Universidade Estadual de Londrina

RAFAEL BATISTA GIBELLATO

TAREFAS MATEMÁTICAS E A PRODUÇÃO ESCRITA DE ESTUDANTES EM CONTEXTOS REALÍSTICOS E EM CONTEXTOS PURAMENTE MATEMÁTICOS

Londrina
2025

RAFAEL BATISTA GIBELLATO

TAREFAS MATEMÁTICAS E A PRODUÇÃO ESCRITA DE ESTUDANTES EM CONTEXTOS REALÍSTICOS E EM CONTEXTOS PURAMENTE MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira.

Londrina
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

G445t Gibellato, Rafael Batista.
Tarefas matemáticas e a Produção Escrita de estudantes em contextos realísticos e em contextos puramente matemáticos / Rafael Batista Gibellato. - Londrina, 2025. 139 f.: il.

Orientadora: Pamela Emanueli Alves Ferreira.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2025.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Educação Matemática Realística - Tese. 3. Análise da Produção Escrita em Matemática - Tese. 4. Contextos realísticos e puramente matemáticos - Tese. I. Ferreira, Pamela Emanueli Alves. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

RAFAEL BATISTA GIBELLATO

TAREFAS MATEMÁTICAS E A PRODUÇÃO ESCRITA DE ESTUDANTES EM CONTEXTOS REALÍSTICOS E EM CONTEXTOS PURAMENTE MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Jader Otávio Dalto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 17 de março de 2025

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus por me capacitar na profissão de professor e pesquisador, trazendo propósito e significado para a minha atuação.

Aos meus pais, que proporcionaram a minha formação e educação, sendo a base para a pessoa que sou hoje. À minha esposa, que sempre esteve ao meu lado me apoiando, me incentivando e me ajudando a crescer em todas as áreas.

À minha orientadora, que possibilitou a minha entrada no mestrado e me introduziu ao mundo da pesquisa acadêmica. Ela foi uma pessoa fundamental no desenvolvimento dessa pesquisa e na minha formação como pesquisador.

Aos meus professores, que foram essenciais no desenvolvimento dos meus estudos, pesquisas e projetos, por orientarem e ajudarem em tudo que construímos juntos.

A Universidade Estadual de Londrina, a qual fez parte da minha formação desde a graduação até a pós-graduação.

Ao colégio, por ter permitido a coleta de dados, tornando possível a publicação desse trabalho.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!

“O que adquire entendimento ama a sua alma; o que conserva a inteligência acha o bem.”

Provérbios 19:8

Gibellato, Rafael Batista. **TAREFAS MATEMÁTICAS E A PRODUÇÃO ESCRITA DE ESTUDANTES EM CONTEXTOS REALÍSTICOS E EM CONTEXTOS PURAMENTE MATEMÁTICOS**. 2025. Dissertação (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

RESUMO

O objetivo geral do trabalho é analisar a produção escrita em matemática de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – anos finais – em duas provas escritas, uma Prova A com tarefas de contextos realísticos e outra prova B com contextos puramente matemáticos, produzidas a partir de questões do PISA. Para isso, elencaram-se os seguintes objetivos específicos: descrever/classificar as tarefas das provas com base na literatura; classificar/categorizar as produções escritas atribuindo créditos de resolução como totalmente correta, parcialmente correta, incorreta e branco; descrever as produções escritas dos estudantes segundo as estratégias e procedimentos utilizados; analisar as produções escritas dos estudantes buscando identificar se existem similaridades ou divergências nas maneiras de lidar com os enunciados das duas provas: a que é composta de tarefas com contextos realísticos e a que contém tarefas com contextos puramente matemáticos. Quanto aos procedimentos metodológicos, trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho descritivo-interpretativo com base nas orientações da análise de conteúdo. O trabalho conclui que, quando tarefas com contextos irrelevantes são transformadas em tarefas puramente matemáticas, a oportunidade de acerto dos estudantes pode aumentar, pois os poupa de lidar com informações adicionais que podem mais atrapalhar do que ajudar na resolução. Por outro lado, as tarefas que possuem um enunciado classificado como “problema de contexto realista” ou “problema de contexto real”, em sua maioria, apresentam um índice de acerto maior ou igual na Prova A, quando comparada à Prova B. As tarefas da prova A são mais favoráveis de serem utilizadas em um contexto de avaliação como oportunidade de aprendizagem, pois, os vínculos que estabelecem com a realidade podem auxiliar os estudantes na leitura e interpretação do problema proposto a ser resolvido, frequentemente, envolvem competências relacionadas à resolução de problemas, interpretação, tomada de decisões. Enquanto isso, as tarefas da prova B são mais favoráveis de serem utilizadas em um contexto de avaliação de rendimento, pois estas tarefas privilegiam a reprodução de algoritmos e técnicas algébricas. Portanto, é desejável que o trabalho do professor, em sala de aula, privilegie problemas que estabeleçam vínculos e laços com a realidade.

Palavras-chave: Educação Matemática; Educação Matemática Realística; Análise da Produção Escrita em Matemática; Avaliação como prática de investigação; Contextos realísticos e puramente matemáticos.

Gibellato, Rafael Batista. **MATHEMATICAL TASKS AND STUDENTS' WRITTEN PRODUCTION IN REALISTIC AND PURELY MATHEMATICAL CONTEXTS**. 2025. Dissertation (Master's degree in Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

ABSTRACT

The main objective of this study is to analyze the mathematical written production of 8th-grade students of middle school through two written tests: Test A, composed of tasks set in realistic contexts, and Test B, consisting of tasks in purely mathematical contexts. Both tests were developed using questions from PISA. To achieve this, the following specific objectives were outlined: to describe/classify the test tasks based on the relevant literature; to classify/categorize the students' written productions by assigning resolution credits as completely correct, partially correct, incorrect, or blank; to describe the students' written productions according to the strategies and procedures employed; and to analyze the students' written responses in order to identify potential similarities or differences in how they approach the tasks from the two tests—the one involving realistic contexts and the one with purely mathematical contexts. Regarding the methodological procedures, this is a qualitative, descriptive-interpretative study guided by content analysis. The study concludes that when tasks with irrelevant contexts are transformed into purely mathematical tasks, students' chances of success may increase, as they are spared from dealing with additional information that may hinder rather than help problem-solving. On the other hand, tasks classified as "realistic context problems" or "real context problems" generally show equal or higher success rates in Test A compared to Test B. Tasks in Test A are more suitable for use in assessment contexts that aim to provide learning opportunities, as their connections to real-life situations can assist students in reading and interpreting the problems, often involving competencies such as problem-solving, interpretation, and decision-making. Meanwhile, tasks in Test B are more suitable for performance assessments, as they favor the reproduction of algorithms and algebraic techniques. Therefore, it is desirable that classroom practices prioritize problems that establish meaningful links with real-world contexts.

Keywords: Mathematics Education; Realistic Mathematics Education; Analysis of Written Production in Mathematics; Assessment as a research practice; Realistic and purely mathematical contexts.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Essa pesquisa se desenvolveu no GEPEMA[1] que está vinculado à Universidade Estadual de Londrina. Neste grupo há estudantes da graduação, da pós-graduação e professores de matemática. Assim como essa pesquisa, o GEPEMA desenvolve outras pesquisas, incluindo de mestrado e de doutorado, todas na área da Educação Matemática, especificamente na área da Avaliação da Aprendizagem Escolar.

Nesse grupo, a avaliação escolar é vista como amalgamada aos processos de ensino e de aprendizagem, pois esta pode guiar e orientar o trabalho do professor em sala de aula. A avaliação é compreendida como uma prática de investigação por meio da qual o professor busca vestígios que podem nortear sua prática didática. Por meio dela, o professor pode encontrar possíveis dificuldades no processo de aprendizagem dos estudantes e, em contrapartida, pensar e repensar sua prática didática. O GEPEMA entende ainda, a avaliação como uma oportunidade de aprendizagem.

O GEPEMA estuda e ampara-se em pressupostos alinhados com a abordagem da Educação Matemática Realística[2]. A RME foi preconizada por Hans Freudenthal que considerava a Matemática como uma atividade humana. A RME entende que avaliar fará sentido se a avaliação estiver a serviço da aprendizagem.

O objetivo geral dessa pesquisa consiste em analisar a produção escrita em matemática de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – anos finais – em duas provas escritas, uma Prova A com tarefas[3] de contextos realísticos e outra prova B com contextos puramente matemáticos, produzidas a partir de questões do PISA[4]. Essa análise será feita com o olhar da avaliação como prática de investigação através da análise da produção escrita em matemática.

---

[1] Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA).
[2] O termo original do inglês é "*Realistic Mathematics Education*" (*RME*) que foi traduzido como Educação Matemática Realística.
[3] A palavra "tarefa" é aqui utilizada como semelhante ao significado de "questão", "enunciado de uma questão de matemática", diferente do que comumente remete ao "dever de casa"
[4] *Programme for International Student Assessment* (PISA).

1. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Essa seção apresenta a fundamentação teórica do trabalho, com a intenção de apresentar a RME e o contexto histórico no qual ela surgiu.

1.1. ASPECTOS HISTÓRICOS

No final da II Guerra Mundial, o mundo ficou “dividido” ideologicamente. De um lado havia o Bloco Ocidental, liderado pelos Estados Unidos da América, e do outro lado havia o Bloco Oriental, liderado pela União das Repúblicas Socialistas Soviéticas. Os Estados Unidos defendiam os ideais da democracia e do capitalismo liberal e a União Soviética defendia os ideais do socialismo, dois regimes de governo opostos.

Essa divisão ideológica impulsionou uma disputa entre as duas potências pela hegemonia mundial e a influência no cenário geopolítico. O desenvolvimento das armas nucleares intensificou a rivalidade entre os dois blocos. Assim, as duas nações entraram no cenário da Corrida Armamentista. Esse período da história ficou conhecido como Guerra Fria, marcado pela disputa ideológica e geopolítica entre os Estados Unidos e a União Soviética.

As duas nações buscavam demonstrar poder e superioridade tecnológica. Em consequência disso, as duas potências entraram em uma Corrida Espacial. Essa corrida é um capítulo da Guerra Fria em que se buscava ver quem chegaria primeiro à Lua. A conquista do espaço auxiliava no desenvolvimento de novas tecnologias militares, como mísseis balísticos intercontinentais. Portanto, vencer essa corrida era uma maneira de demonstrar superioridade tecnológica e militar e, consequentemente, trazia prestígio e atraía mais aliados para o seu bloco.

Esse contexto histórico e social influenciou a União Soviética e os Estados Unidos a se preocuparem com a formação de engenheiros e cientistas devido à necessidade de acelerar o desenvolvimento de novas tecnologias para estarem à frente da Corrida Espacial e da Corrida Armamentista que impulsionavam os dois países na época.

A União Soviética começou a Corrida Espacial à frente dos Estados Unidos com o lançamento do primeiro satélite artificial em órbita da Terra chamado Sputnik. Devido a essa “liderança” soviética, os Estados Unidos se preocuparam com o ensino de matemática nas escolas primárias pensando na formação de seus futuros profissionais. Sendo assim, como reflexo dessas preocupações surgiu um novo movimento chamado de Movimento da Matemática Moderna que consistia em repensar o ensino de matemática nas escolas básicas através de uma perspectiva estruturalista de ensino. Dario Fiorentini escreve a respeito desse movimento:

> Esse movimento internacional, na verdade, surgiu como resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, sobretudo nas áreas de ciências e matemática. O lançamento do Sputnik pelos soviéticos, em 1957, foi decisivo para que esse movimento adquirisse força política, tanto que o governo norte americano passou a injetar vultosos recursos financeiros em projetos de inovação/modernização dos currículos escolares. (Fiorentini, 1994, p.13).

O Movimento da Matemática Moderna priorizava o ensino dos fundamentos da Matemática. Assim, ele se preocupava com o ensino de algoritmos matemáticos e estruturas algébricas sem dar atenção ao processo que permitiu construir tais conhecimentos e ferramentas matemáticas, ou seja, preocupava-se apenas com o produto em detrimento do processo.

Os principais propósitos do Movimento da Matemática Moderna:

> a) Unificar os três campos fundamentais da matemática. Não uma integração mecânica, mas a introdução de elementos unificadores como Teoria de Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções;
> b) Dar mais ênfase aos aspectos estruturais e lógicos da matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não-justificativo e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar.
> c) O ensino de 1º e 2º graus deveria refletir o espírito da matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente. (Fiorentini, 1994, p.13-14).

A Educação Matemática Realística tem sua origem no final da década de 60 e início da década de 70 nos Países Baixos[5] (popularmente conhecido como Holanda) com um movimento que veio para contrapor o Movimento da Matemática Moderna. Nesse momento histórico, diversos países estavam buscando e realizando mudanças no seu ensino de matemática nas suas escolas da Educação Básica, este movimento de mudança curricular não ocorreu apenas nos Países Baixos, mas ao redor do mundo.

---

[5] Netherlands.

Nos Países Baixos o repensar da Educação Básica começou com o projeto Wiskobas que consistia na mudança do currículo escolar com uma proposta de ensino mais próxima da realidade dos estudantes visando um ensino mais significativo. Embora tenha sido uma proposta para mudar o currículo neerlandês acabou-se produzindo materiais a respeito do ensino de matemática e, assim, deu-se origem a Educação Matemática Realística.

A RME tem como um dos seus precursores o educador alemão Hans Freudenthal (1905-1990) que defendia a Matemática como uma atividade humana. Para Freudenthal era necessário dar ao estudante a oportunidade de ele "reinventar" a matemática de uma forma guiada pelo professor, ou seja, era necessário oportunizar ao estudante um processo no qual ele pudesse construir a matemática assim como um dia ela foi construída pelos matemáticos. Por isso a Matemática é vista como uma atividade humana, pois o estudante aprenderia matemática "fazendo matemática" ou como preferia chamar "matematizando".

1.2. MATEMATIZAÇÃO: HORIZONTAL E VERTICAL

Segundo Freudenthal, matematizar refere-se a:

> uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão de realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática. (Freudenthal, 1971, pág. 413-414, tradução nossa).

Posteriormente, Treffers (1987) viria a aprofundar os estudos referentes ao termo matematizar, introduzindo o termo matematização como sendo o ato de matematizar. Treffers descreveu a matematização como uma atividade organizada essencial no processo de aprendizagem, ou seja, a matematização tem um papel central no aprendizado do estudante. O objetivo principal não é o conteúdo final a ser formalizado, mas sim o ato de ler e interpretar a realidade através de ferramentas matemáticas como padrões, regularidades, regras, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras. Essa ação é considerada algo central para a RME e pode ser chamado de matematização.

De Lange define matematização como a ação de:

> organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos. É a atividade de organização, segundo a qual os estudantes utilizam os conhecimentos e as habilidades adquiridas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas. (De Lange, 1999, p.18, tradução nossa)

Treffers, em 1978 na sua tese, é o precursor em distinguir a matematização horizontal e vertical. De acordo com Freudenthal, temos matematização horizontal e vertical como:

> A matematização horizontal conduz do mundo da *vida* para o mundo dos *símbolos*. No mundo da vida vive-se, age-se (e sofre); no outro, os símbolos são moldados, remodelados e manipulados, mecanicamente, compreensivamente, reflexivamente; isso é matematização vertical. (Freudenthal, 1991, p.41-42, tradução nossa).

Resumidamente, a matematização horizontal consiste em ler e interpretar o mundo real e transcrevê-lo para o mundo dos símbolos matemáticos. Assim, a matematização horizontal estabelece vínculos com a realidade fazendo uma ponte entre o mundo real e o mundo matemático. A matematização vertical consiste em trabalhar dentro do próprio mundo dos símbolos e estruturas matemáticas.

Na matematização horizontal temos ações como:

- identificar a matemática específica em um contexto geral;
- esquematizar;
- formular e visualizar um problema de diferentes formas;
- descobrir relações;
- descobrir regularidades;
- reconhecer aspectos isomorfos[6] em diferentes problemas;
- transferir um problema real em um problema matemático;
- transferir um problema real em um modelo matemático conhecido (De Lange, 1987, p.43, tradução nossa)

Na matematização vertical temos ações como:

- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- usar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular um novo conceito matemático;
- generalizar (De Lange, 1987, p.44, tradução nossa)

Treffers e Freudenthal não se preocuparam em hierarquizar as duas

[6] Um isomorfismo é um conceito matemático usado para descrever uma relação entre dois objetos matemáticos que são estruturalmente equivalentes. Em termos simples, um isomorfismo é uma relação bijetora entre os dois objetos observados. Por exemplo, um isomorfismo pode ser interpretado como uma bijeção entre dois conjuntos. Isso garante que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

matematizações, seja por importância ou por dificuldade. Logo, ambas são igualmente importantes e significativas de modo que devem ser valorizadas e reconhecidas. Além disso, não há uma definição clara até “onde” vai uma e “onde” começa a outra, a transição de uma para a outra é uma zona nebulosa.

1.3. Reinvenção guiada

Abordagens tradicionais partem da matemática formal e trabalham de maneira desconectada da realidade, apenas no “final” do processo é que, quase sempre, é apresentada uma aplicação prática, para resolução de problemas. Abordagens como essas nas quais os estudantes possuem um papel passivo no processo de aprendizagem e o conhecimento vem pronto e finalizado são criticadas por Freudenthal (1973). Gravemeijer (2004) chama esse movimento de “inversão antididática” que consiste em uma inversão do processo educacional, ou seja, apresenta-se primeiro o conteúdo e depois um problema relacionado a ele.

Na RME a própria realidade e a resolução de problemas devem ser os pontos de partida para o processo de aprendizagem. Van Den Heuvel escreve a respeito da inversão antididática:

> utilizar currículos cientificamente estruturados, nos quais os estudantes são confrontados com uma matemática pronta, é uma "inversão antididática". Eles baseiam-se na premissa falsa de que os resultados de um raciocínio matemático, colocados numa lista de conteúdos, podem ser transferidos diretamente para os estudantes. [...] De acordo com Freudenthal, isso significa colocar a “carroça na frente dos bois”: tirar dos estudantes a oportunidade deles mesmos desenvolverem matemática. Matemática, em outras palavras, deve ser ensinada na ordem em que os próprios estudantes possam inventá-la. (Van Den Heuvel-Panhuizen, 1996, tradução nossa)

De acordo com o dicionário eletrônico Houaiss (2009) o verbo inventar pode significar: descobrir, criar, elaborar, arquitetar e imaginar. Sendo assim, podemos interpretar e expandir a escrita de Van den Heuvel (1996) no sentido que a Matemática pode ser ensinada na ordem que os estudantes possam descobri-la, elaborá-la, arquitetá-la ou até mesmo imaginá-la.

O estudante possui um papel central no processo de aprendizado na RME, pois parte desse processo consiste na descoberta de novos conhecimentos matemáticos, como conceitos, regras, padrões e relações. Durante esse processo, é necessário que sejam feitas algumas elaborações, por exemplo, conjecturas, hipóteses, regularidades, definições e aplicações. Parte do trabalho também consiste em arquitetar e organizar as estruturas matemáticas, ou seja, é preciso que haja uma sistematização formal do conhecimento matemático. Por fim, a imaginação tem a sua importância, pois na RME o contexto da tarefa proposta não precisa ser "real", mas sim realístico, de onde vem a tradução para RME de acordo com Ferreira:

> Nele [*Realistic Mathematics Education*], o termo *Realistic* tem origem no verbo neerlandês *zich REALISE-ren* e pode assumir o mesmo significado de 'imaginar', o que sugere que os contextos ou situações nos quais os alunos se envolvem não precisam ser autenticamente 'reais', mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis na mente dos estudantes. (Ferreira, 2009, p.28)

Contudo, o papel do estudante não seria exatamente de "inventar", mas sim de reinventar. Pois, o objetivo na RME não é que o estudante construa um conhecimento matemático novo partindo do nada, mas sim, reconstrua os conhecimentos matemáticos já historicamente acumulados e validados pela comunidade científica.

Nesse processo, o professor não possui um papel de telespectador, mas sim de orientador. Durante o processo de reconstrução dos conhecimentos matemáticos, o qual o estudante passará; ele pode apresentar dúvidas, dificuldades e questionamentos, cabendo ao professor auxiliá-lo nesses momentos. O professor precisa assumir um papel de incentivador propondo diálogos, questionamentos e ideias, projetos. Cabe ao professor desenhar rotas de aprendizagem para que os estudantes desenvolvam sua "própria matemática" (Drijvers, 2003).

Durante as orientações, o professor precisa conduzir os estudantes de modo que suas produções convirjam para uma matemática formal. Os estudantes podem começar por estratégias que contenham uma abordagem mais informal, mas com a orientação do professor eles sobem o nível de sofisticação da matematização indo em direção a uma matemática mais formalizada.

De acordo com Silva (2015), é possível sintetizar que:

- o professor tem um importante papel na construção do conhecimento dos estudantes;
- cabe ao professor desenhar rotas de reinvenção e orientar os estudantes nos caminhos escolhidos e percorridos por eles;
- cabe ao professor verificar, durante o processo de aprendizagem, a convergência das produções dos estudantes para as normas comuns dentro da comunidade matemática;
- rotas de reinvenção levam os estudantes a reinventar a matemática

> pretendida pelo professor ou, ao menos, a experimentar o processo de reinvenção;
> [...]
> ➢ por meio de perguntas e condução de discussões o professor guia os estudantes na rota de reinvenção. (Silva, 2015, p.55-56)

Reinvenção guiada é o nome dado a esse processo de reinvenção dos conhecimentos matemáticos feito pelo estudante e orientado pelo professor. O termo “inventar” abrange o conteúdo que será inventado, e o termo “guiar” denota o ensino por parte do professor. A reinvenção guiada é apresentada por Freudenthal como um método de ensino de matemática. Em resumo, os estudantes têm a oportunidade “guiada” de “reinventar” matemática.

1.4. Princípios da Educação Matemática Realística

Originalmente Treffers (1991) considera cinco princípios, porém, Van den Heuvel-Panhuizen (2000) acrescenta um sexto princípio chamado de princípio da orientação. A autora trata sobre o olhar entrelaçado que devemos ter, buscando fazer uma complexa rede de relações entre estes. Tais princípios não podem ser tratados de maneira isolada, mas sim conectados entre si de modo a comunicar-se uns com os outros. Podemos visualizar tais princípios no quadro que Silva traz em sua dissertação.

Quadro 1 - Princípios da Educação Matemática Realística.

Princípios segundo Treffers (1991)	Princípios segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2000)
Exploração fenomenológica	Da realidade
Construção por instrumentos verticais	De níveis
Autoconfiança: construções e produções próprias dos estudantes	Da atividade
Interatividades	Da interatividade
Entrelaçamento	Do entrelaçamento
	Da orientação

Fonte: Silva (2015).

1.4.1 Princípio da atividade

O princípio da atividade consiste na ideia de que a matemática é uma atividade humana (Freudenthal, 1991). Para Freudenthal, o processo de construção do conhecimento matemático é mais importante que apenas apresentar o conhecimento pronto e acabado.

Para Freudenthal, fazer matemática, ato chamado de matematizar, é mais importante que apenas aprender a Matemática como um produto pronto e acabado. A ênfase não se encontra no resultado final, mas sim no processo, ou seja, o cerne está no processo de construção do conhecimento matemático e não apenas no conhecimento final o qual se deseja chegar.

No senso comum entende-se matemática como o conhecimento acumulado ao longo dos anos, por exemplo, teoremas, postulados, axiomas, entre outros. Contudo, para Freudenthal isso é chamado de conhecimento matemático o qual é fruto da matematização. Para ele, matemática é a atividade humana de matematizar.

A Matemática é entendida como uma atividade humana por compreender-se que o próprio conhecimento matemático não é estático, mas que está em constante construção. Tal construção é possível através de atitudes como questionar, pensar, repensar, construir, reconstruir, validar, refutar e demonstrar. Nessa perspectiva, o conhecimento matemático é fruto da ação humana de produzir Matemática. Assim, a ação de “matematizar” vem antes da consolidação do conhecimento, portanto, o conhecimento matemático é o produto final da ação de matematizar.

A partir desse olhar que a RME possui a respeito da Matemática é possível afirmar que ela não é restrita apenas aos matemáticos, mas pode ser acessível a qualquer cidadão. Tal premissa é importante para que os estudantes, em sala de aula, sejam capazes de construir conhecimentos matemáticos mesmo sem serem matemáticos. Assim, é coerente pensarmos que a matemática é acessível a todos, pois ainda que de maneira informal, os estudantes matematizam e constroem seus próprios saberes.

1.4.2 Princípio da realidade

O princípio da realidade da RME está vinculado aos contextos das tarefas que são propostas aos estudantes no contexto da aprendizagem escolar. Na RME as tarefas devem oportunizar que eles transcrevam, decodifiquem, interpretem a “realidade” utilizando-se da matemática. As estruturas, teoremas e postulados são utilizados para organizar fenômenos do mundo real. A matemática emerge a partir desse processo de organização da realidade feita pelo estudante.

As tarefas são o ponto de partida do trabalho, por este motivo os seus contextos são importantes. São considerados bons contextos os chamados contextos ricos que consistem em situações que permitem o estudante matematizar em diferentes níveis. Assim oportuniza-se a mobilização de conhecimentos matemáticos desde um nível informal até um nível formal.

Trabalhar com diferentes contextos oportuniza aos estudantes o desenvolvimento de diversas ferramentas matemáticas, compreensões e estratégias de resoluções (Schastai, 2017). De acordo com a autora:

> A intenção é que os estudantes, ao explorarem diferentes fenômenos, inicialmente por meio de estratégias informais, posteriormente mais formais, vão progredindo no sentido de sistematizar em direção a um modelo formal. (Schastai, 2017, p.26)

Assim, propor problemas de contextos realísticos oportuniza a matematização, usando a matemática em situações do dia a dia, organizando fenômenos reais e sistematizando um conhecimento matemático formal a partir de um conhecimento informal. De acordo com Harmuch, em síntese pode-se dizer que o princípio da realidade:

> enfatiza que os estudantes sejam capazes de organizar as situações e os fenômenos por meio da matemática. Para tanto, como ponto de partida para a aprendizagem, é importante o professor propor boas tarefas, em que o estudante tenha oportunidade de organizar, por meio da matemática, fenômenos da realidade – matematizar; (Harmuch, 2022, p.38)

1.4.3 Princípio de níveis

Na perspectiva da RME os estudantes são capazes de aprender em diferentes níveis. Em um momento inicial as resoluções dos estudantes podem apresentar uma matemática mais informal e intuitiva. Com o desenvolvimento do trabalho esse conhecimento matemático produzido pelo estudante pode tornar-se cada vez mais formal com a orientação do professor. De acordo com Van Den Heuvel Panhuizen (2010), os estudantes começam por estratégias mais informais e por meio da matematização progressiva eles podem se direcionar para modelos matemáticos mais formais.

Os níveis são dinâmicos e os estudantes podem se encontrar em diferentes níveis de compreensão, podendo transitar entre os níveis. Também se estar em níveis diferentes de compreensão para diferentes conteúdos, assim é possível que a depender do conteúdo trabalhado o estudante possa ter mais ou menos domínio de determinado conhecimento matemático. Os níveis não devem servir para rotular o estudante, mas sim, para nortear os processos de aprendizagem.

A reinvenção guiada é um processo para convergir à matemática formal, pois, através das intervenções e orientações feitas pelo professor, espera-se que o estudante possa ser conduzido a caminho do conhecimento da matemática formal e validado. Espera-se que ela leve os estudantes a produzirem a matematização progressiva e em consequência disso aprofundarem na compreensão do conhecimento matemático.

1.4.4 Princípio do entrelaçamento

Na RME as áreas da matemática como estatística e probabilidade, grandezas e medidas, geometria, aritmética e álgebra são desejáveis que não sejam isoladas em si, pelo contrário, deseja-se que sejam entrelaçadas entre si estabelecendo vínculos. Logo, pode-se trabalhar de uma maneira integrada entre os componentes curriculares. Não quer dizer que todas devam ser trabalhadas simultaneamente, mas é possível o trabalho de mais de uma ao mesmo tempo.

O princípio do entrelaçamento oportuniza ao estudante uma compreensão holística da matemática de modo a desenvolver uma visão integrada para todas as suas áreas. Há também a característica de flexibilidade entre os conteúdos de diferentes áreas da matemática que podem oportunizar ao estudante construir vínculos e estabelecer relações entre si conectando uma área na outra.

Desconectar uma área da matemática das demais e da realidade pode ocasionar dificuldades no processo de aprendizado dos estudantes. O conhecimento matemático que foi construído historicamente emergiu de um contexto real e entrelaçado com as demais áreas do conhecimento matemático. Uma prática didática isolada dos demais contextos dificulta a compreensão do estudante com relação a matemática como um todo.

1.4.5 Princípio da interatividade

O processo de aprendizado ocorre de maneira social e não isoladamente. Por este motivo, na perspectiva da RME, o trabalho desenvolvido em sala de aula requer interação dos estudantes entre seus pares e com o professor.

Este relacionamento pode correr entre grupos ou entre toda a turma, depende da intencionalidade do professor. Certamente, a todo o momento cabe ao professor mediar e orientar essas interações, pois ele pode instigar e motivar os estudantes através de perguntas que os deixem refletindo. Importante ressaltar a relevância do papel do professor para mediar essas interações de modo a convergir para a matemática formal, ou seja, cabe a ele orientar qual o caminho a ser seguido para a conclusão desejada de acordo com o seu planejamento.

O conhecimento matemático historicamente acumulado não foi construído de maneira solitária e isolada, pelo contrário, foi construído dentro da comunidade acadêmica de matemáticos. Da mesma forma, o conhecimento matemático construído em sala de aula não pode se dar de maneira isolada, mas sim de maneira coletiva através das interações.

A interação dos estudantes com os seus pares se faz importante no processo de construção das ideias. Quando um estudante precisa explicar uma ideia para outro estudante, ele precisa formular e estruturar seu raciocínio de forma que este possa ser apresentado e comunicado aos demais. Assim, a interação colabora para o processo de formalização das ideias, hipóteses, conjecturas e estratégias.

1.4.6 Princípio da orientação

O princípio da orientação está relacionado ao ensino que propõe aos estudantes uma oportunidade de “reinventar” a matemática de forma “guiada” pelo professor.

