, o que denota a administração dos sujeitos no que tange à execução dos algoritmos e da resolução como um todo.

Dimensão Metacognitiva: Administração.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A fase de resolução da Modelagem e a utilização de estratégias de resolução nessa fase.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A compreensão, pelos sujeitos, de conceitos matemáticos (algoritmos e estratégias de resolução) e a utilização dos conhecimentos advindos dessa compreensão no desenvolvimento de novas atividades de Modelagem.

3) **Monitoramento:** Na situação em que uma função trigonométrica foi utilizada, cada parâmetro da função foi calculado considerando-se as informações da situação inicial.

Dimensão Metacognitiva: Reflexão, Administração e Avaliação.

Elementos das atividades de Modelagem que promoveram o monitoramento: A utilização de uma matemática com contexto, ou seja, a resolução de um problema considerando constantemente a situação inicial que desencadeou a atividade.

Ações da Modelagem desencadeadas pelo monitoramento: A validação de cada parâmetro da função trigonométrica em termos da situação inicial.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Os alunos não foram orientados a escrever, de modo detalhado, a resolução empreendida. No entanto, o fizeram na maior parte do trabalho escrito. Talvez visando explicar ao professor e aos demais leitores do trabalho, as decisões tomadas em cada momento da resolução. Talvez porque consideram que escrever o passo a passo das resoluções contribua para a compreensão das ações nelas realizadas.

5.2 DESCRIÇÕES DE OUTRAS ATIVIDADES REALIZADAS NO CURSO

Nessa seção, apresentamos brevemente cada uma das atividades realizadas no âmbito do curso de Modelagem e ainda não descritas: evolução dos aparelhos eletrônicos e os transístores; os novos planos de telefonia celular; o caso das redes sociais – facebook –; e o número de veículos e de condutores no estado do Paraná. Dessas situações, apenas a última foi realizada segundo orientações do terceiro momento da Modelagem, o que implica em considerar a resolução, apenas nessa situação, de um grupo diferente do considerado nos demais momentos dessa tese.

i) Evolução dos aparelhos eletrônicos e os transístores

Esse assunto, embora proposto pelo professor, surgiu diante do interesse de parte dos alunos da turma que estudavam o ensino médio técnico profissionalizante em Informática. Os demais alunos não tinham conhecimentos

sobre os transístores, por isso, já no início da atividade, os alunos da Informática apresentaram informações sobre esse componente eletrônico. Explicaram que os transístores são peças encontradas na maioria dos equipamentos eletrônicos e que a velocidade de processamento de um computador, por exemplo, depende da quantidade de transístores que possui, de modo que quanto menor o tamanho dos transístores mais deles cabem em um processador e maior é a velocidade da máquina. Isso remete à constante busca da indústria pela produção de transístores cada vez menores. É em relação a evolução do tamanho dos transístores que se dá o desenvolvimento dessa atividade de Modelagem Matemática.

Enquanto em 1971 o transístor media 15 μm (micrometro – definido como um milionésimo do metro, ou seja, como 10^{-6} metros), em 2010 o transístor media 0,03 μm (Tabela 12).

Tabela 12: Tamanho do transístor em diferentes anos

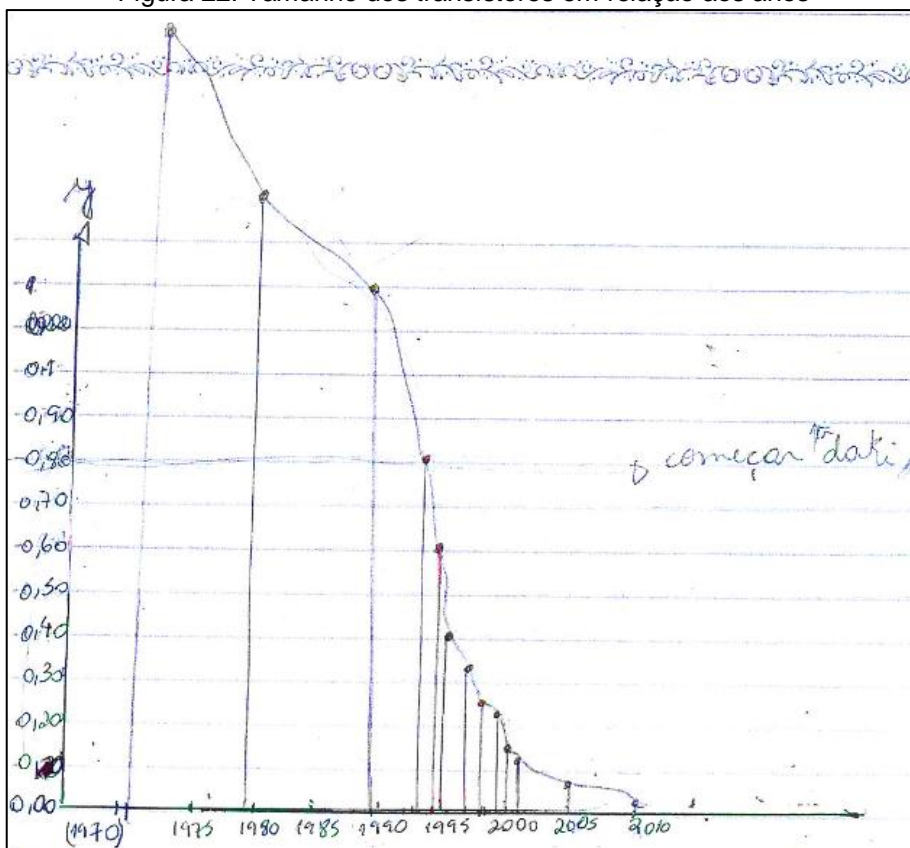
Processador	Ano	Tamanho do transístor (em μm)
Intel 4004	1971	15
Intel 8088	1979	3
Intel 80486	1989	1
Pentium 60 MHz	1993	0,8
Pentium 100 MHz	1994	0,6
Pentium 166 MHz	1995	0,4
Pentium 166 MMx	1997	0,35
Pentium III 350	1998	0,25
Intel Celeron 366	1999	0,22
Cyrix 3	2000	0,15
Pentium III Tualatin	2001	0,13
Modelos Intel – 2005	2005	0,07
Modelos Intel – 2010	2010	0,03

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em informações contidas em <http://www.htmlstaff.org/ver.php?id=11033>, visualizado em 22 de agosto de 2011

Frente às informações da Tabela 12, os alunos decidiram *encontrar uma lei (uma função) que pudesse fornecer o tamanho do transístor em função dos anos*. Embora tenha sido essa a intenção dos alunos, ao final do desenvolvimento da atividade eles também realizaram o cálculo para estimar o tamanho que um transístor teria em 2015 segundo a expressão obtida por eles.

Nessa atividade de Modelagem, a aluna D construiu uma representação gráfica dos dados (Figura 22) para ter uma ideia do que fazer. Essa representação, aliada às considerações dos alunos sobre os dados serem sempre decrescentes e tenderem a um limite – já que é impossível o tamanho dos transístores ser zero, por exemplo –, contribuiu para a decisão do grupo em considerar uma função exponencial do tipo $f(x) = a.b^x$ para representar a situação.

Figura 22: Tamanho dos transístores em relação aos anos



Fonte: Registro da aluna D na atividade

Nessa representação gráfica é possível verificar que os alunos decidiram considerar a função exponencial a partir da informação referente ao ano de 1993 (“começa daki”), o que justifica a consideração dos pares ordenados (1993, 0,8) e (2010, 0,03) para encontrar os parâmetros da função $f(x) = a.b^x$. Nesse caso, os alunos tomaram 1993 como o ano zero e 2010 como o ano dezessete, ao que obtiveram $f(x) = 0,8 \cdot 0,824^x$, modelo segundo o qual em 2015 os transístores medirão 0,11 µm.

ii) Os novos planos de telefonia celular

Esse tema surgiu no decorrer do desenvolvimento da atividade referente à evolução dos transístores. Na ocasião, o professor comentou que teria que comprar um novo celular e que estava em dúvida sobre qual prestadora de telefonia contratar. Os alunos sugeriram que investigássemos esse tema – telefonia celular – em algum momento do curso. O professor propôs, então, que cada grupo buscasse informações sobre uma prestadora diferente, escolhida por eles. Essas informações seriam apresentadas no encontro seguinte.

Os alunos encararam com bons olhos a tarefa, principalmente porque diferentes prestadoras eram utilizadas por eles e cada aluno parecia querer “defender” a sua. Diante disso, algumas delimitações foram feitas pelos sujeitos: considerariam apenas os planos de telefonia pré-pagos e considerariam um determinado perfil, denominado pelos alunos de “perfil UTFPR”, segundo o qual o tempo de ligação por dia seria, em média, de aproximadamente 30 minutos distribuídos em três ligações, que a internet seria utilizada cerca de duas vezes por semana e que seriam enviados de 0 a 3 mensagens por dia. No entanto, ao conhecer os diferentes planos, pequenas modificações (ou complementações) foram consideradas nesse perfil, tal como uma das três ligações ser feita para a própria prestadora, outra ligação para uma prestadora diferente e a última ligação para um telefone fixo, por exemplo.

A partir das delimitações, os alunos elaboraram as seguintes questões:
*Qual o melhor plano de telefonia celular para mim? E para o perfil UTFPR?
Compensa ter dois chips?*

No encontro seguinte os grupos apresentaram informações referentes a três prestadoras que, nesse caso, denominaremos prestadora A, prestadora B e prestadora C. As informações pesquisadas pelos alunos constam no Quadro 03.

Quadro 03 – Informações das prestadoras de telefonia celular

Prestadora A (PA)	Prestadora B (PB)	Prestadora C (PC)
R\$0,25 por ligação para PA R\$0,50 por dia – SMS e internet R\$1,39 por minuto em ligação para outra operadora	R\$0,21 por ligação para PB R\$0,50 por minuto em ligação para fixo R\$0,50 por minuto em ligação para outra operadora R\$0,45 por dia – SMS R\$0,50 por dia – internet	R\$0,05 por minuto em ligação para PC R\$6,99 por mês – internet R\$12,00 – recarga que permite o uso dos serviços da prestadora por 15 dias Os alunos não tinham informações sobre o custo de ligação para outras operadoras e para telefone fixo.

Fonte: Elaborado pelo autor com base nas informações apresentadas pelos alunos.

Na prestadora A, os alunos consideraram a realização de uma ligação por dia para outro telefone da mesma prestadora, uma ligação por dia para telefone fixo de mesmo DDD, envio de SMS e uso da internet todos os dias (cinquenta centavos cada item por dia) e uma ligação de um minuto por dia para telefone de outra operadora. Nesses termos, R\$75,92 seria o gasto mensal de um sujeito que utiliza essa prestadora (Figura 23).

Figura 23: Gasto mensal usando o plano de telefonia da prestadora A

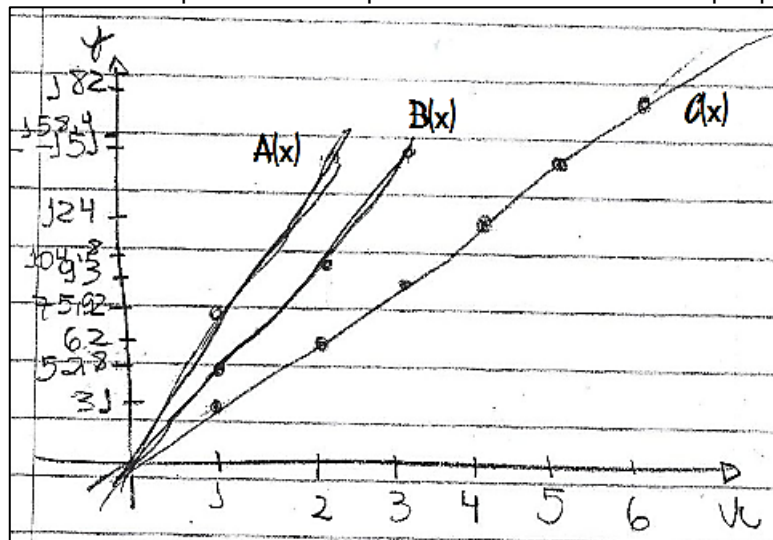
0,25 - 1 ligação PA p/dia
0,50 - 1 ligação fixo p/dia
1,39/plim 1 ligação para outra operadora
0,50 - SMS
R\$ 1,25 + ? p/dia + 2.050 (internet)
7 = 1,25 + 7 + 1
8,25 + 7.7 + 1 = 9,25 + 7.7 p/dia
(R\$ 37,00 + 28.1,39p/mês)
37 + 38,92 = 75,92 p/mês

Fonte: Registro dos alunos na atividade.

Nos mesmos termos e considerando o “perfil UTFPR”, os alunos encontraram o gasto mensal de R\$52,80 para a prestadora B e R\$31,00 para a prestadora C. Tomando cada um desses gastos no decorrer dos meses, os alunos escreveram as seguintes expressões: $A(x) = 75,92 \cdot x$ para a prestadora A, sendo x o número de meses e $A(x)$ o gasto segundo a prestadora A; $B(x) = 52,8 \cdot x$ para a

prestadora B, sendo x o número de meses e $B(x)$ o gasto segundo a prestadora B; $C(x) = 31 \cdot x$ para a prestadora C, sendo x o número de meses e $C(x)$ o gasto segundo a prestadora C. O gráfico correspondente é apresentado na Figura 24.

Figura 24: Gastos para diferentes planos de telefonia celulares pré-pagos



Fonte: Registro dos alunos na atividade

Diante dos modelos matemáticos considerados, os alunos concluíram que o melhor plano de telefonia celular para o “perfil UTFPR” seria o plano pré-pago oferecido pela prestadora C. De modo geral, os alunos concluíram que o plano C ou o plano A eram os que apresentavam menores custos dadas as especificidades de cada um. Em relação ao uso de dois chips, o grupo considerou que os gastos com dois planos de telefonia não apresentam vantagem.

iii) O caso das redes sociais – facebook

No anexo 03 apresentamos quatro reportagens relacionadas ao tema *facebook* a partir das quais se deu o desenvolvimento dessa atividade de Modelagem. As informações numéricas constantes nas reportagens referiam-se tanto à quantidade de usuários da referida rede social de acordo com faixas etárias e à comparação do número de usuários do *facebook* com o número de usuários do *orkut*, quanto à evolução do número de usuários do *facebook* nos últimos anos. Na ocasião, os alunos consideraram essa terceira possibilidade e utilizaram informações das diferentes reportagens (Tabela 13):

Tabela 13: Quantidade de usuários do *facebook* no Brasil

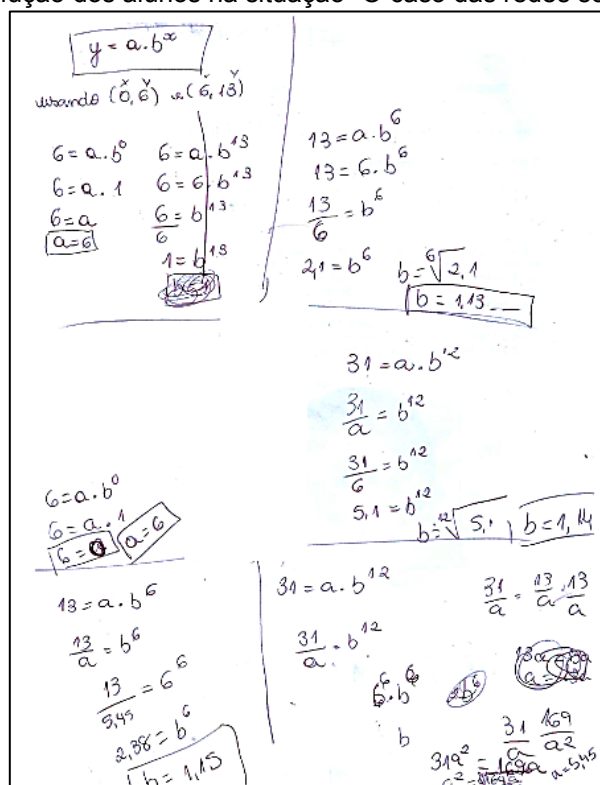
Período	x	Quantidade aproximada de usuários (em milhões)
Setembro de 2010	0	6
Março de 2011	6	13
Setembro de 2011	12	31

Fonte: Elaborado pelo autor, baseado no registro dos alunos

Embora fossem poucos os dados, a partir deles os alunos consideraram a possibilidade de responder à seguinte questão: *Qual a estimativa que podemos fazer para o número de usuários do facebook existentes hoje (em dezembro de 2011, no caso)? E para daqui a um ano?*

Como o número de usuários da rede social havia crescido muito em poucos meses, os alunos consideraram que esse crescimento poderia ser considerado exponencial, ao que utilizaram a expressão $f(x) = a \cdot b^x$ para representar a situação. Nesse contexto, de modo a calcular os parâmetros da função exponencial, os alunos utilizaram as informações apresentadas na Tabela 13, duas a duas, visando encontrar uma expressão cujo ajuste fosse o melhor. Os cálculos seguem na Figura 25.

