



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

CLEITON LUIZ DE SOUZA

**SIMULAÇÃO DA EVAPORAÇÃO EM RESERVATÓRIOS  
DE HIDRELÉTRICAS:  
APLICAÇÃO EM CORTE VERTICAL À REPRESA DE ITAIPU**

CLEITON LUIZ DE SOUZA

**SIMULAÇÃO DA EVAPORAÇÃO EM RESERVATÓRIOS  
DE HIDRELÉTRICAS:  
APLICAÇÃO EM CORTE VERTICAL À REPRESA DE ITAIPU**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti.

Londrina  
2016

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

Souza, Cleiton Luiz de.

Simulação da evaporação em reservatórios de hidrelétricas: Aplicação em corte vertical à represa de Itaipu / Cleiton Luiz de Souza. – Londrina, 2016.  
89 f. : il.

Orientador: Paulo Laerte Natti.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Teses. 2. Soluções numéricas - Teses. 3. Equações de Navier-Stokes - Teses. 4. Equação da temperatura - Teses. I. Natti, Paulo Laerte. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CLEITON LUIZ DE SOUZA

**SIMULAÇÃO DA EVAPORAÇÃO EM RESERVATÓRIOS  
DE HIDRELÉTRICAS:  
APLICAÇÃO EM CORTE VERTICAL À REPRESA DE ITAIPU**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Paulo Laerte Natti  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Cosmo Damião Santiago  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná -  
UTFPR

---

Prof. Dr. Neyva Maria Lopes Romeiro  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 26 de fevereiro de 2016.

*Dedico este trabalho à minha mãe.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar força e coragem para concluir esse trabalho.

À minha mãe Clarice de Souza e às minhas irmãs Cássia Flaviane de Souza e Kátia Cristina de Souza por estarem sempre torcendo por mim durante esta caminhada.

À minha namorada Gisele Fidelis, pela compreensão, carinho e incentivo nos momentos difíceis.

Aos colegas de mestrado que fizeram parte dessa trajetória dividindo momentos de estudos, discussões e experiências, em especial ao amigo Robson Gaebler (*in memoriam*) que certamente esteve presente nessa jornada.

Aos colegas da república Lokomotiva pela hospitalidade e pelos momentos de descontração vividos na cidade de Londrina.

Ao professor Paulo Natti por ter orientado este trabalho.

Ao professor Eliandro Cirilo pelo auxílio na parte numérica deste trabalho e por ter realizado as implementações computacionais.

À banca examinadora pelas correções e sugestões oferecidas ao presente trabalho.

Aos professores do PGMAC por contribuírem com minha formação acadêmica.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*”Quando alguém permanece calmo e sereno no meio de sofrimento, quando não espera receber do mundo objetivo permanente felicidade e quando é livre de apego, medo e ódio, então ele é um homem de perfeita sabedoria.”*

***Bhagavad-Gita, Cap II, Verso 56***

SOUZA, Cleiton Luiz de. **Simulação da evaporação em reservatórios de hidrelétricas: Aplicação em corte vertical à represa de Itaipu.** 2016. 89 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo, apresentar um modelo matemático escrito no sistema de coordenadas generalizadas, para simular a dinâmica da umidade sobre o reservatório de Itaipu. Para tanto, modelou-se a dinâmica do ar e o transporte da umidade separadamente. A dinâmica do ar é modelada utilizando as equações da continuidade, Navier-Stokes e uma equação advectiva-difusiva do calor. Já a dinâmica de evaporação é descrita por uma equação de transporte advectivo-difusivo, cuja componente advectiva é obtida do modelo para a dinâmica do ar. Apresenta-se o modelo em coordenadas cartesianas e sua transformação para o sistema de coordenadas generalizadas. As equações que compoem o modelo foram discretizadas por meio do método de diferenças finitas com a aplicação do esquema *upwind* FOU (*First Order Upwind*) para os termos convectivos. Para solucionar o sistema de equações que descrevem a dinâmica do ar utiliza-se uma versão simplificada do método numérico MAC (*Marker and Cell*). Realizadas as simulações para a dinâmica de evaporação d'água, verificou-se coerência com a física do problema, contudo é necessário estudos mais avançados para a simulação de problemas reais.

**Palavras-chave:** Navier-Stokes, Modelagem Matemática, Dinâmica Atmosférica, Evaporação em Reservatórios, Mecânica dos fluidos.

SOUZA, Cleiton Luiz de. **Simulation of evaporation in hydroelectric reservoirs: Application in vertical section to Itaipu dam.** 2016. 89 folhas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## ABSTRACT

This study aims to present a mathematical model written in the generalized coordinate system to simulate the dynamics of moisture on the Itaipu reservoir. Therefore, we modeled the dynamics of air and moisture transport separately. The dynamic air was modeled using the continuity equation, the Navier-Stokes and advective-diffusive heat equation. On the other hand the dynamics of evaporation is described by a diffusive-advective transport equation which is obtained advective component model for the dynamics of air. It presents the model in cartesian coordinates and their transformation for the generalized system of coordinates. The equations that compose the model were discretized using the finite difference method with scheme application upwind FOU (First Order Upwind) for the convective terms. To solve the system of equations describing the dynamics of the air we used a simplified version of the numerical method MAC (Marker and Cell). Performed simulations for dynamic evaporation of water, consistency was found with the physics of the problem, however it is necessary advanced studies to simulate real problems.

**Keywords:** Navier-Stokes, Mathematical Modeling, Atmospheric Dynamics, Evaporation in Reservoirs, Fluid Mechanics.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Reservatórios de hidrelétricas</b>	<b>21</b>
2.1	Energia hidrelétrica . . . . .	21
2.2	Impactos ambientais causados por hidrelétricas . . . . .	23
2.3	Características do reservatório de Itaipu . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Estrutura vertical da atmosfera</b>	<b>29</b>
3.1	Camada limite atmosférica . . . . .	29
3.2	Densidade, pressão e temperatura . . . . .	30
3.3	Evaporação e formação de nuvens . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>35</b>
4.1	Modelos atmosféricos . . . . .	35
4.2	Equações governantes para a dinâmica do ar . . . . .	36
4.2.1	Equação da continuidade . . . . .	36
4.2.2	Equações de Navier-Stokes . . . . .	38
4.2.3	Forças externas . . . . .	42
4.2.4	Equação da temperatura . . . . .	43
4.3	Equação de transporte da umidade . . . . .	46
4.4	Modelagem do domínio de escoamento . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Modelo numérico</b>	<b>50</b>
5.1	Malha computacional . . . . .	50
5.2	Equações governantes em coordenadas generalizadas . . . . .	54
5.2.1	Equação da continuidade em coordenadas generalizadas . . . . .	54
5.2.2	Equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas . . . . .	56
5.2.3	Equação da temperatura em coordenadas generalizadas . . . . .	62
5.2.4	Equação do transporte da umidade em coordenadas generalizadas . . . . .	64
5.3	Discretização das equações . . . . .	64
5.3.1	Termo temporal . . . . .	65
5.3.2	Termos convectivos . . . . .	66
5.3.3	Termos de pressão . . . . .	69
5.3.4	Termos viscosos e difusivos . . . . .	71
5.3.5	Termo de empuxo . . . . .	73
5.4	Método numérico . . . . .	73

<b>6</b>	<b>Simulações numéricas</b>	<b>79</b>
6.1	Condições auxiliares . . . . .	79
6.2	Simulações numéricas . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>85</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>86</b>

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Consumo de energia elétrica <i>per capita</i> no mundo em 2007 [3]. . . . .	22
2.2	a) América do Sul, b) Fronteira entre Brasil e Paraguai, c) Reservatório de Itaipu [22]. . . . .	27
3.1	Representação da camada limite atmosférica. . . . .	29
3.2	Estrutura vertical da temperatura na atmosfera terrestre. Adaptado de [31]. . . .	31
4.1	Elemento de fluido e fluxos de massa sobre suas fronteiras. . . . .	37
4.2	Pressão e tensões na direção $x$ sobre um elemento de fluido. Adaptado de [19].	40
4.3	Força de gravidade atuante sobre um elemento de fluido atmosférico. . . . .	43
4.4	Configuração geral do domínio de escoamento sobre o reservatório. . . . .	48
4.5	Posicionamento das lâminas sobre o reservatório. . . . .	48
4.6	Dimensões e equações das lâminas de umidade 1, 2, 3 e 4. . . . .	49
5.1	Domínio físico. . . . .	51
5.2	Domínio transformado. . . . .	51
5.3	Detalhes da malha computacional. . . . .	53
5.4	Nomenclatura de discretização (esquerda) e localização das variáveis pressão $p$ , temperatura $T$ , concentração de umidade $C$ e velocidades $u$ e $w$ (direita). Adaptado de [7]. . . . .	65
6.1	Fronteiras do domínio de escoamento. . . . .	80
6.2	Malha considerada nas simulações numéricas. . . . .	81
6.3	Campo de velocidade com velocidade de injeção de 18 m/s. . . . .	82
6.4	Campo de vetores referente a velocidade do ar. . . . .	82
6.5	Campo de velocidade com velocidade de injeção de 35 m/s. . . . .	83
6.6	Campo de velocidade com velocidade de injeção de 90 m/s. . . . .	83
6.7	Campo de temperatura. . . . .	83
6.8	Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 18 m/s. . . . .	84
6.9	Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 35 m/s. . . . .	84
6.10	Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 90 m/s. . . . .	84

## LISTA DE TABELAS

2.1	As dez maiores usinas hidrelétricas em operação no Brasil. . . . .	23
2.2	Maiores áreas inundadas e potência de hidrelétricas brasileiras. . . . .	26
2.3	Principais parâmetros utilizados no modelo de evaporação. . . . .	28
3.1	Densidade, pressão e temperatura em função da altitude. . . . .	30
3.2	Densidade, pressão e temperatura adaptada à região de Itaipu. . . . .	33
3.3	Altura aproximada da base das nuvens para as regiões tropical, temperada e polar. . . . .	34

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Gradiente térmico
$c_p$	Calor específico à pressão constante.
$c_v$	Calor específico à volume constante.
$e$	Energia interna do fluido.
$g$	Aceleração da gravidade.
$h$	Altura.
$h_0$	Altura de referência.
$m$	Massa.
$p$	Pressão exercida sobre o fluido.
$t$	Tempo relativo ao sistema de coordenadas cartesianas.
$u, w$	Componentes da velocidade de escoamento do fluido nas direções $x$ e $z$ respectivamente.
$u_d$	Velocidade de escoamento difusivo.
$C$	Concentração de umidade.
$D$	Operador de derivação total.
$D_v$	Coefficiente de difusão molecular da umidade.
$E$	Energia total do fluido.
$J$	Jacobiano da transformação.
$M$	Número de Mach.
$R$	Constante dos gases ideais.
$S$	Efeitos das fontes de calor sobre a energia total do fluido.
$T$	Temperatura do fluido.
$T_0$	Temperatura de referência do fluido.
$U, W$	Componentes contravariantes do vetor velocidade.
$W$	Trabalho realizado sobre o elemento pelas forças externas de superfície.
$\mathbf{F}$	Força resultante sobre uma partícula de fluido.
$\mathbf{F}_b$	Resultante das forças externas.
$\mathbf{F}_s$	Resultante das forças de superfície.
$\mathbf{P}$	Momento linear.
$\mathbf{V}$	Vetor velocidade de escoamento.
$\alpha, \beta, \gamma$	Coefficientes de acoplamento.
$\beta^*$	Coefficiente de expansão térmica do fluido.
$\kappa$	Coefficiente de condutividade térmica.
$\lambda$	Segundo coeficiente de viscosidade do fluido.
$\mu$	Viscosidade molecular do fluido.
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido.
$\xi, \zeta$	Variáveis espaciais referentes ao sistema de coordenadas generalizadas.

$\rho$	Densidade do fluido.
$\rho_0$	Densidade de referência do fluido.
$\sigma$	Coefficiente de difusividade térmica do fluido.
$\tau$	Tempo relativo ao sistema de coordenadas generalizadas.
$\tau_{xx}, \tau_{zz}$	Tensores de tensões viscosas normais.
$\tau_{xz}, \tau_{zx}$	Tensores de tensões viscosas tangenciais.
$\Phi$	Dissipação da energia mecânica.
$\nabla$	Operador diferencial gradiente.
$\mathcal{C}(u), \mathcal{C}(w)$	Termos convectivos das equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{C}(C)$	Termo convectivo da equação de transporte da umidade em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{C}(T)$	Termo convectivo da equação de difusão e convecção da temperatura em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{P}^u, \mathcal{P}^w$	Termos de pressão das equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{V}(u), \mathcal{V}(w)$	Termos viscosos das equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{D}(C)$	Termo difusivo da equação de transporte da umidade em coordenadas generalizadas.
$\mathcal{D}(T)$	Termo difusivo da equação de difusão e convecção da temperatura em coordenadas generalizadas.

## LISTA DE ABREVIACOES

ARPS	<i>Advanced Regional Prediction System.</i>
BEN	Balanço Energético Nacional.
CECO	Condição de ejeção contínua.
CIPR	Condição de injeção prescrita.
CLA	Camada Limite Atmosférica.
CNEI	Condição de não escorregamento e impermeabilidade.
EDP	Equações Diferenciais Parciais.
FOU	<i>First Order Upwind.</i>
MAC	<i>Marker and Cell.</i>
MCG	Modelo de Circulação Global.
MCR	Modelo de Circulação Regional.
MM5	<i>Penn State Mesoscale Model.</i>
RAMS	<i>Regional Atmospheric Modeling System.</i>
WMO	<i>World Meteorological Organization.</i>
WRF	<i>Weather Research and Forecasting.</i>

## 1 INTRODUÇÃO

Estudos acerca das variações climáticas globais vem se intensificando ao longo das últimas décadas, evidenciando a preocupação da sociedade atual frente às transformações ocorridas recentemente no planeta. Essas preocupações justificam-se devido ao fato de que as alterações no clima podem estar relacionadas a eventos climáticos extremos, como secas, enchentes, ondas de calor e de frio, furacões e tempestades que estão ocorrendo em várias partes da Terra, afetando a organização social e econômica das regiões atingidas.

Em menos de um século, a temperatura média da planeta sofreu um aumento de  $0,5^{\circ}\text{C}$ , sendo que algumas marcas recordes foram alcançadas no final do século XX. A década de 1990 foi considerada a mais quente desde 1860, enquanto que o ano de 1998 alcançou as temperaturas mais elevadas já registradas na Terra nos últimos 150 mil anos [37].

São vários os fatores que contribuem para o aquecimento global, entre eles a queima de combustíveis fósseis como o petróleo, gás e carvão promovida pela industrialização e aumento da frota mundial de veículos, o desmatamento das florestas e também a instalação de usinas hidrelétricas, que em particular, é motivo de muita discussão sobre sua influência ou não nas alterações climáticas.

Alterações nos padrões climáticos são sentidas de maneira mais evidente em escala local<sup>1</sup>, o que justifica-se pelo fato da escala zonal<sup>2</sup> ser regida principalmente pela circulação atmosférica global, que possui funcionamento mais complexo e de maior dificuldade de alteração. Intervenções realizadas pelo homem como desmatamento de florestas, instalação de cidades, atividades agrícolas, construção de rodovias, entre outras, constituem impactos ambientais que podem resultar em alterações do clima de um dado local [34].

A instalação de hidrelétricas e seus respectivos reservatórios tem atraído ao longo das últimas décadas a atenção de vários pesquisadores preocupados com temas ligados à produção de energia, engenharia, impactos ambientais e sociais. Estudos referentes a esta temática são importantes no Brasil, pois o país tem sua política de geração de energia elétrica baseada na hidreletricidade [34].

Considerando os fatos mencionados acima, o presente estudo tem por objetivo modelar, simular e analisar a dinâmica da evaporação sobre grandes reservatórios, em particular o reservatório de Itaipu. Esta análise é justificada por contribuir com os estudos relacionados aos impactos ambientais ocasionados pelo represamento de águas na formação de lagos artificiais e também pelo fato de que, embora exista no Brasil quantidade significativa de pesquisas relacionadas à taxa de evaporação [15, 45], há uma quantidade muito pequena de publicações voltadas para a dinâmica da mesma, tema central deste trabalho.

---

<sup>1</sup>A extensão horizontal da escala local pode variar. No entanto, a maioria dos autores considera entre 15 e 150 km, já a vertical pode atingir entre 1200 e 2000 m de altura.

<sup>2</sup>A escala zonal abrange verticalmente, toda atmosfera e horizontalmente entre 1000 e 5000 km.

A água presente na atmosfera na forma de vapor é fundamental à manutenção das mais diversas formas de vida da Terra. Sabe-se, que essa substância atua diretamente na regulação da temperatura da atmosfera do planeta, atenuando a incidência de raios infravermelhos na superfície, figurando inclusive, entre os principais gases que exercem influência sobre o efeito estufa do planeta. Além disso, o vapor d'água também é responsável pela precipitação das chuvas, a água dos rios, lagos, geleiras e oceanos evapora através da ação do sol, condensa-se (passa do estado gasoso para o líquido) nas camadas mais altas da atmosfera dando origem às nuvens, que depois se precipitam em forma de chuva. Portanto, entender como o vapor d'água é transportado até as camadas mais altas da atmosfera é fator importante em previsões meteorológicas.

Em estudos meteorológicos, o processo de evaporação restringe-se à mudança da água do estado líquido para o vapor devido à radiação solar e aos processos de difusão molecular e turbulenta. Em superfícies de água, fatores como temperatura do ar, vento e pressão também interferem no processo de evaporação. A temperatura influencia favoravelmente na intensidade de evaporação, pois permite que uma maior quantidade de vapor d'água esteja presente no mesmo volume de ar, no instante que o mesmo atinge o grau de saturação. Quanto aos ventos, estes são responsáveis pela renovação do ar acima da superfície evaporante. Contudo, há um limitante superior para a velocidade dos ventos, que é proporcional à diferença entre a pressão do vapor saturado à temperatura da água e à pressão do vapor do ar [45].

O primeiro relato sobre evaporação conhecido é atribuído a Hesiod, em torno de 800 a.C., que por meio da observação natural da formação de névoa sobre fazendas, acreditava que a mesma era consequência do vento. No entanto, foram os filósofos naturais gregos da antiguidade, os primeiros a realizarem estudos regulares relacionados a meteorologia, sendo o *Meteorologica* de Aristóteles, escrito por volta de 340 a.C., o registro antigo mais abrangente sobre o tema. As primeiras medidas e experimentos relacionadas à evaporação [12], foram realizadas nos séculos XVII e XVIII, sendo que, o primeiro experimento conhecido foi realizado por Perrault, em 1733.

John Dalton publicou no ano de 1802, um artigo que tornou-se uma grande contribuição para o desenvolvimento dos estudos atuais sobre evaporação. Nesse, Dalton reúne e explica conceitos que eram consenso entre os cientistas do final do século XVII, entre eles o fato de que alguns fluidos evaporam mais rapidamente que outros; que a quantidade evaporada é diretamente proporcional à superfície exposta; que o acréscimo na temperatura do líquido é visto como acréscimo da evaporação; que a evaporação é maior quando existe corrente de ar; e que quanto menor for a umidade atmosférica, maior será a evaporação da água [44].

Em 1948, Howard Penman [46], desenvolveu no Reino Unido, um modelo matemático para medir a evaporação de uma superfície de água livremente exposta à atmosfera. Tal equação é ainda utilizada nos dias atuais e requer dados diários de temperatura do ar, velocidade do vento, umidade relativa e radiação solar. Atualmente há modelos utilizados para estimativa da evaporação em lagos que se baseiam em informações sobre temperatura, umi-

dade, velocidade do vento e radiação solar, bem como metodologias experimentais para estimar a evaporação, realizadas em tanques instalados em estações meteorológicas situadas em ambiente terrestre [47].

Sobre a dinâmica da umidade na atmosfera, tem-se que ela é determinada pelas condições climáticas, meteorológicas e micrometeorológicas, as quais são influenciadas pela topografia, uso e ocupação do solo. A importância das interações entre a superfície da Terra e a atmosfera começou a ser estudada no início do século XVIII, quando Edmund Halley identificou o aquecimento solar como a força motriz responsável pelo transporte de água e ar na atmosfera. Experimentos numéricos realizados com um modelo de mesoescala tridimensional [8], mostraram que uma superfície de água como um lago, combinado com a presença de nuvens cúmulos podem influenciar a circulação atmosférica de mesoescala.

Variáveis como temperatura e densidade do ar combinadas com os efeitos de difusão<sup>3</sup>, advecção<sup>4</sup>, direção e intensidade do vento são os principais mecanismos que regem o comportamento da umidade na atmosfera. Devido à grande quantidade de variáveis envolvidas, a simulação da trajetória da umidade é um problema complexo que envolve a resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) não-lineares, como as equações de Navier-Stokes, que não possuem, para a maioria dos casos, soluções analíticas e exigem portanto, a aplicação de métodos numéricos na sua solução. Dentre os métodos utilizados na solução numérica de equações diferenciais destacam-se o método de diferenças finitas, o método de volumes finitos e o método de elementos finitos.

Para desenvolver esse trabalho, utiliza-se o método de diferenças finitas aplicado sobre o sistema de coordenadas generalizadas. O método de diferenças finitas consiste em substituir os diferenciais presentes nas EDPs por expressões algébricas que podem ser manipuladas computacionalmente, relacionando entre si os valores das grandezas de interesse em pontos discretos do domínio. Tais expressões são denominadas aproximações por diferenças finitas ou discretizações e podem ser obtidas de várias maneiras, sendo as mais comuns, a expansão em série de Taylor e interpolação polinomial. Por se tratar de aproximações, as soluções das equações provenientes desse processo não são exatas, estando sujeita a erros controláveis que surgem no processo de discretização das equações, arredondamento de cálculo e aproximação numérica das equações auxiliares [19].

Historicamente, o método de diferenças finitas foi sempre empregado em problemas de mecânica dos fluidos, os quais devido à sua natureza física possuem características altamente não-lineares. Conseqüentemente, os esforços dos pesquisadores do método se concentraram no estudo e tratamento das não-linearidades dos termos advectivos/convectivos que surgem nas equações de Navier-Stokes [36]. Como o foco desse estudo não são os termos convectivos, utilizou-se o esquema *First Order Upwind* (FOU) nas discretizações dos termos de convecção, já que esse esquema é de implementação mais simples.

---

<sup>3</sup>Mecanismo de transporte relacionado ao movimento molecular do fluido.

<sup>4</sup>Mecanismo de transporte realizado pelo movimento do próprio fluido.

Existem atualmente diversos modelos atmosféricos e esses variam conforme as características, abordagem e formulação do problema a ser analisado. Alguns dos modelos existentes são o *Regional Atmospheric Modeling System* (RAMS) [5], o *Advanced Regional Prediction System* (ARPS) [4], o *Penn State Mesoscale Model* (MM5) [41] e o *Weather Research and Forecasting* (WRF) [57]. Todos esses modelos são do tipo “caixa preta” e não permitem que as equações ou método numérico sejam alterados conforme a necessidade do pesquisador.