Na reinvenção guiada o professor é o guia, pois este domina os conhecimentos matemáticos os quais são os objetivos de aprendizagem dos estudantes. Por isso, durante o processo de matematização progressiva os estudantes passam por diferentes níveis de compreensão dos conceitos e do objeto de estudo em direção a um nível mais formal. Contudo, esse processo de aprofundamento dos níveis é guiado pelo professor. Este princípio diz mais a respeito à atitude do professor do que às atitudes do estudante. Schastai escreve a respeito do princípio da orientação:

> também se remete à organização do espaço e ao tempo escolar, até porque se considera que a organização do ensino e os programas escolares devem basear-se num conjunto coerente de trajetórias de ensino-aprendizagem a longo prazo. Os estudantes precisam de espaço para construir seus conhecimentos e instrumentos matemáticos. Para isso, os professores precisam organizar um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção de conhecimentos possa surgir. (Schastai, 2017, p.29)

2. AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

No senso comum o conceito de avaliação é quase sempre entendido como a finalidade de atribuir uma nota que sempre vem no final de um processo de aprendizagem. Basicamente ela serve para averiguar se o estudante aprendeu “o que o professor ensinou”. Seu objetivo é emitir um valor que servirá para rotular o estudante. Assim não se oportuniza aprendizado, na verdade, serve apenas para enquadrar o rendimento do estudante como satisfatório ou não. Após emitir esse julgamento, quase nunca se faz alguma coisa a respeito do aprendizado, ou seja, caso se evidencie que o estudante não aprendeu determinado conteúdo, são raras as atitudes que visam oportunizar o aprendizado.

A palavra avaliação passou a receber mais atenção no âmbito pedagógico nas últimas décadas. Nos anos de 1970, na França, essa palavra começou a ser utilizada pelos responsáveis da formação contínua com o intuito de substituir palavras como apreciação, notação e correção. A palavra pode significar em diferentes contextos: verificar, julgar, estimar, situar, representar, determinar, dar um conselho, entre outros.

Barlow (2006, p.12) escreve uma possível definição que podemos considerar para essa palavra “avaliar é emitir um julgamento preciso ou não sobre uma realidade quantificável ou não depois de ter efetuado uma medição ou não”. Assim a avaliação se relaciona com o fato de se emitir um julgamento, Barlow especifica mais sobre esse julgamento nas páginas seguintes do livro:

> podemos definir a avaliação, ‘em sua acepção mais ampla’, como ‘o ato pelo qual, a propósito de uma ocorrência, seja de um indivíduo ou de um objeto, se emite um julgamento, remetendo-se a um ou a vários critérios, independentemente de quais sejam eles e o seu objeto de julgamento’ (Barlow, 2006, p.16-17)

Segundo Barlow (2006), avaliar pode ser entendido como emitir um julgamento, sendo que para tal é necessário comparar a produção real do estudante com a produção ideal a qual se esperava do estudante, ou seja, mede-se a distância do que é e o que deveria ser. Hadji escreve sobre a avaliação como um julgamento:

> O processo de avaliação assim definido é caracterizado por uma [...] articulação, em primeiro lugar, entre o referido e o referente, visto que avaliar consiste em atribuir um ‘valor’ [...] a uma situação real à luz de uma situação desejada, ao confrontar assim o campo da realidade concreta com o das expectativas (Hadji, 1994, p.32)

O GEPEMA entende a avaliação escolar como um processo contínuo. Para o grupo, avaliar não consiste em se preocupar apenas com um único momento pontual e específico que será mensurado para se emitir um julgamento. Dessa maneira o foco estaria no produto. Por outro lado, o grupo preocupa-se com o processo que foi percorrido até a construção do produto. O foco está no processo pelo qual se constrói o conhecimento. Assim, busca-se investigar este processo para que ele possa ser trabalhado e aprimorado de modo a estar a serviço do professor, do estudante ou da escola. Pedrochi Junior sintetiza a ideia de avaliação em sua tese:

> De maneira geral, na maioria dos trabalhos, os participantes do GEPEMA apresentam uma perspectiva de avaliação como prática de investigação, que visa levantar informações e assim fornecer subsídios para que, de um lado, o professor (re)oriente sua prática e, de outro, os estudantes revejam as suas estratégias de estudo. A avaliação é tomada como uma oportunidade de aprendizagem para estudantes e professores e está inserida em um contexto de ensino e aprendizagem. (Pedrochi Junior, 2018, p.29)

Portanto, para esse trabalho entende-se a avaliação como um processo contínuo que pode nortear o trabalho do professor em sala de aula. Esta avaliação tem como função fornecer subsídio para a tomada de atitude do professor no seu planejamento e na sua prática docente. Assim, o objetivo será o aprendizado do estudante. Se a avaliação serviu para oportunizar aprendizagem, então esta foi eficaz.

2.1. ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA EM MATEMÁTICA

O GEPEMA defende que a análise da produção escrita em matemática pode ser utilizada como estratégia de avaliação para investigar os processos de ensino e aprendizagem. Santos (2014) escreve que a análise da produção escrita pode ser empregada como prática de investigação para a condução das aulas de matemática na perspectiva da reinvenção guiada da RME.

Em sua tese, Santos defende que a análise da produção escrita pode ser usada nas aulas de matemática como uma estratégia de ensino. A concepção de análise da produção escrita em matemática, que tomaremos nesse trabalho, vai ao encontro com a concepção apresentada por Santos:

> análise da produção escrita em matemática é utilizada para obtenção de informações que possibilitem ao professor conhecer e compreender o processo de aprendizagem dos alunos e, posteriormente, planejar e

> executar intervenções de forma que orientem tanto o processo de ensino quanto o processo de aprendizagem. (Santos, 2014, p. 57)

Sendo assim, entendemos a análise da produção escrita como uma prática de investigação que nos permitirá analisar as produções escritas dos estudantes e fazer inferências sobre suas resoluções e estratégias utilizadas, inferir sobre possíveis interpretações feitas do enunciado das questões e identificar aspectos da matematização horizontal e vertical presentes nas escritas dos estudantes.

A análise da produção escrita neste trabalho será feita na perspectiva da avaliação como uma prática de investigação, segundo Ferreira:

> constituímos o que entendemos ser avaliação como prática de investigação: é um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrinhar, seguir a pista do que é observável, conhecido. (Ferreira, 2009, p. 21).

Desta forma buscaremos vestígios, pista do que é observável, rastros nas produções dos estudantes que nos permitam fazer inferências.

2.2. ENUNCIADO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

Na RME as tarefas propostas aos estudantes precisam ter relação com a realidade. Nessa abordagem os contextos das tarefas propostas são importantes. A pesquisa de Clements (1980) foi um dos pontos de partida para a ideia dessa dissertação. Em sua pesquisa o autor mostra a importância de as tarefas estarem relacionadas com a realidade. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola na cidade de Melbourne e o autor destaca duas questões nessa pesquisa.

> Questão 5: Escreva a resposta certa para 1 - 1/4 = _______ (Resposta).
> Questão 18: Um bolo é cortado em quatro partes iguais e Bill leva uma dessas partes. Qual fração do bolo resta?”
> (Clements, 1980, p. 19, tradução nossa).

A pesquisa foi feita com 126 estudantes em que 55 estudantes acertaram a questão 5 e 98 estudantes acertaram a questão 18. Analisando os enunciados das duas questões é nítida a conexão que a questão 18 estabelece com a realidade de modo a estabelecer vínculos entre o algoritmo aritmético “1 - 1/4” e a situação descrita no enunciado. Porém, a questão 5 não estabelece vínculos e tem como propósito focar apenas no algoritmo da subtração de frações.

Curioso que ao analisarmos a quantidade de acertos dos estudantes, é possível perceber uma maior taxa de acertos na questão 18 se comparada com a questão 5. Logo, é possível inferir que nesse contexto, os laços que a questão 18 estabeleceu com a realidade fizeram a diferença nas resoluções dos estudantes de modo a levar a uma maior taxa de acertos.

A maneira como um estudante interpreta um enunciado influencia diretamente no modo como ele resolverá o problema proposto. Durante o processo de escrita de um enunciado, é necessário ser cuidadoso para que não haja margens para interpretações indesejadas. A pesquisa de Clements mostra como o enunciado de uma tarefa pode determinar o sucesso ou fracasso de um estudante no processo de resolução. Na RME os enunciados são essenciais, pois será a partir destes enunciados que a matematização se torna possível. Para Ferreira (2015, p.454) "os contextos, nessa perspectiva, parecem ser a matéria-prima da matematização."

Dado essa importância dos enunciados das tarefas propostas aos estudantes, vamos verificar como alguns autores (Díaz e Poblete (2005); De Lange (1999); OECD (2003); Borasi (1986); Butts(1997)) classificam determinados tipos de enunciados de tarefas. Um referencial para a classificação de enunciados de tarefas são Díaz e Poblete que classificam problemas segundo o seu contexto:

> **Problema de contexto real** – Um contexto é real se ele é produzido efetivamente na realidade e envolve ações do aluno.
> **Problema de contexto realista** – Um contexto é realista se ele pode realmente ocorrer. Trata-se de uma simulação de realidade ou de uma parte dela.
> **Problema de contexto fantasioso** – Um contexto é fantasioso se for fruto da imaginação sem fundamento na realidade.
> **Problema de contexto puramente matemático** – se referia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relações e operações aritméticas, figuras geométricas etc. (Díaz; Poblete, 2005, p. 4, tradução nossa).

As classificações dos autores referem-se à capacidade desse problema ser efetivamente real ou então de tornar-se real de maneira imaginável; fantasioso seria sem relações diretas com a realidade; ou apenas matemático sem relação alguma com a realidade. A ênfase está na relação que existe com a realidade e na maneira como o enunciado se relaciona com ela.

Matematizar a realidade significa explorar contextos ricos. Um contexto será tido como rico quando oportunizar diversas explorações e resoluções diferentes. A essência que o contexto precisa ter é oportunizar a matematização. Organizar a realidade, encontrar padrões, desenvolver ferramentas e explorar fenômenos são o cerne da RME. O ideal é que se construa uma matemática em um nível mais informal, mas que esta se desenvolva até alcançar um nível mais formal. Tudo isso deve ser oportunizado pelo contexto da tarefa proposta pelo professor.

Em relação às possibilidades de matematização as autoras Ferreira e Buriasco (2015) elaboraram um quadro baseado em De Lange.

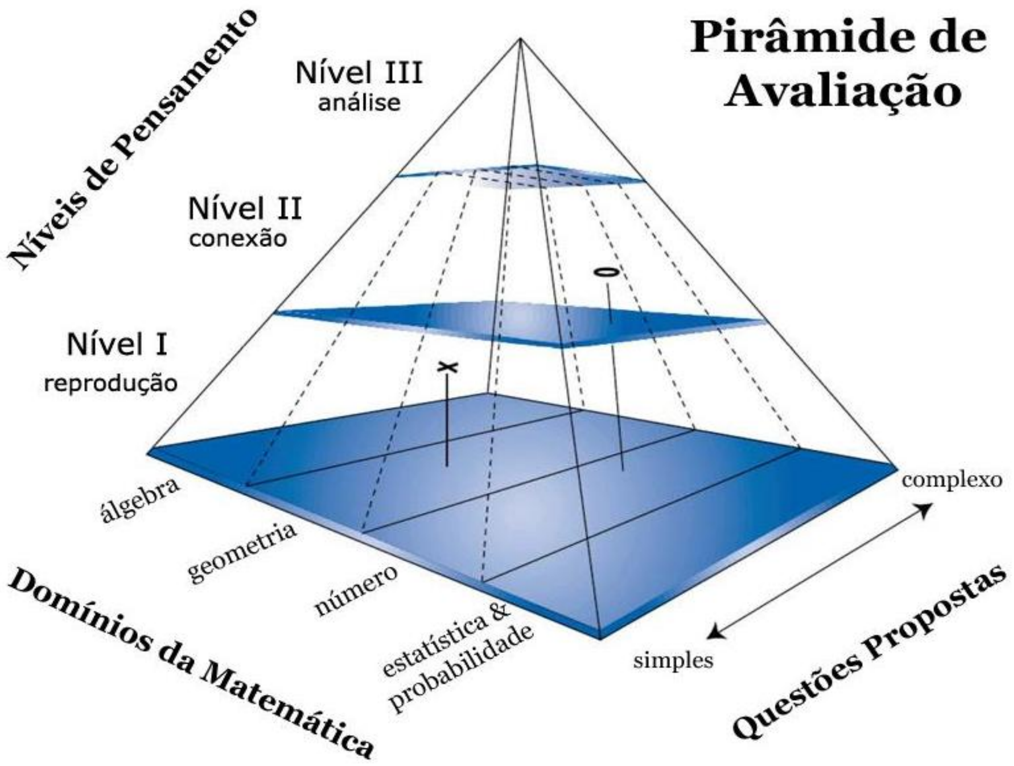
Quadro 2 - Uso do contexto segundo De Lange (1995).

Contexto de Ordem Zero	É utilizado apenas para tornar o problema parecido com uma situação da vida real. São chamados por De Lange (1999) de “contexto falso”, “contexto de camuflagem”. Segundo o autor, os problemas que contêm esse tipo de contexto devem ser evitados. Para Dekker e Querelle (2002), o contexto utilizado em um problema deve ser relevante para resolvê-lo; caso contrário; ele é classificado como de ordem zero.
Contexto de Primeira Ordem	É aquele que apresenta operações matemáticas “textualmente embaladas”, no qual uma simples tradução do enunciado para uma linguagem matemática é suficiente (DE LANGE, 1987) Esse tipo de contexto é relevante e necessário para resolver o problema e avaliar a resposta (DE LANGE, 1999; DEKKER; QUERELLE, 2002).
Contexto de Segunda Ordem	É aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa (DE LANGE, 1987). Esse tipo de contexto, segundo De Lange (1999), envolve matematização; ao passo que, nos contextos de primeira ordem, os problemas já são pré-matematizados.
Contexto de Terceira Ordem	Como aquele que possibilita um “processo de matematização conceitual”, esse tipo de contexto serve para “introduzir ou desenvolver um conceito ou modelo matemático” (DE LANGE, 1987, p. 76).

Fonte: Ferreira e Buriasco (2015).

De Lange (1999) apresenta uma pirâmide para itens avaliativos trazendo uma representação visual de como se espera que se estruture uma avaliação. Os itens são separados em 3 níveis de demanda cognitiva e estes ainda sim são segmentados em áreas da matemática como: álgebra, geometria, números, estatística e probabilidade. Além disso, há o grau de complexidade dos itens podendo ser mais simples ou complexos.

Figura 1 – Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999).



Fonte: Ferreira e Buriasco, 2015.

No Nível I, encontram-se as questões de reprodução que têm como característica serem, frequentemente, de múltipla escolha, de preencher os espaços em branco, relacionar as colunas ou de ordenar os itens, por exemplo. Esses tipos de itens avaliativos são facilmente encontrados em avaliações de larga escala.

No Nível II, há o início das conexões entre as diferentes áreas e domínios da matemática. É necessário relacionar informações para resolver problemas mais simples. Embora já haja problemas, eles não serão tão complexos como os problemas de nível III. Neste nível, a tomada de decisão do estudante para quais ferramentas matemáticas irá utilizar já se torna perceptível.

No Nível III, temos os problemas de maior grau de complexidade. Neste nível, os estudantes são encorajados a matematizar situações problemas, ou seja, eles devem analisar, interpretar, compreender e desenvolver suas próprias estratégias de modo a desenvolver novos modelos matemáticos e argumentar utilizando-se de provas e generalizações. Neste nível os itens serão compostos por questões abertas que oportunizam diversos tipos de respostas corretas.

O documento do PISA (OECD, 2003) trata sobre a classificação de itens avaliativos e suas possíveis resoluções.

Quadro 3 - Classificação dos tipos de itens avaliativos de acordo com o PISA.

Classificação	Descrição
Itens de Respostas de Construção Aberta	"Nestes itens, os estudantes construíram respostas mais longas, havendo a possibilidade de ampla variedade de respostas individuais divergentes e diferentes pontos de vista. Normalmente, estes itens solicitavam aos estudantes que relacionassem informações ou idéias contidas no texto de estímulo com sua própria experiência ou opinião, sendo que a aceitabilidade dependeria mais da habilidade para usar o que leram ao justificar ou explicar tal posição, do que da posição tomada pelo estudante. Permitiu-se freqüentemente a atribuição de crédito parcial para respostas parcialmente corretas ou menos sofisticadas, e todos esses itens receberam notas à mão." (OECD, p.335)
Itens de Respostas de Construção Fechada	"Estes itens exigiram que os estudantes construíssem suas próprias respostas, havendo uma variedade limitada de respostas aceitáveis. A maioria destes itens recebeu pontuação dicotômica, com alguns itens incluídos no processo de atribuição de notas." (OECD, p.335)
Itens de Respostas Curtas	"Assim como nos itens de respostas de construção fechada, os estudantes deveriam fornecer respostas breves, havendo, porém, ampla variedade de respostas possíveis. Estes itens receberam notas à mão, permitindo, desse modo, tanto crédito dicotômico como parcial." (OECD, p.335)
Itens de Múltipla Escolha Complexa	"Nestes itens os estudantes fizeram uma série de opções, geralmente binárias. Os estudantes indicaram suas respostas fazendo um círculo em uma palavra ou em uma frase curta (por exemplo, sim ou não) para cada ponto. Estes itens receberam pontuação dicotômica para cada opção, havendo a possibilidade de crédito total ou parcial para o item como um todo." (OECD, p.335)
Itens de Múltipla Escolha	"Estes itens solicitavam aos estudantes que fizessem um círculo em uma letra para indicar uma opção entre quatro ou cinco alternativas, cada uma delas podendo ser um número, uma palavra, uma frase ou uma sentença. A pontuação foi dicotômica." (OECD, p.335)

Fonte: Elaborado pelo autor com referência no PISA (OECD, 2003, p.335).

Com o objetivo de esclarecer o conceito de "problema" para ajudar a melhorar o ensino de resolução de problemas, Borasi (1986) faz uma análise e exemplificação através de quatro óticas diferentes sobre a problematização: (I) a formulação de um problema, (II) o contexto em que se encontra o problema, (III) soluções para o problema, (IV) os possíveis métodos para abordagem ao resolver o problema. Através desse trabalho a autora classifica os problemas com foco nos contextos os quais eles se encontram.

Quadro 4 - Tipos de contexto conforme Borasi (1986).

Classificação	Contexto	Exemplos	Soluções possíveis
Exercício	Inexistente	Encontre o resultado de 4×2+6×3.	Em maioria, uma resolução única e exata.
Problema de palavras	Totalmente explícito no texto	Maria comprou um hambúrguer por \$0,90 e uma Coca-Cola por \$0,30. Se a taxa local sobre as vendas é de 5%, quanto ela deverá receber se ela der \$2,00 ao caixa?	Em maioria, uma resolução única e exata.
Problema de quebra-cabeça	Totalmente explícito no texto	Seis palitos de fósforos devem ser montados para formar quatro triângulos equiláteros congruentes nos quais cada lado é igual ao comprimento dos palitos.	Em maioria, uma resolução única e exata.
Prova de uma conjectura	Apenas parcialmente no texto - teorias conhecidas são assumidas	Prove: Se a, b, c são números inteiros ímpares, então as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, não são racionais.	Geralmente, mas não necessariamente, única.
Problema da vida real	Apenas parcialmente no texto	A família Nelson deseja cobrir com tapete uma pequena sala de formato irregular. Ao fazer isso, eles querem estimar a quantidade de tapete que eles precisarão comprar.	Muitas possibilidades - apenas soluções aproximadas.
Situação problema	Apenas parcialmente no texto - problemático	O teorema fundamental da aritmética afirma que qualquer número natural maior que 1 pode ser representado como um produto de primos exatamente de uma única maneira (se ignorarmos questões de ordem). Comente sobre a situação se substituirmos produto por soma.	Muitas possibilidades.
Situação	Apenas parcialmente no texto – não problemático	Considere os ternos pitagóricos a seguir: 3 4 5 5 12 13 8 15 17 7 24 25	Problematização.

Fonte: Borasi (1986, p. 134, tradução nossa).

Butts (1997) com o objetivo de auxiliar na elaboração de problemas apresenta 5 classificações de problemas de matemática. Estas classificações e suas definições encontram-se no quadro a seguir.

Quadro 5 - Tipos de problemas conforme Butts (1997).

Tipos de problemas	**Definição**	**Exemplo**
Exercícios de reconhecimento	Em regra, esse tipo de problema pede ao resolvedor reconheça um fato matemático específico como uma definição ou um teorema.	Se a, b e c são números reais e $a > b$, então $ac > bc$. Verdadeiro ou falso?
Exercícios algorítmicos	Como o próprio nome sugere, esse tipo de problema trata-se da aplicação de algum algoritmo matemático, geralmente feito passo a passo.	Calcule: $16 + 4 \times (-2) - (6 \div 3)$
Problemas de aplicação	São problemas que exigem, na sua resolução: (a) formulação do problema na simbologia matemática e (b) manipulação dos símbolos mediante algoritmos. Um traço característico desse tipo de problema é que no enunciado encontra-se uma estratégia para resolvê-los. O objetivo, para resolver, é traduzir o enunciado escrito para a escrita matemática de modo que algoritmos adequados possam ser aplicados.	Aumentando-se a base e altura de um retângulo em 20%, em que porcentagem aumentará a área?
Problemas de pesquisa aberta	São problemas em que no enunciado não há uma estratégia para resolvê-los. Geralmente, tais problemas apresentam em seus enunciados expressões como: “Prova que…”, “Encontre todos…” ou “Para quais… é…”, entre muitas outras variações.	Quantos triângulos diferentes de lados inteiros podem ser construídos de modo que o(s) lado(s) maior (es) tenha(m) 5 cm de comprimento? 6 cm? n cm? Em cada caso, quantos são isósceles?
Situações-problema	Apresenta-se aos estudantes uma situação que faz com que os estudantes pensem e reflitam a respeito. Nessas situações uma das etapas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) a situação, cuja solução é necessária.	Esboce um estacionamento de carros. Seguem alguns problemas pertinentes que podem ser considerados. Há muitos outros possíveis. a) Que tamanho deverá ter cada vaga? b) Qual deve ser o ângulo para demarcar cada vaga? c) Quanto deverá ser cobrado por carro, por hora, se deseja obter um lucro de 10%?

Fonte: Butts, 1997, p. 33-36.

Importante ressaltar que, apesar de os autores apresentarem classificações para cada tipo de enunciado de tarefa, existe uma zona obscura de uma classificação para a outra. Assim, determinadas tarefas podem possuir traços e características de mais de uma classificação simultaneamente. Isso pode gerar discussões e debates a respeito de como classificar determinadas tarefas matemáticas. De acordo com Butts

(1997, p.36) “existe uma área nebulosa para cada categoria, mas esses subconjuntos podem servir de base”.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa terá, predominantemente, o caráter qualitativo de cunho interpretativo seguindo a Análise de Conteúdo apresentada por Bardin (2004).

3.1. OBJETIVO GERAL

Analisar a produção escrita em matemática de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – anos finais – em duas provas escritas, uma Prova A com tarefas de contextos realísticos e outra prova B com contextos puramente matemáticos, produzidas a partir de questões do PISA.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Descrever/classificar os enunciados das tarefas das provas A e B com base na literatura;
- Classificação/categorizar as produções escritas atribuindo créditos de resolução: totalmente correta, parcialmente correta, incorreta, branco;
- Descrever as produções escritas dos estudantes segundo as estratégias[7] e procedimentos[8] utilizados;
- Identificar se existem similaridades ou divergências nas maneiras de lidar[9] com os enunciados das tarefas das duas provas.

3.3. DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Para essa pesquisa foram elaborados dois instrumentos avaliativos, sendo duas provas escritas. A primeira prova escrita, que chamaremos de prova A, foi elaborada com tarefas matemáticas do PISA. A segunda prova escrita, que

[7] De acordo com Hadji (1994, p.47), pode “entender-se por estratégia a orientação geral das operações e dos meios a utilizar. [...]. Em sentido lato, o termo designa um conjunto de ações coordenadas tendo em vista uma finalidade”.
[8] Segundo Dalto (2007, p.38), o “procedimento relaciona-se ao processo de desenvolvimento da estratégia. Por exemplo, se um estudante se utiliza de uma estratégia algébrica para resolver um problema, um dos procedimentos que pode ser utilizado é a equação, função, sistemas de equações, etc”.
[9] Viola dos Santos (2007).

chamaremos de prova B, foi elaborada com tarefas que exigiam procedimentos matemáticos similares aos das tarefas da prova A para a sua resolução. Contudo, os elementos do “contexto realístico” foram parcialmente adaptados para se tornarem mais próximos de um contexto puramente matemático conforme Diaz e Poblete (2005).

Para a elaboração da prova A foi necessário escolher quais tarefas iriam compor o instrumento avaliativo. Para essa escolha os critérios estabelecidos foram os seguintes: (a) serem tarefas do PISA; (b) as tarefas precisavam abordar conteúdo do 8º ano e que já tivessem sido trabalhados em sala de aula no 4º bimestre.

A escolha de tarefas do PISA deu-se pelo fato das questões presentes em sua prova já serem validadas em âmbito internacional. Dessa maneira, facilitaria o procedimento metodológico tornando desnecessária a validação das questões antes da aplicação da prova.

Para a elaboração da Prova B utilizou-se das tarefas da Prova A como ponto de partida e adaptou-se os “elementos realísticos” do enunciado de modo a deixá-la mais próxima de uma tarefa com “contexto inexistente” conforme a classificação da autora Borasi (1986) e/ou mais próximos de um contexto puramente matemático conforme Diaz e Poblete (2005). Esse procedimento de produção de tarefas “aritmeticamente equivalentes” às tarefas da Prova A, fez-se de maneira colaborativa entre o autor e a orientadora e foi validado pelos pares de maneira coletiva pelo GEPEMA.

Essas provas foram aplicadas em uma escola particular localizada no centro da cidade de Londrina. Foram um total de 117 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental anos finais que resolveram as duas provas, porém somente 57 pais/responsáveis assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido.

Para compor a amostra utilizou-se dois critérios: (a) os pais/responsáveis terem assinado o termo de consentimento livre e esclarecido; (b) ter feito as duas provas nos dias de aplicação junto com a turma. Alguns estudantes faltaram no dia em que a prova estava sendo aplicada. Como essa prova fazia parte do sistema avaliativo do 4º bimestre desses estudantes, então foi oportunizado que eles fizerem essa mesma prova em um outro dia posterior para que não fossem penalizados na nota. Contudo, casos como estes, não compõem a amostra, pois, estes estudantes fizeram essa prova como trabalho em suas casas, ou seja, não é possível garantir o rigor metodológico durante a resolução da prova.

Sendo assim, a amostra possui apenas as produções escritas dos 51 estudantes que compareceram aos dois dias presencialmente e os pais/responsáveis assinaram o termo de consentimento.

Os estudantes estavam divididos em três turmas distintas em que o autor dessa pesquisa era o professor regente de matemática das três turmas. As provas foram aplicadas em dois dias diferentes nas três turmas em uma disposição que se encontra presente no quadro a seguir. Dessa maneira, a primeira turma começaria pela prova A e depois faria a prova B. A segunda turma começaria pela prova B e depois faria a prova A. Na terceira turma metade dos estudantes começaria pela prova A e a outra metade começaria pela prova B e no segundo dia de prova mudariam as provas.

Quadro 6 - Distribuição das provas aplicadas.

	Primeiro dia de prova	**Segundo dia de prova**
Turma P	Os 20 primeiros estudantes da chamada fizeram a prova A. Os outros 20 estudantes fizeram a prova B.	Os 20 primeiros estudantes da chamada fizeram a prova B. Os outros 20 estudantes fizeram a prova A.
Turma Q	Todos os 35 estudantes fizeram a prova A.	Todos os 35 estudantes fizeram a prova B.
Turma R	Todos os 42 estudantes fizeram a prova B.	Todos os 42 estudantes fizeram a prova A.

Fonte: autor.

Contudo, como já mencionado, a amostra não é composta pela produção escrita de todos os 117 estudantes, mas sim das produções escritas de 51 estudantes. O quadro a seguir apresenta a mesma distribuição das provas aplicadas nas três turmas, porém, levando em consideração apenas os estudantes cujas produções escritas compõem a amostra.

Quadro 7 - Distribuição das provas aplicadas que compõem a amostra.

	Primeiro dia de prova	**Segundo dia de prova**
Turma P	13 estudantes fizeram a prova A e compõem a amostra. Sendo eles: PA01, PA02, PA03, PA05, PA06, PA08, PA09, PA10, PA11, PA12, PA13, PA14 e PA18. 10 estudantes fizeram a prova B e	13 estudantes fizeram a prova B e compõem a amostra. Sendo eles: PA01, PA02, PA03, PA05, PA06, PA08, PA09, PA10, PA11, PA12, PA13, PA14 e PA18. 10 estudantes fizeram a prova A e

	compõem a amostra. Sendo eles: PB22, PB24, PB25, PB27, PB28, PB29, PB30, PB35, PB36 e PB39.	compõem a amostra. Sendo eles: PB22, PB24, PB25, PB27, PB28, PB29, PB30, PB35, PB36 e PB39.
Turma Q	10 estudantes fizeram a prova A e compõem a amostra. Sendo eles: QA03, QA04, QA06, QA09, QA18, QA20, QA24, QA30, QA31 e QA35.	10 estudantes fizeram a prova B e compõem a amostra. Sendo eles: QA03, QA04, QA06, QA09, QA18, QA20, QA24, QA30, QA31 e QA35.
Turma R	18 estudantes fizeram a prova B e compõem a amostra. Sendo eles: RB02, RB06, RB07, RB08, RB11, RB14, RB19, RB20, RB21, RB26, RB27, RB28, RB30, RB34, RB35, RB37, RB40 e RB41.	18 estudantes fizeram a prova A e compõem a amostra. Sendo eles: RB02, RB06, RB07, RB08, RB11, RB14, RB19, RB20, RB21, RB26, RB27, RB28, RB30, RB34, RB35, RB37, RB40 e RB41.

Fonte: autor.

Para que não fossem identificados nessa pesquisa, cada estudante foi nomeado por um código composto por três elementos: a primeira letra refere-se à turma à qual o estudante pertence. Para isso, foram utilizadas as letras P, Q e R; a segunda letra indica qual prova ele fez primeiro, podendo ser a prova A ou a prova B; o número do código, composto por dois dígitos, corresponde ao número do estudante na chamada da turma, organizada por ordem alfabética. Sendo assim, o estudante PA07 pertence a turma codificada como P, fez a prova A primeiro e ele é o 7º estudante da chamada. O estudante RB12 é da turma codificada como R, fez a prova B primeiro e é o 12º nome da chamada. Dessa maneira, o anonimato é garantido aos estudantes, de forma que a autoria de cada produção escrita é conhecida somente pelo autor desse trabalho.

Para a correção foram utilizados os códigos (2, 1, 0 e 9). O código "2" foi utilizado para classificar as produções escritas que utilizavam de um procedimento correto para a resolução da tarefa proposta. O código "1" foi utilizado para classificar as produções escritas que estavam parcialmente corretas. Por exemplo, utilizou-se a estratégia correta; porém, algum procedimento foi desenvolvido de maneira incorreta ou não terminou o procedimento. O código "0" foi utilizado para classificar as produções escritas que apresentavam procedimentos e estratégias que não resolviam a tarefa. O código "9" foi utilizado para as produções escritas que estavam em branco.