Figura 25: Resolução dos alunos na situação “O caso das redes sociais – facebook”

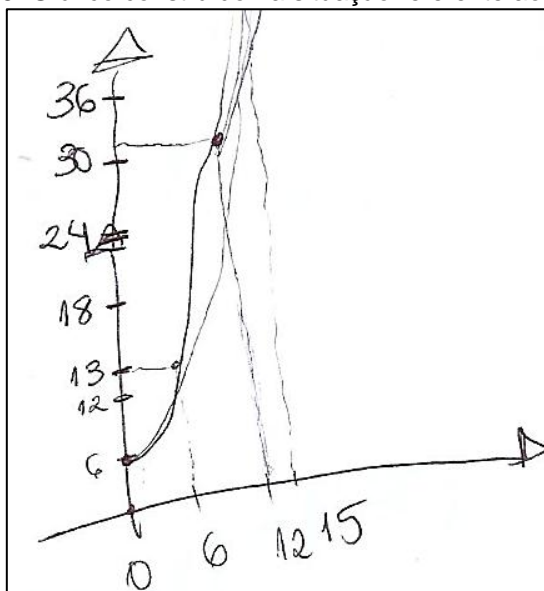


Fonte: Registro dos alunos na atividade

Depois de realizarem cálculos considerando os tempos conhecidos (x) em cada um dos três modelos matemáticos construídos, a fim de verificar a proximidade entre os valores modelados e os coletados, os alunos optaram por utilizar o terceiro deles: $f(x) = 5,45 \cdot 1,15^x$, sendo x o tempo em meses considerado a partir de setembro de 2010 e $f(x)$ o número de usuários do *facebook* no Brasil no tempo x .

Segundo o modelo, em dezembro de 2011 (o “hoje” a que se referiam os alunos na questão) o número de usuários do *facebook* no Brasil seria de 44 milhões, e em dezembro de 2012, seria de 237 milhões. Essa última previsão não foi considerada válida pelos alunos, já que a população do Brasil era de aproximadamente 190 milhões na época. No entanto, os alunos consideraram que o número de usuários do *facebook* no país poderia ser maior que sua população, já que muitas empresas têm contas na rede social, bem como muitas pessoas possuem mais de uma conta. Já em relação à obtenção de 44 milhões para o número de usuários em dezembro de 2011, os alunos consideraram a previsão plausível. Um esboço do gráfico também foi construído pelos alunos (Figura 26)

Figura 26: Gráfico construído na situação referente ao *facebook*



Fonte: Registro dos alunos na atividade

iv) Número de veículos e de condutores no Paraná

Essa atividade foi desenvolvida segundo orientações do terceiro momento da Modelagem Matemática. Na ocasião, os alunos tinham a intenção de investigar em que momento o número de veículos no estado do Paraná seria maior que o número de condutores no estado. No entanto, essa intenção foi modificada assim que os alunos inteiraram-se do tema e verificaram que o número de veículos no estado, no momento da investigação, já era maior que o número de condutores. Surpresos diante do fato, os alunos decidiram investigar *quando o número de veículos no estado do Paraná chegaria a ser o dobro do número de condutores*.

Para isso, recorreram ao site do DETRAN e construíram duas tabelas com as informações obtidas no site: a primeira considerando a evolução do número de veículos no estado do Paraná no período de 2001 até 2010 e a segunda, considerando a evolução do número de condutores cadastrados no estado do Paraná no período de 2001 até 2010. As tabelas constam na Figura 27.

Figura 27: Número de condutores e de veículos no estado do Paraná

ANO	Condutores	$X_t = C_t / C(t-1)$	ANO	Veículos	$X_t = V_t / V(t-1)$
2001	2,532,059		2001	2,532,257	
2002	2,698,248	1.065633937	2002	2,718,779	1.0736584
2003	2,883,434	1.068631942	2003	2,929,662	1.077565334
2004	3,062,731	1.06218176	2004	3,182,772	1.086395632
2005	3,244,331	1.059293487	2005	3,432,367	1.078420635
2006	3,437,470	1.059531225	2006	3,675,703	1.070894517
2007	3,630,824	1.056248927	2007	3,999,483	1.088086551
2008	3,852,266	1.060989461	2008	4,358,093	1.089664089
2009	4,100,550	1.064451416	2009	4,683,631	1.07469735
2010	4,282,593	1.044394776	2010	5,041,846	1.076482327
Kc = Média de $X_t = 1.0601507702$			Kv = Média de $X_t = 1.0795405$		
Legenda:					
Xt = Condutores/Veículos de um ano divididos pelos condutores do ano que o retrocede					
t = ano					
C = Condutores					
V = Veículos					
Kc = Constante de condutores					
Kv = Constante de veículos					

Fonte: Registro dos alunos na atividade

Os alunos consideram uma terceira coluna em cada uma das tabelas apresentadas na Figura 27. Nela, consideram o pressuposto de que o crescimento

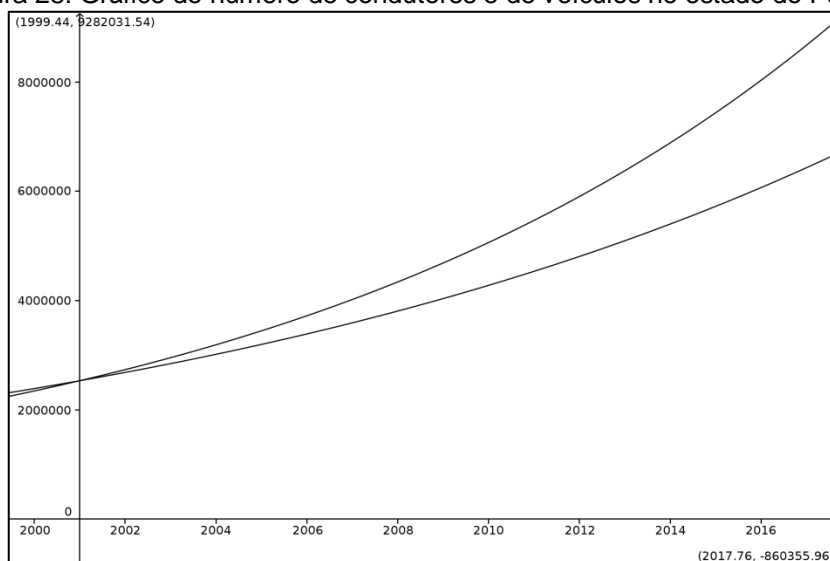
no número de condutores e no número de veículos teria se dado de modo exponencial nos últimos anos, ou seja, consideram que a razão entre o número de condutores (de veículos) de um determinado ano e do ano imediatamente anterior seria aproximadamente constante. Os valores médios encontrados para essas constantes são apresentados na figura como K_c e K_v .

Utilizando-se de conhecimentos construídos possivelmente em atividades anteriores de Modelagem Matemática, os alunos utilizaram a expressão $V(t) = v_0 \cdot K_v^t$ na situação da evolução do número de veículos e $C(t) = c_0 \cdot K_c^t$ na situação da evolução do número de condutores, sendo v_0 e c_0 o número de veículos e de condutores, respectivamente, no ano de 2001. Portanto, os modelos construídos em cada situação foram:

- ✓ para o número de condutores: $V(t) = 2\,532\,257.1,08^{t-2001}$
- ✓ para o número de veículos: $C(t) = 2\,532\,059.1,06^{t-2001}$

A partir de então, os alunos realizaram uma comparação dos valores pesquisados no site do DETRAN aos fornecidos pelos modelos. Ao considerarem os modelos válidos, construíram uma representação gráfica dos mesmos (Figura 28) e passaram a responder a questão inicial: determinar em que momento o número de veículos passaria a ser o dobro do número de condutores no estado do Paraná.

Figura 28: Gráfico do número de condutores e de veículos no estado do Paraná



Fonte: Registro dos alunos na atividade

Para responder à questão, os alunos consideraram a equação $V(t) = 2.C(t)$, ou ainda, $2\,532\,257.1,08^{t-2001} = 2 \cdot 2\,532\,059.1,06^{t-2001}$. Nesse momento, realizaram uma simplificação: como os valores iniciais em cada modelo eram muito próximos, consideraram que a resolução da equação poderia ser realizada considerando apenas que $1,08^{t-2001} = 2.1,06^{t-2001}$.

Aplicando logaritmo em ambos os termos da equação, os alunos obtiveram 2038 como o ano em que o número de veículos no estado do Paraná poderá ser o dobro do número de condutores. Finalizando a resolução, os alunos concluem:

Neste trabalho descobrimos que no início do século o número de carros já estava muito próximo do número de condutores. Podemos ver também que, seguindo uma constante, como fizemos, o ano em que o número de carros atingirá o dobro do número de condutores não está muito distante da nossa realidade. Também podemos observar que há questões ambientais envolvidas com o grande número de carros, como a emissão de gases que afetam a camada de Ozônio, por exemplo.

No próximo capítulo realizamos a análise global. Nela, além de considerarmos os quadros resumos construídos nas análises específicas e as discussões que antecederam as construções desses quadros, consideramos algumas discussões empreendidas pelos alunos em outros momentos do curso, como no momento de realização das atividades apresentadas em 5.2.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE GLOBAL

N

esse capítulo apresentamos reflexões gerais acerca do monitoramento cognitivo dos estudantes em atividades de Modelagem Matemática, considerando as análises específicas realizadas no capítulo V bem como os propósitos dessa investigação anunciadas na introdução e retomadas no quarto capítulo. Para isso, tomamos cada dimensão metacognitiva segundo Tovar-Gálvez (2008) – reflexão, administração e avaliação – e realizamos reflexões acerca dos objetivos da pesquisa em cada uma delas.

ÍNDICE

- 6.1 Análise Global – o Monitoramento Cognitivo em Atividades de Modelagem
- 6.2 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “reflexão” da Metacognição
- 6.3 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “administração” da Metacognição
- 6.4 As práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática relacionadas à dimensão “avaliação” da Metacognição
- 6.5 Acerca da manifestação de conhecimentos metacognitivos em atividades de Modelagem Matemática

6.1 ANÁLISE GLOBAL - O MONITORAMENTO COGNITIVO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

Considerando o interesse em investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes, propusemos, inicialmente, um curso de Modelagem Matemática no qual os alunos vivenciavam experiências com atividades de Modelagem sem que houvesse uma condução do professor-pesquisador direcionada à promoção desse monitoramento.

O conjunto de atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como os registros escritos e a transcrição dos áudios das discussões nessas atividades, são tomados como fonte para algumas reflexões. Tais reflexões são orientadas pelo interesse em:

- ✓ identificar formas de monitoramento cognitivo expressas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem Matemática;
- ✓ caracterizar elementos das atividades de Modelagem Matemática que promovem o monitoramento cognitivo;
- ✓ investigar que ações o monitoramento cognitivo desencadeia durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Nesse capítulo apresentamos, inicialmente, reflexões acerca das intenções da pesquisa em relação a cada dimensão metacognitiva segundo perspectiva de Tovar-Gálvez (2008) – reflexão, administração e avaliação. Nessa perspectiva, as práticas de monitoramento manifestadas pelos alunos podem ser entendidas segundo as três dimensões. Buscamos, ainda, apresentar os conhecimentos metacognitivos manifestados nas atividades de Modelagem.

6.2 AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA RELACIONADAS À DIMENSÃO “REFLEXÃO” DA METACOGNIÇÃO

A dimensão reflexiva da metacognição refere-se às práticas de monitoramento relacionadas ao conhecimento, ao reconhecimento e à avaliação do sujeito acerca de suas próprias estruturas cognitivas. É uma dimensão presente

quando o sujeito, tomando a responsabilidade da resolução de um problema para si, busca os componentes cognitivos necessários para resolver esse problema, tanto no que tange aos conhecimentos metacognitivos quanto no que tange ao encaminhamento da atividade. No Quadro 04 sistematizamos formas de monitoramento percebidas no âmbito da dimensão reflexiva da metacognição manifestadas pelos alunos nas atividades de Modelagem Matemática.

Quadro 04: Formas de monitoramento cognitivo referentes à dimensão reflexiva

MONITORAMENTO COGNITIVO REFERENTE À DIMENSÃO REFLEXIVA	
Acerca dos conhecimentos metacognitivos	Acerca do encaminhamento da atividade (especificamente)
<p>QUANTO A ESTRATÉGIA</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) “Quebrar” um problema em partes menores pode ser útil para resolvê-lo: como quando os alunos decidem primeiro construir uma representação matemática para a quantidade de doadores de órgãos, para depois calcular a idade para a qual esse valor é máximo, ou quando os alunos decidem construir um modelo matemático que pudesse representar a população em Toledo para só depois relacionar essa população e o consumo de água na cidade. 2) A solução de um problema pode não ser compreensível diante da representação em que é dada, o que suscita a necessidade de mudar a representação: como quando os alunos concluem que nos últimos dez anos o consumo individual de água em Toledo aumentou 8 metros cúbicos e não entendem bem o que significa isso, realizando uma conversão para litros (cerca de 22 litros) e uma comparação empírica (cerca de “3 daqueles baldinhos pequenos [de lojas] de 1,99”). 3) Construir uma representação gráfica a partir de dados iniciais pode ser útil na delimitação de um encaminhamento de resolução e de quais conceitos matemáticos considerar: como quando os alunos consideram a possibilidade de realizar um ajuste exponencial na situação da evolução dos transistores a partir da representação gráfica dos dados e da consideração de que por menor que seja o tamanho de um transistor ele nunca chegará a ser zero. 	<p>QUANTO A ESTRATÉGIA</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Estimando resultados e planejando encaminhamentos: como quando os alunos conversam sobre a representação gráfica que construiriam para pensar sobre a situação referente à doação de órgãos e fazem desenhos no ar, estimando a representação gráfica que obteriam, ou quando discutem o encaminhamento que vislumbram para a investigação da situação referente ao consumo de água em Toledo – considerar o consumo de água na cidade em anos anteriores, a população da cidade nos mesmos anos e estimar o consumo nos próximos anos. 2) Simplificando as informações para realizar uma atividade de Modelagem: como quando na situação referente à telefonia celular, os alunos optam por criar um perfil UTFPR para avaliar dentre os diferentes planos de telefonia qual seria o melhor em certas condições. Os alunos atentaram para a necessidade de criar um perfil devido a aparente complexidade existente em encontrar qual o melhor plano de telefonia móvel diante de tantas especificidades apresentadas por cada operadora.

