



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

SANDRO BERNARDES PINHEIRO

ESTABILIDADE PARA SISTEMAS VISCOELÁSTICOS E
TERMOELÁSTICOS DE TIMOSHENKO

SANDRO BERNARDES PINHEIRO

**ESTABILIDADE PARA SISTEMAS VISCOELÁSTICOS E
TERMOELÁSTICOS DE TIMOSHENKO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Aantonio Jorge da Silva

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Pinheiro, Sandro Bernardes .

Estabilidade para Sistemas Viscoelásticos e Termoelásticos de Timoshenko / Sandro Bernardes Pinheiro. - Londrina, 2019.
150 f.

Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2019.

Inclui bibliografia.

1. Sistemas de Timoshenko - Tese. 2. Equações Diferenciais - Tese. 3. Desigualdades de Observabilidade - Tese. 4. Semigrupos Lineares - Tese. I. Antonio Jorge da Silva, Marcio . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

SANDRO BERNARDES PINHEIRO

**ESTABILIDADE PARA SISTEMAS VISCOELÁSTICOS E
TERMOELÁSTICOS DE TIMOSHENKO**

Dissertação de mestrado apresentada ao
Departamento
de Matemática da Universidade Estadual de
Londrina, como requisito parcial para a obtenção
do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e
Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Londrina, 19 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Principalmente à Deus por ter me abençoado durante toda a vida.

Como pessoa, principalmente ao meu orientador e amigo prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva, por multiplicar minha motivação em estudar e pela minha evolução acadêmica.

Aos meus pais, Silvana e Aristides, e à minha namorada, Jaqueline Sponton, pelo apoio.

Aos amigos de graduação e mestrado, em especial ao João Paulo, Luan Trannin, Saulo, Guilherme e Arthur, por todo conhecimento compartilhado e companheirismo.

Aos professores da graduação e do mestrado, em especial a Ana Lucia da Silva, Michele O. Alves, Paulo Liboni e José Henrique, por todo conhecimento proporcionado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

PINHEIRO, Sandro Bernardes Pinheiro. **Estabilidade para Sistemas Viscoelásticos e Termoelásticos de Timoshenko**. 2019. 150 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Neste trabalho estudamos, via Semigrupos Lineares, questões relativas a existência, unicidade, dependência contínua e taxas de decaimento de soluções para algumas equações de Timoshenko com acoplamentos viscoelástico e termoelástico, onde são consideradas dois tipos de condições de fronteira, Dirichlet e Dirichlet-Neumann. No segundo capítulo revisamos alguns conteúdos e colecionamos uma série de resultados provenientes da teoria geral de análise funcional e semigrupos lineares. No Capítulo 3 abordamos uma equação com acoplamento viscoelástico no momento fletor, ou seja, com termo de memória na equação do ângulo de rotação. Neste capítulo, estudamos a estabilidade exponencial, taxa de estabilidade polinomial e falta de estabilidade exponencial, conforme se dá uma relação entre os coeficientes do sistema, mas independente das condições de fronteiras. No Capítulo 4 estudamos, na mesma ordem, um sistema termoelástico com lei constitutiva para a condução de calor, a qual é denominada termoelasticidade do tipo III. Neste caso, para o estudo de estabilidade polinomial e exponencial usaremos um resultado comumente chamado por alguns autores de “desigualdades de observabilidade”, para uma classe ampla (e abstrata) de sistemas do tipo Timoshenko. Finalmente, no quinto capítulo, independentemente de qualquer relação entre os coeficientes do sistema e da condição de fronteira considerada, mostramos que a solução decai para zero a uma taxa exponencial no sistema termo-viscoelástico. Aqui, novamente a lei constitutiva para a condução de calor é considerada com sendo termoelasticidade do tipo III e é usada a desigualdade de observabilidade, agora associada a um caso particular de equação de ondas.

Palavras-chave: Timoshenko, desigualdades de observabilidade, equações diferenciais, semigrupos lineares.

PINHEIRO, Sandro Bernardes. **Stability for Viscoelastic and Thermoelastic Timoshenko systems**. 2019. 150 pages. Master thesis (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – State University of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

In this work we study, via Linear Semigroups, questions related to the existence, uniqueness, continuous dependence and decay rates of solutions for some Timoshenko systems with viscoelastic and thermoelastic couplings, where two types of boundary conditions are considered, namely, Dirichlet and Dirichlet-Neumann. In the second chapter we review some contents and collect a series of results from the general theory of functional analysis and linear semigroups. In Chapter 3 we approach an equation with viscoelastic coupling on the bending moment, that is, with memory term in the equation of the rotation angle. In this chapter we study the exponential stability, polynomial decay rate and lack of exponential stability, according to a relation of the coefficients of the system, but independent of boundary conditions. In Chapter 4 we study, in the same order, a thermoelastic system with constitutive law for the heat conduction, which is called thermoelasticity of type III. In this case, for the study of polynomial and exponential stability we will use a result commonly called by some authors as “observability inequalities” for a wide (and abstract) class of Timoshenko type systems. Finally, in the Chapter 5, regardless of any relation among the coefficients of the system and the considered boundary conditions, we show that the solution decays exponentially to zero in the thermo-viscoelastic system. Here, again the constitutive law for the heat conduction is the thermoelasticity of type III and it is used an observability inequality, now associated with a particular case of wave equation.

Keywords: Timoshenko, observability inequalities, differential equations, linear semigroups.

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Resultados Preliminares	15
2.1	Espaços L^p	16
2.1.1	Espaços de Sobolev Unidimensionais	18
2.1.2	Os Espaços $W^{1,p}(I)$	18
2.1.3	Os Espaços $W_0^{1,p}(I)$	19
2.1.4	Os Espaços $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$	20
2.1.5	Os Espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$	21
2.1.6	Definições e Resultados Particulares	22
2.1.7	Espaços com Peso	23
2.2	Semigrupos Lineares	26
2.2.1	Definições e Propriedades	26
2.2.2	Gerador Infinitesimal de um C_0 -semigrupo	27
2.2.3	Teorema de Hille-Yosida	27
2.2.4	Teorema de Lumer-Phillips	28
2.2.5	Resultados de Estabilidade	31
2.3	Problemas Variacionais	32
3	Um Sistema Viscoelástico de Timoshenko	36
3.1	Dedução do Sistema de Timoshenko com Memória	36
3.2	Existência e Unicidade	38
3.3	Estabilidade	47
3.3.1	Primeira condição do Teorema de Prüss e condição do Teorema de Borichev e Tomilov	48
3.3.2	Lemas técnicos	54
3.3.3	Conclusão da Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 3.5)	74
3.3.4	Conclusão da Prova do Decaimento Polinomial (Teorema 3.7)	75
3.4	Falta de Decaimento Exponencial	75
3.5	Apêndice A	79
3.6	Resultados e Discussões sobre o Capítulo 3	84
4	Um Sistema Termoelástico de Timoshenko	85
4.1	Dedução do Sistema Termoelástico com Lei Térmica do Tipo III	85
4.2	Existência e Unicidade	87

4.3	Estabilidade	98
4.3.1	Primeira condição do Teorema de Prüss e condição do Teorema de Borichev e Tomilov	98
4.3.2	Lemas técnicos	99
4.3.3	Conclusão da Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 4.3)	109
4.3.4	Conclusão da Prova do Decaimento Polinomial (Teorema 4.4)	110
4.4	Falta de Decaimento Exponencial	111
4.5	Otimalidade do Decaimento Polinomial	114
4.6	Apêndice B	115
4.6.1	Desigualdade de Observabilidade para Sistemas do Tipo Timoshenko	115
4.7	Resultados e Discussões sobre o Capítulo 4	119
5	Um Sistema Termo-viscoelástico de Timoshenko	121
5.1	Dedução do Modelo Termo-viscoelástico com Lei Térmica do Tipo III	121
5.2	Existência e Unicidade	124
5.3	Estabilidade	131
5.3.1	Primeira condição do Teorema de Prüss	132
5.3.2	Segunda condição do Teorema de Prüss	133
5.3.3	Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 5.5)	143
5.4	Apêndice C	144
5.4.1	Desigualdade de Observabilidade para Sistemas do Tipo Onda	144
5.5	Resultados e Discussões sobre o Capítulo 5	146
	Referências	148

1 INTRODUÇÃO

Analisar questões relacionadas a existência, unicidade e dependência contínua de Problemas de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF) constitui um primeiro passo na abordagem dos problemas dentro da linha de pesquisa de equações diferenciais parciais. Além disso, faz-se necessário estudar também as propriedades (qualitativas) das soluções globais obtidas a priori, como por exemplo, o comportamento assintótico de soluções que consiste, basicamente, em decaimento exponencial ou polinomial de soluções, além de outras estabilidades.

O sistema de Timoshenko, assim chamado em referência ao engenheiro ucraniano Stephen P. Timoshenko (1878-1972), é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve a vibração de uma viga levando em consideração o deslocamento transversal (vertical) e o ângulo de rotação. Por este motivo, o sistema de vigas de Timoshenko é considerado mais geral (e realista) que o sistema de vigas de Euler-Bernoulli, tendo suas origens nos trabalhos de Timoshenko [32, 33].

Como mencionado acima, as duas variáveis consideradas no sistema de Timoshenko são o deslocamento vertical e ângulo de rotação de uma seção transversal com relação a seção normal, as quais denotamos por $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$, respectivamente, ambas dependendo da posição $x \in [0, L]$ e do tempo $t \geq 0$, onde L é o comprimento da viga.

No que segue, apresentamos uma ideia geométrica para as variáveis φ e ψ .

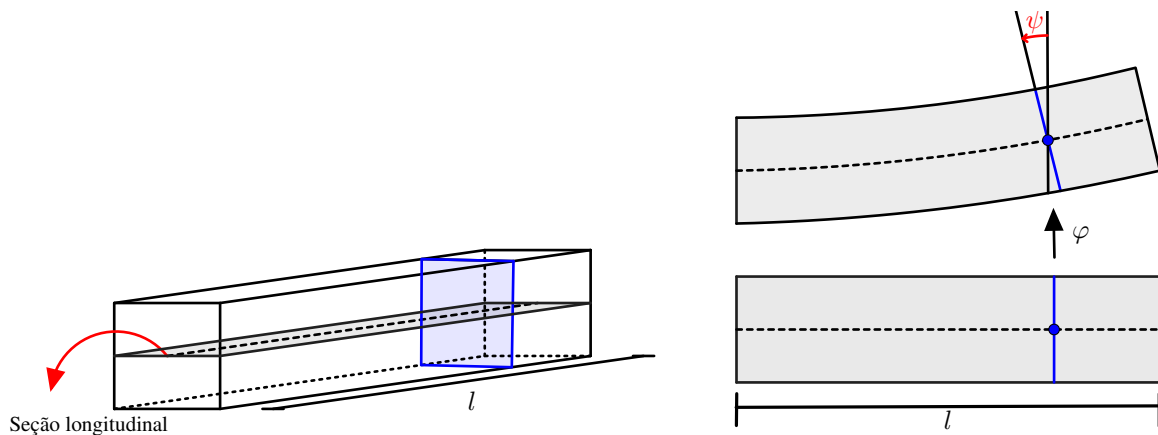


Figura 1.1: Viga de Timoshenko.

Fonte: [31, Seção 4.6]

De acordo com Timoshenko [32, 33] as Equações de Momento para as variáveis φ e ψ são dadas por

$$\rho A \varphi_{tt} = S_x, \quad (1.1)$$

$$\rho I \psi_{tt} = M_x - S, \quad (1.2)$$

onde ρ é a densidade de massa, A e I representam área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga, S designa força de cisalhamento e M o momento fletor. De acordo com [32, 33] as Leis Constitutivas Elásticas para a força de cisalhamento e momento fletor são dadas por

$$S = k'GA(\varphi_x + \psi), \quad (1.3)$$

$$M = EI\psi_x, \quad (1.4)$$

as quais, de maneira ilustrativa são representadas na Figura 1.2 onde as flechas representam a força aplicada sobre a seção transversal.

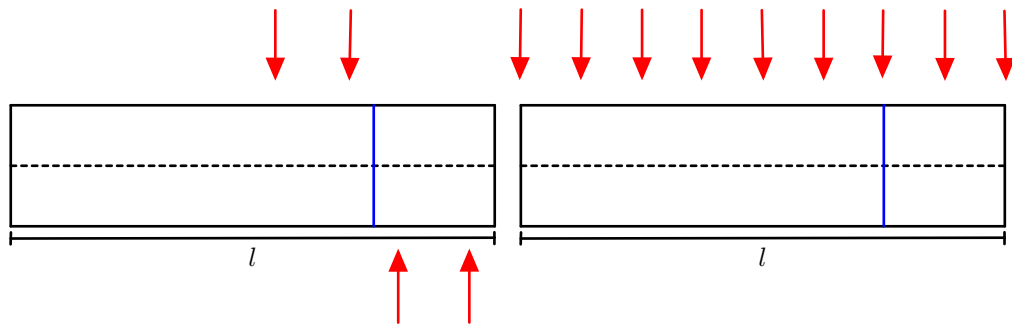


Figura 1.2: Força de cisalhamento e momento fletor.

Fonte: [31, Seção 4.6]

Nas equações (1.3) e (1.4), k' é um fator de correção de cisalhamento, G e E denotam os módulos de cisalhamento e de elasticidade de Young, respectivamente. Fisicamente, todas as constantes do sistema são positivas.

Substituindo (1.3)-(1.4) em (1.1)-(1.2) e denotando as constantes por

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho I, \quad k = k'GA, \quad b = EI, \quad (1.5)$$

chegamos ao seguinte sistema elástico (conservativo) de vigas de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.6)$$

Nos Capítulos 3, 4 e 5 apresentamos três variações do sistema de Timoshenko original (1.6). Em todos os problemas, consideramos condições de fronteira do tipo Dirichlet e Dirichlet-Neumann, sendo que somente a variável de deslocamento vertical φ recebe a condição de Neumann no tipo misto. Vale a pena ressaltar que a condição de fronteira mista considerada em [30], a qual extraímos os sistemas dos Capítulos 4 e 5, é diferente da que está presente neste trabalho. Para ambas as condições de fronteira, em cada caso fizemos inicialmente uma breve dedução do problema, exibindo suas características físicas e apresentando sua versão autônoma.

Em seguida, a existência, unicidade e estabilidade de solução será estudada via teoria de semi-grupos lineares. No que segue, daremos uma ideia mais específica das leis consideradas em cada um dos Capítulos 3, 4 e 5.

No Capítulo 3 estudamos o sistema de Timoshenko com acoplamento viscoelástico no momento fletor, ou seja, com termo de memória na equação do ângulo de rotação. Tal sistema origina-se considerando as equações de momento para o sistema de Timoshenko (1.1)-(1.2), mas considerando a viga em meios viscoelásticos e, portanto, uma lei constitutiva viscoelástica para o momento fletor M , em vez da relação (1.4). Neste caso, a lei constitutiva (1.3) permanece inalterada. Assim, conforme Muñoz Rivera et al. [4, 26], consideramos as seguintes leis constitutivas

$$S = k(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s) ds, \quad (1.7)$$

onde k e b também são definidos em (1.5) e a função g é chamada de núcleo da memória, sendo a princípio considerada uma função positiva e integrável sobre $(0, \infty)$. Note que usamos o princípio de Boltzmann [6, 5] para a relação de tensão-deformação do momento fletor M . Os trabalhos pioneiros no estudo do sistema de Timoshenko com memória (com e sem história) podem ser vistos em [4, 26]. Para uma referência em português, ver também o livro [24]. O sistema que surge ao substituir as identidades (1.7) em (1.1)-(1.2) foi apresentado inicialmente em [26] sem a prova de existência e unicidade de solução. Em [31] foi apresentado esta demonstração com detalhes na Seção 4.8. Motivados por [30, Seção 7], neste trabalho estudamos mais uma vez a existência e unicidade de solução. Além disso, analisamos o comportamento assintótico de solução, que consiste em estudar a estabilidade polinomial e exponencial do sistema (3.13)-(3.15). O tipo de decaimento depende do número $\chi := \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}$, mas independe das condições de fronteira. No caso particular da estabilidade polinomial, aplicamos apenas teoria de semigrupos lineares, diferentemente da técnica de perturbação de energia usada em [26]. Todos os detalhes mencionados neste parágrafo serão esclarecidos no Capítulo 3.

No Capítulo 4 apresentamos um sistema termoelástico. Como encontrado na literatura, o estudo da termoelasticidade começou com o físico Clarence Zener (1905-1993). A termoelasticidade estuda efeitos do campo de temperatura sobre a tensão-deformação de sólidos elásticos em determinadas condições térmicas, ou seja, o estudo aplica-se a sólidos elásticos submetidos a pequenas deformações e flutuações infinitesimais de temperatura. Se a variação de algumas propriedades mecânicas e térmicas com a temperatura puderem ser desprezadas, então a equação termoelástica resultante é linear. Nesse caso, vinculamos à equação de movimento e o balanço de energia (1.1)-(1.2) a lei de condução de calor denominada termoelasticidade do tipo III, a saber,

$$\rho_3 v_t = -q_x - \sigma(\varphi_x + \psi)_t, \quad (1.8)$$

onde v é a diferença de temperatura, σ é uma constante de acoplamento e q é o fluxo de calor. Conforme apresentado em [30, Seção 1], a teoria não convencional de condução de calor proposta por Green e Naghdi [15, 16] fornece uma estrutura geral para modelar uma gama

mais ampla de problemas térmicos do que a teoria padrão. A teoria é subdividida em três tipos distintos que diferem em sua generalidade: o tipo I que, em circunstâncias especiais, engloba a teoria padrão baseada na prescrição constitutiva de Fourier para o vetor de fluxo de calor; o tipo II permite a propagação de ondas térmicas sem dissipação interna de energia; e o tipo III visa fornecer uma estrutura para descrever uma gama ainda maior de problemas. De fato, Green e Naghdi desenvolveram suas teorias independentemente do tipo dentro de uma estrutura termodinâmica que, além de propagação de calor em um condutor rígido, consideraram suficientemente robustas para lidar com um número de fenômenos acoplados como aqueles cobertos pela termoelasticidade em [17], ou pela teoria dos fluidos termoviscosos em [18, 19]. Com isto, no capítulo mencionado consideramos um sistema de Timoshenko termoelástico unidimensional, onde a condução de calor é dada pelas teorias de Green e Naghdi para o tipo III. Assim, as leis constitutivas empregadas são

$$S = k(\varphi_x + \psi) - \sigma v, \quad M = b\psi_x \quad \text{e} \quad q = -\delta p_x - \gamma p_{xt}, \quad (1.9)$$

onde p é o chamado deslocamento térmico, cuja derivação temporal é a temperatura empírica v , ou seja, $p_t = v$. As constantes b, k, ρ_1 e ρ_2 são consideradas como em (1.5). Neste caso, substituindo (1.9) em (1.1)-(1.2) obtemos um sistema termoelástico de Timoshenko, o qual foi apresentado inicialmente em [30], onde os autores mostraram que a estabilidade do problema (ver por exemplo o sistema (4.12)-(4.13) no Capítulo 4) depende das condições de fronteira lá consideradas e do número χ . Com efeito, seguindo [30, Teoremas 4.2 e 5.9], podemos constatar que (4.12)-(4.13) com condição de fronteira do tipo Neumann para ψ e θ e tipo Dirichlet para φ é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi = 0$. Já no caso $\chi \neq 0$, é mostrado em [1, Teorema 6.2] que o sistema (4.12)-(4.13) com a condição de fronteira mista que acabamos de mencionar decai polinomialmente com taxa $t^{-1/2}$ e taxa $t^{-1/4}$ para a condição de Dirichlet, ver (4.14a). Isso ocorre devido obtenção de estimativas diferentes para os termos pontuais das condições de fronteira. No presente trabalho mostramos que a taxa de decaimento é a mesma, e corresponde a taxa ótima $t^{-1/2}$ para todas as condições de fronteira deste trabalho. Isso será melhor discutido e apresentado no Capítulo 4, ver Seção 4.7, bem como todas as questões relativas a este problema em todo o capítulo. Aparentemente, [2] é o primeiro trabalho da literatura a fazer algo nesse sentido, ou seja, a unificar a mesma taxa de decaimento polinomial para condições de fronteira diferentes quando não é assumido igualdade de velocidade ($\chi = 0$), onde são considerados sistemas de Timoshenko com acoplamento termoelástico sob a lei de Fourier.

Novamente motivados por [30, Seção 7], apresentamos o sistema termo-viscoelástico no Capítulo 5. Para tratar do assunto *termoviscoelasticidade*, falaremos primeiro de viscoelasticidade. Os materiais viscoelásticos são fluidos que possuem características de líquidos viscosos com propriedades elásticas e de sólidos com propriedades viscosas, ou seja, possuem propriedades elásticas e viscosas acopladas. Quando submetidas a uma tensão de cisalhamento, estes

tipos materiais sofrem naturalmente uma deformação e, quando esta cessa, ocorre uma certa recuperação da deformação sofrida, a qual é conhecida como comportamento elástico. Já um material termo-viscoelástico é a classe de materiais que sofre simultaneamente deformações elásticas e viscosas levando em consideração sua temperatura, ou seja, estamos em meios não isotérmicos. Neste caso, consideramos um sistema de Timoshenko e termo-viscoelástico unidimensional, onde a condução de calor é dada também pelas teorias de Green e Naghdi para o tipo III, ou seja, assim como no sistema anterior, vincularemos à (1.1)-(1.2) a lei de condução de calor do tipo III em (1.8). Aqui, as leis constitutivas empregadas são

$$S = k(\varphi_x + \psi) - \sigma v, \quad M = b\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s) ds \quad \text{e} \quad q = -\delta p_x - \gamma p_{xt},$$

onde as constantes $k, \sigma, b, \delta, \gamma$ são consideradas como no problema termoelástico e a função g como no problema viscoelástico. Novamente usamos o princípio de Boltzmann para a relação de tensão-deformação do momento fletor M . A grosso modo, este sistema é a “junção” dos sistemas termoelástico e viscoelástico já mencionados. Em [30, Seção 7], os autores sugerem que usando as ideias descritas, e com adaptações necessárias, poderia se obter os resultados para os principais Teoremas nas Seções 4, 5 e 6 daquele trabalho. Sugerem também um estudo para mostrar a taxa de decaimento polinomial ótima da forma $t^{-1/2}$ para o sistema (5.16)-(5.17) deste trabalho, com as condições de fronteira lá apresentadas, quando $\chi \neq 0$. No presente trabalho mostramos que o tipo de decaimento, independentemente do valor de χ e da condição de fronteira, é exponencial. Logo, apresentamos um tipo de decaimento melhor do que o sugerido em [30]. Isto será esclarecido no Capítulo 5, em particular na Seção 5.5.

Por fim, no Capítulo 2 a seguir, apresentamos uma série de resultados clássicos e fundamentais em Análise Funcional, teoria de Espaços de Sobolev unidimensionais, dentre eles se destaca o Teorema de Lax-Milgram. Além disso, na parte de semigrupos é apresentado o importante Teorema de Lumer-Phillips. Tais resultados serão utilizados frequentemente nas provas de existência e unicidade dos problemas apresentados acima. Para finalizar os resultados preliminares, são apresentados os Teoremas de Prüss e de Borichev e Tomilov, os quais serão usados para obter os resultados de estabilidade.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Definição 2.1. *Sejam X e Y dois \mathbb{K} -espaços vetoriais. Uma aplicação $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ é chamada de forma sesquilinear em $X \times Y$ se satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \forall x, y \in X \text{ e } \forall z \in Y;$
- (ii) $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \forall x \in X \text{ e } \forall y, z \in Y;$
- (iii) $a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K};$
- (iv) $a(x, \alpha y) = \bar{\alpha} a(x, y), \forall x \in X, \forall y \in Y \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a é chamada de forma bilinear.

Definição 2.2. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é*

- (a) *coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$.*
- (b) *contínua (limitada) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo par $(x, y) \in X \times Y$;*
- (c) *hermitiana quando $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$, para todo $(x, y) \in X \times X$.*

Definição 2.3. *Sejam X um \mathbb{K} -espaço vetorial uma forma sesquilinear hermitiana.*

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ é chamada de produto interno em X se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $a(x, x) \geq 0, \forall x \in X;$
- (ii) $a(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Denotamos um produto interno em X por $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.4. *Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot, \cdot)_X$ um produto interno em X . A função $\|\cdot\|_X = (\cdot, \cdot)_X^{\frac{1}{2}}$, define uma norma em X . Esta norma é chamada de norma proveniente do produto interno $(\cdot, \cdot)_X$. Um espaço de Banach $(H, \|\cdot\|_H)$ é chamado de espaço de Hilbert quando a norma $\|\cdot\|$ é proveniente de um produto interno em H .*

Teorema 2.5. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [20], página 242, Teorema 4.6-6. □

Teorema 2.6 (Representação de Riesz). *Seja H um espaço de Hilbert sobre \mathbb{K} . Então, cada funcional linear limitado f definido em H pode ser representado em termos de produto interno, ou seja,*

$$f(x) = (x, z)_H, \quad \forall x \in H,$$

onde z é unicamente determinado por f e ainda

$$\|f\|_{H'} = \|z\|_{H'}.$$

Demonstração. Ver [20], página 188, Teorema 3.8-1. □

Teorema 2.7 (Teorema de Lax-Milgram). *Sejam H um espaço de Hilbert real (complexo) e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva. Então, para todo f linear (antilinear) e limitado, existe um único $x \in H$ tal que $a(x, y) = \langle f, y \rangle$, $\forall y \in H$.*

Demonstração. Para o caso real ver [8], página 140, Corolário 5.8 e para o caso complexo ver [27], página 595, Corolário 6.6.2. □

2.1 ESPAÇOS L^p

Definição 2.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $0 < p < \infty$. Seja $\mathcal{L}^p(\Omega)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido de Lebesgue) em Ω , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Dizemos que duas funções $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ são equivalentes ($f \sim g$), se $f = g$ quase sempre em Ω .

Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim.$$

Para $p = \infty$ definimos $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ é limitada quase sempre (q.s.) em } \Omega\}$

Observação 1. Os elementos do conjunto $L^p(\Omega)$ são classes de equivalência de funções em $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Entretanto, é conveniente olhar esses elementos como sendo funções. Assim, escrevemos $f \in L^p(\Omega)$ no lugar de $[f] \in L^p(\Omega)$, admitindo que f é o representante da classe de equivalência.

Proposição 2.9. (i) *Se $0 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

(ii) *O conjunto $L^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial.*

(iii) *Se $f \in L^p(\Omega)$, denotamos por*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(\Omega)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

e para $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|f(x)| := \inf\{c > 0; |f(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Demonstração. Ver [8], página 93, Teorema 4.7. □

Corolário 2.10. *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^N .*

(i) *Se $1 \leq p < \infty$, então a função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^p(\Omega)$.

(ii) *A função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} : L^\infty(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|f(x)| \end{aligned}$$

é uma norma para o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver [8], página 93, Teorema 4.7. □

Definição 2.11. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que um número real q é expoente conjugado de p quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se $p \in (1, \infty)$, $q = \infty$ se $p = 1$ e $q = 1$ se $p = \infty$.*

Lema 2.12. *Se $1 \leq p < \infty$ e $a, b > 0$, então $a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.*

Demonstração. Ver [1], página 23, Lema 2.2. □

Lema 2.13 (Desigualdade de Young com ε). *Dados $a, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ conjugados e $\varepsilon > 0$, vale*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q.$$

Demonstração. Ver [12], página 622, Seção B.2. □

Teorema 2.14 (Desigualdade de Hölder). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e sejam p e q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [8], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 2.15 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$ e, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver em [20], páginas 13-15. □

Definição 2.16. *Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^N e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O Suporte de ϕ é o conjunto*

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}^\Omega.$$

Denotamos por $C_0(\Omega) = \{\phi \in C(\Omega); \text{supp}(\phi) \text{ é compacto}\}$.

2.1.1 Espaços de Sobolev Unidimensionais

Esta seção define e caracteriza conceitos muito importantes relacionados aos espaços de Hilbert e/ou Banach que são utilizados ao longo do trabalho.