Contudo, uma mesma tarefa poderia ser resolvida por diversas estratégias diferentes. Dessa maneira, conforme surgiram estratégias diferentes para resolverem a mesma tarefa, então foi acrescentado um ponto após o código 2, ou seja, foram utilizados os códigos: 2.1; 2.2; 2.3. Todas essas resoluções são corretas e por isso possuem o código 2 na frente, mas foram feitas por estratégias diferentes. Então o código 2.1 consta a primeira estratégia correta identificada na correção e o código 2.2 consta a segunda estratégia correta que encontrei na correção e, assim, sucessivamente.

A correção foi feita de maneira horizontal, ou seja, primeiro corrigiu-se a tarefa 1 da prova A de todos os estudantes. Em seguida, corrigiu-se a tarefa 1 da prova B. Depois corrigiu-se a tarefa 2 da prova A. Logo após, corrigiu-se o item 2 da prova B. Assim foi feito, até que todas as tarefas de todas as provas fossem corrigidas.

As análises foram feitas por agrupamentos, estes foram feitos com as produções escritas que possuem uma estratégia em comum. Então, esta estratégia foi analisada e explorada de modo a fazer inferências a respeito do que se é observável na escrita nessas produções.

4. ANÁLISES

As análises iniciaram-se pelos enunciados das tarefas das provas A e B e a classificação destes conforme a literatura apresentada anteriormente (Díaz e Poblete; De Lange; OECD; Borasi; Butts). As produções escritas foram analisadas na mesma ordem da correção. Primeiro se analisou as produções da tarefa 1 da prova A, depois da tarefa 1 da prova B, e em seguida a tarefa 2 da prova A. Seguindo assim, até que todas as análises fossem feitas.

4.1. CLASSIFICAÇÃO DOS ENUNCIADOS DAS TAREFAS DA PROVA A

Quadro 8 - Tarefa 1 da prova A.

Nico quer calçar o pátio retangular de sua nova casa. O pátio tem o comprimento de 5,25 metros por 3,00 metros de largura. Ele precisa de 81 tijolos por metro quadrado. Calcule o número de tijolos que Nico necessita para todo o pátio.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf. Acesso em: 15/01/2025.

O enunciado dessa tarefa pode ser classificado como “problema de contexto realista” de acordo com a classificação de Díaz e Poblete (2005), pois se trata de um contexto realístico que pode efetivamente acontecer. Como não envolve ações diretas do estudante, então não se classifica como um problema de contexto real.

Para a classificação do autor De Lange (1995) podemos considerar o enunciado dessa tarefa como sendo “contexto de segunda ordem”, pois é necessário uma matematização horizontal relacionando o enunciado com o cálculo da área do retângulo. Assim como a quantidade de tijolos necessários por metro quadrado com a multiplicação pela área do retângulo.

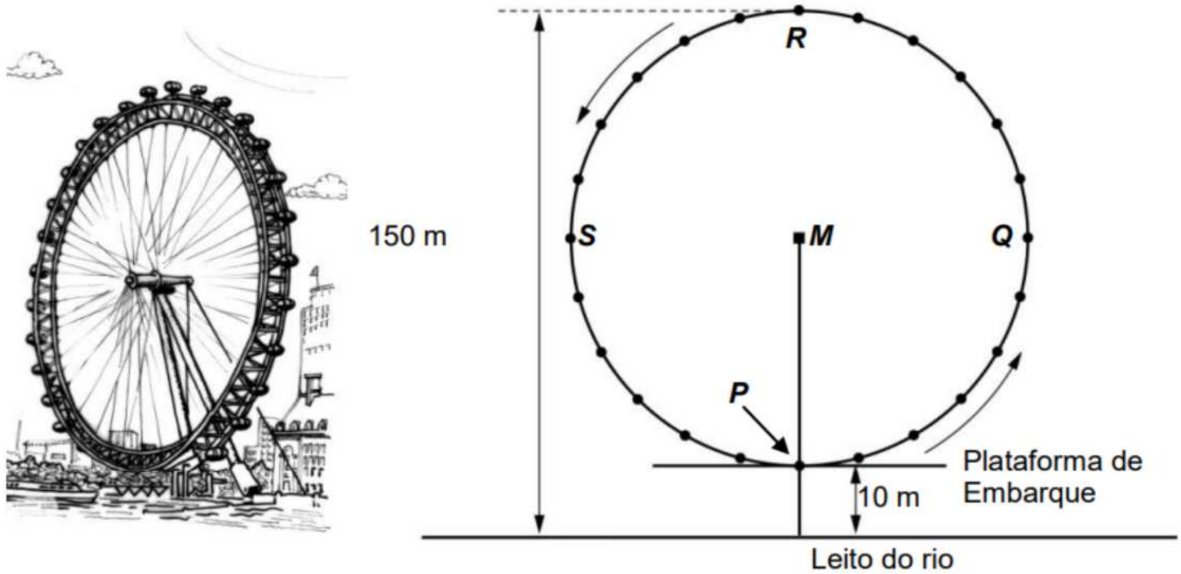
De acordo com os documentos do PISA (OECD, 2003) o enunciado dessa tarefa pode ser classificado como “item de resposta de construção fechada”. Essa classificação é feita principalmente pelo fato de haver uma variedade limitada de respostas aceitáveis. Assim, é diferente dos “itens de resposta de construção aberta” e “itens de resposta curta” que admitem uma ampla variedade de respostas possíveis.

Conforme a classificação de problemas da Borasi (1986) é possível classificar o enunciado dessa tarefa como “problema de palavras”. Pois espera-se do estudante uma resolução única e exata que constará a quantidade de tijolos necessários para cobrir o pátio.

A partir da literatura de Butts (1997) é possível classificar o enunciado essa tarefa como sendo “problema de aplicação”, pois é possível transcrever o problema para a simbologia matemática e com a aplicação de algoritmos matemáticos chega-se à resposta final e esperada.

Quadro 9 - Tarefa 2 da prova A.

Na margem do rio fica uma roda gigante. Veja a foto e o diagrama abaixo.



A roda gigante tem um diâmetro de 140 metros e o seu ponto mais alto está a 150 metros acima do leito do rio, em uma das margens do rio. Ela gira na direção indicada pela seta.

I. A letra M, no diagrama, indica o centro da roda gigante. Quantos metros (m) sobre o leito do rio está o ponto M?

II. A roda gigante gira em velocidade constante. A roda faz uma rotação completa em exatamente 40 minutos. João inicia o passeio na roda gigante na plataforma de embarque P. Onde João estará depois de meia hora?

a) Em R.
b) Entre R e S.
c) Em S.
d) Entre S e P.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2012/pisa_2012_matematica_itens_liberados.pdf. Acesso: 15/01/2025.

Ambos os enunciados dos itens da tarefa da roda gigante classificam-se como “problema de contexto realista” de acordo com a classificação de Díaz e Poblete (2005). Novamente, não estão diretamente relacionados com a realidade do estudante dependendo de uma ação dele. Mas, trata-se da simulação de uma situação que pode ocorrer na realidade e por isso classificada como realista e não como real.

No primeiro item é possível classificá-lo como “contexto de primeira ordem”. Basta associar o cálculo do raio de uma circunferência com a distância do ponto M até o ponto P. Uma simples analogia com o formato da roda gigante para o formato de uma circunferência torna possível a resolução desse item. O segundo item é possível classificá-lo como “contexto de segunda ordem”, pois é possível relacionar essa situação realística com um passeio na roda gigante. O tempo para dar uma volta pode ser associado com o conceito de fração.

Na classificação da OECD (2003) o enunciado do primeiro item é de “resposta de construção fechada” por se tratar de uma resposta breve e limitada. O segundo item pode ser classificado como “múltipla escolha”.

Os enunciados de ambos os itens podem ser considerados como “problemas de enunciado verbal” na classificação de Borasi (1986). Na classificação de Butts (1997) ambos os itens podem ser considerados como “problemas de aplicação”.

Quadro 10 - Tarefa 3 da prova A.

Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf. Acesso em: 15/01/2025.

Essa tarefa aborda o conceito de qual pizza possui o preço mais vantajoso. Contudo, o conceito de vantagem é relativo à pessoa a quem você considera. Pois quando há uma pessoa em vantagem, é possível que haja uma outra pessoa em situação de desvantagem em consequência dessa situação. Por exemplo, para o consumidor, a pizza com o centímetro quadrado mais barato é a mais vantajosa por ter o melhor custo-benefício. Contudo, se considerarmos o ponto de visto da pizzaria, a melhor pizza é aquela que possui o centímetro quadrado mais caro, pois isto significa um maior rendimento.

Observe que a questão não deixou claro para quem se trata essa vantagem, se para o consumidor ou para o vendedor. Por esta razão o estudante poderia escolher para qual lado consideraria a vantagem, se para o consumidor ou para a pizzaria. Portanto, a tarefa permitia a resolução por duas perspectivas diferentes, do consumidor e do vendedor, que resultaria em respostas diferentes, mas ambas as respostas seriam aceitáveis dependendo da justificativa. Isso tudo depende de qual ação o estudante irá tomar nessa situação, se escolherá ver a situação pela ótica do consumidor ou do vendedor.

Assim, para a resolução era necessário a ação do estudante ao fazer essa escolha e por este motivo, essa tarefa pode ser classificada como de “contexto real” de acordo com a classificação de Díaz e Poblete (2005).

O enunciado dessa tarefa pode ser considerado como um “contexto de terceira ordem” por permitir uma matematização conceitual principalmente trabalhando o conceito de vantagem. Para a classificação proposta pela OECD, podemos considerar que o enunciado dessa tarefa seria de um “item de resposta de construção aberta” por permitir ao estudante essa escolha de qual perspectiva ele terá na resolução desse problema. É possível classificarmos esse enunciado como sendo uma “situação problema” de acordo com a classificação de Borasi (1986) por permitir diversas possibilidades de resolução. Na classificação de Butts (1997) podemos considerar esse enunciado como uma “situação-problema”. Pois essa tarefa permite ao estudante refletir a respeito do problema como um conceito de vantagem. Considerando que a vantagem é relativa, pois se alguém está em vantagem é possível que haja outra pessoa em situação de desvantagem. Então, vantagem depende de qual perspectiva se observa.

Quadro 11 - Tarefa 4 da prova A.

Mara e sua família estão de mudança e podem escolher entre dois tamanhos de caminhão. As dimensões do interior do compartimento de carga do caminhão estão indicadas no quadro a seguir. Todas as paredes e o piso do compartimento de carga do caminhão são retangulares.

Tamanho do caminhão	**Comprimento do piso**	**Largura do piso**	**Altura**
A	4 metros	2 metros	2 metros
B	6,6 metros	2,3 metros	2,3 metros

Eles têm à disposição caixas de três tamanhos diferentes. As dimensões das caixas estão indicadas no quadro a seguir.

Tamanhos das caixas	**Comprimento**	**Largura**	**Altura**

Pequeno	0,4 metro	0,3 metro	0,3 metro
Média	0,5 metro	0,5 metro	0,5 metro
Grande	0,5 metro	0,5 metro	0,75 metro

I. A família de Mara decide alugar o caminhão A. Qual é o maior número de caixas de tamanho médio que caberiam no caminhão A?

II. A empresa que aluga os caminhões confirmou que o caminhão A pode ser preenchido apenas com caixas médias, para que todo o espaço do compartimento de carga seja usado. Mara afirma que uma caixa de tamanho médio ocupa 2/3 do espaço de uma caixa grande e conclui então que o número necessário de caixas grandes para preencher o caminhão A é igual a 2/3 do número de caixas de tamanho médio. Qual das seguintes afirmações sobre a conclusão de Mara é verdadeira?

a) Ela está correta, porque a altura de uma caixa média é 2/3 a altura de uma caixa grande.
b) Ela está correta, porque 3 caixas médias sempre cabem no mesmo espaço de 2 caixas grandes.
c) Ela não está correta, porque nenhuma das dimensões do interior do compartimento de carga do caminhão A é múltipla de 0,75, que é a altura de uma caixa grande.
d) Ela não está correta, porque a altura de uma caixa grande é 1,5 vezes a altura de uma caixa média.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2022/PISA2022_Itens_publicos_de_matematica.pdf. Acesso em: 15/01/2025.

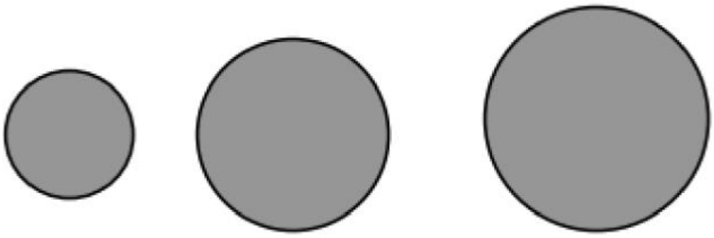
Um ponto interessante sobre essa tarefa encontra-se no segundo item. De fato, o volume da caixa média equivale a 2/3 do volume da caixa grande. Mas, não necessariamente o número de caixas grandes para preencher o caminhão A será igual a 2/3 do número de caixas médias necessárias para preencher o mesmo caminhão. Por mais que o volume total do caminhão A seja divisível pelo volume da caixa grande, a quantidade de caixas grande que vão caber dentro desse caminhão não será o simples resultado dessa divisão. É necessário entendermos o contexto realístico que temos aqui. Nenhuma dimensão do caminhão é divisível por 0,75. Então, haverá espaços que não serão preenchidos pelas caixas grandes. Assim, o resultado mais efetivo deve ser encontrado calculando quantas caixas grandes cabem dentro do caminhão A e não apenas dividindo o volume do caminhão A pelo volume da caixa grande. Espera-se do estudante que ele tenha esse raciocínio e essa interpretação para que ele determine a resposta correta.

Com base nisso, podemos classificar o enunciado do item II dessa tarefa como “problema de contexto real”, “contexto de terceira ordem”, “item de múltipla escolha”, “problema da vida real” e “situação problema”.

O enunciado do item I pode ser classificado como: “problema de contexto realista”, “contexto de primeira ordem”, “item de resposta de construção fechada”, “problema de palavras” e “problema de aplicação”. Pois esse item não exige uma reflexão tão elaborada se comparada com a do item II.

Quadro 12 - Tarefa 5 da prova A.

Você deve desenhar uma nova coleção de moedas. Todas as moedas devem ser redondas e prateadas, mas de diferentes diâmetros.



Pesquisadores descobriram que um sistema ideal de moedas deve atender aos seguintes requisitos:

- Os diâmetros das moedas não devem ser menores que 15 mm e nem maiores que 45 mm.
- Dada uma moeda, o diâmetro da próxima moeda deve ser pelo menos 30% maior.
- A máquina de cunhagem pode produzir apenas moedas com diâmetros que meçam um número inteiro, em milímetros (por exemplo, 17 mm é permitido, 17,3 mm não é).

Desenhe uma coleção de moedas que satisfaça os requisitos acima. Você deve começar com uma moeda de 15 mm e sua coleção deve conter o maior número de moedas possível.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf. Acesso em: 15/01/2025.

Essa tarefa permitiria ao estudante a escolha de diversos diâmetros para a sua coleção de moedas. Contudo, há um trecho do enunciado que limita a uma única resposta correta para essa tarefa. Colocou-se como regra que deveria conter o maior número de moedas possíveis. Assim, restringiu-se a uma única resposta correta sendo aquela com o maior número de moedas. Se retirarmos esse trecho do enunciado, então teríamos mais de uma resposta possível.

Levando isso em consideração, podemos classificar o enunciado dessa questão como: “problema de contexto realista”, “contexto de segunda ordem”, “item de resposta de construção fechada”, “problema de quebra-cabeça” e “problema de pesquisa aberta”.

Quadro 13 - Tarefa 6 da prova A.

Como resultado do aquecimento da Terra algumas geleiras estão derretendo. Doze anos depois do desaparecimento das geleiras, pequenas plantas chamadas líquens, começam a crescer nas pedras.

Cada líquen cresce em forma mais ou menos circular.
A relação entre o diâmetro deste círculo e a idade do líquen pode ser calculada, aproximadamente, através da fórmula:

$$d = 7.\sqrt{t - 12} \qquad para\ t \geq 12$$

onde d representa o diâmetro do líquen em milímetros, e t representa o número de anos passados depois do desaparecimento das geleiras.

I. Aplicando a fórmula, calcule o diâmetro do líquen 16 anos depois do derretimento do gelo.

II. Ana mediu o diâmetro de alguns líquens e encontrou 42 milímetros. Há quantos anos o gelo desapareceu nesta área?
Mostre os seus cálculos.

III. Quantos anos levará para que o líquen que atualmente tem 35 mm de diâmetro dobre seu diâmetro?
Explique como você achou a resposta.

Fonte: Link: https://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf. Acesso em: 15/01/2025.

Nesta tarefa o contexto do problema não interfere diretamente na resolução. Se retirarmos o contexto do enunciado, ainda sim seria possível calcularmos, com a utilização da mesma fórmula, os valores das variáveis d e t.

Os itens dessa tarefa podem ser classificados como: “problema de contexto fantasioso”, “contexto de ordem zero”, “item de resposta de construção fechada”, “problemas de palavras” e “problema de aplicação”.

4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS ENUNCIADOS DAS TAREFAS DA PROVA B

Nas tarefas da prova B os “contextos realísticos” dos enunciados foram modificados. Mas, importante lembrarmos que os processos matemáticos para as suas resoluções das tarefas continuam sendo relativamente os mesmos.

Quadro 14 - Tarefa 1 da prova B.

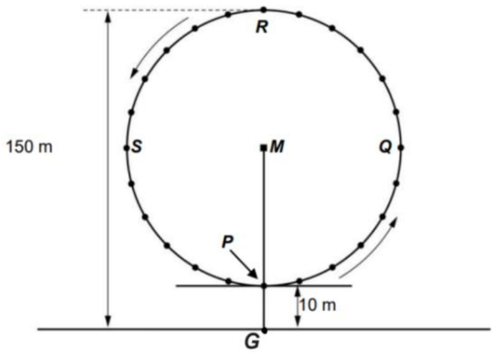
Considere a área de um retângulo com 5,25 metros de comprimento por 3,00 metros de largura. Considere também a seguinte relação: 81 unidades por metro quadrado. Calcule o número de unidades que corresponde a toda a área citada.

Fonte: Autor.

O enunciado dessa tarefa pode ser classificado como: “problema de contexto puramente matemático”, “contexto de ordem zero”, “item de resposta de construção fechada”, “exercícios” e “exercício algorítmico”.

Quadro 15 - Tarefa 2 da prova B.

Considere o diagrama a seguir.



O círculo tem um diâmetro de 140 metros e R está a 150 metros de G.

I. A letra M, no diagrama, indica o centro do círculo. Quantos metros M está distante de G?
II. Um objeto se locomove sobre a linha circular no sentido anti-horário em velocidade constante a partir do ponto P. A rotação completa do objeto é feita em exatamente 40 minutos. Onde o objeto estará depois de meia hora?

a) Em R.
b) Entre R e S.
c) Em S.
d) Entre S e P.

Fonte: Autor.

Os itens dessa tarefa podem ser classificados como: “problema de contexto puramente matemático”, “contexto de ordem zero”, “exercícios” e “exercício algorítmico”. Referente a classificação de itens da OECD (2003) os itens I e II diferenciam-se. O enunciado do item I pode ser classificado como “item de resposta de construção fechada” e o enunciado do item II pode ser classificado como “item de múltipla escolha”.

Quadro 16 - Tarefa 3 da prova B.

Considere R1 a razão entre a área de um círculo A de diâmetro igual a 30 cm e 30 reais.
Considere R2 a razão entre a área de um círculo B de diâmetro igual a 40 cm e 40 reais.
Qual das razões é menor R1 ou R2? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: Autor.

Essa tarefa teve um aspecto importante, que foi alterado em seu enunciado. Na prova A o enunciado deixava o conceito de vantagem em aberto sem dizer se seria mais vantajoso ao cliente ou ao vendedor. Contudo, este enunciado da prova B refere-se a menor razão, ou seja, se comparado com o contexto da prova A, refere-se à vantagem do cliente. Assim, não há a mesma abertura para possibilidades de respostas se comparado com a tarefa 3 da prova A.

O enunciado dessa tarefa pode ser classificado como: “problema de contexto puramente matemático”, “contexto de ordem zero”, “item de resposta de construção fechada”, “exercício” e “exercício de reconhecimento”.

Quadro 17 - Tarefa 4 da prova B.

Considere o quadro a seguir para responder as questões I) e II):

Paralelepípedo	**Medida do comprimento**	**Medida da largura**	**Medida da altura**
P1	4 metros	2 metros	2 metros
P2	6,6 metros	2,3 metros	2,3 metros
P3	0,4 metro	0,3 metro	0,3 metro
P4	0,5 metro	0,5 metro	0,5 metro
P5	0,5 metro	0,5 metro	0,75 metro

I. Qual é a maior quantidade de P4 que caberia em um espaço equivalente ao que ocupa P1?
II. Considere à seguinte conclusão:
“Um P4 ocupa 2/3 do espaço de um P5, então a quantidade necessária de P4 para preencher um espaço equivalente a P1 é igual a 2/3 da quantidade de P5 para preencher um espaço equivalente a P1”.
Qual das seguintes afirmações sobre a conclusão anterior é verdadeira?

a) Está correta, porque a altura de P4 é 2/3 da altura de P5.
b) Está correta, porque três unidades de P4 sempre cabem no espaço equivalente a dois de P5.
c) Não está correta, porque nenhuma das dimensões de P1 é múltipla de 0,75, que é a altura de P5.
d) Não está correta, porque a altura de P5 é 1,5 vezes a altura de P4.

Fonte: Autor.

Os enunciados dos itens dessa tarefa podem ser classificados como: “problema de contexto puramente matemático”, “contexto de ordem zero”, “exercício” e “exercício de reconhecimento”. Contudo, referente às classificações de enunciados da OECD os itens I e II são diferentes. O item I pode ser classificado como “item de resposta de construção fechada", enquanto o item II pode ser classificado como "item de múltipla escolha".

Quadro 18 - Tarefa 5 da prova B.

Você deve desenhar uma coleção de círculos, de diferentes diâmetros, que devem atender aos seguintes requisitos: - Os diâmetros dos círculos não devem ser menores que 15 mm e nem maiores que 45 mm. - Dado um círculo, o diâmetro do próximo círculo deve ser pelo menos 30% maior. - Os círculos somente poderão ter um diâmetro de medida inteira, em milímetros (por exemplo, 17 mm é permitido, 17,3 mm não é). Desenhe uma coleção de círculos que satisfaça os requisitos acima. Você deve começar com um círculo de 15 mm e sua coleção deve conter o maior número de círculos possível.

Fonte: Autor.

O enunciado dessa tarefa pode ser classificado como: "problema de contexto puramente matemático", "contexto de ordem zero", "item de resposta de construção fechada", "exercício" e "exercício algorítmico".

Quadro 19 - Tarefa 6 da prova B.

Considere a fórmula a seguir. $d = 7.\sqrt{t - 12} \qquad para\ t \geq 12$ a) Utilizando a fórmula, calcule o valor de d para $t = 16$. b) Utilizando a fórmula, calcule o valor de t para $d = 42$. Mostre os seus cálculos. c) Considere $d = 35$, para algum valor de t. Qual deve ser a variação de t, para que d dobre o seu valor. Explique como você achou a resposta.

Fonte: Autor.

Os enunciados dos itens dessa tarefa podem ser classificados como: "problema de contexto puramente matemático", "contexto de ordem zero", "itens de resposta de construção fechada", "exercício" e "exercícios algorítmicos".

4.3. CLASSIFICAÇÕES DOS ENUNCIADOS DAS PROVAS A E B POR AUTORES

São apresentados a seguir os quadros com resumos das classificações das tarefas da prova A e B de acordo com cada autor.

Quadro 20 - Classificação dos enunciados das tarefas conforme Díaz e Poblete (2005).

Contextos	Prova A	Prova B
Problema de contexto real	Tarefa 3 Tarefa 4 (Item II)	-
Problema de contexto realista	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 4 (Item I) Tarefa 5	-
Problema de contexto fantasioso	Tarefa 6	-
Problema de contexto puramente matemático	-	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 3 Tarefa 4 Tarefa 5 Tarefa 6

Fonte: Autor.

Quadro 21 - Classificação dos enunciados das tarefas conforme De Lange (1987).

Ordens de contextos	Prova A	Prova B
Contexto de ordem zero	Tarefa 6	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 3 Tarefa 4 Tarefa 5 Tarefa 6
Contexto de primeira ordem	Tarefa 2 (Item I) Tarefa 4 (Item I)	-
Contexto de segunda ordem	Tarefa 1 Tarefa 2 (Item II) Tarefa 5	-
Contexto de terceira ordem	Tarefa 3 Tarefa 4 (Item II)	-

Fonte: Autor.

Quadro 22 - Classificação dos enunciados das tarefas conforme o PISA (OECD, 2003).

Tipos de itens	Prova A	Prova B
Respostas de construção aberta	Tarefa 3	-

Respostas de construção fechada	Tarefa 1 Tarefa 2 (Item I) Tarefa 4 (Item I) Tarefa 5 Tarefa 6	Tarefa 1 Tarefa 2 (Item I) Tarefa 3 Tarefa 4 (Item I) Tarefa 5 Tarefa 6
Respostas curtas	-	-
Respostas de múltipla escolha complexa	-	-
Resposta de múltipla escolha	Tarefa 2 (Item II) Tarefa 4 (Item II)	Tarefa 2 (Item II) Tarefa 4 (Item II)

Fonte: Autor.

Quadro 23 - Classificação dos enunciados das tarefas conforme Borasi (1986).

Contextos dos problemas	Prova A	Prova B
Exercício	-	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 3 Tarefa 4 Tarefa 5 Tarefa 6
Problema de palavras	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 4 (Item I) Tarefa 6	-
Problema de quebra-cabeça	Tarefa 5	-
Problema de uma conjectura	-	-
Problema da vida real	Tarefa 4 (Item II)	-
Situação problema	Tarefa 3	-
Situação	-	-

Fonte: Autor.

Quadro 24 - Classificação dos enunciados das tarefas conforme Butts (1997).

Tipos de problemas	Prova A	Prova B
Exercícios de reconhecimento	-	Tarefa 3 Tarefa 4
Exercícios algorítmicos	-	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 5 Tarefa 6

Problemas de aplicação	Tarefa 1 Tarefa 2 Tarefa 4 (Item I) Tarefa 6	-
Problemas de pesquisa aberta	Tarefa 5	-
Situações-problema	Tarefa 3 Tarefa 4 (Item II)	-

Fonte: Autor.

Quadro 25 - Classificação dos enunciados das tarefas das provas A e B

Tarefas	Prova A	Prova B	Autores
1	Problema de contexto realista	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de segunda ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Respostas de construção fechada	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Problema de palavras	Exercício	Borasi
	Problemas de aplicação	Exercícios algorítmicos	Butts
2 Item I	Problema de contexto realista	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de primeira ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Respostas de construção fechada	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Problema de palavras	Exercício	Borasi
	Problemas de aplicação	Exercícios algorítmicos	Butts
2 Item II	Problema de contexto realista	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de segunda ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Resposta de múltipla escolha	Resposta de múltipla escolha	PISA (OECD)

	Problema de palavras	Exercício	Borasi
	Problemas de aplicação	Exercícios algorítmicos	Butts
3	Problema de contexto real	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de terceira ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Respostas de construção aberta	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Situação problema	Exercício	Borasi
	Situação problema	Exercícios de reconhecimento	Butts
4 Item I	Problema de contexto realista	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de primeira ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Respostas de construção fechada	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Problema de palavras	Exercício	Borasi
	Problemas de aplicação	Exercícios de reconhecimento	Butts
4 Item II	Problema de contexto real	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de terceira ordem	Contexto de ordem zero	De Lange
	Resposta de múltipla escolha	Resposta de múltipla escolha	PISA (OECD)
	Problema da vida real	Exercício	Borasi
	Situação problema	Exercícios de reconhecimento	Butts
5	Problema de contexto realista	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de segunda	Contexto de ordem zero	De Lange

	ordem		
	Respostas de construção fechada	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Problema de quebra-cabeça	Exercício	Borasi
	Problema de pesquisa aberta	Exercícios algorítmicos	Butts
6	Problema de contexto fantasioso	Problema de contexto puramente matemático	Díaz e Poblete
	Contexto de ordem zero	Contexto de ordem zero	De Lange
	Respostas de construção fechada	Respostas de construção fechada	PISA (OECD)
	Problema de palavras	Exercício	Borasi
	Problemas de aplicação	Exercícios algorítmicos	Butts

Fonte: Autor.

Portanto, é possível observar que a prova A tem a classificação de seus itens em contraste com a classificação dos itens da prova B. Na prova A as classificações são predominantemente mais próximas de um contexto realístico. Enquanto, na prova B, as classificações ficaram, em sua maioria, como exercícios algorítmicos.

As tarefas da prova A possuem um caráter mais realístico se comparadas com as tarefas da prova B. Na prova A os enunciados das tarefas estabelecem vínculos com a realidade e na prova B os enunciados são de contextos do tipo puramente matemáticos.

4.4. Análise das produções escritas dos estudantes nas provas A e B

Nesse capítulo se encontram as análises das produções escritas referentes a cada tarefa das provas A e B.