<p>QUANTO A RELAÇÃO ENTRE ESTRATÉGIA E PESSOA</p> <p>4) Os modos como lidamos com um conteúdo matemático remete aos modos como lidávamos com o conteúdo quando o aprendemos: como quando os alunos, na situação do trânsito em Apucarana, refletem sobre as diferenças nas resoluções dos alunos para as expressões $(2x-x)$ e $(2 \cdot 2^a - 2^a)$ e D manifesta: “<i>quando é com x a gente aprendeu assim [subtração], mas do outro jeito a gente aprendeu a pôr em evidência</i>”.</p>	<p>QUANTO A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM A SITUAÇÃO INVESTIGADA</p> <p>3) Relacionando matemática e a situação investigada: como quando os alunos realizam a validação do modelo matemático construído na situação da doação de órgãos e os resultados causam estranhamento por não se aproximarem dos valores obtidos na coleta de dados. Nessa situação, o estranhamento leva a uma discussão sobre como calcular valores de $f(x)$ para diferentes valores de x no modelo. Em outro exemplo, os alunos conversam sobre o significado dos resultados obtidos na divisão do consumo anual de água da cidade de Toledo pelo número de habitantes nos diferentes anos.</p>
	<p>QUANTO À SITUAÇÃO EXTRA MATEMÁTICA</p> <p>4) Reflexão acerca da situação extra matemática: como quando os alunos do Ensino Médio que participavam do curso de Modelagem Matemática refletem sobre seus conhecimentos relacionados aos transístores, já constituídos em sua zona de desenvolvimento real, e apresentam as informações aos demais alunos do curso, de modo a levá-los a inteirar-se da situação inicial. Ou como quando, na situação das redes sociais, os alunos refletem sobre as possibilidades de o número de usuários do <i>facebook</i> ser maior que o da população de um país, dado que uma mesma pessoa pode ter mais contas na rede social, o que denota reflexões relacionadas à situação extra matemática.</p>
	<p>QUANTO AOS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS</p> <p>5) Reflexão acerca dos conteúdos matemáticos: como quando os alunos decidem pelo ajuste linear ao invés do exponencial para estimar a população de Toledo em diferentes anos, denotando que conhecem características das duas funções. Ou como quando os alunos afirmam que para encontrar a idade para a qual há maior número de doadores de órgãos, devem encontrar o x correspondente ao “pico” da parábola, reconhecendo a existência de uma fórmula que pode ser usada para isso (embora não tenham lembrado a fórmula de imediato). Ou ainda, como quando refletem sobre a possibilidade de a função seno ser utilizada na situação do consumo de água em Toledo no decorrer de 2011.</p>

Embora tenhamos separado os monitoramentos cognitivos relacionados à reflexão em duas colunas, uma referente ao conhecimento metacognitivo e outra referente ao encaminhamento da atividade especificamente, reconhecemos que as primeiras, mais generalizáveis, também desencadeiam ações que influenciam as atividades.

Essa dimensão metacognitiva, a reflexão, está fortemente associada aos conhecimentos metacognitivos e, em consequência, às experiências metacognitivas, já que essas últimas é que constituem os primeiros. Isso acontece porque, ao pensar em como proceder frente à atividade de Modelagem, os alunos acabam buscando encontrar em sua estrutura cognitiva meios de agir que possibilitem a realização da atividade. Esses meios de agir, quando consolidados no sujeito, constituem o seu nível de desenvolvimento real e são realizados com certa autonomia. Todavia, quando as estratégias estão em vias de consolidação, constituem a zona de desenvolvimento proximal dos sujeitos, os quais mesmo sendo responsáveis pela ideia recorrem ao auxílio de outro sujeito ou de um material para empreender a resolução. É o que aconteceu na situação do consumo de água em Toledo no decorrer do ano de 2011 quando os alunos recorreram à função seno. Embora o grupo reconhecesse nessa função uma possibilidade de resolução, não sabia como calcular os parâmetros da função, recorrendo, portanto, ao auxílio do professor. Em outros momentos do curso, no entanto, os próprios alunos eram os mediadores das discussões e intervinham nas reflexões uns dos outros.

As reflexões acerca de conhecimentos metacognitivos relacionados às atividades de Modelagem Matemática especificamente só emergiram à medida que os alunos vivenciavam experiências com a Modelagem, mesmo porque na ausência de experiências metacognitivas com Modelagem não existem conhecimentos metacognitivos relacionados que possam ser utilizados pelos sujeitos.

Na atividade do primeiro momento, trânsito em Apucarana, por exemplo, não houve manifestação de reflexões relacionadas aos elementos de uma atividade de Modelagem, tais como a consideração de diferentes possibilidades de resolução e/ou o uso de diferentes representações devido às possibilidades de interpretação advindas de cada uma. Já na atividade de Modelagem do terceiro momento,

consumo de água em Toledo, por exemplo, os alunos já discutiam as possibilidades de investigação considerando que não eram únicas, tanto que decidiram, por exemplo, considerar que investigar se o aumento no consumo de água na cidade de Toledo era devido apenas ao crescimento populacional ou não, poderia tornar a atividade de Modelagem mais interessante (para o grupo e para os que conheceriam o trabalho caso ele viesse a ser divulgado) que investigar como calcular a quantidade de água consumida na cidade para anos próximos.

O fato de as atividades de Modelagem Matemática serem abertas e permitirem múltiplas possibilidades de resolução, tanto no que diz respeito à escolha do tema, ao elaborar uma questão, quanto no que se refere aos conteúdos e estratégias considerados no desenvolvimento da atividade, pode ser entendido como característica das atividades de Modelagem que promovem o monitoramento cognitivo referente à dimensão reflexiva. As atividades de Modelagem são desenvolvidas pelos alunos com certa autonomia e, geralmente, não é possível aos alunos recorrerem à estratégia “siga o exemplo dado pelo professor”, o que desencadeia discussões entre os alunos em relação ao que fazer para investigar certa situação.

É visando planejar ações que possibilitem a investigação, que os alunos, na dinâmica de um grupo, recorrem aos seus conhecimentos prévios – sobre situações anteriores, sobre o tema de investigação, sobre os conceitos matemáticos e estratégias de resolução – para construir um plano de ação não mais individual, mas coletivo.

As reflexões que emergem nesse contexto levam os alunos a revisitarem conceitos já aprendidos, ressignificando-os a partir das especificidades da situação investigada e da mediação realizada pelos outros componentes do grupo, bem como a internalizar outros conceitos conforme esses emergem nas discussões. Desse modo, o trabalho em grupo, colaborativo, é uma característica das atividades de Modelagem que o monitoramento fortalece.

A aprendizagem de um novo conceito (uma prática de monitoramento inclusive) tem como especificidade ser mediada por outro conceito (mediação semiótica) e incorporar, simultaneamente, o novo conceito e as reflexões sobre o

conceito primário (inicial) que, nessa altura, também já não é mais entendido como antes.

Outro elemento das atividades de Modelagem que suscitou reflexões nos alunos, também relacionado às diferentes possibilidades de resolução, é a importância de se utilizar diferentes representações para poder pensar o problema, seja no processo de inteiração, como quando na situação referente à doação de órgãos os alunos discutem a elaboração de uma questão e consideram uma tabela para isso, ou como quando os alunos, na fase de matematização da mesma situação, constroem uma representação gráfica no ar para decidir se utilizam uma função quadrática ou uma função seno para ajustar os dados da tabela, ou finalmente, quando decidem converter metros cúbicos em litros na interpretação dos resultados obtidos na situação do consumo de água em Toledo, com vistas a compreender a solução encontrada na atividade.

A construção de uma representação gráfica a partir dos dados iniciais de uma situação, como realizada pelo grupo nas situações da evolução dos transístores ou do consumo de água em Toledo no decorrer de 2011, passou a ser considerada pelos alunos uma estratégia de resolução que permitia planejar e delimitar o encaminhamento da atividade de Modelagem, tanto que consideramos essa estratégia constituinte do conhecimento metacognitivo dos sujeitos aprendida por eles diante das especificidades das situações vivenciadas e da dinâmica estabelecida pelo grupo. A representação gráfica pode ser considerada, portanto, um signo utilizado pelos sujeitos para “pensar sobre” o desenvolvimento da atividade de Modelagem.

Por maior que seja o tempo de duração de uma atividade de Modelagem Matemática ou por mais que a atividade possa ser realizada em fases, a *unicidade* da atividade é outro elemento que suscita o monitoramento cognitivo relacionado à reflexão. A *unicidade*, nesse caso, refere-se à necessidade de considerar (e recorrer) no desenvolvimento da atividade e nas diferentes fases da Modelagem as informações e os conhecimentos da situação como um todo, ou seja, mesmo que existam diferentes tarefas presentes na atividade de Modelagem tais como elaborar uma questão, resolver uma equação, validar uma informação, resolver um sistema de equações, interpretar um resultado, construir um gráfico, ainda assim, há de se

manter uma compreensão do todo e utilizar essa compreensão no desenvolvimento da atividade. As reflexões que emergem devido à *unicidade* das atividades de Modelagem desencadeiam a própria *unicidade*, ou seja, desencadeiam a prática constante de analisar o desenvolvimento da atividade considerando-a em sua totalidade.

A prática de monitoramento cognitivo no que tange à dimensão reflexiva da metacognição acontece, portanto, durante todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática e ocorre com maior frequência conforme os alunos se habituem às atividades. De todo modo, é possível inferir que a reflexão acontece ora em aspectos locais da realização da atividade e ora em aspectos da atividade de Modelagem como um todo, principalmente porque atividades de Modelagem demandam certo tempo e contemplam a realização de ações locais, como àquelas realizadas nas várias fases da Modelagem.

6.3 AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA RELACIONADAS À DIMENSÃO “ADMINISTRAÇÃO” DA METACOGNIÇÃO

No desenvolvimento de uma atividade investigativa como são as atividades de Modelagem, uma das primeiras providências dos alunos consiste, geralmente, em inteirar-se da situação inicial e reconhecer ações a empreender nessa atividade. Nesse contexto, os alunos buscam em sua estrutura cognitiva conhecimentos relevantes (segundo o julgamento dos próprios alunos) que possibilitem a realização da atividade. Estando ciente de suas possibilidades frente à investigação, do objetivo da atividade e das ações a realizar, os envolvidos precisam gerir o desenvolvimento da atividade. Esse gerenciamento constitui as práticas de monitoramento cognitivo relacionados à dimensão administrativa da metacognição.

Embora a administração tenha acontecido em todas as atividades de Modelagem, nas primeiras era uma dimensão muitas vezes ensejada pelo professor e não pelos alunos. Na medida em que as atividades eram realizadas e compreensões acerca das atividades de Modelagem eram construídas, a administração torna-se atividade predominantemente desencadeada pelos alunos.

Diante dos dados da pesquisa, buscamos identificar formas de monitoramento manifestadas no âmbito da dimensão administrativa da metacognição. As práticas de monitoramento relacionadas à administração nas atividades de Modelagem emergiram quando os alunos visavam:

- verificar se procedimentos utilizados em atividades anteriores de Modelagem poderiam ser utilizados na nova atividade;
- decidir entre mudar os rumos da resolução ou manter o planejamento inicial;
- voltar ao problema, chamando a atenção do grupo para as discussões;
- encontrar um encaminhamento que possibilitasse confirmar ou não uma estimativa, verificar a viabilidade ou não de uma ideia e/ou relembrar conceitos já estudados;
- avaliar resultados “estranhos” em relação às informações da situação inicial ou decidir por um melhor ajuste;
- realizar ajustes e simplificações no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

Passamos a apresentar considerações acerca de cada uma dessas formas de monitoramento cognitivo:

i) Verificar se procedimentos utilizados em atividades anteriores de Modelagem poderiam ser utilizados na nova atividade;

Essa administração foi realizada pelos alunos em todos os momentos do curso, no entanto, com intenções distintas. Enquanto no início do curso, os alunos recorriam às atividades já realizadas como se tivessem que utilizá-la como exemplo para reproduzir as mesmas ideias na nova atividade, talvez devido ao modo como a matemática é trabalhada no ensino “tradicional”, nas outras atividades, os alunos recorriam às atividades anteriores por identificar na nova atividade a possibilidade de utilizar estratégias já desenvolvidas noutro momento. Muitas vezes nem chegavam a visitar as atividades anteriores, apenas se referiam a elas.

Na situação referente à doação de órgãos, por exemplo, o aluno R3 administrava as discussões do grupo de modo a fazê-los encontrar uma razão numérica entre os dados mesmo sem avaliar se a estratégia seria ou não adequada naquele contexto. Como até o momento só haviam vivenciado uma atividade de Modelagem (trânsito na cidade de Apucarana) e nessa atividade o encaminhamento inicial consistiu em obter uma razão entre os dados, supomos que R3 insistia na estratégia não por julgá-la conveniente, mas por entender a nova atividade de Modelagem como uma oportunidade de “treinar” as estratégias vivenciadas no primeiro encontro do curso.

Já na situação do consumo de água em Toledo, os alunos optaram por utilizar um ajuste linear para representar o aumento populacional da cidade e um ajuste via função seno para representar o consumo de água no decorrer do ano de 2011. Diferente do exemplo anterior, esses encaminhamentos podem ter sido elencados pelos alunos por já o terem vivenciado em outras atividades e não por julgarem que o ajuste seria o “conteúdo do momento”. Além disso, as experiências vivenciadas no decorrer do curso podem ter contribuído para a aprendizagem dos sujeitos em relação a essas e outras estratégias, de modo que frente a uma nova situação e frente aos signos nela presentes, os alunos recorrem à sua estrutura cognitiva de modo a considerar possibilidades de resolução, intervindo uns nas ações cognitivas dos outros.

Como os alunos buscam em sua estrutura cognitiva quais estratégias e conceitos podem utilizar para o desenvolvimento da atividade de Modelagem, as intervenções do professor parecem pertinentes principalmente no que tange à apresentação (e discussão) de outras estratégias, conceitos e encaminhamentos desconhecidos dos alunos, já que por meio das atividades de Modelagem Matemática um professor intenta, também, apresentar novos conteúdos matemáticos. Isso pode acontecer quando, na discussão de diferentes resoluções, o professor apresenta um “outro jeito”, que pode passar a ser considerado pelos alunos a partir de então.

ii) Decidir entre mudar os rumos da resolução ou manter o planejamento inicial;

Essa prática de monitoramento foi utilizada pelos alunos para controlar o andamento da atividade vislumbrado no planejamento inicial. Geralmente suscitada por um dos componentes do grupo quando apresentava uma nova ideia diferente das empreendidas no momento, esse monitoramento fazia emergir outra dimensão metacognitiva, a reflexão, a partir da qual os alunos discutiam a viabilidade e a aplicabilidade (ou não) das sugestões, decidindo entre mudar os rumos da resolução ou manter o planejamento inicial.

Essa prática de monitoramento advém do fato de as atividades de Modelagem serem abertas e permitirem diferentes encaminhamentos. Isso contribui para o estabelecimento de uma dinâmica de trabalho em grupo na qual os sujeitos precisam expressar suas sugestões de modo compreensível bem como decidir, em conjunto, por incorporar ou não a sugestão no desenvolvimento da atividade.

Um exemplo dessa forma de administração surge quando os alunos, com o auxílio do professor, buscam obter uma fórmula para calcular o x do vértice de uma parábola e usam a média aritmética entre as suas raízes, dadas algebricamente. Na situação, os alunos fazem a dedução da fórmula do x do vértice (conhecida, mas não recordada pelo grupo), quando dois componentes do grupo propõem que aquele que executa a escrita dos cálculos parasse com a dedução, calculasse as raízes da parábola primeiro – numericamente – e fizesse a média entre essas raízes. Essa administração foi seguida de outra administração realizada pelo docente. Nesse último caso, o professor almejava que os alunos reconhecessem no procedimento adotado (de dedução) a fórmula que não recordavam. Os alunos mantiveram os rumos do planejamento inicial por influência do professor.

Nesse caso, os objetivos do professor e dos alunos eram diferentes: enquanto os alunos buscavam resolver o problema encontrando o x do vértice daquela parábola, o professor almejava que os alunos soubessem encontrar a fórmula do x do vértice sempre que precisassem e não a recordassem. Na perspectiva dos alunos, parar a dedução e utilizar os valores numéricos das raízes

para encontrar o x do vértice consistia em um caminho com menores custos cognitivos.

Outro exemplo refere-se ao julgamento dos alunos sobre qual questão investigar no desenvolvimento da atividade de Modelagem relacionada ao número de veículos e de condutores no Brasil. No início, os alunos acreditavam fortemente que o número de veículos no estado do Paraná, embora estivesse aumentando consideravelmente nos últimos anos, era inferior ao número de condutores, já que para eles muitos dos que possuíam habilitação não possuíam um veículo necessariamente.