2.1.2 Os Espaços $W^{1,p}(I)$

Seja $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.17. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = - \int_I g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular $p = 2$, denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$, ou seja,

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I); \exists g \in L^2(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = - \int_I g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Observação 2. *Dada $u \in W^{1,p}(I)$, a função g é chamada de derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$ e será denotada por u' .*

Proposição 2.18. *(i) O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço vetorial normado, munido da norma (usual)*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Além disso, se $1 < p < \infty$, então podemos definir a norma

$$\|u\|_p = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p}$$

em $W^{1,p}(I)$, a qual é equivalente à norma usual.

(ii) O espaço $H^1(I)$ é um espaço vetorial com produto interno e norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u_x, v_x)_{L^2} = \int_I u \bar{v} dx + \int_I u_x \bar{v}_x dx, \quad \forall u, v \in H^1(I)$$

$$\|u\|_{H^1} = \left(\int_I |u|^2 dx + \int_I |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. A demonstração dos itens (i) e (ii) seguem mostrando as propriedades de norma e produto interno para os espaços definidos. \square

Lema 2.19. *Seja I um intervalo ilimitado e seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p < \infty$. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Demonstração. Ver [8], página 214, Corolário 8.9. \square

Teorema 2.20 (Imersão de Sobolev). *Temos que se I é limitado ($|I| < \infty$), então $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$, para todo $1 < p \leq \infty$, com inclusão compacta.*

Demonstração. Ver [8], páginas 212 a 214, Teorema 8.8. \square

Corolário 2.21 (Derivação do produto). *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, temos $uv \in W^{1,p}(I)$ e $(uv)' = u'v + uv'$. Além disso, vale a fórmula de integração por partes*

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds.$$

Demonstração. Ver [8], página 215, Corolário 8.10. \square

2.1.3 Os Espaços $W_0^{1,p}(I)$

Definição 2.22. *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é dado por*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}}.$$

No caso de $p = 2$ denotamos por

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Observação 3. O espaço $W_0^{1,p}(I)$, também é definido como

$$W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,p}(I); u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}.$$

Quando $p = 2$,

$$H_0^1(I) = \{u \in H^1; u(x) = 0 \text{ para } x \in \partial I\}.$$

Teorema 2.23 (Desigualdade de Poincaré). *Seja I um intervalo limitado. Então, existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Demonstração. Ver [8], página 218, Proposição 8.13. □

Observação 4. Do Teorema 2.23 vem que $\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ define uma norma equivalente em $W_0^{1,p}(I)$. Além disso, é possível mostrar que $C = |I|$.

2.1.4 Os Espaços $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$

Definição 2.24. *Denotamos por $L_*^p(I)$ e $W_*^{1,p}(I)$, respectivamente, os espaços de média nula, em que*

$$L_*^p(I) = \left\{ u \in L^p(I); \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = 0 \right\}$$

e

$$W_*^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{1,p}(I); \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

No caso de $p = 2$ denotamos por

$$H_*^1(I) = W_*^{1,2}(I).$$

Observação 5. Os espaços $W_*^{1,p}(I)$ e $H_*^1(I)$ são subespaços de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$, respectivamente, com norma e produto interno induzidos de $W^{1,p}(I)$ e $H^1(I)$.

Teorema 2.25. (i) *Se $1 < p \leq \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços de Banach.*

(ii) *Se $1 < p < \infty$, então $W_*^{1,p}(I)$ são espaços reflexivos.*

(iii) *$H_*^1(I)$ é um espaço de Hilbert com produto interno e norma induzidos de $H^1(I)$.*

Demonstração. As demonstrações dos itens (i) e (ii) são consequências da Observação 5 e resultados de Análise Funcional que podem ser encontrados em [8] e [10]. □

Teorema 2.26 (Desigualdade de Poincaré para espaço de medida nula). *Seja I um intervalo limitado. Então, existe $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_*^{1,p}(I),$$

onde $W_*^{1,p}(I)$ é dado em (2.1).

Demonstração. Ver [31, Página 34, Teorema 2.87]. \square

Observação 6. Do Teorema 2.26 vem que $\|u\|_{W_*^{1,p}} = \|u'\|_{L^p}$ define uma norma equivalente em $W_*^{1,p}(I)$.

Notação 1. O dual dos espaços $W_0^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$ e $H_0^1(I)$ serão denotados por $W^{-1,q}(I)$ e $H^{-1}(I)$, respectivamente, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2.1.5 Os Espaços $W^{m,p}(I)$ e $W_0^{m,p}(I)$

Definição 2.27. Dado $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subset \mathbb{R}$, os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$ são definidos como

$$W^{m,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists u', u'', \dots, u^{(m)} \in L^p(I)\},$$

onde as funções $u', u'', \dots, u^{(m)}$ são chamadas de derivada fraca de ordem 1, 2, ..., m, respectivamente. Além disso, se $u \in W^{m,p}(I)$

$$\int_I u D^j \varphi dx = (-1)^j \int_I u^{(j)} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \quad 1 \leq j \leq m,$$

onde D^j representa a derivada clássica de ordem j.

Observação 7. (i) $W^{m,p}(I)$ é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^m \|D^j u\|_{L^p(I)}.$$

(ii) Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(I) = H^m(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno e norma dados por

$$(u, v)_{H^m(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2(I)},$$

$$\|u\|_{H^m(I)} = \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \sum_{j=1}^m \|D^j u\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) Para $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Também podemos escrever

$$W^{m,p} = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Então, $W^{m,p}(I) \subset W^{1,p}(I)$, $\forall m \geq 2$, com inclusão contínua.

Teorema 2.28. (i) $W^{m,p}(I)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) $W^{m,p}(I)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.

(iii) $H^m(I)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Ver [9]. □

2.1.6 Definições e Resultados Particulares

Teorema 2.29. Seja $V = H_0^1(0, L)$ ou $V = H_*^1(0, L)$. Dada $u \in V$, temos $-\partial_{xx}u \in V'$.

Demonstração. Podemos definir

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}u &: V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle \partial_{xx}u, v \rangle := (\partial_x v, \partial_x u)_2. \end{aligned}$$

O operador $-\partial_{xx}u$ está bem definido. Agora, note que $-\partial_{xx}u$ é contínuo e linear. De fato, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, obtemos

$$|\langle -\partial_{xx}u, v \rangle| \leq \|\partial_x v\|_2 \|\partial_x u\|_2 = \|u\|_V \|v\|_V$$

Ou seja,

$$\|-\partial_{xx}u\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_V, \forall u \in V.$$

Assim, $-\partial_{xx}$ é contínua, a linearidade é verificada facilmente e, portanto, $-\partial_{xx}u \in V'$. □

Teorema 2.30. Sejam X um espaço de Banach e $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ um operador invertível tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

então o operador $B_1 + B_2$ é linear, limitado e invertível.

Demonstração. Ver [24], página 90, Lema 2.12.1. □

Teorema 2.31. Seja $V = L^2(0, L)$, $L_*^2(0, L)$, $H_0^1(0, L)$ ou $H_*^1(0, L)$ e considere $u_n, v_n \in V$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $u_n \rightarrow 0$ e $u_n + v_n \rightarrow 0$ em V , então $v_n \rightarrow 0$ em V .

Demonstração. Basta notar que,

$$\|v_n\|_V \leq \|u_n + v_n\|_V + \|u_n\|_V,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 2.32. (i) Diz-se que

$$f = O(g) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se existe uma constante C tal que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

para todo x suficientemente perto de x_0 .

(ii) Diz-se que

$$f = o(g) \text{ quando } x \rightarrow x_0,$$

se o seguinte limite ocorre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observação 8. A expressão “ $O(g)$ ” (ou “ $o(g)$ ”) não está definida por si só. Ela deve ser sempre acompanhada do limite, por exemplo “ $x \rightarrow x_0$ ”.

Definição 2.33. Escrevemos, para $n, p \in \mathbb{N}$ e $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n \approx cn^p, \quad c > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

para indicar que f_n se comporta como um polinômio de grau p na variável n .

2.1.7 Espaços com Peso

No decorrer do trabalho será utilizado a notação \mathbb{R}^+ , para o conjunto $(0, \infty)$, isto é $x \in \mathbb{R}^+$, se $0 < x < \infty$.

Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R})$ uma função positiva com $g(0) > 0$.

Definição 2.34. Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Definimos **espaço com peso** g por

$$L_g^p(\mathbb{R}^+, X) := \left\{ \eta : [0, \infty) \rightarrow X; \int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

Será comum, neste trabalho, a notação $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0, L)) := \mathcal{M}$.

Proposição 2.35. Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço $L_g^p(\mathbb{R}^+, X)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)} := \left(\int_0^\infty g(s) \|\eta(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, se X é um espaço de Hilbert, então $L_g^p(\mathbb{R}^+, X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(\eta, \zeta)_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)} := \int_0^\infty g(s)(\eta(s), \zeta(s))_X ds.$$

Demonstração. Ver [34]. □

Proposição 2.36. *Seja $1 \leq p < \infty$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_g : L_g^p(\mathbb{R}^+, X) &\rightarrow X \\ \eta &\mapsto \mathcal{I}_g(\eta) = \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds, \end{aligned}$$

é limitada com

$$\|\mathcal{I}_g(\eta)\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{(p-1)} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)}, \quad \forall \eta \in L_g^p(\mathbb{R}^+, X).$$

Demonstração. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)\|\eta(s)\|_X ds &= \int_0^\infty g^{(p-1)}(s)g^{1/p}(s)\|\eta(s)\|_X ds \\ &\leq \left(\int_0^\infty g(s)ds \right)^{(p-1)/p} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)} \\ &\leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{(p-1)} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)}. \end{aligned}$$

Assim, \mathcal{I}_g está bem definida e vale

$$\|\mathcal{I}_g(\eta)\|_X \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}^{(p-1)} \|\eta\|_{L_g^p(\mathbb{R}^+, X)}, \quad \forall \eta \in L_g^p(\mathbb{R}^+, X).$$

A linearidade de \mathcal{I}_g é imediata. □

O Teorema 2.37 caracteriza o conceito de Convolução que será utilizado para a demonstração do Lema 2.38.

Teorema 2.37. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, a função*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto F(y) = f(x - y)g(y) \end{aligned}$$

é integrável sobre \mathbb{R}^N . Definimos convolução de f com g por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} F(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy.$$

Então, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração. Ver [8], página 104, Teorema 4.15. □

Lema 2.38. Se $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$, com $X = H^1_0(0, L)$ ou $H^1_*(0, L)$ espaço de Hilbert. Então, a função ϕ_η dada por

$$\phi_\eta(s) = \int_0^s e^{y-s}\eta(y)dy$$

pertence a $L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$. Em particular,

$$\int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{y-s}\eta(y)dyds < +\infty.$$

Demonstração. Seja $\eta \in L^2_g(\mathbb{R}^+, X)$. Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) \|(\phi_\eta)_x(s)\|_{L^2}^2 ds &= \int_0^\infty g(s) ((\phi_\eta)_x(s), (\phi_\eta)_x(s))_{L^2} ds \\ &= \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^s e^{y-s}\eta_x(y)dy, \int_0^s e^{w-s}\eta_x(w)dw \right)_{L^2} ds \\ &= \int_0^\infty g(s) \int_0^s e^{y-s} \int_0^s e^{w-s} (\eta_x(y), \eta_x(w))_{L^2} dw dy ds \\ &\leq \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^s e^{y-s} \|\eta_x(y)\|_{L^2} dy \right) \left(\int_0^s e^{w-s} \|\eta_x(w)\|_{L^2} dw \right) ds. \end{aligned}$$

Denotando por

$$\varepsilon_1(s) = e^{-s} \text{ e } \varepsilon_2(s) = [g(s)]^{\frac{1}{2}} \|\eta_x(s)\|_{L^2},$$

temos que $\varepsilon_1 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\varepsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$, logo $\varepsilon_1 * \varepsilon_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ pelo Teorema 2.37, em que

$$(\varepsilon_1 * \varepsilon_2)(s) := \int_0^s \varepsilon_1(y - s)\varepsilon_2(y).$$

Portanto, utilizando novamente o Teorema 2.37, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s) \|(\phi_\eta)_x(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \int_0^\infty g(s) \left(\int_0^s e^{y-s} \|\eta_x(y)\|_{L^2} dy \right) \left(\int_0^s e^{w-s} \|\eta_x(w)\|_{L^2} dw \right) ds \\
&= \int_0^\infty (\varepsilon_1 * \varepsilon_2)^2(s) ds \\
&= \|\varepsilon_1 * \varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&\leq \|\varepsilon_1\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|\varepsilon_2\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\
&= \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-s} ds \right)^2}_{=1} \left(\int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 ds \right) \\
&= \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+, X)}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

□

2.2 SEMIGRUPOS LINEARES

A teoria de semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach tem um papel importante no estudo de Equações Diferenciais. Historicamente, teve seu grande avanço a partir de 1948 com a demonstração do famoso Teorema de Hille-Yosida, ver por exemplo Pazy [28]. Decorrente deste, temos o principal resultado do presente capítulo, a saber, o Teorema de Lumer-Phillips.

2.2.1 Definições e Propriedades

Definição 2.39. Diz-se que uma aplicação $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se

(i) $S(0) = I_X$;

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todos $t, s \in [0, \infty)$.

Além disso, diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 , ou é um C_0 -semigrupo, se

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0_+} \|S(t)x - x\|_X = 0$, para cada $x \in X$.

Proposição 2.40. Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C_0 . Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} := \omega_0,$$

com $-\infty \leq \omega_0 < \infty$. Além disso, para cada $\omega > \omega_0$, existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver em [28], página 4, Teorema 2.2. □

Definição 2.41. Quando $\omega = 0$, tem-se que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, para todo $t \geq 0$. Neste caso, diz-se que $S(t)$ é um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disto, $M = 1$, $S(t)$ é dito um semigrupo de contrações.

2.2.2 Gerador Infinitesimal de um C_0 -semigrupo

Definição 2.42. Seja $S(t)$ um C_0 -semigrupo em X . O operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{S(h) - I_X}{h} \right) x, \quad x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal (g.i.) do semigrupo $S(t)$.

Observação 9. $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Proposição 2.43. Sejam $S(t)$ um C_0 -semigrupo e A seu g.i. As seguintes propriedades são válidas:

(i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e

$$\frac{dS}{dt}(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Se $x \in D(A)$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax d\xi, \quad 0 \leq s \leq t.$$

(iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\xi)x d\xi \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t S(\xi)x d\xi \right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Ver [28], página 5, Teorema 2.4. □

2.2.3 Teorema de Hille-Yosida

Teorema 2.44 (Hille-Yosida). Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear. Então, A é g.i. de um C_0 -semigrupo se, e somente se, são válidas

(i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X ;

(ii) existem números reais M e ω tais que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda > \omega$, temos $\lambda \in \rho(\mathcal{A}_j)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\rho(\mathcal{A}_j)$ e $R(\lambda, A)$. Neste caso,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Ver [28], página 20, Teorema 5.2. □

O Teorema 2.44 nos dá condições necessárias e suficientes para a caracterização de um C_0 -semigrupo, mas a verificação de suas hipóteses não são simples. Deste modo, serão apresentados na próxima seção alguns resultados preliminares para a verificação de um resultado muito importante para este trabalho, o qual decorre do Teorema de Hille-Yosida. Além disso, a verificação de suas hipóteses são bem mais simples como veremos.

2.2.4 Teorema de Lumer-Phillips

Definição 2.45. Escrevemos $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que o operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ que satisfaz

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Observação 10. (i) No caso em que $\omega = 0$, temos que $A \in G(M, 0)$ e significa que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo limitado com

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad t \geq 0.$$

(ii) No caso particular em que $M = 1$, e $\omega = 0$, então $A \in G(1, 0)$, significa que A é g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações, pois

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Proposição 2.46 (Hille-Yosida para Contrações). *Um operador linear A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações ($A \in G(1, 0)$) se, e somente se,*

(i) A é um operador linear fechado e densamente definido, isto é, $\overline{D(A)} = X$.

(ii) Para todos $\lambda > 0$ e $\lambda \in \rho(A)$, temos

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Ver [28], página 8, Teorema 3.1. \square

Definição 2.47. *Uma aplicação dualidade, é qualquer aplicação $j : X \longrightarrow X'$ tal que para cada $x \in X$, temos $j(x) \in F_x$, onde*

$$F_x = \{x^* \in X'; \langle x^*, x \rangle_{X', X} = \|x^*\|_{X'}^2 = \|x\|_X^2\}.$$

Definição 2.48. *Um operador linear A é dito dissipativo relativamente à aplicação dualidade j , se*

$$\operatorname{Re}\langle j(x), Ax \rangle_{X', X} \leq 0, \quad \forall x \in D(A). \quad (2.3)$$

Se A é um operador dissipativo (relativamente à alguma aplicação dualidade) e, além disto, $\operatorname{Im}(I_X - A) = X$, dizemos que A é m -dissipativo.

Demonstração. Ver [28], página 14, Teorema 4.2. \square

Teorema 2.49. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear dissipativo. Se $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - A) = H$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Ver [28], página 15, Teorema 4.5. \square

Teorema 2.50. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador dissipativo tal que $\operatorname{Im}(I - A) = X$. Se X é um espaço reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [28], página 16, Teorema 4.6. \square

Teorema 2.51 (Lumer-Phillips). *Se A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações em espaços de Banach, então*

- (i) *A é dissipativo relativamente a qualquer aplicação dualidade,*
- (ii) *$\operatorname{Im}(\lambda I_X - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

- (iii) *$D(A)$ é denso em X ,*
- (iv) *A é dissipativo relativamente a alguma aplicação dualidade,*
- (v) *$\operatorname{Im}(\lambda_0 I_X - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações.

Demonstração. Ver [28], página 14, Teorema 4.3. \square

Observação 11. As aplicações dos próximos capítulos serão realizadas em espaços de Hilbert

$$(H, (\cdot, \cdot)_H, \|\cdot\|_H).$$

Deste modo, nos próximos capítulos utilizamos a aplicação dualidade $j(x) = x$. Neste caso, (2.3) resumimos a $\operatorname{Re}(Ax, x)_H \leq 0, \forall x \in D(A)$.

O Teorema 2.52, é um resultado muito importante e bastante utilizado na parte de existência dos problemas apresentados nos próximos capítulos. Esse resultado é consequência do Teorema 2.51 com a dualidade definida na Observação 11.

Teorema 2.52. (*Lumer-Phillips 1*) *Se A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações em espaços de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot)_H, \|\cdot\|_H)$, então*

(i) *A é dissipativo, isto é, $\operatorname{Re}(Ax, x)_H \leq 0, \forall x \in D(A)$.*

(ii) *$\operatorname{Im}(\lambda I_H - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.*

Reciprocamente, se

(iii) *$D(A)$ é denso em H ;*

(iv) *A é dissipativo;*

(v) *$\operatorname{Im}(\lambda_0 I_H - A) = H$, para algum $\lambda_0 > 0$,*

então A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações.

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 2.51. □

Corolário 2.53. *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H . Se $0 \in \rho(A)$, então A é um g.i. de um C_0 -semigrupo de contrações em H .*

Demonstração. Ver [24], página 88, Teorema 2.12.3. □

Definição 2.54. *A grosso modo, um sistema de equações diferenciais é chamado autônomo, quando suas equações não dependem explicitamente da variável temporal t . E dizemos que o mesmo é não autônomo em caso contrário.*

Teorema 2.55. *Considere o problema de Cauchy abstrato*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Se A é o g.i. de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , então para cada $u_0 \in D(A)$ ($u_0 \in X$), existe uma única função na classe

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X) \quad (u \in C([0, \infty), X))$$

que é solução clássica (generalizada) do PVI (2.4), dada por $u(t) = S(t)u_0$. Além disso, se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ for um C_0 -semigrupo de contrações, temos que

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X \quad e \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Demonstração. Ver [8], página 185, Teorema 7.4. □

2.2.5 Resultados de Estabilidade

O primeiro resultado é uma versão já adaptada para espaços de Hilbert e fornece uma caracterização de estabilidade exponencial para C_0 -semigrupos de contrações, ver por exemplo os artigos [13, 29] ou o livro [23, Teorema 1.3.2]. A partir deste momento, e^{At} indica um C_0 -semigrupo cujo g.i. é o operador A .

Teorema 2.56 (Prüss). *Um C_0 -semigrupo de contrações $T(t) = e^{At}$ definido em um espaço de Hilbert H é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições a seguir*

$$(i) \quad i\mathbb{R} \subseteq \rho(A); \tag{2.5a}$$

$$(ii) \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \tag{2.5b}$$

Demonstração. Ver [13, 29, 23]. □

O próximo resultado foi recentemente estabelecido por Borichev e Tomilov no artigo [7] e fornece uma caracterização de decaimento do “tipo polinomial” para C_0 -semigrupo limitados. Uma versão completa do Teorema a seguir pode ser vista em [7, Teorema 2.4]. Aqui, vamos resumir apenas nos casos em que aplicamos aos problemas de Timoshenko estudados.

Teorema 2.57 (Borichev e Tomilov). *Suponhamos que $T(t) = e^{At}$ seja um C_0 -semigrupo limitado definido em um espaço de Hilbert H tal que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$. Então, vale a seguinte equivalência:*

$$\|T(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(t^{-1/\alpha}) \quad \text{se, e somente se,} \quad \|(i\lambda I_d - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^{-\alpha}), \tag{2.6}$$

para $t \rightarrow \infty$ e $|\lambda| \rightarrow \infty$, e alguma constante fixada $\alpha > 0$.

Demonstração. Ver [7]. □

O resultado seguinte é bem peculiar da teoria de semigrupos lineares. O mesmo pode ser usado para mostrar que o resolvente $\rho(A)$ de um operador linear A contém o eixo imaginário $i\mathbb{R}$, hipótese fundamental na estabilidade de semigrupos e requerida nos Teoremas 2.56 e 2.57. No que segue apresentaremos uma versão que resume dois resultados do livro de Engel and Nagel [11], a saber, o Corolário 1.15 e Proposição 5.8. Vejamos:

Teorema 2.58. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com conjunto resolvente $\rho(A)$ não vazio.*

- B1.** *O operador A tem resolvente compacto (isto é, existe $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda I_d - A)^{-1}$ é compacto) se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ é compacta.*
- B2.** *Se o operador A possui resolvente compacto, então o espectro $\sigma(A)$ de A é composto apenas por autovalores de A .*

Demonstração. Ver [11]. □

2.3 PROBLEMAS VARIACIONAIS

Nesta seção, separamos alguns resultados úteis de unicidade de solução para alguns problemas variacionais, as quais serão utilizados nas Seções 3.2 e 5.2 dos capítulos seguintes.

A partir deste momento, usaremos $\|\cdot\|_2$ para indicar $\|\cdot\|_{L^2(0,L)}$.

Lema 2.59. *Considere $g_1 \in L^2(0, L)$ ($L_*^2(0, L)$), $g_2 \in H^{-1}(0, L)$ e $g_3 \in H^{-1}(0, L)$. Então, existe uma única terna (φ, ψ, θ) no espaço $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ (respectivamente, $H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$) tal que*

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0, L) \text{ (ou } L_*^2(0, L)), \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx} = g_2 & \text{em } H^{-1}(0, L), \\ -\delta\theta_{xx} = g_3 & \text{em } H^{-1}(0, L), \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.7a) \\ (2.7b) \\ (2.7c) \end{matrix}$$

e ainda, $\varphi \in H^2(0, L)$, com $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$ no caso $g_1 \in L_*^2(0, L)$.

Demonstração. Para que possamos provar o lema de uma forma dinâmica, definiremos $V_1 = H_0^1(0, L)$ e $V_2 = H_*^1(0, L)$ e usaremos a notação V_j para indicar que estamos apresentando o caso em que $g_1 \in L^2(0, L)$ ou $g_1 \in L_*^2(0, L)$ ao mesmo tempo.

Mostraremos que existe uma única solução $(\varphi, \psi, \theta) \in V_j \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) := \Lambda_j$ para o seguinte problema variacional

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \Xi(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}), \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \Lambda_j, \quad (2.8)$$

onde $a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) : \Lambda_j \times \Lambda_j \rightarrow \mathbb{C}$ é uma forma bilinear, dada por

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \int_0^L [k(\varphi_x + \psi)(\overline{\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}}) + \beta\psi_x\overline{\tilde{\psi}_x} + \delta\theta_x\overline{\tilde{\theta}_x}] dx. \quad (2.9)$$

e $\Xi : \Lambda_j \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional dado por

$$\Xi(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \mapsto \Xi(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \int_0^L (g_1\overline{\tilde{\varphi}} + g_2\overline{\tilde{\psi}} + g_3\overline{\tilde{\theta}}) dx. \quad (2.10)$$

Pelas propriedades de produto interno, vemos que a forma a , definida em (2.9), é claramente sesquilinear. Vamos mostrar que a é contínua e coerciva. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Hölder e Poincaré, teremos

$$\begin{aligned}
|a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))| &\leq k\|\varphi_x + \psi\|_2\|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\|_2 + \beta\|\psi_x\|_2\|\tilde{\psi}_x\|_2 + \delta\|\theta_x\|_2\|\tilde{\theta}_x\|_2 \\
&\leq k\|\varphi_x\|_2\|\tilde{\varphi}_x\|_2 + kL\|\varphi_x\|_2\|\tilde{\psi}_x\|_2 + kL\|\psi_x\|_2\|\tilde{\varphi}_x\|_2 \\
&\quad + kL^2\|\psi_x\|_2\|\tilde{\psi}_x\|_2 + \beta\|\psi_x\|_2\|\tilde{\psi}_x\|_2 + \delta\|\theta_x\|_2\|\tilde{\theta}_x\|_2 \\
&\leq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)(\|\tilde{\varphi}_x\|_2 + \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \|\tilde{\theta}_x\|_2),
\end{aligned}$$

onde $C := \max\{k, kL, kL^2 + \beta, \delta\}$. Assim,

$$|a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))| \leq C\|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_j}\|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\|_{\Lambda_j}.$$

Quanto a coervidade, usando o fato de que $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \leq 8(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_j}^2 \\
&\leq (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\
&\leq (\|\varphi_x + \psi\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\
&\leq 8\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 8(L+1)^2\|\psi_x\|_2^2 + 8\|\theta_x\|_2^2 \\
&\leq k\frac{8}{k}\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta\frac{8(L+1)^2}{\beta}\|\psi_x\|_2^2 + \delta\frac{8}{\delta}\|\theta_x\|_2^2 \\
&\leq \operatorname{Re}(p \cdot a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta))),
\end{aligned}$$

onde $p = \max\{8/k, 8(L+1)^2/\beta, 8/\delta\}$. Se $p_1 = 1/p$, então $\operatorname{Re}(a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta))) \geq p_1\|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_j}^2$, como queríamos.

Mostraremos agora que Ξ , definido em (2.10), é antilinear e limitada. De fato, segue das propriedades de produto interno que Ξ é antilinear. Além disso,

$$\begin{aligned}
|\Xi(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})| &\leq |(g_1, \tilde{\varphi})_2| + |(g_2, \tilde{\psi})_2| + |(g_3, \tilde{\theta})_2| \\
&\leq \|g_1\|_2\|\tilde{\varphi}\|_2 + \|g_2\|_{H^{-1}}\|\tilde{\psi}\|_2 + \|g_3\|_{H^{-1}}\|\tilde{\theta}\|_2 \\
&\leq \varsigma(\|\tilde{\varphi}_x\|_2 + \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \|\tilde{\theta}_x\|_2) \\
&= \varsigma(\|\tilde{\varphi}\|_{V_j} + \|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\theta}\|_{H_0^1}) \\
&= \varsigma\|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\|_{\Lambda_j},
\end{aligned}$$

onde $\varsigma = L(\|g_1\|_2 + \|g_2\|_{H^{-1}} + \|g_3\|_{H^{-1}})$.

Pelo teorema de Lax-Milgram, existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_j$ solução de (2.8).