Com o objetivo de compreender a dinâmica da umidade na atmosfera, neste trabalho optou-se pelo desenvolvimento da modelagem matemática e numérica dessa dinâmica por meio de um código numérico baseado no método de diferenças finitas. As simulações numéricas foram realizadas em uma lâmina vertical, posicionada acima do reservatório de Itaipu, localizado na fronteira entre Brasil e Paraguai. Devido à complexidade da geometria do problema, recorreu-se ao sistema de coordenadas generalizadas para realizar as simulações. A partir dos resultados pretende-se contribuir com um melhor entendimento do impacto ambiental acarretado por esse aproveitamento hidrelétrico e sua influência no micro-clima local. Diante do exposto, este trabalho está estruturado como segue.

O capítulo 2 contém informações sobre a participação das usinas hidrelétricas na oferta de energia no Brasil e no mundo. Nesse capítulo, comenta-se os principais impactos ambientais ocasionados por empreendimentos hidrelétricos e apresenta-se os principais parâmetros físicos utilizados no modelo. Informações sobre temperatura, umidade e pressão são apresentadas no capítulo 3. No capítulo 4, desenvolve-se em coordenadas cartesianas o modelo matemático para a dinâmica da evaporação da umidade. O capítulo 5 é dedicado ao tratamento numérico do modelo, nesse capítulo são apresentadas as transformações das equações de coordenadas cartesianas para generalizadas, as discretizações e o método numérico utilizado no cálculo das variáveis do escoamento. Apresenta-se e discute-se no capítulo 6 as simulações numéricas e por fim, no capítulo 7, a conclusão desta dissertação é apresentada.

## 2 RESERVATÓRIOS DE HIDRELÉTRICAS

O Brasil figura entre os países em que a produção de energia elétrica é fortemente dependente das usinas hidrelétricas. No entanto, em torno de 30% apenas do potencial hidrelétrico do país foi explorado [40], sendo a usina de Itaipu a maior geradora de hidreletricidade no país.

Deve-se reconhecer que os impactos sócio-ambientais de uma usina hidrelétrica, quando não realizados os estudos necessários para a sua instalação, podem ser catastróficos, como o caso da usina hidrelétrica de Balbina no Amazonas, que com um reservatório de 2360 km<sup>2</sup> e potencial de apenas 250 MW é considerada por muitos, como um erro histórico quando se trata de empreendimentos hidrelétricos.

Nesse contexto, apresenta-se nesse capítulo informações técnicas relativas à produção e consumo de energia hidráulica, vantagens e desvantagens relacionadas a aproveitamentos hidrelétricos e também informações referentes ao reservatório de Itaipu, objeto de estudo desse trabalho.

### 2.1 ENERGIA HIDRELÉTRICA

A capacidade de gerar e distribuir energia é fator determinante para o desenvolvimento econômico e social de um país ao possibilitar apoio mecânico, térmico e elétrico às ações humanas. Sua oferta e demanda é frequentemente utilizada como indicador de desenvolvimento econômico e nível de qualidade de vida da sociedade, refletindo tanto no ritmo de atividade dos setores industriais, comerciais e de serviços, quanto na capacidade da população para adquirir bens e serviços tecnologicamente mais avançados, como automóveis, que demandam em sua maioria, energia de combustíveis fósseis, eletrodomésticos e eletroeletrônicos, que necessitam de acesso à rede elétrica e pressionam o consumo de energia elétrica.

A figura 2.1 mostra o consumo de energia elétrica *per capita* no mundo, evidenciando que os países mais desenvolvidos são os maiores consumidores de energia. No entanto, é o petróleo que responde pela maior parte do consumo primário (fonte a ser transformada em energia mecânica, térmica ou elétrica) de energia no mundo, seguido do carvão e do gás natural.

A energia hidráulica ocupava em 2007 a quarta posição no *ranking* dos combustíveis mais utilizados no mundo [3]. No Brasil, segundo os resultados do Balanço Energético Nacional (BEN), a energia de fonte hidráulica (ou hidreletricidade) representou em 2013, 13% da matriz energética brasileira sendo superada por derivados da cana-de-açúcar (19,1%) e petróleo e seus derivados (40,6%). Contudo, na oferta de energia elétrica, a energia de fonte hidráulica produzida no país representou 70,6%, constituindo-se a maior fonte produtora de eletricidade brasileira [16].

No mundo, segundo o Plano 2015 da Eletrobrás, o Brasil é o país com maior poten-

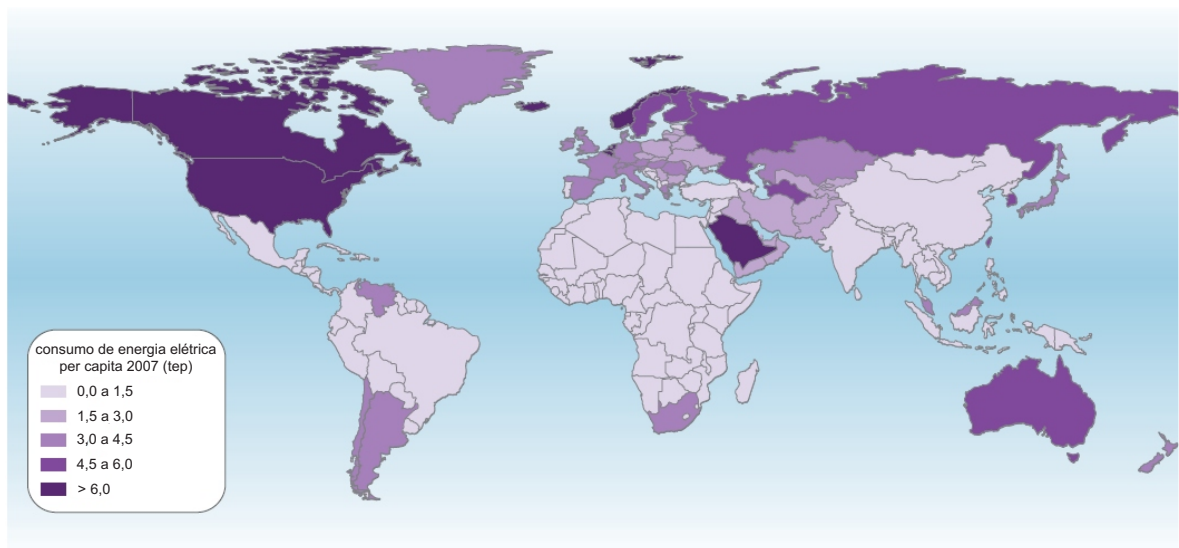


Figura 2.1: Consumo de energia elétrica *per capita* no mundo em 2007 [3].

cial hidrelétrico, possuindo um total de 260 GW. No entanto, pouco mais de 30% se transformaram em usinas construídas ou outorgadas. De acordo com o Plano Nacional de Energia 2030, o potencial a ser aproveitado é de 126 GW, evidenciando a importância de pesquisas relacionadas à produção de energia hidráulica no país. Deste total, mais de 70% está situada na região norte do país, nas Bacias do Amazonas e do Tocantins/Araguaia [40].

A primeira experiência de geração hidrelétrica do Brasil aconteceu em 1879, durante o reinado de D. Pedro II, no município de Diamantina (MG), quando uma empresa de exploração de diamantes instalou nas águas do Ribeirão do Inferno, afluente do rio Jequitinhonha, uma pequena usina que gerava 0,5 MW de potência com uma linha de transmissão de dois quilômetros. Contudo, a usina hidrelétrica Marmelos, inaugurada em 1889, localizada no rio Paraibuna em Juiz de Fora (MG) é considerada a primeira hidrelétrica do país [50]. Hoje, pouco mais de cem anos após a primeira experiência em geração hidrelétrica, a potência instalada das unidades produtoras aumentou significativamente chegando a 14 GW, como é o caso da usina hidrelétrica de Itaipu. Na tabela 2.1 apresenta-se a potência e a localização das dez maiores usinas em operação do Brasil.

Tabela 2.1: As dez maiores usinas hidrelétricas em operação no Brasil.

	<i>Potência (MW)</i>	<i>Região</i>
Itaipu (Binacional)	14000	Sul
Tucuruí I e II	8370	Norte
Ilha Solteira	3444	Sudeste
Xingó	3162	Nordeste
Paulo Afonso IV	2462	Nordeste
Itumbiara	2082	Sudeste
São Simão	1710	Sudeste
Governador Bento Munhoz da Rocha Neto (Foz do Areia)	1676	Sudeste
Jupiá (Eng. Souza Dias)	1551	Sudeste
Porto Primavera (Eng. Sérgio Motta)	1540	Sudeste

Fonte: ANEEL (2008).

## 2.2 IMPACTOS AMBIENTAIS CAUSADOS POR HIDRELÉTRICAS

Não há ainda, formas conhecidas de gerar energia em quantidade que atenda as necessidades de consumo da sociedade atual, que não produzam impactos ambientais negativos. Embora seja considerada uma fonte de energia limpa e renovável, a instalação e funcionamento de uma usina hidrelétrica é responsável por inúmeros impactos ambientais. Lista-se alguns dos impactos negativos mais relevantes [10, 54]:

- O represamento das águas afeta a fauna e a flora locais, pois, de uma hora para outra, a floresta formada durante centenas de anos acaba submersa pelo lago causando a morte de várias espécies de animais e vegetais;
- A implantação de hidrelétricas interfere de forma irreversível no micro-clima local, provocando alterações na temperatura, na umidade relativa do ar, na evaporação e ciclo pluviométrico. As médias das temperaturas mais altas tendem a ter pequenas baixas, enquanto as médias das temperaturas mais baixas tendem a ter ligeiras altas;
- A pressão do peso da água represada pode provocar fortes deslocamentos de terra, prejudicar aquíferos e provocar sismos induzidos, principalmente em terrenos cársticos<sup>1</sup>. Forma-se a montante uma nova margem que não tem a mesma resistência à água, o que causa erosão e perda de solo e árvores, gerando o assoreamento que afeta a capacidade do reservatório;
- Há emissões de gases de efeito estufa principalmente em hidrelétricas localizadas em áreas tropicais, por meio da decomposição de árvores acima da água (em áreas não des-

<sup>1</sup>Terrenos caracterizados por depressões fechadas, drenagem subterrâneas e cavernas. Esses terrenos são formados, principalmente, pela dissolução de rochas carbonáticas como o calcário [21].

matadas adequadamente antes de se encher os reservatórios), as quais emitem gás carbônico (CO<sub>2</sub>);

- Há também a liberação de gás metano (CH<sub>4</sub>) na zona de deplecionamento (área do fundo do reservatório);
- A formação de um reservatório provoca mudanças na estrutura dos ambientes aquáticos ao transformar um rio de águas rápidas (lóticas) em um sistema de águas paradas (lêntico) e também ao inundar ambientes terrestres e/ou várzeas e lagoas marginais. Estas mudanças causam alterações nas estruturas da fauna aquática, principalmente por meio da substituição ou extinção local de espécies. Espécies de peixes reofílicos (aqueles que necessitam de águas rápidas para sua sobrevivência) se tornam mais raras, enquanto que espécies de águas lênticas se tornam mais abundantes.

A expressão "impacto ambiental" remete na maioria das vezes a algo ruim e prejudicial, no entanto, no que diz respeito às usinas hidrelétricas, os empreendimentos recentes mostram que estes podem, também, resultar em efeitos positivos, dentre os quais cita-se [54]:

- A hidroeletricidade é uma fonte de energia limpa e renovável;
- Os reservatórios das usinas hidrelétricas armazenam água da chuva, que pode ser usada para consumo ou para irrigação;
- O ciclo de vida da hidroeletricidade produz quantidades muito pequenas de gases do efeito estufa, emitindo menos gases que usinas movidas a gás, carvão ou petróleo, assim a hidroeletricidade produz menos efeitos relacionados às alterações climáticas;
- As usinas hidrelétricas não produzem poluentes do ar, pelo contrário, melhoram o ar que se respira. Muito frequentemente, elas substituem a geração de energia a partir de combustíveis fósseis, reduzindo assim a chuva ácida e a fumaça. Além disso, os empreendimentos hidrelétricos não geram subprodutos tóxicos;
- Os locais onde se instalam hidrelétricas podem transformar-se em centros de referência no desenvolvimento de tecnologia de ponta para o setor, bem como de estudos e projetos de preservação da flora e fauna locais.

No Brasil, efeitos sociais e ambientais de usinas hidrelétricas surgiram a partir do instante que a escala dos empreendimentos cresceu para a ordem de dezenas de megawatts. Eles foram tratados de maneira tradicional até que, em meados da década de 1970, a consciência ambiental ligada à geração de energia elétrica cresceu o suficiente para tornar-se alvo de debate público [53]. Começaram então a surgir estudos sobre os impactos ocasionados por empreendimentos hidrelétricos, dentre os quais, destaca-se aqui alguns relacionados a impactos

no micro clima ocasionados pelos aproveitamentos hidrelétricos de Sobradinho, Curuá-UNA, Tucuruí e Itaipu.

Em Sobradinho, usina hidrelétrica situada no semi-árido nordestino, estudos avaliaram o impacto da variação no nível do reservatório sobre os processos meteorológicos e variáveis climáticas na região do lago. Apesar de ter sido construído com o objetivo de gerar energia elétrica, o reservatório é também utilizado no controle de enchentes na região. Realizando experimentos numéricos com o modelo RAMS, em conjunto com a análise de dados coletados em estações localizadas nas margens do reservatório, verificou-se que as alterações na dimensão e geometria do lago, devido ao controle do nível do reservatório, modificam a distribuição espacial das zonas de convergência<sup>2</sup> induzidas pela brisa lacustre, acarretando variações em elementos climáticos como temperatura e umidade do ar [14].

Com relação à hidrelétrica de Curuá-UNA, no estado do Pará, a bacia do rio Curuá-UNA sofreu grande desmatamento, provocando um processo de eutrofização<sup>3</sup>. Isso elevou a concentração de nutrientes a níveis suficientes para sustentar a produtividade de macrófitas, resultando em elevação das emissões de metano por um longo período [27]. Em 1990, treze anos após o enchimento, a represa de Curuá-UNA emitia 3,7 vezes mais gases de efeito estufa que a queima de petróleo emitiria para gerar quantidade de eletricidade equivalente [17].

Na área do reservatório da Usina Hidroelétrica de Tucuruí (PA) foram analisadas variações climáticas como direção e velocidade dos ventos, precipitação, umidade relativa e a temperatura do ar. As séries históricas dos dados analisados compreendem anos anteriores e posteriores ao enchimento do lago, e a partir dessas análises, constatou-se o surgimento de brisas terra-lago e lago-terra devido a diferença de temperatura e pressão decorrentes da presença do lago, o que alterou a circulação local dos ventos [26].

Em [24] tem-se um estudo sobre a variação dos parâmetros climáticos produzidos pelo reservatório de Itaipu. Foram comparados dados meteorológicos das estações de Itaipu e Guaira que estão localizadas próximas ao lago, com a estação de Cascavel situada à 75 km do lago. A partir da análise estatística dos dados, resultados indicaram o aumento da evaporação e a diminuição da amplitude térmica, considerando que houve aumento da temperatura mínima e diminuição da temperatura máxima. Verificou-se ainda, que a insolação e a precipitação total mensal e máxima mensal não sofreram alterações significativas.

Por fim, um modelo matemático para simular e analisar a dinâmica do vapor d'água é proposto em [43], onde os fluxos superficiais de vapor sobre o reservatório de Rio Manso, no estado de Mato Grosso são investigados. Analisa-se a dispersão da umidade em quatro cenários distintos, cuja principal diferença é a direção dos ventos, que apesar de serem considerados relativamente fracos nas simulações, apresentou forte influência no transporte de vapor d'água.

A partir das informações apresentadas, percebe-se que o estudo dos impactos provocados por um empreendimento hidrelétrico são vastos e envolvem várias áreas do conheci-

---

<sup>2</sup>Região onde duas ou mais correntes de ar se encontram.

<sup>3</sup>Aumento excessivo na população de algas, ocasionado pelo excesso de nutrientes.

mento. No entanto, não é objetivo deste trabalho abordar a totalidade dos impactos acarretados pela construção de uma usina hidrelétrica, mas sim, simular e analisar a dinâmica do movimento do vapor d'água na região da represa, contribuindo com o estudo das alterações ocasionadas no micro-clima pela instalação da usina.

### 2.3 CARACTERÍSTICAS DO RESERVATÓRIO DE ITAIPU

A usina hidrelétrica de Itaipu é hoje a segunda maior hidrelétrica do mundo em produção de energia (14.000 MW), atrás apenas da usina de Três Gargantas, localizada no Rio Yang Tsé na China, com potência instalada de (22.400 MW) [30]. A construção da usina de Itaipu iniciou-se em 1974, passando a gerar energia a partir de 1984, quando entrou em operação a primeira das 20 unidades geradoras do projeto.

O reservatório de Itaipu, objeto de estudo desse trabalho, nasceu precisamente às 5h45min do dia 13 de outubro de 1982, quando fecharam-se as comportas do canal de desvio para a formação do lago. Com 1350 km<sup>2</sup> de área inundada (Figura 2.2) o lago é margeado por 16 municípios brasileiros (Mundo Novo, no Mato Grosso do Sul e, Guaíra, Terra Roxa, Mercedes, Marechal Cândido Rondon, Pato Bragado, Entre Rios do Oeste, São José das Palmeiras, Santa Helena, Diamante D'Oeste, Missal, Itaipulândia, Medianeira, São Miguel do Iguaçu, Santa Terezinha de Itaipu e Foz do Iguaçu, no Paraná), além de oito distritos e dois departamentos (equivalente a estados brasileiros) em terras paraguaias. Embora seja a segunda maior produtora de energia elétrica do mundo, Itaipu tem apenas o sétimo maior reservatório de água do país (tabela 2.2) com um volume aproximado de 29 bilhões de metros cúbicos [42].

Tabela 2.2: Maiores áreas inundadas e potência de hidrelétricas brasileiras.

	<i>Área inundada</i>	<i>Potência</i>
Sobradinho (BA)	4214 km <sup>2</sup>	1050 MW
Balbina (AM)	2360 km <sup>2</sup>	250 MW
Tucuruí I e II (PA)	2850 km <sup>2</sup>	8370 MW
Porto Primavera (SP)	2250 km <sup>2</sup>	1540 MW
Serra da Mesa (GO)	1784 km <sup>2</sup>	1275 MW
Furnas (MG)	1440 km <sup>2</sup>	1216 MW
Itaipu (BR/PY)	1350 km <sup>2</sup>	14000 MW

Fonte: O autor.

O reservatório de Itaipu faz parte da Bacia do Prata, segunda maior bacia fluvial do planeta. Localizado na fronteira entre Brasil e Paraguai (figura 2.2 itens (a) a (c)) o lago se estende por 170 km ao longo do rio Paraná entre as cidades de Foz do Iguaçu e Guaíra, onde antes, se situava o Salto de Sete Quedas.

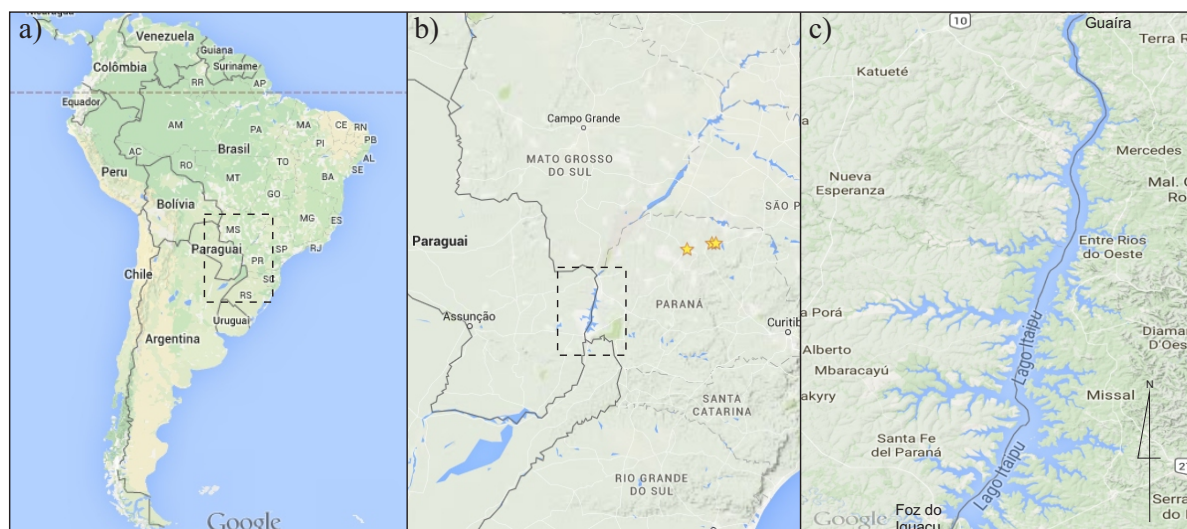


Figura 2.2: a) América do Sul, b) Fronteira entre Brasil e Paraguai, c) Reservatório de Itaipu [22].

Situado a aproximadamente 220 m em relação ao nível do mar, o reservatório de Itaipu possui as seguintes características: comprimento aproximado de 170 km e largura média de 7 km; área alagada de 1350 km<sup>2</sup> (770 km<sup>2</sup> em território Brasileiro e 580 km<sup>2</sup> em território Paraguai); profundidade média de 22,5 m, chegando a 170 m nas proximidades da barragem e; área de drenagem<sup>4</sup> de aproximadamente 820.000 km<sup>2</sup> [25, 30].

O clima da região é subtropical úmido, com verões quentes, geadas pouco frequentes e chuva todos os meses do ano. A temperatura média anual é de 22°C, sendo que o período mais quente se estende de novembro a fevereiro, quando a temperatura ultrapassa os 30°C, e o frio restringe-se aos meses de junho à agosto, quando a temperatura mínima média é de 13°C. A precipitação média anual na bacia de drenagem é de 1400 mm, enquanto que a evaporação média anual é de 1200 mm [30].

Informações sobre o regime de ventos foram obtidas a partir de dados referentes à estação climatológica de Foz do Iguaçu, fornecidos pelo SIMEPAR [51], onde verificou-se para a região, ventos com velocidade aproximada de 1,6 m/s mais frequentes na direção leste. Já o relevo, que apresenta variações de altitudes entre 220 e 700 metros em relação ao nível do mar, foi obtido em [6, 32, 39].

Conclui-se esta seção, reunindo na tabela 2.3 os principais parâmetros que serão utilizados na modelagem da dinâmica da umidade na região da represa.

<sup>4</sup>A área de drenagem compreende a área formada pelo rio Paraná e afluentes que contribuem com a formação do lago.

Tabela 2.3: Principais parâmetros utilizados no modelo de evaporação.