4.4.1 Prova A – Tarefa 1

Quadro 26 - Prova A tarefa 1

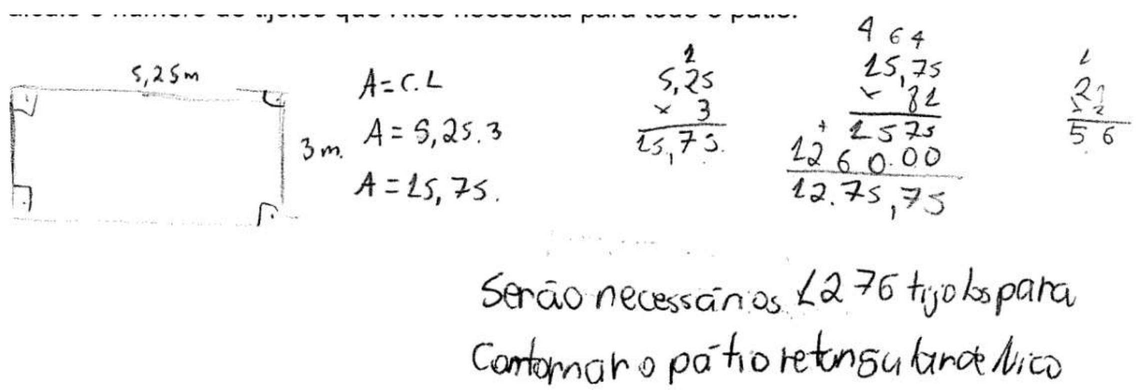
Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2.1	PA08; PA09	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75 tijolos. Na resposta final os estudantes identificam que não faz sentido responder uma quantidade decimal 1275,75 de tijolos. Então, o estudante arredonda o número de tijolos para cima, conforme a regra, e responde que Nico necessitará de 1276 tijolos.
2.2	PA10	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75 tijolos. Na resposta final o estudante coloca que Nico necessitará de 1275,75 tijolos. Não se atentou a quantidade decimal de tijolos. Contudo, o que chama atenção nessa resolução e se diferencia das demais é o procedimento utilizado na multiplicação. Para multiplicar $15{,}75 \times 81$ o estudante separou em quatro passos. Ele fez $81 \times 15 = 1215$, depois fez $\frac{81}{4} = 20{,}25$ para em seguida fazer $20{,}25 \times 3 = 60{,}75$. Então, no final o estudante adicionou $1215 + 60{,}75 = 1275{,}75$.
2.3	PA11; PA18; PB25; PB28; PB30; PB35; QA03; QA06; QA18; QA20; QA30; QA31; RB02; RB06; RB21; RB28; RB37; RB40.	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75 tijolos. Contudo, o estudante não identifica que não faz sentido responder um número decimal para a quantidade de tijolos. Então, ele não arredonda o número de tijolos que Nico necessitará, respondendo 1275,75 tijolos.
2.4	RB30	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75 tijolos. Na resposta final o estudante identifica que não faz sentido responder uma quantidade decimal 1275,75 de tijolos. No entanto, o estudante arredonda o número de tijolos para baixo, diferente da regra convencional, e responde que Nico necessitará de 1275 tijolos.
1.1	PA01; PA02; PA03; PA13; PA14; PB24; PB27; PB29; PB39; QA04; QA09; QA24;	Reconhece a estratégia correta para resolver essa tarefa. Ele sabe que é necessário calcular a área do retângulo, multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura, e em seguida multiplicar a

	QA35; RB14; RB19; RB20; RB34; RB35; RB41	área por 81. Contudo, o estudante comete erros nos procedimentos da multiplicação. Os cálculos apresentados estão errados, mas a estratégia está correta.
1.2	PA05; PA12; RB08; RB26; RB27	Compreende que era necessário calcular a área do retângulo para resolver a situação. Mas, não compreendeu a relação da área com a quantidade de 81 tijolos por m². Assim, o estudante fez apenas a primeira parte da resolução que consiste no cálculo da área do retângulo.
0	PA06; PB22; PB36; RB07; RB11	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

As produções escritas classificadas como corretas com o código 2 se diferenciam principalmente, mas não somente, pela resposta final. O agrupamento 2.2 destacou-se dos demais devido a estratégia diferente das demais que foi utilizada.

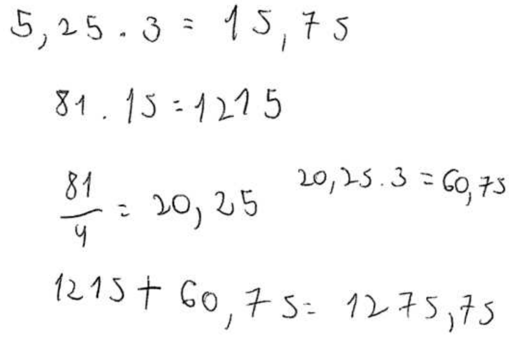
Figura 2 - Produção escrita do estudante PA08



Fonte: Autor.

As produções escritas agrupadas como 2.1 demonstraram reconhecer que não há a possibilidade de comprar 0,75 tijolo, na realidade compra-se um tijolo inteiro e utiliza-se parte deste. Logo, na resposta final era necessário que se fizesse uma aproximação do número necessário de tijolos pelo excesso. Assim, a resposta final apresentada foi de 1276 tijolos.

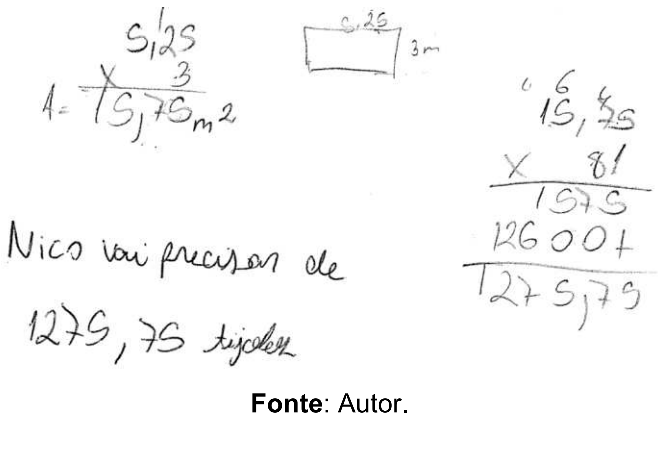
Figura 3 - Produção escrita do estudante PA10



Fonte: Autor.

O agrupamento 2.2 destacou-se dos demais devido a estratégia diferente das demais que foi utilizada. O estudante calculou a área do pátio retangular obtendo 15,75 m². Durante o cálculo da quantidade total de tijolos necessários para o pátio, o estudante não multiplicou $15{,}75 \times 81$, pois identificou que 0,75 equivalem a $\frac{3}{4}$. Desta maneira, calculou um quarto de 81 e multiplicou esse valor por 3. Assim, somou três quartos de 81 com 1215 obtendo a resposta final 1275,75. Contudo, na resposta final, o estudante não demonstrou reconhecer a necessidade de arredondar por excesso o número final de tijolos.

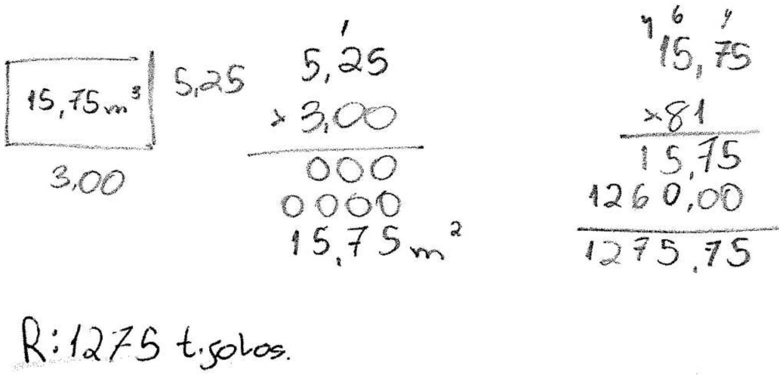
Figura 4 - Produção escrita do estudante PA11



Fonte: Autor.

O agrupamento 2.3 apresentou todos os procedimentos corretos como a multiplicação do comprimento pela largura para o cálculo da área e a multiplicação da área por 81. Contudo, novamente assim como o 2.2, não apresentou sinais de reconhecer a necessidade de arredondar por excesso o valor final. Pois a resposta final apresentada é de 1275,75 tijolos.

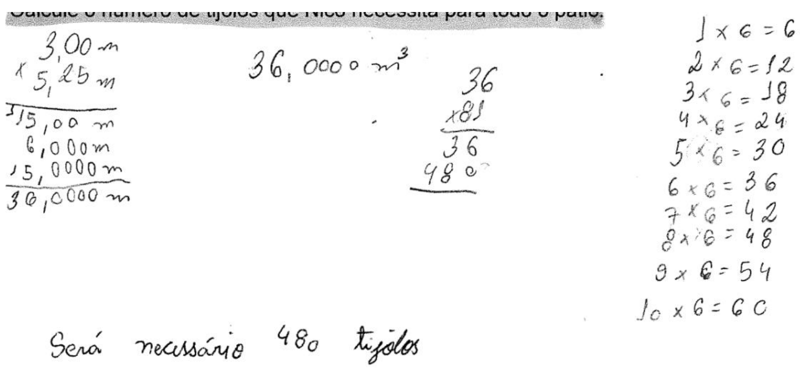
Figura 5 - Produção escrita do estudante RB30



Fonte: Autor.

A diferença do agrupamento 2.4 para os agrupamentos 2.1 e 2.3 consiste na resposta final. Esse agrupamento reconheceu a necessidade de a quantidade de tijolos fosse inteira. Contudo, no momento de fazer o arredondamento utilizou o procedimento de arredondar por falta, sendo que o correto nessa tarefa seria arredondar por excesso.

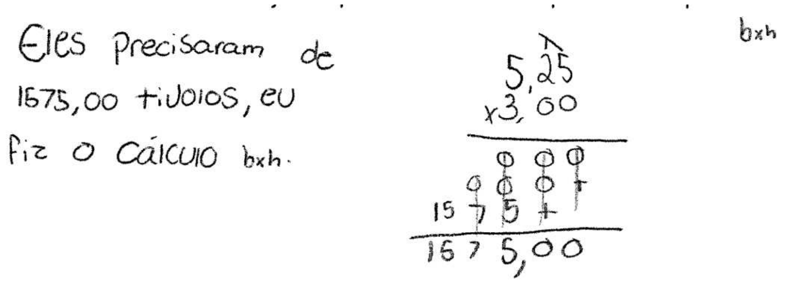
Figura 6 - Produção escrita do estudante PA01



Fonte: Autor.

No primeiro agrupamento, das produções parcialmente corretas, 1.1, estão as produções dos estudantes que reconheceram a estratégia correta para resolver a tarefa proposta. Os estudantes multiplicaram o comprimento pela largura, e em seguida, multiplicaram a área por 81. Contudo, cometeram erros no procedimento da multiplicação. Se não fossem os erros nas contas, os estudantes apresentariam a resposta esperada para a resolução da tarefa proposta.

Figura 7 - Produção escrita do estudante PA12



Fonte: Autor.

Os estudantes, cujas produções do segundo agrupamento das parcialmente corretas, 1.2, compreenderam que parte da resolução da tarefa proposta consiste no cálculo da área. Contudo, não demonstraram compreender a relação que a área possui com a informação de 81 tijolos por metro quadrado. Desta maneira, o estudante calculou a área conforme o esperado, mas os passos seguintes para resolver a tarefa não foram apresentados. Além disso, houve erros no procedimento da multiplicação.

4.4.2 Prova B – Tarefa 1

Quadro 27 - Prova B tarefa 1

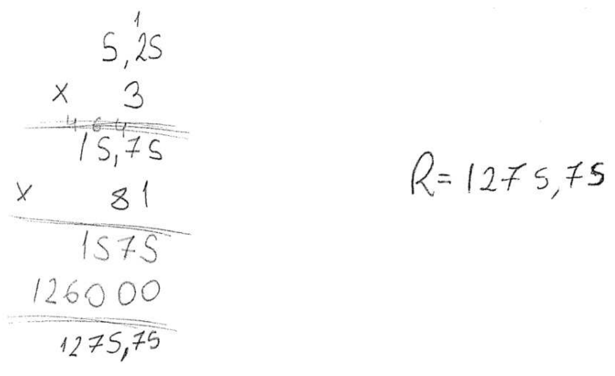
Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2.1	PA03; PA10; PA11; PA14; PA18; PB27; PB28; PB30; QA06; RB02; RB06; RB21; RB28; RB40	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75.
2.2	PA09; RB37	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75. No final responde que o número de unidades correspondentes à área citada é de 1275,75 ou 1276. Apresenta as duas respostas como possíveis.
2.3	PB39; QA30	Calcula a área do retângulo multiplicando o comprimento pela largura e em seguida multiplica o valor da área por 81 obtendo a resposta correta de 1275,75. Mas, no final responde que o número de unidades correspondentes à área citada é de 1275.
1.1	PA01; PA02; PA05; PB24; PB35; QA09; QA18; QA20; QA31; QA35; RB07; RB14;	Reconhece a estratégia correta para resolver essa tarefa. Ele sabe que é necessário calcular a área do retângulo, multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura, e em seguida multiplicar a área por

	RB19; RB27; RB30; RB41	81. Contudo, o estudante comete erros nos procedimentos da multiplicação. Os cálculos apresentados estão errados, mas a estratégia está correta.
1.2	PA06; PA08; PA12; QA03; QA24; RB08; RB20; RB26; RB34; RB35	Compreende que era necessário calcular a área do retângulo para resolver a situação. Mas, não compreendeu a relação de 81 unidades por metros quadrado. Assim, o estudante fez apenas a primeira parte da resolução que consiste no cálculo da área do retângulo.
0	PA13; PB22; PB25; PB29; PB36; QA04; RB11	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Essa tarefa possui uma diferença na resposta final se comparada com a tarefa 1 da prova A. Na tarefa da prova A há uma questão “realística” na resposta final no conceito de não ser possível comprar 0,75 tijolo e que por este motivo seria necessário arredondar por excesso o valor final. Contudo, nessa tarefa 1 da prova B o resultado poderia conter vírgula pois não há nada que impossibilite este fato. Porém, apesar de não haver uma necessidade de arredondar a resposta final, ainda sim, houve estudantes que arredondaram das duas maneiras: por excesso e por falta.

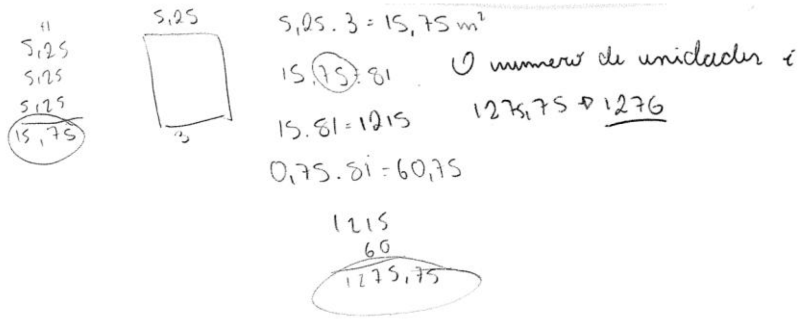
Figura 8 - Produção escrita do estudante QA06



Fonte: Autor.

Nas produções escritas do agrupamento 2.1 os estudantes escolheram a estratégia de multiplicar os três valores presentes no enunciado da tarefa e acertaram em todos os procedimentos. Apresentaram a resposta final em valor decimal 1275,75.

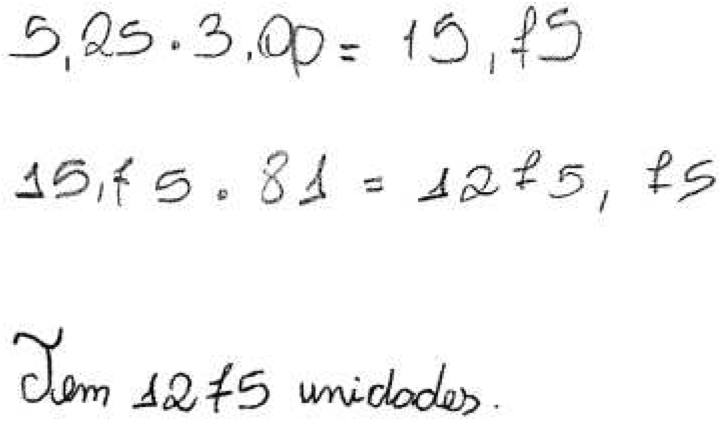
Figura 9 - Produção escrita do estudante RB37



Fonte: Autor.

No agrupamento 2.2 a estratégia utilizada e os procedimentos estão todos corretos. Mas, por algum motivo, que não consta na produção escrita, o estudante escolheu arredondar por excesso o valor final.

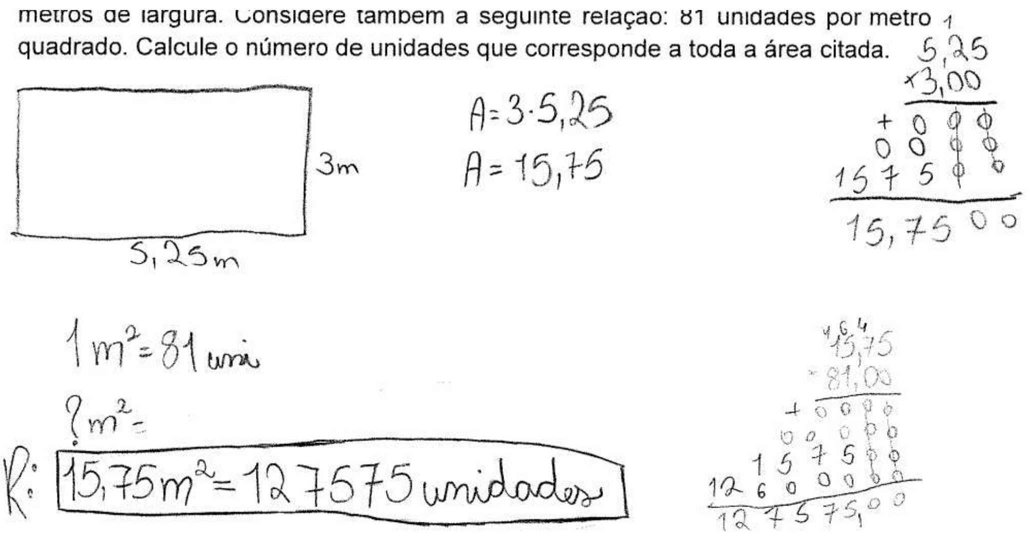
Figura 10 - Produção escrita do estudante QA30



Fonte: Autor.

No agrupamento 2.3 o estudante aproximou por falta o valor final e não apresentou justificativa para tal. Curioso que os dois estudantes que fizeram isso começaram por provas distintas, ou seja, um começou pela prova A e o outro pela prova B.

Figura 11 - Produção escrita do estudante PB35

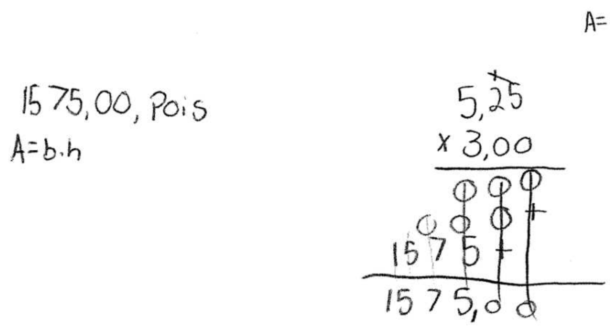


Fonte: Autor.

As produções escritas agrupadas como 1.1 adotaram uma estratégia correta para a resolução da tarefa proposta, mas cometeram erros nos procedimentos da multiplicação. Em regra, a maioria dos erros está relacionada à posição da vírgula. Acredita-se que o estudante PB35 tenha colocado a vírgula no local correto por haver confundido a regra da posição da vírgula da multiplicação com a regra da adição. Pois, assim como os dois números multiplicados possuem duas casas depois da vírgula a resposta final também possui.

Ocorreram erros na multiplicação além da posição da vírgula. Por exemplo, alguns estudantes não colocaram o zero da casa da dezena antes de multiplicar a dezena. Houve também, casos em que os estudantes não colocaram os dois zeros da casa das centenas antes de multiplicar a centena.

Figura 12 - Produção escrita do estudante PA12



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.2 ficou claro que os estudantes sabiam que para calcular a área de um retângulo era necessário multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura. Na figura é possível observar a anotação A=b.h representando a fórmula para o cálculo da área do retângulo. Contudo, os estudantes desse agrupamento apresentaram duas características em comum.

A primeira característica consiste no fato deles terem calculado apenas a área, ou seja, não estabelecerem relação entre a área e 81 unidades por metro quadrado. Pelo menos não apresentaram qualquer registro escrito que sugerisse alguma relação.

Segundo, assim como no grupo 1.1 os estudantes apresentaram erros no procedimento da multiplicação, como a posição da vírgula.

4.4.3 Prova A – Tarefa 2 – Item I

Quadro 28 - Prova A tarefa 2 item I

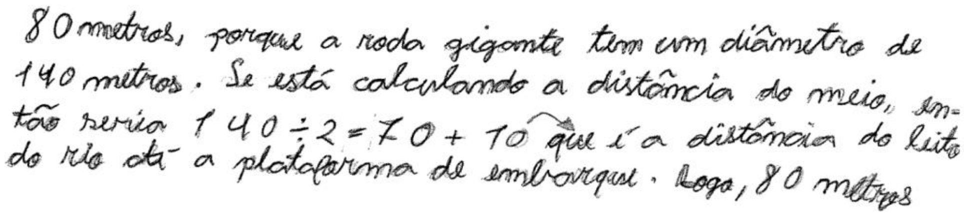
Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA08; PA09; PA10; PA11; PA13; PA14; PA18; PB22; PB24; PB25; PB27; PB28; PB30; PB35; PB36; QA06; QA09; QA20; QA30; QA31; QA35; RB02; RB07; RB08; RB11; RB14; RB19; RB20; RB21; RB26; RB28; RB30; RB34; RB35; RB40; RB41	Identificou que o diâmetro da roda-gigante é de 140 metros e calculou a metade para encontrar o raio. Após encontrar o raio de 70 metros adicionou 10 metros obtendo a resposta correta de 80 metros.
1.1	PA02; PA05; PA06; QA18; RB27	Identificou que era necessário calcular o raio da roda-gigante. Mas, considerou o diâmetro como 150 metros. Assim, o estudante respondeu que a distância era de 75 metros.
1.2	PA12; PB39; QA04; RB06	Identificou a necessidade de calcular o raio da roda-gigante e calculou corretamente chegando ao valor de 70 metros. Contudo, não identificou a necessidade de acrescentar os 10 metros entre os pontos P e G. Portanto, apresentou 70 metros como resposta final.
1.3	QA03; RB37	Identificou a necessidade de calcular o raio da roda-gigante. Contudo, para o calculou considerou que o diâmetro era de 150 metros e assim chegou ao raio de 75 metros. Porém, além disso, ele ainda acrescentou 10 metros obtendo a resposta final de 85 metros.

0	PA01; PB29; QA24	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Essa tarefa se destaca por possuir uma taxa de acerto alta e poucas resoluções diferentes. As produções escritas dos estudantes nessa tarefa foram muito homogêneas.

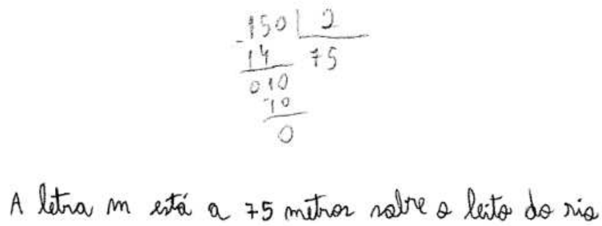
Figura 13 - Produção escrita do estudante QA09



Fonte: Autor.

Nas produções escritas agrupadas com o código 2 os estudantes perceberam que 150 metros não era o diâmetro da roda-gigante, mas sim o diâmetro mais a altura da plataforma. Assim, subtraíram 10 de 150 para obter o diâmetro de 140 e em seguida dividiram por dois para obter o raio da roda-gigante. Tudo isso foi feito porque identificaram que a distância da letra M até o leito do rio trata-se da soma do raio da roda-gigante com a altura da plataforma. Portanto, os estudantes apresentaram 80 como resposta final por tratar-se de 70+10.

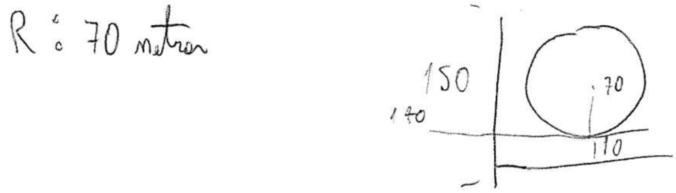
Figura 14 - Produção escrita do estudante RB27



Fonte: Autor.

O primeiro grupo do parcialmente correto, 1.1, tem como característica que os estudantes consideraram 150 metros como o diâmetro e sendo assim calcularam a metade. O erro consiste em não terem identificado que a plataforma media 10 metros e era necessário subtrair esse valor para obter o diâmetro.

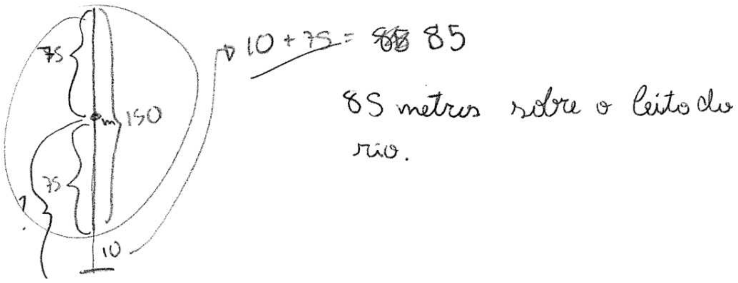
Figura 15 - Produção escrita do estudante PB39



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.2 os estudantes apresentam 70 metros como resposta final. Existem indícios que nos permitem inferir que o estudante identificou que a plataforma mede 10 metros de altura, como consta na figura anterior. Contudo, apesar do estudante ter identificado os 10 metros a resposta final apresentada não é 80 metros conforme o esperado. Pode inferir que o que possa ter acontecido é uma interpretação equivocada por parte do estudante com relação ao enunciado da tarefa. É possível que o estudante interpretasse que a distância do ponto M até o leito do rio trata-se do raio da roda-gigante.

Figura 16 - Produção escrita do estudante RB37



Fonte: Autor.

O agrupamento 1.3 tem como característica que o estudante considerou que o diâmetro da roda-gigante possui 150 metros e para o raio calculou a metade de 75 metros. Contudo, o estudante identificou que há uma plataforma de 10 metros de altura e por isso ele adicionou 75+10 apresentando 85 como resposta final. O erro está no fato de ter considerado a plataforma como parte do diâmetro.

Curioso é o fato de o estudante ter desenhado esse esquema da figura anterior sendo diferente da imagem presente na própria prova. Se analisarmos a imagem apresentada pela tarefa e o esquema do estudante é possível encontrar a diferença que gerou o erro na resolução.

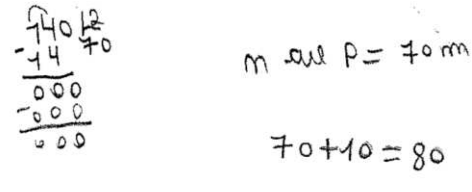
4.4.4 Prova B – Tarefa 2 – Item I

Quadro 29 - Prova B tarefa 2 item I

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2	PA03; PA05; PA06; PA08; PA09; PA10; PA11; PA12; PA13; PA14; PA18; PB22; PB24; PB25; PB27; PB28; PB30; PB35; PB36; PB39; QA03; QA04; QA06; QA09; QA18; QA20; QA31; RB02; RB06; RB07; RB08; RB11; RB14; RB19; RB20; RB21; RB26; RB28; RB30; RB34; RB35; RB37; RB40; RB41	Identificou que o diâmetro da circunferência é de 140 metros e calculou a metade para encontrar o raio. Após encontrar o raio de 70 metros adicionou 10 metros obtendo a resposta correta de 80 metros.
1.1	PA01	Identificou que para encontrar o diâmetro da circunferência era necessário subtrair 10 de 150. Assim, encontrou o diâmetro de 140 metros e o raio como sendo 70 metros. Contudo, apresentou a resposta final como sendo 140 metros.
1.2	PA02; QA30; QA35; RB27	Identificou que era necessário calcular o raio da circunferência. Mas, considerou o diâmetro como 150 metros. Assim, o estudante respondeu que a distância era de 75 metros.
0	PB29; QA24	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

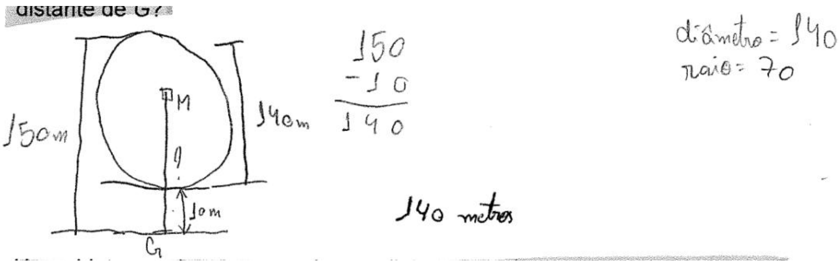
Figura 17 - Produção escrita do estudante QA20



Fonte: Autor.

Esse agrupamento 2 apresentou a resolução esperada. Identificou que o diâmetro mede 140 metros e calculou a metade para encontrar o raio de 70 metros. Logo em seguida, acrescentou 10, por tratar-se da distância de P até G. Assim, apresentou a resposta final de 80 metros.

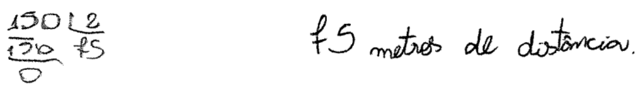
Figura 18 - Produção escrita do estudante PA01



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.1 o estudante apresentou em sua escrita, compreender que para obter o diâmetro da circunferência era necessário subtrair 10 metros dos 150 metros totais. Logo, identificou que o diâmetro mede 140 metros e o raio 70 metros. Portanto, podemos inferir que o estudante é capaz de calcular os comprimentos dos segmentos $\underline{MP}$ e $\underline{PG}$. Contudo, acredita-se que o estudante não compreendeu qual era a pergunta a ser respondida, pois apresentou os cálculos necessários, mas a resposta final está incorreta.

Figura 19 - Produção escrita do estudante QA30



Fonte: Autor.

O agrupamento 1.2 apresentou a mesma estratégia do código 1.1 da tarefa anterior. O estudante considerou o diâmetro como sendo 150 metros e, por causa disso, apresentou a resposta final de 75 metros.

4.4.5 Prova A – Tarefa 2 – Item II

Quadro 30 - Prova A tarefa 2 item II

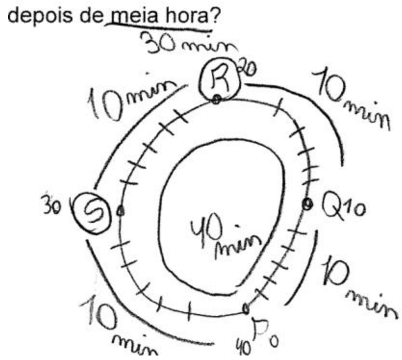
Códigos de	Produções Escritas	Descrição

correção		
2.1	PA01; PA02; PA03; PA05; PA08; PA09; PA10; PA11; PA13; PA14; PA18; PB22; PB24; PB25; PB27; PB30; PB35; QA04; QA06; QA09; QA18; QA20; QA31; QA35; RB02; RB07; RB14; RB19; RB21; RB27; RB28; RB35; RB37; RB40	Identificou que de um ponto nomeado a outro ponto nomeado demora 10 minutos de viagem. Logo, sendo 30 minutos de viagem, o terceiro ponto nomeado será o local onde João está. Assim, a resposta final é a letra S.
2.2	PA06	Resolveu igualmente ao código 2.1. Contudo, não assinalou alternativa na prova, mas a resolução por escrito está registrada na prova.
2.3	PB28	Percebeu que o ponto S na imagem corresponde ao 18º ponto de um total de 24 pontos para uma volta completa. Assim, identificou que a proporcionalidade $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ chegando à conclusão que o ponto que João encontrava-se era o ponto S.
2.4	RB20	Calculou a metade do tempo, 20 minutos, e associou ao ponto que se encontrava na metade da imagem. Em seguida, calculou a metade da metade, 10 minutos, e associou a metade da semicircunferência chegando ao ponto S como resposta final.
1.1	PA12; QA24; RB11	Identifica que cada ponto nomeado corresponde a 10 minutos da volta. Contudo, acaba respondendo que João encontrava-se em algum ponto entre os pontos R e S.
1.2	QA03	Identifica que cada ponto nomeado corresponde a 10 minutos da volta. Mas, considera que o ponto inicial P corresponde a 10 minutos, o ponto Q a 20 minutos e o ponto R a 30 minutos. Assim, assinala a alternativa errada.
0	PB29; PB39; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PB36; QA30; RB06; RB08; RB26; RB30; RB34	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Esse item II da tarefa 2 apresentou mais estratégias diferentes se comparado com o Item I da mesma tarefa. Há algo nesse contexto que oportunizou uma diversidade maior de estratégias a serem traçadas na resolução da tarefa proposta.