Em particular, a identidade (2.8) é válida para $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$. Aplicando o Teorema da

Representação de Riesz, deduzimos

$$\langle k(\varphi_x + \psi), \tilde{\psi} \rangle - \langle \beta\psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle = \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L),$$

ou, equivalentemente,

$$k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx} = g_2 \quad \text{em } H^{-1}(0, L).$$

Como a identidade (2.8) é válida para $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$, procedendo de modo análogo ao caso anterior, obtemos

$$\delta\theta_{xx} = g_3 \quad \text{em } H^{-1}(0, L).$$

Além disso, observando que a identidade (2.8) também é válida para $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$ e procedendo de modo análogo ao apresentado acima, segue que

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{\tilde{\varphi}_x} dx = \int_0^L g_1 \overline{\tilde{\varphi}} dx, \quad \forall \tilde{\varphi} \in V_j. \quad (2.11)$$

A partir deste momento, teremos que analisar separadamente os casos em que $g_1 \in L^2(0, L)$ e $g_1 \in L_*^2(0, L)$.

Caso 1. $g_1 \in L^2(0, L)$;

A igualdade em (2.11) é válida para qualquer função $\tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L)$. Assim,

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{\tilde{\varphi}_x} dx = - \int_0^L (-g_1) \overline{\tilde{\varphi}} dx, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_0^1(0, L). \quad (2.12)$$

Como $k(\varphi_x + \psi)$, $-g_1 \in L^2(0, L)$ e vale (2.12) em particular para $\tilde{\varphi} \in C_0^1(0, L)$, então $\varphi_x \in H^1(0, L)$ e ainda

$$k(\varphi_x + \psi)_x = -g_1 \quad \text{em } L_*^2(0, L).$$

Caso 2. $g_1 \in L_*^2(0, L)$.

Dado $\tilde{\varphi} \in H^1(0, L)$, a igualdade (2.11) é válida para a seguinte função de média nula:

$$\phi = \tilde{\varphi} - \frac{1}{L} \int_0^L \tilde{\varphi} dx.$$

Substituindo, então, a função acima em (2.11), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{\tilde{\varphi}_x} dx - \int_0^L k(\varphi_x + \psi) \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \tilde{\varphi} dx \right)_x} dx &= \int_0^L g_1 \overline{\tilde{\varphi}} dx \\ &- \int_0^L g_1 \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \tilde{\varphi} dx \right)} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando que $\psi \in H_0^1(0, L)$, $g_1 \in L_*^2(0, L)$ e $\left(\frac{1}{L} \int_0^L \tilde{\varphi} dx\right)_x = 0$, temos

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi) \tilde{\varphi}_x dx = - \int_0^L (-g_1) \tilde{\varphi} dx, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H^1(0, L). \quad (2.14)$$

Como $k(\varphi_x + \psi)$, $-g_1 \in L^2(0, L)$ e vale (2.14) em particular para $\tilde{\varphi} \in C_0^1(0, L)$, então $\varphi_x \in H^1(0, L)$ e ainda

$$k(\varphi_x + \psi)_x = -g_1 \quad \text{em } L^2(0, L). \quad (2.15)$$

Substituindo em (2.14) o resultado obtido em (2.15), segue que

$$\int_0^L k \varphi_x \tilde{\varphi}_x dx = - \int_0^L k \varphi_{xx} \tilde{\varphi} dx.$$

Integrando por partes o lado direito da igualdade acima, deduzimos

$$\overline{\tilde{\varphi}(x)} \varphi_x(x) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0. \quad (2.16)$$

Escolhendo $\tilde{\varphi} \in C^1([0, L])$ com $\tilde{\varphi}(L) = 1$ e $\tilde{\varphi}(0) = 0$, segue de (2.16) que $\varphi_x(L) = 0$. Além disso, escolhendo $\tilde{\varphi} \in C^1([0, L])$ com $\tilde{\varphi}(L) = 0$ e $\tilde{\varphi}(0) = 1$, obtemos $\varphi_x(0) = 0$. Portanto, $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$.

Isto termina a prova do lema para ambos os casos. □

Como caso particular ($\theta = 0$ e $g_3 = 0$), temos o seguinte lema:

Lema 2.60. *Considere $g_1 \in L^2(0, L)$ ($L_*^2(0, L)$) e $g_2 \in H^{-1}(0, L)$. Então, existe um único par (φ, ψ) no espaço $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ (respectivamente, $H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$) tal que*

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0, L) \text{ (ou } L_*^2(0, L)), \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta \psi_{xx} = g_2 & \text{em } H^{-1}(0, L), \end{cases} \quad (2.17a)$$

$$(2.17b)$$

e ainda, $\varphi \in H^2(0, L)$ com $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$ no caso $g_1 \in L_*^2(0, L)$.

3 UM SISTEMA VISCOELÁSTICO DE TIMOSHENKO

3.1 DEDUÇÃO DO SISTEMA DE TIMOSHENKO COM MEMÓRIA

Nosso ponto de partida são as equações de momento para o deslocamento transversal e ângulo de rotação para sistemas de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} = S_x \quad \text{e} \quad \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \quad (3.1)$$

onde ρ_1 e ρ_2 são introduzidos em (1.5). Além disso, de acordo com o exposto inicialmente na Introdução, consideramos as seguintes leis constitutivas

$$S = k(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s) ds, \quad (3.2)$$

onde k e b também são definidos em (1.5). Logo, substituindo (3.2) em (3.1), obtemos o seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.3)$$

o qual será considerado com condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \psi(x, s) &= \psi_0(x, s), \quad \psi_t(x, 0) = \partial_t \psi(x, t)|_{t=0} := \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \quad s \leq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(x, t) = \psi(x, s) = 0, \quad x = 0, L, \quad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

ou do tipo Dirichlet-Neumann

$$\varphi_x(x, t) = \psi(x, s) = 0, \quad x = 0, L, \quad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Observe que o sistema em (3.3) é não-autônomo. Com efeito, veja que do termo integral teríamos um coeficiente dependendo explicitamente da variável t e, então, pela Definição 2.54 não temos uma equação autônoma. Logo, para aplicar a teoria de semigrupos lineares vamos transformar o problema (3.3)-(3.6) em um sistema autônomo. Para tanto, seguiremos as ideias de Grasselli e Pata [14] introduzindo uma nova variável no sistema. Definamos a seguinte variável

$$\eta = \eta(x, t, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t-s), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0, \quad s > 0, \quad (3.7)$$

a qual é conhecida como história de deslocamento relativo. De (3.7), temos

$$\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)ds = \left(\int_0^\infty g(s)ds \right) \psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(t,s)ds. \quad (3.8)$$

Além disso, derivando (3.7) com relação a t e s e considerando as condições iniciais e de fronteira para ψ , podemos escrever

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta(x, t, s) = 0 & \text{em } x = 0, L, t \geq 0, s > 0, \\ \eta(x, t, 0) := \lim_{s \rightarrow 0} \eta(x, t, s) = 0 & \text{em } x \in (0, L), t \geq 0, \\ \eta(x, 0, s) = \psi_0(x) - \psi_0(x, -s) := \eta_0(x, s) & \text{em } x \in (0, L), s > 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

De (3.7)-(3.9) e denotando por $\beta = b - \int_0^\infty g(s)ds$, podemos reescrever (3.3) no seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.10)$$

Para que $\beta > 0$, vamos assumir que $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ satisfaz $b_0 := \int_0^\infty g(s)ds \in (0, b)$. Mediante à (3.4)-(3.6), acoplaremos ao sistema (3.10) as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), \quad x \in (0, L), s > 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, t \geq 0, s > 0, \end{cases} \quad (3.12a)$$

ou

$$\begin{cases} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, t \geq 0, s > 0. \end{cases} \quad (3.12b)$$

No que segue, considerando algumas hipóteses adicionais para a função g , mostraremos a existência e unicidade de solução via teoria de semigrupos lineares para o PVIF (3.10)-(3.12).

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.13)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), \eta(x, t, 0) = 0, & x \in (0, L), s > 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, & t \geq 0, s > 0, \end{cases} \quad (3.15a)$$

ou Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, & t \geq 0, s > 0. \end{cases} \quad (3.15b)$$

Assumiremos que o núcleo de memória g pertence a classe $C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ e satisfaz

$$0 < \int_0^\infty g(s) ds < b \quad \text{e} \quad 0 < k_1 g(s) \leq -g'(s), \quad s \in \mathbb{R}^+, \quad (3.16)$$

para algum $k_1 > 0$.

Mostraremos que o PVIF (3.13)-(3.15) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, denotamos $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$. Para contemplar as condições de fronteira (3.15), consideramos o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M} \quad (\text{para (3.15a)})$$

e

$$\mathcal{H}_2 = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M} \quad (\text{para (3.15b)}),$$

onde \mathcal{M} é dado como na Definição 2.34. Consideramos o produto interno dado por

$$(U, W)_{\mathcal{H}_j} = \rho_1(\Phi, \tilde{\Phi})_2 + \rho_2(\Psi, \tilde{\Psi})_2 + \beta(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 + k(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_2 + \int_0^\infty g(s)(\eta_x, \tilde{\eta}_x)_2 ds,$$

e norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \beta\|\psi_x\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,$$

para os elementos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$ e $W = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Assim, podemos converter (3.13)-(3.15) no seguinte problema de Cauchy Abstrato

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_j U, & t > 0, \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0)^T, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, é definido por

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2} I_d + \frac{\beta}{\rho_2} \partial_{xx} & 0 & \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g(s) \partial_{xx}(\cdot, s) ds \\ 0 & 0 & 0 & I_d & \partial_s \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathcal{A}_j U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2} (\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds)_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \\ \Psi - \eta_s \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

para todo U no domínio

$$D(\mathcal{A}_1) = \left\{ U \in \mathcal{H}_1 \mid \Phi, \Psi \in H_0^1(0, L), \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0, \right. \\ \left. \varphi, \beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L) \right\} \quad (\text{para (3.15a)})$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ U \in \mathcal{H}_2 \mid \Phi \in H_*^1(0, L), \varphi_x, \Psi \in H_0^1(0, L), \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0, \right. \\ \left. \varphi, \beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L) \right\} \text{ (para (3.15b)).}$$

O objetivo é usar o Teorema de Lummer-Phillips para mostrar que \mathcal{A}_j , definido em (3.18), é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_j t}$ sobre o espaço \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$. Iniciaremos mostrando alguns lemas:

Lema 3.1. *Suponhamos que g satisfaz (3.16). Então, \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , ou seja, $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq 0$ para todo $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T \in D(\mathcal{A}_j)$ e lembrando $\mathcal{A}_j U$ dado em (3.18), temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= (k(\varphi_x + \psi)_x, \Phi)_2 + \left(\beta\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds, \Psi \right)_2 \\ &\quad + \beta(\Psi_x, \psi_x)_2 + \int_0^\infty g(s)((\Psi - \eta_s(s))_x, \eta_x(s))_2 ds + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 \\ &= k((\varphi_x + \psi)_x, \Phi)_2 + \int_0^\infty g(s)(\Psi_x, \eta_x(s))_2 ds - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))_2 ds \\ &\quad + \left(\beta\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds, \Psi \right)_2 - k(\varphi_x + \psi, \Psi)_2 + \beta(\Psi_x, \psi_x)_2 \\ &\quad + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= \beta[-\overline{(\Psi_x, \psi_x)}_2 + (\Psi_x, \psi_x)_2] + \int_0^\infty g(s)[(\Psi_x, \eta_x(s))_2 - \overline{(\Psi_x(s), \eta_x(s))_2}] ds \\ &\quad + k[(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 - \overline{(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2}] \\ &\quad - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))_2 ds. \end{aligned}$$

Tomando a parte real e lembrando que $\operatorname{Re}(z - \bar{z}) = 0$, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1/y} g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 \Big|_y^{1/y} - \int_y^{1/y} g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \right). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Como $\eta \in \mathcal{M}$, segue que $g\|\eta_x(\cdot)\|_2^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e conseqüentemente

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(1/y)\|\eta_x(1/y)\|_2^2 = \lim_{z \rightarrow \infty} g(z)\|\eta_x(z)\|_2^2 = 0. \quad (3.20)$$

Além disso, usando que g é decrescente e positiva, pela desigualdade de Hölder, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 \leq g(y)\|\eta_x(y)\|_2^2 &= g(y) \left\| \int_0^y (\eta_s)_x(s) ds \right\|_2^2 \\ &\leq g(y) \left(\int_0^y \|(\eta_s)_x(s)\|_2 ds \right)^2 \\ &= \left([g(y)]^{1/2} \int_0^y \|(\eta_s)_x(s)\|_2 ds \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^y [g(s)]^{1/2} \|(\eta_s)_x(s)\|_2 ds \right)^2 \\ &\leq y \int_0^y g(s) \|(\eta_s)_x(s)\|_2^2 ds \\ &\leq y \cdot \|\eta_s\|_{\mathcal{M}}^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

De novo, usando que $\eta_s \in \mathcal{M}$, deduzimos

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow 0} g(y) \int_0^y \|(\eta_s)_x(s)\|_2^2 ds \leq \lim_{y \rightarrow 0} y \|\eta_s\|_{\mathcal{M}}^2 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) \int_0^y \|(\eta_s)_x(s)\|_2^2 ds = 0. \quad (3.21)$$

Logo, em (3.19), usando (3.20) e (3.21), deduzimos

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \int_0^s \|(\eta_t)_x(t)\|_2^2 dt ds \leq 0. \quad (3.22)$$

Portanto, da condição (3.16), concluímos que \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$. □

Lema 3.2. *Suponhamos que g satisfaz (3.16). Então, $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$, para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Afirmação 1: O operador $-\mathcal{A}_j$ definido em (3.18) é sobrejetor, para $j = 1, 2$.

Com efeito, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}_j$ obteremos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T \in$

$D(\mathcal{A}_j)$ tal que $-\mathcal{A}_j U = F$, para $j = 1, 2$, ou seja,

$$\begin{cases} -\Phi = f_1, & (3.23a) \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x = f_2, & (3.23b) \\ -\Psi = f_3, & (3.23c) \\ -\frac{1}{\rho_2} \left(\psi + \beta \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) = f_4, & (3.23d) \\ \eta_s - \Psi = f_5. & (3.23e) \end{cases}$$

Com base nas equações (3.23a), (3.23c) e (3.23e), devemos tomar

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1(0, L) \quad (\text{ou } H_*^1(0, L)), \quad \Psi = -f_3 \in H_0^1(0, L) \quad \text{e} \quad \eta_s = f_5 - f_3 \in \mathcal{M}.$$

Integrando (3.23e) de 0 a s , lembrando que Ψ não depende de s e como queremos $\eta(x, s = 0) = 0$, então deduzimos

$$\eta(s) = \int_0^s f_5(\zeta) d\zeta - s f_3. \quad (3.24)$$

Para mostrar que η definido em (3.24) pertence a \mathcal{M} , usando as hipóteses de g em (3.16) e integrando por partes veja inicialmente que, para $y \in \mathbb{R}^+$, vale

$$\int_y^{1/y} g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq -\frac{1}{k_1} \left(g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 \Big|_y^{1/y} - \int_y^{1/y} g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \right). \quad (3.25)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da igualdade $\frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|_2^2 = 2 \operatorname{Re} (\eta_x(s), \eta_{xs}(s))_2$, também novamente das hipóteses sobre g em (3.16) obtemos

$$\frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|_2^2 \leq 2 \|\eta_x(s)\|_2 \|\eta_{xs}(s)\|_2 \quad \text{e} \quad -g(1/y) \|\eta_x(1/y)\|_2^2 \leq 0.$$

Consequentemente, temos por (3.25) que

$$\int_y^{1/y} g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{k_1} g(y) \|\eta_x(y)\|_2^2 + \frac{2}{k_1} \int_y^{1/y} g(s) \|\eta_x(s)\|_2 \|\eta_{xs}(s)\|_2 ds.$$

Usando a desigualdade de Young na desigualdade acima com $\varepsilon = k_1/4$, podemos escrever

$$\int_y^{1/y} g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq \frac{2}{k_1} g(y) \|\eta_x(y)\|_2^2 + \frac{4}{k_1^2} \int_y^{1/y} g(s) \|\eta_{xs}(s)\|_2^2 ds. \quad (3.26)$$

Por (3.21) e $\eta \in \mathcal{M}$, vale que $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) \|\eta_x(y)\|_{\mathcal{M}}^2 = 0$. Assim, (3.26) nos fornece

$$\int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|_{\mathcal{M}}^2 ds \leq \frac{4}{k_1^2} \|\eta_s\|_{\mathcal{M}}^2, \quad (3.27)$$

o que nos garante $\eta \in \mathcal{M}$, visto que $\eta_s \in \mathcal{M}$.

A partir do Teorema 2.29, note que

$$\int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds \in H^{-1}(0, L),$$

e temos

$$\left\langle \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds, \tilde{\psi} \right\rangle = - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \tilde{\psi}_x \right)_2, \quad \forall \psi \in H_0^1(0, L).$$

Vamos definir

$$g_1 = \rho_1 f_2 \in L^2(0, L) \quad (\text{ou } L_*^2(0, L)) \quad \text{e} \quad g_2 = \rho_2 f_4 + \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds \in H^{-1}(0, L). \quad (3.28)$$

Como $H_0^1(0, L) \subset H^{-1}(0, L)$, então é antilinear e contínuo o funcional abaixo

$$\begin{aligned} g_2 : H_0^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{\psi} &\mapsto \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle = \rho_2 (f_4, \tilde{\psi})_2 - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \tilde{\psi}_x \right)_2. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Lema 2.60 que existe um único par de funções (φ, ψ) em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ (se $g_1 \in L^2(0, L)$) ou em $H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ (se $g_1 \in L_*^2(0, L)$), tais que

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0, L) \quad (\text{ou } L_*^2(0, L)), \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx} = g_2 & \text{em } H^{-1}(0, L). \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$(3.29b)$$

O Lema 2.60 nos fornece $\varphi \in H^2(0, L)$. O mesmo lema também nos diz que, se $g_1 \in L_*^2(0, L)$, então $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$. Da igualdade em (3.29b), temos

$$\langle k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx}, \tilde{\psi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L).$$

Usando agora a definição de g_2 em (3.28) e aplicando o Teorema da Representação de Riesz, podemos escrever

$$k(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi})_2 + \beta(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 = \rho_2 (f_4, \tilde{\psi})_2 - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \tilde{\psi} \right)_2, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L). \quad (3.30)$$

Em particular, (3.30) é válida para qualquer função $\tilde{\psi} \in C_0^1(0, L) \subset H_0^1(0, L)$. Pela definição

de derivada fraca, concluímos que

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + \beta\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 \quad \text{em } L^2(0, L)$$

e

$$\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L).$$

Logo, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$ como considerado acima pertence a $D(\mathcal{A}_j)$ para $j = 1$ ou 2 . Isto completa a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: O operador $-\mathcal{A}_j$, definido em (3.18), é injetor para $j = 1, 2$.

De fato, considere $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1$ ou 2 , tal que $-\mathcal{A}_j U = 0$. Mostraremos que $U = 0$. Escrevendo $-\mathcal{A}_j U = 0$ em termos de suas componentes, temos

$$\begin{cases} -\Phi = 0, & (3.31a) \\ -k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (3.31b) \\ -\Psi = 0, & (3.31c) \\ -\left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right)_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, & (3.31d) \\ \eta_s - \Psi = 0. & (3.31e) \end{cases}$$

Das igualdades em (3.31a), (3.31c) e (3.31e), obtemos Φ, Ψ e η_s nulos em $H_0^1(0, L)$ (ou $H_*^1(0, L)$), $H_0^1(0, L)$ e \mathcal{M} , respectivamente. Usando a desigualdade dada em (3.27), segue que $\eta = 0$ em \mathcal{M} .

Note que $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ satisfaz

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } L^2(0, L) \quad (\text{ou } L_*^2(0, L)), & (3.32a) \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx} = 0 & \text{em } H^{-1}(0, L). & (3.32b) \end{cases}$$

Da unicidade de solução para (3.32a)-(3.32b), garantida pelo Lema 2.60, segue que $\varphi = \psi = 0$. Portanto, concluímos que $U = 0$, o que mostra a Afirmação 2.

Das Afirmações 1 e 2, concluímos que o operador \mathcal{A}_j^{-1} , inverso do operador definido em (3.18), existe para $j = 1, 2$.

Afirmação 3: O operador \mathcal{A}_j^{-1} , inverso do operador definido em (3.18), é limitado para $j = 1, 2$.

É suficiente mostrar que existe uma constante universal $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad \forall F \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2,$$

com U solução da equação resolvente

$$- \mathcal{A}_j U = F, \quad (3.33)$$

que já está descrito em termos de suas componentes no sistema (3.23a)-(3.23e).

Das equações (3.23a) e (3.23c) e da desigualdade de Poincaré, obtemos imediatamente

$$\begin{aligned} \rho_1 \|\Phi\|_2^2 &\leq 2L^2 \rho_1 \|f_{1,x} + f_3\|_2^2 + 2L^4 \rho_1 \|f_{3,x}\|_2^2 \\ &\leq 2L^2 \rho_1 \left(\frac{1}{k} + \frac{L^2}{\beta} \right) \|F\|_{\mathcal{H}_j} \end{aligned} \quad (3.34)$$

e

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq \rho_2 \left(\frac{L^2}{\beta} \right) \beta \|f_{3,x}\|_2^2 \leq \rho_2 \frac{L^2}{\beta} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.35)$$

Tomando produto interno de (3.33) com U em \mathcal{H}_j e usando (3.22) e (3.16), segue que

$$\frac{k_1}{2} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds = \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = \operatorname{Re}(F, U)_{\mathcal{H}_j} \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Portanto,

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \frac{2}{k_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.36)$$

Tomando produto interno em $L^2(0, L)$ (ou $L_*^2(0, L)$) de (3.23b) com φ , de (3.23d) com ψ e, por fim, somando as igualdades obtidas, podemos escrever

$$k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 = - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \psi_x \right)_2 + \rho_1 (f_2, \varphi)_2 + \rho_2 (f_4, \psi)_2.$$

Com isto, usando a desigualdade de Chauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq \sqrt{\frac{b_0}{\beta}} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) + L \sqrt{\frac{\rho_1}{k}} (\sqrt{\rho_1} \|f_2\|_2) (\sqrt{k} \|\varphi_x + \psi\|_2) \\ &\quad + L^2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} (\sqrt{\rho_1} \|f_2\|_2) (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) \\ &\quad + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} (\sqrt{\rho_2} \|f_4\|_2) (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young para $\varepsilon = 1/2$, segue da estimativa acima que

$$k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_1 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2, \quad (3.37)$$

onde

$$C_1 = 2L \cdot \max \left\{ \frac{b_0}{2L\beta}, \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}, L \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} + \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} \right\}.$$

Desse modo, somando membro a membro as estimativas obtidas em (3.34)-(3.37),

deduzimos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \left(C_1 + \frac{2}{k_1}\right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_1 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \left[2L^2\rho_1 \left(\frac{1}{k} + \frac{L^2}{\beta}\right) + \rho_2 \frac{L^2}{\beta}\right] \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Usando novamente a estimativa para η dada em (3.36), podemos escrever

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

onde

$$C_2 = \max \left\{ C_1 + \frac{2}{k_1} + \frac{2C_1}{k_1}, 2L^2\rho_1 \left(\frac{1}{k} + \frac{L^2}{\beta}\right) + \rho_2 \frac{L^2}{\beta} \right\}.$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$, concluímos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C_2 (2C_2 + 1) \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

o que prova a Afirmação 3 e conclui a demonstração do Lema 3.2. \square

Teorema 3.3. *Suponhamos que g satisfaz (3.16). Então, o operador \mathcal{A}_j definido em (3.18) é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_j t}$ em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$.*

Demonstração. Face ao Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 2.51), é suficiente mostrar que \mathcal{A}_j é linear, dissipativo, $\overline{D(\mathcal{A}_j)} = \mathcal{H}_j$ e que existe λ_0 positivo tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}_j) = \mathcal{H}_j$. A linearidade é facilmente verificada, já do Lema 3.1, segue a dissipatividade do operador \mathcal{A}_j . Deste modo, definindo S como sendo o operador identidade do espaço \mathcal{H}_j , tem-se que S é linear, limitado e invertível com $\|S\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = 1$.

Definindo também $B = \lambda_0(-\mathcal{A}_j)^{-1}$, observe que em virtude do Lema 3.2 vem que B é linear e limitado para qualquer $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Além disso, se

$$|\lambda_0| < \frac{1}{\|(-\mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)}}, \quad (3.38)$$

então

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = |\lambda_0| \|(-\mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < 1 = \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)}}.$$

Deste modo, segue do Teorema 2.30 que se λ_0 satisfaz (3.38), então $S + B = I + \lambda_0(-\mathcal{A}_j)^{-1}$ é um operador linear, limitado e invertível. Mais ainda, concluímos que o operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}_j$ é bijetor, uma vez que pode ser escrito como a composição de operadores bijetores

$$\lambda_0 I - \mathcal{A}_j = -\mathcal{A}_j (I + \lambda_0(-\mathcal{A}_j)^{-1}).$$

Portanto, existe λ_0 real positivo e suficientemente pequeno tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}_j) = \mathcal{H}_j$ e, como consequência do Teorema 2.49, resulta que o operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}_j$ é sobrejetor para qualquer λ_0 real positivo, em particular para $\lambda_0 = 1$. Assim, do Teorema 2.50 obtemos $\overline{D(\mathcal{A}_j)} = \mathcal{H}_j$. Isto

completa a demonstração do teorema. □

Como consequência dos Teoremas 3.3 e 2.55, temos o

Teorema 3.4. *Suponhamos que g satisfaz (3.16). Então, para cada vetor $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, o problema (3.17) possui uma única solução na classe*

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}_j)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$, $j = 1, 2$.

Demonstração. Segue dos Teorema 3.3 e Teorema 2.55. □

3.3 ESTABILIDADE

Nesta seção, apresentaremos os resultados de estabilidade para a solução $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t} U_0$, $j = 1, 2$ do problema (3.17) e, portanto, para a solução do sistema (3.13)-(3.15). Faremos uso da relação de velocidade de ondas dada como segue

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} = 0. \quad (3.39)$$

Teorema 3.5. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, \beta, k > 0$ satisfaçam (3.39) e que g satisfaça (3.16). Então, existem constantes $C, m > 0$ independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}_j$ tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq C e^{-m t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.40)$$

A demonstração do Teorema 3.5 seguirá como consequência imediata do Teorema a seguir.

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses do Teorema 3.5, temos que $e^{\mathcal{A}_j t}$ é exponencialmente estável, ou seja, existem constantes $C, w > 0$ tais que*

$$\|e^{\mathcal{A}_j t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} \leq C e^{-w t}, \quad \forall t > 0, \quad j = 1, 2.$$

Face ao Teorema de Prüss (ver Teorema 2.56), para concluir o Teorema 3.6 é suficiente provar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$ e $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < \infty$. Tais condições serão mostradas nas subseções que seguem.

O segundo resultado, o qual versa sobre uma estabilidade do tipo polinomial, é mostrado sem o uso da condição (3.39). Vejamos:

Teorema 3.7. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, \beta, k > 0$ e que g satisfaça (3.16). Então, existe uma constante $C > 0$ independente do dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$ tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Em outras palavras, o sistema de Timoshenko viscoelástico (3.13)-(3.15) é polinomialmente estável com taxa dependendo da regularidade dos dados iniciais.

As conclusões das provas dos Teoremas 3.5, 3.6 e 3.7 serão feitas nas Subseções 3.3.3 e 3.3.4, respectivamente, como consequência dos resultados contidos nas próximas duas subseções via Teorema de Prüss e Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 2.57).

3.3.1 Primeira condição do Teorema de Prüss e condição do Teorema de Borichev e Tomilov

O resultado principal desta seção é mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$ é válida independentemente das condições de fronteira em (3.15) e do valor de χ definido em (3.39).