<i>Parâmetro</i>	
Temperatura média anual	22°C
Velocidade média do vento	1,6 m/s
Direção do vento	leste
Altitude do reservatório	220 m
Variação da altitude do relevo	220 a 700 m

Fonte: Itaipu Binacional (2015), SIMEPAR (2015) e MINEROPAR (2006).

No capítulo seguinte são apresentados elementos da estrutura vertical da atmosfera, tais como a camada limite atmosférica, as variações da densidade, pressão e temperatura em relação a altitude e o processo de evaporação e formação de nuvens.

### 3 ESTRUTURA VERTICAL DA ATMOSFERA

A atmosfera terrestre é representada por uma série de camadas concêntricas que envolvem a superfície do planeta, identificadas principalmente pela forma com que a temperatura varia com a altitude. Aproximadamente 90% da atmosfera encontra-se entre a superfície da Terra e uma altura de 16 km. Acima dos 16 km, a atmosfera continua a se estender até uma altura aproximada de 550 km, entretanto, essa região contém apenas 10% da massa atmosférica [2].

Nesse capítulo são apresentadas informações sobre o perfil vertical da atmosfera, as equações utilizadas na obtenção dos valores de temperatura, pressão e densidade em função da altitude para a região do reservatório de Itaipu e também sobre os processos de evaporação e formação de nuvens.

#### 3.1 CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA

A região mais baixa da atmosfera é conhecida como camada limite atmosférica (CLA). Compreendendo, verticalmente de 1 a 2 km a partir da superfície, a CLA é a região atmosférica mais influenciada pela troca de momento, calor e vapor d'água. No entanto, propriedades do escoamento atmosférico, como vento, temperatura e umidade têm suas variações mais acentuadas nos primeiros 50-100 m da atmosfera, região que recebe o nome de camada superficial [33].

Acima da camada limite encontra-se a atmosfera livre, onde o escoamento atmosférico está em equilíbrio quase geostrófico<sup>1</sup> e não é mais influenciado pelo atrito com a superfície do planeta [33]. Ver figura 3.1.

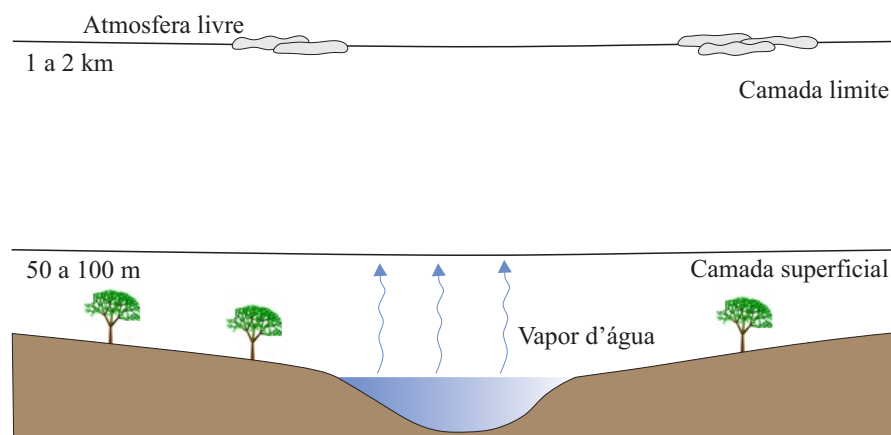


Figura 3.1: Representação da camada limite atmosférica.

<sup>1</sup>Equilíbrio geostrófico ocorre quando a força de pressão sobre uma parcela de ar se equilibra com a força de Coriolis e deixa de acelerar o escoamento.

### 3.2 DENSIDADE, PRESSÃO E TEMPERATURA

As camadas atmosféricas que envolvem o planeta são regiões gasosas compostas principalmente por nitrogênio, oxigênio e argônio, junto com pequenas quantidades de outros gases como vapor d'água, dióxido de carbono e ozônio. Esses e outros gases menos abundantes, constituem o ar presente na atmosfera, que tem como características principais sua densidade, pressão e temperatura. Tais parâmetros, variam principalmente com a altitude [1] e estão relacionados entre si pela equação de estado [31],

$$p = \rho RT \quad (3.1)$$

onde,  $p$  representa a pressão atmosférica,  $\rho$  a densidade do ar,  $R$  a constante dos gases ideais e  $T$  a temperatura do ar.

A tabela 3.1 contém valores para densidade, pressão e temperatura em função da altitude considerando a atmosfera em condições normais de temperatura e pressão, que são respectivamente 15°C e 1013,25 hPa no nível do mar.

Tabela 3.1: Densidade, pressão e temperatura em função da altitude.

Altitude (km)	Pressão (hPa)	Temp. (°C)	Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	Altitude (km)	Pressão (hPa)	Temp. (°C)	Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )
0	1013,25	15,00	1,225	3,5	657,8	-7,75	0,863
0,1	1001,20	14,35	1,213	4	616,6	-11,00	0,819
0,2	989,45	13,70	1,202	4,5	577,5	-14,25	0,777
0,3	977,72	13,05	1,190	5	540,5	-17,50	0,736
0,4	966,11	12,40	1,179	5,5	505,4	-20,75	0,697
0,5	954,61	11,75	1,167	6	472,2	-24,00	0,660
0,6	943,22	11,10	1,156	6,5	440,7	-27,25	0,624
0,7	931,94	10,45	1,145	7	411,1	-30,50	0,590
0,8	920,77	9,80	1,134	7,5	383,0	-33,75	0,557
0,9	909,71	9,15	1,123	8	356,5	-37,00	0,526
1	898,80	8,50	1,112	8,5	331,5	-40,25	0,496
1,5	845,59	5,25	1,058	9	308,0	-43,50	0,467
2	795,0	2,00	1,007	9,5	285,8	-46,75	0,440
2,5	746,9	-1,25	0,957	10	265,0	-50,00	0,414
3	701,2	-4,50	0,909	11	227,0	-56,50	0,365

Fonte: WMO (1975).

Observa-se na tabela 3.1 que a densidade do ar é maior próxima à superfície da Terra e diminui à medida que se desloca para cima na atmosfera, isso ocorre porque a força gravitacional tende a comprimir o ar na região mais próxima à superfície e uma vez que a

densidade é o número de moléculas de ar num dado espaço (volume), segue que a densidade é maior nessa região [1].

A quantidade de força exercida pelo peso do ar sobre uma área da superfície terrestre é chamada pressão atmosférica ou pressão hidrostática [31]. A pressão em qualquer altitude na atmosfera pode ser medida em termos da massa total de ar acima dessa altitude. Tem-se que a pressão atmosférica sempre diminui com a elevação de altitude, uma vez que, a concentração de moléculas de ar decresce exponencialmente com o aumento da altura [31].

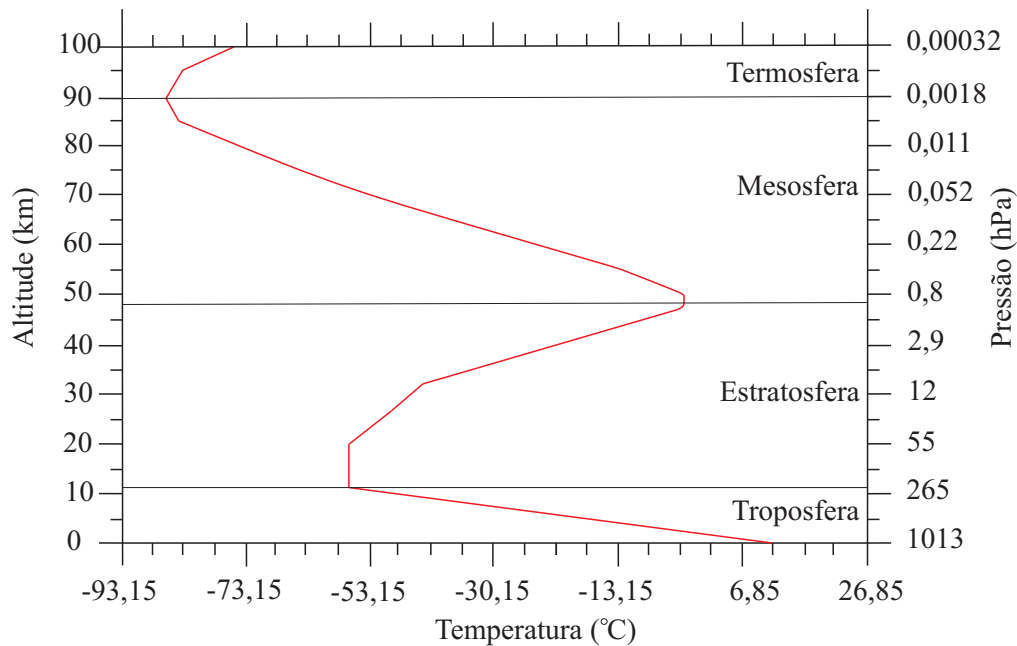


Figura 3.2: Estrutura vertical da temperatura na atmosfera terrestre. Adaptado de [31].

Analisando a figura 3.2, observa-se que a temperatura do ar tem um perfil vertical mais complicado que a densidade e pressão. Nota-se que a temperatura do ar diminui linearmente a partir da superfície da Terra até uma altura aproximada de 11 km, permanece constante nos primeiros quilômetros da estratosfera, cresce até a mesosfera e volta a decrescer novamente. Para os primeiros 11 km da atmosfera, a redução na temperatura deve-se ao fato de que a luz solar aquece a superfície da Terra, que por sua vez aquece o ar acima dela [1], conseqüentemente o ar tende a ser mais quente próximo à superfície, esfriando-se gradualmente à medida que se eleva a altitude. A taxa com que a temperatura diminui com a altura é chamada gradiente térmico de temperatura, sendo que o gradiente médio na região da troposfera é de aproximadamente  $6.5^{\circ}\text{C}$  a cada 1000 m de elevação na altitude [1, 31].

Visando obter os parâmetros referentes à região do reservatório de Itaipu, apresenta-se agora, as equações que descrevem o comportamento da temperatura, pressão e densidade. Conforme mencionado no parágrafo anterior, a variação da temperatura em função da altitude  $h$  na região da troposfera é linear. Portanto, pode-se determinar o gradiente térmico  $a$  nessa

região por meio da equação

$$a = \frac{dT}{dh} = \frac{T - T_0}{h - h_0} \quad (3.2)$$

com  $T_0$  e  $h_0$  valores de referência para a temperatura e altitude, respectivamente. Assim, tem-se que a relação entre temperatura e altitude nos primeiros 11 km da atmosfera é dada por

$$T = a(h - h_0) + T_0 \quad (3.3)$$

Na ausência de movimentos atmosféricos intensos, como tornados e tempestades, pode-se estimar a variação da pressão atmosférica em relação à altitude a partir da equação hidrostática

$$dp = -\rho g dh \quad (3.4)$$

a qual, representa a pressão líquida sobre uma dada massa de ar. O sinal negativo de (3.4) deve-se ao fato de que a pressão decresce com a elevação de altitude. Dividindo (3.4) pela equação de estado (3.1) obtêm-se

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho g}{\rho R T} dh = -\frac{g}{R T} dh \quad (3.5)$$

Substituindo  $dh = \frac{dT}{a}$  obtido de (3.2), em (3.5) e integrando-a de  $p_0, T_0$  a  $p, T$  segue que

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{aR} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T}$$

donde

$$\ln \left( \frac{p}{p_0} \right) = -\frac{g}{aR} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (3.6)$$

Portanto, segue que uma equação para a variação da pressão em função da temperatura é dada por

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-g/aR} \quad (3.7)$$

ou ainda,

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-g/aR} \quad (3.8)$$

Considere agora, a equação de estado

$$p_0 = \rho_0 RT_0 \quad (3.9)$$

aplicada a valores de referência  $p_0$ ,  $\rho_0$  e  $T_0$ . Dividindo (3.1) por (3.9) têm-se

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho RT}{\rho_0 RT_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0} \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.7) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{T_0}{T}\right) \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-g/aR} \\ &= \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-(g/aR)-1} \end{aligned}$$

donde se obtêm a equação

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-[(g/aR)+1]} \quad (3.11)$$

que permite calcular a densidade do ar em função da temperatura.

As equações (3.3), (3.8) e (3.11) são baseadas em evidências experimentais. A partir delas constroem-se a tabela 3.2 com os dados de pressão, temperatura e densidade adaptados à região do reservatório de Itaipu, para até 1000 metros de altitude.

Tabela 3.2: Densidade, pressão e temperatura adaptada à região de Itaipu.

<i>Altitude</i> (km)	<i>Pressão</i> (hPa)	<i>Temperatura</i> (°C)	<i>Densidade</i> (Kg/m <sup>3</sup> )
0,2	987,00	22,00	1,165
0,3	977,63	21,35	1,156
0,4	968,32	20,70	1,148
0,5	959,09	20,05	1,140
0,6	949,92	19,40	1,131
0,7	940,82	18,75	1,123
0,8	931,79	18,10	1,115
0,9	922,82	17,45	1,106
1	913,92	16,80	1,098

É importante ressaltar, que os números apresentados nesta seção são valores médios. Há dias em que o ar se esfria mais rapidamente à medida que se avança para cima na atmosfera e outros que a temperatura diminui mais lentamente com a altura, podendo ocasionalmente, ocorrer da temperatura aumentar com a altura produzindo um fenômeno conhecido

como inversão de temperatura ou inversão térmica.

### 3.3 EVAPORAÇÃO E FORMAÇÃO DE NUVENS

A evaporação é o processo pelo qual um líquido se transforma em gás. Em rios, lagos e mares é a energia solar a responsável por transformar enormes quantidades de água líquida em vapor d'água. Quando a energia solar incide sobre a superfície líquida, as moléculas de água tendem a vibrar mais rapidamente à medida que absorvem calor. Devido à grande quantidade de energia, algumas moléculas vibram com intensidade suficiente para romper com as ligações (pontes de hidrogênio) de seu grupo e escapar para o ar [2], resultando no processo de evaporação.

À medida que a temperatura diminui com a elevação de altitude, as moléculas de água em ascensão na atmosfera, perdem energia e começam a formar novas ligações de hidrogênio com as moléculas mais próximas. Conforme as moléculas se reúnem, o vapor d'água começa a condensar originando gotículas de água que formam as nuvens.

Nuvens consistem em aglomerados visíveis de pequenas gotas d'água e/ou cristais de gelo em suspensão no ar [1]. Elas são classificadas de acordo com seu formato e altura de sua base em relação à superfície da Terra. Para fins de classificação, a troposfera é dividida em três faixas de altitude, cuja altura varia conforme a tabela 3.3 apresentada a seguir.

Tabela 3.3: Altura aproximada da base das nuvens para as regiões tropical, temperada e polar.

Grupo	Região polar	Região temperada	Região tropical
Nuvens baixas	0-2 km	0-2 km	0-2 km
Nuvens intermediárias	2-4 km	2-7 km	2-8 km
Nuvens altas	3-8 km	5-13 km	6-9 km

Fonte: WMO (1975).

Segundo a classificação internacional apresentada pela *World Meteorological Organization* (WMO) [56], existem dez gêneros de nuvens. Em baixas altitudes pode-se encontrar nuvens do tipo *stratus*, *stratocumulos*, *cumulus* e *cumulonimbus*. Essas nuvens, são quase sempre compostas por gotas d'água, podendo conter partículas de gelo e neve em dias frios. Já as nuvens de altitude intermediária podem ser do tipo *altocumulus*, *altostratus* e *nimbostratus*, sendo formadas por gotas d'água e quando a temperatura se torna muito baixa, alguns cristais de gelo. Nuvens altas podem ser do tipo *cirrus*, *cirrostratus*, *cirrocumulos* e devido ao ar seco e as baixas temperaturas, são compostas quase exclusivamente por cristais de gelo.

No próximo capítulo deduz-se o modelo matemático em coordenadas cartesianas para a dinâmica da umidade sobre o reservatório de Itaipu. Apresenta-se ainda a modelagem do domínio de escoamento da umidade considerado nas simulações numéricas.

## 4 MODELO MATEMÁTICO

Modelos desenvolvidos para descrever fenômenos atmosféricos são em sua maioria formados por sistemas de equações diferenciais obtidas a partir de leis físicas aplicadas à atmosfera. Há inúmeros modelos atmosféricos e estes variam conforme as características, formulação e abordagem do problema a ser analisado. Neste trabalho, propõe-se um modelo representado pelas equação da continuidade e de Navier-Stokes na forma incompressível em conjunto com equações advectivas-difusivas para a temperatura e concentração de umidade.

### 4.1 MODELOS ATMOSFÉRICOS

Entre os tipos de modelos atmosféricos há os modelos de circulação global (MCGs), que descrevem o comportamento atmosférico do planeta como um todo e os modelos de circulação regional (MCRs), que se aplicam a estudos de escala regional ou local cobrindo apenas uma parte do planeta. Os MCGs possuem resolução na ordem de várias dezenas ou centenas de quilômetros, sendo portanto capazes de representar fenômenos atmosféricos de grande escala, enquanto que os MCRs possuem resolução na ordem de poucas dezenas de quilômetros, sendo capazes de representar comportamento de mesoescala<sup>1</sup> em uma área específica. Nesse contexto, o modelo proposto neste trabalho é classificado como um MCR, já que seu objetivo é simular a dinâmica da evaporação local.

Os modelos regionais apresentam como vantagem o fato de possibilitarem a representação de características locais dificilmente simuladas por modelos globais. Por meio de parametrizações e dados mais detalhados de superfície e também maior resolução espacial estes modelos são capazes de capturar melhor os aspectos regionais ou locais (como por exemplo, topografia), que podem influenciar nos resultados das simulações [18].

Alguns dos MCRs mais utilizados pelos centros de pesquisas atmosféricas são: RAMS, ARPS, MM5 e o WRF. Embora esses modelos MCRs já estejam bem testados e desenvolvidos, eles são modelos tipo "caixa preta" e não permitem que as equações e/ou modelo numérico utilizados na modelagem dos movimentos atmosféricos sejam ajustados. Nesse trabalho, ao invés de utilizar modelos tipo caixa preta, opta-se por modelar o problema da evaporação de água em hidrelétricas a partir das equações de conservação e implementar um modelo numérico compatível com o problema. Assim, caso seja necessário é possível modificar tanto o modelo matemático quanto o numérico. Nas próximas seções apresenta-se o modelo matemático para a descrição da evaporação da água em hidrelétricas.

---

<sup>1</sup>Escala espaço/tempo que engloba fenômenos atmosféricos com dimensões espaciais da ordem de 1 a 100 quilômetros e dimensão temporal da ordem de 1 hora a 1 dia.

## 4.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES PARA A DINÂMICA DO AR

Os movimentos atmosféricos são governados pelas leis fundamentais da física de conservação de massa, momento e energia [29]. Aplica-se essas leis a um pequeno elemento de fluido (figura 4.1) ou elemento de controle da atmosfera, afim de obter as equações governantes. Dois tipos de elemento de controle são comumente utilizados em dinâmica dos fluidos, o euleriano e o lagrangiano. Neste estudo será utilizada a abordagem euleriana que consiste em estudar o movimento de um fluido por meio de pontos fixos no campo de escoamento, onde a variação de propriedades como velocidade, densidade e pressão é determinada considerando as partículas do fluido que passam por esses pontos.

No modelo proposto os campos de escoamento são obtidos fatiando a atmosfera em lâminas perpendiculares à superfície do lago, são essas lâminas que fornecerão a dinâmica do ar na região da represa. Assim, simplifica-se o problema tridimensional ao tratá-lo por meio de domínios bidimensionais.

### 4.2.1 Equação da continuidade

Para deduzir a equação da continuidade considera-se o princípio de conservação da massa aplicado a um elemento bidimensional de fluido de lados  $\delta x$  e  $\delta z$ , fixado em um sistema de coordenadas cartesianas, conforme ilustrado na figura 4.1. De acordo com o princípio de conservação da massa, a taxa líquida de massa que atravessa o elemento de fluido deve ser igual à taxa de massa que se acumula no mesmo [29].

Admitindo que o elemento tenha dimensões pequenas o suficiente, pode-se escrever propriedades macroscópicas, como velocidade e pressão, na fronteira do elemento como função dos respectivos valores definidos no centro do elemento. Dessa forma, considerando  $\rho$  a densidade do fluido e  $u$  e  $w$  as componentes da velocidade de escoamento  $\mathbf{V}(x, z, t)$  nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente, tem-se que os fluxos de massa  $\rho u$  e  $\rho w$  podem ser obtidos por expansão em série de Taylor em torno do centro do elemento de fluido [19].

A figura 4.1 mostra um elemento bidimensional de fluido, fixado no sistema de coordenadas cartesianas, com dimensões  $\delta x$  e  $\delta z$ . Realizando as expansões, o fluxo de massa que entra pelo lado esquerdo é

$$\rho u|_{x-\delta x/2} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left( -\frac{\delta x}{2} \right) + \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} \left( -\frac{\delta x}{2} \right)^2 + \dots \quad (4.1)$$

enquanto o fluxo de massa através do lado direito é

$$\rho u|_{x+\delta x/2} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \left( \frac{\delta x}{2} \right) + \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} \left( \frac{\delta x}{2} \right)^2 + \dots \quad (4.2)$$

Desprezando os termos de ordem superior, escreve-se (4.1) e (4.2) na forma

$$\begin{aligned}\rho u|_{x-\delta x/2} &= \rho u - \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) \frac{\delta x}{2} \\ \rho u|_{x+\delta x/2} &= \rho u + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right) \frac{\delta x}{2}\end{aligned}$$

onde  $\rho u$  e  $\partial(\rho u)/\partial x$  são avaliados no centro  $O$  do elemento. De forma análoga, obtêm-se as expressões para o fluxo de massa  $\rho w$  nos lados inferior e superior do elemento como

$$\begin{aligned}\rho w|_{z-\delta z/2} &= \rho w - \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \frac{\delta z}{2} \\ \rho w|_{z+\delta z/2} &= \rho w + \left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \frac{\delta z}{2}\end{aligned}$$

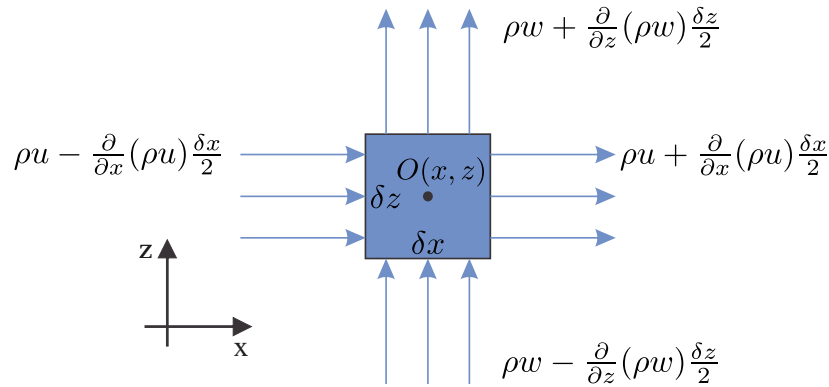


Figura 4.1: Elemento de fluido e fluxos de massa sobre suas fronteiras.