No entanto, já na inteiração da investigação que tinha como propósito responder “*em que momento o número de veículos no estado do Paraná seria maior que o número de condutores no estado?*”, os alunos averiguaram que o número de condutores já era inferior ao número de veículos desde 2001 (conforme dados da Figura 27), ao que decidiram, como quem administra o processo de resolução, investigar “*quando o número de veículos no estado chegaria a ser o dobro do número de condutores?*” – questão essa suscitada pelos dados, já que o aumento em relação ao número de veículos parecia ser consideravelmente maior que o aumento em relação ao número de condutores.

iii) Voltar ao problema, chamando a atenção do grupo para as discussões;

É comum assuntos que não fazem parte da atividade de Modelagem emergirem nas conversas dos grupos, de modo que os alunos precisam chamar a atenção uns dos outros e retomar as discussões. Do mesmo modo, muitas vezes, as discussões em torno de conteúdos matemáticos ou da situação inicial se estendem demasiadamente ou fogem aos propósitos da atividade, sendo também necessário retomar as discussões. Esse “voltar ao problema” constitui uma prática de monitoramento segundo a dimensão administrativa da metacognição.

iv) Encontrar um encaminhamento que possibilitasse confirmar ou não uma estimativa, verificar a viabilidade ou não de uma ideia e/ou relembrar conceitos já estudados;

Como as atividades de Modelagem Matemática são abertas, elas podem ser desenvolvidas segundo diferentes pressupostos e trilhar diferentes caminhos. Nas atividades do curso a administração surgia, muitas vezes, diante da intenção dos alunos em encontrar um encaminhamento que possibilitasse confirmar ou não uma estimativa de solução para a questão suscitada na situação inicial.

A forte incidência desse tipo de administração nas atividades leva-nos a inferir que existe uma relação entre essa prática de monitoramento e a ação de elaborar uma questão, de modo que elaborar uma questão – tarefa nem sempre fácil para os alunos – pode significar uma compreensão da resolução como um todo, inclusive a estimativa de possíveis respostas e encaminhamentos, assim como quando os alunos, na situação referente à doação de órgãos, buscavam investigar a idade para a qual haveria um número maior de doadores. Ao elencar essa intenção dentre outras possíveis – encontrar a idade para a qual haveria um número maior de doadores de órgãos –, os alunos acabam por considerar um ajuste para os dados via função quadrática ou função seno, já que essas, segundo os alunos, possibilitariam encontrar um valor máximo. Nesse contexto, estimam, ainda, que a idade correspondente ao valor máximo estaria entre 41 e 42 anos. Nesse sentido, a administração fortalece a atividade de planejamento nas atividades de Modelagem.

Nas atividades de Modelagem, a administração também foi realizada quando os alunos visavam encontrar um encaminhamento que possibilitasse verificar a viabilidade ou não de uma ideia ou relembrar conceitos já estudados, tal como quando os alunos, na situação referente ao consumo de água, buscavam pensar em um modo de verificar se o crescimento populacional da cidade de Toledo, de um ano para o outro, era realmente linear ou como quando os alunos, na mesma situação, tentam relembrar a expressão de uma função do primeiro grau e a relação dos coeficientes numéricos da expressão com a representação gráfica.

A resolução apresentada pelos alunos na situação do consumo de água em Toledo no decorrer de 2011, ilustra a administração no que tange ao lembrar

conceitos já estudados e ao relacionar esses conceitos à situação inicial. A explicação dos alunos na resolução, passo a passo, sobre como determinar os parâmetros da função trigonométrica, denota isso.

v) *Avaliar resultados “estranhos” em relação às informações da situação inicial ou decidir por um ajuste que apresentasse melhor validação.*

A dimensão administrativa da metacognição também foi realizada nas atividades de Modelagem de modo a conduzir o grupo à avaliação dos resultados encontrados e das estratégias de resolução. Essa administração emergiu devido ao estranhamento dos alunos frente à obtenção de resultados não condizentes à situação inicial. Isso aconteceu, por exemplo, na situação “doação de órgãos”, no momento da validação do modelo matemático obtido.

Na ocasião, os alunos buscavam substituir os valores das idades médias de cada faixa etária no modelo, de modo a obter o número de doadores correspondente, comparando esse número de doadores fornecido pelo modelo com o valor expresso nos dados iniciais. No entanto, ao realizar os cálculos substituindo a idade (i) no modelo $y = -0,166229.i^2 + 14,3991.i - 144,0074$, os alunos obtinham valores cada vez maiores, sempre crescentes, o que não condizia nem com os dados iniciais que eram crescentes inicialmente e em certo ponto passavam a ser decrescentes, nem com a representação gráfica dos pares ordenados (idade, número de doadores). Isso causou estranhamento no grupo, que a partir de então buscou identificar erros nos cálculos ou no modelo matemático construído.

Depois de refazer alguns cálculos, os alunos perceberam que ao substituir os valores da idade no modelo, elevavam esse valor ao quadrado e consideravam positivo o resultado de $-0,166229.i^2$, o que influenciava o resultado da expressão. Discutiram, portanto, diferenças entre calcular $-i^2$ e $(-i)^2$.

A partir da identificação desse erro nos cálculos, os alunos concluíram que para “fazer uma parábola” com concavidade voltada para baixo o valor do coeficiente numérico de x ao quadrado, deveria ser negativo. Nessa situação, portanto, não foi o conhecimento da função quadrática que permitiu aos alunos

identificar o erro nos cálculos, mas a identificação desse erro que os levou à construção de ideias sobre essa função.

Os cálculos realizados na validação foram, nesse caso, signos que causaram o estranhamento dos alunos e que desencadearam discussões em torno do objeto matemático “função quadrática”, sempre considerando a situação inicial. As discussões dos alunos e as mediações realizadas nesse contexto possibilitaram tanto a identificação do erro quanto a compreensão dos sujeitos em relação a como lidar com o algoritmo $-0,166229.i^2$.

A *unicidade*, característica constituinte das atividades de Modelagem Matemática, é que possibilitou esse monitoramento cognitivo, já que foram as informações e os conhecimentos da situação como um todo que levaram ao estranhamento dos resultados que os alunos obtinham. Em atividades de Modelagem, esse tipo de monitoramento pode fortalecer a ação de validação, seja com vistas a reformular uma expressão ou uma estratégia, por exemplo, seja visando utilizar um modelo matemático para interpretar questões suscitadas nas situações iniciais.

A dimensão administrativa da metacognição também foi realizada nas atividades de Modelagem quando o grupo visava decidir por um ajuste que apresentasse melhor validação. Essa forma de administração aconteceu, por exemplo, na situação referente ao *facebook*.

Como na situação referente ao *facebook* os alunos consideraram apenas três dados para construir um modelo matemático que permitisse estimar o número de usuários da rede social no Brasil em certos meses, optaram por considerar os dados, dois a dois, e encontrar três modelos matemáticos distintos (Figura 25, p.184) para, só depois, decidir por um que apresentasse melhor ajuste. O “melhor ajuste”, nesse caso, seria verificado empiricamente diante da proximidade dos dados obtidos via modelo em relação aos dados iniciais.

Essas ações denotam administração porque o modelo matemático da situação não foi construído tomando-se dois pontos quaisquer da tabela sem que houvesse um estudo sobre quais pontos realmente considerar.

vi) *Realizar ajustes e simplificações no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática*

A administração também foi uma prática de monitoramento realizada quando os alunos, visando desenvolver as atividades de Modelagem, realizavam ajustes e simplificações nas informações iniciais. Na atividade referente ao tema Evolução dos aparelhos eletrônicos e os transístores, por exemplo, os alunos construíram uma representação gráfica relacionando o tamanho dos transístores (em micrometro) com o ano em que esses transístores foram utilizados em processadores, anotando no próprio gráfico a expressão: “começa daki” (Figura 22, p.180). Essa expressão indica uma administração realizada pelo grupo que emergiu de reflexões sobre as informações da situação inicial. A administração, nesse caso, denota que os alunos consideraram que as primeiras informações – referentes às medidas dos transístores até 1989 – não precisavam ser consideradas na construção de um modelo matemático que visasse inferir qual a medida dos transístores em 2015, dado que eram medidas muito destoantes das demais.

Simplificações também foram realizadas como modo de administrar o desenvolvimento das atividades, como quando na situação Os novos planos de telefonia celular, frente a tantas informações, os alunos optam por utilizar algumas delas na realização da investigação: decidem considerar três operadoras, apenas planos pré-pagos e construir um perfil de usuário (considerando uma espécie de média das informações dos alunos do grupo). Essa decisão em construir um perfil específico emerge diante da aparente complexidade de comparar planos de telefonia diferentes de prestadoras distintas, sem se saber, de antemão, a finalidade de quem contrataria o plano. Decidir pela delimitação de um perfil, portanto, denota a dimensão administrativa do monitoramento cognitivo.

Administrar o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem já é, por si só, uma estratégia de resolução. Se por um lado essa estratégia contribui para o que denominamos *unicidade* das atividades de Modelagem Matemática, por outro, é via a administração que práticas de monitoramento relacionadas às dimensões “reflexão” e “avaliação” são provocadas e empreendidas pelos sujeitos nas atividades.

6.4 AS PRÁTICAS DE MONITORAMENTO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA RELACIONADAS À DIMENSÃO “AVALIAÇÃO” DA METACOGNIÇÃO

Quando os alunos avaliam a implementação de estratégias, analisam se o encaminhamento e as ações realizadas estão de acordo com o planejamento inicial e avaliam a obtenção de soluções para as questões de investigação, eles empreendem práticas de monitoramento cognitivo relacionadas à dimensão metacognitiva denominada avaliação.

Nas atividades de Modelagem desenvolvidas no curso, a avaliação foi utilizada pelos alunos quando intentavam analisar e validar a própria ideia, a declaração de outro ou avaliar um pressuposto; validar resultados considerando o contexto da situação inicial; ou comparar resultados de modo a tomar decisões. Passamos a apresentar considerações acerca de cada uma dessas formas de monitoramento cognitivo:

i) Analisar e validar a própria ideia, a declaração de outro ou avaliar um pressuposto;

Analisar e validar a própria ideia e a declaração de outro no que tange às sugestões de encaminhamento e aos resultados obtidos no decorrer da resolução, bem como avaliar a pertinência de um pressuposto assumido pelo grupo, constituem essa prática de monitoramento.

A análise e a validação da própria ideia, muitas vezes, nem mesmo são expressas pelos sujeitos, pois podem ocorrer internamente. Em outros momentos, todavia, os alunos acabam por manifestar encaminhamentos vislumbrados bem como os motivos pelos quais desistem ou insistem na realização desses encaminhamentos. É também possível que os alunos não apresentem essa prática de monitoramento por completo, como quando utilizam frases incompletas que denotam a avaliação da própria sugestão.

Um exemplo desse tipo de monitoramento emergiu na situação da doação de órgãos quando o aluno R1 comenta “*Não, por exemplo, se esses, no caso, 471*

doassem... ah, mas já tá considerando esse número". Esse trecho denota que o aluno avaliou a própria ideia, incompleta para o ouvinte, e que desistiu da mesma em face dessa avaliação. Essa prática de monitoramento surgiu quando R1 almejava apresentar um possível encaminhamento aos demais componentes de seu grupo.

O fato de a fala do aluno ser incompleta para o ouvinte é devido ao que Vygotsky denomina "linguagem interior". Essa linguagem não tem por finalidade comunicar-se com os outros, mas consigo mesmo, sendo, por isso, abreviada, "[...] uma vez que partilhamos um contexto conosco mesmo" (FÁVARO, 2005, p.205).

Já em relação à análise e à validação da sugestão de outra pessoa do grupo, um exemplo pode ser o momento em que R3 intenta encontrar uma razão entre os dados numéricos existentes na situação doação de órgãos. R1 avalia a possibilidade e conclui "*mas não dá pra fazer isso aqui*", o que sugere sua avaliação em relação à implementação da estratégia sugerida por R3 no desenvolvimento da atividade.

Considerando que as atividades de Modelagem Matemática são realizadas em grupos e que esses grupos trabalham de modo colaborativo é que desponta a necessidade de os sujeitos argumentarem acerca dos procedimentos e encaminhamentos a considerar na resolução. Nem sempre uma sugestão é simplesmente acatada pelos demais sem haver discussões, o que é bom. As discussões, por sua vez, desencadeiam processos de mediação semiótica na medida em que interferem na internalização de conceitos e estratégias pelos alunos. Além disso, se o trabalho em grupo for realizado de modo colaborativo, além de entender a perspectiva de outros e de comunicar a sua própria perspectiva, os alunos construirão novas perspectivas, que para além de ser a somatória de ideias, é uma perspectiva coletiva, social, que só existe pela interação dos sujeitos e pelo debate das perspectivas individuais.

Essa prática de monitoramento – a avaliação – pode fortalecer, ainda, a investigação dos conteúdos matemáticos em si. Quando alguém sugere um encaminhamento e esse encaminhamento refere-se à utilização de um conteúdo matemático específico, as dúvidas em relação aos conteúdos também emergem nas

discussões, já que os alunos precisam avaliar a sugestão baseados em conhecimentos que podem, no momento da discussão, não ser suficientes para realizar a análise e a validação.

Isso aconteceu também quando os alunos realizavam a discussão em relação ao uso de uma função trigonométrica na situação do consumo de água em Toledo no decorrer de 2011 ou quando os alunos discutiam o cálculo de uma razão entre os dados obtidos na situação da doação de órgãos. No primeiro caso, discutir as influências dos parâmetros da função trigonométrica e avaliar a pertinência da função seno na situação foram ações realizadas pelos alunos. No último caso, por sua vez, os alunos precisaram recorrer ao conteúdo progressão geométrica para avaliar a possibilidade de utilizar a estratégia. Nesse contexto, os alunos atentaram para a influência da razão (q) em uma progressão geométrica, considerando o primeiro termo positivo e tomando diferentes valores reais para a razão, realizaram comparações entre os conteúdos progressão geométrica e função exponencial, assim como revisaram o conceito de progressão geométrica alternada.

A análise e a validação de uma sugestão podem desencadear, ainda, o estabelecimento de pressupostos a considerar no desenvolvimento da atividade como um todo. Esses pressupostos, ora suscitados por indivíduos do grupo, ora constituídos nas discussões desse grupo, são também avaliados antes de serem considerados na resolução. A situação do consumo de água em Toledo no ano de 2011, por exemplo, ilustra essa ideia. Nela, os alunos consideram que o consumo de água deveria oscilar bastante, devido as estações do ano serem bem marcadas na cidade, de modo que no inverno o consumo de água seria menor e no verão, maior. Esse pressuposto pode ser avaliado quando os alunos obtiveram as informações fornecidas pela Sanepar, as quais indicavam sua pertinência. A função seno foi considerada uma possibilidade a partir dessa avaliação.

A dimensão metacognitiva avaliação fortalece, portanto, o planejamento de encaminhamentos a considerar no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

ii) *Validar resultados considerando o contexto da situação inicial;*

Em Modelagem Matemática, já nos primeiros contatos dos alunos com as atividades, os professores costumam atentar para a necessária articulação da resolução como um todo com a situação inicial, de modo que os alunos são levados a validar resultados considerando o contexto inicial. Essa prática constitui uma prática de monitoramento cognitivo relacionada à dimensão da metacognição denominada avaliação.

Por não estarem habituados a realizar a validação de respostas nas situações comumente trabalhadas em sala de aula³⁵, no início das atividades do curso era o professor quem intervinha de modo a provocar ações de validação nos grupos. No entanto, em Modelagem, talvez por estarem engajados na investigação e por almejamem conhecer a solução mais do que aprender matemática especificamente, a validação passou a ser realizada pelos alunos que visitavam a situação inicial com vistas a verificar a pertinência ou não da solução encontrada.

Nesse sentido, ao mesmo tempo em que a interpretação e a comunicação dos resultados são elementos das atividades de Modelagem Matemática que promovem esse monitoramento cognitivo – a avaliação –, é o monitoramento que fortalece as ações de interpretar e comunicar as soluções obtidas.

Na situação do número de usuários do *facebook*, por exemplo, ao estimarem o número de usuários para dezembro de 2011 e para dezembro de 2012, os alunos consideraram a primeira válida a primeira estimativa e não válida a segunda, devido aos valores serem muito superiores à população do país no momento. Logo, as estimativas foram avaliadas diante do contexto da situação investigada. Nesse sentido, acreditamos que essa prática de monitoramento desencadeia ações relacionadas ao desenvolvimento das atividades de Modelagem que remetem à *unicidade* dessas atividades.

³⁵ Em nossa experiência profissional, já vivenciamos momentos em que os alunos obtêm como área de uma figura plana um número negativo e não estranham o resultado, por exemplo, por não estarem habituados a validar a solução encontrada.

iii) Comparar resultados de modo a tomar decisões;

No desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática os alunos podem considerar diferentes encaminhamentos de resolução, bem como, ao realizar um procedimento específico, considerar algumas informações ao invés de outras. Quando os alunos engendram mais de um encaminhamento ou testam diferentes valores na obtenção de um modelo matemático, por exemplo, precisam comparar os resultados obtidos de modo a tomar decisões, mesmo que a decisão seja referente a escolha dos valores que fornecem melhores resultados.