De fato, suponhamos que não é válida $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$. Então, pelo Teorema 3.29 (presente no Apêndice A deste capítulo), existe $w > 0$, uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\xi_n \rightarrow w$, $|\xi_n| < w$ e uma sequência de elementos

$$U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n, \Theta_n, \eta_n)^T \in D(\mathcal{A}_j) \quad \text{com} \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}_j} = 1, \quad (3.42)$$

tais que

$$i\xi_n U_n - \mathcal{A}_j U_n \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.43)$$

Observação 12. Da propriedade de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em (3.42) é fácil ver que se $n \rightarrow \infty$, então

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_j}^2 \longrightarrow 1, \quad j = 1, 2. \quad (3.44)$$

Escrevendo em termos de suas componentes, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\xi_n \varphi_n - \Phi_n \longrightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L) \text{ ou } H_*^1(0, L), \quad (3.45a) \\ i\xi_n \rho_1 \Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \longrightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \text{ ou } L_*^2(0, L), \quad (3.45b) \\ i\xi_n \psi_n - \Psi_n \longrightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \quad (3.45c) \\ i\xi_n \rho_2 \Psi_n + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) - \left(\beta \psi_n + \int_0^\infty g(s) \eta_n(s) ds \right)_{xx} \longrightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), \quad (3.45d) \\ i\xi_n \eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n \longrightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}, \quad (3.45e) \end{array} \right.$$

onde

$$b_0 := \int_0^\infty g(s) ds, \quad \beta := b - b_0. \quad (3.46)$$

Lema 3.8. Considere $j = 1, 2$. Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, \beta, k > 0$, que g satisfaça (3.16) e que seja válida a convergência em (3.43). Então,

$$\int_0^\infty -g'(s) \|\eta_{n,x}(s)\|_2^2 ds \longrightarrow 0 \quad e \quad \eta \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{M}.$$

Demonstração. Tomando produto interno de (3.43) com U_n em \mathcal{H}_j e tomando parte real na convergência resultante, obtemos

$$\operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U_n, U_n)_{\mathcal{H}_j} \longrightarrow 0. \quad (3.47)$$

Usando (3.22) e (3.16) na convergência (3.47), segue que

$$0 \leq \frac{k_1}{2} \int_0^\infty g(s) \|\eta_{m,x}(s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_{m,x}(s)\|_2^2 ds = \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U_n, U_n)_{\mathcal{H}_j} \longrightarrow 0, \quad (3.48)$$

e o lema segue pelo Teorema do Confronto. \square

Lema 3.9. *Sob as mesmas hipóteses e notações do Lema 3.8, vale*

$$\Psi_n, \psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } H_0^1(0, L). \quad (3.49)$$

Demonstração. Vamos inicialmente mostrar dois resultados fundamentais para este lema, a saber, que Ψ_n é limitada em $H_0^1(0, L)$ e que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \eta_x(y) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) \eta_x(y) = 0. \quad (3.50)$$

Para isso veja que, derivando (3.45c) e tomando o produto interno com $\Psi_{n,x}$ em $L^2(0, L)$, concluímos que

$$i\xi_n(\psi_{n,x}, \Psi_{n,x})_2 - \|\Psi_{n,x}\|_2^2 \longrightarrow 0. \quad (3.51)$$

Agora, observe que da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|\Psi_{n,x}\|_2^2 &= |i\xi_n(\psi_{n,x}, \Psi_{n,x})_2 - \|\Psi_{n,x}\|_2^2 - i\xi_n(\psi_{n,x}, \Psi_{n,x})_2| \\ &\leq |i\xi_n(\psi_{n,x}, \Psi_{n,x})_2 - \|\Psi_{n,x}\|_2^2| + \xi_n \|\psi_{n,x}\|_2 \|\Psi_{n,x}\|_2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aplicando a desigualdade de Young para $\varepsilon = 1/2$ em (3.52), podemos escrever

$$\|\Psi_{n,x}\|_2^2 \leq 2|i\xi_n(\psi_{n,x}, \Psi_{n,x})_2 - \|\Psi_{n,x}\|_2^2| + \xi_n^2 \|\psi_{n,x}\|_2^2 \quad (3.53)$$

Por fim, usando a convergência (3.51), a limitação de ξ_n e a desigualdade $\|\psi_{n,x}\|_2^2 \leq \frac{1}{\beta} \|U_n\|_{\mathcal{H}_j}^2$, (3.53) nos fornece a limitação para a sequência $(\|\Psi_{n,x}\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$. Quanto ao segundo resultado, lembrando que (3.20) e (3.21) nos dá

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(1/y) \|\eta_x(1/y)\|_2^2 = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) \|\eta_x(y)\|_2^2 = 0,$$

podemos usar o fato de que $\lim_{y \rightarrow 0} \|u(y)\|_2 = 0$ implica $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = 0$ e que a função $g^{1/2}$ é limitada para inferir que (3.50) acontece.

Veja agora que $s \mapsto \frac{1}{\xi_n} \Psi_n \in \mathcal{M}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o produto interno de

(3.45e) com $\frac{1}{\xi_n^2}\Psi_n$ em \mathcal{M} , temos

$$i \left(\eta_n(\cdot), \frac{\Psi_n}{\xi_n^2} \right)_{\mathcal{M}} + \underbrace{\frac{1}{\xi_n^2} (\eta_{n,s}(\cdot), \Psi_n)_{\mathcal{M}}}_{:=S_n} - \frac{1}{\xi_n^2} (\Psi_n, \Psi_n)_{\mathcal{M}} \longrightarrow 0. \quad (3.54)$$

Mostraremos agora que $S_n \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, integrando S_n por partes com relação a s , usando o Lema 3.8, que $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado em $H_0^1(0, L)$ e Fubini, temos

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left| -\frac{1}{\xi_n^2} \int_0^\infty g(s) (\eta_{n,s}(s), \Psi_n)_{H_0^1} ds \right| \\ &= \left| -\frac{1}{\xi_n^2} \int_0^L \overline{\Psi_{n,x}} \left(g(s) \eta_{n,x}(s) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty g'(s) \eta_{n,x}(s) ds \right) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\xi_n^2} \|\Psi_{n,x}\|_2 \cdot \left\| \int_0^\infty g'(s) \eta_{n,x}(s) ds \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\xi_n^2} \left(\int_0^\infty -g'(s) ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^\infty -g'(s) \|\eta_{n,x}(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \cdot \|\Psi_{n,x}\|_2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, (3.54) nos dá $\Psi_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(0, L)$. Consequentemente, da convergência (3.45c), concluímos que $\psi_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(0, L)$. \square

Lema 3.10. *Sob as mesmas hipóteses e notações do Lema 3.8, temos*

$$-\rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 + k \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0. \quad (3.55)$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (3.45a) com $\rho_1 \overline{\Phi_n}$ e de (3.45b) com $\overline{\varphi_n}$, ambos em $L^2(0, L)$, por fim somando os resultados obtidos, temos

$$i\rho_1 \xi_n [(\varphi_n, \Phi_n)_2 + (\Phi_n, \varphi_n)_2] - \rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 - k((\varphi_{n,x} + \psi_n)_x, \varphi_n)_2 \longrightarrow 0.$$

Integrando por partes, tomando parte real (e lembrando que $\operatorname{Re} i(z + \bar{z}) = 0$) em ambos os lados do limite anterior, podemos escrever

$$-\rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 + k \operatorname{Re} (\varphi_{n,x} + \psi_n, \varphi_{n,x})_2 \longrightarrow 0. \quad (3.56)$$

Agora, tomando produto interno de (3.45c) com $\rho_2 \Psi_n$ e de (3.45d) com $\overline{\psi_n}$, ambos em $L^2(0, L)$, por fim novamente somando os resultados obtidos, segue que

$$\begin{aligned} i\rho_2 \xi_n [(\psi_n, \Psi_n)_2 + (\Psi_n, \psi_n)_2] &- \left(\left(\beta \psi_n + \int_0^\infty g(s) \eta_n(s) ds \right)_{xx}, \psi_n \right)_2 \\ &+ k(\varphi_{n,x} + \psi_n, \psi_n)_2 - \rho_2 \|\Psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando os Lemas 3.8 e 3.9, segue da convergência acima que

$$k\text{Re}(\varphi_{n,x} + \psi_n, \psi_n)_2 \longrightarrow 0. \quad (3.57)$$

Somando (3.56) e (3.57), concluímos que

$$-\rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 + k \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0. \quad (3.58)$$

□

Para chegar na contradição desejada, temos ainda que: tomando o produto interno de (3.45d) com $k(\varphi_{n,x} + \psi_n)$ em $L^2(0, L)$, segue que

$$i\beta_n \rho_2 k(\Psi_n, \varphi_{n,x} + \psi_n)_2 - \left(\left(\beta\psi_n + \int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds \right)_{xx}, k(\varphi_{n,x} + \psi_n) \right)_2 + k^2 \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0.$$

Fazendo integração por partes, usando que $\eta_n \longrightarrow 0$ em \mathcal{M} , $\psi_n, \Psi_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(0, L)$ e que $(\varphi_{n,x} + \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, L)$, vem

$$\begin{aligned} & -k \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right) \cdot (\overline{\varphi_{n,x}} + \overline{\psi_n}) \Big|_0^L + k^2 \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \\ & + \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds, k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \right)_2 \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (3.45b) com $\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds$ em $L^2(0, L)$, podemos escrever a seguinte convergência

$$\begin{aligned} & -i\rho_1 \xi_n \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds, \Phi_n \right)_2 \\ & - \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds, k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \right)_2 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Usando que Φ_n é limitada em $L^2(0, L)$ e que $\|\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds\|_2 \longrightarrow 0$, segue da convergência anterior que

$$- \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds, k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \right)_2 \longrightarrow 0. \quad (3.60)$$

Somando (3.59) e (3.60) concluímos que

$$- \left(\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right) \cdot \overline{\varphi_{n,x}} \Big|_0^L + k \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0, \quad (3.61)$$

para ambas as condições de fronteira (3.15a) e (3.15b).

Lema 3.11. *Consideremos as mesmas hipóteses e notações do Lema 3.8. Para a condição de fronteira (3.15b), obtemos $\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \rightarrow 0$, o que é uma contradição com (3.44).*

Demonstração. Para a condição de fronteira (3.15b), temos por (3.61) que $\|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2 \rightarrow 0$. Logo, pelo Lema 3.10 temos $\rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 \rightarrow 0$ e, portanto, disto e dos Lemas 3.8, 3.9, obtemos

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \rightarrow 0,$$

o que é uma contradição com (3.44). □

Com o Teorema 2.31 e os Lemas 3.8-3.10 em mãos, (3.45) implica

$$\begin{cases} i\xi_n \varphi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L) \text{ ou } H_*^1(0, L), & (3.62a) \\ i\xi_n \rho_1 \Phi_n - k\varphi_{n,xx} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \text{ ou } L_*^2(0, L), & (3.62b) \\ k\varphi_{n,x} - \left(\beta\psi_n + \int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds \right)_{xx} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), & (3.62c) \\ \eta_{n,s}(s) \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}. & (3.62d) \end{cases}$$

Lema 3.12. *Consideremos as mesmas hipóteses e notações do Lema 3.8. Para a condição de fronteira (3.15a), também obtemos $\|U_n\|_{\mathcal{H}_1} \rightarrow 0$, o que é uma contradição com (3.44).*

Demonstração. Tomando o produto interno de $(x - L/2) \cdot (\beta\overline{\psi_{n,x}} + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_{n,x}}ds)$ com (3.62c), obtemos a seguinte convergência

$$\begin{aligned} & \left(k\varphi_{n,x} \cdot (x - L/2), \beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right)_2 \\ & - \left(\left[\beta\psi_n + \int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds \right]_{xx} (x - L/2), \beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right)_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Usando, na convergência anterior, o fato de que $\|\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds\|_2 \rightarrow 0$ e que $(\varphi_{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, L)$, por fim tomando parte real na expressão resultante, temos

$$- \operatorname{Re} \left(\left[\beta\psi_n + \int_0^\infty g(s)\eta_n(s)ds \right]_{xx} \cdot (x - L/2), \beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right)_2 \rightarrow 0.$$

Agora, usando que $\frac{d}{dx}|u|^2 = 2 \operatorname{Re}(\bar{u} \cdot u_x)$ e integrando por partes, concluímos

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} & \left(\left| \beta\psi_{n,x}(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(0, s)ds \right|^2 + \left| \beta\psi_{n,x}(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(L, s)ds \right|^2 \right) \\ & - \left\| \beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds \right\|_2^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Usando novamente que $\|\beta\psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(s)ds\|_2 \rightarrow 0$, segue que

$$\beta\psi_{n,x}(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(0,s)ds, \quad \beta\psi_{n,x}(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_{n,x}(L,s)ds \rightarrow 0. \quad (3.63)$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (3.62b) com $(x - L/2)(\varphi_{n,x} + \psi_n)$ em $L^2(0, L)$, temos

$$\rho_1 i\xi_n \left(\Phi_n \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \varphi_{n,x} + \psi_n \right)_2 - k \left((\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \varphi_{n,x} + \psi_n \right)_2 \rightarrow 0. \quad (3.64)$$

Pelas convergências dadas em (3.62a) e (3.45c), deduzimos

$$-i\xi_n \overline{(\varphi_{n,x} + \psi_n)} - \overline{(\Phi_{n,x} + \Psi_n)} \rightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Tomando o produto interno da sequência acima com $\rho_1 \Phi_n \cdot (x - L/2)$ em $L^2(0, L)$, vemos que

$$- \rho_1 i\xi_n \left(\Phi_n \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \varphi_{n,x} + \psi_n \right)_2 - \rho_1 \left(\Phi_n \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \Phi_{n,x} + \Psi_n \right)_2 \rightarrow 0. \quad (3.65)$$

Somando as convergências dadas em (3.64) e (3.65), podemos escrever

$$k \underbrace{\left((\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \varphi_{n,x} + \psi_n \right)_2}_{:=R_n} + \rho_1 \left(\Phi_n \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \Phi_{n,x} + \Psi_n \right)_2 \rightarrow 0. \quad (3.66)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\Phi_n \cdot \left(x - \frac{L}{2} \right), \Phi_{n,x} \right)_2 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2} \right) \frac{d}{dx} |\Phi_n|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2} \right) |\Phi_n|^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2} \|\Phi_n\|_2^2 \\ &= \frac{L}{4} (|\Phi_n(0)|^2 + |\Phi_n(L)|^2) - \frac{1}{2} \|\Phi_n\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Analogamente, vale

$$\operatorname{Re} R_n = \frac{L}{4} \cdot (|\varphi_{n,x}(0) + \psi_n(0)|^2 + |\varphi_{n,x}(L) + \psi_n(L)|^2) - \frac{1}{2} \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2. \quad (3.68)$$

Tomando parte real em (3.66) e usando as identidades dadas em (3.67) e (3.68), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1 L}{4} (|\Phi_n(0)|^2 + |\Phi_n(L)|^2) - \frac{\rho_1}{2} \|\Phi_n\|_2^2 + \frac{kL}{4} (|\varphi_{n,x}(0) + \psi_n(0)|^2 + |\varphi_{n,x}(L) + \psi_n(L)|^2) \\ - \frac{k}{2} \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Agora, combinando (3.44) e os Lemas 3.8-3.10, deduzimos

$$\frac{k}{2} \|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 + \frac{\rho_1}{2} \|\Phi_n\|_2^2 \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Somando a convergência acima com (3.69), concluímos que

$$\frac{L}{2} (\rho_1 |\Phi_n(0)|^2 + \rho_1 |\Phi_n(L)|^2 + k |\varphi_{n,x}(0) + \psi_n(0)|^2 + k |\varphi_{n,x}(L) + \psi_n(L)|^2) \longrightarrow 1. \quad (3.70)$$

Veja que $(\varphi_{n,x}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\varphi_{n,x}(L))_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas. Com efeito, considere inicialmente $p \in [0, L]$. Como $H_0^1(0, L)$ tem inclusão contínua em $C([0, L])$, então $|\psi_n(p)| \leq C \|\psi_{n,x}\|_2$ e, portanto, do Lema 3.9, temos $|\psi_n(0)|, |\psi_n(L)| \longrightarrow 0$. Além disso, como $|\varphi_{n,x}(p)|^2 \leq 2|\varphi_{n,x}(p) + \psi_n(p)|^2 + 2|\psi_n(p)|^2$, em particular para $p = 0$ ou $p = L$, (3.70) nos fornece a limitação desejada.

Portanto, segue das convergências dadas em (3.63) que

$$\left(\beta \psi_{n,x} + \int_0^\infty g(s) \eta_{n,x}(s) ds \right) \cdot \overline{\varphi_{n,x}} \Big|_0^L \longrightarrow 0.$$

Como consequência de (3.61) segue que $\|\varphi_{n,x} + \psi_n\|_2^2 \longrightarrow 0$ e, pelo Lema 3.10 temos $\rho_1 \|\Phi_n\|_2^2 \longrightarrow 0$. Portanto,

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_1}^2 \longrightarrow 0,$$

o que é uma contradição com (3.44). \square

Em ambos os casos temos uma contradição com (3.44). Com isto, fica mostrado o seguinte teorema:

Teorema 3.13. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, b, k, \rho_3 > 0$ e que g satisfaça (3.16). Então $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, onde $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \rightarrow \mathcal{H}_j$ é dado em (3.18).*

3.3.2 Lemas técnicos

Com o intuito de aplicar as condições (2.5) e (2.6) dos Teoremas 2.56 e 2.57, respectivamente, e então concluir as provas dos Teoremas 3.5 e 3.7 referentes a estabilidade exponencial e polinomial, nessa ordem, do sistema (3.13)-(3.15), nosso ponto de partida é considerar a seguinte equação resolvente para o operador \mathcal{A}_j definido em (3.18):

$$i\lambda U - \mathcal{A}_j U = F, \quad j = 1, 2, \quad (3.71)$$

a qual, em termos de suas componentes, pode ser escrita como

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f_1, & (3.72a) \\ i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2, & (3.72b) \\ i\lambda\psi - \Psi = f_3, & (3.72c) \\ i\lambda\rho_2\Psi - \left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right)_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_4, & (3.72d) \\ i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_5, & (3.72e) \end{cases}$$

onde

$$b_0 := \int_0^\infty g(s)ds, \quad \beta := b - b_0. \quad (3.73)$$

A seguir, apresentaremos alguns lemas auxiliares que nos permitirão confirmar nosso objetivo, a saber, o de obter resultados sobre estabilidade polinomial e sobre estabilidade exponencial, conforme a condição (3.39). No que segue, todas as constantes “ C ” no enunciado dos lemas serão universais e independentes do parâmetro λ . Isto ficará claro até o Lema 3.20, onde vamos exibir uma expressão para cada constante. Em seguida, procederemos de modo análogo e as constantes permanecerão universais, sendo denotadas por “ C ”, conforme a Observação 1 mais adiante.

Lema 3.14. *Considere $j = 1, 2$. Suponhamos que g satisfaça (3.16). Se $U \in D(\mathcal{A}_j)$ é solução da equação resolvente (3.71), então existe $C_{3.14}$ tal que*

$$\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq C_{3.14}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.74)$$

Demonstração. Tomando o produto interno em \mathcal{H}_j de ambos os lados em (3.71) com U , temos por (3.22) que

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds = \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq |\operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

ou seja,

$$\int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq C_{3.14}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde $C_{3.14} = 2$. □

Lema 3.15. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores, existe uma constante positiva $C_{3.15} > 0$ tal que*

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq C_{3.15}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.75)$$

Demonstração. Por (3.74) e (3.16), temos

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq C_{3.15} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde $C_{3.15} = \frac{2}{k_1}$. □

Lema 3.16. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores, existe $C_{3.16} > 0$ tal que*

$$(a) \quad \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} (\|\psi_x\|_2 + \|\varphi_x + \psi\|_2). \quad (3.76a)$$

Além disso, vale

$$(b) \quad \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{3.16} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\frac{\|\Phi\|_2}{|\lambda|} + \|\psi_x\|_2 \right), \quad (3.76b)$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande.

Demonstração. Tomando o produto interno de (3.72d) com $\int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds$ em $L^2(0, L)$ e fazendo integração por partes, deduzimos

$$\begin{aligned} & \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi \overline{\eta(s)} ds dx + \beta \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} \psi_x ds dx + \int_0^L \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx}_{:=R_{3.161}} \\ & + k \int_0^L \int_0^\infty g(s) (\varphi_x + \psi) \overline{\eta(s)} ds dx = \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_4 \overline{\eta(s)} ds dx. \end{aligned}$$

Usando a igualdade (3.72e) em $R_{3.161}$, resulta da identidade acima que

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) |\Psi|^2 ds dx = -\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi \overline{f_5(s)} ds dx + \underbrace{\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi \overline{\eta_s(s)} ds dx}_{:=R_{3.162}} \\ & \beta \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} \psi_x ds dx + \underbrace{\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx}_{:=R_{3.163}} \\ & \underbrace{k \int_0^L \int_0^\infty g(s) (\varphi_x + \psi) \overline{\eta(s)} ds dx}_{:=R_{3.164}} - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_4 \overline{\eta(s)} ds dx. \quad (3.77) \end{aligned}$$

Integrando $R_{3.162}$ por partes e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|R_{3.162}| \leq \rho_2 \sqrt{g(0)} \|\Psi\|_2 \left(- \int_0^\infty g'(s) \|\eta(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2}. \quad (3.78)$$

Usando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1/2$), temos

$$|R_{3.162}| \leq \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_2 g(0) L^2}{2b_0} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds. \quad (3.79)$$

Além disso, pela desigualdade para integrais e de Hölder, segue

$$\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx \leq \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x(s)| ds \right)^2 dx \leq b_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2. \quad (3.80)$$

(a) Usando a desigualdade de Hölder em (3.77) e aplicando a desigualdade de Poincaré para η e f_5 , obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 b_0 \|\Psi\|_2^2 &\leq \rho_2 \sqrt{b_0} L \|\Psi\|_2 \|f_5\|_{\mathcal{M}} + \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_2 g(0) L^2}{2b_0} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\ &\quad + \beta \sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} + b_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + kL \sqrt{b_0} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \rho_2 \sqrt{b_0} L \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_4\|_2 \\ &\leq L \sqrt{\rho_2 b_0} (\sqrt{\rho_2} \|\Psi\|_2) \|f_5\|_{\mathcal{M}} + \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_2 g(0) L^2}{2b_0} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\ &\quad + b_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \beta \sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} + kL \sqrt{b_0} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \sqrt{\rho_2 b_0} L \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\rho_2} \|f_4\|_2). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Usando os Lemas 3.14, 3.15 e os resultados obtidos em (3.78)-(3.80), a desigualdade acima nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 &\leq \left[2L \sqrt{\rho_2 b_0} + \frac{\rho_2 g(0) L^2}{2b_0} C_{3.14} + C_{3.15} b_0 \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \sqrt{b_0} \sqrt{C_{3.15}} (\beta + kL) \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} (\|\psi_x\|_2 + \|\varphi_x + \psi\|_2). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $2/b_0$, concluímos que

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq D_1 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + D_1 \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} (\|\psi_x\|_2 + \|\varphi_x + \psi\|_2),$$

onde

$$D_1 = \frac{2}{\sqrt{b_0}} \max \left\{ 2L \sqrt{\rho_2} + \frac{\rho_2 g(0) L^2}{2\sqrt[3]{b_0}} C_{3.14} + \frac{C_{3.15}}{\sqrt{b_0}}, C_{3.15} (\beta + kL) \right\},$$

o que prova (3.76a).

(b) Voltando a (3.77), segue das equações (3.72a) e (3.72c), que

$$\begin{aligned} R_{3.164} &= -\frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} ds \Phi dx - \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} ds f_1 dx \\ &\quad + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds \Psi dx + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds f_3 dx. \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Poincaré para η , f_1 e f_3 e Desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|R_{3.164}| &\leq \frac{k\sqrt{b_0}}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + \frac{\sqrt{b_0}L}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (k\|f_{1,x} + f_3\|_2) \\
&\quad + \frac{kL}{|\lambda|} (L+1) \sqrt{\frac{b_0}{\beta}} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\beta}\|f_{3,x}\|_2) + \frac{kL\sqrt{b_0}}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Psi\|_2. \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo ao feito para obter (3.81), mas agora usando a estimativa (3.83) para $R_{3.164}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\rho_2 b_0 \|\Psi\|_2^2 &\leq L\sqrt{\rho_2 b_0} (\sqrt{\rho_2} \|\Psi\|_2) \|f_5\|_{\mathcal{M}} + \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_2 g(0)L^2}{2b_0} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\
&\quad + \beta \sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} + \sqrt{\rho_2 b_0} L \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\rho_2} \|f_4\|_2) + \frac{k\sqrt{b_0}}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 \\
&\quad + \frac{\sqrt{b_0 k} L}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{k} \|f_{1,x} + f_3\|_2) + \frac{kL}{|\lambda|} (L+1) \sqrt{\frac{b_0}{\beta}} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\beta} \|f_{3,x}\|_2) \\
&\quad + b_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \underbrace{\frac{kL\sqrt{2}}{\sqrt{\rho_2}|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\sqrt{\frac{\rho_2 b_0}{2}} \|\Psi\|_2 \right)}_{:=R_{3.165}}. \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$ em $R_{3.165}$ e Lema 3.14, segue que para $|\lambda| > 1$ que

$$\frac{\rho_2 b_0}{4} \|\Psi\|_2^2 \leq \sqrt{b_0} \beta \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\psi_x\|_2 + \frac{k\sqrt{b_0}}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + M \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde

$$M = \left\{ L\sqrt{b_0} \left(2\sqrt{\rho_2} + \sqrt{k} + \frac{k(L+1)}{\sqrt{\beta}} \right) + b_0 C_{3.15} + \frac{\rho_2 g(0)L^2}{2b_0} C_{3.14} + C_{3.15} \frac{k^2 L^2}{\rho_2} \right\}.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $4/b_0$, deduzimos

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq D_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + D_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\|\psi_x\|_2 + \frac{\|\Phi\|_2}{|\lambda|} \right),$$

provando (3.76b), onde

$$D_2 = \frac{4}{b_0} \max \left\{ M, \sqrt{b_0} \beta, k\sqrt{b_0} \right\}.$$

Assim, (3.76a) e (3.76b) seguem para $C_{3.16} = \max\{D_1, D_2\}$. \square

Para obter uma estimativa para o termo $\|\psi_x\|_2$, introduziremos a variável w satisfazendo os problemas:

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0, \quad (\text{para a condição (3.15a)}) \quad (3.85)$$

e

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w_x(0) = w(L) = 0, \quad (\text{para a condi\c{c}o\~{e}o (3.15b)}). \quad (3.86)$$

Note que w pode ser determinado como

$$w(x) = - \int_0^x \psi(y) dy + \frac{x}{L} \int_0^L \psi(x) dx \equiv G(\psi)(x), \quad (\text{no problema (3.85)}) \quad (3.87)$$

e

$$w(x) = \int_x^L \psi(s) ds \equiv G(\psi)(x), \quad (\text{no problema (3.86)}). \quad (3.88)$$

Com isto, temos o seguinte lema:

Lema 3.17. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que*

$$(a) \quad \beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 + \varepsilon_1 \rho_1 \|\Phi\|_2^2. \quad (3.89a)$$

Além disso, vale

$$(b) \quad \beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C_{3.17} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C_{3.17}}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + C_{3.17} \|\Psi\|_2^2, \quad (3.89b)$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande.