A taxa líquida do fluxo de massa no elemento, devido a componente  $u$  da velocidade de escoamento  $\mathbf{V}$  é dada por

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2}\right] \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2}\right] \delta z = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta z \quad (4.3)$$

e da mesma forma, obtêm-se a expressão

$$\left[\rho w - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \frac{\delta z}{2}\right] \delta x - \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \frac{\delta z}{2}\right] \delta x = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \delta x \delta z \quad (4.4)$$

para a componente  $w$  da velocidade  $\mathbf{V}$ . Somando (4.3) e (4.4), tem-se que a taxa líquida de massa é

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \delta x \delta z \quad (4.5)$$

Quando o ar circula num elemento de fluido e não há processos químicos ou físicos

que o afetam, tem-se que a taxa de variação de massa no elemento,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta z$ , deve se equilibrar com a taxa líquida de massa que atravessa o elemento, equação (4.5), portanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta z = - \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta z$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

A equação (4.6) é conhecida como equação da continuidade e expressa que a soma da taxa de variação da massa dentro do elemento de fluido com a taxa líquida do fluxo de massa através das fronteiras do elemento é zero.

Para o ar em condições padrões, pode-se admitir que um escoamento é incompressível se a velocidade for menor que aproximadamente 100 m/s [55] e a pressão não tiver variações maiores que 10%. Nessas condições, assume-se o escoamento em estudo como incompressível. Neste caso, a densidade do fluido não varia substancialmente com o tempo e conseqüentemente, pode sair do operador de derivação em (4.6), independente do escoamento ser permanente ou não [55]. Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \rho \frac{\partial w}{\partial z}$$

e a equação da continuidade (4.6) assume a forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

#### 4.2.2 Equações de Navier-Stokes

As equações de conservação da quantidade de movimento também são conhecidas como equações de Navier-Stokes. Essas equações permitem descrever o campo de velocidade de um fluido e são obtidas a partir da segunda lei de Newton, que diz que: a taxa de variação temporal do momento de uma partícula é igual a resultante das forças que agem sobre essa partícula [19, 20]. A segunda lei de Newton é expressa por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \Big|_{\text{partícula}}$$

com  $\mathbf{P} = m\mathbf{V}$  o momento de uma partícula fluida de massa  $m = \rho(\delta x)(\delta z)$ . Como o movimento da partícula está conectado a um campo de velocidade  $\mathbf{V}(x, z, t)$ , a partícula está sujeita a dois tipos de aceleração, a aceleração convectiva, pois a partícula é conduzida por convecção no campo de escoamento e a aceleração local, devido ao fato do campo de velocidade ser função do tempo [20]. Assim é necessário obter uma expressão para a aceleração da partícula em

termos de suas coordenadas espaciais e temporal. Tal expressão é obtida aplicando o operador de derivação total  $D$  à velocidade  $\mathbf{V}$ . Obtem-se para a componente da velocidade na direção  $x$ , a seguinte expressão [20]:

$$a_p|_x = \underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{\text{aceleração total}} = \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{aceleração convectiva}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} \quad (4.8)$$

assim, para uma partícula fluida de massa  $m$ , se movendo num campo de velocidade, pode-se escrever a variação temporal do momento na direção  $x$  como

$$\frac{d(mu)}{dt} = \rho(\delta x)(\delta z) \frac{Du}{Dt} = \rho(\delta x)(\delta z) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (4.9)$$

Os movimentos atmosféricos de interesse neste trabalho, que são os movimentos relativos a circulação do ar, são influenciados principalmente pelas forças do gradiente de pressão e temperatura, forças viscosas e a força gravitacional. Passa-se agora à dedução das expressões para as forças de pressão e viscosas, que são classificadas como forças de superfície. Já a força gravitacional atua como uma força externa ao movimento, esta força em conjunto com a variação de temperatura da atmosfera dá origem a uma força de empuxo, que será detalhada na seção 4.2.3.

Para expressar as forças relativas ao gradiente de pressão, considere um elemento de fluido de lados  $\delta x$  e  $\delta z$  centrado num ponto  $O(x, z)$ , conforme figura (4.2). A pressão  $p$  sobre as paredes do elemento são obtidas por expansão em série de Taylor em torno do ponto  $O$ . Assim, desprezando os termos de ordem superior, tem-se que a força de pressão exercida sobre as paredes esquerda e direita do elemento são dadas respectivamente por

$$p_{esq} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta z \quad (4.10)$$

$$p_{dir} = - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta z \quad (4.11)$$

Somando (4.10) e (4.11) expressa-se a força de pressão sobre o elemento de fluido na direção  $x$  como

$$p_x = - \frac{\partial p}{\partial x} (\delta x)(\delta z) \quad (4.12)$$

Passa-se agora, a modelagem matemática das forças viscosas ou de cisalhamento. A viscosidade é uma propriedade do fluido que possui a característica de aumentar sua resistência ao escoamento [31]. Para fluidos newtonianos, como o ar em condições normais de temperatura e pressão [20], as tensões viscosas são linearmente proporcionais à taxa de deformação do

fluido, sendo dadas por [19]

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (4.13)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade molecular ou dinâmica do fluido e  $\nabla$  o operador diferencial gradiente dado por  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ , com  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{k}$  vetores unitários nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente. O coeficiente  $\lambda$  é chamado segundo coeficiente de viscosidade. Pela hipótese de Stokes, para fluidos newtonianos [48]

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

A figura (4.2) mostra as tensões viscosas sobre um elemento de fluido na direção  $x$ . Note que as tensões podem ser de dois tipos: normais ou de cisalhamento. Tanto as tensões normais quanto as de cisalhamento possuem a característica de deformar o elemento, sendo portanto, proporcionais à taxa de deformação e ao coeficiente de viscosidade do mesmo [55].

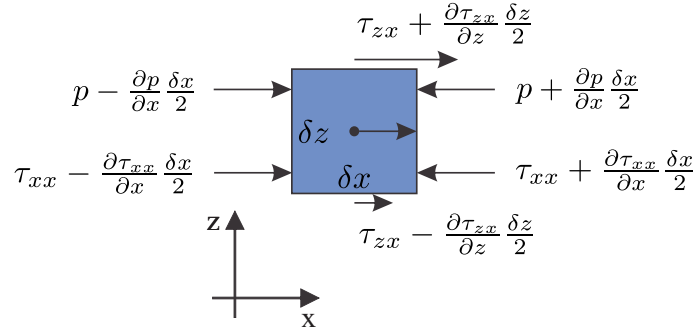


Figura 4.2: Pressão e tensões na direção  $x$  sobre um elemento de fluido. Adaptado de [19].

Na nomenclatura das tensões viscosas, o subscrito  $zx$  indica que  $\tau_{zx}$  é a tensão que atua na direção  $x$  sobre a superfície normal à direção  $z$ . As tensões sobre um elemento de fluido bidimensional de lados  $\delta x$  e  $\delta z$  podem ser obtidas expandindo  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{zx}$  em série de Taylor a partir do centro do elemento. Realizando as expansões e somando os resultados, obtêm-se a tensão atuando sobre um elemento de fluido na direção  $x$ :

$$\begin{aligned}F_x^{visc} &= \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) (\delta z) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) (\delta z) + \\ &\quad \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) (\delta x) - \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) (\delta x) = \\ &\quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} (\delta x) (\delta z) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} (\delta x) (\delta z)\end{aligned}\quad (4.14)$$

Substituindo as expressões (4.13) em (4.14) chega-se a

$$F_x^{visc} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] (\delta x)(\delta z) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] (\delta x)(\delta z)$$

e lembrando que  $\lambda = -2\mu/3$ , tem-se reorganizando os termos que

$$F_x^{visc} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\delta x)(\delta z) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) (\delta x)(\delta z) \quad (4.15)$$

Admitindo que o fluido é incompressível, isto é  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$ , a expressão (4.15) torna-se

$$F_x^{visc} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) (\delta x)(\delta z) \quad (4.16)$$

onde (4.16) representa as forças de tensão viscosas atuantes na direção  $x$  do escoamento.

A força resultante  $\mathbf{F}$  que age sobre uma partícula fluida, compreende da soma da resultante das forças de superfície  $\mathbf{f}_s$  com a resultante das forças externas  $\mathbf{f}_e$  sobre a partícula. Assim, somando (4.12), (4.14) e a força externa  $\rho(f_e)_x(\delta x)(\delta z)$ , obtém-se a componente  $x$  da força  $\mathbf{F}$ , como

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}(\delta x)(\delta z) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}(\delta x)(\delta z) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}(\delta x)(\delta z) + \rho(f_e)_x(\delta x)(\delta z) \quad (4.17)$$

Igualando (4.17) à (4.9) tem-se

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho(f_e)_x \quad (4.18)$$

e realizando cálculos semelhantes para a componente  $z$ , obtém-se

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho(f_e)_z \quad (4.19)$$

Considerando (4.9)-(4.17), expressa-se a equação de Navier-Stokes na direção  $x$  do escoamento como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (f_e)_x \quad (4.20)$$

com  $\nu = \mu/\rho$  a viscosidade cinemática do fluido. Procedendo de forma análoga deduz-se a equação de Navier-Stokes para a direção  $z$ , a qual é dada pela seguinte equação

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (f_e)_z \quad (4.21)$$

As equações (4.20) e (4.21) estão na forma não-conservativa. No entanto, equações

escritas na forma conservativa apresentam melhores propriedades numéricas do que as escritas na forma não-conservativa [19]. Portanto, reescreve-se as equações de Navier-Stokes na sua forma conservativa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (f_e)_x \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (f_e)_z \quad (4.23)$$

### 4.2.3 Forças externas

O escoamento em estudo está sujeito a variações de temperatura. Alterações na temperatura causam variações na densidade do fluido, tendo em vista que um fluido quando aquecido aumenta de volume, tornando-se mais leve, o que naturalmente provoca sua subida devido à força de empuxo. Além disso, propriedades como viscosidade dinâmica, coeficiente de expansão térmica, calor específico e difusividade térmica também dependem da temperatura. Contudo a incorporação dessas últimas quantidades como propriedades dependentes da temperatura leva a equações não-lineares complexas.

Nesse contexto, considera-se a aproximação de Boussinesq, segundo a qual, para pequenas variações de temperatura, pode-se tomar a densidade constante, exceto no termo de empuxo decorrente das variações de temperatura, e as demais quantidades termodinâmicas também constantes [19]. Em outras palavras, essa aproximação permite que a equação da continuidade (4.7) mantenha sua forma incompressível e que nas equações do movimento (4.22) e (4.23) a densidade varie apenas nos termos correspondentes ao empuxo.

O termo de empuxo térmico pode ser aproximado por

$$\rho(T) \approx \rho_0 [1 - \beta^*(T - T_0)] \quad (4.24)$$

onde  $\beta^*$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido [23]. Fisicamente, na presença de um campo gravitacional, a variação da densidade resulta em uma força de empuxo sobre os elementos de fluidos, provocando sua subida. A força de gravidade e de empuxo têm direções opostas e a oposição dessas forças pode ser expressa por

$$\rho(T)\mathbf{g} = \rho_0 [1 - \beta^*(T - T_0)]\mathbf{g} \quad (4.25)$$

em que  $\mathbf{g}$  representa a aceleração da gravidade [19].

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, temos que as componentes do vetor aceleração da gravidade nas direções horizontal e vertical, no sistema correspondente aos eixos  $x$  e  $z$ , são dadas por  $g_x = g \sin \theta$  e  $g_z = g \cos \theta$ , com  $\theta$  o ângulo formado entre o vetor  $\mathbf{g}$  e o eixo  $z$ , veja figura 4.3.

Substituindo  $(f_e)_x$  e  $(f_e)_z$  pelas componentes da equação (4.25), segue que as equa-

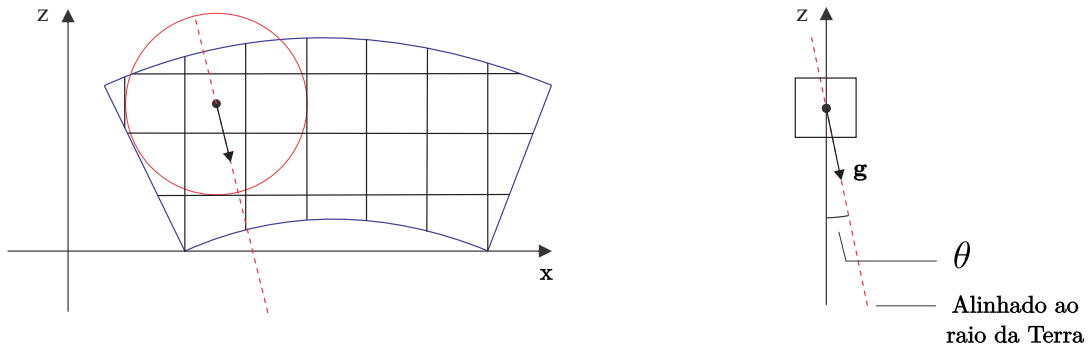


Figura 4.3: Força de gravidade atuante sobre um elemento de fluido atmosférico.

ções (4.22) e (4.23) são escritas como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - [1 - \beta^*(T - T_0)]g_x \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - [1 - \beta^*(T - T_0)]g_z \quad (4.27)$$

No entanto, como o objetivo é simular a dinâmica da evaporação apenas para a região do reservatório de Itaipu, pode-se desprezar no modelo matemático a curvatura da Terra, tendo em vista que a região é muito pequena em relação ao globo terrestre. Consequentemente a força gravitacional, cuja direção aponta para o centro da terra, estará alinhada ao eixo vertical  $z$ . Assim,  $\theta = 0$  radianos, implica  $g_x = 0$  na equação (4.26), resultando em

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - [1 - \beta^*(T - T_0)]g_z \quad (4.29)$$

com  $g_z = g$ .

#### 4.2.4 Equação da temperatura

O termo de empuxo presente nas equações do movimento (4.26), (4.27) ou (4.29) traz consigo a variável temperatura, logo torna-se necessário uma equação que descreva a evolução da temperatura no domínio. A temperatura  $T$  pode ser considerada como uma medida do nível de energia interna de um fluido [55]. Portanto, pode-se deduzir uma equação para a temperatura aplicando-se a primeira lei da termodinâmica a um elemento de fluido. A primeira lei da termodinâmica estabelece que a variação temporal da energia total  $E$  no elemento é igual à taxa de calor  $Q$  para dentro do elemento somado a taxa de trabalho  $W$  realizado por forças externas sobre o mesmo [29]. Assim a equação da energia pode ser escrita na forma

$$\rho \frac{DE}{Dt} = Q + W \quad (4.30)$$

onde  $E = e + V^2/2$ , com  $e$  representando a energia interna do fluido proveniente da vibração das moléculas que o compoem e  $V^2/2$  a energia cinética de translação devido ao seu movimento.

Desprezando a taxa de calor produzida por agentes internos ou externos, como por exemplo reações químicas ou absorção de radiação pelo fluido, o termo  $Q$  conterà apenas o fluxo de calor  $\mathbf{q}$  conduzido através das paredes do elemento, que é expresso pela lei de Fourier  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ , com  $\kappa$  o coeficiente de condutividade térmica [55]. Portanto

$$Q = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \kappa \nabla^2 T \quad (4.31)$$

Já o trabalho realizado sobre o fluido pela pressão, tensões viscosas e também pela força de empuxo é dado por

$$W = -\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(up)}{\partial z} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{V} \quad (4.32)$$

Substituindo (4.31) e (4.32) em (4.30) têm-se

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(up)}{\partial z} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{zz})}{\partial z} + \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{V} \quad (4.33)$$

Contudo, a equação (4.33) pode ser simplificada se escrita apenas em termos da energia interna  $e$ . Primeiramente observe que

$$\begin{aligned} u \frac{Du}{Dt} &= u \frac{\partial u}{\partial t} + u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial t} \right] + u \frac{1}{2} \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + w \frac{1}{2} \left[ 2u \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} \right] + u \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + w \frac{1}{2} \left[ u \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial(uu)}{\partial t} + u \frac{1}{2} \frac{\partial(uu)}{\partial x} + w \frac{1}{2} \frac{\partial(uu)}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + u \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + w \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} \\ &= \frac{Du^2/2}{Dt} \end{aligned}$$

Assim multiplicando as equações do momento (4.18) e (4.19) nas direções  $x$  e  $z$ , pelas respectivas velocidades  $u$  e  $w$  obtêm-se

$$\rho \frac{Du^2/2}{Dt} = -u \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho u f_{ex} \quad (4.34)$$

e

$$\rho \frac{Dw^2/2}{Dt} = -w \frac{\partial p}{\partial z} + w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho w f_{ez} \quad (4.35)$$

Somando (4.34) e (4.35) têm-se

$$\begin{aligned} \rho \frac{D(u^2 + w^2)/2}{Dt} = \rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} &= u \frac{\partial p}{\partial x} - w \frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \\ &w \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + w \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Expandindo as derivadas dos termos viscosos e de pressão em (4.33) e subtraindo (4.36) resulta que

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.37)$$

Substituindo as tensões viscosas (4.13) em (4.37) e densenvolvendo os termos resultantes, chega-se à

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \Phi \quad (4.38)$$

onde,

$$\Phi = 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2$$

é a função de dissipação viscosa do fluido.

Uma vez que  $p(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0$ , pois o fluido considerado é incompressível, tem-se introduzindo a entalpia específica  $h = e + \frac{p}{\rho}$  em (4.38) que

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (4.39)$$

Como no escoamento avaliado, o número de  $Mach^2$   $M$  é muito menor do que um, pode-se desprezar o termo  $\frac{Dp}{Dt}$  e a dissipação viscosa  $\Phi$  [19]. Tem-se ainda que, para fluidos ideais a relação entre densidade, pressão e temperatura é dada pela equação de estado (3.1). Para um fluido que se comporta como um gás ideal, pode-se ainda, relacionar entalpia e energia interna à temperatura, considerando as seguintes equações

$$h = c_p T \quad e = c_v T \quad (4.40)$$

<sup>2</sup>O número de *Mach* é definido como a razão entre a velocidade de escoamento e a velocidade local do som no fluido [20].

em que  $c_p$  e  $c_v$  representam calor específico à pressão constante e à volume constante, respectivamente. Portanto, considerando (4.31),  $M \ll 1$ ,  $h = h(x, z, t)$  e as equações (4.40), pode-se reescrever (4.39) na forma

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \sigma \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (4.41)$$

com  $\sigma = \frac{\kappa}{\rho c_p}$  o coeficiente de difusividade térmica do fluido. A equação (4.41) recebe o nome de equação do calor advectivo-difusivo.

### 4.3 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DA UMIDADE

Na modelagem matemática do problema, considera-se que o vapor d'água emitido pelo reservatório de Itaipu escoar com o campo de velocidade desenvolvido pelo ar. Portanto, utiliza-se o campo de velocidade obtido no modelo da dinâmica do ar para descrever o transporte advectivo da umidade.

O princípio de conservação de massa também se aplica no transporte de umidade. A variação por unidade de tempo da massa de umidade, dentro de um elemento de fluido, é igual ao fluxo de entrada menos o fluxo de saída. Supondo um elemento de fluido de lados  $\delta x$  e  $\delta z$ , então a variação da quantidade total de massa de umidade dentro do elemento de fluido é dada por  $\frac{\partial C}{\partial t} \delta x \delta z$ , onde  $C$  representa a concentração de umidade. Os fluxos de massa no elemento de fluido, nas direções  $x$  e  $z$ , são iguais ao produto da concentração  $C$  pelas respectivas velocidades de transporte  $u$  e  $w$ . Os fluxos podem ser obtidos a partir de expansões em série de Taylor no centro do elemento.

Somando os fluxos através das quatro arestas do elemento segue que o fluxo resultante é  $-\left[ \frac{\partial(uC)}{\partial x} \delta x \delta z + \frac{\partial(wC)}{\partial z} \delta z \delta x \right]$ . Igualando a variação temporal da quantidade de massa ao fluxo resultante e simplificando, obtem-se a equação de conservação de massa para a umidade, ou seja,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial wC}{\partial z} \right] \quad (4.42)$$

Além da velocidade de escoamento do ar  $\mathbf{V} = (u, w)$ , chamada velocidade advectiva, a umidade apresenta uma velocidade de escoamento difusiva  $V_D$ , associada ao processo de difusão molecular, o qual está presente mesmo quando o fluido está em repouso. Portanto, decompõe-se a velocidade total do escoamento como velocidade advectiva, obtida a partir do modelo dinâmico do ar e velocidade difusiva. Assim, reescreve-se a equação (4.42) como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \underbrace{\left( \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial wC}{\partial z} \right)}_{\text{velocidade advectiva}} - \underbrace{\nabla V_D C}_{\text{velocidade difusiva}} \quad (4.43)$$

O fluxo difusivo em fluidos newtonianos pode ser modelado por meio da Lei de Fick da difusão molecular, a qual diz que o fluxo difusivo de uma espécie reativa, nesse caso a umidade, é proporcional ao gradiente das concentrações e ocorre no sentido oposto ao do gradiente. Matematicamente tem-se que

$$V_D C = -D_v \left( \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

com  $D_v$  o coeficiente de difusão molecular da umidade no ar, o qual, devido a natureza isotrópica da umidade em relação a difusão, é o mesmo para as direções  $x$  e  $z$ . Portanto, pode-se reescrever (4.43) na forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \left( \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial wC}{\partial z} \right) + D_v \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (4.44)$$

A equação (4.44) recebe o nome de equação de transporte advectivo-difusivo da umidade. Como o campo de velocidade avaliado é independente da concentração, isto é  $u$  e  $w$  independem de  $C$ , temos que (4.44) é linear.

#### 4.4 MODELAGEM DO DOMÍNIO DE ESCOAMENTO

Para avaliar a dinâmica da umidade emitida pelo reservatório de Itaipu, considera-se como domínio de escoamento uma lâmina vertical perpendicular à superfície do reservatório conforme a figura 4.4. Alguns modelos de geometrias, para quatro situações distintas sobre o reservatório, são apresentados na figura 4.6. Na elaboração das fronteiras do domínio adotou-se algumas simplificações, com o objetivo de suavizar possíveis distorções nas células que irão compor a malha no interior do domínio.

Visando englobar a região de camada limite atmosférica (Figura 3.1), considera-se na modelagem domínios com comprimento máximo de 1000 m na direção vertical e 70000 m na direção horizontal (Figura 4.4).