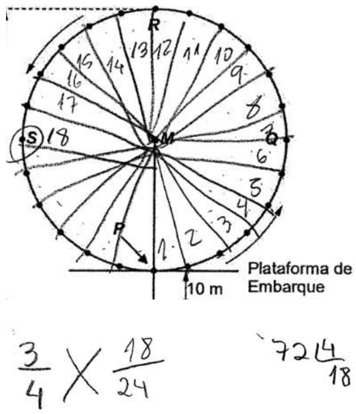
Figura 20 - Produção escrita do estudante PB35



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento, codificado como 2.1, os estudantes associaram cada quarto de volta a 10 minutos de viagem. Assim, por se tratar de meia hora, ou seja, 30 minutos, então demorará três quartos da volta resultando no ponto S como final.

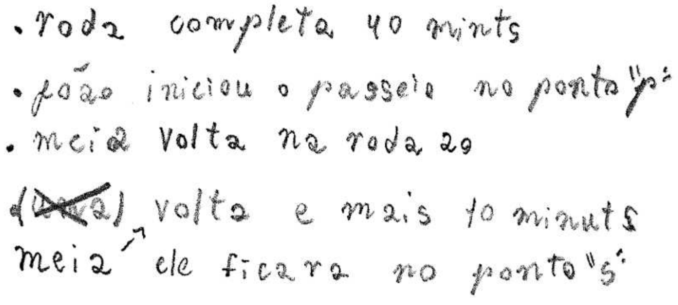
Figura 21 - Produção escrita do estudante PB28



Fonte: Autor.

O estudante PB28, agrupamento 2.3, identificou que há um total de 24 pontos igualmente espaçados entre si na imagem presente no enunciado. Além disso, identificou que $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, ou seja, reconheceu através da ideia de proporcionalidade que o ponto correspondente a três quartos da volta seria o 18º ponto que no caso trata-se do ponto S.

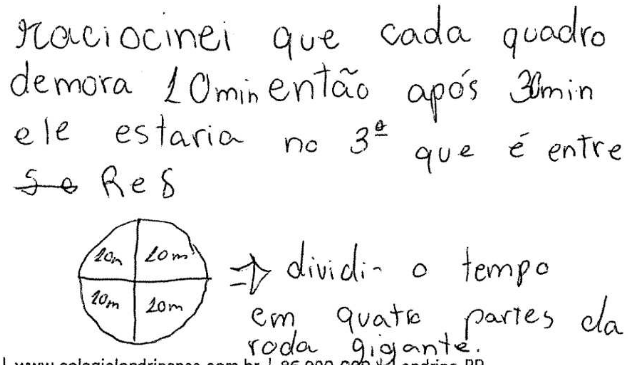
Figura 22 - Produção escrita do estudante RB20



Fonte: Autor.

O estudante RB20, agrupamento 2.4, associou 20 minutos à metade da volta, logo, 20 minutos seria no ponto R. Além disso, compreendeu que mais 10 minutos seriam metade da metade, ou seja, mais um quarto, chegando assim no ponto final S.

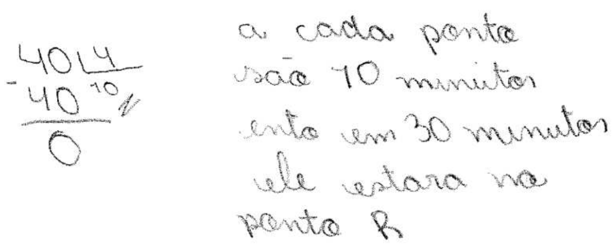
Figura 23 - Produção escrita do estudante QA24



Fonte: Autor.

No primeiro agrupamento parcialmente correto, o equívoco encontra-se ao fato do estudante associar o tempo de passeio a um setor circular inteiro e não ao ponto específico onde termina esse setor circular. Assim, o estudante compreende que cada quarto de volta demora 10 minutos. Contudo, interpreta de forma errada a posição final do passeio, respondendo algum lugar entre os pontos R e S.

Figura 24 - Produção escrita do estudante QA03



Fonte: Autor.

O estudante do agrupamento 1.2, reconhece que cada ponto nomeado da roda-gigante será equivalente a 10 minutos do passeio. Contudo, ele considera o ponto inicial P como sendo 10 minutos, assim o ponto Q equivalente há 20 minutos e o ponto R há 30 minutos. O erro consiste em ter começado a contar a partir de 10 e não de 0. O ponto inicial P representa 0 minutos do passeio, pois ele é o ponto de partida.

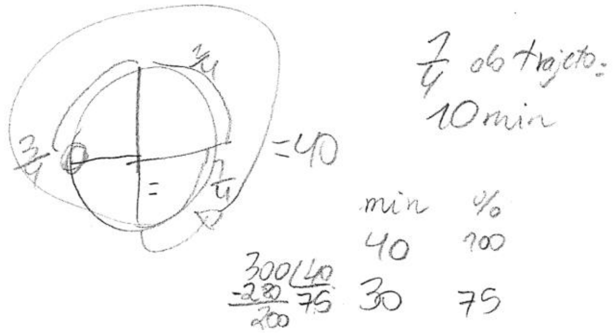
4.4.6 Prova B – Tarefa 2 – Item II

Quadro 31 - Prova B tarefa 2 item II

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2.1	PA01; PA02; PA03; PA05; PA08; PA09; PA10; PA11; PA12; PA13; PA14; PA18; PB22; PB24; PB25; PB27; PB30; QA03; QA06; QA09; QA18; QA20; QA24; QA31; QA35; RB02; RB06; RB07; RB14; RB19; RB20; RB21; RB27; RB28; RB37; RB40	Identifica que de um ponto nomeado a outro ponto nomeado demora 10 minutos. Logo, sendo 30 minutos, então o terceiro ponto nomeado será o final. Assim, a resposta é a letra S.
2.2	PB28; PB36	Identifica que o ponto S na imagem corresponde ao 18º ponto de um total de 24 pontos para uma volta completa. Assim, identificou que a proporcionalidade $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ chegando à conclusão de que o ponto que João encontrava-se era o ponto S.
1.1	PB35; RB11	Interpreta que os intervalos de $\frac{1}{4}$ correspondiam há 10 minutos. Assim, ele respondeu que seria algum ponto entre os pontos R e S considerando que o intervalo inteiro correspondia há 10 minutos.
1.2	RB30; RB35	Identifica que cada ponto nomeado corresponde há 10 minutos da volta. Contudo, acaba respondendo algum ponto entre os pontos S e P.
0	PB29; PB39; QA04; RB08; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA06; QA30; RB26; RB34	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

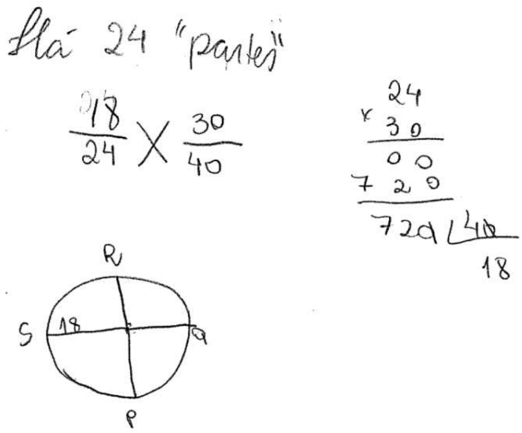
Figura 25 - Produção escrita do estudante RB06



Fonte: Autor.

O agrupamento 2.1 contém as produções que identificam que cada quarto da volta equivale há 10 minutos. Assim, por tratar-se de meia hora, 30 minutos, então seria três quartos da volta total, ou seja, seria o terceiro ponto nomeado de um total de quatro pontos. Portanto, o ponto final é o ponto S.

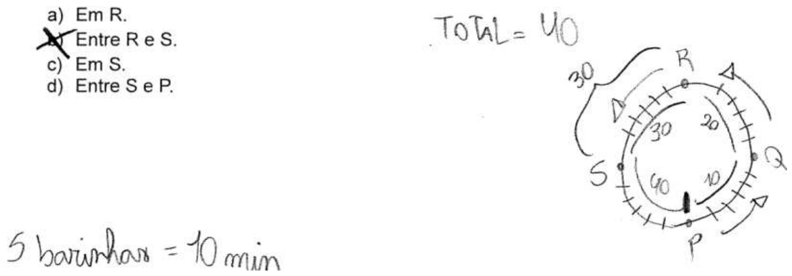
Figura 26 - Produção escrita do estudante PB28



Fonte: Autor.

O agrupamento codificado como 2.2 apresentou a mesma estratégia que o agrupamento 2.4 do item anterior. Reconheceu que $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ chegando à resposta final o ponto S.

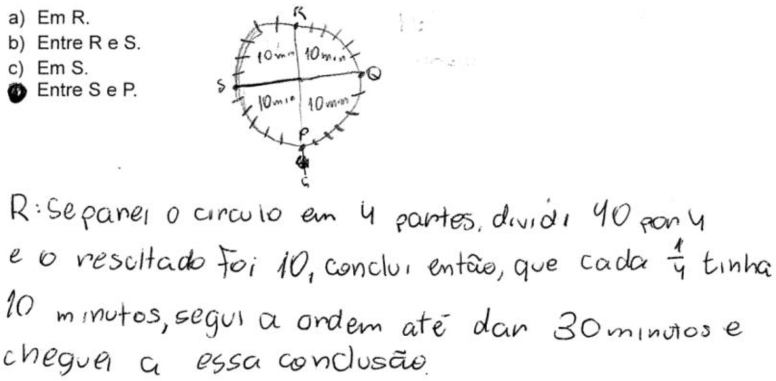
Figura 27 - Produção escrita do estudante PB35



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.1, as produções escritas que associam o tempo de 10 minutos ao setor circular e não ao ponto nomeado. Assim, apresentam a resposta como sendo algum ponto entre R e S como se estivesse considerando o setor circular inteiro como 30 minutos.

Figura 28 - Produção escrita do estudante RB30



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.2, os estudantes identificaram que cada quarto da circunferência correspondia a um quarto. Contudo, assim como os estudantes do agrupamento anterior, consideraram que 10 minutos correspondiam ao setor circular inteiro e não apenas aos pontos nomeados. Assim, apresentam como resposta algum ponto entre S e P por interpretar o conceito de 30 minutos por excesso.

4.4.7 Prova A – Tarefa 3

Quadro 32 - Prova A tarefa 3

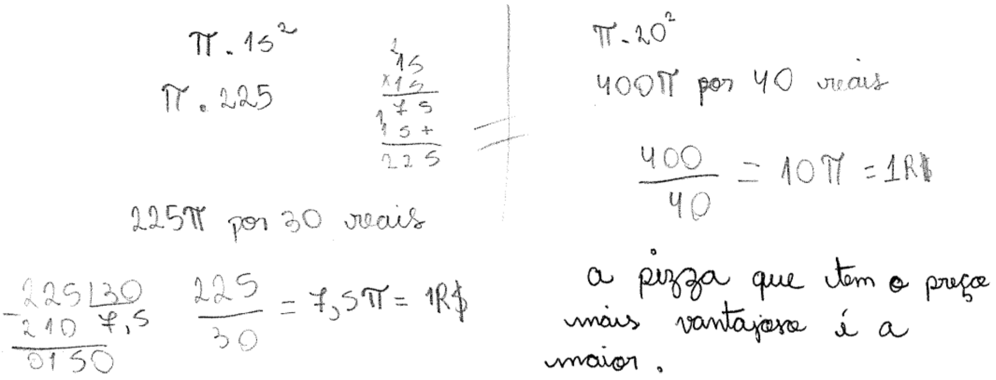
Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição

2.1	PA10; PA14; PA18; RB19; RB41	Identificou que seria necessário calcular a área do círculo e em seguida calcular a razão. No cálculo da razão o estudante optou por dividir a área pelo preço, ou seja, cm²/R$. Interpretou a razão corretamente identificando que quanto maior a razão, mais cm² cada real está comprando.
2.2	PA03	Identificou que seria necessário calcular a área do círculo e em seguida calcular a razão. No cálculo da razão o estudante optou por dividir o preço pela área, ou seja, R$/cm². Interpretou a razão corretamente identificando que quanto menor a razão, mais barato está cada centímetro quadrado.
1.1	PA02; PA11; PB27; PB28; PB39; RB06; RB08	Reconheceu que para resolver a tarefa proposta era necessário o cálculo da área da pizza. Mas, no momento do cálculo da área do círculo o estudante cometeu erros de cálculo não calculando a razão.
1.2	QA18; RB07; RB30; RB34	Identificou a necessidade de calcular a área da pizza e calculou corretamente, mas, não identificou a necessidade de calcular a razão.
1.3	PA01; PA09; PB22; QA06; QA35; RB37; RB40	Calculou apenas a área da pizza, sem calcular a razão. Mas, de alguma forma, o estudante percebeu uma noção de proporção de modo que uma área é quase o dobro sem o preço ser o dobro. Assim, o estudante concluiu que a pizza de R$ 40,00 é a mais vantajosa.
1.4	PB24; QA03; QA31	Identificou que seria necessário calcular a área do círculo e em seguida calcular a razão. No cálculo da razão o estudante optou por dividir a área pelo preço, ou seja, cm²/R$. Contudo, no momento da interpretação da razão, o estudante interpretou incorretamente a razão e conclui que a menor razão é a melhor.
0	PA 05; PA06; PA08; PA12; PA13; PB25; PB29; PB30; PB35; PB36; QA04; QA09; QA20; QA24; QA30; RB02; RB11; RB14; RB20; RB21; RB26; RB27; RB28; RB35	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Essa tarefa sugere determinar qual perspectiva, do comprador ou do vendedor, será considerada como mais vantajosa. Lembrando que a pizza mais barata é mais vantajosa ao consumidor, enquanto a pizza mais cara é mais vantajosa ao vendedor. Portanto, qual pizza será mais vantajosa depende de qual ponto de vista se está analisando. Porém, apesar de abrir margem para duas possibilidades, todas as resoluções corretas com o código 2 resolveram pela perspectiva do consumidor, ou seja, consideraram a pizza mais barata como a mais vantajosa.

Figura 29 - Produção escrita do estudante PA14



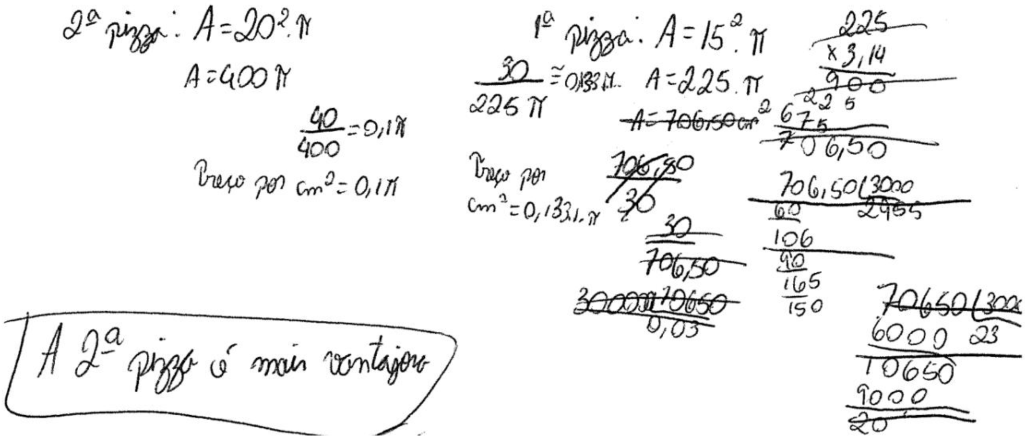
Fonte: Autor.

O agrupamento 2.1 tem como característica comum, as produções escritas nas quais se calcula a razão centímetro quadrados por reais ($cm^2/R\$$). Os estudantes desse agrupamento calcularam a área corretamente e dividiram a área pelo valor em reais, obtendo assim a razão final. Eles interpretaram corretamente a razão, pois dessa maneira quanto maior o valor mais centímetros quadrados estão sendo comprados com cada real, sendo assim a maior razão a mais vantajosa.

A notação para a razão que o estudante utilizou não é a convencional $10\pi/R\$$. Contudo, ele escreveu $10\pi = 1\ R\$$ que pode ser interpretada como o preço de $10\pi\ cm^2$ ser igual a 1 real. Não é a escrita convencional, mas comunica a ideia de cada real estar comprando $10\pi\ cm^2$ de pizza.

Alguns estudantes das produções escritas desse agrupamento optaram por substituir o número π pela aproximação 3,14, outros estudantes optaram por deixar o número irracional como na figura anterior.

Figura 30 - Produção escrita do estudante PA03

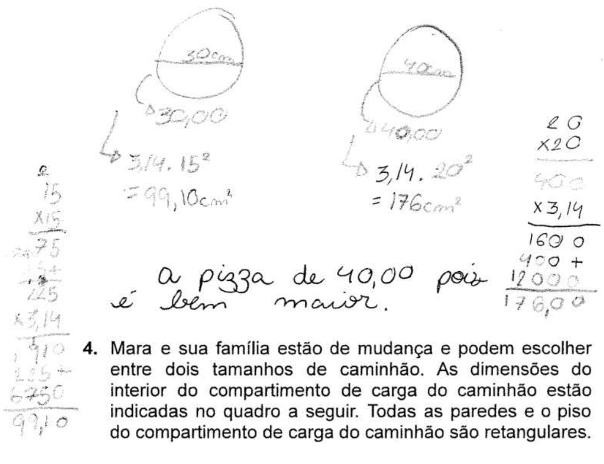


Fonte: Autor.

O agrupamento 2.2 diferencia-se do grupo 2.1 na ordem da escolha das grandezas no momento do cálculo da razão, ou seja, esse agrupamento optou por calcular a razão $R\$/cm^2$.

Curioso que o convencional ao trabalhar com esta razão seria deixar o denominador da razão igual a 1, para comparar os valores de cada cm^2 da pizza. Contudo, o estudante PA03 não optou por simplificar a fração desta maneira. Porém, continua sendo possível a comparação mesmo sem simplificar. Dessa maneira, a interpretação correta da razão consiste no fato de que a razão da pizza de 40 centímetros de diâmetro possui um menor valor por centímetro quadrado, tornando-a assim a pizza mais barata e com consequência a mais vantajosa.

Figura 31 - Produção escrita do estudante PA02



Fonte: Autor.

Uma característica comum na maioria dos agrupamentos de código 1 é o fato de terem reconhecido a necessidade do cálculo da área do círculo. Contudo, eles não reconheceram a necessidade do cálculo da razão.

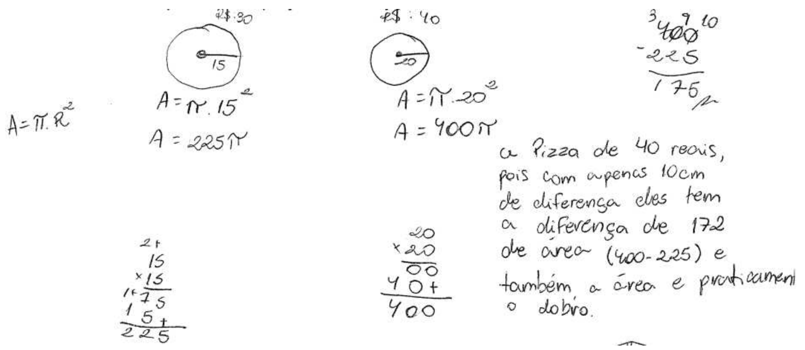
As produções escritas do agrupamento 1.1 são um caso como este, porém, cometem erros no procedimento da multiplicação durante o cálculo da área do círculo. De algum modo, sem calcular a razão, o estudante compara as duas áreas, talvez como uma ideia intuitiva de proporcionalidade, concluindo que a pizza mais vantajosa é a pizza de 40 centímetros de diâmetro.

Figura 32 - Produção escrita do estudante RB07

Fonte: Autor.

Esse agrupamento, 1.2, contém as produções escritas dos estudantes que calculam a área da pizza, mas não calculam a razão necessária para fazer a comparação. Apresentam uma resposta final correta, mas sem justificativa alguma para validar essa resposta.

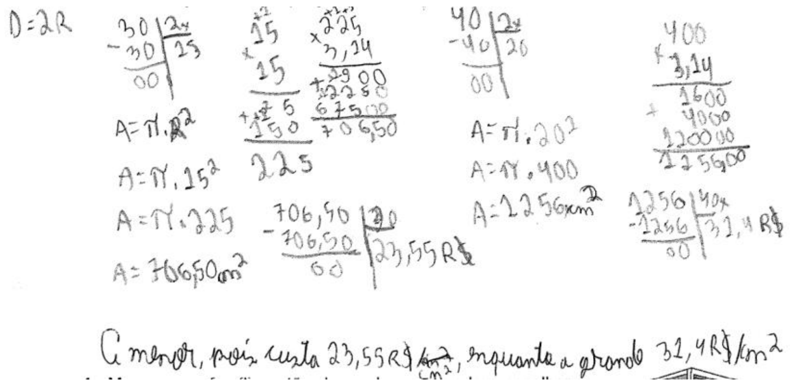
Figura 33 - Produção escrita do estudante RB40



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.3, temos as produções escritas dos estudantes que apenas calcularam a área da pizza, sem calcular a razão. Mas observaram o total da área da pizza comparada com o valor de cada uma. De uma maneira intuitiva perceberam que a área é quase o dobro, mas sem o valor ser quase o dobro também. Assim, concluíram que a pizza mais vantajosa é a de 40 centímetros de diâmetro.

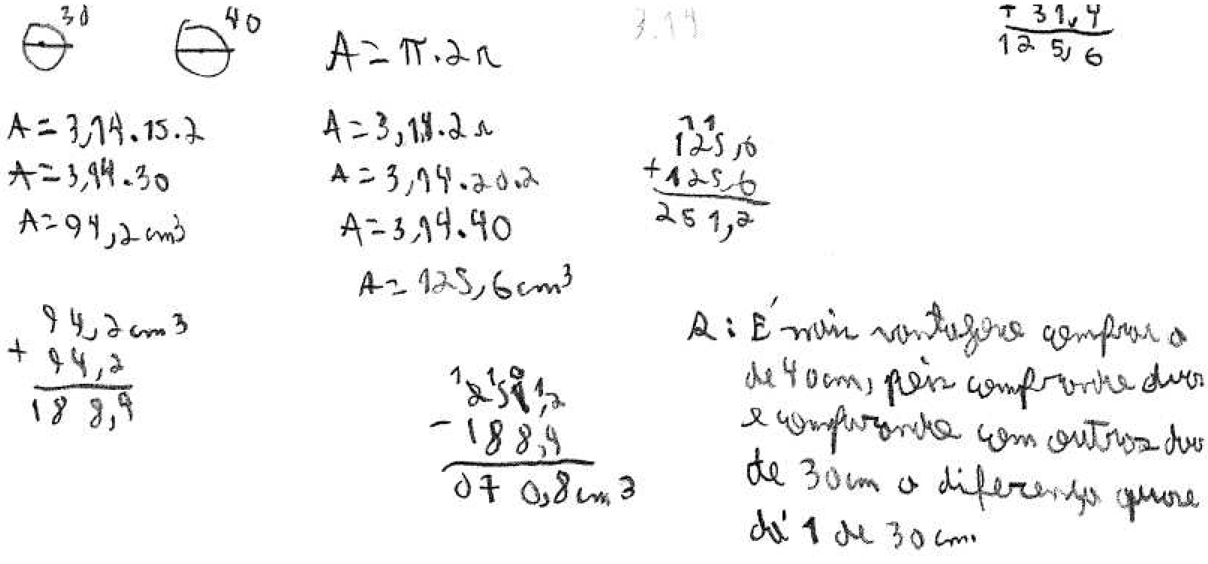
Figura 34 - Produção escrita do estudante QA31



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento, 1.4, estão as produções escritas dos estudantes que calcularam a área e a razão corretamente. Contudo, na escrita da resposta final o estudante inverte as grandezas das razões na escrita. No cálculo ele efetuou $cm^2/R\$$, mas na resposta final ele escreve $R\$/cm^2$.

Figura 35 - Produção escrita do estudante RB35



Fonte: Autor.

No agrupamento das estratégias incorretas para a resolução do problema, é possível destacarmos a produção escrita do estudante RB35 que optou pela estratégia de calcular o perímetro da pizza e não a área. Esta estratégia não resolve o problema proposto. Ele se equivocou com a escolha da fórmula a ser utilizada trocando a fórmula da área pela do perímetro.

4.4.8 Prova B – Tarefa 3

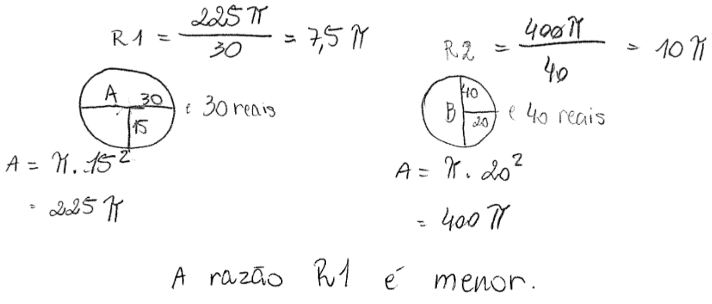
Quadro 33 - Prova B tarefa 3

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA10; PA18; PB24; RB06; RB19	Calculou a área do círculo e dividiu pelo diâmetro do círculo. Interpretou e apresentou a menor razão.
1.1	PA09; PA11; PA14; PB22; PB25; QA03; QA06; QA18; RB07; RB34; RB37; RB40; RB41	Calcula a área do círculo, mas não calcula a razão entre a área e o diâmetro do círculo.
1.2	PB28; QA24	Calculou a área do círculo. Contudo, utilizou a fórmula errada para o cálculo da área do círculo, sendo $A = \pi d^2$. Utilizou o diâmetro no cálculo da área no lugar do raio.
0	PA01; PA02; PA05; PA06; PA08; PA12; PA13; PB27; PB29; PB30; PB35; PB36; PB39; QA04; QA09; QA20; QA30; QA31; QA35; RB02; RB08; RB11; RB14; RB20; RB21; RB26; RB27; RB28; RB30; RB35	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Essa tarefa teve uma quantidade de agrupamentos menor se comparada com a tarefa 3 da prova A. O enunciado da tarefa 3 da prova A abria margem para o conceito de vantagem podendo responder qual pizza é mais vantajosa a depender do ponto de vista que se escolhe. Contudo, nessa tarefa, a parte “realística” desse enunciado foi alterada de modo a não permitir mais a margem que antes havia. Acredito que essa alteração no enunciado tenha influenciado a quantidade menor de resoluções corretas e parcialmente corretas que temos na prova B quando comparada com a prova A.

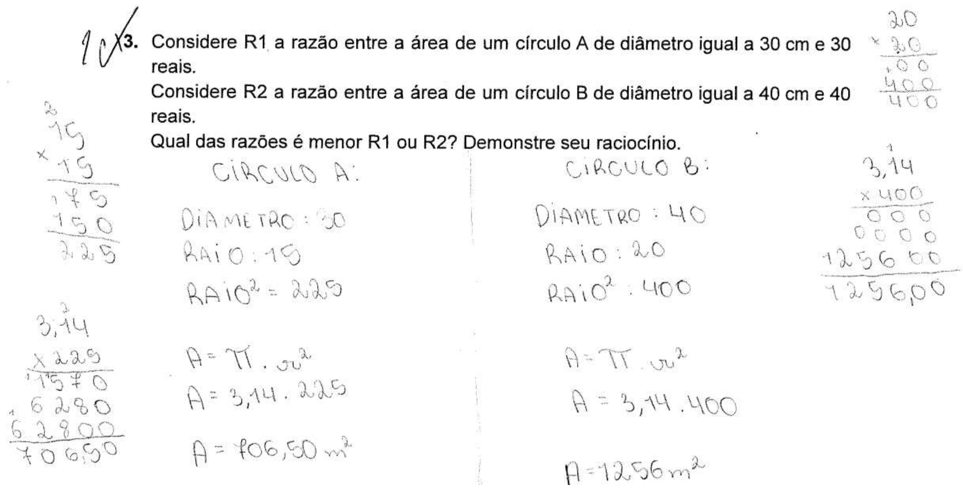
Figura 36 - Produção escrita do estudante PB24



Fonte: Autor.

O agrupamento 2 contém as produções escritas dos estudantes que se utilizaram da estratégia correta para a resolução da tarefa proposta. Consiste em calcular a área do círculo, em seguida, calcular a razão entre a área e o valor em reais.

Figura 37 - Produção escrita do estudante QA03



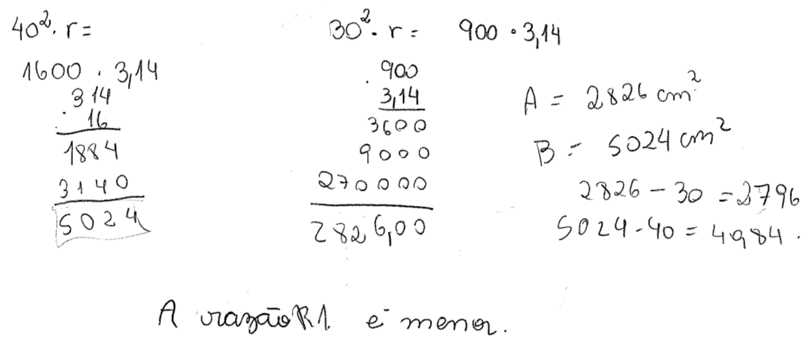
Fonte: Autor.

O primeiro agrupamento das produções escritas classificadas como parcialmente corretas, tem como característica calcular a área do círculo, mas não calcular a razão necessária que foi perguntada no enunciado.

No enunciado da tarefa 3 da prova A, não se pede explicitamente para calcular a razão como no enunciado dessa tarefa. É necessário que o estudante interprete a situação e perceba a necessidade do cálculo da razão para tornar possível a comparação de qual pizza é a mais vantajosa. Contudo, no enunciado dessa tarefa deixa-se claro o comando: **para calcular a razão**. Assim, é possível inferir que o fato de o estudante não ter calculado a razão pedida no enunciado seja por não saber calcular razão, ou por não estabelecer um significado de pensamento relacional de números abstratos.