É o que aconteceu na situação das redes sociais, mais especificamente, do *facebook*. Nela, depois de o grupo considerar a função exponencial como possibilidade para representar a situação, os alunos passam a realizar ajustes considerando os três valores da tabela, dois a dois, de modo a obter modelos com diferentes parâmetros e decidir, depois de comparar a proximidade dos valores modelados aos valores coletados, qual desses modelos seria considerado na resolução e no cálculo de previsões. À análise de qual modelo considerar dentre os construídos, nesse caso, relacionamos a dimensão metacognitiva avaliação.

6.5 ACERCA DA MANIFESTAÇÃO DE CONHECIMENTOS METACOGNITIVOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Os conhecimentos metacognitivos relacionados às variáveis tarefa, estratégia e pessoa foram pouco manifestados nas atividades de Modelagem Matemática. Os alunos R1, R3 e D realizaram a maioria dessas manifestações. Embora pouco revelados, acreditamos que esses conhecimentos influenciaram as práticas de monitoramento cognitivo dos alunos, principalmente no que diz respeito à dimensão reflexiva da metacognição.

Ao refletir em relação aos encaminhamentos que dariam à resolução, os alunos emitiam impressões acerca dos conteúdos matemáticos, acerca da própria condição de solucionador de um problema, acerca de encaminhamentos a empreender e acerca de como proceder em relação às estratégias. Esses conhecimentos, no entanto, pouco se referiam às especificidades das atividades de

Modelagem Matemática, talvez devido aos conhecimentos metacognitivos se constituírem de experiências metacognitivas e essas só terem passado a existir em relação à Modelagem no âmbito do curso ofertado pelo pesquisador.

Nesse sentido, ao mesmo tempo em que os conhecimentos metacognitivos são constituídos de experiências metacognitivas, eles contribuem e influenciam a vivência de novas experiências metacognitivas. Experiências essas que se constituem diante da realização de ações cognitivas presentes no desenvolvimento da atividade de Modelagem, tais como a ação de construir um gráfico, impulsionadas pelo delinear de objetivos cognitivos, tais como o propósito de se construir uma representação gráfica, por exemplo.

No quadro a seguir (Quadro 05), apresentamos alguns conhecimentos metacognitivos revelados pelos alunos nas diferentes fases das atividades de Modelagem e já discutidos nas análises específicas:

Quadro 05: Conhecimentos Metacognitivos manifestados nas atividades de Modelagem

		Variáveis do Conhecimento Metacognitivo		
		Pessoa	Tarefa	Estratégia
Fases da Modelagem Matemática	Fase Inteiração	<p>– <i>Opiniões acerca dos conteúdos matemáticos:</i> os alunos expressavam suas opiniões em relação aos conteúdos, por exemplo, “eu gosto de senóide” ou “é muito louco senóide” (surgiu na atividade da doação de órgãos);</p>	<p>– <i>As características de uma atividade matemática:</i> para os alunos uma atividade matemática tem números ou dados de antemão, um problema previamente elaborado e uma resposta certa (surgiu no início do curso);</p> <p>– <i>A realização de uma tarefa:</i> na situação doação de órgãos os alunos julgam a impossibilidade de calcular o número de órgãos doados, já que de acordo com a causa da morte nem todos os órgãos estariam aptos;</p> <p>– <i>O delineamento de uma abordagem:</i> ao comparar possibilidades de encaminhamento, os alunos optam por uma delas por ser, segundo eles, mais interessante.</p>	<p>– <i>A viabilidade de uma estratégia:</i> “dá pra fazer isso?” – frase utilizada algumas vezes por um dos alunos para questionar o grupo acerca da viabilidade de uma estratégia ou abordagem. Surgia, geralmente, frente ao estranhamento de um aluno;</p> <p>– <i>Como proceder:</i> na situação do consumo de água em Toledo, por exemplo, os alunos sugerem um encaminhamento bem como explicam seus possíveis resultados (razão entre o consumo de água na cidade pela população no mesmo ano);</p>

<p>Fase Matematização e Fase Resolução</p>	<p>– “A gente não vai conseguir sem a representação gráfica”: depois de tentativas de matematização, os alunos conversam sobre desenhar uma representação gráfica que ajude a pensar acerca do problema e um dos alunos – R1 – expressa essa frase;</p> <p>– Para lembrar conteúdos já estudados: os alunos sugerem pensar acerca de conhecimentos existentes em sua estrutura cognitiva quando manifestam “deixa eu pensar” e “a gente estudou isso no ano passado”;</p>		<p>– “É preciso desenhar o gráfico para imaginar que matemática usar”: opinião dos alunos sobre o que fazer para pensar a situação da doação de órgãos;</p> <p>– Como proceder: para determinar um modelo para o crescimento populacional de Toledo, os alunos concluem que é possível considerar valores ainda não usados na resolução para determinar o valor de b na expressão $f(x)=bx+c$;</p>
<p>Fase Interpretação e Fase Validação</p>	<p>– Mudar a representação para melhor entender: surgiu na situação do consumo de água em Toledo quando os alunos decidiram converter o consumo de água por pessoa que era anual e em metros cúbicos para diário e em litros, com vistas a possibilitar a compreensão da solução.</p>		<p>– Como proceder: os alunos conversam em relação a como proceder junto a uma planilha de cálculos (Excel), o que denota conhecimento acerca da variável estratégica.</p>

As reflexões realizadas nesse capítulo são reflexões orientadas pelos objetivos da pesquisa, a saber, identificar formas de monitoramento cognitivo expressas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem; caracterizar elementos das atividades de Modelagem Matemática que promovem o monitoramento cognitivo e; investigar que ações o monitoramento cognitivo desencadeia durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Esses objetivos foram considerados no interior de cada dimensão cognitiva (reflexão, administração e avaliação). A abordagem desses tópicos reflete considerações acerca da intenção geral que orienta esse trabalho: investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes. Essas considerações são apresentadas no próximo e último capítulo desse trabalho “Considerações Finais: Afinal, o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

**AFINAL, O QUE EVIDENCIAM OU REVELAM AS ATIVIDADES DE
MODELAGEM EM RELAÇÃO AO MONITORAMENTO
COGNITIVO DOS ESTUDANTES**

Investigar o que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes foi a problemática que norteou essa pesquisa. Com vistas a obter dados que permitissem a investigação, ofertamos um curso de Modelagem para alunos de um curso técnico profissionalizante integrado ao Ensino Médio e para alunos de um primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade da cidade de Toledo-PR. A coleta de dados aconteceu no segundo semestre de 2011 e no primeiro semestre de 2012.

Nesse curso, as atividades de Modelagem Matemática foram implementadas segundo orientações de Almeida e Dias (2004), sem que houvesse, por parte do professor-pesquisador orientações ou conduções planejadas a priori que influenciassem práticas de monitoramento, o que poderia interferir na coleta de dados, já que a problemática da pesquisa consistia justamente em investigar o que evidenciaríamos ou revelaríamos as atividades de Modelagem em relação ao monitoramento **dos estudantes**.

Dentre os grupos participantes da pesquisa, selecionamos o único dentre eles que era ao mesmo tempo misto (com 4 alunos do Ensino Médio e uma aluna da Licenciatura) e constante em sua composição no decorrer das atividades. 5 alunos – A, D, R1, R2 e R3 – figuram nas análises específicas e globais. Consideramos, ainda, para a realização dessas análises, três atividades de Modelagem, cada uma delas realizada segundo um dos momentos da Modelagem Matemática – trânsito na cidade de Apucarana, doação de órgãos e consumo de água em Toledo –.

O conjunto de atividades desenvolvidas pelos alunos, bem como os registros escritos e a transcrição dos áudios das discussões nessas atividades, foram tomados como fonte para algumas reflexões. A problemática da pesquisa foi, ainda, desmembrada em objetivos que intentavam possibilitar a abordagem da problemática inicial: identificar formas de monitoramento cognitivo expressadas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem Matemática; caracterizar elementos das atividades de Modelagem Matemática que promoveram o monitoramento cognitivo e; investigar que ações o monitoramento cognitivo desencadeiam durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Consideramos a metacognição como o monitoramento cognitivo que uma pessoa realiza ao desenvolver uma atividade utilizando-se de conhecimentos que tem em relação a si própria, a atividade que realiza e as estratégias de resolução. Nesse trabalho, buscamos olhar para o monitoramento cognitivo numa perspectiva metacognitiva e considerando três dimensões metacognitivas sugeridas por Tovar-Gávez (2008), a saber: reflexão, administração e avaliação.

Concebendo esse monitoramento cognitivo como um constructo coletivo, histórico, social e cultural, e tomando as atividades de Modelagem Matemática como àquelas nas quais o monitoramento pode emergir devido às características dessas atividades e ao trabalho em grupo nelas, é que apresentamos conceitos da teoria da mediação semiótica de Vygotsky, embora os objetivos e a problemática dessa pesquisa não se refiram à teoria histórico-cultural de Vygotsky de modo direto.

Desse modo, à luz da fundamentação teórica construída em relação à Modelagem Matemática, em relação ao monitoramento cognitivo e em relação à mediação semiótica de Vygotsky, é que realizamos as análises específicas e as análises globais nesse trabalho. Enquanto a primeira foi realizada considerando as especificidades de cada atividade de Modelagem, no momento em que as práticas de monitoramento eram manifestadas pelos sujeitos, a segunda foi realizada no âmbito de cada uma das dimensões metacognitivas considerando as intenções da pesquisa, essas últimas apresentadas, nesse momento, de modo mais direto.

A partir das análises específicas e da análise global é que realizamos reflexões acerca da questão maior que norteou a pesquisa:

**AFINAL, O QUE EVIDENCIAM OU REVELAM AS ATIVIDADES DE MODELAGEM
EM RELAÇÃO AO MONITORAMENTO COGNITIVO DOS ESTUDANTES?**

Para isso, no quadro 06 buscamos sistematizar as nossas reflexões acerca das intenções que orientaram essa pesquisa:

Quadro 06: Acerca do que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes

Dimensão Metacognitiva	Quais formas de monitoramento cognitivo são expressas pelos alunos durante a realização de atividades de Modelagem Matemática?	Quais elementos das atividades de Modelagem Matemática promovem o monitoramento cognitivo?	Que ações o monitoramento cognitivo desencadeia durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática?
Reflexão	<p>Em relação à dimensão reflexiva da metacognição, os alunos realizaram o monitoramento cognitivo ao:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ “quebrar” um problema em partes menores considerando ser essa uma estratégia útil para resolvê-lo; ▶ mudar a representação em que era dada a solução de um problema, de modo a tornar a solução mais compreensível; ▶ construir uma representação gráfica a partir de dados iniciais para pensar sobre uma delimitação de encaminhamento de resolução e de quais conceitos matemáticos considerar; ▶ inferir que os modos como lidamos com um conteúdo matemático remete aos modos como lidávamos com o conteúdo quando o aprendemos; ▶ estimar resultados e planejar encaminhamentos; ▶ simplificar informações na situação inicial; ▶ relacionar a matemática e a situação investigada; ▶ refletir acerca da situação extra matemática; ▶ refletir acerca dos conteúdos matemáticos suscitados nas atividades. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão reflexiva foi suscitado nas atividades de Modelagem devido a essas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ serem abertas e com múltiplas possibilidades de encaminhamento; ▶ requererem dos alunos o reconhecimento e a utilização de conhecimentos prévios; ▶ serem realizadas considerando a unicidade da atividade de Modelagem; ▶ requererem o uso de diferentes representações como estratégia para pensar o problema. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão reflexiva desencadeia:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ a realização de trabalhos em grupo e a colaboração dos sujeitos no desenvolvimento das atividades; ▶ a aprendizagem e a resignificação de conteúdos e estratégias de modo articulado aos contextos de investigação; ▶ a prática, constante, de analisar o desenvolvimento da atividade considerando-a em sua totalidade, ou seja, considerando a unicidade.

Quadro 06: Acerca do que evidenciam ou revelam as atividades de Modelagem Matemática em relação ao monitoramento cognitivo dos estudantes

Administração	<p>Em relação à dimensão administrativa da metacognição, os alunos realizaram o monitoramento cognitivo ao:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ verificar se procedimentos utilizados em atividades anteriores de Modelagem poderiam ser utilizados na nova atividade; ▶ decidir entre mudar os rumos da resolução ou manter o planejamento inicial; ▶ voltar ao problema, chamando a atenção do grupo para as discussões; ▶ encontrar um encaminhamento que possibilitasse confirmar ou não uma estimativa, verificar a viabilidade ou não de uma ideia e/ou relembrar conceitos já estudados; ▶ avaliar resultados “estranhos” em relação às informações da situação inicial; ▶ realizar ajustes e simplificações no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão administrativa foi suscitado nas atividades de Modelagem devido a essas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ requererem a elaboração de questões para investigar relacionadas à situação inicial; ▶ serem realizadas considerando a unicidade da atividade de Modelagem; ▶ serem realizadas no âmbito de um grupo; ▶ serem abertas e com múltiplas possibilidades de encaminhamento. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão administrativa desencadeia:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ a apresentação de conteúdos novos pelo professor diante da necessidade, “sentida” pelos alunos, de sua utilização no contexto da resolução; ▶ dinâmicas colaborativas de trabalho em grupo; ▶ o planejamento das atividades de Modelagem como um todo antes de seu desenvolvimento; ▶ ações de validação; ▶ o surgimento de práticas de monitoramento reflexivas e avaliativas.
Avaliação	<p>Em relação à dimensão avaliativa da metacognição, os alunos realizaram o monitoramento cognitivo ao:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ analisar e validar a própria ideia ou a declaração de outro; ▶ validar resultados considerando o contexto da situação inicial; ▶ comparar resultados de modo a tomar decisões. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão avaliativa foi suscitado nas atividades de Modelagem devido a essas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ serem realizadas em essencialmente no âmbito de um grupo em que uns intervêm nas ações e ideias dos outros; ▶ requererem a interpretação e validação de resultados. 	<p>O monitoramento cognitivo em sua dimensão avaliativa desencadeia:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶ o planejamento de encaminhamentos de resolução; ▶ a interpretação e a validação de resultados; ▶ o estabelecimento de pressupostos a considerar no desenvolvimento da atividade de Modelagem; ▶ a unicidade das atividade de Modelagem; ▶ a investigação de conteúdos matemáticos conforme emergem nas atividades.

As práticas de monitoramento manifestadas pelos alunos no decorrer do curso e conhecidas pelo pesquisador, principalmente, pelo áudio das discussões empreendidas nos grupos, remetem à consideração de que o registro escrito apresentado ao professor no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem (e também em outras atividades) é apenas o produto final de uma discussão em que conhecimentos metacognitivos, conhecimentos acerca dos conteúdos matemáticos, dos modos de fazer Modelagem e acerca das situações investigadas são utilizados. No embate de ideias nessas discussões é que ações como elaborar uma questão para investigação, planejar o desenvolvimento da atividade de Modelagem, construir representações matemáticas que representem a situação e possibilitem obter uma solução, bem como interpretar a solução obtida em termos da situação inicial, são realizadas pelos alunos em colaboração.

As práticas de monitoramento surgem no contexto dessas discussões, ora no âmbito local e ora no âmbito global da atividade. Assim como afirmamos em 6.2, práticas de monitoramento cognitivo parecem ser realizadas em Modelagem Matemática ora no âmbito da atividade de Modelagem como um todo, ora em aspectos locais da realização da atividade, principalmente porque atividades de Modelagem demandam certo tempo e contemplam a realização de ações locais, como àquelas realizadas nas várias fases da Modelagem.

Tomemos como exemplo a dimensão reflexiva da metacognição considerando as atividades de Modelagem como um todo. As práticas de monitoramento a ela relacionadas emergem quando os alunos buscam selecionar um tema, elaborar uma questão e inteirar-se da situação investigada. Via reflexão os alunos planejam encaminhamentos para a atividade de Modelagem e a partir de então passam a administrar o seu desenvolvimento considerando as reflexões iniciais. Esse desenvolvimento culmina na avaliação dos resultados obtidos na atividade, avaliação que por um lado denota administração e por outro considera, também, as reflexões iniciais.