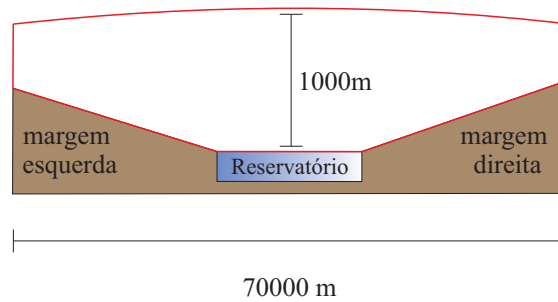


Figura 4.4: Configuração geral do domínio de escoamento sobre o reservatório.

Localizado na fronteira, entre Brasil e Paraguai, o reservatório de Itaipu tem sua superfície, em nível normal de capacidade, situada a uma altitude aproximada de 220 m em relação ao nível do mar e conforme mencionado na seção 2.3, a altitude do relevo ao redor do reservatório varia em torno de 220 a 700 metros. Para obter informações sobre a variação do relevo, utilizou-se o Atlas Geomorfológico do Estado do Paraná [39] e dados das referências [6, 32].

Em [32, 39] encontra-se informações sobre a parte brasileira do relevo ao redor do reservatório, dividida em subunidades morfoesculturais. O lado paraguaio da região do reservatório, teve informações de relevo obtidas de [6], onde encontra-se detalhadas as subunidades morfoesculturais da região paraguaia ao redor do reservatório.

Na figura 4.6 apresenta-se quatro lâminas de umidade que incorporam as características de relevo ao redor do reservatório e suas variações de largura. Estas lâminas estão posicionadas nas regiões indicadas na figura 4.5.



Figura 4.5: Posicionamento das lâminas sobre o reservatório.

Para a lâmina 1, tem-se que a variação de altitude do relevo ao redor do reservatório é de aproximadamente 220-400 m à esquerda e à direita. Já as lâminas 2 e 3 estão localizadas

em uma região onde o relevo varia em torno de 220-400 m para o lado esquerdo e 220-700 m para o lado direito. Finalmente, tem-se para a lâmina 4 uma variação aproximada de 220-500 m tanto à esquerda, quanto à direita do reservatório. As dimensões de cada uma das lâminas são apresentadas na figura 4.6.

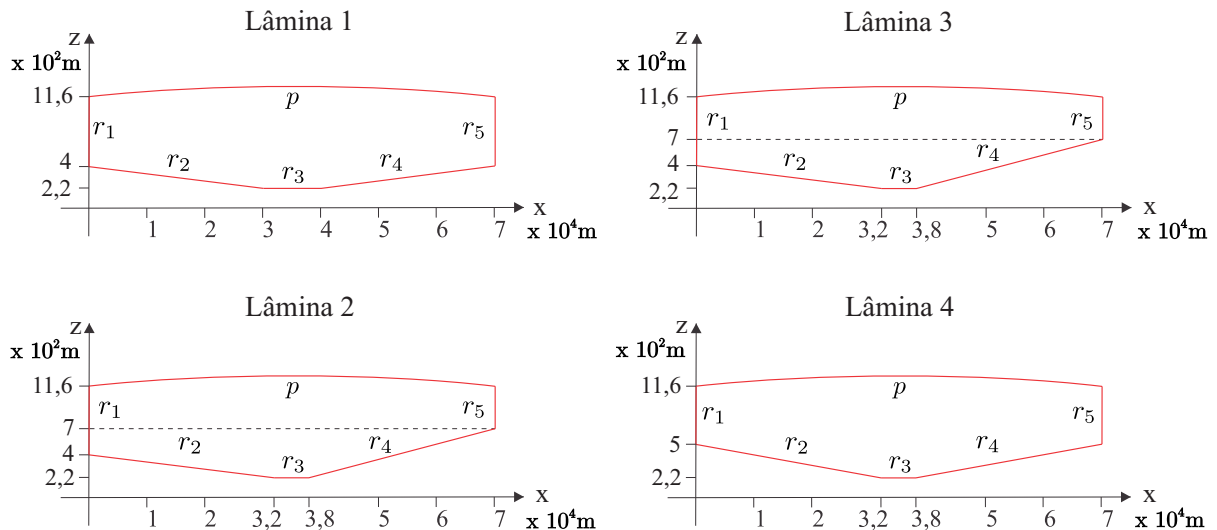


Figura 4.6: Dimensões e equações das lâminas de umidade 1, 2, 3 e 4.

Representa-se o terreno (margens) ao redor do reservatório por meio dos segmentos de retas  $r_2$  e  $r_4$ . Note que as variações de altitude do relevo é simplificada ao ser representada por curvas lineares. O segmento  $r_3$  representa a superfície do lago e devido ao alinhamento das lâminas com a direção do vento, bem como sua disposição ao longo do reservatório, a extensão desse segmento varia entre 6 e 10 km, ao invés dos 7 km de largura média mencionado na seção 2.3. As laterais do domínio foram modeladas pelos segmentos  $r_1$  e  $r_5$  e o contorno superior é descrito pela parábola  $p$ , observando que a escolha de uma parábola para a fronteira superior do domínio não afeta significativamente as simulações numéricas.

Neste estudo, simula-se computacionalmente o escoamento da umidade acima do reservatório de Itaipu, portanto, no próximo capítulo é realizado o tratamento numérico dos domínios e das equações (4.7), (4.26), (4.27), (4.41) e (4.44) que descrevem a dinâmica da umidade nas lâminas.

## 5 MODELO NUMÉRICO

O problema da dinâmica da evaporação representado matematicamente pelo modelo obtido com as equações (4.7), (4.26), (4.27), (4.41) e (4.44) relaciona grandezas como temperatura, velocidade e pressão para um contínuo de espaço e tempo. Aplicadas as condições iniciais e de contorno, pode-se a partir do sistema ar/umidade prever o comportamento da evaporação para diferentes situações. Pode-se, por exemplo, variar as concentrações de umidade e velocidades do vento e comparar os resultados obtidos. No entanto, não é possível analisar o problema de forma contínua, pois não se dispõe da solução analítica do sistema, nem meios para determiná-la. Recorre-se portanto, ao uso de métodos computacionais para analisar o problema considerado.

### 5.1 MALHA COMPUTACIONAL

A tarefa do método numérico é resolver as equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes, por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Diferentemente da solução analítica, que pode ser obtida em uma região contínua, a solução numérica é calculada em um número finito de pontos do domínio. É necessário portanto, que se realize a discretização do domínio, isto é, dividi-lo em uma quantidade finita de pontos. Ao conjunto dos pontos discretos dá-se o nome de malha.

Devido ao relevo da região em estudo, descrito na seção 4.4, o domínio de escoamento, figura 4.6, assume forma irregular, necessitando portanto, ser representada por meio de alguma geometria que se adapte às variações de elevação do terreno. Recorre-se então ao sistema de coordenadas generalizadas, que tem como função, representar geometrias complexas nos casos em que o sistema cartesiano não consegue representar a fronteira de forma adequada, devido ao fato de o domínio físico não coincidir com o domínio da malha [7]. Assim, transforma-se numericamente o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, z)$  no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \zeta)$ , mapeando-se um domínio com geometria irregular escrito no sistema  $(x, z)$  em um domínio com geometria regular escrita em  $(\xi, \zeta)$ . O sistema  $(x, z)$  é denominado domínio físico, figura 5.1 enquanto que o sistema  $(\xi, \zeta)$  é chamado domínio transformado ou computacional, figura 5.2.

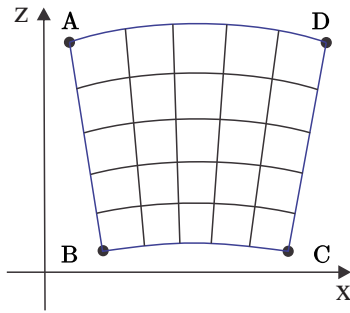


Figura 5.1: Domínio físico.

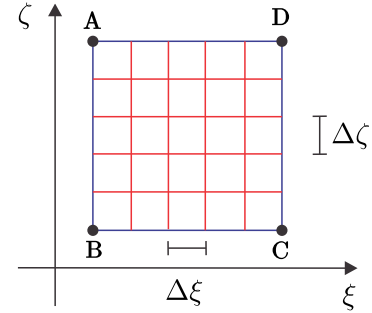


Figura 5.2: Domínio transformado.

As coordenadas de um ponto arbitrário no sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi, \zeta)$  estão relacionadas às coordenadas no sistema cartesiano  $(x, z)$  por meio das equações de transformação

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -J \frac{\partial x}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -J \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = J \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (5.1)$$

onde

$$J = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^{-1} \quad (5.2)$$

é o jacobiano da transformação. Tais métricas podem ser encontradas em [36].

A geração das linhas  $\xi$  e  $\zeta$  no interior da malha para o caso bidimensional [11], considerando as métricas de transformação apresentadas em (5.1), são dadas por

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} + \left( \frac{1}{J^2} \right) \left( P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (5.3)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \zeta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} + \left( \frac{1}{J^2} \right) \left( P \frac{\partial z}{\partial \xi} + Q \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (5.4)$$

onde

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \quad (5.5)$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (5.6)$$

$$\gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \quad (5.7)$$

são os coeficientes de acoplamento entre as equações (5.3) e (5.4). As funções  $P(\xi, \zeta)$  e  $Q(\xi, \zeta)$  são responsáveis pelo aumento ou redução de linhas coordenadas num determinado ponto da

malha, de acordo com as características do problema estudado [38], sendo dadas por

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \zeta) &= - \sum_{j=1}^{n_j} a_j \text{sign}(\xi - \xi_j) e^{-c_j |\xi - \xi_j|} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n_i} b_i \text{sign}(\xi - \xi_i) e^{-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\zeta - \zeta_i)^2}} \\
 Q(\xi, \zeta) &= - \sum_{j=1}^{n_j} a_j \text{sign}(\zeta - \zeta_j) e^{-c_j |\zeta - \zeta_j|} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{n_i} b_i \text{sign}(\zeta - \zeta_i) e^{-d_i \sqrt{(\zeta - \zeta_i)^2 + (\xi - \xi_i)^2}}
 \end{aligned}$$

onde os índices  $n_i$  e  $n_j$ , presentes nos somatórios, representam o número total de linhas nas direções  $\xi$  e  $\zeta$  respectivamente, e os números reais  $a_j$ ,  $b_i$ ,  $c_j$ ,  $d_i$  são ajustados via experimentação numérica com a função de aumentar ou diminuir a atração das linhas  $\xi$  e  $\zeta$  para  $\xi_i$  e  $\zeta_i$  [13].

Para que a solução numérica represente de modo satisfatório os gradientes de interesse no problema é fundamental que se determine adequadamente a quantidade e a distribuição dos pontos no domínio. Contudo, à medida que se aumenta o número de pontos, isto é, que se refina a malha, aumenta-se também o esforço computacional necessário na obtenção da solução.

Na figura 5.3 apresenta-se os detalhes da malha computacional para o escoamento da umidade. Destaca-se algumas partes da malha, com o objetivo de evidenciar que as células não sofreram rotação no processo de transformação. Adianta-se que esse fato irá permitir desprezar a constante gravitacional nas faces verticais das células, simplificando o cálculo do campo de velocidade no sistema de coordenadas generalizadas.

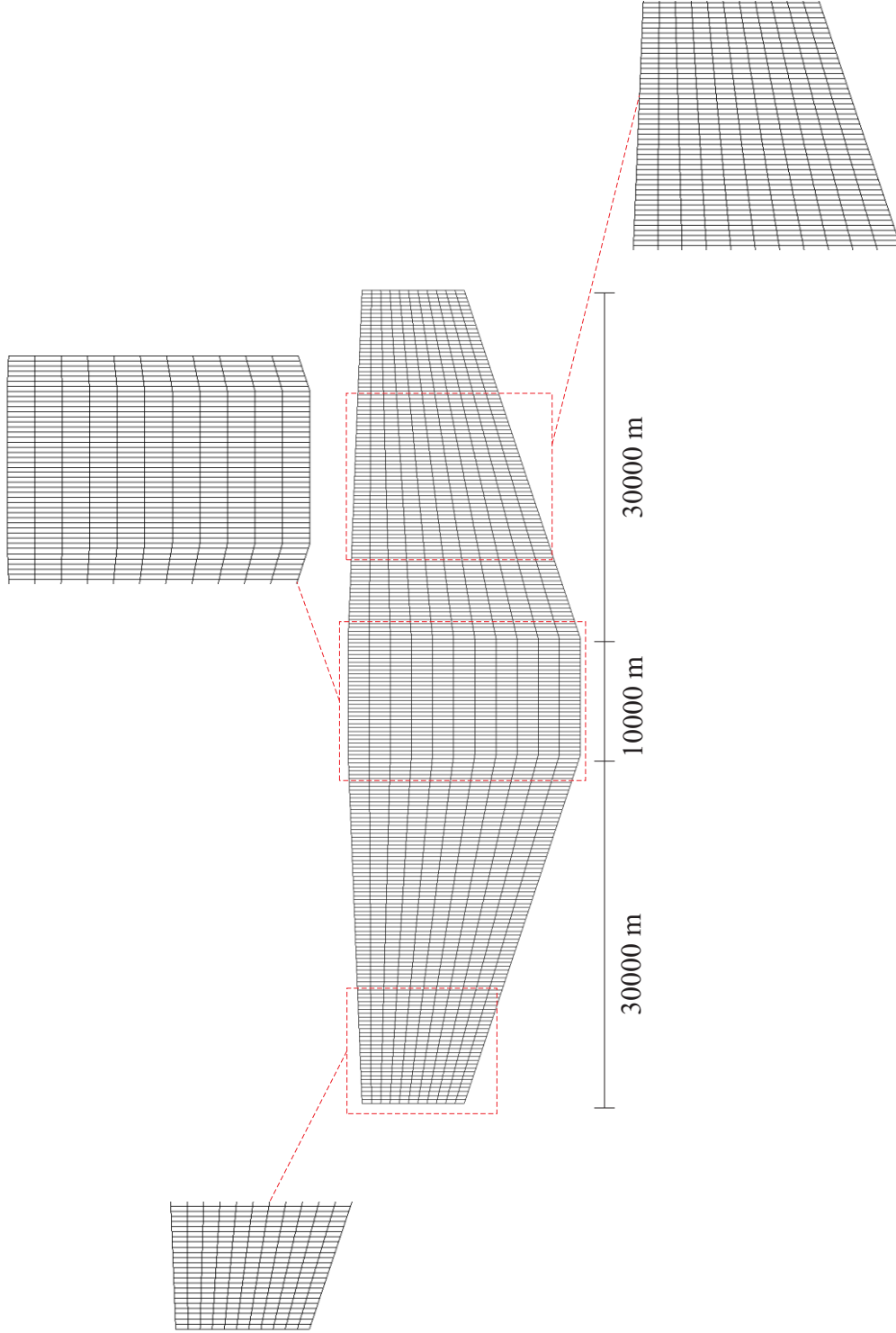


Figura 5.3: Detalhes da malha computacional.

## 5.2 EQUAÇÕES GOVERNANTES EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Realizada a transformação do domínio para o sistema de coordenadas generalizadas, deve-se agora, transformar as equações (4.7), (4.26), (4.27), (4.41) e (4.44), as quais formam junto com o domínio de escoamento, o modelo matemático para a dinâmica da umidade evaporada pelo reservatório de Itaipu.

### 5.2.1 Equação da continuidade em coordenadas generalizadas

Nesta seção, apresenta-se a transformação da equação (4.7) para o sistema de coordenadas generalizadas. Para isso, define-se as variáveis

$$A = u \quad e \quad B = w \quad (5.8)$$

e escreve-se (4.7) na forma

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad (5.9)$$

com

$$A = A(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$B = B(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

Uma vez que não está sendo considerado malhas móveis,  $\tau$  não é função de  $x$  e  $z$ , segue-se portanto, a partir da regra da cadeia que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (5.11)$$

Substituindo (5.10) e (5.11) em (5.9) tem-se

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

que multiplicada por  $(1/J)$  torna-se

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} = 0 \quad (5.12)$$

Considerando a derivada do produto, obtêm-se as expressões

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - B \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( B \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - B \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.16)$$

Substituindo (5.13)-(5.16) em (5.12) chega-se a equação

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - A \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - B \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( B \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - B \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

a qual reorganizada resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( B \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) = \\ & A \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right] + B \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Contudo, considerando as métricas de transformação (5.1), obtêm-se que

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( -\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \xi} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} = 0 \quad (5.19)$$

e conseqüentemente a equação (5.17) torna-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( B \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( B \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) = 0$$

ou ainda,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{A}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{B}{J} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{A}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{B}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.20)$$

Finalmente, substituindo as variáveis (5.8) e colocando  $(1/J)$  em evidência tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.21)$$

onde os termos entre parenteses são definidos como

$$U = \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (5.22)$$

$$W = \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (5.23)$$

e representam as componentes contravariantes do vetor velocidade  $\mathbf{V}$ . O sistema de vetores de base contravariante utilizado, surge da necessidade de decompor o vetor velocidade em uma base cujo os vetores sejam normais às linhas coordenadas  $\xi$  e  $\zeta$ . Considerando as métricas de transformação dadas em (5.1), tem-se que as componentes dadas em (5.22) e (5.23) podem ser reescritas na seguinte forma

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = \frac{1}{J} \left( u \left( J \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + w \left( -J \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) \right) \\ &= u \frac{\partial z}{\partial \zeta} - w \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{1}{J} \left( u \left( -J \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + w \left( J \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right) \\ &= -u \frac{\partial z}{\partial \xi} + w \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Como as componentes contravariantes  $U$  e  $W$  são sempre normais às linhas  $\xi$  e  $\zeta$ , elas são responsáveis pelo fluxo de massa através das linhas coordenadas ao invés de  $u$  e  $w$ . Além disso, fazem com que a equação da continuidade no plano transformado exiba estrutura semelhante à equação (4.7), escrita no sistema de coordenadas ortogonal [38].

Assim, mantendo a hipótese de incompressibilidade do fluido, escreve-se a equação da continuidade em termos das componentes contravariantes na forma

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} = 0 \quad (5.26)$$

mantendo o fato de que a quantidade de massa que entra em um determinado elemento de fluido deve sair e/ou se acumular no mesmo.

### 5.2.2 Equações de Navier-Stokes em coordenadas generalizadas

O objetivo desta subseção é escrever as equações (4.26)-(4.27) em coordenadas generalizadas. Seguindo o mesmo procedimento usado na transformação da equação da continuidade, define-se as seguintes variáveis

$$C = u, \quad D = uu - \nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad E = ww - \nu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad S^u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g^u \quad (5.27)$$

em que  $g^u = -[1 - \beta^*(T - T_0)]g$  corresponde ao termo de empuxo. Introduzindo (5.27) na equação de Navier-Stokes (4.26), obtém-se

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial z} = S^u \quad (5.28)$$

onde,

$$C = C(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$D = D(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$E = E(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

Como  $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$  e  $\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$ , pois  $\tau$  depende apenas de  $t$ , segue pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial E}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (5.31)$$

Substituindo (5.29)-(5.31) em (5.28) e multiplicando o resultado por  $(1/J)$  obtém-se

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial C}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{1}{J} + \frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial D}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} + \frac{\partial E}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} = \frac{S^u}{J} \quad (5.32)$$

Considere as seguintes expressões

$$\frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) - C \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( C \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) - C \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( C \frac{1}{J} \right) - C \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( D \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - D \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( D \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) - D \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( E \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - E \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( E \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) - E \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \quad (5.39)$$

obtidas a partir da regra de derivação do produto. Substituindo (5.33)-(5.39) em (5.32) e reor-

ganizando os termos chega-se à seguinte equação

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{C}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{D}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{E}{J} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{C}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{D}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{E}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{C}{J} \right) \\
= & C \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \right) \right] \\
+ & D \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \right] \\
+ & E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \right] + \frac{S^u}{J} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Como  $\xi = \xi(x, z, t)$ ,  $\zeta = \zeta(x, z, t)$  e  $\tau = \tau(t)$  temos pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{5.42}$$

onde  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = 0$ , pois na formulação do problema em estudo não há movimento de malha com o tempo. Note ainda, que  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$ , logo

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} \tag{5.43}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} \tag{5.44}$$

Introduzindo as métricas apresentadas em (5.1) nas expressões (5.43) e (5.44), pode-se reescrevê-las como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -J \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \tau} + J \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \tau} \tag{5.45}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} - J \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} \tag{5.46}$$

Recorrendo-se ao jacobiano da transformação (5.2) e considerando as equações (5.45) e (5.46), obtêm-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) = \\
\frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) = \\
& -\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \\
& \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial \tau \partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = 0 \tag{5.47}
\end{aligned}$$

onde (5.47), juntamente com (5.18) e (5.19) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) = 0 \quad (5.50)$$

Substituindo os resultados (5.48)-(5.50) em (5.40) e considerando as variáveis definidas em (5.27), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \frac{\nu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u}{J} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) - \frac{\nu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right) \\ & = -\frac{1}{\rho J} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\mathbf{g}^u}{J} \end{aligned} \quad (5.51)$$

com

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (5.52)$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \quad (5.53)$$

as componentes contravariantes do vetor velocidade  $\mathbf{V}$  [36]. No entanto, conforme mencionado, não está sendo considerado malhas móveis neste trabalho, neste caso, pode-se escrever (5.52) e (5.53) como

$$\tilde{U} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = U \quad (5.54)$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = \frac{1}{J} \left( u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = W \quad (5.55)$$

Assim, segue de (5.51), (5.54) e (5.55) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (Wu) = & -\frac{1}{\rho J} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\nu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\nu}{J} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mathbf{g}^u}{J} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Como

$$u = u(x, z, t) = u(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$p = p(x, z, t) = p(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

e lembrando que  $\tau$  é função apenas de  $t$ , tem-se pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.59)$$

Considerando (5.1), (5.57)-(5.59) segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \left( \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \left( J \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \left( -J \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = J \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right] \quad (5.62)$$

Aplicando novamente as métricas de transformação (5.1) temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 &= \left( J \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( -J \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 \\ &= J^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \left( J \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \left( -J \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \left( -J \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) \left( J \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \\ &= -J^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 &= \left( -J \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 + \left( J \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \\ &= J^2 \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

Substituindo os coeficientes dados por (5.5)-(5.7) em (5.63)-(5.65) segue que

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 = J^2 \alpha \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -J^2 \beta \quad (5.67)$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 = J^2 \gamma \quad (5.68)$$

De (5.60) e (5.61), obtem-se

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = J^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = -J^2 \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + J^2 \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (5.70)$$

Assim, de (5.56), (5.62), (5.69) e (5.70) segue que

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{u}{J}\right)}_{\text{termo temporal } \mathcal{T}(u)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Wu)}_{\text{termo convectivo } \mathcal{C}(u)} &= \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right]}_{\text{termo de pressão } \mathcal{P}^u} \\ + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo viscoso } \mathcal{V}(u)} & \quad (5.71) \\ + \underbrace{\frac{\mathbf{g}^u}{J}}_{\text{termo de empuxo } \mathcal{E}^u} & \end{aligned}$$

onde a equação (5.71) corresponde a equação de Navier Stokes na direção  $x$ , escrita para o sistema de coordenadas generalizadas.