Demonstração. Tomando o produto interno de (3.72d) com $\bar{\psi}$ em $L^2(0, L)$, deduzimos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx &= \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi \bar{\psi} dx}_{:=R_{21}} + \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \bar{\psi}_x ds dx \\ &\quad + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Substituindo ψ dado em (3.72c) em R_{21} , obtemos

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \bar{\psi}_x ds dx - \underbrace{k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx}_{:=R_{22}} \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \bar{f}_3 dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.91)$$

(a) Tomando o produto interno de (3.72b) com \bar{w} em $L^2(0, L)$, segue que

$$i\lambda\rho_1 \int_0^L \Phi \bar{w} dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{w} dx = \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{w} dx. \quad (3.92)$$

Uma vez que valem

$$k \int_0^L \varphi_x \overline{w_x} dx = -k \int_0^L \varphi_x \overline{\psi} dx, \quad - \int_0^L \psi_x \overline{w} dx = - \int_0^L |w_x|^2 dx$$

e $i\lambda G(\psi)(x) \equiv G(\Psi)(x) + G(f_3)(x)$, podemos reescrever (3.92) como

$$-k \int_0^L \varphi_x \overline{\psi} dx - k \int_0^L |w_x|^2 dx = \rho_1 \int_0^L \Phi[\overline{G(\Psi)} + \overline{G(f_3)}] dx + \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{w} dx. \quad (3.93)$$

Somando membro a membro as igualdades (3.91) e (3.93), obtemos

$$\begin{aligned} \beta \|\psi_x\|_2^2 &= k (\|w_x\|_2^2 - \|\psi\|_2^2) + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{f_3} dx + \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{w} dx \\ &\quad + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \overline{\psi_x} ds dx + \rho_1 \int_0^L \Phi \overline{G(f_3)} dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^L \Phi \overline{G(\Psi)} dx. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Agora, se $u \in L^2(0, L)$, segue que

$$\begin{aligned} |G(u)|^2 &= \left| - \int_0^x u(y) dy + \frac{x}{L} \int_0^L u(x) dx \right|^2 \\ &\leq 2 \left(\int_0^L |u(x)| dx \right)^2 + \frac{2x^2}{L^2} \left(\int_0^L |u(x)| dx \right)^2 \\ &\leq 4L \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\|G(u)\|_2 \leq 2L \|u\|_2, \quad (3.95)$$

para a condição (3.15a). Também, pela desigualdade de Hölder, podemos escrever

$$|G(u)|^2 \leq \left(\int_x^L |u(s)| ds \right)^2 \leq L \|u\|_2^2.$$

Portanto,

$$\|G(u)\|_2^2 \leq L^2 \|u\|_2^2, \quad (3.96)$$

para a condição de fronteira (3.15b). Observe que, ao se precisar majorar $\|G(u)\|_2$, para ambos os casos de fronteira em (3.15) podemos usar somente a constante "2L", uma vez que $2L > L$.

Usando (3.85) ou (3.86), se $j = 1$ ou 2 , respectivamente, temos $(w_{xx}, w)_2 = -(\psi_x, w)_2$. Integrando por partes, usando as condições de fronteira e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$\|w_x\|_2^2 \leq \|\psi\|_2^2. \quad (3.97)$$

Assim, majorando o lado direito da igualdade em (3.94), usando (3.95) ou (3.96) e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq \rho_2 \|\psi\|_2 \|f_4\|_2 + \rho_2 \|\Psi\|_2 \|f_3\|_2 + \rho_1 \|w\|_2 \|f_2\|_2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \\ &\quad + \rho_1 \|\Phi\|_2 \|G(f_3)\|_2 + \rho_1 \|\Phi\|_2 \|G(\Psi)\|_2. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré para ψ , f_3 e w , e usando (3.95), a desigualdade anterior implica

$$\begin{aligned} \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) (\sqrt{\rho_2} \|f_4\|_2) + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} (\sqrt{\rho_2} \|\Psi\|_2) (\sqrt{\beta} \|f_{3,x}\|_2) \\ &\quad + L \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) (\sqrt{\rho_1} \|f_2\|_2) + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \\ &\quad + 2L^2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} (\sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_2) (\sqrt{\beta} \|f_{3,x}\|_2) + \rho_1 \|\Phi\|_2 (2L \|\Psi\|_2). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Usando a desigualdade de Young com $\varepsilon_1 > 0$ e o Lema 3.16 (estimativa (3.76a)), observe que

$$\begin{aligned} \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2 (2L \|\Psi\|_2) &\leq \rho_1 \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Phi\|_2^2 + C''_{\varepsilon_1} \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \\ &\leq \rho_1 \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Phi\|_2^2 + C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} (\|\psi_x\|_2 + \|\varphi_x + \psi\|_2), \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde $C'''_{\varepsilon_1} = \frac{4\rho_1 L^2 C'_{\varepsilon_1} \rho_2}{\varepsilon_1}$ e C''_{ε_1} provém da desigualdade de Young já mencionada. Aplicando o Lema 3.15 e Young com $\varepsilon = \beta/2b_0$, concluimos que

$$\sqrt{b_0} \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} \leq \frac{\beta}{2} \|\psi_x\|_2^2 + \frac{b_0}{\beta k_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.100)$$

A partir de (3.98) deduzimos, usando (3.99), (3.100) e os Lemas 3.14 e 3.15, que

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \|\psi_x\|_2^2 &\leq \left[L \left(\frac{2\sqrt{\rho_2} + (1+2L)\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\beta}} \right) + C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16} + \frac{b_0}{\beta k_1} \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \rho_1 \varepsilon_1 \|\Phi\|_2^2 \\ &\quad + C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} (\|\psi_x\|_2 + \|\varphi_x + \psi\|_2). \end{aligned}$$

Por fim, usando a desigualdade de Young com $\varepsilon = \beta/4$ e redefinindo ε_1 , podemos escrever

$$\beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 + \varepsilon_1 \rho_1 \|\Phi\|_2,$$

onde $C_{\varepsilon_1} = 4 \cdot \left[L \left(\frac{2\sqrt{\rho_1} + (1+2L)\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\beta}} \right) + C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16} \left(1 + \frac{C'''_{\varepsilon_1} C_{3.16}}{\beta} \right) + \frac{b_0}{\beta k_1} \right]$. Isto prova (3.89a).

(b) Voltando a (3.91) e usando (3.72c) em R_{22} , obtemos

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \overline{\psi_x} ds dx + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{\Psi} dx \\ &\quad + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \overline{f_3} dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{f_3} dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando desigualdade de Hölder, em seguida desigualdade de Poincaré para ψ e f_3 , podemos escrever

$$\begin{aligned} \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq \sqrt{\frac{b_0}{\beta}} \left(\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2 \right) \|\eta\|_{\mathcal{M}} + \frac{k}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \\ &\quad + \sqrt{\frac{k}{\beta}} \frac{L}{|\lambda|} (\sqrt{k} \|\varphi_x + \psi\|_2) (\sqrt{\beta} \|f_{3,x}\|_2) + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) (\sqrt{\rho_2} \|f_4\|_2) \\ &\quad + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} (\sqrt{\rho_2} \|\Psi\|_2) (\|f_{3,x}\|_2). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young para $\varepsilon = 1/2$ na estimativa anterior e Lema 3.15, concluímos que

$$\begin{aligned} \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq 2 \left(L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} + \sqrt{\frac{k}{\beta}} \frac{L}{|\lambda|} + \frac{b_0}{2\beta} C_{3.15} + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{2k}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + 2\rho_2 \|\Psi\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, se $|\lambda| > 1$, (3.89b) fica provado com

$$C_{3.17} = 2 \cdot \max \left\{ \left(L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} + L \sqrt{\frac{k}{\beta}} + \frac{b_0}{2\beta} C_{3.15} + L \sqrt{\frac{\rho_2}{\beta}} \right), k, \rho_2 \right\}.$$

□

Lema 3.18. Com as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores, para cada $\varepsilon_2 > 0$ existe $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 &\leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \operatorname{Re} \left(\left[\beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &\quad + 2b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\Phi\|_2^2, \end{aligned}$$

onde ε_1 é dado no Lema 3.17 (veja estimativa (3.89a)).

Demonstração. Tomando o produto interno de (3.72d) com $\overline{\varphi_x + \psi}$ em $L^2(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi(\overline{\varphi_x + \psi}) dx - \int_0^L \left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} \cdot (\overline{\varphi_x + \psi}) dx \\ & + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx = \rho_2 \int_0^L f_4(\overline{\varphi_x + \psi}) dx. \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes e usando condições de fronteira dadas em (3.15), segue que

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L f_4(\overline{\varphi_x + \psi}) dx &= \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{\varphi_x} dx}_{:=R_{3.181}} + \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{\psi} dx}_{:=R_{3.182}} + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &+ \underbrace{\int_0^L \left[\beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right] (\overline{\varphi_x + \psi})_x dx}_{:=R_{3.183}} \\ &- \left(\left[\beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Substituindo Ψ dado em (3.72a) em $R_{3.181}$ e Ψ dado em (3.72c) em $R_{3.182}$ obtemos, respectivamente

$$R_{3.181} = -\rho_2 \int_0^L \Psi \overline{f_{1,x}} dx - i\lambda\rho_2 \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx + \rho_2 \int_0^L f_3 \overline{\Phi_x} dx \quad (3.102)$$

e

$$R_{3.182} = -\rho_2 \|\Psi\|_2^2 - \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{f_3} dx. \quad (3.103)$$

Além disso, substituindo $(\varphi_x + \psi)_x$ dado em (3.72b), temos

$$\begin{aligned} R_{3.183} &= -i\lambda \frac{\beta\rho_1}{k} \int_0^L \psi_x \overline{\Phi} dx - \frac{\rho_1\beta}{k} \int_0^L \psi_x \overline{f_2} dx - \underbrace{i\lambda \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \overline{\Phi} dx}_{:=R_{3.184}} \\ &- \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \overline{f_2} dx. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Substituindo η dado em (3.72e), segue que

$$\begin{aligned} R_{3.184} &= -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_{5,x}(s) \overline{\Phi} ds dx - \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi_x \overline{\Phi} ds dx \\ &+ \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_{xs}(s) ds \overline{\Phi} dx \end{aligned}$$

Além disso, substituindo Ψ dado em (3.72c) e integrando por partes, concluímos que

$$\begin{aligned}
 R_{3.184} &= -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_{5,x}(s) \overline{\Phi} ds dx - i\lambda \frac{\rho_1 b_0}{k} \int_0^L \psi_x \overline{\Phi} dx \\
 &\quad + \frac{\rho_1 b_0}{k} \int_0^L f_{3,x} \overline{\Phi} dx - \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s) \eta_x(s) ds \overline{\Phi} dx.
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Usando que $\beta = b - b_0$ e (3.102)-(3.105) em (3.101), obtemos

$$\begin{aligned}
 k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx &= -i\lambda b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \psi \overline{\Phi}_x dx + \left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k} \right) \int_0^L f_{3,x} \overline{\Phi} dx \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{f_3} dx + \frac{\rho_1 \beta}{k} \int_0^L \psi_x \overline{f_2} dx \\
 &\quad + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_{5,x}(s) \overline{\Phi} ds dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx \\
 &\quad + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s) \eta_x(s) \overline{\Phi} ds dx + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \overline{f_2} ds dx \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^L f_4(\overline{\varphi_x + \psi}) dx + \left(\left[\beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L}.
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Usando o Lema 3.16 (estimativa (3.76a)) e aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \|\Psi\|_2^2 &\leq C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\psi_x\|_2 + C_{3.16} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 \\
 &\leq C_{3.16} \left[1 + C_{3.16} \left(\frac{1}{2\beta} + \frac{1}{k} \right) \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{k}{4} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{\beta}{2} \|\psi_x\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Por outro lado, usando o Lema 3.17 (estimativa (3.89a)) e aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/4$, segue que

$$\frac{\beta}{2} \|\psi_x\|_2^2 \leq \frac{D_{\varepsilon_1}}{2} \left(D_{\varepsilon_1} + \frac{D_{\varepsilon_1}}{2k} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{k}{4} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Phi\|_2^2, \tag{3.108}$$

onde D_{ε_1} se origina da desigualdade de Young e da estimativa (3.89a). Desse modo, temos por (3.107) e (3.108) que

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \|\Psi\|_2^2 &\leq \left[\frac{D_{\varepsilon_1}}{2} \left(D_{\varepsilon_1} + \frac{D_{\varepsilon_1}}{2k} \right) + C_{3.16} \left(1 + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{k} \right) \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \\
 &\quad + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\Phi\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

Note também que pela desigualdade de Hölder e desigualdade de Young com $\varepsilon_2 > 0$,

podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s)\eta_x(s)\overline{\Phi} ds dx &\leq \frac{\rho_1}{k} \|\Phi\|_2 \left\| \int_0^\infty g'(s)\eta_x(s) ds \right\|_2 \\ &\leq E'_{\varepsilon_2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{\varepsilon_2}{2} \|\Phi\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde $E'_{\varepsilon_2} = \frac{\rho_1^2 g(0)}{k^2} E_{\varepsilon_2} > 0$, sendo que a constante $E_{\varepsilon_2} = E(\varepsilon_2) > 0$ provém da desigualdade de Young. Assim, aplicando as estimativas (3.109) e (3.110) a partir da parte real, módulo e desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.106), deduzimos

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 &\leq 2b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \cdot \operatorname{Re} \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi}_x dx \right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|\Phi\|_2^2 \\ &\quad \left[\frac{2}{\sqrt{\beta}} \left| \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}} - b_0 \frac{\sqrt{\rho_1}}{k} \right| + 2\sqrt{\rho_2} \left(\frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{L}{\sqrt{\beta}} \right) + D_{\varepsilon_1} \left(D_{\varepsilon_1} + \frac{D_{\varepsilon_1}}{2k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{\sqrt{\rho_1\beta}}{k} + 2C_{3.16} \left(1 + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{k} \right) + 2E'_{\varepsilon_2} + 2\frac{\sqrt{\rho_1 b_0}}{k} \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \operatorname{Re} \left(\left[\beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L}. \end{aligned}$$

Portanto, o lema está provado com

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &= \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left| \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1}} - b_0 \frac{\sqrt{\rho_1}}{k} \right| + 2\sqrt{\rho_2} \left(\frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{L}{\sqrt{\beta}} \right) + 2\frac{\sqrt{\rho_1\beta}}{k} + D_{\varepsilon_1} \left(D_{\varepsilon_1} + \frac{D_{\varepsilon_1}}{2k} \right) \\ &\quad + 2C_{3.16} \left(1 + \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{k} \right) + 2E'_{\varepsilon_2} + 2\frac{\sqrt{\rho_1 b_0}}{k}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.19. *Considere as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores. Então, tomando a função real $q \in C^1([0, L])$ satisfazendo $q(0) = -q(L) = 1$, existem $C_q, C_{q, \varepsilon_1} > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & - \left(\frac{q(x)}{2} \left| \beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s) ds \right|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq C_q \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ & + C_q \|\psi_x\|_2 \|\varphi_x + \psi\|_2 + C_{q, \varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 + \varepsilon_1 C_q \rho_1 \|\Phi\|_2. \end{aligned} \quad (3.111a)$$

Além disso, vale

$$(ii) \quad - \left(\frac{q(x)}{2} |\varphi_x|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq C_q \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_q (\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2^2). \quad (3.111b)$$

Demonstração. (i) Tomando o produto interno de (3.72d) com $q(x)\vartheta_x$ em $L^2(0, L)$, onde $\vartheta =$

$\vartheta(x) := \beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds$, temos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi q(x)\overline{\vartheta_x}dx + k \int_0^L q(x)(\varphi_x + \psi)\overline{\vartheta_x}dx}_{:=R_{3.191}} - \underbrace{\int_0^L \vartheta_{xx}q(x)\overline{\vartheta_x}dx}_{:=R_{3.192}} = \rho_2 \int_0^L f_4q(x)\overline{\vartheta_x}dx. \quad (3.112)$$

Substituindo ψ dado em (3.72c) e η dado em (3.72e), obtemos

$$\begin{aligned} R_{3.191} &= -\rho_2 \int_0^L \Psi q(x)\beta\overline{\Psi_x}dx - \rho_2\beta \int_0^L \Psi q(x)\overline{f_{3,x}}dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)q(x)\overline{\eta_{sx}(s)}\overline{\Psi}dsdx - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)q(x)\overline{\Psi f_{5,x}(s)}dsdx \\ &- \rho_2 \int_0^L \Psi q(x) \int_0^\infty g(s)\overline{\Psi_x}dsdx. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Usando que $\beta = b - b_0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} -\rho_2 \operatorname{Re} \int_0^L \Psi q(x) \left(\beta\overline{\Psi_x} + \int_0^\infty g(s)\overline{\Psi_x}ds \right) dx &= - \underbrace{\left(\frac{b\rho_2}{2}q(x)|\Psi|^2 \right)}_{:=R_{3.193}} \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &+ \frac{b\rho_2}{2} \int_0^L |\Psi|^2 q'(x)dx, \end{aligned}$$

onde pelas condições dadas sobre Ψ em $D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, vemos que $R_{3.193} = 0$. Substituindo a igualdade acima em $R_{3.191}$, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_{3.191}) &= \frac{b\rho_2}{2} \int_0^L |\Psi|^2 q'(x)dx + \operatorname{Re} \left\{ -\beta\rho_2 \int_0^L \Psi q(x)\overline{f_{3,x}}dx \right. \\ &\left. - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g'(s)q(x)\overline{\Psi\eta_x(s)}dsdx - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)q(x)\overline{\Psi f_{5,x}(s)}dsdx \right\}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Além disso, fazendo integração por partes, concluímos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(R_{3.192}) &= - \left(\frac{q(x)}{2} \cdot \left| \beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)dx \right|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L q'(x) \left| \beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Tomando parte real em (3.112) e usando (3.112)-(3.115), temos

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{q(x)}{2} \cdot \left| \beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)dx \right|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} = \underbrace{-\frac{b\rho_2}{2} \int_0^L |\Psi|^2 q'(x) dx}_{:=R_{3.194}} \\
& - \operatorname{Re} k \int_0^L q(x)(\varphi_x + \psi) \left(\beta\bar{\psi}_x + \int_0^\infty g(s)\bar{\eta}_x(s)ds \right) dx \\
& + \operatorname{Re} \beta\rho_2 \int_0^L \Psi q(x)\bar{f}_{3,x} dx + \operatorname{Re} \rho_2 \underbrace{\int_0^L \int_0^\infty g'(s)q(x)\Psi\bar{\eta}_x(s)ds dx}_{:=R_{3.195}} \\
& + \operatorname{Re} \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)q(x)\Psi\bar{f}_{5,x}(s)ds dx - \operatorname{Re} \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^L q'(x) \left| \beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right|^2 dx}_{:=R_{3.196}} \\
& + \operatorname{Re} \rho_2 \int_0^L f_4 q(x) \left(\beta\bar{\psi}_x + \int_0^\infty g(s)\bar{\eta}_x(s)ds \right) dx. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Seja $C_{1,q} = \max \left\{ \max_{0 \leq x \leq L} \{|q(x)|\}, \max_{0 \leq x \leq L} \{|q'(x)|\} \right\}$. Aplicando os Lemas 3.16 e 3.17 (estimativa (3.89a)) e a desigualdade de Young diversas vezes, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|R_{3.194}| & \leq bC_{1,q} \left[C_{\varepsilon_1} + \frac{C_{3.16}}{2} \left(1 + \frac{C_{1,q}C_{3.16}}{8\beta} \right) \right] \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
& \quad + bC_{1,q} \left(C_{\varepsilon_1} + \frac{C_{3.16}}{2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 + \varepsilon_1 \rho_1 \|\Phi\|_2^2. \tag{3.117}
\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Young (com $\varepsilon = 1/2$) e de Hölder, vale que

$$\begin{aligned}
|R_{3.195}| & \leq C_{3,q} \|\Psi\|_2^2 + C_{3,q} \int_0^L \left[\int_0^\infty |g'(s)|^{1/2} \cdot |g'(s)|^{1/2} |\eta_x(s)| ds \right]^2 dx \\
& \leq C_{3,q} \|\Psi\|_2^2 + C_{3,q} g(0) \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}$$

onde $C_{3,q} = 1/2 \cdot \max\{\rho_2^2 g(0) C_{1,q}^2, 1\}$. Pelos Lemas 3.14 e 3.16 (estimativa (3.76a)), segue que

$$\begin{aligned}
|R_{3.195}| & \leq C_{3,q} \left(\frac{C_{\varepsilon_1}}{\beta} + 2g(0) \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C_{3,q}}{\beta} C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 \\
& \quad + \frac{C_{3,q}}{\beta} \varepsilon_1 \rho_1 \|\Phi\|_2^2. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Por fim, usando a desigualdade de Young (para $\varepsilon = 1/2$) e de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|R_{3.196}| & \leq C_{1,q} \beta^2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_{1,q} \int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right|^2 dx \\
& \leq C_{1,q} \beta^2 \|\psi_x\|_2^2 + C_{1,q} g(0) \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned}$$

Assim, segue pelos Lemas 3.15 e 3.17 (estimativa (3.89a)) que

$$|R_{3.196}| \leq C_{1,q}(\beta + g(0)C_{3.15}) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{1,q}C_{\varepsilon_1}\beta \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\varphi_x + \psi\|_2 + C_{1,q}\varepsilon_1\rho_1 \|\Phi\|_2^2. \quad (3.119)$$

Portanto, de (3.117)-(3.119), temos por (3.116) que

$$-\left(\frac{q(x)}{2} \cdot \left|\beta\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)dx\right|^2\right)\Big|_{x=0}^{x=L} \leq D_{1,q}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + D_{1,q}\varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_2^2 + D_{1,q}\|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2}\|\varphi_x + \psi\|_2,$$

onde

$$D_{1,q} = \max \left\{ C_{1,q} \left[(\sqrt{\rho_1\beta} + 2\sqrt{\rho_2b_0} + \sqrt{\rho_2\beta}) + \beta + b \left(C_{\varepsilon_1} + \frac{C_{3.16}}{2} \right) + \frac{bC_{3.16}^2C_{1,q}C_{\varepsilon_1}}{16\beta} + \frac{C_{3,q}}{C_{1,q}} \left(\frac{C_{\varepsilon_1}}{\beta} + 2g(0)C_{3.15} \right) + g(0) \right], b \left(C_{\varepsilon_1} + \frac{C_{3.16}}{2} \right) + C_{\varepsilon_1} \left(\frac{C_{3,q}}{\beta C_{1,q}} + \beta \right) + k\beta, C_{1,q} \right\}.$$

(ii) Tomando o produto interno de (3.72b) por $q(x)\overline{\varphi_x}$ em $L^2(0, L)$, deduzimos

$$\underbrace{i\lambda \int_0^L q(x)\Phi\overline{\varphi_x}dx}_{:=S_{3.191}} - \underbrace{k \int_0^L q(x)\varphi_{xx}\overline{\varphi_x}dx}_{:=S_{3.192}} - k \int_0^L q(x)\psi_x\overline{\varphi_x}dx = \rho_1 \int_0^L q(x)f_2\overline{\varphi_x}dx. \quad (3.120)$$

Substituindo Ψ dado em (3.72c), podemos escrever

$$S_{3.191} = -\rho_1 \int_0^L q(x)|\Phi|^2dx - \rho_1 \int_0^L q(x)\Phi\overline{f_1}dx. \quad (3.121)$$

Além disso, fazendo integração por partes, obtemos

$$S_{3.192} = -\frac{k}{2} \left(q(x)|\varphi_x|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x|^2 q'(x)dx. \quad (3.122)$$

Usando (3.121)-(3.122) em (3.120), segue que

$$-\frac{k}{2} \left(q(x)|\varphi_x|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} = \underbrace{\rho_1 \int_0^L q(x)f_2\overline{\varphi_x}dx}_{:=S_{3.193}} + \rho_1 \int_0^L q(x)|\Phi|^2dx + \rho_1 \int_0^L q(x)\Phi\overline{f_1}dx - \underbrace{\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x|^2 q'(x)dx}_{:=S_{3.194}} + \underbrace{k \int_0^L q(x)\psi_x\overline{\varphi_x}dx}_{:=S_{3.195}}. \quad (3.123)$$

Segue pelas desigualdades de Hölder, Poincaré e triangular, que

$$\begin{aligned} S_{3.193} &\leq \sqrt{\frac{\rho_1}{k}} C_{1,q}(\sqrt{\rho_1}\|f_2\|_2)(\sqrt{k}\|\varphi_x + \psi\|_2) + \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} L C_{1,q}(\sqrt{\rho_1}\|f_2\|_2)(\sqrt{\beta}\|\psi_x\|_2) \\ &\leq C_{1,q}\sqrt{\rho_1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{L}{\sqrt{\beta}} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Também, pelas mesmas desigualdades, temos

$$S_{3.194} \leq \frac{k}{2} C_{1,q} \|\varphi_x\|_2^2 \leq k C_{1,q} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{k C_{1,q} L^2}{\beta} \beta \|\psi_x\|_2^2.$$

Usando o Lema 3.17 (estimativa (3.89a)) e a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1$), deduzimos

$$\begin{aligned} S_{3.194} &\leq C_{3.191} \left(1 + \frac{C_{3.191}}{4} \right) \frac{k C_{1,q} L^2}{\beta} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_{1,q} k \left(1 + \frac{L^2}{\beta} \right) \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \\ &\quad + \frac{k C_{1,q} L^2}{\beta} \rho_1 \|\Phi\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.125)$$

onde $C_{3.191}$ provém do Lema 3.19 para $\varepsilon_1 = 1$. Além disso,

$$S_{3.195} \leq k C_{1,q} \|\psi_x\|_2 \|\varphi_x\|_2 \leq \frac{k C_{1,q}}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{k C_{1,q}}{\beta} \left(\frac{1}{2} + L \right) \beta \|\psi_x\|_2^2.$$

Aplicando novamente o Lema 3.17 (estimativa (3.89a)) com $\varepsilon_1 = 1$ e a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1$), obtemos

$$\begin{aligned} S_{3.195} &\leq \frac{k C_{1,q}}{2} (1 + C_{3.192}) \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \left(k C_{1,q} C_{3.192} C_{3.193} + \frac{C_{3.193}^2}{2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + k C_{1,q} C_{3.192} \rho_1 \|\Phi\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.126)$$

onde temos $C_{3.192} = \frac{1+2L}{2\beta}$. Portanto, segue por (3.123)-(3.126) que

$$- \left(\frac{q(x)}{2} |\varphi_x|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq C_q \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_q (\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2^2),$$

onde

$$\begin{aligned} D_{2,q} &= C_{1,q} \cdot \max \left\{ \sqrt{\rho_1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{L}{\sqrt{\beta}} \right), \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} L^2, C_{3.191} \frac{k L^2}{\beta} \left(1 + \frac{C_{3.191}}{4} \right), \right. \\ &\quad \left. k C_{3.192} C_{3.193} + \frac{C_{3.193}^2}{2 C_{1,q}}, \frac{\beta + L^2}{\beta C_{1,q}}, \frac{k}{2} (1 + C_{3.192}), \rho_1, \frac{k L^2}{\beta} \rho_1, k C_{3.192} \rho_1 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, o lema fica provado com $C_q = \max\{D_{1,q}, D_{2,q}\}$. \square

Lema 3.20. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.14 e notações anteriores, existe $C_{3.20} > 0$ tal*

que

$$\rho_1 \|\Phi\|^2 \leq C_{3.20} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + 4k \|\varphi_x + \psi\|_2^2.$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (3.72b) como φ em $L^2(0, L)$, obtemos

$$\underbrace{i\lambda \int_0^L \Phi \bar{\varphi} dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \bar{\varphi} dx}_{:=R_{3.201}} = \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\Phi} dx. \quad (3.127)$$

Substituindo φ dado em (3.72a), segue que

$$R_{3.201} = -\rho_1 \|\Phi\|_2^2 - \rho_1 \int_0^L \Phi \bar{f}_1 dx. \quad (3.128)$$

Substituindo (3.128) e fazendo integração por partes no segundo termo em (3.127) por partes, concluímos que

$$\rho_2 \|\Phi\|_2^2 = \underbrace{k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\varphi}_x dx}_{:=R_{3.202}} - \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\Phi} dx - \rho_1 \int_0^L \Phi \bar{f}_1 dx. \quad (3.129)$$

Observe que, aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, triangular e de Poincaré (para ψ), temos

$$\begin{aligned} R_{3.202} &\leq \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \left(\frac{L^2 k}{2\beta} \right) \beta \|\psi_x\|_2^2 \\ &\leq \frac{3k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + E \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{2} \|\Phi\|_2^2, \end{aligned}$$

onde $E = \frac{kL^2}{2\beta} D \left(\frac{kL^2}{2\beta} + D \right) > 0$, sendo que $D > 0$ provém do Lema 3.17 (estimativa (3.89a)), para $\varepsilon_1 = \beta/L^2 k$, e da desigualdade de Young usada. Podemos reescrever a estimativa acima como

$$R_{3.202} \leq E \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + 2k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \frac{\rho_1}{2} \|\Phi\|_2^2. \quad (3.130)$$

De (3.129) e (3.130), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{2} \|\Phi\|_2^2 &\leq L \sqrt{\frac{\rho_1}{k}} (\sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_2) (\sqrt{k} \|f_{1x} + f_{3x}\|_2) + L^2 \sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} (\sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_2) (\sqrt{\beta} \|f_{3,x}\|_2) \\ &\quad + E \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + 2k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + (\sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_2) (\sqrt{\rho_1} \|f_2\|_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_2 \|\Phi\|_2^2 \leq C_{3.20} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + 4k \|\varphi_x + \psi\|_2^2,$$

onde

$$C_{3.20} = 2 \cdot \max \left\{ E, 1, L\sqrt{\frac{\rho_1}{k}}, L^2\sqrt{\frac{\rho_1}{\beta}} \right\}.$$

□

Observação 1. *A partir deste momento, para resultados futuros (inclusive de outras seções) não explicitaremos as constantes que acompanham os termos que fazem parte das limitações das normas. Nomearemos todas pela mesma letra. Isto pode ser feito sem maiores problemas usando estratégias análogas às feitas nos lemas anteriores e, paralelamente a isso, a cada passo podemos redefinir as constantes e denominar a referente ao passo atual como sendo uma constante universal “C”.*

Corolário 3.21. *Sob as notações acima e hipóteses do Lema 3.14, temos:*

(i) *Se tomarmos $\chi = 0$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.131)$$

(ii) *Se tomarmos $\chi \neq 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C|\lambda|^2\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (3.132)$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande.