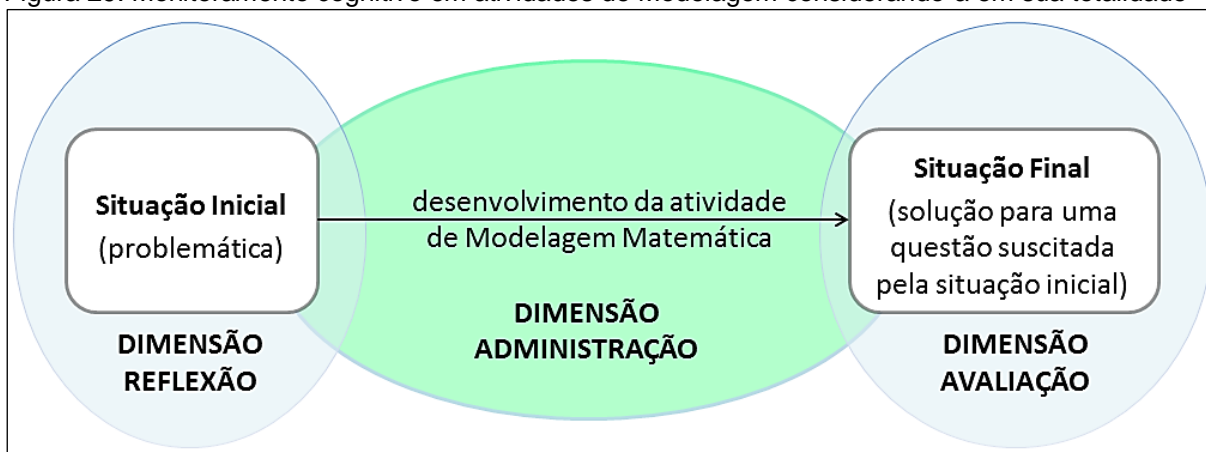
Na situação referente ao consumo de água na cidade de Toledo, por exemplo, os alunos manifestaram o monitoramento cognitivo da dimensão reflexiva quando, utilizando-se de conhecimentos sobre Modelagem, sobre estratégia de resolução, sobre matemática e sobre a situação que investigavam, afirmaram que

considerariam os dados do consumo de água nos últimos anos para fazer uma previsão de gastos para os próximos anos considerando o consumo e o aumento populacional nos últimos anos. Esta reflexão pode ser entendida como global, na medida em que por meio dela os alunos direcionaram, administraram e avaliaram a resolução como um todo.

Isso não significa, no entanto, que essa reflexão global não seja revisitada e modificada conforme os alunos julgarem necessário. No caso da situação descrita, por exemplo, os alunos acabaram por modificar o interesse na investigação por outro muito próximo do primeiro: investigar o consumo médio de água por habitante de Toledo no decorrer dos anos de modo a verificar se o aumento no consumo de água na cidade, verificado via coleta de dados, devia-se somente ao aumento populacional ou ao aumento no consumo individual de água.

Nesse sentido, o monitoramento cognitivo relacionado às dimensões reflexiva, administrativa e avaliativa da metacognição, no âmbito global das atividades de Modelagem, pode ser representado como no esquema da Figura 29, em que as partes coloridas representam a dimensão metacognitiva na atividade de Modelagem.

Figura 29: Monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem considerando-a em sua totalidade



Fonte: Elaborado pelo autor

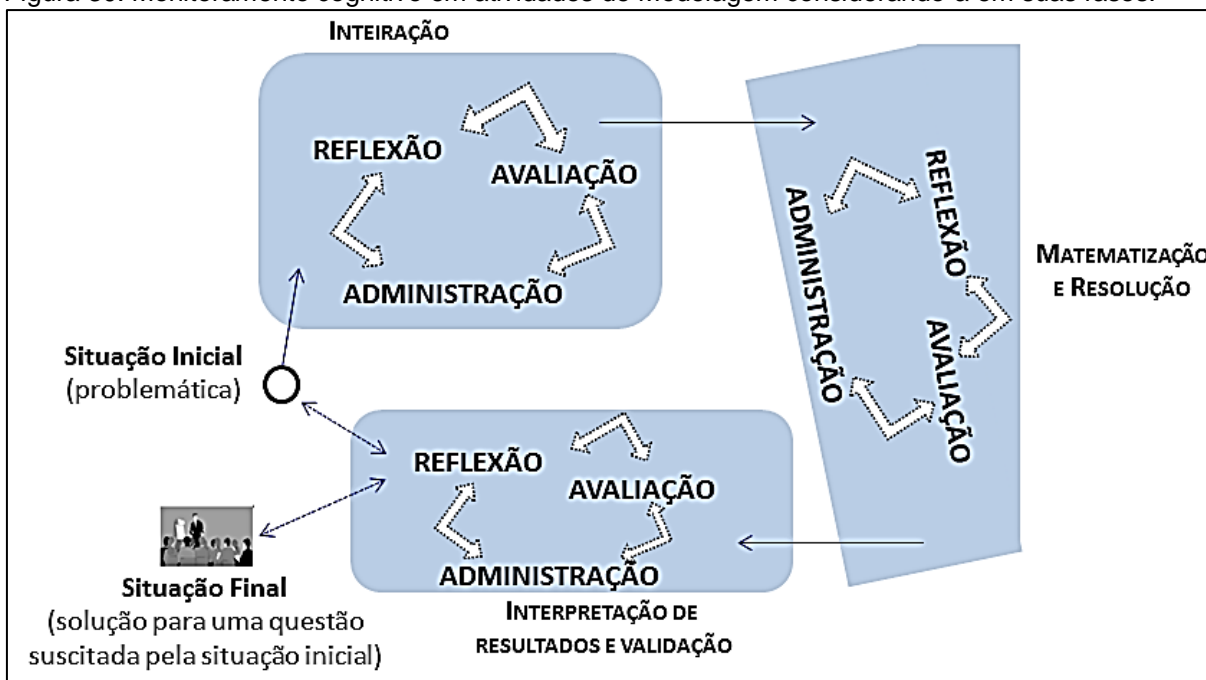
A dimensão reflexiva da metacognição, assim como as demais, pode ser ilustrada, ainda, quando os alunos pensam em tarefas específicas suscitadas pelas atividades de Modelagem. Na situação do consumo de água em Toledo, por exemplo, visando construir um modelo matemático que pudesse representar a

população de Toledo em determinado ano, os alunos consideram a possibilidade de utilizar uma função exponencial ao invés de uma função polinomial do primeiro grau, descartando a ideia devido a acreditarem que o crescimento não seria tão acentuado.

Essa reflexão remete a conhecimentos referentes aos conteúdos matemáticos função exponencial e função polinomial do primeiro grau, bem como a conhecimentos referentes ao crescimento populacional da cidade, que por sua vez, foram constituídos considerando, também, a representação gráfica dos pares ordenados (ano, população).

Portanto, a manifestação da dimensão reflexiva da metacognição acontece em todo o desenvolvimento da atividade de Modelagem, em momentos específicos desse desenvolvimento, não sendo restrita ao planejamento da atividade em si. O mesmo acontece com as outras dimensões metacognitivas, de tal modo que consideramos na Figura 30 uma representação da manifestação de monitoramento cognitivo nas três dimensões, consideradas no âmbito local das atividades de Modelagem Matemática.

Figura 30: Monitoramento cognitivo em atividades de Modelagem considerando-a em suas fases.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados dessa pesquisa levam-nos a inferir, também, que a idade cronológica não é determinante na utilização de práticas de monitoramento cognitivo. Ao contrário, quanto mais os sujeitos realizam as atividades de Modelagem Matemática, mais familiarizados ficam em relação a essas atividades e mais empreendem práticas de monitoramento nelas. Isso porque, inferimos, as práticas de monitoramento cognitivo são, assim como os conceitos e procedimentos, aprendidas por intermédio de mediações semióticas nas interações sociais, principalmente no momento em que os signos verbais medeiam a ação do outro e a formação da consciência. Segundo Fávaro (2005, p.187):

A cooperação social na atividade realiza-se por meio de instrumentos, dentre os quais os signos verbais desempenham um papel primordial; é pela interiorização progressiva desses instrumentos de cooperação que se constrói o pensamento consciente, que regula as outras funções psíquicas.

Uma prática de monitoramento utilizada pelo professor quando intervinha nas discussões do grupo e que passou a ser utilizada pelos alunos, especialmente R3, no decorrer do curso de Modelagem e que denota que práticas de monitoramento são aprendidas, é o ato de interrogar-se, o fazer perguntas a si mesmos (e ao grupo), como forma de pensar sobre as questões suscitadas nas atividades. Segue um exemplo manifestado por R3 na situação do consumo de água em Toledo, no momento em que o grupo construía um ajuste linear para representar o crescimento populacional da cidade, considerando a expressão $f(x) = bx + c$:

R3: Como que é uma reta mesmo? A equação?

R1: $bx + c$

R3: O que a gente tem que fazer?

R1: O c é referente a altura né, no eixo y .

R3: Hum. E quanto que é esse valor?

R1: Esse valor... seria o primeiro né?

R3: 90417?

R1: É né, porque é quando o x é zero. E o b ?

[...]

R3: Boa pergunta!

R1: Eu lembro que a gente já fez isso.

[...]

R3: Não tem como usar os outros valores?

[...]

R3: E se substituir?

R1: Sim, sim, sim. Se substituir o x e o y vai ficar sobrando o b .

Atentamos para a importância do trabalho em grupo nas atividades de Modelagem Matemática no que tange à implementação de práticas de monitoramento, bem como no que tange às diferenças individuais dos sujeitos do grupo considerado na pesquisa. Enquanto R1 assumia a posição de líder devido aos demais alunos se dirigirem a ele sempre que emitiam uma opinião, D e A pouco falavam nas resoluções, embora participassem das atividades segundo as observações em campo. R3, por sua vez, era pouco falante quando o professor estava junto do grupo, mas bem participativo segundo as transcrições dos áudios. Finalmente, R2 era ora participativo e ora observador, oscilando entre momentos de silêncio e momentos de discussão. Essas características transparecem nas análises na medida em que a maior parte das manifestações é atribuída aos alunos R1 e R3. Tem-se, então, a constituição de uma dinâmica que é particular do grupo.

Nas três dimensões metacognitivas, o comunicar ideias aos outros, se fazer entender, entender o posicionamento do outro e construir um entendimento coletivo são ações possibilitadas pelo trabalho em grupo. O trabalho em grupo instaura, ainda, a possibilidade de um monitoramento que embora tenha origem individual, torna-se coletivo na medida em que adquire configurações peculiares do grupo, exerce influência no desenvolvimento das atividades de Modelagem e medeia as aprendizagens dos diferentes sujeitos. Trata-se, portanto, de encarar a Modelagem segundo uma perspectiva metacognitiva, em que as práticas de monitoramento são empreendidas coletivamente, o que nos leva a denominar tais práticas, nesse contexto e dada essa especificidade, de “metacognição social”.

Assim, ao mesmo tempo em que as práticas de monitoramento são inicialmente “individuais”, por serem suscitadas por um dos sujeitos, passam a ser empreendidas coletivamente na medida em que os sujeitos manifestam essas práticas aos colegas do grupo, os quais a consideram devido ao trabalho ser, geralmente, realizado em colaboração. Elas (as práticas de monitoramento) são constituídas, assim, nas experiências dos sujeitos nas suas interações, sendo, portanto, na realidade, práticas de monitoramento sociais.

Portanto, as mediações realizadas no desenvolvimento das atividades de Modelagem contribuem no concernente à aprendizagem das práticas de monitoramento vivenciadas pelos sujeitos, de modo que o desenvolvimento de

atividades de Modelagem do primeiro ao terceiro momentos sugeridos por Almeida e Dias (2004) possibilitam a vivência de experiências metacognitivas, a constituição de conhecimentos metacognitivos e a aprendizagem de práticas de monitoramento, o que influencia os modos de participação do professor e dos alunos no desenvolvimento das atividades. A autonomia dos alunos no desenvolvimento das atividades de Modelagem é refletida, por exemplo, quando os alunos passam a considerar, a todo o momento, as informações da situação inicial, o planejamento da atividade, a intenção da investigação e os conceitos matemáticos utilizados, ou seja, quando passam a considerar a *unicidade* das atividades de Modelagem Matemática. Considerar a *unicidade* implica em realizar o monitoramento da atividade a todo o momento, por maior que seja o tempo dedicado à atividade e o número de pequenas tarefas empreendidas nelas, assim como o monitoramento fortalece a consideração da *unicidade* da atividade de Modelagem – uma das principais contribuições dessa pesquisa.

Considerando que, de modo geral, nossos olhares nessa pesquisa incidiram nas práticas de monitoramento dos alunos enquanto desenvolviam as atividades de Modelagem Matemática, pesquisas futuras poderiam ser realizadas no que diz respeito às práticas de monitoramento do docente quando intervém no trabalho dos alunos que desenvolvem atividades de Modelagem.

Esperamos que a reflexão sobre as práticas de monitoramento em atividades de Modelagem Matemática possa chegar também a professores de diferentes níveis de ensino que, como nós, almejam o desenvolvimento da autonomia de seus alunos em relação ao fazer Matemática, autonomia que em Modelagem foi construída nas interações entre os diferentes sujeitos e nas reflexões que faziam sobre as ações empreendidas por eles nas diferentes fases das atividades.

ALMEIDA, Lourdes M. W. ; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 17, n. 22, p.19-36, 2004.

ALMEIDA, Lourdes W. de; SILVA, Karina P. da; VERTUAN, Rodolfo E. *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, Lourdes M. W. de; VERTUAN, Rodolfo E. Perspectiva Educacional e Perspectiva Cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. *Revista de Modelagem na Educação Matemática*. v.1, nº1, p.28-42, 2010.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2.ed, 2010.

ANASTÁCIO, Maria Q. A. *Considerações sobre a Modelagem Matemática e a educação matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 1990.

ARAÚJO, J. de L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (orgs.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*, Recife, 2007. p.17-31.

BARBOSA, Jonei C. Modelagem na educação e os professores: a questão da formação. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 14, nº15, p.5-23, 2001.

BASSANEZZI, Rodney. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, Dale W. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos matemáticos. In: *V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 5, 2012, Petrópolis. Anais, Petrópolis: SBEM, 2012. CD-ROM.

BLUM, Werner; FERRI, Rita B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*. Blumenau, nº1, p.45-58, v.1, 2009.

BROWN, J. & EDWARDS, I. Modelling tasks: Insights into mathematical understanding. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, Rita B. & STILLMAN, Glória (Orgs.). *Trends in teaching and learning of mathematical modeling*. New York: Springer, p.187-197, 2011.

BURAK, Dionísio. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E.. *Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010.

BURAK, Dionísio; KLÜBER, Tiago E. Modelagem Matemática na Educação Básica numa Perspectiva de Educação Matemática. In: BURAK, D.; PACHECO, E. R.; KLÜBER, T. E. *Educação Matemática: reflexões e ações*. Curitiba: Editora CRV, 2010.

CAMPANARIO, Juan Miguel. El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estratégias para el profesor y actividades orientadas al alumno. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), p.369-380, 2000.

CHAVES, Maria Isaura de A.; ESPÍRITO SANTO, Adilson O. do. Possibilidades para Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (orgs.). *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: EDUEL, p.161-180, 2011.

CIFUENTES, José C.; NEGRELLI, Leônia G. O processo de Modelagem Matemática e a Discretização de Modelos Contínuos como Recurso de Criação Didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (orgs.). *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: EDUEL, p.123-140, 2011.

COHORS-FRESENBORG, Elmar et al. The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement. *ZDM The international journal on Mathematics Education*: volume 42, number 2, p.231-244, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application*. Blumenau, nº1, p.89-98, v.1, 2009.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da Matemática*. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DEVELAY, Michel. Prefácio. In: GRANGEAT, Michel (coord.). *A Metacognição, um Apoio ao Trabalho dos Alunos*. Trad: Teresa Maria Estrela. Porto Editora. Porto: Portugal, p.7-10, 1999.

DOLLY, Anne-Marie. Metacognição e mediação na escola. In: GRANGEAT, Michel (coord.). *A Metacognição, um Apoio ao Trabalho dos Alunos*. Trad: Teresa Maria Estrela. Porto Editora. Porto: Portugal, p.17-59, 1999.

DUARTE, Newton. A Escola de Vigotski e a Educação Escolar: Algumas Hipóteses para uma Leitura Pedagógica da Psicologia Histórico-Cultural. *Psicologia USP*, São Paulo, v.7, n.1/2, p.17-50, 1996.