Considerando as variáveis (5.27) escritas para a equação (4.27), obtem-se, em coordenadas generalizadas, a equação de Navier-Stokes correspondente a direção  $z$

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{w}{J}\right)}_{\text{termo temporal } \mathcal{T}(w)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(Uw) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Ww)}_{\text{termo convectivo } \mathcal{C}(w)} &= \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]}_{\text{termo de pressão } \mathcal{P}^w} \\ + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo viscoso } \mathcal{V}(w)} & \quad (5.72) \\ + \underbrace{\frac{\mathbf{g}^w}{J}}_{\text{termo de empuxo } \mathcal{E}^w} & \end{aligned}$$

### 5.2.3 Equação da temperatura em coordenadas generalizadas

Passa-se agora à transformação da equação da temperatura (4.41) para o sistema de coordenadas generalizadas. Como o processo de transformação é semelhante ao realizado na transformação das equações de Navier-Stokes, algumas etapas serão omitidas.

Definindo as variáveis

$$F = T, \quad G = uT - \sigma \frac{\partial T}{\partial x} \quad e \quad H = wT - \sigma \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5.73)$$

e introduzindo-as em (4.41), obtem-se

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (5.74)$$

com

$$F = F(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$G = G(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

$$H = H(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

Aplicando a regra da cadeia às expressões  $F$ ,  $G$  e  $H$  e substituindo o resultado em (5.74), encontra-se

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (5.75)$$

onde (5.75) multiplicada por  $(1/J)$  resulta em

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{1}{J} + \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} = 0 \quad (5.76)$$

Considerando a derivada do produto e realizando alguns cálculos algébricos, chega-se partindo de (5.76) à seguinte equação

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{F}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{G}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{H}{J} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{F}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{G}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{H}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{F}{J} \right) \\ &= F \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{J} \right) \right) \right] \\ &+ G \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{1}{J} \right) \right) \right] \\ &+ H \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{1}{J} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

onde as expressões entre colchetes se anulam conforme (5.18), (5.19) e (5.47), resultando em

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{F}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{G}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{H}{J} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{F}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{G}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{H}{J} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{F}{J} \right) = 0 \quad (5.77)$$

Substituindo as expressões definidas em (5.73), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right) &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{T}{J} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{J} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{T}{J} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{J} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

e considerando (5.52)-(5.55), reescreve-se (5.78) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (UT) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (WT) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sigma}{J} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\sigma}{J} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.79)$$

Tendo em vista que

$$T = T(x, z, t) = T(\xi(x, z, t), \zeta(x, z, t), \tau(t))$$

escreve-se usando a regra da cadeia, as seguintes expressões

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (5.81)$$

Considerando (5.80) e (5.81) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial T}{\partial \xi} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial T}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{\partial T}{\partial \xi} \left( \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.83)$$

e usando (5.63)-(5.68) pode-se escrever (5.82) e (5.83) na forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} = J^2 \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - J^2 \beta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} = -J^2 \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} + J^2 \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} \quad (5.85)$$

Finalmente, encontra-se a partir de (5.79), (5.84) e (5.85) a equação de convecção e difusão da temperatura para o sistema de coordenadas generalizadas,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right)}_{\text{termo temporal } \mathcal{T}(T)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(UT) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(VT)}_{\text{termo convectivo } \mathcal{C}(T)} = \underbrace{\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo difusivo } \mathcal{D}(T)} \quad (5.86)$$

### 5.2.4 Equação do transporte da umidade em coordenadas generalizadas

Observando a equação do transporte bidimensional da umidade (4.44), nota-se que ela exibe a mesma estrutura que a equação da temperatura (4.41). Conseqüentemente, sua transformação segue exatamente os mesmos passos apresentados na transformação de (4.41), resultando em coordenadas generalizadas na seguinte equação

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{C}{J} \right)}_{\text{termo temporal } \mathcal{T}(C)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(UC) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(VC)}_{\text{termo convectivo } \mathcal{C}(C)} = \underbrace{D_v \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial C}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{termo difusivo } \mathcal{D}(C)} \quad (5.87)$$

Transformadas as equações para o sistema de coordenadas generalizadas, apresenta-se na próxima seção suas discretizações.

## 5.3 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Discretizar equações diferenciais significa substituir suas derivadas por expressões que possam ser manipuladas numericamente. A forma mais simples de realizar a discretização é utilizar o método de diferenças finitas, que consiste em aproximar as derivadas contínuas por expressões discretas, calculadas em um número finito de pontos do domínio. Essas expressões são obtidas por meio de expansões em série de Taylor ou interpolação polinomial e podem ser do tipo progressivas, centrais ou atrasadas, salvo a discretização do termo convectivo, que devido à sua natureza não-linear, exige estratégias mais elaboradas na sua aproximação, como

por exemplo, os esquemas *upwind*.

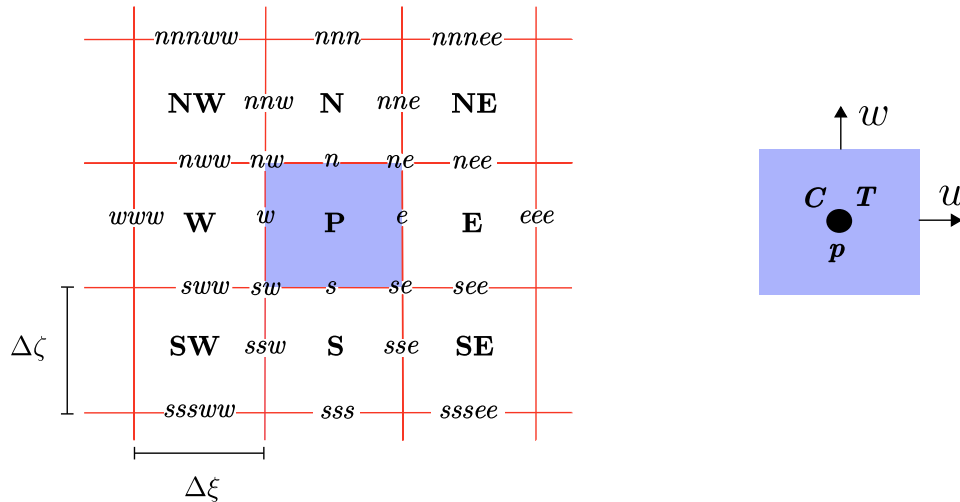


Figura 5.4: Nomenclatura de discretização (esquerda) e localização das variáveis pressão  $p$ , temperatura  $T$ , concentração de umidade  $C$  e velocidades  $u$  e  $w$  (direita). Adaptado de [7].

Considerando o domínio transformado, figura 5.2, obtem-se uma malha cujas células podem ser representadas pela figura 5.4. Escolhe-se células de dimensões unitárias ( $\Delta\xi = \Delta\zeta = 1$ ), visando facilitar a implementação computacional do método numérico [36]. A letra **P** representa o centro da célula e as letras, **E**, **W**, **N**, **S**, **NE**, **SE**, **NW**, **SW** representam, respectivamente os pontos cardeais leste, oeste, norte, sul, nordeste, sudeste, noroeste e sudoeste. As siglas em minúsculo, posicionadas sobre as faces, são variações cardinais a partir do centro da célula indicado pela letra **P**.

Observe que a concentração de umidade ( $C$ ), pressão ( $p$ ) e temperatura ( $T$ ) são armazenadas em posição diferente das velocidades  $u$  e  $w$  na célula, figura 5.4. A concentração de umidade, pressão e temperatura são localizadas no centro da célula, enquanto que as componentes da velocidade  $u$  e  $w$  são localizadas nas faces, distando  $\Delta\xi/2$  e  $\Delta\zeta/2$  do centro da célula. Este arranjo evita possíveis oscilações que poderiam ocorrer na solução, caso as variáveis fossem armazenadas nos mesmos pontos [19].

Passa-se agora a discretização das derivadas de (5.71), (5.72), (5.86) e (5.87), tomando como base a configuração de malha apresentada na figura 5.4.

### 5.3.1 Termo temporal

A discretização dos termos temporais relativos às velocidades de convecção  $u$  e  $w$ , dadas em (5.71) e (5.72), são realizadas nas faces  $e$  e  $n$  respectivamente, utilizando aproximação

por diferenças finitas progressivas de primeira ordem no nível de tempo  $k$ , isto é

$$\mathcal{F}(u)|_e^k = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) \Big|_e^k \approx \frac{\left( \frac{u}{J} \right)|_e^{k+1} - \left( \frac{u}{J} \right)|_e^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_e} \left( \frac{u|_e^{k+1} - u|_e^k}{\Delta \tau} \right) \quad (5.88)$$

$$\mathcal{F}(w)|_n^k = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{w}{J} \right) \Big|_n^k \approx \frac{\left( \frac{w}{J} \right)|_n^{k+1} - \left( \frac{w}{J} \right)|_n^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_n} \left( \frac{w|_n^{k+1} - w|_n^k}{\Delta \tau} \right) \quad (5.89)$$

enquanto que os termos temporais relativos à temperatura  $T$  e concentração de umidade  $C$ , equações (5.86) e (5.87), são discretizados no centro da célula, (posição  $\mathbf{P}$ ), também utilizando aproximação por diferenças finitas progressivas de primeira ordem no nível de tempo  $k$

$$\mathcal{F}(T)|_P^k = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right) \Big|_P^k \approx \frac{\left( \frac{T}{J} \right)|_P^{k+1} - \left( \frac{T}{J} \right)|_P^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_P} \left( \frac{T|_P^{k+1} - T|_P^k}{\Delta \tau} \right) \quad (5.90)$$

$$\mathcal{F}(C)|_P^k = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{C}{J} \right) \Big|_P^k \approx \frac{\left( \frac{C}{J} \right)|_P^{k+1} - \left( \frac{C}{J} \right)|_P^k}{\Delta \tau} = \frac{1}{J_P} \left( \frac{C|_P^{k+1} - C|_P^k}{\Delta \tau} \right) \quad (5.91)$$

### 5.3.2 Termos convectivos

Os termos convectivos presentes nas equações (5.71)-(5.72), representados por

$$\mathcal{C}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Wu) \quad (5.92)$$

$$\mathcal{C}(w) = \frac{\partial}{\partial \xi}(Uw) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Ww) \quad (5.93)$$

são discretizados por diferenças centrais no nível de tempo  $k$  em conjunto com o esquema *upwind* de primeira ordem FOU<sup>1</sup>. Esse esquema consiste em distinguir as velocidades nos produtos  $(Uu)$  e  $(Wu)$  em velocidades de convecção e propriedades transportadas, caracterizando um processo de linearização do termo convectivo. Além disso, considera a direção local do escoamento na discretização.

Iniciando pelo termo  $\mathcal{C}(u)$  discretizado na face  $e$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u)|_e^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) \Big|_e^k + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Wu) \Big|_e^k \\ &\approx \frac{(Uu)|_E^k - (Uu)|_P^k}{2(\Delta \xi/2)} + \frac{(Wu)|_{ne}^k - (Wu)|_{se}^k}{2(\Delta \zeta/2)} \\ &= \bar{U}|_E^k u|_E^k - \bar{U}|_P^k u|_P^k + \bar{W}|_{ne}^k u|_{ne}^k - \bar{W}|_{se}^k u|_{se}^k \end{aligned}$$

onde as componentes contravariantes  $U$  e  $W$  representam as velocidades de convecção nas direções  $\xi$  e  $\zeta$  respectivamente, sendo obtidas por meio de médias aritméticas simples e por

<sup>1</sup>Em inglês *First Order Upwind*.

isso, aqui representadas com um símbolo de barra sobre as mesmas, tornando-se

$$\begin{aligned}\bar{U}|_E^k &= \frac{(U)|_e^k + (U)|_{eee}^k}{2}, & \bar{U}|_P^k &= \frac{(U)|_w^k + (U)|_e^k}{2}, \\ \bar{W}|_{ne}^k &= \frac{(W)|_n^k + (W)|_{nee}^k}{2}, & \bar{W}|_{se}^k &= \frac{(W)|_s^k + (W)|_{see}^k}{2}\end{aligned}$$

enquanto que as componentes  $u$  e  $w$  representam propriedades transportadas obtidas aplicando o esquema FOU, ou seja

$$\begin{aligned}u|_E^k &= \left(\frac{1+S_E^k}{2}\right)u|_e^k + \left(\frac{1-S_E^k}{2}\right)u|_{eee}^k, & S_E^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{U}|_E^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{U}|_E^k < 0 \end{cases} \\ u|_P^k &= \left(\frac{1+S_P^k}{2}\right)u|_w^k + \left(\frac{1-S_P^k}{2}\right)u|_e^k, & S_P^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{U}|_P^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{U}|_P^k < 0 \end{cases} \\ u|_{ne}^k &= \left(\frac{1+S_{ne}^k}{2}\right)u|_e^k + \left(\frac{1-S_{ne}^k}{2}\right)u|_{nne}^k, & S_{ne}^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{W}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{W}|_{ne}^k < 0 \end{cases} \\ u|_{se}^k &= \left(\frac{1+S_{se}^k}{2}\right)u|_{sse}^k + \left(\frac{1-S_{se}^k}{2}\right)u|_e^k, & S_{se}^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{W}|_{se}^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{W}|_{se}^k < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Da mesma forma discretiza-se o termo  $\mathcal{C}(v)$  na face  $n$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(w)|_n^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(Uw)|_n^k + \frac{\partial}{\partial \zeta}(Ww)|_n^k \\ &\approx \frac{(Uw)|_{ne}^k - (Uw)|_{nw}^k}{2(\Delta\xi/2)} + \frac{(Ww)|_N^k - (Ww)|_P^k}{2(\Delta\zeta/2)} \\ &= \bar{U}|_{ne}^k w|_{ne}^k - \bar{U}|_{nw}^k w|_{nw}^k + \bar{W}|_N^k w|_N^k - \bar{W}|_P^k w|_P^k\end{aligned}$$

com velocidades de convecção

$$\begin{aligned}\bar{U}|_{ne}^k &= \frac{(U)|_e^k + (U)|_{nne}^k}{2}, & \bar{U}|_{nw}^k &= \frac{(U)|_w^k + (U)|_{nnw}^k}{2}, \\ \bar{W}|_N^k &= \frac{(W)|_n^k + (W)|_{nnn}^k}{2}, & \bar{W}|_P^k &= \frac{(W)|_n^k + (W)|_s^k}{2}\end{aligned}$$

e propriedades transportadas

$$\begin{aligned}
 w|_{ne}^k &= \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) w|_n^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) w|_{nee}^k, & S_{ne}^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{U}|_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{U}|_{ne}^k < 0 \end{cases} \\
 w|_{nw}^k &= \left( \frac{1 + S_{nw}^k}{2} \right) w|_{nww}^k + \left( \frac{1 - S_{nw}^k}{2} \right) w|_n^k, & S_{nw}^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{U}|_{nw}^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{U}|_{nw}^k < 0 \end{cases} \\
 w|_N^k &= \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) w|_n^k + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) w|_{nm}^k, & S_N^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{W}|_N^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{W}|_N^k < 0 \end{cases} \\
 w|_P^k &= \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) w|_s^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) w|_n^k, & S_P^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{W}|_P^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \bar{W}|_P^k < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Os termos de convecção da temperatura e umidade, dados por

$$\mathcal{E}(T) = \frac{\partial}{\partial \xi}(UT) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(WT) \quad (5.94)$$

$$\mathcal{E}(C) = \frac{\partial}{\partial \xi}(UC) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(WC) \quad (5.95)$$

também são discretizados no nível de tempo  $k$  por diferenças centrais, mas diferentemente dos termos de convecção das propriedades  $u$  e  $w$ , a convecção de temperatura e da umidade é discretizada na posição cardinal  $\mathbf{P}$  no centro da célula, assim temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(T)|_P^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(UT)|_P^k + \frac{\partial}{\partial \zeta}(WT)|_P^k \\
 &\approx \frac{(UT)|_E^k - (UT)|_W^k}{2\Delta\xi} + \frac{(WT)|_N^k - (WT)|_S^k}{2\Delta\zeta} \\
 &= \frac{\bar{U}|_E^k T|_E^k - \bar{U}|_W^k T|_W^k}{2} + \frac{\bar{W}|_N^k T|_N^k - \bar{W}|_S^k T|_S^k}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(C)|_P^k &= \frac{\partial}{\partial \xi}(UC)|_P^k + \frac{\partial}{\partial \zeta}(WC)|_P^k \\
 &\approx \frac{(UC)|_E^k - (UC)|_W^k}{2\Delta\xi} + \frac{(WC)|_N^k - (WC)|_S^k}{2\Delta\zeta} \\
 &= \frac{\bar{U}|_E^k C|_E^k - \bar{U}|_W^k C|_W^k}{2} + \frac{\bar{W}|_N^k C|_N^k - \bar{W}|_S^k C|_S^k}{2}
 \end{aligned}$$

As velocidades de convecção  $\bar{U}$  e  $\bar{W}$  são aproximadas pelas médias aritméticas

$$\bar{U}|_E^k = \frac{U|_e^k + U|_{eee}^k}{2}, \quad \bar{U}|_W^k = \frac{U|_{www}^k + U|_w^k}{2}$$

e

$$\overline{W}|_N^k = \frac{W|_n^k + W|_{nnn}^k}{2}, \quad \overline{W}|_S^k = \frac{W|_{sss}^k + W|_s^k}{2}$$

já as propriedades transportadas  $T$  e  $C$  são obtidas por meio dos esquemas

$$\begin{aligned} T|_E^k &= \left( \frac{1 + S_E^k}{2} \right) T|_P^k + \left( \frac{1 - S_E^k}{2} \right) T|_{EE}^k, & S_E^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{U}|_E^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{U}|_E^k < 0 \end{cases} \\ T|_W^k &= \left( \frac{1 + S_W^k}{2} \right) T|_{WW}^k + \left( \frac{1 - S_W^k}{2} \right) T|_P^k, & S_W^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{U}|_W^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{U}|_W^k < 0 \end{cases} \\ T|_N^k &= \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) T|_P^k + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) T|_{NN}^k, & S_N^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{W}|_N^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{W}|_N^k < 0 \end{cases} \\ T|_S^k &= \left( \frac{1 + S_S^k}{2} \right) T|_{SS}^k + \left( \frac{1 - S_S^k}{2} \right) T|_P^k, & S_S^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{W}|_S^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{W}|_S^k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C|_E^k &= \left( \frac{1 + S_E^k}{2} \right) C|_P^k + \left( \frac{1 - S_E^k}{2} \right) C|_{EE}^k, & S_E^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{U}|_E^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{U}|_E^k < 0 \end{cases} \\ C|_W^k &= \left( \frac{1 + S_W^k}{2} \right) C|_{WW}^k + \left( \frac{1 - S_W^k}{2} \right) C|_P^k, & S_W^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{U}|_W^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{U}|_W^k < 0 \end{cases} \\ C|_N^k &= \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) C|_P^k + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) C|_{NN}^k, & S_N^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{W}|_N^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{W}|_N^k < 0 \end{cases} \\ C|_S^k &= \left( \frac{1 + S_S^k}{2} \right) C|_{SS}^k + \left( \frac{1 - S_S^k}{2} \right) C|_P^k, & S_S^k &= \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{W}|_S^k \geq 0 \\ -1, & \text{se } \overline{W}|_S^k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.3.3 Termos de pressão

Os termos de pressão representados por  $\mathcal{P}^u$  e  $\mathcal{P}^w$  nas equações (5.71) e (5.72), são discretizados utilizando diferenças centrais no nível de tempo  $k + 1$ . Esse termo é discretizado em  $k + 1$  para que, após os cálculos das velocidades e temperatura no nível de tempo  $k + 1$ , todas as variáveis do escoamento estejam no mesmo nível de tempo [19]. Aproximando a pressão nas faces  $e$  e  $n$  obtêm-se

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} &= \left( \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \Big|_e^{k+1} \approx \left( \frac{p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}}{2(\Delta \zeta / 2)} \right) \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} - \left( \frac{p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta \xi / 2)} \right) \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \\ &= (p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}) \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} - (p|_E^{k+1} + p|_P^{k+1}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^w|_n^{k+1} &= \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \Big|_n^{k+1} \approx \left( \frac{p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}}{2(\Delta \xi/2)} \right) \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} - \left( \frac{p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}}{2(\Delta \zeta/2)} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \\ &= (p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} - (p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1}\end{aligned}$$

onde os valores  $p|_{ne}^{k+1}$ ,  $p|_{nw}^{k+1}$  e  $p|_{se}^{k+1}$  são dados por

$$\begin{aligned}p|_{ne}^{k+1} &= \frac{p|_P^{k+1} + p|_E^{k+1} + p|_{NE}^{k+1} + p|_N^{k+1}}{4} \\ p|_{nw}^{k+1} &= \frac{p|_W^{k+1} + p|_P^{k+1} + p|_N^{k+1} + p|_{NW}^{k+1}}{4} \\ p|_{se}^{k+1} &= \frac{p|_S^{k+1} + p|_{SE}^{k+1} + p|_E^{k+1} + p|_P^{k+1}}{4}\end{aligned}$$

Como está sendo considerado malhas fixas, as métricas ficam especificadas por

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_e, \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_e,$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^u \right) \Big|_e^{k+1} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \Big|_e^{k+1} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \right) \\ &\approx \frac{1}{\rho} \left[ (p|_{ne}^{k+1} - p|_{se}^{k+1}) \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e - (p|_E^{k+1} - p|_P^{k+1}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left( \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^w \right) \Big|_n^{k+1} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \Big|_n^{k+1} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \right) \\ &\approx \frac{1}{\rho} \left[ (p|_{ne}^{k+1} - p|_{nw}^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_n - (p|_N^{k+1} - p|_P^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n \right]\end{aligned}$$

onde as métricas são definidas por

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n = \frac{x_{ne} - x_{nw}}{\Delta \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_n = \frac{x_N - x_P}{\Delta \zeta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_e = \frac{z_E - z_P}{\Delta \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e = \frac{z_{ne} - z_{se}}{\Delta \zeta}$$

com os valores  $x_N, x_P, z_E$  e  $z_P$  obtidos via interpolação dos quatro pontos vizinhos.