Demonstração. Inicialmente, observe que do Lema 3.16 (estimativa (3.76a)), para cada $\varepsilon_2 > 0$, existe $C_{\varepsilon_2} > 0$ tal que

$$\rho_2\|\Psi\|_2 \leq C_{\varepsilon_2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{\beta}{2}\|\psi_x\|_2^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}k\|\varphi_x + \psi\|_2^2. \quad (3.133)$$

Além disso, pelo Lema 3.17 (estimativa (3.89a)), existe $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$ tal que

$$\beta\|\psi_x\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{\varepsilon_2}{2}k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_2^2. \quad (3.134)$$

Somando (3.133) e (3.134), obtemos

$$\rho_2\|\Psi\|_2 + \frac{\beta}{2}\|\psi_x\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + \varepsilon_2k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \varepsilon_1\rho_1\|\Phi\|_2^2. \quad (3.135)$$

Por outro lado, usando que

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq d^2|z_1|^2 + C_d|z_2|^2, \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ e } d > 0,$$

temos

$$\operatorname{Re} \left(\left[\beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq -C_d \left(q(x) \left| \beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} - d (q(x) |\varphi_x|^2) \Big|_{x=0}^{x=L}.$$

A partir de agora, vamos fixar um q satisfazendo as condições do Lema 3.19. Por exemplo, uma escolha que podemos fazer é tomar a função linear $q(x) = \frac{2}{L}x + 1$. Pelo Lemas 3.19-(i) e 3.17 (estimativa (3.89a)) e desigualdade de Young, podemos escrever

$$-C_d \left(q(x) \left| \beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq C_{d,\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C_d \varepsilon_1 \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \frac{k}{8} \|\varphi_x + \psi\|_2^2,$$

para algum $C_{d,\varepsilon_1} = C(d)(\varepsilon_1) > 0$. Agora, pelo Lema 3.19-(ii), temos

$$-d (q(x) |\varphi_x|^2) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq dC_q \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + dC_q (\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1 \|\Phi\|_2^2).$$

Combinando as três últimas estimativas, deduzimos

$$\operatorname{Re} \left(\left[\beta \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right] \overline{\varphi_x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \leq C_{d,\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{k}{2} \cdot C_d \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_1 [\varepsilon_1 (C_d + 1) + C_d] \|\Phi\|_2^2.$$

Aplicando o Lema 3.18 e a estimativa anterior, segue que

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 &\leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, d} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \left(\frac{k}{8} + dC \right) \|\varphi_x + \psi\|_2^2 \\ &\quad + b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right| + \rho_1 \left[\varepsilon_1 C_d + dC + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\rho_1} \right] \|\Phi\|_2^2. \end{aligned}$$

Para $d \leq \frac{k}{8C}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \|\varphi_x + \psi\|_2^2 &\leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, d} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right| \\ &\quad + \rho_1 \left[\varepsilon_1 C_d + dC + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\rho_1} \right] \|\Phi\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Usando o Lema 3.20, podemos escrever

$$2\rho_1 \tau \|\Phi\|_2^2 \leq \tau C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + 8k\tau \|\varphi_x + \psi\|_2^2. \quad (3.137)$$

Somando membro a membro as desigualdades dadas em (3.135), (3.136) e (3.137), segue que

$$\begin{aligned} & \rho_2 \|\Psi\|_2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 + k \left(\frac{1}{2} - 8\tau - \varepsilon_2 \right) \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 2\rho_1 \tau \|\Phi\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau, d} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ & + b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right| + \rho_1 \left[\varepsilon_1 (C_d + 1) + dC + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\rho_1} \right] \|\Phi\|_2^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left[2\tau - \varepsilon_1 (C_d + 1) - dC - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\rho_1} \right] \|\Phi\|_2^2 + k \left(\frac{1}{2} - 8\tau - \varepsilon_2 \right) \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \\ & + \beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau, d} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + b|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right|. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Tomando $d = 1/128C$ na desigualdade acima, C_d será uma constante universal. Assim, para $\tau = 1/32$ e $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequenos, obtemos de (3.138) que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \left| \int_0^L \psi \overline{\Phi_x} dx \right| + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (3.139)$$

para alguma constante $C > 0$.

Com isto, estamos aptos a provar os itens (i) e (ii) do presente corolário.

(i) Se $\chi = 0$, a desigualdade (3.131) segue imediatamente de (3.139).

(ii) Primeiramente, vamos obter uma estimativa mais “refinada” para $\rho_2 \|\Psi\|_2^2$ utilizando as desigualdades (3.76b) e (3.89b), obtidas nos Lema 3.16 e Lema 3.17, respectivamente. Combinando estas duas estimativas, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_2 \|\Psi\|_2^2 & \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 \\ & + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \frac{1}{|\lambda|^{1/2}} \|\varphi_x + \psi\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Psi\|_2 \right), \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Aplicando os Lemas 3.15 e 3.16 na estimativa anterior e desigualdade de Young, concluímos que

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + C (\|\eta\|_{\mathcal{M}}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2}) \left(\frac{\|\varphi_x + \psi\|_2^{1/2} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^{1/2}}{|\lambda|^{1/2}} \right).$$

Usando novamente a desigualdade de Young e o Lema 3.15, obtemos

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|U\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (3.140)$$

Suponha agora que $\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$. Usando as equações (3.72a) e (3.72c) em (3.139),

deduzimos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 &\leq C|\lambda|\|\Psi\|_2\|\varphi_x + \psi\|_2 + C|\lambda|\|\Psi\|_2\|\psi_x\|_2 + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned} \quad (3.141)$$

para algum $C > 0$ e para $|\lambda| > 1$. Aplicando a desigualdade de Young nos dois primeiros termos em (3.141), concluímos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \underbrace{C|\lambda|^2\|\Psi\|_2^2}_{:=I} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C|\lambda|\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (3.142)$$

para alguma constante positiva C . Pela desigualdade de Young e estimativa (3.140), deduzimos

$$I \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + (C|\lambda|\|\eta\|_{\mathcal{M}})\|U\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Substituindo a estimativa acima para I em (3.142), aplicando novamente a desigualdade de Young e o Lema 3.15 segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante positiva C . Aplicando a desigualdade de Young na estimativa anterior, concluímos (3.132) para $j = 1, 2$. \square

3.3.3 Conclusão da Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 3.5)

A conclusão da prova do Teorema 3.5 é baseada na caracterização de estabilidade exponencial para C_0 -semigrupos de contrações, conforme lembrado no Teorema 2.56 e afirmado no Teorema 3.6.

Do Teorema 3.13 já sabemos que a primeira condição $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$ do Teorema de Prüss é satisfeita. Quanto a segunda condição de (2.5), lembrando a equação resolvente (3.71) e aplicando o Corolário 3.21-(i), concluímos

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

o que prova a segunda condição de (2.5).

Finalmente, aplicando o Teorema 2.56, concluímos a prova do Teorema 3.6 e, conseqüentemente, do Teorema 3.5, isto é, concluímos que o sistema (3.17) é exponencialmente estável com (3.40) sendo satisfeita, desde que $\chi = 0$, como em (3.39).

3.3.4 Conclusão da Prova do Decaimento Polinomial (Teorema 3.7)

A conclusão da prova do Teorema 3.7 é baseada na recente caracterização de estabilidade do tipo polinomial para C_0 -semigrupos limitados, conforme lembrado no Teorema 2.57. Do Teorema 3.13 já sabemos que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$. Resta provar a condição necessária de (2.6) do Teorema 2.57, a qual será feita para $\alpha = 2$.

Com efeito, obtemos em virtude da equação resolvente (3.71) e do Corolário 3.21-(ii) que

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

para alguma constante $C > 0$, provando a condição necessária de (2.6) do Teorema 2.57 com $\alpha = 2$. Portanto, da própria equivalência em (2.6), obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}_j^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} = O(t^{-1/2}),$$

onde $S(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A}_j em \mathcal{H}_j definido em (3.17). Disto e como $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)\mathcal{A}_j^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C t^{-1/2} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

para $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, o que prova (3.41), para $j = 1, 2$, no caso geral em que $\chi \neq 0$, ou seja, (3.39) não é assumida.

3.4 FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL

Na seção anterior, provamos que o sistema (3.13)-(3.15) é exponencialmente estável quando $\chi = 0$, conforme o Teorema 3.5. No que segue, mostraremos que o mesmo sistema não é exponencialmente estável se $\chi \neq 0$. Isto justifica um estudo de outro tipo de decaimento no caso $\chi \neq 0$, como o polinomial, obtido conforme o Teorema 3.7. O método usado para mostrar a falta de decaimento exponencial é baseado no Teorema de Prüss para sistemas dissipativos (ver, por exemplo, [13]).

Lema 3.22. *Suponha que g satisfaça (3.16). Então, existe uma constante positiva C tal que*

$$\left| \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds \right| \leq C,$$

uniformemente em $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Usando a igualdade $e^{i\pi} = -1$, note inicialmente que

$$\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty e^{-i\lambda s} g(s) ds = -\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-i\lambda(s+\pi/\lambda)} e^{i\pi} g(s + \pi/\lambda) ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} g(s)e^{-i\lambda s} ds - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-i\lambda s} g(s + \pi/\lambda) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\pi/\lambda}^\infty e^{-i\lambda s} \left[\int_s^{s+\frac{\pi}{\lambda}} g'(y) dy \right] ds, \end{aligned} \quad (3.143)$$

a qual chamaremos os termos da direita da igualdade acima de R_1 , R_2 e R_3 .

Das hipóteses para g , dadas em (3.16), temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s}g(s) = 0.$$

Assim, como $\zeta_1(\lambda) := \sup_{s \in (0, \pi/\lambda)} \sqrt{s}g(s) \leq g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$, então

$$|R_1| \leq \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |g(s)e^{-i\lambda s}| ds \leq \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\sqrt{s}g(s)}{\sqrt{s}} ds \leq \zeta_1(\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2g(0)\frac{\pi}{\lambda}.$$

Quanto a R_2 , conseguimos a mesma estimativa, bastando notar que

$$\zeta_2(\lambda) := \sup_{s \in (0, \pi/\lambda)} \sqrt{s}g(s + \pi/\lambda) \leq g(\pi/\lambda)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \leq g(0)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Quanto a R_3 , usando primeiramente desigualdade de módulo para integrais, obtemos

$$2R_3 \leq \left| \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty e^{-i\lambda s} [g(s + \pi/\lambda) - g(s)] ds \right| \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty |g(s + \pi/\lambda) - g(s)| ds. \quad (3.144)$$

Usando as condições (3.16), tem-se que g é não-crescente. Assim, como $\lambda > 0$, (3.144) pode ser reescrito como

$$2R_3 \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s) ds - \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s + \pi/\lambda) ds. \quad (3.145)$$

Fazendo a substituição de variável $u = s + \pi/\lambda$, a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$2R_3 \leq \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty g(s) ds - \int_{\frac{2\pi}{\lambda}}^\infty g(s) ds = \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g(s) ds.$$

Fazendo agora substituição de variável $v = \lambda s$ no último termo integral na desigualdade acima, obtemos

$$\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{2\pi}{\lambda}} g(s) ds = \frac{1}{\lambda} \int_{\pi}^{2\pi} g(v/\lambda) dv.$$

Logo,

$$2R_3 \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\pi}^{2\pi} g(s/\lambda) ds.$$

Usando, por fim, a hipótese $g'(s) \leq -k_1 g(s)$, podemos escrever

$$R_3 \leq -\frac{1}{2\lambda k_1} [g(2\pi/\lambda) - g(\pi/\lambda)]. \quad (3.146)$$

Voltando a (3.143), multiplicando-a por λ e usando as estimativas obtidas para R_1, R_2 e R_3 , o lema segue. \square

Teorema 3.23. *Suponhamos que (3.39) não seja válida. Então, o semigrupo $e^{A_2 t}$ associado ao sistema (3.13)-(3.15), com condições de fronteira*

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, \quad s, t \geq 0, \quad (3.147)$$

não é exponencialmente estável.

Demonstração. De acordo com o Teorema de Prüss, é suficiente mostrar que não vale

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_2)^{-1}\| < \infty.$$

Para tanto, basta mostrarmos que existe uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty, \quad (3.148)$$

e uma sequência de vetores $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \eta_n)^T$ satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda_n I_d - \mathcal{A}_2)U_n = F_n, \quad (3.149)$$

para funções limitadas $(F_n) \subset \mathcal{H}_2$ ($\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1$) tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda_n I_d - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty. \quad (3.150)$$

Com efeito, denotaremos

$$\lambda \equiv \lambda_n, \quad U \equiv U_n \quad \text{e} \quad F \equiv F_n.$$

Seja

$$\lambda_n := \frac{n\pi}{\delta L}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \delta := \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}. \quad (3.151)$$

Assim, é claro que λ satisfaz (3.148). Tomamos $F = (0, f_2, 0, f_4, 0)^T$, com $f_2 = \cos(\delta \lambda x)$ e $f_4 = \sin(\delta \lambda x)$. A solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \eta)^T$ de (3.149) escrita em termos de suas compo-

nentes fica

$$i\lambda\varphi - \Phi = 0 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.152)$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.153)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = 0 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.154)$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - \left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_4 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.155)$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = 0 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.156)$$

onde $\beta = b - \int_0^\infty g(s)ds$. Isolando Φ e Ψ dadas nas igualdades (3.152) e (3.154), respectivamente, e substituindo nas igualdades restantes, o sistema (3.152)-(3.156) se resume a

$$-\lambda^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.157)$$

$$-\lambda^2\rho_2\psi - \beta\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds + k(\varphi_x + \psi) = \rho_2 f_4 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.158)$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - i\lambda\psi = 0 \quad \text{em } (0, L). \quad (3.159)$$

Para (3.157)-(3.159), consideramos soluções da forma

$$\varphi(x) = A \cos(\delta\lambda x), \quad \psi(x) = B \sin(\delta\lambda x), \quad \eta(x, s) = C\zeta(s) \sin(\delta\lambda x), \quad (3.160)$$

onde A, B, C e $\zeta(s)$ dependem de λ e serão determinados posteriormente. Note que φ, ψ e η dados acima satisfazem (3.147). Sendo assim, o sistema (3.157)-(3.159) é equivalente ao seguinte sistema linear

$$-\lambda^2\rho_1 A + k\delta^2\lambda^2 A - k\delta\lambda B = \rho_1 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.161)$$

$$-\lambda^2\rho_2 B + \beta\delta^2\lambda^2 B + \delta^2\lambda^2 \left(\int_0^\infty \zeta(s)g(s)ds \right) C - k\delta\lambda A + kB = \rho_2 \quad \text{em } (0, L), \quad (3.162)$$

$$(i\lambda\zeta(s) + \zeta'(s))C - i\lambda B = 0 \quad \text{em } (0, L). \quad (3.163)$$

Resolvendo a EDO dada em (3.163), obtemos

$$C\zeta(s) = B(1 - e^{-i\lambda s}),$$

onde usamos que $\eta(x, 0) = 0$. Assim,

$$\int_0^\infty g(s)C\zeta(s)ds = Bb_0 - B \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}ds. \quad (3.164)$$

Usando (3.164) em (3.161)-(3.162), deduzimos

$$(k\delta^2 - \rho_1) \lambda^2 A - k\delta\lambda B = \rho_1 \text{ em } (0, L), \quad (3.165)$$

$$(\beta\delta^2 - \rho_2) \lambda^2 B - \delta^2\lambda^2 \left(\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s} ds - b_0 \right) B - k\delta\lambda A + kB = \rho_2 \text{ em } (0, L). \quad (3.166)$$

Como $k\delta^2 - \rho_1 = 0$ (por (3.151)), então a igualdade em (3.165) nos fornece

$$B = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}. \quad (3.167)$$

Substituindo (3.167) em (3.166) e usando que $\beta = b - b_0$, concluímos que

$$A = -\frac{b}{k} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) + \frac{\rho_1}{k^2} \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s} ds - \frac{\rho_2}{\lambda\rho_1 k} - \frac{1}{\lambda^2}. \quad (3.168)$$

Assim, pela igualdade para Φ dada em (3.152) e de (3.160), podemos escrever

$$\Phi = \left[-\frac{ib}{k} \lambda \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) + \frac{i\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s} ds - \frac{i\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{i}{\lambda} \right] \cos(\delta\lambda x).$$

Usando (3.151), temos $\int_0^L |\cos(\delta\lambda x)|^2 dx = L/2$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L_*^2}^2 &= \frac{L}{2} \left| -\frac{b}{k} \lambda \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) + \frac{\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s)e^{-\lambda s} ds - \frac{\rho_2}{\rho_1 k} - \frac{1}{\lambda} \right|^2 \\ &\geq \underbrace{-\frac{L}{2} \left| -\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\rho_1 k} + \frac{\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s)e^{-\lambda s} ds \right|}_{P_\lambda} + \frac{Lb^2}{2k^2} \cdot \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right)^2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Uma vez que P_λ é limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$ pelo Lema 3.22, finalmente obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_1 \|\Phi\|_{L_*^2}^2 = \infty. \quad (3.169)$$

□

Observação 2. A escolha da condição de fronteira mista (3.15b) foi necessária para haver compatibilidade com as soluções apresentadas em (3.160). Notamos ainda que encontrar um contraexemplo que produz a falta de decaimento exponencial para o sistema viscoelástico com condição de Dirichlet (3.15a) na fronteira parece ser mais complicado, permanecendo um caso em aberto.

3.5 APÊNDICE A

Provaremos neste apêndice um resultado considerado inicialmente em [23, pg. 25], o qual versa sobre uma propriedade de limite obtida como consequência de assumirmos que

$i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, onde \mathcal{A} é um operador linear não limitado. Todos os detalhes serão exibidos no Teorema 3.29 a seguir.

A fim de deixar este apêndice autossuficiente quanto aos resultados principais utilizados, enunciaremos inicialmente algumas definições e consequências obtidas da teoria de análise funcional.

Para os resultados abaixo, serão considerados sempre X e Y espaços normados, T, S e \mathcal{A} operadores lineares e $D(T) \subset X$ o domínio do operador T .

Definição 3.24. Dizemos que $T : D(T) \rightarrow Y$ é fechado se o gráfico

$$G(T) = \{(x, y) | x \in D(T), y = T(x)\},$$

for um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Teorema 3.25 (Gráfico Fechado). Se $T : D(T) \rightarrow Y$ é fechado com $D(T)$ fechado em X , então o operador T é limitado.

Demonstração. Ver [20], página 292, Teorema 4.13-2. □

Teorema 3.26 (Operador Linear Fechado). $T : D(T) \rightarrow Y$ é um operador fechado se, e somente se, satisfaz a seguinte propriedade: se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ é tal que $x_n \rightarrow x$ e $T(x_n) \rightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $y = T(x)$.

Demonstração. Ver [20], página 293, Teorema 4.13-3. □

Teorema 3.27. Se o inverso T^{-1} de um operador fechado existe, então T^{-1} é fechado.

Demonstração. Ver [20], página 296, Exercício 5. □

Teorema 3.28. Se $S : X \rightarrow Y$ é fechado e $T : X \rightarrow Y$ é limitado, então $S + T$ é fechado.

Demonstração. Ver [20], página 296, Exercício 12. □

Dito isto, estamos aptos para mostrar o principal resultado deste Apêndice, a saber:

Teorema 3.29. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear com $D(\mathcal{A})$ denso em \mathcal{H} . Suponhamos ainda que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e denotamos $\ell = 1/\|(-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Se vale $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, então existe um número real $\omega \in (0, \ell]$, uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $|\lambda_n| < \omega$ e $|\lambda_n| \rightarrow \omega$ e uma sequência de funções $U_n \in D(\mathcal{A})$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ tais que

$$(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})U_n \rightarrow \infty, \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (3.170)$$

Demonstração. De $0 \in \rho(\mathcal{A})$, temos que se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $|\lambda| < \ell$ então o operador $I_d + i\lambda(-\mathcal{A})^{-1}$ é um operador linear, limitado e invertível. Uma vez que vale a composição de operadores bijetores

$$i\lambda I_d - \mathcal{A} = -\mathcal{A}(I_d + i\lambda(-\mathcal{A})^{-1}),$$

concluimos que $i\lambda I_d - \mathcal{A}$ é invertível.

Como $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} por hipótese, segue que \mathcal{A} é fechado. Observe também que $i\lambda I_d$ é limitado, para qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado. Consequentemente, do Teorema 3.28, concluimos que é fechado o operador $i\lambda I_d - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é tal que $|\lambda| < \ell$, então o Teorema 3.27 e o Teorema do Gráfico Fechado no dizem que $(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}$ é fechado e limitado, respetivamente. Portanto, temos

$$B_{\mathbb{C}}(0, \ell) \subset \rho(\mathcal{A}), \quad (3.171)$$

onde $B_{\mathbb{C}}(0, \ell)$ representa a bola aberta do plano complexo centrada em 0 e de raio ℓ .

Agora, suponha que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$ e considere $\omega \in \mathbb{R}^+$ o número dado por $\omega = \inf\{|\lambda| \mid i\lambda \notin \rho(\mathcal{A})\}$. Então $\{i\lambda \mid |\lambda| < \omega\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Além disso, (3.171) nos fornece $\ell \leq \omega$. Pela definição de ínfimo, temos ainda que, para qualquer $\varepsilon > 0$, vale

$$\{i\lambda \mid |\lambda| < \omega + \varepsilon\} \not\subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.172)$$

Suponha, por absurdo, que

$$\sup_{|\lambda| < \infty} \|(\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = M < \infty.$$

Consequentemente, dado $|\lambda_0| < \omega$, temos $i\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ com $\|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M$. Por outro lado, defina S como sendo o operador identidade de \mathcal{H} e $T = i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}$. Então, se $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$, decorre que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1 = \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}.$$

Do Teorema 2.30, temos que $S + T = I_d + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador limitado e invertível. Portanto, se $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$, também é invertível o operador

$$i\lambda I_d - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})(I_d + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}).$$

Como consequência imediata do Teorema 3.28, o operador $i\lambda I_d - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador fechado. Portanto, se $|\lambda - \lambda_0| < 1/M$, o operador $(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}$ é fechado pelo Teorema 3.27 e, consequentemente, $(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}$ limitado, pelo Teorema do Gráfico Fechado. Concluimos, portanto, que

$$\left\{ i\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}, \text{ se } |\lambda_0| < \omega \right\} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.173)$$

Note que se $1/M > \omega$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\omega + \varepsilon < 1/M$. Para $\lambda_0 = 0$ em (3.173),

temos

$$\left\{ i\lambda \mid |\lambda| < \omega + \varepsilon \right\} \subset \left\{ i\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M} \right\} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Agora, se $\omega \geq 1/M$, note que para $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < \omega + \frac{1}{M}$, é imediato que $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ para $|\lambda| < \omega$. Se $\omega \leq \lambda < \omega + 1/4M$, considerando $\lambda_0 = \omega - 1/4M$, segue que

$$|\lambda - \lambda_0| \leq |\lambda - \omega| + |\omega - \lambda_0| \leq \frac{1}{2M} < \frac{1}{M},$$

e por (3.173), temos $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Por fim, se $-(\omega + 1/4M) < \lambda \leq -\omega$, basta tomarmos $\lambda_0 = -\omega + 1/4M$ para concluirmos que $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Consequentemente,

$$\left\{ i\lambda \mid |\lambda| < \omega + \frac{1}{4M} \right\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

que é um absurdo, uma vez que (3.172) é válida em particular para $\varepsilon = 1/4M$. Portanto,

$$\sup_{|\lambda| < \infty} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Provaremos agora que é contínua a seguinte função:

$$\begin{aligned} \zeta : (-\omega, \omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \|(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \end{aligned}$$

De fato, dado $\lambda_0 \in (-\omega, \omega)$, para cada $\lambda \in (-\omega, \omega)$ e $F \in \mathcal{H}$ não nulo, existem vetores U e U_0 tais que

$$(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}F = U \quad \text{e} \quad (i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}F = U_0.$$

Com isto,

$$(i\lambda I_d - \mathcal{A})U = (i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})U_0.$$

Somando $\mathcal{A}U - i\lambda_0 U_0$ em ambos os lados da igualdade acima, em seguida tomando a composta com $(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}$ em ambos os lados da igualdade resultante, segue que

$$i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}U = U_0 - U.$$

Usando a igualdade acima e o fato de que $(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}$ é um operador limitado, chegamos a

$$\|U_0 - U\|_{\mathcal{H}} \leq |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Somando e subtraindo U_0 e aplicando a desigualdade triangular, podemos escrever

$$\begin{aligned} \|U_0 - U\|_{\mathcal{H}} &\leq |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|U - U_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|U_0\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Subtraindo $|\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|U - U_0\|_{\mathcal{H}}$ em ambos os lados da desigualdade acima e, usando que $(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1} F = U_0$ e $\|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|F\|_{\mathcal{H}}$, concluímos que

$$[1 - |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}] \|U_0 - U\|_{\mathcal{H}} \leq |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.174)$$

Dado $\xi > 0$, consideraremos

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{\|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}, \frac{\xi}{\|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 + \xi \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}} \right\}.$$

Assim, se $\lambda \in (-\omega, \omega)$ é tal que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, então (3.174) nos fornece

$$\frac{\|U_0 - U\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}},$$

para todo $F \in \mathcal{H}$ não nulo. Portanto, da definição de norma em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, obtemos

$$\|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1} - (i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}. \quad (3.175)$$

Por outro lado, a desigualdade triangular inversa nos fornece

$$|\zeta(\lambda_0) - \zeta(\lambda)| \leq \|(i\lambda_0 I_d - \mathcal{A})^{-1} - (i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \quad (3.176)$$

Portanto, usando que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, as desigualdades em (3.175) e (3.176) nos fornecem $|\zeta(\lambda) - \zeta(\lambda_0)| < \xi$. Ou seja, $\zeta : (-\omega, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Observe que, para qualquer $\delta \in (0, \omega]$, a função ζ restrita ao conjunto $[\delta - \omega, \omega - \delta]$ é contínua em um compacto, portanto, sua imagem é limitada. Assim,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \omega} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \infty.$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, com $|\lambda_n| < \omega$, tal que

$\|(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \geq n$. Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \in \mathcal{H}$ não nulo, tal que

$$\frac{\|(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}{\|F_n\|_{\mathcal{H}}} \geq n. \quad (3.177)$$

Seja $U_n = \tilde{v}_n / \|\tilde{v}_n\|_{\mathcal{H}}$, onde $\tilde{U}_n \in D(\mathcal{A})$ satisfaz $(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})\tilde{U}_n = F_n$. Com notações

anteriores, podemos reescrever (3.177) como

$$\frac{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}}{\|(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}} \geq n,$$

o que implica

$$\|(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} = \frac{\|(i\lambda_n I_d - \mathcal{A})\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}}{\|\tilde{U}_n\|_{\mathcal{H}}} \leq \frac{1}{n},$$

concluindo o último objetivo (3.170) e, portanto, o teorema fica provado. \square

3.6 RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE O CAPÍTULO 3

Na Seção 3.2, mostramos existência e unicidade de solução para o problema (3.13)-(3.15). Sozzo, em [31], apresentou esta demonstração com detalhes na Seção 4.8. Em nosso caso, a diferença está nas entrelinhas da demonstração, em que mostramos $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$ para $j = 1, 2$. Isto serviu para podermos usar o mesmo argumento, presente pela primeira vez em [23, pg. 25], e agora demonstrado também ao longo da Seção 3.5, que nos fornece uma consequência de assumirmos $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A}_j)$, dando origem as sequências obtidas no segundo parágrafo da Subseção 3.3.1. Com isto, argumentamos por contradição, mostrando que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$ no Teorema 3.13, principal resultado daquela subseção.