Na tarefa 3 da prova A não podemos fazer a mesma inferência, uma vez que, naquela tarefa, o estudante pode não ter calculado a razão por não ter estabelecido a relação entre a razão e a comparação de qual pizza é mais vantajosa. Porém, aqui nessa tarefa como a razão é pedida explicitamente, infere-se que o estudante não calculou a razão por não saber fazer tal procedimento.

Figura 38 - Produção escrita do estudante PB28



Fonte: Autor.

Nesse segundo agrupamento classificado como parcialmente correto, tem-se a produção escrita do estudante que cometeu o erro de trocar o raio do círculo pelo diâmetro do círculo no procedimento do cálculo da área do círculo. A fórmula correta e esperada que se utilize consiste em $A = \pi . r^2$, mas o estudante utilizou $A = \pi . d^2$.

4.4.9 Prova A – Tarefa 4 – Item I

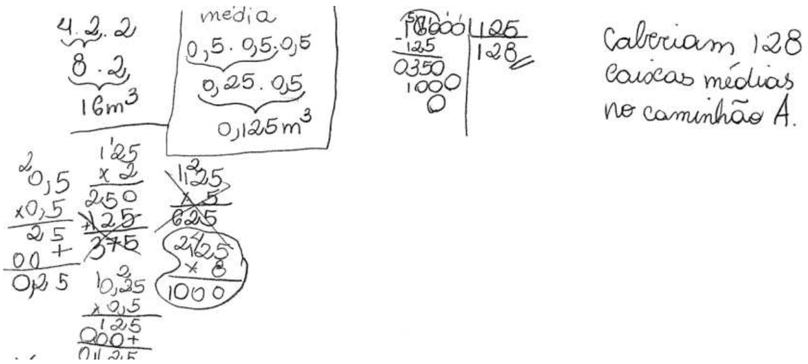
Quadro 34 - Prova A tarefa 4 item I

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2.1	PA03; PA10; PA14; PA18; PB25; PB28; PB30; QA31; RB02; RB14; RB40; RB41	Calcula o volume do caminhão e da caixa obtendo os valores 16 e 0,125, respectivamente. Em seguida, ele faz a divisão $\frac{16}{0{,}125} = 128$.
2.2	PA08	Reconhece que no comprimento de 4 metros caberá 8 caixas de 0,5 metro. Assim, reconhece que na largura e na altura de 2 metros cada, caberá 4 caixas em cada dimensão. Logo, o estudante opera $8 \times 4 \times 4 = 128$.
2.3	RB19	Calcula o volume do caminhão e da caixa obtendo os

		valores 16 e 0,125, respectivamente. Em seguida, ele calcula uma proporcionalidade. Se 1 m³ está para 8 vezes 0,125 m³. Então, $16 \times 8 = 128$.
1.1	PA01; PA09; PB22; PB24; PB27; QA03; QA09; QA24; RB07; RB30; RB34; RB37	Reconhece que há necessidade de calcular o volume do caminhão A e da caixa média. Contudo, no procedimento da multiplicação o estudante comete erros.
1.2	PA02; PB35; PB39; QA06; RB06	Reconhece que há necessidade de calcular o volume do caminhão e da caixa através da multiplicação. Porém, no passo seguinte que seria a divisão de um volume pelo outro, o estudante comete erros na operação.
1.3	QA30; RB35	Calculou o volume do caminhão obtendo 16 m³.
0	PA05; PA06; PA11; PA12; PA13; PB29; PB36; QA04; QA18; QA20; QA35; RB08; RB11; RB20; RB21; RB26; RB27; RB28	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	-	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

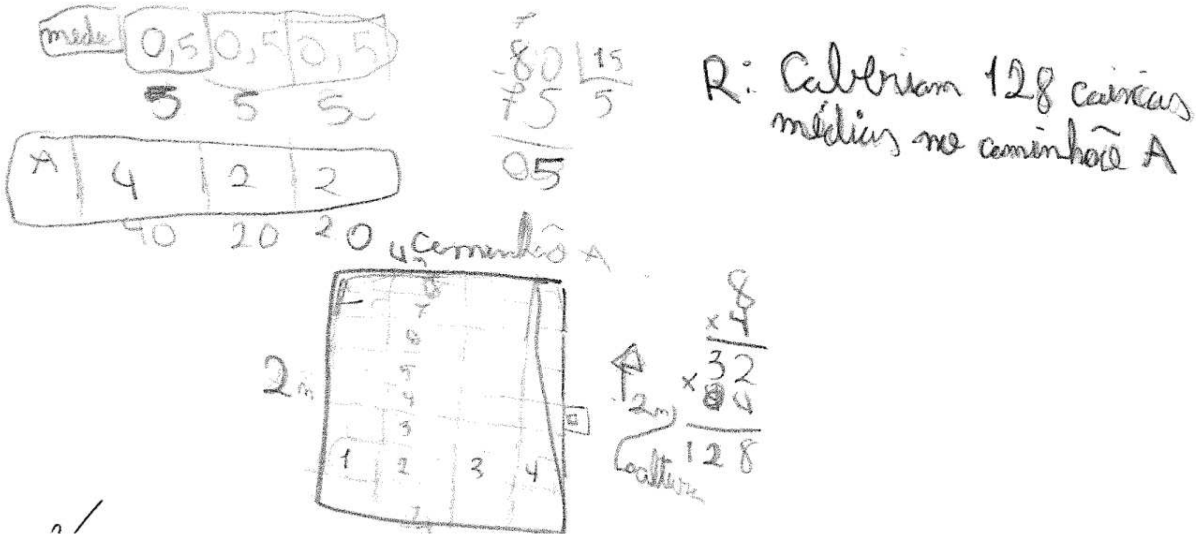
Figura 39 - Produção escrita do estudante RB41



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento 2.1 os estudantes optaram pela estratégia de calcular o volume do caminhão A e da caixa média, em seguida, dividir o volume do caminhão pelo volume da caixa. Obtendo assim a resposta de 128 caixas médias dentro do caminhão A.

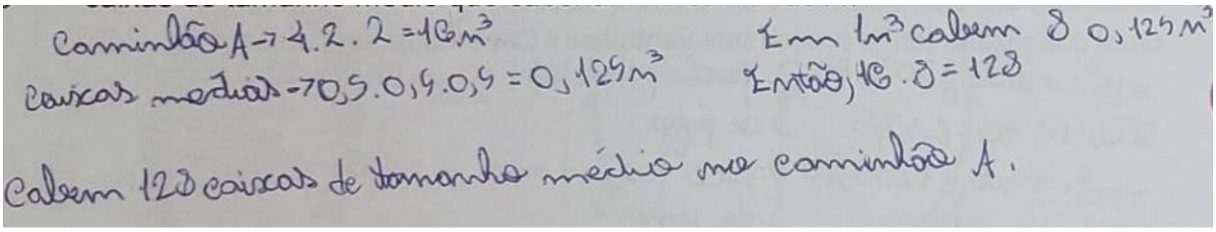
Figura 40 - Produção escrita do estudante PA08



Fonte: Autor.

O agrupamento 2.2 não calculou o volume do caminhão e da caixa assim como o agrupamento 2.1. O estudante verificou que no comprimento caberão 8 caixas, na largura caberão 4 caixas e na altura caberão 4 caixas. Assim, o estudante fez a multiplicação $8 \times 4 \times 4 = 128$. Dessa maneira ele pensou quantas caixas caberiam em cada dimensão e multiplicou esses valores.

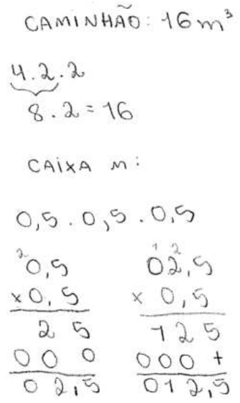
Figura 41 - Produção escrita do estudante RB19



Fonte: Autor.

A produção escrita do agrupamento 2.3 utilizou do conceito de proporcionalidade para resolver a tarefa proposta. Calculou o volume do caminhão A e da caixa média e observou que se em $1\,m^3$ cabem 8 vezes $0{,}125\,m^3$, então multiplicando por 16 descobre-se que em $16\,m^3$ cabem 128 vezes $0{,}125\,m^3$.

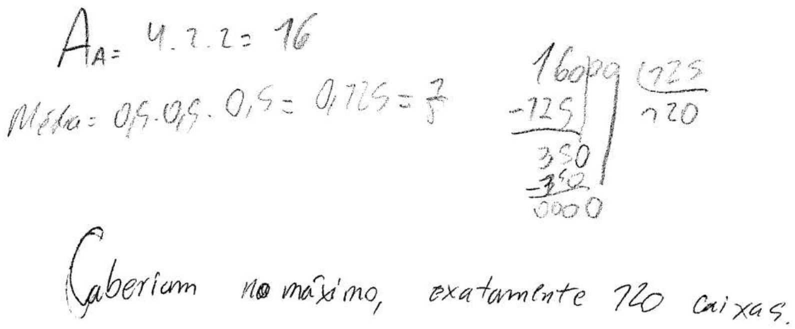
Figura 42 - Produção escrita do estudante QA03



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento 1.1, estão as produções escritas dos estudantes que adotam a estratégia de calcular o volume do caminhão A e da caixa média. Contudo, os estudantes cometem erros no procedimento da multiplicação durante o cálculo do volume. Além disso, não realizam a divisão para calcular quantas caixas cabem no caminhão.

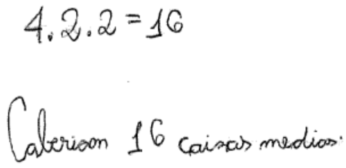
Figura 43 - Produção escrita do estudante RB06



Fonte: Autor.

No agrupamento 1.2 os estudantes calcularam o volume do caminhão A e da caixa média corretamente. Contudo, no momento de calcular a divisão entre os dois volumes para comparar quantas vezes a caixa cabe dentro do caminhão, os estudantes cometem erros no procedimento do algoritmo da divisão.

Figura 44 - Produção escrita do estudante QA30



Fonte: Autor.

As produções escritas do agrupamento 1.3 apenas calcularam o volume do caminhão A e responderam que esse valor seria o número de caixas que caberiam no caminhão.

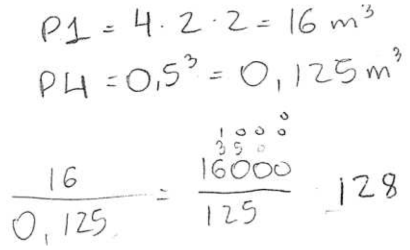
4.4.10 Prova B – Tarefa 4 – Item I

Quadro 35 - Prova B tarefa 4 item I

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2	PA03; PA09; PA10; PA14; PA18; PB28; PB30; QA18; QA31; RB06; RB19; RB41	Calcula os volumes dos paralelepípedos P1 e P4 obtendo os valores 16 e 0,125, respectivamente. Em seguida, ele faz a divisão $\frac{16}{0{,}125} = 128$.
1.1	PA01; PA02; PB24; PB27; PB35; QA03; RB02; RB07; RB14; RB34; RB35; RB37	Reconhece que há necessidade de calcular os volumes dos paralelepípedos P1 e P4. Contudo, no procedimento da multiplicação o estudante comete erros.
1.2	PB25; QA06; RB40	Reconhece que há necessidade de calcular os volumes dos paralelepípedos P1 e P4. Porém, no passo seguinte que seria a divisão de um volume pelo outro, o estudante comete erros na operação.
0	PA05; PA06; PA08; PA11; PA12; PA13; PB22; PB29; PB39; QA04; QA09; QA20; QA24; QA30; QA35; RB08; RB11; RB20; RB21; RB26; RB27; RB28; RB30	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PB36	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

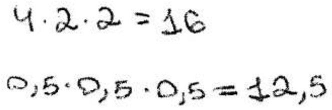
Figura 45 - Produção escrita do estudante PA18



Fonte: Autor.

Esse agrupamento 2.1 apresenta a mesma estratégia que o agrupamento 2.1 da tarefa 4 item I da prova A. O estudante calcula o volume do caminhão A e da caixa média, em seguida, faz a divisão do volume do caminhão pelo volume da caixa obtendo o resultado de 128.

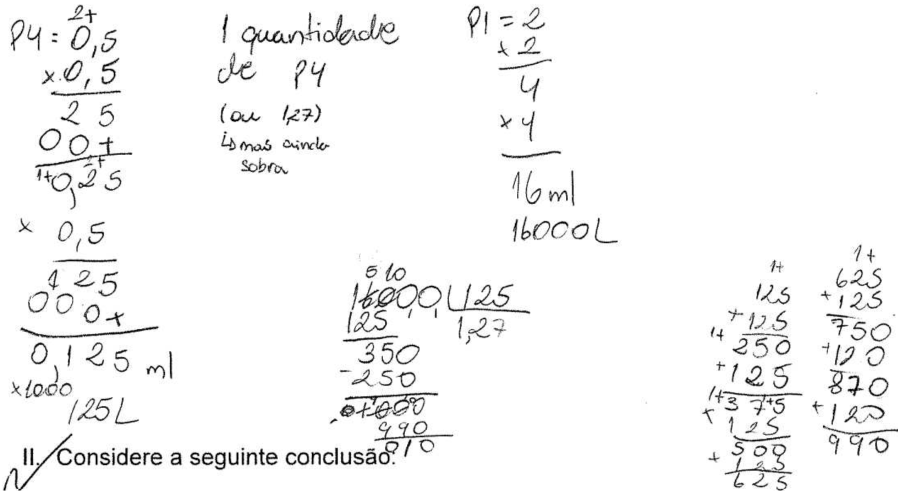
Figura 46 - Produção escrita do estudante PB27



Fonte: Autor.

No grupo 1.1 os estudantes calculam o volume do caminhão A e da caixa média, mas cometem erros na multiplicação. Contudo, não apresentam a parte seguida da resolução que consistiria na divisão do volume do caminhão pelo volume da caixa.

Figura 47 - Produção escrita do estudante RB40



Fonte: Autor.

O segundo agrupamento que contém as produções codificadas como parcialmente corretas dessa tarefa, nas quais os estudantes calcularam o volume do caminhão A e da caixa média corretamente. Porém, no procedimento da divisão os estudantes cometem erros no algoritmo e apresentam a resposta incorreta no final.

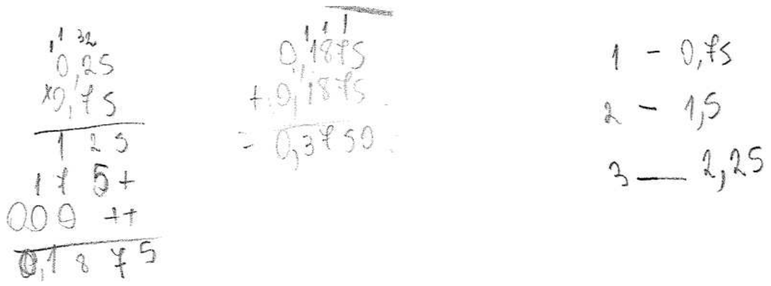
4.4.11 Prova A – Tarefa 4 – Item II

Quadro 36 - Prova A tarefa 4 item II

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA08; PA10; PA14; PB28; PB35; QA04; RB06	Verifica que nenhuma das medidas do caminhão é múltipla de 0,75 metro. Logo, não há a possibilidade da quantidade de caixas grandes que cabem no caminhão corresponder a $\frac{2}{3}$ da quantidade de caixas médias. Assim, Mara está errada.
1	PA18	Calculou a quantidade de caixas médias que cabem no caminhão. Em seguida, calculou a quantidade de caixas grandes, porém, fez esse cálculo apenas dividindo o volume do compartimento do caminhão pelo volume da caixa grande. Essa estratégia está equivocada, apesar da divisão dar um resultado mencionado. O motivo disso é que ficará um espaço vazio no caminhão se usarmos as caixas grandes e o estudante não levou isso em consideração.
0	PA01; PA02; PA13; PB22; PB24; PB29; PB30; QA06; QA09; QA18; QA20; QA24; QA31; QA35; RB02; RB07; RB11; RB19; RB26; RB27; RB30; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA05; PA06; PA09; PA11; PA12; PB25; PB27; PB36; PB39; QA03; QA30; RB08; RB14; RB20; RB21; RB28; RB34; RB35; RB37; RB40	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

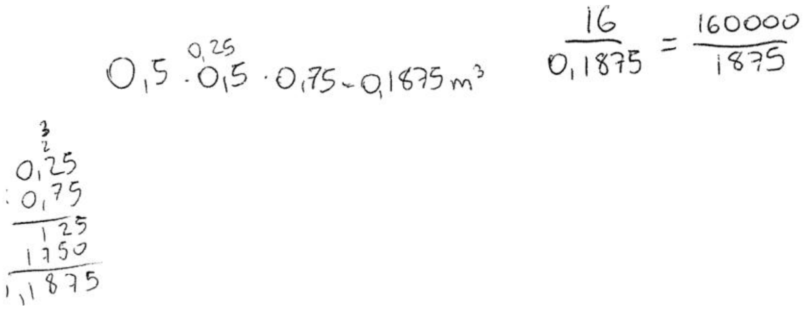
Figura 48 - Produção escrita do estudante PA14



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento das resoluções corretas os estudantes apresentam contas evidenciando que a dimensão do caminhão A não é múltipla de 0,75. No canto direito da figura acima é possível visualizar os três primeiros múltiplos de 0,75. Como 2,25 já excede os 2 metros da altura do caminhão, então as caixas grandes não preencherão totalmente o espaço dentro do caminhão A.

Figura 49 - Produção escrita do estudante PA18



Fonte: Autor.

A produção escrita PA18, parcialmente correta, revela que o estudante calculou o volume do caminhão A e da caixa grande, em seguida, dividiu o volume do caminhão pelo volume da caixa. O estudante utilizou a mesma estratégia que no item anterior. Porém, essa estratégia funcionava no item anterior porque as dimensões do caminhão A e da caixa média são múltiplas uma da outra, ou seja, não deixará espaços vazios dentro do caminhão. Contudo, isso não ocorreu no item II, pois as dimensões do caminhão A e da caixa grande não são todas múltiplas umas das outras. O estudante desconsiderou que na dimensão da altura ficará um espaço vazio de 50 centímetros e por isso não poderia simplesmente dividir os dois volumes.

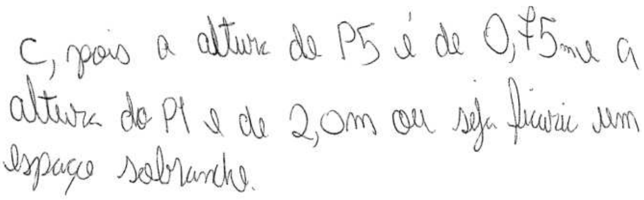
4.4.12 Prova B – Tarefa 4 – Item II

Quadro 37 - Prova B tarefa 4 item II

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2	PA01; PA08; PA10; PB24; PB35; QA18; RB06; RB08; RB21; RB40	Verifica que nenhuma das medidas do paralelepípedo P1 são múltiplas de 0,75 metro. Logo, não há a possibilidade de que a quantidade de paralelepípedos P5 que cabem em P1 corresponde a $\frac{2}{3}$ da quantidade que cabe de P4. Assim, a conclusão está errada.
1	-	-
0	PA03; PA09; PA11; PA18; PB22; PB28; PB29; PB30; PB39; QA09; QA20; QA24; QA30; QA31; QA35; RB02; RB19; RB27; RB30; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA02; PA05; PA06; PA12; PA13; PA14; PB25; PB27; PB36; QA03; QA04; QA06; RB07; RB11; RB14; RB20; RB26; RB28; RB34; RB35; RB37	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Figura 50 - Produção escrita do estudante PA08



Fonte: Autor.

Os estudantes desse agrupamento 2 verificaram que as dimensões da altura dos paralelepípedos P1 e P5 não são múltiplos e por isso ficará um "espaço sobrando".

Diferentemente do item II da tarefa 4 da Prova A, neste item da prova B não houve uma única resolução classificada como parcialmente correta.

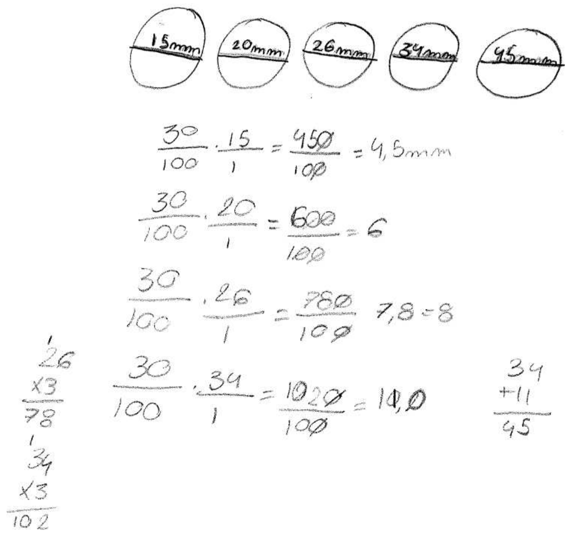
4.4.13 Prova A – Tarefa 5

Quadro 38 - Prova A tarefa 5

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2.1	PA02; PA18	Calculou porcentagem utilizando a estratégia de multiplicação de frações. Por exemplo, $15 \times \frac{30}{100} = 4{,}5$. Logo em seguida, acrescentou o valor equivalente a 30% com o valor inicial e arredondou para cima obtendo a resposta correta para cada uma das moedas.
2.2	PB28	Calculou porcentagem através da proporcionalidade utilizando a regra de três como ferramenta.
2.3	PA09; PA13; PA14; PB22; QA31; RB06; RB19	Calculou porcentagem através da multiplicação da porcentagem na sua forma decimal. Exemplo, $15 \times 1{,}3 = 19{,}5$. Em seguida, o estudante arredondou o valor para cima. Respondeu corretamente a medida de cada moeda.
2.4	PB30; QA35	Calculou 10% do diâmetro da moeda, em seguida, multiplicou por 3 para obter o valor de 30%. Assim, acrescentou o valor de 30% ao valor inicial e arredondou para cima corretamente obtendo todas as respostas corretas.
1.1	PA03; PB35	Calculou as porcentagens através da regra de três. Contudo, cometeu erro na hora de arredondar e com isso obteve resultados errados.
1.2	PA11	Calculou corretamente as porcentagens necessárias. Contudo, não apresentou todas: faltaram algumas porcentagens de algumas moedas.
0	PA05; PA06; PA08; PA10; PA12; PB24; PB25; PB27; PB29; PB36; PB39; QA04; QA06; QA18; QA20; QA30; RB02; RB07; RB08; RB21; RB26; RB27; RB30; RB34; RB35; RB37; RB40; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA01; QA03; QA09; QA24; RB11; RB14; RB20; RB28	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

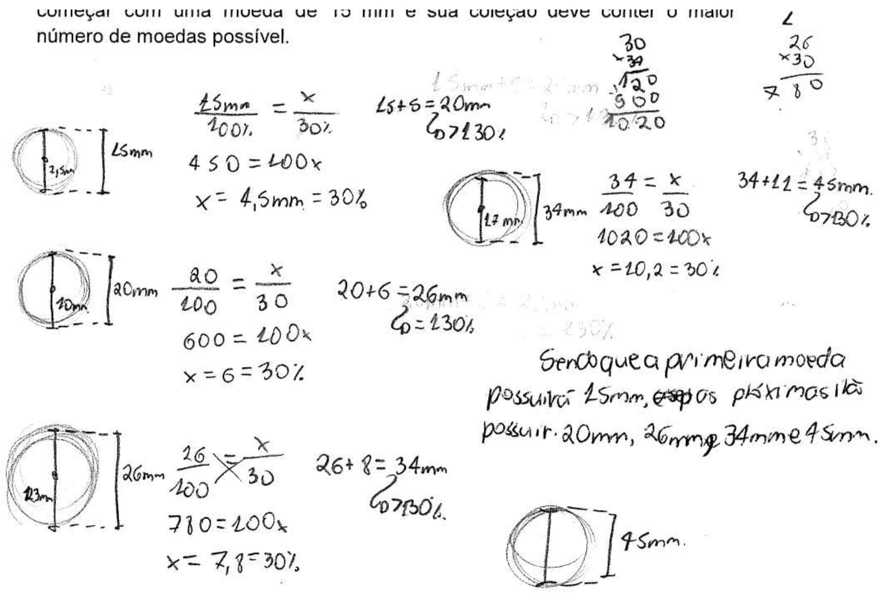
Figura 51 - Produção escrita do estudante PA02



Fonte: Autor.

No agrupamento 2.1 os estudantes calcularam a porcentagem multiplicando por seu valor na representação fracionária, após isso adicionaram os 30% ao valor inicial. Quando necessário, arredondaram o valor por excesso para que não ficasse com um número decimal no valor do diâmetro.

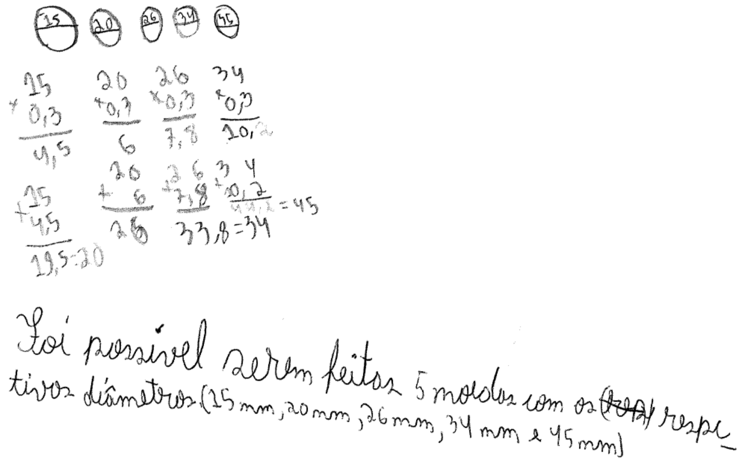
Figura 52 - Produção escrita do estudante PB28



Fonte: Autor.

No agrupamento 2.2 a estratégia utilizada para o cálculo da porcentagem foi o uso da proporcionalidade. Dessa maneira, os valores foram calculados através da regra de três simples e quando necessário foram arredondados por excesso.

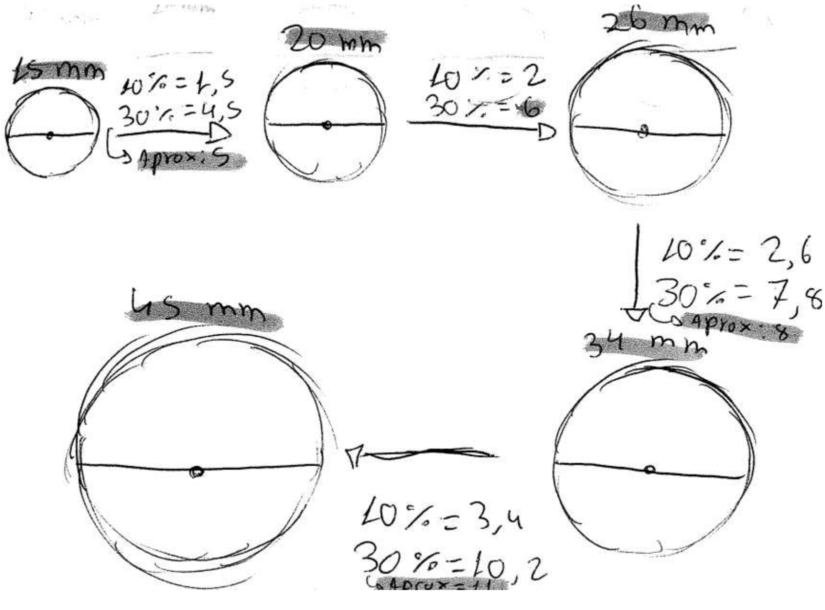
Figura 53 - Produção escrita do estudante QA31



Fonte: Autor.

Há a estratégia do cálculo da porcentagem através da multiplicação na representação decimal como característica do agrupamento 2.3. O estudante multiplicou por 0,3 e adicionou o resultado ao valor inicial e, quando necessário, arredondou por excesso.

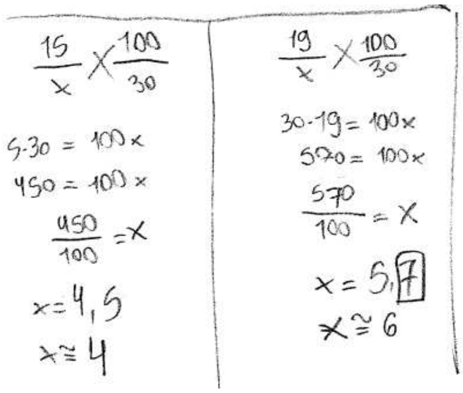
Figura 54 - Produção escrita do estudante PB30



Fonte: Autor.

No agrupamento 2.4, o estudante calculou 10% e multiplicou por 3 para obter o valor de 30%, adicionou ao valor e arredondou por excesso quando necessário.

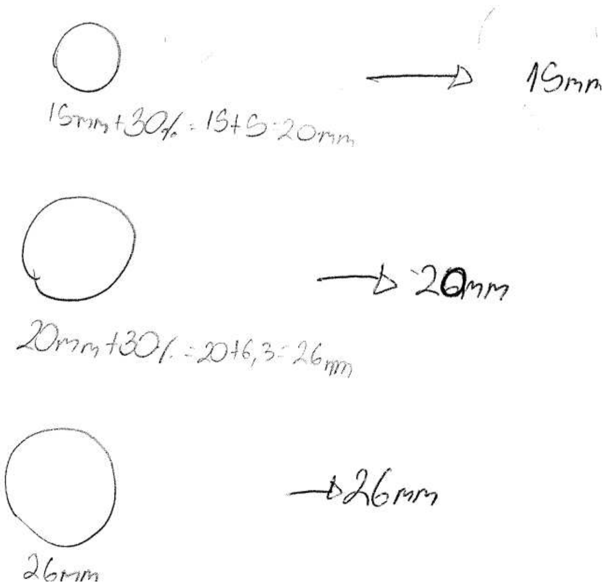
Figura 55 - Produção escrita do estudante PB35



Fonte: Autor.

Nesse primeiro agrupamento classificado como parcialmente correto, as produções escritas apresentam o erro no momento de arredondar. Os estudantes calculam as porcentagens através da regra de três. Eles demonstraram compreender que o diâmetro da moeda não pode ser um valor decimal. Contudo, caso arredonde por falta o valor será menor que 30% nessa tarefa, é necessário que o arredondamento seja feito por excesso. Os estudantes arredondaram corretamente algumas vezes, mas equivocaram-se em outras.

Figura 56 - Produção escrita do estudante PA11



Fonte: Autor.

Nesse segundo agrupamento classificado como parcialmente correto, a produção escrita do estudante PA11 apresenta o cálculo apenas das três primeiras moedas. Infelizmente, ele não apresentou nenhuma produção escrita além da que está presente na figura anterior.