### 5.3.4 Termos viscosos e difusivos

Os termos viscosos de (5.71) e (5.72) e difusivos de (5.86) e (5.87) são representados por

$$\mathcal{V}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \quad (5.96)$$

$$\mathcal{V}(w) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \quad (5.97)$$

$$\mathcal{D}(T) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \quad (5.98)$$

$$\mathcal{D}(C) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial C}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \right) \quad (5.99)$$

Discretiza-se os termos no nível de tempo  $k$  utilizando diferenças finitas do tipo central. A seguir apresenta-se os detalhes da discretização para o primeiro termo de  $\mathcal{V}(u)$ . O segundo termo, assim como os termos de  $\mathcal{V}(w)$ ,  $\mathcal{D}(T)$  e  $\mathcal{D}(C)$  são obtidos da mesma forma. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_e^k &\approx \frac{\left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_E^k - \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_P^k}{2(\Delta \xi / 2)} \\ &= (J\alpha) \Big|_E \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_E^k - (J\beta) \Big|_E \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \Big|_E^k \\ &\quad - (J\alpha) \Big|_P \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_E^k + (J\beta) \Big|_E \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \Big|_P^k \\ &\approx (J\alpha) \Big|_E \left( \frac{u_{eee}^k - u_e^k}{2(\Delta \xi / 2)} \right) - (J\beta) \Big|_E \left( \frac{u_{nee}^k - u_{see}^k}{2(\Delta \zeta / 2)} \right) \\ &\quad - (J\alpha) \Big|_P \left( \frac{u_e^k - u_w^k}{2(\Delta \xi / 2)} \right) + (J\beta) \Big|_P \left( \frac{u_n^k - u_s^k}{2(\Delta \zeta / 2)} \right) \\ &= (J\alpha) \Big|_E (u_{eee}^k - u_e^k) - (J\beta) \Big|_E (u_{nee}^k - u_{see}^k) \\ &\quad - (J\alpha) \Big|_P (u_e^k - u_w^k) + (J\beta) \Big|_P (u_n^k - u_s^k) \end{aligned}$$

onde  $u_{nee}^k$ ,  $u_{see}^k$ ,  $u_n^k$  e  $u_s^k$  são obtidos por meio de médias aritméticas simples. Da mesma

forma obtêm-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_e^k &\approx (J\gamma)|_{ne}(u|_{nne}^k - u|_e^k) - (J\beta)|_{ne}(u|_{nee}^k - u|_n^k) \\
&\quad - (J\gamma)|_{se}(u|_e^k - u|_{sse}^k) + (J\beta)|_{se}(u|_{see}^k - u|_s^k) \\
\frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_n^k &\approx (J\alpha)|_{ne}(w|_{nee}^k - w|_n^k) - (J\beta)|_{ne}(w|_{nne}^k - w|_e^k) \\
&\quad - (J\alpha)|_{nw}(w|_n^k - w|_{nww}^k) + (J\beta)|_{nw}(w|_{nnw}^k - w|_w^k) \\
\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_n^k &\approx (J\gamma)|_N(w|_{nnn}^k - w|_n^k) - (J\beta)|_N(w|_{nne}^k - w|_{nnw}^k) \\
&\quad - (J\gamma)|_P(w|_n^k - w|_s^k) + (J\beta)|_P(w|_e^k - w|_w^k)
\end{aligned}$$

com  $w|_{nne}^k$ ,  $w|_e^k$ ,  $w|_{nnw}^k$  e  $w|_w^k$  obtidos por meio de médias aritméticas.

Por fim, os termos difusivos da temperatura  $T$  e umidade  $C$  são discretizados no centro da célula, posição cardinal  $\mathbf{P}$ , também no nível de tempo  $k$ , via diferenças centrais, assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_P^k &\approx (J\alpha)|_e(T|_E^k - T|_P^k) - (J\beta)|_e(T|_{ne}^k - T|_{se}^k) \\
&\quad - (J\alpha)|_w(T|_P^k - T|_W^k) + (J\beta)|_w(T|_{nw}^k - T|_{sw}^k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_P^k &\approx (J\gamma)|_n(T|_N^k - T|_P^k) - (J\beta)|_n(T|_{ne}^k - T|_{nw}^k) \\
&\quad - (J\gamma)|_s(T|_P^k - T|_S^k) + (J\beta)|_s(T|_{se}^k - T|_{sw}^k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \right) \Big|_P^k &\approx (J\alpha)|_e(C|_E^k - C|_P^k) - (J\beta)|_e(C|_{ne}^k - C|_{se}^k) \\
&\quad - (J\alpha)|_w(C|_P^k - C|_W^k) + (J\beta)|_w(C|_{nw}^k - C|_{sw}^k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial C}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_P^k &\approx (J\gamma)|_n(C|_N^k - C|_P^k) - (J\beta)|_n(C|_{ne}^k - C|_{nw}^k) \\
&\quad - (J\gamma)|_s(C|_P^k - C|_S^k) + (J\beta)|_s(C|_{se}^k - C|_{sw}^k)
\end{aligned}$$

com  $T|_{ne}^k$ ,  $T|_{nw}^k$ ,  $T|_{sw}^k$ ,  $T|_{se}^k$ ,  $C|_{ne}^k$ ,  $C|_{nw}^k$ ,  $C|_{sw}^k$  e  $C|_{se}^k$  obtidos por meio de médias aritméticas simples.

### 5.3.5 Termo de empuxo

Passa-se agora as discretizações dos termos de empuxo das equações (5.71) e (5.72), que são obtidas no nível de tempo  $k$ , a partir de média aritmética simples. Para o termo  $\mathcal{E}^u$  aplicado a face  $e$ , tem-se que a discretização é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^u|_e^k &= \left. \frac{\mathbf{g}^u}{J} \right|_e^k = \frac{g}{J} [1 - \beta^*(T - T_0)]_e^k = \frac{g}{J} [1 - \beta^*(T_e^k - T_0)] \\ &\approx \frac{g}{J} \left[ 1 - \beta^* \left( \frac{T_P^k + T_E^k}{2} - T_0 \right) \right] \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a discretização para o termo  $\mathcal{E}^w$  na face  $n$  expressa por

$$\mathcal{E}^w|_n^k = \left. \frac{\mathbf{g}^w}{J} \right|_n^k = \frac{g}{J} [1 - \beta^*(T - T_0)]_n^k \approx \frac{g}{J} \left[ 1 - \beta^* \left( \frac{T_P^k + T_N^k}{2} - T_0 \right) \right]$$

Realizadas as discretizações, dá-se continuidade ao trabalho apresentando o método numérico utilizado nas simulações.

## 5.4 MÉTODO NUMÉRICO

Nesta seção, aplica-se uma versão simplificada do método numérico MAC (*Marker and cell*), para encontrar a solução numérica do sistema formado pelas equações de Navier-Stokes (5.71) e (5.72), temperatura (5.86) e continuidade (5.26). Nesta versão, considera-se o escoamento sem a existência de superfície livre. Assim, desconsidera-se a dedução do movimento de partículas marcadoras inerentes ao método MAC, simplificando os cálculos numéricos.

Conforme mencionado na seção 5.3, as variáveis pressão, temperatura, concentração de umidade e velocidade são distribuídas em posições diferentes nas células, configurando uma malha do tipo deslocada [28]. Esse procedimento tornou-se padrão no cálculo de escoamentos incompressíveis [19].

Considere a equação da quantidade de movimento na direção  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (Wu) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right] \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right] \quad (5.100) \\ &+ \frac{\mathbf{g}^u}{J} \end{aligned}$$

Sua discretização temporal é obtida via método de Euler explícito, que aplicado a aresta  $e$  resulta

em

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) \Big|_e^k \approx \frac{1}{J_e} \left( \frac{u|_e^{k+1} - u|_e^k}{\Delta \tau} \right) = -\mathcal{C}(u)|_e^k + \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k + \frac{\mathbf{g}^u}{J_e}$$

onde

$$u|_e^{k+1} = J_e \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_e^k + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k] + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} + u|_e^k + \Delta \tau \mathbf{g}^u$$

que reescreve-se na forma

$$u|_e^{k+1} = F|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} \quad (5.101)$$

com

$$F|_e^k = J_e \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_e^k + \nu \mathcal{V}(u)|_e^k] + \Delta \tau \mathbf{g}^u + u|_e^k$$

Analogamente encontra-se a discretização de (5.100) para as arestas  $n$ ,  $w$  e  $s$ , obtendo-se

$$u|_n^{k+1} = F|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_n^{k+1} \quad (5.102)$$

$$u|_w^{k+1} = F|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_w^{k+1} \quad (5.103)$$

$$u|_s^{k+1} = F|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_s^{k+1} \quad (5.104)$$

onde

$$F|_w^k = J_w \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_w^k + \nu \mathcal{V}(u)|_w^k] + \Delta \tau \mathbf{g}^u + u|_w^k$$

$$F|_n^k = J_n \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_n^k + \nu \mathcal{V}(u)|_n^k] + \Delta \tau \mathbf{g}^u + u|_n^k$$

$$F|_s^k = J_s \Delta \tau [-\mathcal{C}(u)|_s^k + \nu \mathcal{V}(u)|_s^k] + \Delta \tau \mathbf{g}^u + u|_s^k$$

Realizando o mesmo procedimento, obtém-se a discretização temporal para a equação da quantidade de movimento na direção  $z$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{w}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uw) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (Ww) &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \right] \\ &+ \frac{\mathbf{g}^w}{J} \end{aligned} \quad (5.105)$$

Sua versão discreta aplicada a aresta  $n$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{w}{J} \right) \Big|_n^k &\approx \frac{1}{J_n} \left( \frac{w|_n^{k+1} - w|_n^k}{\Delta \tau} \right) = -\mathcal{C}(w)|_n^k + \frac{1}{\rho} \mathcal{P}^w|_n^{k+1} + \nu \mathcal{V}(w)|_n^k \\ &+ \frac{\mathbf{g}^w}{J_n} \end{aligned} \quad (5.106)$$

de forma que pode-se escrever

$$w|_n^{k+1} = G|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^w|_n^{k+1} \quad (5.107)$$

com

$$G|_n^k = J_n \Delta \tau [-\mathcal{C}(w)|_n^k + \nu \mathcal{V}(w)|_n^k] + \Delta \tau \mathbf{g}^w + w|_n^k$$

Da mesma forma têm-se as discretizações nas faces  $s$ ,  $w$  e  $e$

$$w|_s^{k+1} = G|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^w|_s^{k+1} \quad (5.108)$$

$$w|_w^{k+1} = G|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^w|_w^{k+1} \quad (5.109)$$

$$w|_e^{k+1} = G|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^w|_e^{k+1} \quad (5.110)$$

onde

$$\begin{aligned} G|_s^k &= J_s \Delta \tau [-\mathcal{C}(w)|_s^k + \nu \mathcal{V}(w)|_s^k] + \Delta \mathbf{g}^w + w|_s^k \\ G|_w^k &= J_w \Delta \tau [-\mathcal{C}(w)|_w^k + \nu \mathcal{V}(w)|_w^k] + \Delta \mathbf{g}^w + w|_w^k \\ G|_e^k &= J_e \Delta \tau [-\mathcal{C}(w)|_e^k + \nu \mathcal{V}(w)|_e^k] + \Delta \mathbf{g}^w + w|_e^k \end{aligned}$$

Observando as componentes de velocidade  $u$  e  $w$  expressas pelas equações (5.101)-(5.104) e (5.107)-(5.110), nota-se a necessidade de uma equação que forneça os termos de pressão no nível de tempo  $k + 1$ . Substituindo essas velocidades nas expressões (5.24) e (5.25), obtêm-se as componentes contravariantes

$$U|_e^{k+1} = F|_e^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e - G|_e^k \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_e + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \beta|_e \right\} \quad (5.111)$$

$$U|_w^{k+1} = F|_w^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_w - G|_w^k \frac{\partial x}{\partial \zeta} \Big|_w + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_w^{k+1} \alpha|_w + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_w^{k+1} \beta|_w \right\} \quad (5.112)$$

$$W|_n^{k+1} = -F|_n^k \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_n - G|_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \beta|_n + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} \gamma|_n \right\} \quad (5.113)$$

$$W|_s^{k+1} = -F|_s^k \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_s - G|_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_s + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_s^{k+1} \beta|_s + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_s^{k+1} \gamma|_s \right\} \quad (5.114)$$

Considerando a equação da continuidade em coordenadas generalizadas dada por (5.26) e aproximando-a por diferenças finitas do tipo central em  $\mathbf{P}$  no nível de tempo  $k + 1$ , segue

que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_P^{k+1} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \Big|_P^{k+1} = 0 &\Rightarrow \frac{U|_e^{k+1} - U|_w^{k+1}}{\Delta \xi} + \frac{W|_n^{k+1} - W|_s^{k+1}}{\Delta \zeta} = 0 \\ &\Rightarrow U|_e^{k+1} - U|_w^{k+1} + W|_n^{k+1} - W|_s^{k+1} = 0 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões  $U|_e^{k+1}$ ,  $U|_w^{k+1}$ ,  $W|_n^{k+1}$  e  $W|_s^{k+1}$  calculadas e reorganizando os termos, determina-se a seguinte equação [7]

$$\begin{aligned} J_e \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} \alpha|_e + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_e^{k+1} \beta|_e \right\} + J_w \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_w^{k+1} \alpha|_w + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_w^{k+1} \beta|_w \right\} + \\ J_n \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} \beta|_n + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_n^{k+1} \gamma|_n \right\} + J_s \left\{ -\frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_s^{k+1} \beta|_s + \frac{\partial p}{\partial \zeta} \Big|_s^{k+1} \gamma|_s \right\} = FG|_k \frac{\rho}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (5.115)$$

onde,

$$\begin{aligned} FG|_k = & -F|_e^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_e + G|_e^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_e - F|_w^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_w + G|_w^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_w + \\ & F|_n^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_n - G|_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n + F|_s^k \frac{\partial z}{\partial \zeta} \Big|_s - G|_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_s \end{aligned}$$

A equação (5.115) descreve a dinâmica da pressão [7] e faz-se necessária para acoplar as equações do movimento (5.71) e (5.72) e continuidade (5.26) na atualização do campo de velocidade.

Passa-se agora, a discretização da equação de convecção e difusão da temperatura,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (UT) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (WT) = \\ \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.116)$$

que aplicada à posição  $P$  fica

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{T}{J} \right) \Big|_P^k \approx \frac{1}{J_P} \left( \frac{T|_P^{k+1} - T|_P^k}{\Delta \tau} \right) = -\mathcal{E}(T)|_P^k + \sigma \mathcal{D}(T)|_P^k$$

Portanto tem-se,

$$T|_P^{k+1} = J_P \Delta \tau [-\mathcal{E}(T)|_P^k + \sigma \mathcal{D}(T)|_P^k] + T|_P^k \quad (5.117)$$

Com as equações (5.101)-(5.104), (5.107)-(5.110), (5.115) e (5.117) determina-se o campo de velocidade para o ar. Encontrado o campo de velocidade, calcula-se a evolução da

umidade a partir da equação de transporte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{C}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (UC) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (WC) = \\ D \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial C}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial C}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

cuja discretização temporal é análoga a discretização de (5.116) e dada pela seguinte expressão

$$C|_P^{k+1} = J_P \Delta \tau [-\mathcal{C}(C)|_P^k + D_v \mathcal{D}(C)|_P^k] + C|_P^k \quad (5.118)$$

Conforme mencionado na seção 4.4, a curvatura da Terra não está sendo considerado na modelagem do problema. Além disso, a variação de altitude do relevo na região foi linearizada ao se adotar segmentos de reta para representar o terreno ao redor do reservatório, seção 4.4.2. Essas simplificações fazem parte da modelagem matemática do problema e foram adotadas com a finalidade de evitar possíveis distorções nas células que compõem a malha. Assim, observando o alinhamento das células da malha na figura 5.3, considera-se  $g^u = 0$  em (5.100) reescrevendo-a na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (Wu) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right] \\ + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right] \quad (5.119) \end{aligned}$$

ou seja, sem o termo de empuxo, assim como a equação (4.28) na seção 4.2.3. Dessa forma, os termos  $F|_e^k$ ,  $F|_w^k$ ,  $F|_n^k$  e  $F|_s^k$  nas discretizações temporais (5.101)-(5.104) tornam-se

$$\begin{aligned} u|_e^{k+1} &= F|_e^k + \frac{J_e \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_e^{k+1} \\ u|_n^{k+1} &= F|_n^k + \frac{J_n \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_n^{k+1} \\ u|_w^{k+1} &= F|_w^k + \frac{J_w \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_w^{k+1} \\ u|_s^{k+1} &= F|_s^k + \frac{J_s \Delta \tau}{\rho} \mathcal{P}^u|_s^{k+1} \end{aligned}$$

A seguir apresenta-se o algoritmo do método numérico.

---

**Algorithm 1** algoritmo do método MAC simplificado
 

---

Admita  $\tau_{final}, \Delta\tau, u = u_0, w = w_0, p = p_0, U = U_0, W = W_0, T = T_0, C = C_0$

$\rho, \mu, g, \beta^*, \sigma, D_v$

**procedure** ALOCAÇÃO DE MEMÓRIA PARA AS VARIÁVEIS

**procedure** LEITURA DOS PONTOS DA MALHA

**procedure** CÁLCULO DAS MÉTRICAS DE TRANSFORMAÇÃO

**Inicialize**  $\tau = 0.0, k = 0$

**procedure** APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS

**procedure** APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

**procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^0, w^0, U^0, W^0, p^0, T^0, C^0)$

**while**  $\tau < \tau_{final}$  **do**

**procedure** CÁLCULO DOS TERMOS CONVECTIVOS =

equações (5.92)-(5.95)  $(\mathcal{C}(u)|^k, \mathcal{C}(w)|^k, \mathcal{C}(T)|^k, \mathcal{C}(C)|^k)$

**procedure** CÁLCULO DOS TERMOS DIFFUSIVO =

equações (5.96)-(5.99)  $(\mathcal{V}(u)|^k, \mathcal{V}(w)|^k, \mathcal{D}(T)|^k, \mathcal{D}(C)|^k)$

**Atualização**  $\tau = \tau + \Delta\tau, k = k + 1$

**procedure** CÁLCULO DA TEMPERATURA =  $(T|^{k+1})$   
equação (5.117)

**procedure** CÁLCULO DA PRESSÃO =  $(p|^{k+1})$   
equação (5.115)

**procedure** CÁLCULO DAS VELOCIDADES =  $(u|^{k+1}, w|^{k+1})$   
equações (5.101)-(5.104) e (5.107)-(5.110)

**procedure** CÁLCULO DA CONCENTRAÇÃO =  $(C|^{k+1})$   
equação (5.118)

**procedure** CÁLCULO DAS COMPONENTES CONTRAVARIANTES =  $(U|^{k+1}, W|^{k+1})$   
equações (5.111)-(5.114)

**procedure** APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

**procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^{k+1}, w^{k+1}, U^{k+1}, W^{k+1}, p^{k+1}, T^{k+1}, C^{k+1})$

**end while**

---

Apresentadas as discretizações e o método numérico para a resolução das equações que modelam a dinâmica da evaporação, apresenta-se no próximo capítulo as simulações numéricas para a dinâmica da evaporação sobre o reservatório de Itaipu.

## 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo apresenta-se as condições auxiliares utilizadas e as simulações numéricas para o escoamento do ar e da umidade sobre o reservatório de Itaipu. Salienta-se que as simulações são preliminares e possivelmente necessitem de ajustes nas condições auxiliares, malha e geometria do domínio de escoamento. Note que as condições iniciais e de contorno apresentadas na seção que segue, podem ser incompatíveis com o modelo matemático, por exemplo, impor condições de contorno para a temperatura na superfície do reservatório e no contorno superior da malha, para um coeficiente de difusão térmico baixo, podem se mostrar incompatíveis com a física do problema. Nesse contexto, simula-se a dinâmica da evaporação d'água para uma lâmina genérica com as mesmas características das lâminas propostas na seção 4.4.

### 6.1 CONDIÇÕES AUXILIARES

Para solucionar o sistema formado pelas EDP's (4.7), (4.28), (4.29), (4.41) e (4.44) é necessário o uso de condições auxiliares que especificam valores para as variáveis dependentes em alguns valores particulares das variáveis independentes. Essas condições são chamadas condições iniciais quando relacionada a variável independente tempo e condições de contorno quando relacionada à variáveis independentes de natureza espacial.

A correta determinação das condições auxiliares é de importância fundamental em escoamentos modelados por equações diferenciais. Uma condição inicial apropriada para o sistema formado pelas equações (4.7), (4.28), (4.29) e (4.41) é que o campo de velocidade  $\mathbf{V}$  e a temperatura  $T$ , sejam especificados em todo o domínio. Além disso, para que não haja prejuízos na convergência do método numérico, o campo de velocidades deve satisfazer a equação da continuidade (4.7) [19].

No modelo proposto, considera-se a velocidade  $\mathbf{V}$ , a concentração  $C$  e a pressão  $p$  inicialmente em estado de quiescência em todo ponto  $(x, z)$  do domínio, isto é, para  $t = 0$  têm-se

$$\begin{aligned} V(x, z, 0) &= \langle u(0), w(0) \rangle = 0 \\ C(x, z, 0) &= 0 \\ p(x, z, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Já a temperatura  $T(x, z, 0)$  é prescrita pela equação (3.3).

Em relação às condições de contorno, têm-se que elas especificam o comportamento da variável dependente na fronteira da região onde o problema foi definido. No problema em estudo, considera-se as seguintes condições:

- Condição de Não Escorregamento e Impermeabilidade (CNEI);
- Condição de Injeção Prescrita (CIPR);
- Condição de Ejeção Contínua (CECO).

A condição CNEI está relacionada a viscosidade do fluido, que faz com que o mesmo grude na parede e, portanto, tenha velocidade igual a da parede, além disso, as fronteiras para as quais essa condição se aplica são consideradas sólidas, isto é, o fluido não pode atravessá-las. Sobre a condição CIPR, esta é aplicada nas fronteiras responsáveis pela injeção de fluido no domínio. Finalmente, a condição CECO está presente nas fronteiras em que o fluido pode sair livremente do domínio de escoamento.

Considerando a figura 6.1, têm-se que as condições de contorno para a velocidade estão distribuídas no domínio da seguinte forma:

- Fronteiras A, B e C: condição do tipo CNEI, com  $V(x, z, t) = \langle u(t), w(t) \rangle = 0$  para  $t > 0$ ;
- Fronteira E: condição CIPR, onde  $V(x, z, t) = \langle u(t), w(t) \rangle = \langle u(t); 0 \rangle$  para  $t > 0$ , com  $u(t)$  variando ente 18, 35 e 90 metros por segundo;
- Fronteiras D e F: condição CECO, onde considera-se  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$  quando  $t > 0$ , indicando que o fluido escoa com velocidade constante através dessas fronteiras.

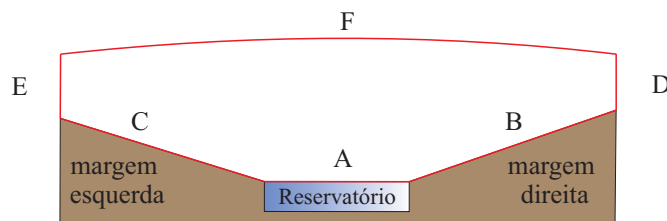


Figura 6.1: Fronteiras do domínio de escoamento.