Um dos principais resultados da Seção 3.3 é o Teorema 3.7, onde provamos que o problema (3.13)-(3.15) é polinomialmente estável com taxa dependendo dos dados iniciais, mas independente das condições de fronteira consideradas em (3.15). Foi obtido taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ via Teoria de Semigrupos Lineares, mostrada em (3.41), para $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$ e independentemente da condição de fronteira em (3.15) (isto é, para $j = 1$ e 2). Este resultado equivale ao mostrado por Rivera & Sare em [26, Seção 5], onde foi obtido esta mesma taxa via perturbação de energia. Os Teoremas 3.5 e 3.23 foram apresentados de forma análoga aos considerados em [26].

4 UM SISTEMA TERMOELÁSTICO DE TIMOSHENKO

4.1 DEDUÇÃO DO SISTEMA TERMOELÁSTICO COM LEI TÉRMICA DO TIPO III

Neste capítulo, consideraremos um sistema de Timoshenko e termoelástico unidimensional, onde a condução de calor é dada pelas teorias de Green e Naghdi para o tipo III. A equação de movimento e o balanço de energia nesse sistema são dados por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \\ \rho_3 v_t = -q_x - \sigma(\varphi_x + \psi)_t. \end{cases} \quad (4.1)$$

As duas variáveis consideradas no sistema são o deslocamento vertical e ângulo de rotação de uma seção transversal com relação a seção normal, as quais denotamos por $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ respectivamente, ambas dependendo da posição $x \in [0, L]$ e do tempo $t \geq 0$, onde L é o comprimento da viga. Além disso, v é a diferença de temperatura, σ é uma constante de acoplamento, q é o fluxo de calor, S denota a força de cisalhamento e M o momento fletor. Nesse caso, as leis constitutivas empregadas para essas três últimas componentes mencionadas são as seguintes:

$$\begin{cases} S = k(\varphi_x + \psi) - \sigma v, \\ M = b\psi_x, \\ q = -\delta p_x - \gamma p_{xt}, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde p é o chamado deslocamento térmico, cuja derivação temporal é a temperatura empírica v , ou seja, $p_t = v$. As constantes b, k, ρ_1 e ρ_2 serão consideradas como em (1.5).

Substituindo (4.2) em (4.1), derivando (4.1) com respeito a t e usando $p_t = v$, obtemos

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma v_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma v = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 v_{tt} - \delta v_{xx} - \gamma v_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_{tt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.3)$$

com condições iniciais dada por

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \end{cases} \quad (4.4)$$

e condições de fronteira dadas por

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = v(x, t) = 0, \quad x = 0, L, \quad t \geq 0. \quad (4.5a)$$

ou

$$\varphi_x(x, t) = \psi(x, t) = v(x, t) = 0, \quad x = 0, L, \quad t \geq 0. \quad (4.5b)$$

A fim de exibir a natureza dissipativa do sistema (4.3), introduzimos uma nova variável

$$\theta(x, t) = \int_0^t v(x, s) ds + \frac{1}{\delta} z(x), \quad (4.6)$$

onde $z \in H_0^1(0, L)$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_{xx} = \rho_3 v_1 - \gamma v_{0,xx} + \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1), & x \in (0, L), \\ z(x) = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (4.7)$$

Observe que da terceira equação de (4.3), segue que

$$-\delta v_{xx} + \partial_t(\rho_3 v_t - \gamma v_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t) = 0.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima de 0 a t e pondo δ em evidência nos termos convenientes, deduzimos:

$$-\delta \left\{ \int_0^t v_{xx}(\cdot, s) ds + \frac{1}{\delta} [\rho_3 v_1 - \gamma v_{0,xx} + \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1)] \right\} + \rho_3 v_t - \gamma v_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0.$$

Note também que, por (4.6), temos $\theta_t(x, t) = v(x, t)$. Portanto, a partir de (4.7) podemos reescrever a igualdade acima como

$$\rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0. \quad (4.8)$$

Usando (4.6)-(4.8), podemos reescrever (4.3)-(4.5) como

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_{tx} = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma \theta_t = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.9)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (4.10)$$

e condições de fronteira

$$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = \theta(x, t) = 0, \quad x = 0, L, t \geq 0, \quad (4.11a)$$

ou

$$\varphi_x(x, t) = \psi(x, t) = \theta(x, t) = 0, \quad x = 0, L, t \geq 0, \quad (4.11b)$$

onde a relação de (θ_0, θ_1) com (v_0, v_1) é dada por

$$\begin{cases} \theta_1 = v_0, \\ \rho_3 v_1 = \delta \theta_{0,xx} + \gamma \theta_{1,xx} - \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1). \end{cases}$$

Na próxima seção apresentamos um resultado de existência e unicidade para o PVIF (4.9)-(4.11) via semigrupos lineares.

4.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_{tx} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma \theta_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.12)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, L), \end{cases} \quad (4.13)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.14a)$$

ou Dirichlet-Neumann

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.14b)$$

A ideia é reescrever o problema (4.12)-(4.14) como um PVI abstrato de primeira ordem. Para isso, denotamos $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$, $\Theta = \theta_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)^T$. Consideramos o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \quad (\text{para (4.14a)})$$

e

$$\mathcal{H}_2 = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \text{ (para (4.14b))},$$

com produto interno dado por

$$\begin{aligned} (U, W)_{\mathcal{H}_j} &= \rho_1(\Phi, \tilde{\Phi})_2 + \rho_2(\Psi, \tilde{\Psi})_2 + \rho_3(\Theta, \tilde{\Theta})_2 + b(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 + \delta(\theta_x, \tilde{\theta}_x)_2 \\ &\quad + k(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_2 \end{aligned}$$

e norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\Theta\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \delta\|\theta_x\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2,$$

para os elementos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)^T$ e $W = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\Theta})^T \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Assim, podemos converter (4.12)-(4.14) no seguinte problema de Cauchy Abstrato:

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_j U, & t > 0, \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1)^T, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, é definido por

$$\mathcal{A}_j U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta \\ \Theta \\ \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\rho_1}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2}I_d + \frac{b}{\rho_2}\partial_{xx} & 0 & 0 & \frac{\sigma}{\rho_2}I_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \\ 0 & -\frac{\sigma}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\frac{\sigma}{\rho_3}I_d & \frac{\delta}{\rho_3}\partial_{xx} & \frac{\gamma}{\rho_3}\partial_{xx} \end{bmatrix},$$

para todo U no domínio

$$D(\mathcal{A}_1) = \left\{ U \in \mathcal{H}_1 \mid \Phi, \Psi, \Theta \in H_0^1(0, L), \varphi, \delta\theta + \gamma\Theta, \psi \in H^2(0, L) \right\} \text{ (para (4.14a))}$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ U \in \mathcal{H}_2 \mid \Phi \in H_*^1(0, L), \varphi_x, \Psi, \Theta \in H_0^1(0, L), \right. \\ \left. \varphi, \delta\theta + \gamma\Theta, \psi \in H^2(0, L) \right\} \text{ (para (4.14b)).}$$

Com as notações anteriores, mostraremos que \mathcal{A}_j é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_j t}$ sobre o espaço \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$ e, conseqüentemente, podemos aplicar a teoria de semigrupos lineares para concluir o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *O operador \mathcal{A}_j , definido em (4.16), é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $e^{\mathcal{A}_j t}$ em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Lumer-Philips, é suficiente mostrar que:

- (i) $\overline{D(\mathcal{A}_j)} = \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$;
- (ii) \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , ou seja, $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq 0$ para todo $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$;
- (iii) $I_d - \mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$ é sobrejetor.

O item (i) será deduzido posteriormente como consequência dos itens (ii) e (iii). Começaremos então mostrando o item (ii).

Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)^T \in D(\mathcal{A}_j)$ e lembrando que $\mathcal{A}_j U$ em (4.16), temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= (k(\varphi_x + \psi)_x - \sigma\Theta_x, \Phi)_2 + (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \sigma\Theta, \Psi)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 \\ &\quad + ((\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} - \sigma(\Phi_x + \Psi), \Theta)_2 + \delta(\Theta_x, \theta_x)_2 + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 \\ &= k((\varphi_x + \psi)_x, \Phi)_2 - \sigma(\Theta_x, \Phi)_2 + b(\psi_{xx}, \Psi)_2 - k(\varphi_x + \psi, \Psi)_2 + \sigma(\Theta, \Psi)_2 \\ &\quad + (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx}, \Theta)_2 - \sigma(\Phi_x + \Psi, \Theta)_2 + b(\Psi_x, \psi_x)_2 + \delta(\Theta_x, \theta_x)_2 \\ &\quad + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira, vemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= k[(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 - \overline{(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2}] + b[-\overline{(\Psi_x, \psi_x)_2} + (\Psi_x, \psi_x)_2] \\ &\quad + \delta[-\overline{(\Theta_x, \theta_x)_2} + (\Theta_x, \theta_x)_2] - \gamma\|\Theta_x\|_2^2 + \sigma[(\Phi_x + \Psi, \Theta)_2 - \overline{(\Phi_x + \Psi, \Theta)_2}]. \end{aligned}$$

Tomando a parte real e lembrando que $\operatorname{Re}(z - \bar{z}) = 0$, concluímos

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = -\gamma\|\Theta_x\|_2^2. \quad (4.17)$$

Portanto, \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$.

(iii) **Caso 1:** Condição de Dirichlet.

Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}_1$, vamos mostrar que a equação resolvente $(I_d - \mathcal{A}_1)U = F$ possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A}_1)$. Para isto, reescreveremos a equação $U - \mathcal{A}_1U = F$ em termos de suas componentes

$$\begin{cases} \varphi - \Phi = f_1, & (4.18a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x = f_2, & (4.18b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi - \Psi = f_3, & (4.18c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = f_4, & (4.18d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta - \Theta = f_5, & (4.18e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta - \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_6. & (4.18f) \end{cases}$$

Usando (4.18a), (4.18c) e (4.18e) nas equações restantes, obtemos o seguinte sistema reduzido

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}, & (4.19) \\ \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta - b\psi_{xx} = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5, & (4.20) \\ \rho_3\theta - \delta\theta_{xx} - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi) = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3). & (4.21) \end{cases}$$

Definindo

$$g_1 : = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}, \quad (4.22)$$

$$g_2 : = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5 \quad \text{e} \quad (4.23)$$

$$g_3 : = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3), \quad (4.24)$$

podemos reescrever (4.19)-(4.21) como

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = g_1, & (4.25a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta - b\psi_{xx} = g_2, & (4.25b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_3\theta - \kappa\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi) = g_3, & (4.25c) \end{cases}$$

onde denotamos $\kappa = \delta + \gamma$. Pelo Teorema 2.29, segue que $g_3 \in H^{-1}(0, L)$ e $g_1, g_2 \in L^2(0, L)$.

Considere o seguinte problema variacional

$$\int_0^L [\rho_1 \varphi \bar{\varphi} + \rho_2 \psi \bar{\psi} + \rho_3 \theta \bar{\theta} + k(\varphi_x + \psi)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) + \sigma \theta_x \bar{\varphi} + b \psi_x \bar{\psi}_x + \kappa \theta_x \bar{\theta}_x - \sigma \theta \bar{\psi} + \sigma(\varphi_x + \psi) \bar{\theta}] dx = \int_0^L (g_1 \bar{\varphi} + g_2 \bar{\psi} + g_3 \bar{\theta}) dx, \quad (4.26)$$

para todo $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \Lambda_1 = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Vamos mostrar, utilizando o Teorema de Lax-Milgram, que existe um único par $((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) \in \Lambda_1 \times \Lambda_1$ satisfazendo (4.26). Considere agora a seguinte forma sesquilinear

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) : \Lambda_1 \times \Lambda_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) &= \rho_1(\varphi, \tilde{\varphi})_2 + \rho_2(\psi, \tilde{\psi})_2 + \rho_3(\theta, \tilde{\theta})_2 + k(\varphi_x + \psi)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_2 \\ &\quad + \sigma(\theta_x, \tilde{\varphi})_2 + b(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 + \kappa(\theta_x, \tilde{\theta}_x)_2 - \sigma(\theta, \tilde{\psi}) \\ &\quad + \sigma(\varphi_x + \psi, \tilde{\theta})_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Vamos mostrar que a é contínua e coerciva. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, Hölder e Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))| &\leq \rho_1 \|\varphi\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + \rho_2 \|\psi\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 + \rho_3 \|\theta\|_2 \|\tilde{\theta}\|_2 \\ &\quad + k \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}\|_2 + \sigma \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + b \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 \\ &\quad + \kappa \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 + \sigma \|\theta\|_2 \|\psi\|_2 + \sigma \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\tilde{\theta}\|_2 \\ &\leq \rho_1 L^2 \|\varphi_x\|_2 \|\tilde{\varphi}_x\|_2 + \rho_2 L^2 \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \rho_3 L^2 \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 \\ &\quad + k \|\varphi_x\|_2 \|\tilde{\varphi}_x\|_2 + kL \|\varphi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + kL \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\varphi}_x\|_2 \\ &\quad + kL^2 \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \sigma L \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\varphi}_x\|_2 + b \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 \\ &\quad + \kappa \|\theta_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 + \sigma L^2 \|\theta_x\|_2 \|\psi_x\|_2 + \sigma L \|\varphi_x\|_2 \|\tilde{\theta}_x\|_2 \\ &\quad + \sigma L^2 \|\psi_x\|_2 \|\theta_x\|_2 \\ &\leq C(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)(\|\tilde{\varphi}_x\|_2 + \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \|\tilde{\theta}_x\|_2), \end{aligned}$$

onde $C := \max\{\rho_1 L^2 + k, (\rho_2 + k)L^2 + b, \rho_3 L^2 + \kappa, \sigma L(1 + L), kL\}$. Assim,

$$|a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}))| \leq C \|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_1} \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\|_{\Lambda_1}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta)) &= \rho_1 \|\varphi\|_2^2 + \rho_2 \|\psi\|_2^2 + \rho_3 \|\theta\|_2^2 + k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \sigma(\theta_x, \varphi)_2 + b \|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + k \|\theta_x\|_2^2 - \sigma(\theta, \psi)_2 + \sigma(\varphi_x + \psi, \theta)_2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira (4.14a), podemos escrever

$$\sigma(\theta_x, \varphi)_2 - \sigma(\theta, \psi)_2 + \sigma(\varphi_x + \psi, \theta)_2 = \sigma(\varphi_x + \psi, \theta)_2 - \overline{\sigma(\varphi_x + \psi, \theta)_2}.$$

Tomando a parte real em (4.28), utilizando o fato de que $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \leq 8(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)$, deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_1}^2 \\ &\leq (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\ &\leq (\|\varphi_x + \psi\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|\theta\|_2 + \|\theta_x\|_2)^2 \\ &\leq 8\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 8\|\varphi\|_2^2 + 8\|\psi\|_2^2 + 8\|\psi_x\|_2^2 + 8\|\theta\|_2^2 + 8\|\theta_x\|_2^2 \\ &\leq 8\frac{k}{k}\|\varphi_x + \psi\|_2^2 + 8\frac{\rho_1}{\rho_1}\|\varphi\|_2^2 + 8\frac{\rho_2}{\rho_2}\|\psi\|_2^2 + 8\frac{\rho_3}{\rho_3}\|\theta\|_2^2 + b\frac{8}{b}\|\psi_x\|_2^2 + k\frac{8}{k}\|\theta_x\|_2^2 \\ &\leq \operatorname{Re}(p_5 \cdot a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta))), \end{aligned}$$

onde $p_5 = \max\{8/\rho_1, 8/\rho_2, 8/\rho_3, 8/k, 8/b\}$. Se $p_6 = 1/p_5$, então

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\varphi, \psi, \theta)) \geq p_6 \|(\varphi, \psi, \theta)\|_{\Lambda_1}^2.$$

Agora definamos

$$\begin{aligned} \Xi_1 : \Lambda_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) &\longmapsto \Xi_1(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \int_0^L (g_1 \tilde{\varphi} + g_2 \tilde{\psi} + g_3 \tilde{\theta}) dx. \end{aligned}$$

Observe que Ξ_1 é antilinear e limitada. De fato, é trivial ver que Ξ_1 é antilinear, agora note que

$$\begin{aligned} |\Xi_1(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})| &\leq |(g_1, \tilde{\varphi})_2| + |(g_2, \tilde{\psi})_2| + |(g_3, \tilde{\theta})_2| \\ &\leq \|g_1\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + \|g_2\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 + \|g_3\|_{H^{-1}} \|\tilde{\theta}\|_2 \\ &\leq \varsigma (\|\tilde{\varphi}_x\|_2 + \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \|\tilde{\theta}_x\|_2) \\ &= \varsigma (\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\psi}\|_{H_0^1} + \|\tilde{\theta}\|_{H_0^1}) \\ &= \varsigma \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})\|_{\Lambda_1}, \end{aligned}$$

onde $\varsigma = L(\|g_1\|_2 + \|g_2\|_2 + \|g_3\|_{H^{-1}})$.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_1$, tal que

$$a((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \Xi_1(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}), \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \Lambda_1,$$

ou seja, $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_1$ é a única solução de (4.26).

Sendo $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_1$, temos $\Phi = \varphi - f_1 \in H_0^1(0, L)$, $\Psi = \psi - f_3 \in H_0^1(0, L)$ e $\Theta = \theta - f_5 \in H_0^1(0, L)$ satisfazendo as equações (4.18a), (4.18c) e (4.18e), respectivamente.

Usando (4.26) com $\tilde{\varphi} = \omega \in C_0^1(0, L)$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, obtemos

$$\int_0^L \varphi_x \overline{\omega_x} dx = -\frac{1}{k} \int_0^L (\rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1) \overline{\omega} dx, \quad \forall \omega \in C_0^1(0, L). \quad (4.29)$$

Como $\varphi_x, (\rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1) \in L^2(0, L)$ e vale (4.29), então $\varphi_x \in H^1(0, L)$. Logo, $\varphi \in H^2(0, L)$. Além disso, pela definição de solução fraca

$$k\varphi_{xx} = \rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1 \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Lembrando que $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}$ e $\Phi = \varphi - f_1$, podemos escrever

$$\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x = \rho_1 f_2 \quad \text{em } L^2(0, L). \quad (4.30)$$

Portanto $\varphi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ e satisfaz (4.18b).

Usando (4.26) com $\tilde{\psi} = \zeta \in C_0^1(0, L)$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = 0$, deduzimos

$$\int_0^L \psi_x \overline{\zeta_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L [k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta + \rho_2\psi - g_2] \overline{\zeta} dx, \quad \forall \zeta \in C_0^1(0, L). \quad (4.31)$$

Como $\psi_x, (k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta + \rho_2\psi - g_2) \in L^2(0, L)$ e vale (4.31), então $\psi_x \in H^1(0, L)$. Logo, $\psi \in H^2(0, L)$. Além disso, pela definição de derivada fraca

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta + \rho_2\psi - g_2 \quad \text{em } L^2(0, L)$$

e ainda, lembrando que $g_2 = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5$ e $\Psi = \psi - f_3$ segue que

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = f_4 \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Assim, $\psi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ e satisfaz (4.18d).

Aplicando em (4.26) $\tilde{\theta} = \iota \in C_0^1(0, L)$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$, temos

$$\int_0^L \theta_x \overline{\iota_x} dx = -\frac{1}{\kappa} \int_0^L [\rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - g_3] \overline{\iota} dx, \quad \forall \iota \in C_0^1(0, L). \quad (4.32)$$

Lembrando que $g_3 = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3)$ e $\Theta = \theta - f_5$, deduzimos

$$\int_0^L [\delta\theta_x + \gamma(\theta - f_5)_x] \overline{\iota_x} dx = - \int_0^L [\rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma(f_{1,x} + f_3)] \overline{\iota} dx, \quad \forall \iota \in C_0^1(0, L). \quad (4.33)$$

Como $\delta\theta_x + \gamma\Theta_x, \rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma(f_{1,x} + f_3) \in L^2(0, L)$ e vale (4.33), então

$\delta\theta_x + \gamma\Theta_x \in H^1(0, L)$ e ainda

$$(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} = \rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma(f_{1,x} + f_3) \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Lembrando que $\Phi = \varphi - f_1$, podemos escrever

$$\Theta - \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_6 \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Assim, $\delta\theta + \gamma\Theta \in H^2(0, L)$ e a equação (4.18f) é satisfeita.

Portanto, fica provado que existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)^T \in D(\mathcal{A}_1)$ tal que $U - \mathcal{A}_1U = F$.

(iii) **Caso 2:** Condição de Dirichlet-Neumann.

Dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}_2$, vamos mostrar que a equação resolvente $(I_d - \mathcal{A}_2)U = F$ possui uma única solução $U \in D(\mathcal{A}_2)$. Para isto, reescreveremos a equação $U - \mathcal{A}_2U = F$ em termos de suas componentes

$$\begin{cases} \varphi - \Phi = f_1, & (4.34a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x = f_2, & (4.34b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi - \Psi = f_3, & (4.34c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = f_4, & (4.34d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta - \Theta = f_5, & (4.34e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta - \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_6. & (4.34f) \end{cases}$$

Substituindo (4.34a), (4.34c) e (4.18e) nas equações restantes, obtemos o seguinte sistema reduzido

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}, & (4.35) \\ \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta - b\psi_{xx} = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5, & (4.36) \\ \rho_3\theta - \delta\theta_{xx} - \gamma\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi) = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3). & (4.37) \end{cases}$$

Definindo

$$g_1 : = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}, \quad (4.38)$$

$$g_2 : = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5 \quad \text{e} \quad (4.39)$$

$$g_3 : = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3), \quad (4.40)$$

podemos reescrever (4.35)-(4.37) como

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\theta_x = g_1, & (4.41a) \\ \rho_2\psi + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\theta - b\psi_{xx} = g_2, & (4.41b) \\ \rho_3\theta - \kappa\theta_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi) = g_3. & (4.41c) \end{cases}$$

onde denotamos $\kappa = \delta + \gamma$. Pelo Teorema 2.29, segue que $g_3 \in H^{-1}(0, L)$ e $g_1, g_2 \in L^2(0, L)$.

Considere o problema variacional

$$\int_0^L [\rho_1\varphi\bar{\varphi} + k(\varphi_x + \psi)(\bar{\varphi}_x + \bar{\psi}) + \sigma\theta_x\bar{\varphi} + \rho_2\psi\bar{\psi} + b\psi_x\bar{\psi}_x + \rho_3\theta\bar{\theta} + \kappa\theta_x\bar{\theta}_x - \sigma\theta\bar{\psi} + \sigma(\varphi_x + \psi)\bar{\theta}]dx = \int_0^L (g_1\bar{\varphi} + g_2\bar{\psi} + g_3\bar{\theta})dx. \quad (4.42)$$

Se $\Lambda_2 = H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, vamos mostrar, utilizando o Teorema de Lax-Milgram, que existe um único par $((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) \in \Lambda_2 \times \Lambda_2$ satisfazendo (4.42). Considere a seguinte forma bilinear

$$d((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) : \Lambda_2 \times \Lambda_2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$\begin{aligned} d((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) &= \rho_1(\varphi, \tilde{\varphi})_2 + \rho_2(\psi, \tilde{\psi})_2 + \rho_3(\theta, \tilde{\theta})_2 + k(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi} + \tilde{\psi})_2 \\ &\quad + \sigma(\varphi_x + \psi, \tilde{\theta})_2 + \sigma(\theta_x, \tilde{\varphi})_2 + b(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 + \kappa(\theta_x, \tilde{\theta}_x)_2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considere também o seguinte funcional

$$\begin{aligned} \Xi_2 : \Lambda_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) &\longmapsto \Xi_2(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) = \int_0^L (g_1\bar{\varphi} + g_2\bar{\psi} + g_3\bar{\theta})dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Lembrando que a desigualdade de Poincaré também é válida para espaços com média nula com $|I| < \infty$ (ver Teorema (2.26)), podemos mostrar de maneira totalmente análoga ao Caso 1 que a forma d dado em (4.43) é sesquilinear, contínua, coerciva e que Ξ_2 , definido em (4.44), é antilinear e limitada. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única terna $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_2$, tal que

$$d((\varphi, \psi, \theta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta})) = \Xi_2(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}), \quad \forall (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}) \in \Lambda_2,$$

ou seja, $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_2$ é a única solução de (4.42).

Sendo $(\varphi, \psi, \theta) \in \Lambda_2$, temos $\Phi = \varphi - f_1 \in H_*^1(0, L)$, $\Psi = \psi - f_3 \in H_0^1(0, L)$ e $\Theta = \theta - f_5 \in H_0^1(0, L)$ satisfazendo as equações (4.34a), (4.34c) e (4.34e), respectivamente.

Aplicando em (4.42) $\tilde{\varphi} = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi dx$, com $\phi \in H^1(0, L)$ e $\tilde{\psi} = \tilde{\theta} = 0$, deduzimos

$$\int_0^L \varphi_x \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{k} \int_0^L (\rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(0, L). \quad (4.45)$$

Substituindo $\tilde{\varphi} = \phi - \int_0^L \phi dx$ em (4.45), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^L k\varphi_x \overline{\phi_x} dx - \int_0^L \varphi_x \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)_x} dx = - \int_0^L \rho_1 \varphi \overline{\phi} dx + \int_0^L \rho_1 \varphi \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)} dx \\ & + \int_0^L k\psi_x \overline{\phi} dx - \int_0^L k\psi_x \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)} dx - \int_0^L \sigma\theta_x \overline{\phi} dx \\ & + \int_0^L \sigma\theta_x \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)} dx + \int_0^L g_1 \overline{\phi} dx - \int_0^L g_1 \overline{\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)} dx. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Usando que $\psi, \theta \in H_0^1(0, L)$, $g_1 \in H_*^1(0, L)$ e $\left(\frac{1}{L} \int_0^L \phi dx \right)_x = 0$, temos

$$\int_0^L k\varphi_x \overline{\phi_x} dx = - \int_0^L (\rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1(0, L). \quad (4.47)$$

Como φ_x e $(\rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1) \in L^2(0, L)$ e vale (4.47) em particular para $\phi \in C_0^1(0, L)$, então segue pela definição de derivada fraca que $\varphi_x \in H^1(0, L)$ e ainda

$$k\varphi_{xx} = \rho_1 \varphi - k\psi_x + \sigma\theta_x - g_1 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.48)$$

Lembrando que $g_1 = \rho_1(f_1 + f_2) + \sigma f_{5,x}$, $\Phi = \varphi - f_1$ e $\Theta = \theta - f_5$, podemos escrever

$$\rho_1 \Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \Theta_x = \rho_1 f_2 \text{ em } L^2(0, L).$$

Assim, φ satisfaz (4.34d) com $\varphi \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$. Além disso, substituindo em (4.47) o resultado obtido em (4.48), segue que

$$\int_0^L k\varphi_x \overline{\phi_x} dx = - \int_0^L k\varphi_{xx} \overline{\phi} dx.$$

Integrando por partes, deduzimos

$$\phi(x) \varphi_x(x) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0. \quad (4.49)$$

Escolhendo $\phi \in C^1[0, L]$ com $\phi(L) = 1$ e $\phi(0) = 0$, obtemos de (4.49) que $\varphi_x(L) = 0$. Além disso, escolhendo $\phi \in C^1[0, L]$ com $\phi(L) = 0$ e $\phi(0) = 1$, segue que $\varphi_x(0) = 0$. Portanto, $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$.