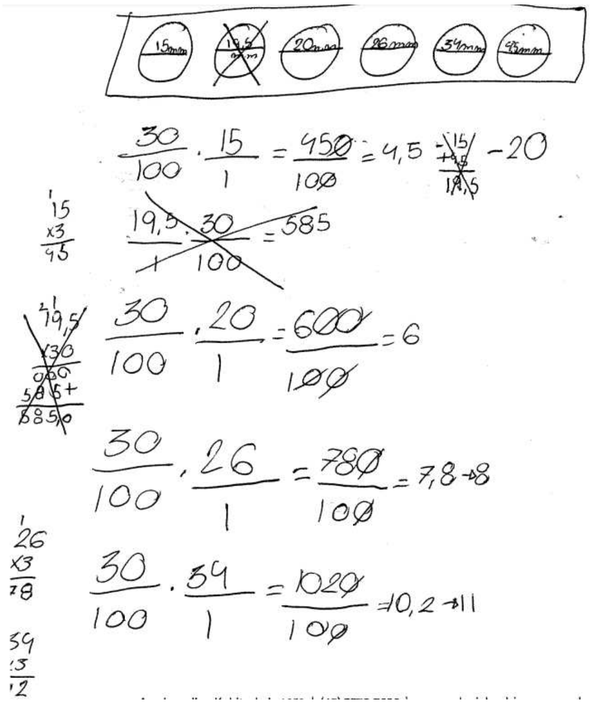
4.4.14 Prova B – Tarefa 5

Quadro 39 - Prova B tarefa 5

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2.1	PA02; PA10; PA18; RB06	Calculou porcentagem utilizando a estratégia de multiplicação de frações. Por exemplo, $15 \times \frac{30}{100} = 4{,}5$. Logo em seguida, acrescentou o valor equivalente a 30% com o valor inicial e arredondou para cima obtendo a resposta correta para cada uma das moedas.
2.2	PA03; PA09; PA13; PA14; PB30; RB19	Apresenta a escrita do valor de 30% da quantidade. Por exemplo, $30\%\ de\ 15 = 4{,}5$. Dessa forma, adicionava os 30% e arredondava para cima o valor obtido.
2.3	PB28	Calculou porcentagem através da proporcionalidade utilizando a regra de três como ferramenta.
2.4	QA31	Calculou porcentagem através da multiplicação da porcentagem na sua forma decimal. Exemplo, $15 \times 1{,}3 = 19{,}5$. Em seguida, o estudante arredondou o valor para cima. Respondeu corretamente a medida de cada moeda.
1	-	-
0	PA01; PA05; PA06; PA08; PA11; PA12; PB22; PB24; PB25; PB27; PB29; PB35; PB36; PB39; QA04; QA06; QA09; QA18; QA20; QA24; QA30; QA35; RB07; RB08; RB21; RB26; RB27; RB30; RB34; RB35; RB37; RB40; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	QA03; RB02; RB11; RB14; RB20; RB28	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Figura 57 - Produção escrita do estudante PA02



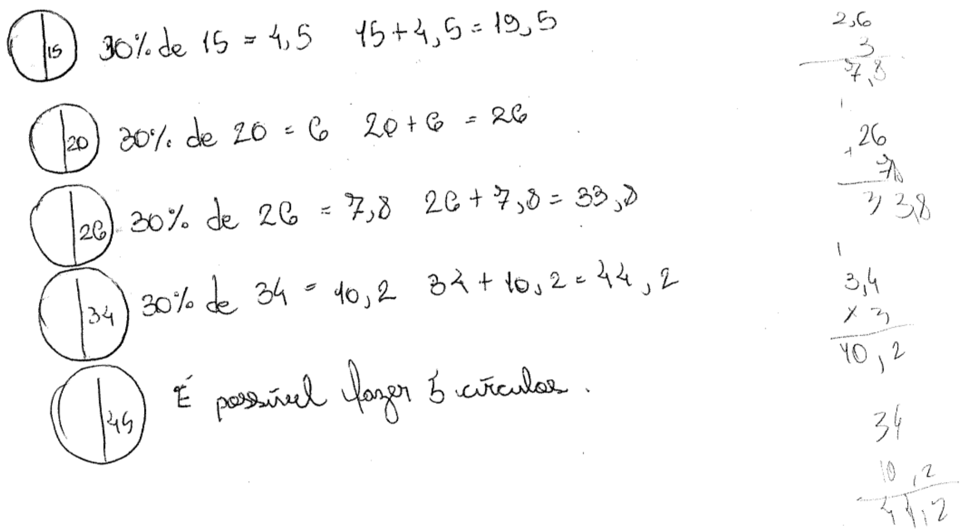
Fonte: Autor.

O primeiro agrupamento, 2.1, contêm as produções escritas dos estudantes que resolveram o problema corretamente e, para o cálculo da porcentagem, utilizaram a estratégia de multiplicar pela porcentagem na representação fracionária.

Algo interessante de se observar na produção escrita da figura anterior são as notações que o estudante rasurou. Assim, é possível percebermos alguns equívocos que o estudante cometeu durante a resolução, mas logo em seguida o estudante faz a correção. Por exemplo, ele chega a escrever que o segundo diâmetro seria de 19,5, mas por algum motivo percebe que isso contraria as regras estabelecidas no enunciado da tarefa e faz a correção para 20.

Uma hipótese que pode ser levantada para esse caso específico é a ordem das provas que este estudante realizou. Pelo código sabemos que o estudante realizou a prova A primeiro, logo, essa produção escrita ocorreu depois de ter resolvido a tarefa 5 da prova A. Portanto, é possível que o estudante tenha se lembrado da regra de não poder ter valores decimais para o diâmetro do círculo e assim ter feito a correção em seguida.

Figura 58 - Produção escrita do estudante RB19

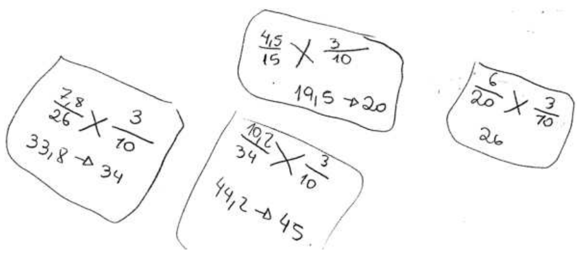


Fonte: Autor.

No agrupamento 2.2, estão as produções escritas dos estudantes que apresentam a escrita do valor de 30% de cada diâmetro e em seguida apresentam a soma do valor do diâmetro mais 30% do seu valor.

Nessa produção escrita da figura anterior, nem todos os cálculos necessários para a resolução do problema proposto foram apresentados. Contudo, dentre aqueles que foram apresentados, é possível inferirmos a estratégia que o estudante escolheu. Primeiro, é feito um cálculo de 10% do valor, possivelmente foi um cálculo mental por não apresentar os cálculos necessários e por se tratar de valores fáceis de serem calculados mentalmente. Segundo, o estudante multiplica o valor de 10% por 3 para obter o equivalente a 30%. Nesse procedimento os cálculos são apresentados. Contudo, os dois primeiros diâmetros sendo 15 e 20 não há cálculos registrados na resolução do estudante. Isso reforça o argumento que o estudante fez parte dos cálculos mentalmente. Pois, calcular 30% de 15 e 20 possui uma complexidade menor se comparado a calcular 30% de 26 e 34 mentalmente.

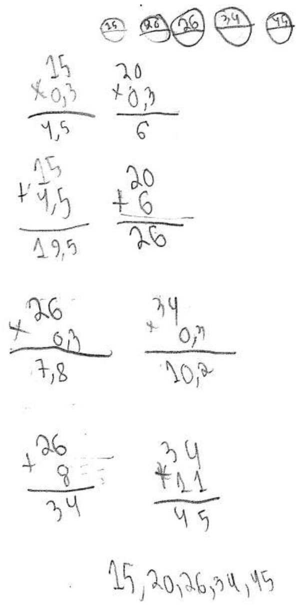
Figura 59 - Produção escrita do estudante PB28



Fonte: Autor.

Esse estudante codificado como 2.3 resolveu a tarefa utilizando a estratégia da proporcionalidade. Em seguida do cálculo da proporcionalidade, quando necessário, o estudante apresenta o arredondamento por excesso.

Figura 60 - Produção escrita do estudante QA31



Fonte: Autor.

Há o agrupamento 2.47 que contém a produção escrita do estudante QA31 que utiliza a estratégia de multiplicar a porcentagem na forma decimal para resolver a tarefa proposta. Curioso que no cálculo dos primeiros diâmetros, o estudante adiciona o valor exato obtido na multiplicação, mas a partir do diâmetro 26 o estudante já adiciona o valor arredondado por excesso resultante do cálculo da multiplicação. Ou seja, o estudante não faz $26 + 7{,}8$, ele percebe que não pode números decimais, então já adiciona 8 para não precisar arredondar depois da soma.

4.4.15 Prova A – Tarefa 6 – Item I

Quadro 40 - Prova A tarefa 6 item I

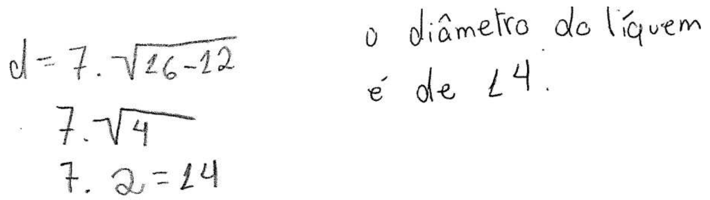
Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA05; PA10; PA11; PA14; PA18; PB24; PB28; PB35; PB36; QA06; QA31; QA35; RB02; RB06;	Substituiu a variável t por 16 e resolve a fórmula corretamente.

	RB07; RB19; RB21; RB26; RB34; RB37; RB40; RB41	
1	PA12; PB27; PB30; QA30; RB08	Identificou que poderia substituir a variável t por 16, mas ele não resolveu a fórmula corretamente.
0	PA01; PA02; PA06; PA09; PA13; PB22; PB25; PB29; QA04; QA24; RB14; RB27; RB28	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA08; PB39; QA03; QA09; QA18; QA20; RB11; RB20; RB30; RB35	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Na tarefa 6 nos itens I e II de ambas as provas, a variedade de resoluções diferentes com estratégias distintas entre si foi menor se comparado com as outras tarefas das duas provas. No item III houve uma variedade maior que nos itens I e II. Contudo, apenas no caso de produções escritas parcialmente corretas, pois na codificação correta continua sendo apenas 1 grupo.

Figura 61 - Produção escrita do estudante QA06



Fonte: Autor.

As produções escritas do agrupamento 2 substituíram a variável t por 16 e calcularam corretamente o diâmetro do líquen de 14 milímetros conforme as equações a seguir:

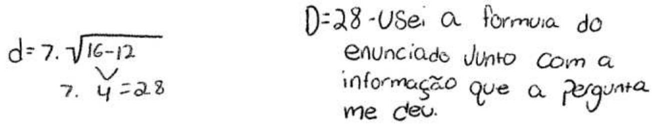
$$d = 7.\sqrt{16 - 12}$$

$$d = 7.\sqrt{4}$$

$$d = 7.2$$

$$d = 14$$

Figura 62 - Produção escrita do estudante PA12



Fonte: Autor.

As produções escritas do agrupamento classificado como parcialmente correto, tem como característica ter feito o primeiro passo certo. Os estudantes substituíram a variável t por 16. Porém, cometeram erros no processo de resolução da fórmula. Nessa produção escrita acima o estudante não calculou a raiz quadrada de 4 e consequentemente errou o valor final.

4.4.16 Prova B – Tarefa 6 – Item I

Quadro 41 - Prova B tarefa 6 item I

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA05; PA08; PA10; PA11; PA14; PA18; PB22; PB24; PB25; PB28; PB35; PB39; QA03; QA06; QA18; QA20; QA24; QA30; QA31; QA35; RB02; RB06; RB07; RB19; RB28; RB34; RB37; RB40; RB41	Substituiu a variável t por 16 e resolveu a fórmula corretamente.
1	PA02; PA09; PA12; PB27; PB36	Identificou que poderia substituir a variável t por 16, mas ele não resolveu a fórmula corretamente.
0	PA01; PA06; PA13; PB29; QA04; RB08; RB14; RB20; RB21; RB26; RB27; RB30; RB35	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PB30; QA09; RB11	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Neste item os dois agrupamentos, correto e parcialmente correto, possuem as mesmas características dos agrupamentos, 2 e 1, do item I anterior. As produções escritas da prova B não se diferenciam das produções da prova A nessa tarefa 6.

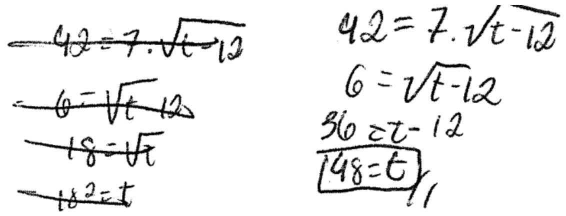
4.4.17 Prova A – Tarefa 6 – Item II

Quadro 42 - Prova A tarefa 6 item II

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA03; PA14; PB24; PB28; QA31; RB02; RB06; RB19; RB34; RB37; RB40; RB41	Substituiu a variável d por 42 e resolve a fórmula corretamente.
1	PA02; PA05; PA10; PA12; PA18; PB35; PB36; RB07; RB08; RB21	Identificou que poderia substituir a variável d por 42, mas ele não resolveu a fórmula corretamente.
0	PA01; PA06; PA09; PA11; PA13; PB22; PB25; PB27; PB29; PB39; QA04; QA35; RB14; RB26; RB27; RB30	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA08; PB30; QA03; QA06; QA09; QA18; QA20; QA24; QA30; RB11; RB20; RB28; RB35	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Figura 63 - Produção escrita do estudante PA03



Fonte: Autor.

No agrupamento das produções escritas classificadas como corretas, os estudantes substituem a variável d por 42 e calculam corretamente o tempo de 48 anos conforme as equações a seguir:

$$42 = 7.\sqrt{t-12}$$

$$\frac{42}{7} = \sqrt{t-12}$$

$$6 = \sqrt{t-12}$$

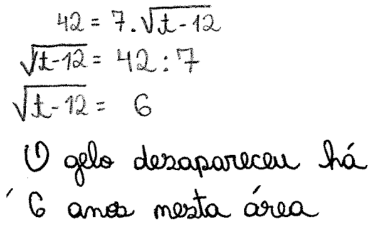
$$36 = t - 12$$

$$36 + 12 = t$$

$$t = 48$$

Na produção escrita de PA03 é possível inferir que o estudante percebe um erro do procedimento de resolução da fórmula e corrige logo ao lado. O estudante percebeu que não poderia trabalhar o “menos doze” antes de trabalhar a raiz quadrada, pois como o número se encontrava dentro da raiz era necessário primeiro resolver a raiz para depois adicionar doze de ambos os lados da igualdade. É notável o fato de o estudante corrigir esse procedimento na escrita à direita, primeiro ele eleva ambos os lados da igualdade para em seguida adicionar doze em ambos os lados da igualdade.

Figura 64 - Produção escrita do estudante RB21



Fonte: Autor.

Nesse agrupamento classificado como parcialmente correto, os estudantes substituem a variável d por 42, mas cometem erros nos procedimentos de resolução da equação. Alguns estudantes resolvem a equação até onde conseguem como na produção escrita acima, enquanto outros tentam resolver todos os passos, mas erram no processo. É possível notar uma dificuldade com a resolução da raiz quadrada nessa escrita.

4.4.18 Prova B – Tarefa 6 – Item II

Quadro 43 - Prova B tarefa 6 item II

Códigos de correção	Produções Escritas	Descrição
2	PA03; PA10; PA14; PA18; PB28; QA31; QA35; RB02; RB19; RB34; RB40	Substituiu a variável d por 42 e resolve a fórmula corretamente.
1	PA02; PA05; PA12;	Identificou que poderia substituir a variável d por 42,

	PB24; PB25; PB35; PB36; PB39; RB07; RB37; RB41	mas ele não resolveu a fórmula corretamente.
0	PA01; PA06; PA08; PA09; PA11; PA13; PB22; PB27; PB29; QA04; QA06; QA18; QA20; QA24; QA30; RB06; RB08; RB14; RB20; RB21; RB26; RB27; RB28; RB30; RB35	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PB30; QA03; QA09; RB11	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Novamente, os agrupamentos, classificados como corretos e parcialmente corretos, dessa tarefa possuem as mesmas características dos agrupamentos da tarefa 6 item II da prova A. Não há diferenciação entre as produções escritas dessa tarefa da prova A para a prova B.

4.4.19 Prova A – Tarefa 6 – Item III

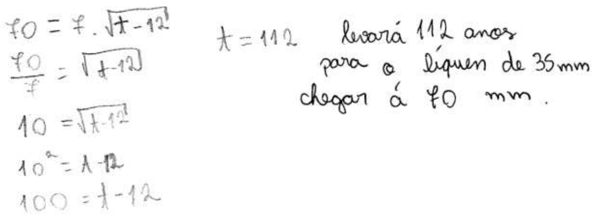
Quadro 44 - Prova A tarefa 6 item III

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	-	-
1.1	PA03; PA14; PB28; RB02; RB06; RB34	Calculou o tempo necessário para o diâmetro chegar a 70 milímetros.
1.2	PB24; QA31; RB40; RB41	Calculou o tempo necessário para o diâmetro chegar a 35 milímetros.
1.3	PA05; PA10; PA12; PB36; RB08	Identificou que poderia substituir a variável d por 35 ou 70, mas ele não resolveu a equação.
0	PA01; PA02; PA06; PA09; PA11; PA13; PB22; PB27; PB29; PB35; PB39; QA04; QA35; RB07; RB14; RB19; RB21; RB26; RB27; RB30; RB37	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PA08; PA18; PB25; PB30; QA03; QA06; QA09; QA18; QA20; QA24; QA30; RB11;	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

	RB20; RB28; RB35	

Fonte: Autor.

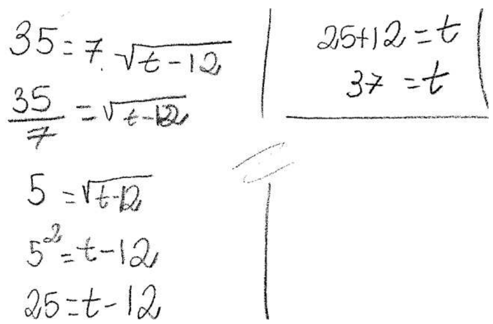
Figura 65 - Produção escrita do estudante PA14



Fonte: Autor.

No primeiro agrupamento classificado como parcialmente correto, os estudantes substituíram a variável d por 70 e encontraram que para o diâmetro do líquen chegar a 70 milímetros são necessários 112 anos. Contudo, os estudantes não calculam quanto tempo demoraria para o líquen atingir 35 milímetros de diâmetro. Assim, o erro está no fato de não considerarem o tempo para o diâmetro de 35 mm dobrar, mas considerarem o tempo total para o diâmetro atingir 70 mm desde o início.

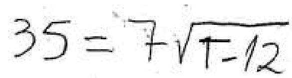
Figura 66 - Produção escrita do estudante RB41



Fonte: Autor.

Enquanto nas produções escritas do agrupamento 1.1, os estudantes calcularam o tempo para o líquen atingir 70 milímetros de diâmetro, no agrupamento 1.2 os estudantes calcularam o tempo para atingir 35 milímetros de diâmetro. Mas, novamente não apresentaram o restante da resolução esperada.

Figura 67 - Produção escrita do estudante PA05



Fonte: Autor.

Nas produções escritas do agrupamento 1.3, os estudantes substituíram na fórmula o valor da variável d por 35 ou 70 milímetros. Os estudantes apenas substituíram as variáveis sem apresentarem a resoluções que se esperava em seguida. Assim, eles apenas escreveram: $35 = 7.\sqrt{t-12}$ ou $70 = 7.\sqrt{t-12}$.

4.4.20 Prova B – Tarefa 6 – Item III

Quadro 45 - Prova B tarefa 6 item III

Códigos de correção	**Produções Escritas**	**Descrição**
2	PA10; PB28	Calculou quanto tempo demoraria para os diâmetros chegarem a 35 e 70 milímetros. Em seguida, calculam a diferença entre os dois tempos.
1.1	PA03; RB40	Calculou quanto tempo demoraria para os diâmetros chegarem a 35 e 70 milímetros. Contudo, no momento de realizar a subtração $112 - 37 = 75$, o estudante cometeu erros no algoritmo.
1.2	PA14; PA18; RB02; RB19; RB34	Calculou quanto tempo demoraria para o diâmetro chegar 70 milímetros.
1.3	PB27; PB36; QA35	Identificou que poderia substituir a variável d por 35, mas ele não resolveu a equação.
0	PA01; PA02; PA05; PA06; PA08; PA09; PA11; PA12; PA13; PB22; PB24; PB25; PB29; PB35; PB39; QA04; QA06; QA20; QA30; QA31; RB06; RB07; RB08; RB14; RB21; RB26; RB27; RB30; RB35; RB37; RB41	Utiliza uma estratégia incorreta para a resolução da tarefa.
9	PB30; QA03; QA09; QA18; QA24; RB11; RB20; RB28	Não resolve a tarefa deixando-a em branco.

Fonte: Autor.

Figura 68 - Produção escrita do estudante PA10

$70 = 7 . \sqrt{t-12}$ $\quad 35 = 7 . \sqrt{t-12}$

$\frac{70}{7} = 10 = \sqrt{t-12}$ $\quad \frac{35}{7} = 5 = \sqrt{t-12}$

$t = 100 + 12$ $\quad t = 12 + 5^2 = 12 + 25 =$

$t = 112$ $\quad 37$

$112 - 37 = \boxed{75}$

Fonte: Autor.

Nesse agrupamento das resoluções corretas, os dois estudantes calcularam o tempo para os líquens crescerem até os diâmetros de 35 e 70 milímetros. Em seguida, calcularam a diferença de tempo subtraindo 112 por 37 obtendo a resposta final de 75 anos.

Figura 69 - Produção escrita do estudante PA03

$35 = 7 . \sqrt{t-12}$ $\quad 70 = 7 . \sqrt{t-12}$

$5 = \sqrt{t-12}$ $\quad 10 = \sqrt{t-12}$

$\cancel{25 = \sqrt{t}}$ $\quad 100 = t - 12$

$25 = t - 12$ $\quad 112 = t$

$37 = t$

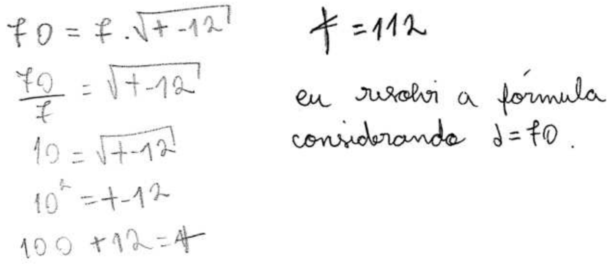
$$\begin{array}{r} 112 \\ -37 \\ \hline 85 \end{array}$$

R: A variação foi de 85 anos.

Fonte: Autor.

Os estudantes do agrupamento 1.1 fizeram a mesma estratégia que os estudantes do agrupamento 2. Contudo, no último procedimento que envolvia a subtração para calcular a diferença, os estudantes cometeram um erro no cálculo.

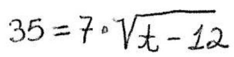
Figura 70 - Produção escrita do estudante PA14



Fonte: Autor.

Os estudantes do agrupamento 1.2 calcularam quanto tempo demoraria para que o diâmetro do líquen chegue a 70 milímetros de diâmetro. Contudo, não calculou quanto tempo demoraria para chegar a 35 milímetros de diâmetro e não calculou a diferença entre esses dois tempos.

Figura 71 - Produção escrita do estudante PB27



Fonte: Autor.

Os estudantes do agrupamento 1.3 apenas substituíram a variável d por 35 sem continuar os cálculos necessários em sequência.

4.5. COMPARATIVO DAS CREDITAÇÕES POR TAREFAS DAS PROVAS A E B

A seguir são apresentados alguns quadros que visam ilustrar quantas produções escritas foram classificadas como corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco em cada uma das tarefas das provas A e B.

Quadro 46 - Índices por creditação da tarefa 1

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	22	18
Parcialmente corretas	24	26
Estratégias que não resolviam o problema	5	7

Em branco	0	0

Fonte: Autor.

Quadro 47 - Índices por creditação da tarefa 2 item I

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	37	44
Parcialmente corretas	11	5
Estratégias que não resolviam o problema	3	2
Em branco	0	0

Fonte: Autor.

Quadro 48 - Índices por creditação da tarefa 2 item II

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	37	38
Parcialmente corretas	4	4
Estratégias que não resolviam o problema	3	5
Em branco	7	4

Fonte: Autor.

Quadro 49 - Índices por creditação da tarefa 3

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	6	6
Parcialmente corretas	22	15
Estratégias que não resolviam o problema	23	30
Em branco	0	0

Fonte: Autor.

Quadro 50 - Índices por creditação da tarefa 4 item I

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	14	12
Parcialmente corretas	19	15

Estratégias que não resolviam o problema	18	23
Em branco	0	1

Fonte: Autor.

Quadro 51 - Índices por creditação da tarefa 4 item II

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	8	10
Parcialmente corretas	1	0
Estratégias que não resolviam o problema	22	20
Em branco	20	21

Fonte: Autor.

Quadro 52 - Índices por creditação da tarefa 5

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	12	12
Parcialmente corretas	3	0
Estratégias que não resolviam o problema	28	33
Em branco	8	6

Fonte: Autor.

Quadro 53 - Índices por creditação da tarefa 6 item I

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	23	30
Parcialmente corretas	5	5
Estratégias que não resolviam o problema	13	13
Em branco	10	3

Fonte: Autor.

Quadro 54 - Índices por creditação da tarefa 6 item II

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**

Corretas	12	11
Parcialmente corretas	10	11
Estratégias que não resolviam o problema	16	25
Em branco	13	4

Fonte: Autor.

Quadro 55 - Índices por creditação da tarefa 6 item III

Quantidade de produções	**Prova A**	**Prova B**
Corretas	0	2
Parcialmente corretas	15	10
Estratégias que não resolviam o problema	21	31
Em branco	15	8

Fonte: Autor.

4.6. ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES NAS PROVAS A E B

Será feita uma análise questão por questão apontando a diferença numérica na quantidade de creditações de cada grupo (correta, parcialmente correta, incorreta e em branco) e discorrendo a respeito dos fatores podem ter influenciado essa diferença desde a elaboração do enunciado dos itens até a realidade da Educação Básica no setor privado.

4.6.1 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 1

A quantidade de produções escritas classificadas como parcialmente corretas, incorretas e em branco não possui muita diferença nesta tarefa. A maior diferença se encontra no agrupamento das produções escritas classificadas como corretas quando comparadas as provas A e B.

O enunciado da tarefa 1 da prova A possui um elemento realístico em seu contexto. Quando vamos a uma loja de materiais de construção para comprar tijolos, não é possível comprar uma quantidade fracionada de um tijolo, ou seja, ou compramos um tijolo inteiro ou não compramos.

A resposta esperada para essa tarefa é o número decimal de 1275,75 tijolos. Como mencionado, não há a possibilidade da compra de 0,75 tijolo. Assim, é necessário arredondar essa quantia por excesso para o próximo número inteiro que será 1276 tijolos.

Contudo, o enunciado da tarefa 1 da prova B não possui esse mesmo elemento realístico, pois, quando se trata de uma unidade de medida de área, pode-se utilizar números decimais sem que haja o mesmo problema encontrado na tarefa 1 da prova A. Como o enunciado diz que serão necessárias 81 unidades por metro quadrado, nada impede de ter 1275,75 unidades necessárias para cobrir a área de um retângulo, conforme o que é pedido no enunciado da tarefa.

Esse fator realístico do enunciado da tarefa 1 da prova A pode ter ajudado na interpretação do problema a ser resolvido por parte dos estudantes, uma vez que é de fácil compreensão o conceito de ser necessário se utilizar 81 tijolos por metro quadro quando se está cobrindo uma superfície de um pátio. Esse conceito é concreto e palpável.

Contudo, o conceito de uma unidade de medida genérica como 81 unidades por metro quadrado, é um conceito mais abstrato, logo, por demandar certo nível de abstração, naturalmente se torna mais complexa a compreensão pelos estudantes.

Essa diferença nos dois enunciados pode ter gerado uma maior taxa de acerto na tarefa 1 da prova A quando comparado com a tarefa 1 da prova B.

Contudo, nas duas provas o desempenho é considerado muito bom.

4.6.2 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 2

Esta tarefa possui dois itens, porém, o segundo item não apresenta uma diferença significativa entre as quantidades de creditações da prova A e prova B. Portanto, a análise irá se concentrar no item I da tarefa 2 das provas A e B.

A principal diferença entre a quantidade de creditação nesse item I da tarefa 2 se comparadas às provas A e B se encontra na classificação parcialmente correta. No item I da tarefa 2 da prova A há uma quantidade maior de estudantes que confundiu o diâmetro da roda gigante. Os erros das classificações parcialmente corretas podem ser resumidos no valor que foi considerado o diâmetro e a relação dos 10 metros da plataforma. Em resumo, ou o estudante considerou o diâmetro como 150 metros, quando na realidade eram 140 metros, ou o estudante esqueceu que havia a necessidade de adicionar os 10 metros da plataforma para a resolução do problema proposto.

No item I da tarefa 2 da prova A, há duas imagens para serem analisadas e interpretadas. Esperava-se que o estudante interpretasse as duas imagens para compreender onde se encontra o leito do rio. No item I da tarefa 2 da prova B não possui duas imagens, mas apenas uma. Sendo que na imagem que há apenas na tarefa da prova A não consta a informação de 10 metros de altura da plataforma. Existe a possibilidade de a imagem presente apenas na tarefa da prova A ter atrapalhado a interpretação dos estudantes por não possuir essa informação dos 10 metros de altura da plataforma. Assim, a interpretação da prova B é um pouco mais simples de ser feita, há menos informações e não há a necessidade de relacionar as duas imagens distintas.

Os estudantes podem ter se confundido com a interpretação das duas imagens e consequentemente considerado 150 metros como o diâmetro da roda gigante inteira.

4.6.3 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 3

Nessa tarefa a diferença se encontra nas quantidades de creditações parcialmente corretas e incorretas. A diferença entre as duas creditações é de 7 unidades, ou seja, na tarefa 3 da prova A tiveram 7 estudantes que ao invés de apresentarem uma resolução incorreta, apresentaram uma resolução parcialmente correta quando comparado com a tarefa 3 da prova B.

Desta maneira, há algo que permitiu que os estudantes tentassem mais estratégias diversas na tarefa da prova A do que da prova B. Podem-se apontar as instruções do enunciado como um fator que tenha ocasionado uma maior variedade de produções escritas classificadas como parcialmente corretas.

No enunciado da tarefa 3 da prova B as instruções são mais objetivas e direcionam o trabalho do estudante. No enunciado traz explícita a necessidade do cálculo das razões, área por preço, e a comparação entre essas razões. Contudo, no enunciado da tarefa 3 da prova A não há instruções tão objetivas assim como na prova B. Na prova A o enunciado deixa o estudante mais livre para produzir diferentes tipos de raciocínio sem necessariamente prendê-los ao cálculo da razão área/preço.