Para a pressão tem-se  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  quando  $t > 0$ , em toda a região de fronteira, significando que não está sendo considerada evolução da pressão nas fronteiras A, B, C, D, E e F do domínio.

Quanto a temperatura, tem-se que ela é prescrita pela equação (3.3) em todas as fronteiras do domínio.

Por fim, para a concentração de umidade considera-se as seguintes condições de contorno:

- Fronteira A: condição CIPR, dada por  $C(x, z, t) = 1$  para  $t > 0$ , onde 1 representa uma concentração de umidade de 100%;

- Fronteiras B e C:  $C(x, z, t) = 0$  para  $t > 0$ , pois neste estudo está sendo considerada apenas a evaporação proveniente do lago;
- Fronteiras D, E e F: considera-se  $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$ , tendo em vista que não está sendo considerada variação de concentração de umidade nessas fronteiras, tem-se portanto uma condição do tipo CECO nessa região.

## 6.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para realizar as simulações numéricas considerou-se a malha apresentada na figura 6.2. Formada por 210 pontos horizontais por 12 pontos verticais, essa malha é composta por 2299 células. As dimensões reais que a malha representa são 70000 m na direção horizontal e 1000 m na direção vertical sobre a superfície do reservatório. Contudo, observa-se na figura 6.2 que o comprimento vertical da malha varia conforme a elevação do terreno, podendo atingir 440 m nos extremos esquerdo e direito. Além disso, para uma melhor exibição das simulações numéricas, ajustou-se as escalas das figuras (6.2)-(6.10) contraindo o comprimento horizontal a 10%, um décimo de seu comprimento real e expandindo em 200% o comprimento vertical, o que corresponde a duas vezes seu comprimento real.

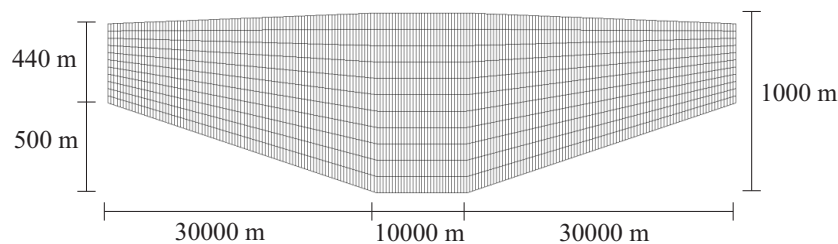


Figura 6.2: Malha considerada nas simulações numéricas.

Nas simulações utilizou-se  $\rho = 1,205 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1,81 \times 10^{-5} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ ,  $\nu = 1,50 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\sigma = 2,08 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\beta^* = 3,40 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $D_v = 2,60 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e intervalos de tempo de  $\Delta t = 10^{-4}$  segundos, onde o tempo final é alcançado quando o escoamento atinge a situação estacionária. Observe que a unidade de medida dos coeficientes utilizados são referentes ao sistema internacional de unidades e portanto considera-se a temperatura escrita em Kelvin ao invés de graus Célcus. O sistema linear obtido durante a atualização das variáveis foi resolvido utilizando o método iterativo SOR (*Successive Over-Relaxation*) com fator de relaxação  $\omega = 0,7$ . Esse método acelera a convergência reduzindo o número de iterações necessárias para obter a solução [52].

Nas figuras (6.3), (6.5) e (6.6) apresenta-se três campos de velocidade com velocidades de injeção de 18 m/s, 35 m/s e 90 m/s, respectivamente. A representação em mapa de cores são referentes ao módulo da velocidade cartesiana. Quando se considera ventos de baixa intensidade, figura 6.3, nota-se uma oposição entre o vento horizontal (de oeste para leste) e o

vento vertical devido às diferenças de pressão, temperatura e gravidade. Este vento vertical gera células de convecção térmica, também conhecidas como células de Bénard [9], que se caracterizam por uma corrente fechada de matéria. É importante destacar que a convecção térmica só ocorre em presença de gravidade, que atua como um fator de desaceleração do sistema.

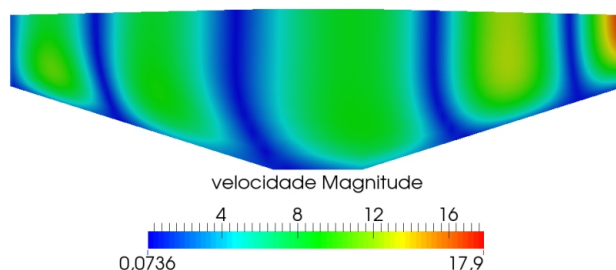


Figura 6.3: Campo de velocidade com velocidade de injeção de 18 m/s.

Fisicamente, o ar quente tende a ascender na atmosfera. Devido à diminuição da temperatura, o movimento de ascensão desacelera, pois o ar se torna mais denso e pesado. Quando o peso do ar equilibra o empuxo devido à temperatura e pressão, o movimento ascendente tende a parar. Uma vez que o ar não pode descer através do fluido em ascensão, ele se move para o lado, devido ao vento e/ou cisalhamento da rotação da célula vizinha. Como a força para baixo ultrapassa a força ascendente por baixo do fluido, ele começa a descer. À medida que desce se aquece de novo e o ciclo se repete [35, 49]. Na figura 6.4 estão representados os vetores velocidade do ar presentes nas células de convecção.

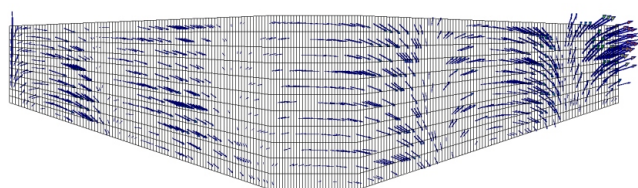


Figura 6.4: Campo de vetores referente a velocidade do ar.

Quando se considera ventos de maior intensidade, 35 m/s e 90 m/s, nota-se que o campo de velocidades horizontal é dominante e o movimento em células desaparece. Observe que para os dois diferentes campos de velocidades de entrada, figuras 6.5 e 6.6, não há diferenças qualitativas nos resultados, nota-se apenas diferenças quantitativas, tendo em vista que apenas o módulo da velocidade sofreu alterações. Para a velocidade de injeção de 35 m/s, observa-se na figura 6.5 que a velocidade simulada sobre a região do reservatório é de aproximadamente 1,4 m/s, o que está bem próximo do valor médio de 1,6 m/s obtido a partir de dados da estação climatológica de Foz do Iguaçu, próxima à região em estudo.

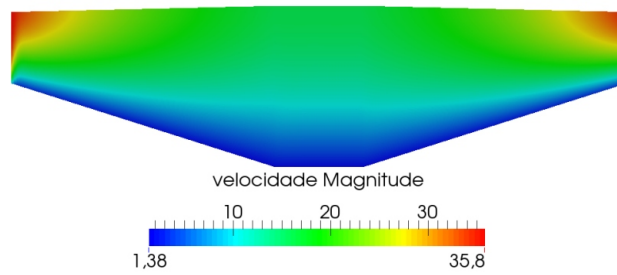


Figura 6.5: Campo de velocidade com velocidade de injeção de 35 m/s.

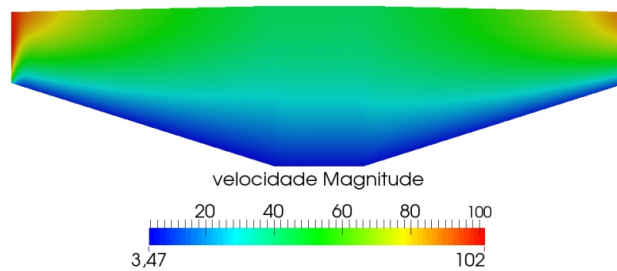


Figura 6.6: Campo de velocidade com velocidade de injeção de 90 m/s.

Em todas as simulações observa-se um aumento no campo de velocidades no canto superior da malha, no entanto, não foi possível identificar o que ocasionou esse fenômeno. É preciso investigar se as condições de bordo impostas nesses contornos e/ou refinamento de malha estão exercendo alguma influência nas simulações numéricas.

Sobre o campo de temperatura, figura 6.7, este é prescrito em todo o domínio variando entre 292 K e 289 K ou equivalentemente 19°C e 16°C.

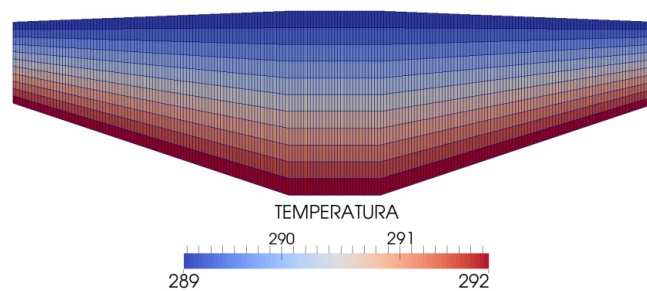


Figura 6.7: Campo de temperatura.

As simulações dos campos de concentração de umidade, objetivo deste trabalho, são apresentadas nas figuras 6.8 a 6.10.

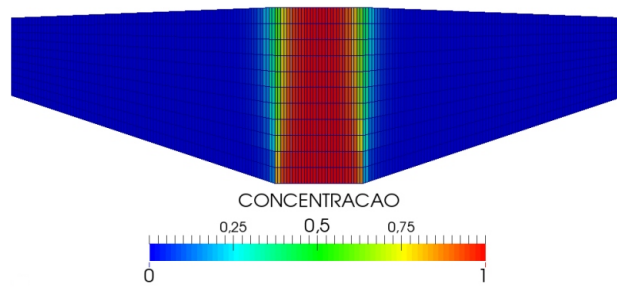


Figura 6.8: Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 18 m/s.

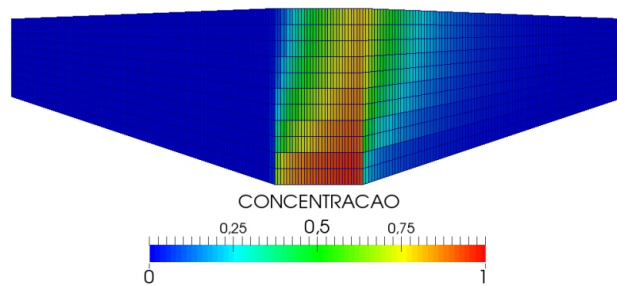


Figura 6.9: Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 35 m/s.

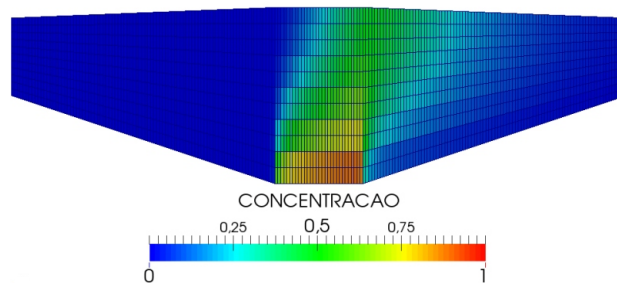


Figura 6.10: Campo de concentração referente à velocidade de injeção de 90 m/s.

Nas três simulações apresentadas, observa-se a influência do campo de velocidade no transporte da umidade. Nota-se que para velocidades menores a concentração de umidade é maior sobre a região do reservatório, figura 6.8, enquanto que para velocidades maiores a umidade é carregada para a região direita do domínio, figuras 6.9 e 6.10.

## 7 CONCLUSÃO

Objetivou-se com esse trabalho propor um modelo matemático baseado em dinâmica dos fluidos computacional, para simular e analisar o escoamento da umidade sobre grandes reservatórios, em particular aplicou-se o modelo ao reservatório da usina hidrelétrica de Itaipu.

Na modelagem do problema considerou-se lâminas de umidade sobre o reservatório, visando simplificar o problema ao tratá-lo de forma bidimensional. Modelou-se o campo de velocidades do ar, tomando-se por base as leis fundamentais da física de conservação de massa, momento e energia. Obtido o campo de velocidades do ar, deduziu-se, a partir da lei de conservação de massa, uma equação para o transporte da umidade, em que a velocidade de transporte advectiva é obtida do campo de velocidade modelado.

O tratamento numérico das equações foi realizado tomando como base o método de diferenças finitas, aplicado sobre o sistema de coordenadas generalizadas. Para tanto, construiu-se a malha computacional nesse sistema e transformou as equações obtidas, do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas generalizadas. Além disso, apresentou-se as discretizações das equações transformadas e uma versão simplificada do método numérico MAC, utilizado no cálculo do campo de velocidade.

Para realizar as simulações numéricas, considerou-se uma lâmina genérica com as mesmas características que as lâminas propostas no modelo de escoamento. Verificou-se para ventos de baixa intensidade, o surgimento de células de convecção térmica, indicando que o modelo proposto apresenta coerência com a física do problema estudado. Observou-se também que a umidade tende a se concentrar sobre a região do reservatório quando considerado ventos menos intensos e é transportada para a região leste à medida que se aumenta a intensidade do vento, isso significa que essa região sofre influência direta da evaporação do reservatório.

Por fim, ressalta-se que a abordagem utilizada para estudar o problema do transporte da umidade possui caráter inédito e encontra-se em estágio inicial. Esse fato atua como fator motivante para prosseguir com as investigações afim de aprimorar e complementar o modelo. Portanto, como continuação deste trabalho, propõe-se que se realize estudos afim de estabelecer critérios mais rigorosos para as condições auxiliares e um melhor refinamento na malha, propõe-se ainda, que se realize as simulações numéricas do escoamento da umidade para várias lâminas bidimensionais sobre o reservatório e se interpole os pontos correspondentes dessas lâminas para obter uma simulação tridimensional.

## Referências bibliográficas

- [1] AHRENS, C. D. *Essentials of meteorology: An invitation to the atmosphere*, 6 ed. Cengage Learning, Belmont, 2012.
- [2] ALLABY, M. *Atmosphere: A scientific history of air, weather, and climate*. Facts On File, Inc., New York, 2009.
- [3] ANEEL. *Atlas de Energia Elétrica do Brasil*. Brasília, 2008.
- [4] ARPS. Advanced Regional Prediction System. Disponível em: [www.caps.ou.edu/ARPS/](http://www.caps.ou.edu/ARPS/). Data de acesso: 19/12/2015.
- [5] ATMET. Atmospheric, Meteorological, and Environmental Technologies. Disponível em: <http://bridge.atmet.org/users/software.php>. Data de acesso: 19/12/2015.
- [6] BADE, M. R., DA ROCHA, A. S., JOSÉ EDÉZIO DA CUNHA, AND DE NÓBREGA, M. T. Definição e caracterização das unidades geomorfológicas da bacia hidrográfica do alto Paraná (Paraguai). *Revista Perspectiva Geográfica* 9 (2014).
- [7] BARBA, A. N. D. *Estudo e implementação de esquema upwind na resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos computacional em coordenadas generalizadas*. Dissertação, Universidade Estadual de Londrina, 2015.
- [8] BENISTON, M. The influence of a water surface on mesoscale dynamics as a function of atmospheric stability. *D. Reidel Publishing Company* 36 (1986), 19–37.
- [9] BERGÉ, P., POMEAU, Y., AND VIDAL, C. *Order within chaos: towards a deterministic approach to turbulence*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [10] BERMANN, C. Impasses e controvérsias da hidreletricidade. *Estudos Avançados* 59 (2007), 139–153.
- [11] BORTOLI, A. L. *Introdução à dinâmica de fluidos computacional*. UFRGS, Porto Alegre, 2000.
- [12] BRUTSAERT, W. *Evaporation into the atmosphere: Theory, history, and applications*. Springer Science and Business media Dordrecht, 1982.
- [13] CIRILO, E. R., AND BORTOLI, A. L. D. Geração da malha da traquéia e dos tubos bronquiais por splines cúbico. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas* 27 (2006), 147–155.

- [14] CORREIA, M. D. F., ASSUNÇÃO, M., AND DIAS, S. Variação do nível do reservatório de sobradinho e seu impacto sobre o clima da região. *RBRH - Revista Brasileira de Recursos Hídricos* 8 (2003), 157–168.
- [15] DIAS, N. L., AND KAN, A. Evaporação, evapotranspiração e evaporação líquida no reservatório de Foz do Areia. *RBRH - Revista Brasileira de Recursos Hídricos* 4 (1999), 29–38.
- [16] EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA (BRASIL). *Balanco energético nacional 2014*. Rio de Janeiro, 2014.
- [17] FEARNSIDE, P. M. Do hydroelectric dams mitigate global warming? The case of Brazil's Curuá-Una Dam. *Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change* 10, 4 (2005), 675–691.
- [18] FERNANDES, R. D. E. O. *Avaliação de simulações de precipitação e vazão por um modelo atmosférico em bacias do semiárido brasileiro*. Dissertação, Universidade Federal de Campina Grande, 2009.
- [19] FORTUNA, A. D. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações*. Edusp, São Paulo, 2000.
- [20] FOX, R. W., MCDONALD, A. T., AND PRITCHARD, P. J. *Introdução à mecânica dos fluidos*, 6 ed. LTC, Rio de Janeiro, 2006.
- [21] GILLIESON, D. *Caves: Processes, development and Management*. Blackwell Publishers Inc., Malden, 1996.
- [22] GOOGLMAPS. Reservatorio de Itaipu. Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/place/Foz+do+Iguaçu>. Data de acesso: 08/07/2015.
- [23] GRIEBEL, M., DORNSEIFER, T., AND TILMAN, N. *Numerical simulation in fluid dynamics: A practical introduction*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Filadélfia, 1998.
- [24] GRIMM, A. M. Verificação de variações climáticas na área do lago de Itaipu. *Universidade Federal do Paraná - Depto. de Física / IAG-USP* (1988), II.7–II.11.
- [25] GUETTER, A. K., DE ANDRADE, F. O., AND GONÇALVES, R. C. Modelagem hidrodinâmica do efeito do vento sobre o reservatório de Itaipu. In *Congresso Paraguayo de Recursos Hidricos* (Hernandarias, 2005).
- [26] GUIDON, M. A. O. *Estudo das variações climáticas na área do lago de Tucuruí*. Dissertação, Universidade de São Paulo, 1991.

- [27] GUNKEL, G., LANGE, U., WALDE, D., AND ROSA, J. A. W. C. The environmental and operational impacts of Curuá-Una , a reservoir in the Amazon region of Pará , Brazil. *Lakes & Reservoirs: Research and Management* 8 (2003), 201–216.
- [28] HARLOW, F. H., AND WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids* 8 (1965), 2182–2189.
- [29] HOLTON, J. R. *An introduction to dynamic meteorology*, 4 ed. Elsevier Academic Press, Burlington, 2004.
- [30] ITAIPU BINACIONAL. Hidrologia. Disponível em: <https://www.itaipu.gov.br/energia/hidrologia>. Data de acesso: 08/06/2015.
- [31] JACOBSON, M. Z. *Fundamentals of atmospheric modeling*, 2 ed. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [32] JOSÉ, L., SANTOS, C., OKA-FIORI, C., CANALI, N. E., FIORI, A. P., MANOEL, J., LUCIANO, J., AND ROSS, S. Mapeamento geomorfológico do estado do Paraná. *Revista Brasileira de Geomorfologia* 2 (2006), 3–12.
- [33] KAIMAL, J. C., AND FINNIGAN, J. J. *Atmospheric boundary layer flows: their structure and measurement*. Oxford University Press, New York, 1994.
- [34] LIMBERGER, L., CONTRI PITTON, S. E. Mudanças climáticas globais e alterações climáticas : a participação dos grandes reservatórios de usinas hidrelétricas. *Pleiade* 2 (2008), 123–133.
- [35] LORENZ, E. N. Deterministic no periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* 20 (1963), 130–141.
- [36] MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*, 2 ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [37] MENDONÇA, F., DANNI-OLIVEIRA, I. M. *Climatologia: noções básicas e climas do Brasil*. Oficina de Textos, São Paulo, 2007.
- [38] MILIOLI, F. E. *Solução numérica de problemas bidimensionais de convecção natural em cavidades arbitrarias*. Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina, 1985.
- [39] MINEROPAR. *Atlas geomorfológico do estado do Paraná*. Minerais do Paraná: Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.
- [40] MINISTERIO DE MINAS E ENERGIA. *Plano Nacional de Energia 2030*. Brasília, 2007.
- [41] MM5. Penn State Mesoscale Model. Disponível em: <http://www2.mmm.ucar.edu/mm5/mm5-home.html>. Data de acesso: 19/12/2015.

- [42] MONTEIRO, N. *Itaipu, a luz*. Itaipu Binacional, Curitiba, 2000.
- [43] ODI, N. L. G., AND MEYER, F. C. A. Modelagem e simulações dos fluxos superficiais d'água na área da represa do rio Manso/MT. *Biomatemática 16* (2006), 89–106.
- [44] OLIVEIRA, G. X. S. *Relações entre medidas de evaporação de superfícies de água livre por evaporímetros e estimativas por métodos meteorológicos em duas regiões do estado de São Paulo*. Tese, Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2009.
- [45] ONS. *Evaporações líquidas nas usinas hidrelétricas*. Operador Nacional do Sistema Elétrico, Rio de Janeiro, 2004.
- [46] PENMAN, H. L. Natural evaporation from open water, bare soil and grass. *The Royal Society 193* (1948), 120–145.
- [47] PEREIRA, S. B. *Evaporação no lago de sobradinho e disponibilidade hídrica no rio São Francisco*. Tese, Universidade Federal de Viçosa, 2004.
- [48] POTTER, M. C., AND WIGGERT, D. C. *Mecânica dos fluidos*. Cengage Learning, São Paulo, 2011.
- [49] SALTZMAN, B. Finite amplitude free convection as an initial value problem. *Journal of the Atmospheric Sciences 19* (1962), 329–341.
- [50] SANTOS, S. C., AND REIS, M. J. *Memória do setor elétrico na região sul*. Editora da UFSC, Florianópolis, 2002.
- [51] SIMEPAR. Sistema Meteorológico do Paraná. Website: <http://www.simepar.br>, 2015.
- [52] SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods*, 3 ed. Oxford University Press, New York, 1985.
- [53] SOUZA, M. B. *Influência de lagos artificiais no clima local e no clima urbano : estudo de caso em Presidente Epitácio (SP)*. Tese, Universidade de São Paulo, 2010.
- [54] VECCHIA, R. Impactos provocados por usinas hidrelétricas. Disponível em: [http://www.observadorpiraju.com.br/coluna\\_rodnei.asp?id=2763](http://www.observadorpiraju.com.br/coluna_rodnei.asp?id=2763). Data de acesso: 12/03/2015.
- [55] WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*, 6 ed. AMGH, Porto Alegre, 2011.
- [56] WMO. *Manual on the observation of clouds and other meteors*, vol. I. Secretariat of the World Meteorological Organization, Geneva, 1975.
- [57] WRF. Weather Research and Forecasting. Disponível em: <http://wrf-model.org/index.php>. Data de acesso: 19/12/2015.