FÁVERO, Maria H. *Psicologia e conhecimento: subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2005.

FERRAZ, Ana Paula do C. M.; BELHOT, Renato V. Taxionomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. *Gestão e Produção*, São Carlos, v.17, n.2, p. 421-431, 2010.

FERRI, Rita B. Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Revista Educação e Matemática*. Lisboa, nº110, p.19-25, nov/dez de 2010.

FERRI, Rita B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 2, 2006. p. 86-95.

FLAVELL, John H. Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive – developmental inquiry. *American Psychologist*, v.34, nº10, p.906-911, 1979.

FLAVELL, John H. Metacognitive aspects of problem-solving. In: RESNICK, L. B. (Ed.). *The nature of intelligence*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p.231-236, 1976.

FLAVELL, John H. Speculations about the nature and development of metacognition. In: WEINERT, F. E.; KLUWE, R. H. (Eds.). *Metacognition, motivation and understanding*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p.21-29, 1987.

FLAVELL, John H.; WELLMAN, Henry M. Metamemory. In: KAIL, Robert; HAGEN, John W. (Eds.). *Perspectives on the development of memory and cognition*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, p.3-33, 1977.

GONZÁLEZ, Fredy E. Acerca de la metacognición. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela. *Paradigma*: Vol. 14 a 17, p. 109-135, 1996.

GONZÁLEZ, Fredy E. Metacognición y aprendizaje estratégico. *Integra Educativo, Revista de Integración Educativa*, v.II, nº2, p.127-136, 2009.

GONZÁLEZ, Fredy E. Metacognición y tareas intelectualmente exigentes. *Zetetiké*, Cempem, v.6, p.59-70, 1998.

GRANGEAT, Michel. A metacognição, uma chave para aprendizagens escolares bem sucedidas. In: GRANGEAT, Michel (coord.). *A Metacognição, um Apoio ao Trabalho dos Alunos*. Trad: Teresa Maria Estrela. Porto Editora. Porto: Portugal, p.151-171, 1999.

GUSMÃO, Tânia C.; FONT, Vicenç; CAJARAVILLE, José A. Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso nerea. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v.11, nº1, p.8-43, 2009.

JOU, Graciela I. de; SPERB, Tania M. A metacognição como estratégia reguladora da Aprendizagem. *Psicologia: reflexão e crítica*. Porto Alegre, v.19, n.2, p.177-185, 2006.

KAISER, G.; MAAß, K. Modelling in Lower Secondary Mathematics Classrooms: Problems and Opportunities. In: BLUM, W. et al. *Modelling and Applications in Mathematics Educacion: The 14th Icmi Study*. Nova York: Springer, p.99-108, 2007.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n. 3, p.302-310, 2006.

KLÜBER, Tiago E. Modelagem matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E.. *Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010.

LANZ, María Zulma. Hacia la comprensión del aprendizaje autorregulado. In: LANZ, María Zulma (org.). *El aprendizaje autorregulado: enseñar a aprender en diferentes entornos educativos*. Argentina, Noveduc, p.07-21, 2006.

MARCHESI, Álvaro; COLL Cesar; PALÁCIOS Jesus. *Desenvolvimento Psicológico e Educação*. Volume 2, Porto Alegre: Artmed, 2ªed., 2004.

MEYER, João F. da C. de A.; CALDEIRA, Ademir D.; MALHEIROS, Ana Paula dos S. *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MOREIRA, Marco A. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999.

MOYSÉS, Lucia. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. 9ª edição. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NISS, M., BLUM, W., & GALBRAITH, P. How to replace the word problems. In: BLUM, W. et al. *Modelling and Applications in Mathematics Educacion: The 14th Icmi Study*. Nova York: Springer, p.3-32, 2007.

PARIS, Scott G.; LIPSON, Marjorie Y.; WIXSON, Karen K. Becoming a strategic reader. *Contemporary Educational Psychology*, 8, p.293-316, 1983.

PEDROSO, Luciano Soares. *O ensino de conceitos de eletromagnetismo: simulações interativas em Easy Java Simulations*. Dissertação de Mestrado

Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

PENTEADO, Miriam G; SKOVSMOSE, Ole. Riscos trazem possibilidades. In: SKOVSMOSE, Ole (Org.). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica*. Campinas: Papyrus, 2008, p.41-50.

POGGIOLI, Lisette. *Estrategias Metacognoscitivas*. Série Enseñando a Aprender 4. Caracas: Fundación Polar. 1999.

REGO, Teresa C. *Vygotsky – Uma Perspectiva Histórico-Cultural da Educação*. Petrópolis: Vozes, 22^a ed., 2011.

RIVIÈRE, Angel. *El sujeto de la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza, 1987.

SCHELLER, Morgana; SANT'ANA, Marilaine de F. Uma experiência com Modelagem Matemática na Iniciação Científica no Ensino Médio Técnico. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (orgs.). *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática*. Londrina: EDUEL, p.269-286, 2011.

SCHOENFELD, A. H. What's all the fuss about metacognition? In: A. H. Schoenfeld (Org.), *Cognitive science and mathematics education*, p.189-215. London, Lawrence. 1987.

SKOVSMOSE, Ole. Aporism and Critical Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, Kingston, v.20, n.1, p.2-8, mar/2000a.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro, nº14, p.66-91, set/ de 2000b.

STILLMAN, G. et al. A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In: Watson, J. and Beswick, K., *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*. Mathematics: Essential Research, Essential Practice, Wrest Point Hotel Casino, Hobart, TAS, (688-697). 2-6 July 2007.

TOVAR-GÁLVEZ, Julio C. Modelo metacognitivo como integrador de estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje de las ciencias, y su relación con las competencias. *Revista Iberoamericana de Educación*, OEI: nº46/7, 25 de julio de 2008.

UGARTETXEA, Josu. *Motivación y metacognición, más que una relación*. Revista Eletrônica de Investigación y Evaluación Educativa, v.7, nº2-1, 2001. Disponível em: http://www.uv.es/RELIEVE/v7n2/RELIEVEv7n2_1.htm (Acesso em: 20 de junho de 2012).

VERONEZI, Rafaela J. B.; DAMASCENO, Benito P.; FERNANDES, Yvens B. Funções psicológicas superiores: origem social e natureza mediada. *Rev. Ciênc. Méd.*, Campinas, v.14, n.6, p. 537-541, nov./dez., 2005.

VYGOTSKY, Lev S. *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, Lev S. *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes, 7ª edição, 2007.

VYGOTSKY, Lev S. *Pensamento e Linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 4ª edição, 2008.

WERNER DA ROSA, Cleci Teresinha. *A metacognição e as atividades experimentais no ensino de Física*. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

YIMER, Asmamaw; ELLERTON, Nerida F. A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM The international journal on Mathematics Education*: volume 42, number 2, p.245-261, 2010.

ZULIANI, Silvia R. Q. A.; HARTWIG, Dácio R. A influência dos processos que buscam a autoformação: uma leitura através da fenomenologia e da semiótica social. *Ciência e Educação*, v.15, n.2, p.359-382, 2009.

Anexo 1
Autorização



Autorização para utilizar respostas de questionários escritos, entrevistas gravadas e imagens em vídeo quando o pesquisador atua como aluno do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, _____ RG _____
SSP _____, responsável pelo aluno _____ da
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, câmpus Toledo, autorizo a aluno
Rodolfo Eduardo Vertuan, número da matrícula 200912350100 regularmente
matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, respostas a
questionários ou gravações em áudio ou vídeo de minhas falas, para fins de pesquisa,
podendo divulgá-las integral ou parcialmente em sua pesquisa de doutorado, publicações,
congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não será citado em
hipótese alguma. Da mesma forma, autorizo o uso de terceiros, que podem ler ou ouvir
minhas falas e usar o texto final que está sob a guarda do aluno acima citado. Abdicando
direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Toledo, setembro de 2011

ORIENTADORA: Lourdes Maria Werle de Almeida

Assinatura do Responsável



Autorização para utilizar respostas de questionários escritos, entrevistas gravadas e imagens em vídeo quando o pesquisador atua como aluno do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, _____ RG _____
SSP _____, aluno da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, câmpus Toledo, autorizo a aluno **Rodolfo Eduardo Vertuan**, número da matrícula 200912350100 regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, respostas a questionários ou gravações em áudio ou vídeo de minhas falas, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las integral ou parcialmente em sua pesquisa de doutorado, publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não será citado em hipótese alguma. Da mesma forma, autorizo o uso de terceiros, que podem ler ou ouvir minhas falas e usar o texto final que está sob a guarda do aluno acima citado. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Toledo, setembro de 2011

ORIENTADORA: Lourdes Maria Werle de Almeida

Assinatura do aluno

Anexo 02

Questionário

QUESTIONÁRIO

Pensando a atividade de Modelagem

1. *Qual foi o tema em estudo?*
2. *Neste tema, que problemas poderiam ser estudados pela matemática? Por que mesmo escolheu-se investigar este problema?*
3. *De que informações o grupo precisa para responder ao problema formulado?*
4. *Em outras experiências, já lidaram com uma situação semelhante? Comente.*
5. *O que os dados obtidos pareciam sugerir? O que vocês pensaram em fazer no início da atividade? Por que decidiram fazer o que fizeram?*
6. *Que expectativas vocês tinham quando elaboraram o problema?*
7. *Como foi sair dos dados e passar à parte matemática? Que tentativas foram feitas até se obter uma ideia que fosse de agrado do grupo?*
8. *De que modo o grupo conduziu a resolução matemática da situação? Que dificuldades enfrentou? Usaram que conhecimentos já aprendidos? Foi necessário aprender algum outro conteúdo matemático para resolver o problema?*
9. *Os resultados obtidos foram validados pelo grupo? De que modo? Por que o grupo considerou o modelo válido (ou não válido)? Se o grupo considerou o modelo não válido, que medidas tomou?*
10. *Que resposta a resolução forneceu ao problema? Era uma resposta esperada? Que conclusões podem ser feitas a partir da resolução do problema?*
11. *Na opinião do grupo, findada a atividade, algo poderia ter sido feito diferente?*
12. *Na opinião do grupo, quais os pontos altos da atividade? Quais os pontos negativos?*

Anexo 03

O caso das Redes Sociais – Facebook

O caso das Redes Sociais - Facebook

O caso das Redes Sociais - Facebook

SITUAÇÃO

REDES SOCIAIS NO BRASIL: ORKUT É LÍDER, MAS FACEBOOK CRESCE RAPIDAMENTE

Postado as 10:35 - 24/03/2011 - Por Wesley Moraes

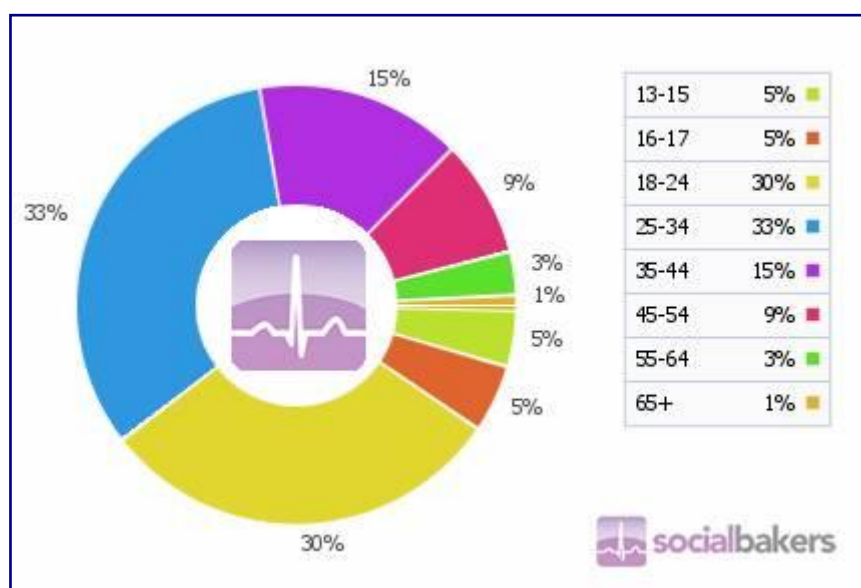
<http://blogs.forumpcs.com.br/noticias/2011/03/24/redes-sociais-no-brasil-orkut-e-lider-mas-facebook-cresce-rapidamente/>

A rede social de maior crescimento no mundo, o Facebook, já ultrapassou os 13 milhões de usuários no Brasil, o que representa um crescimento de 119 % nos últimos seis meses. O Orkut continua sendo a rede mais popular no país verde e amarelo, mas a opção criada há sete anos por Mark Zuckerberg apresenta um bom crescimento.

Orkut vs Facebook

O Brasil figura como o 12º a nível mundial em número de usuários no Facebook, sendo que há seis meses, o número de usuários era apenas de 6 milhões. Essa perspectiva de evolução torna o Facebook uma ameaça real ao Orkut. A rede social da Google é utilizada por mais de 70 por cento dos usuários da internet brasileiros, de acordo com um estudo do Ibope, e o seu potencial de crescimento é apenas igual ao da penetração da internet no país.

Atualmente, o Orkut tem cerca de 30 milhões de usuários no Brasil, país onde o tráfego em redes sociais e blogs aumentou 50 por cento no último ano. O Facebook é mais utilizado por mulheres e 66 por cento dos usuários brasileiros tem entre 18 e os 34 anos, como mostra o gráfico abaixo.



Idade dos usuários do Facebook no Brasil

NO BRASIL INTERNET É MAIS USADA PARA REDES SOCIAIS

De acordo com uma pesquisa liderada pela Fecomércio-RJ/Ipsos, o número de usuários de internet no Brasil deu salto muito grande nos últimos anos. Em 2007, somente 27% da população usava a internet, em 2011, esse índice passou a ser de 48%.

Publicado em: 9 de novembro de 2011

http://www.oficinadanet.com.br/noticias_web/4506/no-brasil-internet-e-mais-usada-para-redes-sociais

De acordo com uma pesquisa liderada pela Fecomércio-RJ/Ipsos, o número de usuários de internet no Brasil deu salto muito grande nos últimos anos. Em 2007, somente 27% da população usava a internet, em 2011, esse índice passou a ser de 48%.

O estudo mostrou que a cada ano os brasileiros estão se envolvendo mais com a internet. E dentre os principais motivos do uso da internet no país está as redes sociais. Assim sendo, o motivo que teve o maior percentual foi conversar com os amigos, com 50%. O trabalho atingiu 27%.

Os [sites](#) mais acessados são os de redes sociais, com 61%, seguido de pesquisas, com 48%, e-mail, com 34%, notícias, atingindo 34%, diversão, com 17% e de serviços, também com 17%.

62% dos internautas afirmaram que usam a internet em casa, 15% deles em lan houses, 15%, no trabalho e 6% na casa de amigos e familiares. O tempo de [conexão](#) na web também aumentou. 55% dos internautas passam de 30 minutos a duas horas conectados.

IBOPE CONFIRMA ASCENSÃO DO FACEBOOK NO BRASIL

Desta vez, o Ibope confirma, o Facebook realmente ultrapassou o Orkut no país.

Publicado em: 13 de setembro de 2011

http://www.oficinadanet.com.br/noticias_web/4254/ibope-confirma-ascensao-do-facebook-no-brasil

Inicialmente a notícia em que o Facebook havia ultrapassado o número de usuários do Orkut no Brasil, em seguida, o Ibope desmentiu a informação. Desta vez, o Ibope confirma, o Facebook realmente ultrapassou o Orkut no país.

Segundo o Instituto de Pesquisas, a rede social de Mark Zuckerberg atingiu cerca de 30,9 milhões de usuários cadastrados no período da pesquisa enquanto, o Orkut registrou 29 milhões de perfis. De acordo ainda com a pesquisa, o Twitter tinha, no final de agosto, 14,2 milhões de usuários únicos.

O Ibope revelou ainda que no mês de agosto cada usuário ficou conectado 7 horas e 14 minutos, em média, em alguma rede social. De acordo com a pesquisa, dos 61,2 milhões de brasileiros com acesso à internet, seja em casa ou no trabalho, 45,4 milhões usaram ativamente a web no mês de agosto. Estes números mostram um aumento de 1,2% comparando com o mês de julho e ainda de 9,2% se comparado com o mesmo período do ano de 2010.