Portanto, o enunciado da prova A permite ao estudante mais possibilidades de raciocínio e estratégias diferentes a serem escolhidas e traçadas.

Essa liberdade de escolha presente no enunciado da prova A pode ter ocasionado uma maior quantidade de produções escritas classificadas como parcialmente corretas. Em contrapartida, o enunciado presente na prova B direciona bem o trabalho do estudante não lhe permitindo outro raciocínio além daquele demandado no enunciado da tarefa.

O enunciado da tarefa 3 da prova A foi classificado como “situação-problema” de acordo com as classificações de Butts (1997). Assim, de acordo com o autor:

> uma situação que faz com que os estudantes pensem e reflitam a respeito. Nessas situações uma das etapas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) a situação, cuja solução é necessária (Butts, 1997, p.36)

Nesse caso o estudante precisa descobrir como comparar os valores das duas pizzas para encontrar uma métrica que permita comparar qual pizza será a mais vantajosa. Dessa maneira, o estudante necessita identificar qual ferramenta matemática pode ser utilizada para a comparação dos preços para a tomada de decisão de qual pizza será mais vantajosa. Nessa tarefa o estudante deve pensar e refletir para identificar quais recursos matemáticos serão necessários serem utilizados para a resolução do problema. Enquanto no enunciado da tarefa 3 da prova B, o cálculo da razão área/preço já é induzido no próprio enunciado. Reforçando assim, o argumento que na prova A o estudante possui mais liberdade para tomada de decisão no processo de resolução do problema o que ocasiona uma maior taxa de creditações parcialmente corretas, ou seja, permitiu mais estratégias distintas para a resolução da mesma tarefa.

4.6.4 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 4

Essa tarefa possui dois itens. No primeiro item a diferença entre as creditações (corretas, parcialmente corretas, estratégias que não resolvem o problema e em branco) das provas A e B é maior que a diferença no segundo item. Por este motivo, a análise será feita referente ao item I da tarefa 4 das provas A e B.

Nessa tarefa, de modo geral, a quantidade de resoluções corretas e em branco são muito semelhantes nas provas A e B. A diferença é mais acentuada nas creditações parcialmente correta e estratégias que não resolveriam o problema.

Quando comparamos esses dois agrupamentos, das produções parcialmente corretas e estratégias que não resolviam o problema, é possível notar que na prova A houve um maior número de resoluções parcialmente corretas. Enquanto na prova B houve um maior número de resoluções com estratégias que não resolveriam o problema. Portanto, é possível afirmar que nesse item I da tarefa 4 os estudantes tiveram um melhor desempenho na prova A se comparado com a prova B.

Na prova A o enunciado dessa tarefa aborda o contexto de mudança e a contratação de um caminhão para a prestação do serviço. Nessa tarefa acontece algo semelhante com o enunciado da tarefa 1. Utiliza-se de um elemento realístico para a abordagem do conceito de volume.

No enunciado da tarefa 4 da prova A, a pergunta a ser respondida é quantas vezes uma determinada caixa cabe dentro de um determinado caminhão. A imagem presente apenas na tarefa 4 da prova A colabora para a compreensão desse conceito e para a imaginação da situação real, uma vez que retrata duas pessoas colocando caixas de mesma medida dentro de um caminhão. Esse contexto realístico é possível de ser compreendido e imaginado por um estudante de 8º ano. Assim, o enunciado da tarefa 4 na prova A aborda um contexto real e concreto, sendo esse, algo possível de ser compreendido ou imaginado pelo estudante.

O enunciado da tarefa 4 da prova B é composto por um contexto puramente matemático. Apresentam-se os volumes de 5 paralelepípedos e perguntando-se quantos paralelepípedos P4 caberiam em um mesmo espaço que ocupa o paralelepípedo P1.

O enunciado puramente matemático torna esse contexto abstrato, algo mais complexo de se compreender e imaginar se comparado com a situação realística da tarefa 4 da prova A. Além disso, não possui a imagem para auxiliar na abstração, visualização e na imaginação da situação proposta.

Portanto, a maneira como o enunciado da tarefa 4 da prova B foi escrito, exige do estudante um grau de abstração maior se comparado com o enunciado da tarefa 4 da prova A. Esse é um argumento que pode justificar a diferença de resultado entre as provas A e B.

4.6.5 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 5

O enunciado da tarefa 5 das provas A e B são semelhantes entre si. Na prova A é necessário que se desenhe uma coleção de moedas circulares respeitando uma determinada regra, ao passo que na prova B é necessário desenhar uma coleção de círculos respeitando as mesmas regras.

O último parágrafo do enunciado de cada uma das duas tarefas é muito semelhante quando comparados um com o outro. Em todo o parágrafo, a única diferença encontrada está na substituição da palavra “moeda” pela palavra “círculo”.

As semelhanças também se encontram nas creditações das produções escritas dessa tarefa nas provas A e B. Analisando a quantidade de creditações em cada agrupamento, é perceptível que a quantidade de creditações “corretas” são iguais nas duas provas e a diferença presente nas demais creditações é pequena.

É possível inferir que essa semelhança nas creditações das duas provas é devida à escrita similar dos enunciados, visto que ambos estabelecem o mesmo comando, havendo uma substituição da palavra “moeda” pela palavra “círculo”. Além disso, a superfície da moeda pode ser utilizada como uma representação para o conceito de círculo, ou seja, são conceitos que são próximos um do outro e isso pode ser um fator que tenha ocasionado um desempenho semelhante em ambas as provas. Nesse sentido, infere-se que a adequação do enunciado não implicou em uma mudança substancial na demanda cognitiva da tarefa ou na complexidade delas.

4.6.6 Análise do desempenho dos estudantes na tarefa 6

Essa tarefa possui três itens, os quais apresentaram as maiores diferenças entre as quantidades de creditações quando comparadas as provas A e B dentre todas as 6 tarefas. Esses itens apresentam características semelhantes em suas escritas e resultados apresentados. Por este motivo, será feita a análise dos três itens simultaneamente, sem a necessidade de distingui-los entre si.

Na prova A, o enunciado dos itens dessa tarefa demanda uma leitura e interpretação da situação proposta para a compreensão da utilidade da fórmula exposta, enquanto, no enunciado da prova B, a fórmula foi apresentada de maneira puramente matemática.

Na prova A é necessário a interpretação do enunciado para relacionar que a variável d se refere ao diâmetro do líquen, em milímetros, e que a variável t se refere ao número de anos passados após o desaparecimento das geleiras. Dessa forma, é fundamental o entendimento do enunciado para associar cada variável com a sua grandeza referente. Logo, para responder qual é o diâmetro de um líquen após 16 anos do desaparecimento das geleiras, é necessário que o estudante compreenda que, nesse caso, a variável t vale 16 e que se deseja encontrar o valor da variável d, pertinente ao diâmetro.

Enquanto isso, na prova B, não é preciso que o estudante interprete uma situação problema para relacionar qual variável se refere à determinada grandeza. Para essa resolução, presume-se que o estudante substitua o valor da variável pelo número informado no enunciado. Logo, não há a obrigatoriedade de estabelecer relações entre o texto e a fórmula apresentada. É suficiente que apenas se faça um exercício de reprodução.

A escrita do enunciado na prova B é mais objetiva indicando ao estudante qual a ação necessária a ser feita para a resolução do problema. Ao passo que a escrita do enunciado da prova A é mais aberta e interpretativa, cabendo ao estudante a interpretação do contexto e a tomada de decisão da estratégia a ser utilizada para resolver a questão proposta. Nesse sentido, apesar de contextos realísticos serem, geralmente, facilitadores para a abordagem da resolução de problemas, quando comparados os desempenhos das provas A e B, referente à tarefa 6, é perceptível que os estudantes foram melhores na prova B. No primeiro item, há 7 produções caracterizadas como corretas a mais na prova B. No segundo item, as quantidades de produções classificadas como corretas e parcialmente corretas estão muito próximas. Entretanto, nas creditações estratégias que não resolveriam o problema e em branco, há uma diferença considerável, ressaltando-se a menor quantidade de creditações em branco na prova B, ou seja, os estudantes tentaram resolver o problema de algum jeito, ainda que incorreto. No terceiro item, as únicas duas creditações corretas foram na prova B. Portanto, de modo geral, pode-se afirmar que o desempenho dos estudantes na tarefa 6 foi melhor na prova B se comparado com a prova A.

O ensino tradicional está presente na maior parte das escolas da Educação Básica brasileira. Referente à Matemática, o ensino tradicional prioriza a repetição de algoritmos e técnicas matemáticas. O conteúdo matemático é apresentado no início do período letivo juntamente com definições, propriedades, algoritmos e exercícios. A aplicação desse conteúdo para a resolução de um problema realístico é, quase sempre, feita apenas no final da abordagem do conteúdo, isso, quando é feita. Essa abordagem tradicional, que prioriza o ensino expositivo e linear costuma ser ainda mais frequente no âmbito das escolas particulares, em que se prioriza a reiteração de regras matemáticas, sem necessariamente relacionar o conteúdo com uma aplicabilidade direta na vida cotidiana, uma vez que é comum o uso de materiais apostilados tradicionais, os quais elegem técnicas algébricas e exercícios de reprodução.

Dessa maneira, a Prova B apresenta um contexto mais favorável para esse tipo de ensino no qual os estudantes estão acostumados a lidar apenas com a matemática pela matemática. Considerando-se um tipo de ensino em que o algoritmo de uma equação é priorizado, em detrimento da aplicação da equação em uma situação problema, torna-se mais prático e atingível ao estudante a substituição de variáveis em uma equação como um processo algébrico repetitivo, e quase mecânico, do que a interpretação de uma situação problema, a qual envolve a compreensão e reflexão de conceitos, variáveis e grandezas. Portanto, é possível inferir que a realidade desses estudantes, que estão familiarizados com um ensino tradicional expositivo, possa influenciar em um melhor desempenho na prova B em comparação à prova A.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral da pesquisa consistiu em analisar a produção escrita em matemática de estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental – anos finais – em duas provas escritas: uma Prova A, com tarefas de contextos realísticos, e outra Prova B, com contextos puramente matemáticos, produzidas a partir de questões do PISA.

Ao analisar as produções escritas, encontraram-se as mais diversas situações. Por exemplo, houve tarefas em que a taxa de acerto foi maior na Prova A em comparação à Prova B. Ao mesmo tempo, houve outras tarefas que apresentaram a situação inversa, assim como tarefas que apresentaram uma taxa de acerto similar em ambas as provas.

É necessário fazer uma análise que vá além de apenas verificar se a tarefa é contextualizada ou não. Um elemento que se destaca ao ser observado. A tarefa 6 que envolve um enunciado de “contexto fantasioso” possui um índice de acerto maior na Prova B em comparação à Prova A, conforme os quadros 53, 54 e 55. Essa contatação pode ser justificada devido ao tipo de enunciado presente na tarefa ter servido apenas para camuflar ou esconder um contexto puramente matemático. Para De Lange (1999, p.23) “Contextos podem estar presentes apenas para fazer olhar o problema como um problema do mundo real (contexto falso, contexto de camuflagem, contexto de “ordem zero”). Devemos ficar longe de tais usos, se possível”. O problema não está em o contexto ser fantasioso, mas, em algumas situações, em ele ser inútil para a solução do problema.

Esse tipo de problema, apresenta um contexto classificado como “ordem zero”, pois não estabelece vínculos com a realidade dos estudantes; destarte o contexto inserido não ser necessário para a compreensão do problema. O enunciado tornou-se dispensável para a sua interpretação. Ou seja, uma abordagem puramente matemática da mesma proposição matemática, por exemplo, a substituição do valor de uma variável para encontrar o valor de uma outra variável em uma fórmula como no enunciado da tarefa 6 da Prova B, oportuniza ao estudante um trabalho mais simples e objetivo.

Por este motivo, quando tarefas com contextos irrelevantes são transformadas em tarefas puramente matemáticas, a oportunidade de acerto dos estudantes pode ser aumentada, pois os poupa de lidar com informações adicionais que podem mais atrapalhar do que ajudar na solução. Isso pode ocorrer devido à realidade da Educação Básica no Brasil que privilegia um ensino tradicional focado na repetição e no treino de algoritmos algébricos. Desse modo, os estudantes estão mais acostumados com exercícios de reprodução, nos quais é necessário apenas determinar o valor da incógnita, por exemplo, sem a necessidade da interpretação do enunciado de um problema. Situação essa que ocorreu na Tarefa 6 da Prova B, em comparação à Prova A.

Portanto, quando o contexto presente no enunciado de uma tarefa cumpre apenas a função de camuflar uma operação matemática, ele não fará falta ao ser retirado, pois não é inerente à interpretação do problema, não tem utilidade.

Por outro lado, as tarefas que possuem um enunciado classificado como "Problema de contexto realista" ou "Problema de contexto real", em sua maioria, possuem uma taxa de acerto maior ou igual na Prova A, quando comparada à Prova B. A tarefa 1 é um exemplo em que o índice de acerto foi maior na proposição da Prova A em comparação à Prova B, conforme é observável no quadro 46. Nessa tarefa da prova A, se estabelece uma relação com a realidade quando se utiliza a ideia de 81 tijolos por metro quadrado. Essa diferença nos índices de acertos das Provas A e B pode ter acontecido devido à relação existente entre o enunciado do problema e a realidade ser algo palpável para os estudantes. O vínculo com a realidade traz significado para a interpretação do problema, tornando o contexto relevante.

Se, de enunciados de "camuflagem", deseja-se que se mantenha distância, então, de enunciados de problemas "realista" ou "real", deseja-se que sejam mais utilizados em sala de aula. Tarefas com estas classificações propiciam enunciados mais genuínos e possíveis de serem compreendidos e/ou imaginados por parte dos estudantes, ajudando assim, a interpretação do problema a ser resolvido.

Outro ponto a se destacar, a Prova A, no contexto desses estudantes, proporcionou uma demanda cognitiva maior para ser resolvida se comparada com a Prova B. Na Prova A, esperava-se que os estudantes se envolvessem em dois movimentos, o de matematização horizontal e de matematização vertical. Por sua vez, na Prova B, o processo de matematização vertical era quase que único. Sendo assim, mesmo que o índice de acerto esteja praticamente igual entre as duas provas, podemos afirmar que o rendimento na Prova A foi mais produtivo do que na Prova B. Isso pode ser observado pelas quantidades de estratégias diversificadas que surgiram na prova A em detrimento das que surgiram na prova B.

Portanto, é desejável que o trabalho do professor, em sala de aula, privilegie problemas que estabeleçam vínculos e laços com a realidade, evitando, assim, problemas com enunciados que apenas camuflem uma operação matemática.

As tarefas da prova A são mais favoráveis de serem utilizadas em um contexto de avaliação como oportunidade de aprendizagem, pois, os vínculos que estabelecem com a realidade podem auxiliar os estudantes na leitura e interpretação do problema proposto a ser resolvido, frequentemente, envolvem competências relacionadas à resolução de problemas, interpretação, tomada de decisões. Enquanto isso, as tarefas da prova B são mais favoráveis de serem utilizadas em um contexto de avaliação de rendimento, pois estas tarefas privilegiam a reprodução de algoritmos e técnicas algébricas, e privilegia a identificação do que, “supostamente”, o aluno tenha domínio.

Além desses aspectos abordados e trabalhados nessa pesquisa, ainda há outros fatores relacionados à contextualização ou descontextualização de problemas que possam influenciar na resolução dos estudantes. Esses aspectos podem ser objetivos de pesquisas futuras.

Este trabalho tem por finalidade fornecer recursos para professores de matemática na busca de conhecer as tarefas a serem utilizadas em sala de aula e na prática avaliativa como oportunidade de aprendizagem. Espera-se que esse trabalho possa servir de apoio aos professores para suas tomadas de decisões em seus planejamentos e práticas docentes.

6. REFERÊNCIAS

BARDIN, L. ***Análise de conteúdo***. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004. 223p.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BORASI, R. On the nature of problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 17, n. 2, p. 125- 141, 1986.

BURIASCO, R. L. C. de; SILVA, G. dos S. e. Aspectos da Educação Matemática Realística. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1–15, 2017.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: Krulik, S.; Reys, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

CLEMENTS, M. Analyzing children's errors on written mathematical tasks. **Educational Studies in Mathematics**, v. 11, n. 1, p. 1-21, 1980.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

DE LANGE, J. Assessment: no change without problems. In: ROMBERG, T.A. (Ed.). **Reform in School Mathematics**. Albany, NY: SUNY Press, 1995.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5., 2005, Portugal. **Anais**... Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

DRIJVERS, P. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. de. Educação matemática realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, 2016.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. de. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, p. 1–38, 1995.

FREUDENTHAL, H. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**, 3, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Vol. 9. University of Utrecht, 1991.

GRAVEMEIJER, K. **Creating opportunities for students to reinvent mathematics**. ICME 10, 2004.

GRAVEMEIJER, K. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), **Educação matemática**: Caminhos e encruzilhadas (pp. 83- 101). Lisboa: APM, 2005.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Tradução Júlia Lopes Ferreira e José Manuel Claúdio. 4ª edição. ed. Portugal: Porto, 1994.

HARMUCH, D. **Uma proposta de ações didáticas frente ao erro na perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2022. 136f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **Itens liberados de Matemática do PISA**. Brasília, DF: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf. Acesso em: 18 abr. 2025.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **PISA 2012: Itens liberados de Matemática**. Brasília, DF: INEP, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2012/pisa_2012_matematica_itens_liberados.pdf. Acesso em: 18 abr. 2025.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). **PISA 2022: Itens públicos de Matemática**. Brasília, DF: INEP, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/itens/2022/PISA2022_Itens_publicos_de_matematica.pdf. Acesso em: 18 abr. 2025.

INVENTAR. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

OECD. **Aprendendo para o mundo de amanhã**: primeiros resultados do PISA 2003. São Paulo: Moderna, 2005.

OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PEDROCHI JUNIOR, O. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem**: fio condutor da prática pedagógica escolar. 2018. 67 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SCHASTAI, M. B. **Tall e Educação Matemática Realística**: algumas aproximações. 2017. 179f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SILVA, G. dos S. e. **Uma configuração da reinvenção guiada.** 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

TREFFERS, A. **Three Dimensions**: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company,1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle, Australia: MERGA, 2010.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

7. APÊNDICES

7.1. APÊNDICE A - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome do (a) estudante:____

RG do estudante: ____________________

Nome do (a) responsável: ____

RG do responsável: _____________________

CPF do responsável: ____________________

Telefone: (____) _________-________

E-mail:

Tendo em vista a necessidade de coleta de informações para o desenvolvimento do projeto de dissertação a respeito de avaliação em aulas de Matemática, sob responsabilidade do Prof. Rafael Batista Gibellato, estudante do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, sob a orientação da Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira (chapa funcional 1605003, RG: 9414536-8), professora e vice-coordenadora do mesmo programa, declaro que consinto que utilizem parcial ou integralmente os registros escritos que serão recolhidos nas provas de matemática aplicadas ao estudante de minha responsabilidade no mês de novembro do ano de 2023, para fins de pesquisa, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, com a condição de que seja citado apenas como participante, garantindo o total anonimato do estudante no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, ___ /___ /_____

Nome do responsável pelo estudante:____________________________________

Ass:____

_______________________________ _______________________________

Pamela E. A. Ferreira Rafael Batista Gibellato

7.2. APÊNDICE B - PROVA A

Aluno (a): ____ Ano: 8º Turma: ____

Avaliação de Matemática Professor: Rafael Gibellato Data: ____/____/_____

Horário de início ____:____ Horário de término ____:____

Valor: 20 pontos Nota: _______

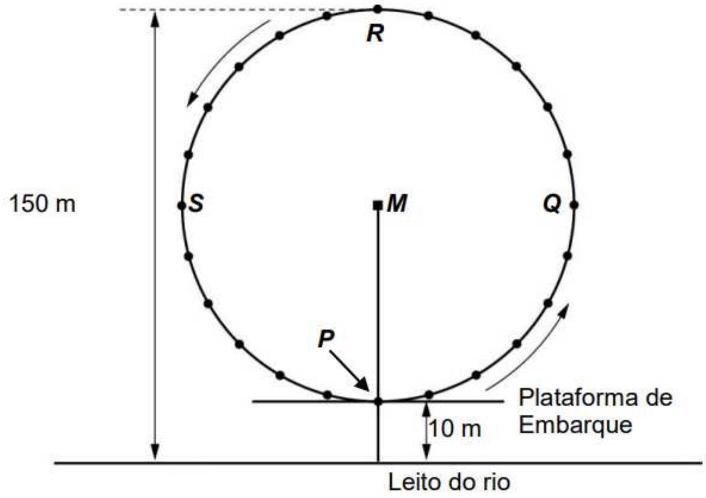
Instruções: *leia as questões com atenção antes de respondê-las. Forneça suas respostas à tinta. Lembre-se que é obrigatório apresentar os cálculos necessários para a resolução das questões. Boa prova!*

INSTRUÇÕES

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras, o que fez para resolver a questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Justifique suas respostas apresentando a forma como você pensou, inclusive nas questões de múltipla escolha.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

1. Nico quer calçar o pátio retangular de sua nova casa. O pátio tem o comprimento de 5,25 metros por 3,00 metros de largura. Ele precisa de 81 tijolos por metro quadrado. Calcule o número de tijolos que Nico necessita para todo o pátio.

2. Na margem do rio fica uma roda gigante. Veja a foto e o diagrama abaixo.



A roda gigante tem um diâmetro de 140 metros e o seu ponto mais alto está a 150 metros acima do leito do rio, em uma das margens do rio. Ela gira na direção indicada pela seta.

I. A letra *M*, no diagrama, indica o centro da roda gigante. Quantos metros (m) sobre o leito do rio está o ponto *M*?

II. A roda gigante gira em velocidade constante. A roda faz uma rotação completa em exatamente 40 minutos. João inicia o passeio na roda gigante na plataforma de embarque P. Onde João estará depois de meia hora?

a) Em R.
b) Entre R e S.
c) Em S.
d) Entre S e P.

3. Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais.
Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso? Demonstre seu raciocínio

4. Mara e sua família estão de mudança e podem escolher entre dois tamanhos de caminhão. As dimensões do interior do compartimento de carga do caminhão estão indicadas no quadro a seguir. Todas as paredes e o piso do compartimento de carga do caminhão são retangulares.

Tamanho do caminhão	Comprimento do piso	Largura do piso	Altura
A	4 metros	2 metros	2 metros
B	6,6 metros	2,3 metros	2,3 metros

Eles têm à disposição caixas de três tamanhos diferentes. As dimensões das caixas estão indicadas no quadro a seguir.

Tamanho das caixas	Comprimento	Largura	Altura
Pequeno	0,4 metro	0,3 metro	0,3 metro
Média	0,5 metro	0,5 metro	0,5 metro
Grande	0,5 metro	0,5 metro	0,75 metro

I. A família de Mara decide alugar o caminhão A. Qual é o maior número de caixas de tamanho médio que caberiam no caminhão A?

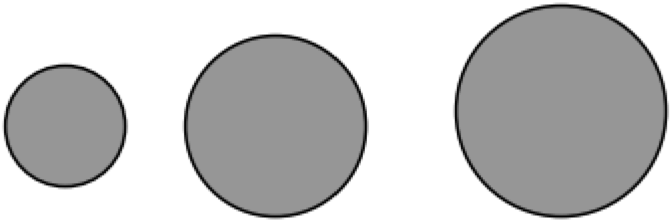
II. A empresa que aluga os caminhões confirmou que o caminhão A pode ser preenchido apenas com caixas médias para que todo o espaço do compartimento de carga seja usado.

Mara afirma que uma caixa de tamanho médio ocupa 2/3 do espaço de uma caixa grande e conclui então que o número necessário de caixas grandes para preencher o caminhão A é igual a 2/3 do número de caixas de tamanho médio.

Qual das seguintes afirmações sobre a conclusão de Mara é verdadeira?

a) Ela está correta, porque a altura de uma caixa média é 2/3 a altura de uma caixa grande.
b) Ela está correta, porque 3 caixas médias sempre cabem no mesmo espaço de 2 caixas grandes.
c) Ela não está correta, porque nenhuma das dimensões do interior do compartimento de carga do caminhão A é múltipla de 0,75, que é a altura de uma caixa grande.
d) Ela não está correta, porque a altura de uma caixa grande é 1,5 vez a altura de uma caixa média.

5. Você deve desenhar uma nova coleção de moedas. Todas as moedas devem ser redondas e prateadas, mas de diferentes diâmetros.



Pesquisadores descobriram que um sistema ideal de moedas deve atender aos seguintes requisitos:

- Os diâmetros das moedas não devem ser menores que 15 mm e nem maiores que 45 mm.
- Dada uma moeda, o diâmetro da próxima moeda deve ser pelo menos 30% maior.
- A máquina de cunhagem pode produzir apenas moedas com diâmetros que meçam um número inteiro, em milímetros (por exemplo, 17 mm é permitido, 17,3 mm não é).

Desenhe uma coleção de moedas que satisfaça os requisitos acima. Você deve começar com uma moeda de 15 mm e sua coleção deve conter o maior número de moedas possível.

6. Como resultado do aquecimento da Terra algumas geleiras estão derretendo. Doze anos depois do desaparecimento das geleiras, pequenas plantas chamadas líquens, começam a crescer nas pedras.
Cada líquen cresce em forma mais ou menos circular.
A relação entre o diâmetro deste círculo e a idade do líquen pode ser calculada, aproximadamente, através da fórmula:

$$d = 7.\sqrt{t-12} \qquad para \quad t \geq 12$$

onde *d* representa o diâmetro do líquen em milímetros, e *t* representa o número de anos passados depois do desaparecimento das geleiras.

I. Aplicando a fórmula, calcule o diâmetro do líquen 16 anos depois do derretimento do gelo.

II. Ana mediu o diâmetro de alguns líquens e encontrou 42 milímetros.
Há quantos anos o gelo desapareceu nesta área?
Mostre os seus cálculos.

III. Quantos anos levará para que o líquen que atualmente tem 35 mm de diâmetro dobre seu diâmetro?
Explique como você achou a resposta.

7.3. APÊNDICE C - PROVA B

Aluno(a): ____ Ano: 8º Turma: ____
Avaliação de Matemática Professor: Rafael Gibellato Data: ____/____/_____
Horário de início ____:____ Horário de término ____:____
Valor: 20 pontos Nota: _______

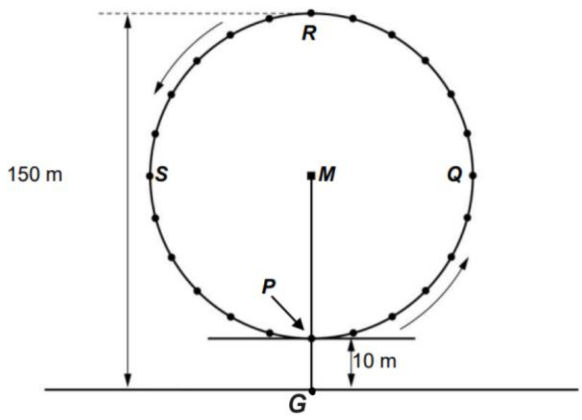
Instruções: *leia as questões com atenção antes de respondê-las. Forneça suas respostas à tinta. Lembre-se que é obrigatório apresentar os cálculos necessários para a resolução das questões. Boa prova!*

INSTRUÇÕES

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras, o que fez para resolver a questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Justifique suas respostas apresentando a forma como você pensou, inclusive nas questões de múltipla escolha.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

1. Considere a área de um retângulo com 5,25 metros de comprimento por 3,00 metros de largura. Considere também a seguinte relação: 81 unidades por metro quadrado. Calcule o número de unidades que corresponde a toda a área citada.

2. Considere o diagrama a seguir.



O círculo tem um diâmetro de 140 metros e R está a 150 metros de G.

I. A letra *M*, no diagrama, indica o centro do círculo. Quantos metros M está distante de *G*?

II. Um objeto se locomove sobre a linha circular no sentido anti-horário em velocidade constante a partir do ponto P. A rotação completa do objeto é feita em exatamente 40 minutos. Onde o objeto estará depois de meia hora?

a) Em R.
b) Entre R e S.
c) Em S.
d) Entre S e P.

3. Considere R1 a razão entre a área de um círculo A de diâmetro igual a 30 cm e 30 reais.
Considere R2 a razão entre a área de um círculo B de diâmetro igual a 40 cm e 40 reais.
Qual das razões é menor R1 ou R2? Demonstre seu raciocínio.

4. Considere o quadro a seguir para responder as questões I) e II):

Paralelepípedo	**Medida do comprimento**	**Medida da largura**	**Medida da altura**
P1	4 metros	2 metros	2 metros
P2	6,6 metros	2,3 metros	2,3 metros
P3	0,4 metro	0,3 metro	0,3 metro
P4	0,5 metro	0,5 metro	0,5 metro
P5	0,5 metro	0,5 metro	0,75 metro

I. Qual é a maior quantidade de P4 que caberia em um espaço equivalente ao que ocupa P1?

II. Considere a seguinte conclusão:

“*Um P4 ocupa 2/3* do espaço *de um P5, então a quantidade necessária de P4 para preencher um espaço equivalente a P1 é igual a 2/3 da quantidade de P5 para preencher um espaço equivalente a P1*”.

Qual das seguintes afirmações sobre a conclusão anterior é verdadeira?

a) Está correta, porque a altura de P4 é 2/3 a altura de P5.
b) Está correta, porque três unidades de P4 sempre cabem no espaço equivalente a dois de P5.
c) Não está correta, porque nenhuma das dimensões de P1 é múltipla de 0,75, que é a altura de P5.
d) Não está correta, porque a altura de P5 é 1,5 vez a altura de P4.

5. Você deve desenhar uma coleção de círculos, de diferentes diâmetros, que devem atender aos seguintes requisitos:

- Os diâmetros dos círculos não devem ser menores que 15 mm e nem maiores que 45 mm.
- Dado um círculo, o diâmetro do próximo círculo deve ser pelo menos 30% maior.
- Os círculos somente poderão ter um diâmetro de medida inteira, em milímetros (por exemplo, 17 mm é permitido, 17,3 mm não é).

Desenhe uma coleção de círculos que satisfaça os requisitos acima. Você deve começar com um círculo de 15 mm e sua coleção deve conter o maior número de círculos possível.

6. Considere a fórmula a seguir.

$$d = 7.\sqrt{t-12} \qquad para\; t \geq 12$$

a) Utilizando a fórmula, calcule o valor de d para $t = 16$.

b) Utilizando a fórmula, calcule o valor de t para $d = 42$. Mostre os seus cálculos.

c) Considere $d = 35$, para algum valor de t. Qual deve ser a variação de t, para que d dobre o seu valor. Explique como você achou a resposta.