O FACEBOOK EM 2010

FACEBOOK 2010 YEARBOOK

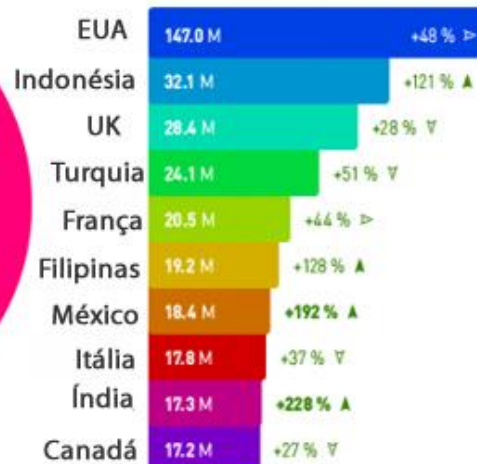
BY SOCIALBAKERS

Número total de usuários



7,9 Novos registros por segundo

Top 10 países



TOP 10 **58.5 %** Do total de usuários

Distribuição por idade



Top 10 marcas



115 M Novos fãs

4 Fãs Para a Coca-Cola por segundo

Top 10 figuras públicas



PREPARED BY SOCIALBAKERS.COM

socialbakers
Heart of Facebook Statistics

DESIGNED BY JAKUBKRCMAR.COM

JK JAKUBKRCMAR.COM

Anexo 04
Pesquisa Qualitativa

PESQUISA QUALITATIVA

Entendemos a pesquisa qualitativa no sentido que atribuem Bogdan e Biklen (1994), como aquela pesquisa em que os investigadores procuram entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são aqueles significados. Na pesquisa qualitativa, portanto, os pesquisadores têm como objetivo melhor compreender o comportamento e a experiência humana, o que implica em ser ele, o pesquisador, o principal instrumento da pesquisa, de sorte que estar inserido no mesmo ambiente em que se dá a investigação possibilita uma melhor compreensão das ações dos sujeitos (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

A pesquisa qualitativa considera que um fenômeno pode ser mais bem compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, a partir das perspectivas dos sujeitos investigados. Nesse contexto, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004, p.166), a observação “[...] permite compreender o que ocorre durante o desenvolvimento das atividades em que o pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo [...] com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano” o que implica no fato de que “os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.50)”.

Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características das pesquisas de cunho qualitativo:

- ✓ é essencialmente descritiva;
- ✓ a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal;
- ✓ o processo é mais importante do que os resultados;
- ✓ a análise dos dados é feita de forma indutiva;

Os investigadores qualitativos [...] não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.50).

- ✓ a perspectiva dos participantes e os significados atribuídos pelos mesmos são de importância vital.

Segundo os autores, no entanto, nem todos os estudos considerados qualitativos têm, necessariamente, todas essas características e nem mesmo as características apresentam todas, sempre, a mesma intensidade.

As pesquisas qualitativas constituem-se em estudos descritivo-explicativos, uma vez que tem como objetivo, primeiro, descrever, identificar e explicar determinados fenômenos e, em seguida, estabelecer compreensão sobre o significado dessa produção no contexto da área de pesquisa (ALVES-MAZZOTTI e GEWANDSZNAJDER, 2004).

No contexto dessa pesquisa, o procedimento de coleta de dados se deu, de modo geral, de acordo com a observação não estruturada, “na qual os comportamentos a serem observados não são predeterminados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação” (ALVES-MAZZOTTI e GEWANDSZNAJDER, 2004, p. 166).

Referências Bibliográficas

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto. Portugal: Porto Editora, 1994.

Anexo 5

Outros Episódios da situação "Doação de Órgãos"

A discussões que seguiram o Episódio X estão relacionadas à construção de uma representação gráfica que pudesse ajudar os alunos a pensar sobre o problema. Relacionada à fase de matematização e resolução da Modelagem Matemática, a busca por uma representação matemática foi realizada coletivamente e propiciou a compreensão de elementos da situação, como podemos observar na transcrição do Episódio X.

EPISÓDIO X

D: Tá, então ó, vamos colocar os anos... Ah, mas aí que tá ó, faz assim, a gente coloca os anos, a gente faz assim ó, um gráfico, o ano [mostrando no papel].

R2: No eixo x né?

D: E com a faixa etária. Anos e faixa etária.

R1: Mas daí você faz uma média para que cada ano tenha a mesma quantidade de doação? [se referindo a cada ano pertencente dentro de um mesmo intervalo]

R3: Não, não. Não dá certo... porque você tem que pensar... você pensa assim, tem um número central e daí vai ter um crescimento praticamente igualitário nessa faixa etária, daí dá pra tentar prever, mais ou menos fazendo uma regra de três, no caso, eu acho. Por exemplo, ele vai seguir esse padrão. Cadê o padrão? [rs] Tá, segue esse padrão...

D: Tá, é aqui ó, ele começa assim meio igual, ele sobe, aí ele sobe mais ainda, aí ele começa a cair.

R3: Daí, por exemplo... é... deixa eu ver isso de novo...

R1: Faz o gráfico. A gente não vai conseguir sem fazer o gráfico.

R3: Tá, por exemplo, aqui, são os 3 anos de idade. Daqui até aqui, é aquele tempo. Então dá pra tentar...

D: Aqui são 8 anos de idade.

R3: Como você tá desenhando de uma forma, ele tá ficando do mesmo jeito, ele não vai ter um crescimento exponencial, acredito eu!

D: Com 14 anos... [pensando alto]

R3: Pra gente tentar, a gente vai desenhar e vai fazer um crescimento reto e a partir daqui dá pra tentar, imaginar.

D: É... a gente só vai ter que fazer assim óh, pra ficar o gráfico perfeito a gente vai ter que colocar os anos em intervalos certos, entendeu? Tipo assim, um padrão entendeu? Vamos supor que de 2 em 2 anos... [se referindo à escala do gráfico]

A: A gente vai ter que fazer um gráfico grande!

D: Não... [desaprovando a escala adotada: de 2 em 2]

A: De 5 em 5 anos eu acho que dá.

R1: Mas quais são os valores que a gente quer saber? No eixo y?

D: O número de transplantes!

R1: Mas daí como vai dar o número de transplantes pra essas idades que a gente não sabe?

R3: Como assim?

R1: Não, por exemplo, aqui ele tá dando um intervalo que é um...

D: A gente fez a média, na verdade, no gráfico, a gente não utiliza todos esses anos.

R1: É mais então, a gente tá considerando que nesta faixa etária em todos esses anos, pra essas idades, vai existir a mesma quantidade de doadores.

[...]

R1: Por exemplo, de 6 a 10 anos, aí você vai fazer uma média e vai dizer que todas as pessoas de 6,7,8,9 e 10 anos vão doar todas a mesma quantidade. Esse é o problema... da média. Tem que fazer uma média dentro do intervalo.

R3: Não fazer uma média no intervalo, mas presta atenção... daqui você chegou à conclusão, digamos que acabe os 5 anos dela. Daqui você pode tentar fazer alguma coisa a partir disso. Por exemplo, de 3 a 1 ano você pode tentar conseguir uma média ou você pode tentar conseguir fazer alguma coisa.

D: Aqui ó, a gente não precisa ter média, olha aqui. É só a gente colocar determinado ano por ano. A gente não precisa fazer média, entendeu? Aí fica mais exato! Por que se a gente disser que a média aqui, no caso, de 3 é 10 doadores, então a gente vai dizer que as pessoas de 3 anos vai ter 10 doadores, então a gente não precisa dizer o ano, a gente só coloca os anos, a faixa etária delas em cada ano.

R1: O intervalo?

D: É o intervalo entendeu?

R2: De 1 a 5?

D: É. Sempre dá pra fazer assim.

A partir das representações gráficas, o grupo passa a discutir sobre qual matemática poderia ser utilizada para representar a situação, ou ainda, em outros termos, que curva poderia se ajustar aos pares ordenados representados. No próximo Episódio, portanto, os alunos retomam discussões já realizadas quando interpretavam a situação inicial, quando o objetivo cognitivo era a elaboração de um problema a investigar.

EPISÓDIO XI

D: Óh eu fiz o gráfico óh.

R1: Que bonito!

D: Viu que legal!

R3: Também fiz, mas no eixo x eu coloquei diferente um pouco.

R1: Mesmo assim a gente nem sabe o que... isso vai cair numa parábola! Não em uma senóide.

R3: Numa parábola?

R1: É. Numa parábola.

R3: É, mas daí, por exemplo, você vai pegar 3 pontos, entendeu? Aí você pega a partir do 8 anos, do 42 anos e do 72 anos.

R1: Pega a calculadora.

R3: *É, foi pra resolver parte do problema. Mas é que se você for quebrando em partes o problema fica mais fácil, não? Pra gerar o resultado.*

[...]

R3: *Ôh R1, e se a gente seguisse uma regra de três?*

R1: *Porque uma... como uma regra de três?*

R3: *Mas teria que ser a partir do ápice, porque daí faria mais sentido, por exemplo... 42 anos tem 158 transplantes e 43 tem x , daí segue uma regra de três. Por exemplo, aqui deu...*

R1: *Mas ele vai começar a decair aqui.* [se referindo à proporção direta, o que impossibilitaria a ideia de R3]

R2: *Ele vai começar a decair. Por exemplo, pra 47 daria um número maior.*

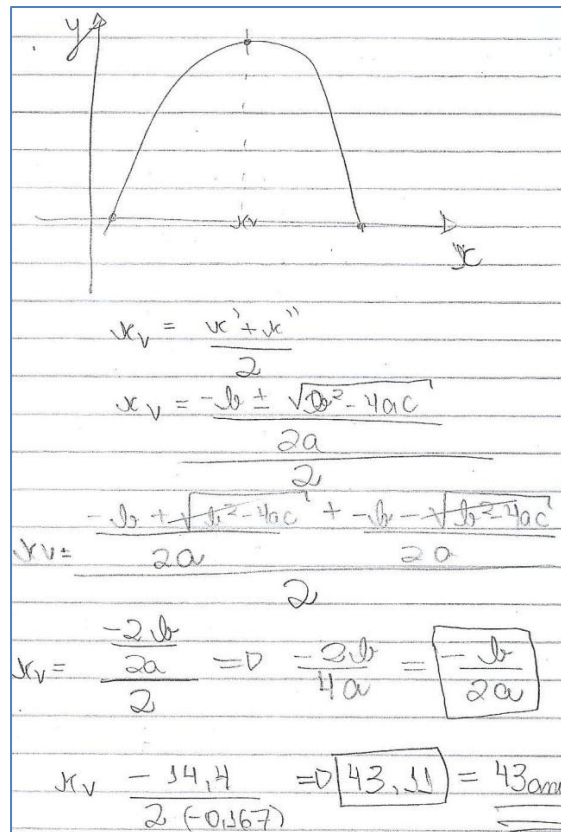
R1: *É, ele vai dar um número maior aqui.*

R2: *Entendeu? Pois com os anos daria pra fazer isso, mas com idade não dá.*

[R3 parece refletir sobre o que disseram os amigos por certo tempo]

R3: *Tá. Não dá pra fazer regra de três.*

Uma vez realizada a validação do modelo matemático e tendo o grupo, considerado o modelo válido, o professor questiona o grupo sobre como responder o problema inicial – *Para qual idade o número de doadores é maior considerando as estatísticas de doação de órgãos?* – a partir do modelo. Neste contexto é que se dá o último Episódio. No Episódio, as discussões dos alunos e professor, giram em torno da obtenção do x do vértice de uma parábola, já que os alunos reconhecem nele a obtenção da resposta para o problema, mas não recordam a fórmula correspondente. A partir disso, o professor encaminha a discussão de modo que os próprios alunos obtenham a fórmula almejada. No entanto, os alunos só se dão conta disso, quando a tal fórmula do x do vértice aparece em seus cálculos. Na figura a seguir apresentamos o registro produzido pelos alunos nesta discussão.



Tal registro, despido das discussões que levaram à sua produção, pode ser entendido como uma construção feita pelo grupo de forma independente (como se fosse atividade atuante no nível de desenvolvimento real dos sujeitos) ou como “uma cópia” de registros apresentados, no quadro, pelo professor. Todavia, diante das discussões transcritas no Episódio XII, consideramos o registro como uma produção advinda de uma atividade atuante na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, os quais, a partir da mediação do professor (aquele que já internalizou significados socialmente partilhados referentes ao assunto), obtêm a fórmula do x do vértice da parábola e a utiliza para responder o problema.

EPISÓDIO XII

P: Vocês já tem o modelo e vocês o consideraram válido pelo que percebi.

R1: Sim.

P: Como é que vocês vão usar este modelo agora para responder em qual idade é possível que o número de doadores seja maior?

R1: É o pico!

R2: Tem aquela fórmula que tem... quando a gente usa... usa segundo grau.

A: Alguém falou...

R2: Tem que usar b e c .

R1: Ah!

R3: Não tem uma fórmula com a ou b e c tal ou alguma coisa assim?

R1: Deixa eu pensar... tem haver com o a , com o b e com o c também.

P: Qual o nome do que a gente procura?

R2: Ponto máximo!

P: Ponto máximo. Qual o nome que a gente dá para o desenho deste gráfico?

R1: Parábola com concavidade voltada para baixo.

P: Então... determinar o ponto de máximo da parábola com concavidade voltada pra baixo é achar o quê da parábola?

R1: O a ? Não!

D: Meu Deus!

R1: O x do vértice?

P: Isso, e como a gente faz isso?

R2: Era $2a$ sobre alguma coisa.

[...]

P: Então, este vértice da parábola tem diferentes jeitos de achar, como é que a gente pode achar ele.

R3: A gente estudou isso no ano passado.

R2: Era $2a$ sobre alguma coisa.

P: Esse pode ser 'um jeito', mas se eu não lembrar esse jeito, que outro jeito eu vou usar?

[...]

R1: Ah.... é o negócio dividido por 2.

P: Dividido por 2?

R1: É que eu tenho que dividir ela no meio, porque dá o ponto má... daqui pra cá é uma coisa e daqui pra cá é outra entendeu?

P: Mas você vai achar o meio entre quem?

R2: Entre o primeiro e o último!

P: Entre o primeiro e o último é complicado, existe um primeiro e um último?

R1: A gente colocou aqui. 1, 2, 3, 4, 7...

P: Então, se eu pegar esse aqui como o primeiro e esse aqui como o último, eles são simétricos, eles garantem que o meio é o ponto máximo?

[...]

R1: Ah... é quando o x ... quando o y é igual a zero!

P: E qual é o nome que a gente dá pra estes pontos cujo y é igual a zero?

R1: Raízes da função.

D: Raízes da parábola.

P: As raízes da parábola. E como é 'a cara' de uma raiz da parábola?

R2: Básikara.

P: Isso, a gente acha no final um x linha...

R1: e um x duas linhas.

P: Vamos supor que este seja um x linha e este seja um x duas linhas.

D: Divide por 2.

P: Então escreve isso.

[...]

P: E como eu faço para achar o x do vértice utilizando estes 'dois caras'?

R2: Soma e divide por 2.

P: E como eu acho o x linha e o x duas linhas usando Báskara?

R2: Igualando y a zero.

P: Qual a fórmula que a gente usa para achar.

R1: Ah... mais ou menos b.

D: Não. Menos b mais ou menos raiz de delta

Alunos: (terminam juntos) dividido por 2a.

P: Então escreve isso.

[...]

P: Essa fórmula aqui, você tá usando pra apresentar as duas raízes, como é que vocês fariam pra representar as duas em separado?

R2: Colocar uma com mais e outra com menos.

P: Então faz isso.

R2: Faz as raízes primeiro.

D: É... apaga isso.

P: Mas precisa? Vamos tentar terminar desse jeito pra ver se dá!

R1: Ah (escreve falando alto) menos b mais raiz de b ao quadrado menos 4ac.

R2: Este é o x linha!

R1: menos b menos raiz...

R2: Dividido por 2.

R1: Menos 2b [...] Ah! [empolgado]

[o grupo ri]

R1: Eu lembro. Agora eu quase que me lembro. Eu me lembro que era parecido com soma e produto mas não era igual.

D: Dividido por 2a?

R1: Não, não é, é que eu tava empolgado.

[o grupo ri]

D: 'Tava empolgado' foi boa!

R1: menos 2b sobre 4a. Aí simplifica por 2 e dá menos b sobre 2a. Não falei que era o x do vértice?