Aplicando em (4.42) $\tilde{\psi} = \vartheta$ com $\vartheta \in H^1(0, L)$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\theta} = 0$, podemos escrever

$$\int_0^L b\psi_x \overline{\vartheta_x} dx = - \int_0^L [k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - g_2 - \sigma\theta] \overline{\vartheta} dx, \quad \forall \vartheta \in H^1(0, L). \quad (4.50)$$

Como ψ_x , $k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - g_2 - \sigma\theta \in L^2(0, L)$ e vale (4.50) em particular para todo $\vartheta \in C_0^1(0, L)$, então $\psi_x \in H^1(0, L)$. Portanto, $\psi \in H^2(0, L)$ e ainda

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi) + \rho_2\psi - g_2 - \sigma\theta \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.51)$$

Lembrando que $\Psi = \psi - f_3$, $\Theta = \theta - f_5$ e $g_2 = \rho_2(f_3 + f_4) - \sigma f_5$, obtemos

$$\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = f_4 \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.52)$$

Assim, ψ satisfaz a equação (4.34d) e $\psi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$.

Aplicando em (4.42) $\tilde{\theta} = \tau$ e $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} = 0$, temos

$$\int_0^L \kappa\theta_x \overline{\tau_x} dx = - \int_0^L [\rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - g_3] \overline{\tau} dx, \quad \forall \tau \in H^1(0, L).$$

Lembrando que $g_3 = \rho_3(f_5 + f_6) - \gamma f_{5,xx} + \sigma(f_{1,x} + f_3)$ e $\Theta = \theta - f_5$, deduzimos

$$\int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \overline{\tau_x} dx = - \int_0^L [\rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma f_{1,x}] \overline{\tau} dx, \quad \forall \tau \in H^1(0, L). \quad (4.53)$$

Como $\delta\theta_x + \gamma\Theta_x$, $\rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma(f_{1,x} + f_3) \in L^2(0, L)$ e vale (4.53) em particular para $\tau \in C_0^1(0, L)$, então $\delta\theta_x + \gamma\Theta_x \in H^1(0, L)$. Logo, $\delta\theta + \gamma\Theta \in H^2(0, L)$, e ainda

$$(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} = \rho_3\theta + \sigma(\varphi_x + \psi) - \rho_3(f_5 + f_6) - \sigma(f_{1,x} + f_3) \text{ em } L^2(0, L). \quad (4.54)$$

Lembrando que $\Phi = \varphi - f_1$, $\Psi = \psi - f_3$ e $\Theta = \theta - f_5$, obtemos

$$\Theta - \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_6 \text{ em } L^2(0, L).$$

Assim, $\delta\theta + \gamma\Theta \in H^2(0, L)$ e a equação (4.34f) é satisfeita.

Portanto, fica provado que existe um único $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta) \in D(\mathcal{A}_2)$ tal que $U - \mathcal{A}_1 U = F$.

(i) Como $I_d - \mathcal{A}_j$ é sobrejetor e \mathcal{H}_j é reflexivo, então $\overline{D(\mathcal{A}_j)} = \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$ pelo Teorema 2.50. \square

Teorema 4.2. Para cada vetor $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, o problema (4.15) possui uma única U solução na classe

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}_j)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}_j)$$

dada por $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t} U_0, j = 1, 2$.

Demonstração. Segue do Teorema 4.1 e Teorema 2.55. \square

4.3 ESTABILIDADE

Nesta seção apresentaremos os resultados de estabilidade para a solução $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t} U_0$ do problema (4.15) e, portanto, para a solução do sistema (4.12)-(4.14).

Para o resultado de estabilidade exponencial, faremos uso da relação de velocidade de ondas como segue

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}. \quad (4.55)$$

Teorema 4.3. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \sigma, \delta, \gamma > 0$ e $\chi = 0$. Então, existem constantes $C, w > 0$ tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq C e^{-w t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.56)$$

Em outras palavras, o sistema de Timoshenko termoelástico (4.12)-(4.14) é exponencialmente estável.

Se considerarmos $\chi \neq 0$, então teremos um resultado de estabilidade polinomial como segue.

Teorema 4.4. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \sigma, \delta, \gamma > 0$ e $\chi \neq 0$. Então, existe uma constante $C > 0$ independente do dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$ tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2. \quad (4.57)$$

Em outras palavras, o sistema de Timoshenko termoelástico (4.12)-(4.14) é polinomialmente estável com taxa dependendo da regularidade dos dados iniciais.

Para a demonstração dos Teoremas 4.3 e 4.4, mostraremos nas próximas subseções as condições do Teorema de Prüss e do Teorema de Borichev e Tomilov. Em seguida, com ajuda da Desigualdade de Observabilidade mostrada no Apêndice B deste capítulo e resultados teóricos da teoria de semigrupos, concluiremos as provas dos Teoremas 4.3 e 4.4 nas Subseções 4.3.3 e 4.3.4, respectivamente.

4.3.1 Primeira condição do Teorema de Prüss e condição do Teorema de Borichev e Tomilov

Lema 4.5. *Seja $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \rightarrow \mathcal{H}_j$, definido em (4.16). Então, vale que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, para $j = 1, 2$.*

Demonstração. Para $j = 1, 2$, temos $D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j$ com inclusão compacta e, portanto, segue pelo Teorema 2.58 que $\sigma(\mathcal{A}_j)$ é formado apenas por autovalores de \mathcal{A}_j . Suponha, por absurdo,

que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_j)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $i\lambda \notin \rho(\mathcal{A}_j) = \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathcal{A}_j)$. Portanto, $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_j)$. Considere $\emptyset \neq U \in D(\mathcal{A}_j)$ autovetor associado a λ , isto é, $\mathcal{A}_j U = i\lambda U$. Escrevendo em termos de suas componentes, obtemos

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = 0, & (4.58a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\lambda\Phi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x = 0, & (4.58b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\lambda\psi - \Psi = 0, & (4.58c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\lambda\Psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = 0, & (4.58d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\lambda\theta - \Theta = 0, & (4.58e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\lambda\Theta - \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = 0. & (4.58f) \end{cases}$$

Substituindo (4.58a), (4.58c) e (4.58e) em (4.58f), chegamos a seguinte equação

$$-\lambda^2\rho_3\theta - \delta\theta_{xx} - i\lambda\gamma\theta_{xx} + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (4.59)$$

Para $j = 1, 2$, tomando o produto interno em \mathcal{H}_j de $\mathcal{A}_j U - i\lambda U$ com U e parte real, podemos escrever

$$\operatorname{Re}(i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 - (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j}) = 0.$$

Assim, da dissipatividade do problema (4.16) (ver (4.17)), segue que

$$0 = \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = \gamma\|\Theta_x\|_2^2. \quad (4.60)$$

Por (4.60), obtemos imediatamente da desigualdade de Poincaré que $\Theta = 0$. De (4.58e), temos $\theta = 0$. Consequentemente, de (4.59) chegamos a $\varphi_x + \psi = 0$. Com isto, segue novamente da equação (4.58b) que $\Phi = 0$. Da equação (4.58a), obtemos $\varphi = 0$. Deste modo, $\psi = -\varphi_x = 0$ e, por fim, $\Psi = 0$, pela equação (4.58c).

Portanto, $U = 0$ o que é um absurdo. Logo, $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$. \square

4.3.2 Lemas técnicos

Com o intuito de aplicar as condições (2.5) e (2.6) dos Teoremas 2.56 e 2.57, respectivamente, e então concluir as provas dos Teoremas 4.3 e 4.4, nosso ponto de partida é considerar, para $F \in \mathcal{H}_j$ dada, a seguinte equação resolvente para o operador \mathcal{A}_j definido em (4.16):

$$i\lambda U - \mathcal{A}_j U = F, \quad j = 1, 2, \quad (4.61)$$

a qual, em termos de suas componentes, pode ser escrita como

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f_1, & (4.62a) \\ i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\Theta_x = \rho_1 f_2, & (4.62b) \\ i\lambda\psi - \Psi = f_3, & (4.62c) \\ i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \sigma\Theta = \rho_2 f_4, & (4.62d) \\ i\lambda\theta - \Theta = f_5, & (4.62e) \\ i\lambda\rho_3\Theta - (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_6. & (4.62f) \end{cases}$$

A seguir, apresentaremos alguns lemas auxiliares que nos permitirão confirmar nosso objetivo, a saber, o de obter resultados sobre estabilidade polinomial e sobre estabilidade exponencial, conforme se dá a relação entre os coeficientes ρ_1, ρ_2, k e b . No que segue, todas as constantes “ C ” no enunciado dos lemas serão universais e independentes do parâmetro λ . As que tiverem índices com relação a ε , como no Corolário 4.11 adiante, dependerão somente deste índice real.

Lema 4.6. *Sob notações anteriores, seja $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, a solução da equação resolvente (4.61), então*

$$\|\Theta\|_2^2, \|\Theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (4.63)$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Tomando o produto interno de ambos os lados em (4.61) para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos por (4.17) que

$$\gamma\|\Theta_x\|_2^2 = \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq |\operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}.$$

Finalmente, usando a desigualdade de Poincaré,

$$\|\Theta\|_2^2, \|\Theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde $C = \frac{1}{\gamma} \max\{1, L^2\}$. □

Lema 4.7. *Sob condições do Lema 4.6, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (4.64)$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (4.62e)_x por θ_x em $L^2(0, L)$, obtemos

$$i\lambda\|\theta_x\|_2^2 - \int_0^L \Theta_x \overline{\theta_x} dx = \int_0^L f_{5,x} \overline{\theta_x} dx. \quad (4.65)$$

Assim, para $j = 1, 2$, aplicando a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1/2$) e o Lema 4.6, podemos

escrever

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{1}{2} \|\theta_x\|_2^2,$$

para alguma constante positiva C . Assim, para $|\lambda| \geq 1$, o resultado para θ_x segue. Por fim, a estimativa para $\delta\theta_x + \gamma\Theta_x$ segue da estimativa anterior para θ_x e da estimativa de Θ_x dada no Lema 4.6. \square

No que segue, a fim de evitar termos de fronteira e estimativas diferentes para os termos relacionados ao deslocamento vertical φ como em [30], usaremos funções de corte, ou seja, definidas localmente, obtendo assim estimativas locais que serão estendidas à todo intervalo $(0, L)$ posteriormente.

Consideremos números arbitrários $l_0 \in (0, L)$ e $\delta > 0$ de forma que o intervalo $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, L)$ e uma função $s \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$\text{supp } s \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta), \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad x \in (0, L) \quad (4.66)$$

e

$$s(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \in [l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2]. \quad (4.67)$$

Lema 4.8. *Sob as notações acima e condições do Lema 4.6, existe uma constante positiva C tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Em particular, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.69)$$

Demonstração. Derivando (4.62a), adicionando a (4.62c) e inserindo a expressão resultante em (4.62f), obtemos

$$i\lambda\rho_3\Theta - (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) = \rho_3 f_6 + \sigma(f_{1,x} + f_3). \quad (4.70)$$

Tomando o produto interno de (4.70) com $sk(\overline{\varphi_x + \psi})$ em $L^2(0, L)$, chegamos a

$$\begin{aligned} \rho_3 \int_0^L f_6 k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx &= \underbrace{i\lambda\rho_3 \int_0^L \Theta k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx}_{:=I_1} - \underbrace{\int_0^L (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx}_{:=I_2} \\ &\quad + i\lambda\sigma \int_0^L (\varphi_x + \psi) k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx \\ &\quad - \sigma \int_0^L (f_{1,x} + f_3) k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Das equações (4.62a) e (4.62c), segue que

$$I_1 = \rho_3 \int_0^L (ks\Theta)_x \overline{\Phi} dx - \rho_3 \int_0^L \Theta ks \overline{\Psi} dx - \rho_3 \int_0^L \Theta ks \overline{(f_{1,x} + f_3)} dx.$$

Agora, integrando por partes, temos

$$I_2 = - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) k s_x(\overline{\varphi_x + \psi}) dx - \underbrace{\int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) k s(\overline{\varphi_x + \psi})_x dx}_{:=I_3}.$$

Da equação (4.62b), concluímos que

$$I_3 = - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) s(\overline{i\lambda\rho_1\Phi}) dx - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \sigma s \overline{\Theta_x} dx + \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \rho_1 s \overline{f_2} dx.$$

Substituindo a estimativa I_3 em I_2 , em seguida substituindo as estimativas dadas em I_2 e I_1 em (4.71), obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda\sigma \int_0^L (\varphi_x + \psi) k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx &= \rho_3 \int_0^L f_6 k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx + \sigma \int_0^L (f_{1,x} + f_3) k s(\overline{\varphi_x + \psi}) dx \\ &\quad - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) k s_x(\overline{\varphi_x + \psi}) dx \\ &\quad - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \sigma s \overline{\Theta_x} dx + \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) s \rho_1 \overline{f_2} dx \\ &\quad - \rho_3 \int_0^L (ks\Theta)_x \overline{\Phi} dx + \rho_3 \int_0^L \Theta ks \overline{\Psi} dx \\ &\quad + \rho_3 \int_0^L \Theta ks \overline{(f_{1,x} + f_3)} dx - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) i\lambda s \rho_1 \overline{\Phi} dx. \end{aligned}$$

Tomando módulo em ambos os lados da igualdade acima, aplicando a desigualdades triangular, de Hölder e de Poincaré e, por fim, usando que s é limitada e $\text{supp } s \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2)$, segue

que

$$\begin{aligned}
|\lambda| \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C|\lambda| \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ C\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ C\|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|\Theta_x\|_2. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Young e os Lemas 4.6 e 4.7 em (4.72), em seguida dividindo ambos os membros da desigualdade resultante por $|\lambda|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \tag{4.73} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (4.62b) com $-s\bar{\varphi}$ em $L^2(0, L)$, integrando por partes e aplicando (4.62a), vem

$$\rho_1 \int_0^L s|\Phi|^2 dx = k \int_0^L s|\varphi_x + \psi|^2 dx - k \int_0^L s(\varphi_x + \psi)\bar{\psi} dx + I_4 + I_5, \tag{4.74}$$

onde

$$I_4 = \frac{i\sigma}{\lambda} \int_0^L s \Theta_x \overline{(\Phi + f_1)} dx - \rho_1 \int_0^L s(\Phi \bar{f}_1 + f_2 \bar{\varphi}) dx \quad \text{e} \quad I_5 = k \int_0^L s'(\varphi_x + \psi)\bar{\varphi} dx.$$

Da desigualdade de Poincaré, podemos concluir facilmente que

$$|I_4| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

para alguma constante $C > 0$. Somando as equações (4.62a) e (4.62c) e fazendo integração por partes, segue que

$$|\operatorname{Re} I_5| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, tomando parte real em (4.74), observando que $\operatorname{supp} s \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq C \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx + C \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|\psi\|_2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.
\end{aligned}$$

Da estimativa (4.73) e da desigualdade de Young, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j} \right) \|\psi\|_2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\
&+ C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \|\psi\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|\psi\|_2. \tag{4.75}
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, os Lemas 4.6 e 4.7 e a igualdade em (4.62c), a estimativa (4.75) nos fornece

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left[\left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j} \right] (\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}) \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} (\|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3}) + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

para $|\lambda| > 1$. Aplicando a desigualdade de Young e o Lema 4.6 mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Combinando (4.73) e (4.76) concluímos, para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s(|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} \\
&+ C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Young e novamente o Lema 4.6, donde da definição de s em (4.66)-(4.67) a estimativa (4.68) segue.

Em particular, usando a desigualdade de Young e o Lema 4.6 várias vezes, também usando as propriedades de s em (4.66)-(4.67), a estimativa em (4.69) segue. \square

Observação 3. Vale a pena observar que as estimativas (4.68)-(4.69) são as mesmas para ambas as condições de fronteira, o que diferencia-se das estimativas dadas em [30, Lemma 5.4], onde foram obtidas desigualdades diferentes, via Teorema do Traço para espaços de Sobolev, para cada condição de fronteira.

Vamos considerar outra função auxiliar $s_1 \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$\text{supp } s_1 \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad x \in (0, L), \quad (4.77)$$

e

$$s_1(x) = 1 \quad \text{para } x \in [l_0 - \delta/3, l_0 + \delta/3]. \quad (4.78)$$

Lema 4.9. Sob as notações acima e condições do Lema 4.6, existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C |\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &+ C \int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{l_0 - \delta/2}^{l_0 + \delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (4.62d) com $s_1 \frac{b}{\rho_2} \bar{\psi}$ em $L^2(0, L)$ e integrando por partes, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{\rho_2} \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx &= -i\lambda b \int_0^L s_1 \Psi \bar{\psi} dx - \frac{bk}{\rho_2} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \\ &+ \frac{b\sigma}{\rho_2} \int_0^L s_1 \Theta \bar{\psi} dx + b \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx - \frac{b^2}{\rho_2} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Agora, derivando (4.62b), tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ com $s_1 b \bar{\psi}$ na expressão resultante e por fim integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} -b \int_0^L f_2(s_1 \bar{\psi})_x dx &= i\lambda b \int_0^L s_1 \Phi_x \bar{\psi} dx + \underbrace{\frac{b}{\rho_1} \int_0^L s_1 [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi}_x dx}_{:=I_6} \\ &+ \underbrace{\frac{b}{\rho_1} \int_0^L s_{1,x} [k(\varphi_x + \psi)]_x \bar{\psi} dx}_{:=I_7} - \frac{\sigma b}{\rho_1} \int_0^L \Theta_x (s_1 \bar{\psi})_x dx. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Integrando por partes e usando a equação (4.62d), podemos reescrever I_6 e I_7 como segue

$$I_6 = i\lambda \frac{k\rho_2}{\rho_1} \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx - \frac{k^2}{\rho_1} \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{k\sigma}{\rho_1} \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{\Theta} dx \\ + \frac{k\rho_2}{\rho_1} \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{f}_4 dx - \frac{bk}{\rho_1} \int_0^L s_{1,x}(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx, \\ I_7 = -\frac{bk}{\rho_1} \int_0^L s_{1,xx}(\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx - \frac{bk}{\rho_1} \int_0^L s_{1,x}(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx.$$

Substituindo I_6 e I_7 em (4.81), somando a expressão resultante com (4.80), usando novamente as equações (4.62a) e (4.62c), e por fim fazendo integração por partes, obtemos

$$\frac{b^2}{\rho_2} \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx = i\lambda \left[\frac{b\rho_1 - k\rho_2}{\rho_1} \right] \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx + \frac{k^2}{\rho_1} \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ + k \int_0^L \left(\frac{b}{\rho_1} s_{1,xx} - \frac{b}{\rho_2} s_1 \right) (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx \\ + 2 \frac{bk}{\rho_1} \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi) \bar{\psi}_x dx + I_8 + I_9, \quad (4.82)$$

onde

$$I_8 = b \int_0^L s_1 \bar{\Psi} \bar{f}_3 dx - b \int_0^L s_1(f_{1,x} + f_3) \bar{\Psi} dx - b \int_0^L \Phi(s_1 \bar{f}_3)_x dx + b \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx \\ - \frac{k\rho_2}{\rho_1} \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{f}_4 dx + \frac{b\sigma}{\rho_2} \int_0^L s_1 \bar{\Theta} \bar{\psi} dx - \frac{k\sigma}{\rho_1} \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi) \bar{\Theta} dx \\ + b \int_0^L \left(\frac{\sigma}{\rho_1} \bar{\Theta}_x - f_2 \right) (s_1 \bar{\psi})_x dx$$

e

$$I_9 = -\frac{b^2}{\rho_2} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx.$$

Aplicando o Lema 4.7, vemos que

$$|I_8| \leq C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C > 0$. Além disso, integrando por partes e usando (4.62c), segue que

$$|\operatorname{Re} I_9| \leq \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma outra constante $C > 0$. Por fim, voltando a (4.82), tomando a parte real e lembrando que

$$\operatorname{supp} s_1'' \subset \operatorname{supp} s_1' \subset \operatorname{supp} s_1 \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx &\leq C|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned}$$

Isto completa a prova de (4.79). \square

Lema 4.10. *Sob hipóteses e notações do Lema 4.9, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\Psi|^2 dx &\leq C|\lambda| \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right| \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi| |\Psi| dx \\ &+ C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (4.62d) com $-s_1 \bar{\psi}$ em $L^2(0, L)$, em seguida fazendo integração por partes e usando (4.62c), obtemos

$$\rho_2 b \int_0^l s_1 |\Psi|^2 dx = b^2 \int_0^l s_1 |\psi_x|^2 dx + I_{10} + I_{11}, \quad (4.84)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{10} &= -\rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \bar{f}_3 dx - \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx - \sigma b \int_0^L s_1 \Theta \bar{\psi} dx, \\ I_{11} &= k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx + b \int_0^L s_{1,x} \psi_x \bar{\psi} dx. \end{aligned}$$

Da equação (4.62c) é fácil ver que existe $C > 0$ tal que

$$|I_{10}| \leq C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \quad \text{e} \quad |I_{11}| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Usando estas duas últimas estimativas em (4.84), em seguida aplicando (4.79) e lembrando que $\text{supp } s_1 \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2)$, por (4.83) o lema segue. \square

Observação 4. *Usamos funções de cortes para evitar termos pontuais de fronteira nas integrações por partes. Nesses casos, todos os termos de fronteira se anulam nas integrações por partes realizadas nos Lemas 4.8, 4.9 e 4.10 devido as funções s e s_1 . No entanto, as estimativas*

obtidas são localizadas e, assim, temos a seguinte consequência.

Corolário 4.11. *Considere as hipóteses e notações anteriores e dado $\varepsilon > 0$, temos:*

(i) *Se $\chi \neq 0$ em (4.55), então existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.85)$$

(ii) *Se $\chi = 0$ em (4.55), então existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (4.86)$$

Demonstração. Somando as estimativas dadas em (4.79) e (4.83) fornecidas pelos Lemas 4.9 e 4.10, respectivamente, em seguida usando a desigualdade de Young e as condições (4.77)-(4.78) sobre s_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx &\leq C|\lambda|^2 \left| \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right|^2 \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C\|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + C \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \quad (4.87) \\ &\quad + C \left(\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Assim, temos:

(i) Se $\chi \neq 0$, então $\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$. Para $|\lambda| > 1$, da estimativa (4.87), da desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e do Lema 4.7, chegamos a

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + |\lambda|^2 \left(C_\varepsilon \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \right),$$

para alguma constante $C_\varepsilon = C(\varepsilon) > 0$. Agora, usando a estimativa (4.69) dada no Lema 4.8, a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e o Lema 4.7, concluímos que

$$C_\varepsilon \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon (1 + |\lambda|^2) \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Logo, fica mostrado (4.85).

(ii) Neste caso, $\chi = 0$ implica $\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} = 0$. Para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande, de (4.87), das estimativas dadas no Lema 4.7, em (4.69), do Lema 4.8 e da desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, a desigualdade desejada em (4.86) segue. \square

4.3.3 Conclusão da Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 4.3)

A conclusão da prova do Teorema 4.3 é baseada na caracterização de estabilidade exponencial para C_0 -semigrupos de contrações, conforme lembrado no Teorema 2.56.

Do Lema 4.5 já sabemos que a primeira condição de (2.5) do Teorema 2.56 é satisfeita. Para concluir a segunda condição de (2.5), consideremos inicialmente $\varepsilon > 0$ dado e $\chi = 0$. Aplicando o Corolário 4.11-(ii) temos de (4.69) e (4.86), que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad (4.88)$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$.

Agora é o momento preciso em que aplicaremos os resultados de observabilidade apresentados no Apêndice B para “esticar” a estimativa (4.88) a todo $(0, L)$. Com efeito, de (4.62a)-(4.62d), vemos que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$ é a solução de (4.117)-(4.120) com

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = \rho_1 f_2 - (\sigma \Theta)_x, \quad g_3 = f_3, \quad g_4 = \rho_2 f_4 + \sigma \Theta,$$

e, então, a condição (4.130) é verificada para $a_1 = l_0 - \delta/3$ e $a_2 = l_0 + \delta/3$. Deste modo, aplicando o Corolário 4.15, o Lema 4.6 e a desigualdade de Young, deduzimos

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad (4.89)$$

para constantes $C, C_\varepsilon > 0$. Vale a pena ressaltar que a aplicação do Corolário 4.15 foi fundamental na estimativa (4.89), o qual é consequência imediata do Lema 4.14 que estabelece a desigualdade de observabilidade para sistemas do tipo Timoshenko.

Agora, combinando (4.89) e o Lema 4.6, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Portanto, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e lembrando a equação resolvente (4.61), concluímos

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

o que prova a segunda condição de (2.5).

Finalmente, aplicando o Teorema 2.56, concluímos a prova do Teorema 4.3, ou seja, que o sistema (4.15) é exponencialmente estável com (4.56) sendo satisfeita no caso $\chi = 0$ em (4.55). \square

4.3.4 Conclusão da Prova do Decaimento Polinomial (Teorema 4.4)

A conclusão da prova do Teorema 4.4 é baseada na recente caracterização de estabilidade do tipo polinomial para C_0 -semigrupos limitados, conforme lembrado no Teorema 2.57.

Do Lema 4.5 já sabemos que $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_j)$. Resta provar a condição necessária de (2.6) do Teorema 2.57. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ dado. Do Lema 4.8 (desigualdade (4.69)) e Corolário 4.11-(i), existe uma contante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{l_0-\delta/3}^{l_0+\delta/3} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Usando novamente que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi)^T$ satisfaz (4.117)-(4.120) com

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = \rho_1 f_2 - (\sigma \Theta)_x, \quad g_3 = f_3, \quad g_4 = \rho_2 f_4 + \sigma \Theta,$$

e que (4.130) é verificada para $a_1 = l_0 - \delta/3$ e $a_2 = l_0 + \delta/3$, então o Corolário 4.15, Lema 4.6 e a desigualdade de Young implicam

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2 + |\psi_x|^2 + |\Psi|^2) dx \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad (4.90)$$

para algumas constantes $C, C_\varepsilon > 0$. De (4.90) e novamente do Lema 4.6, chegamos a

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos em virtude da equação resolvente (4.61) que

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C |\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

para alguma constante $C > 0$, provando a condição necessária de (2.6) do Teorema 2.57 com $\alpha = 2$. Portanto, da própria equivalência em (2.6), obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}_j^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-\frac{1}{2}}),$$

onde $S(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A}_j em \mathcal{H}_j definido em (4.16). Disto e como $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$, concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}_j} = \|S(t)\mathcal{A}_j^{-1}F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_j)}, \quad t \rightarrow \infty,$$

para $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, o que prova (4.57).

4.4 FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL

Na seção anterior, provamos que o sistema (4.12)-(4.14) é exponencialmente estável quando $\chi = 0$, conforme o Teorema 4.3. No que segue, mostraremos que o mesmo sistema não é exponencialmente estável se $\chi \neq 0$. Isto justifica um estudo de outro tipo de decaimento no caso $\chi \neq 0$, como o polinomial, obtido conforme o Teorema 4.4. O método usado para mostrar a falta de decaimento exponencial é baseado no Teorema de Prüss para sistemas dissipativos (ver, por exemplo, [13]).

Teorema 4.12. *Consideremos $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1)^T \in D(\mathcal{A}_2)$ e suponha que*

$$\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0. \quad (4.91)$$

Então, o semigrupo $e^{\mathcal{A}_2 t}$ associado ao sistema (4.12)-(4.14), com condições de fronteira

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.92)$$

não é exponencialmente estável.

Demonstração. De acordo com o Teorema de Prüss, é suficiente mostrar que não vale

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_2)^{-1}\| < \infty.$$

Mais precisamente, mostraremos que existe uma sequência de números reais $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

e uma sequência de vetores $U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n, \Theta_n)^T$ satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda_n I_d - \mathcal{A}_2)U_n = F_n, \quad (4.93)$$

para funções limitadas $(F_n) \subset \mathcal{H}_2$ ($\|F_n\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1$) tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda_n I_d - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty. \quad (4.94)$$

Denotaremos

$$\lambda \equiv \lambda_n, \quad U \equiv U_n \quad \text{e} \quad F \equiv F_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $F = (0, 0, 0, f_4, 0, 0)^T$, com $f_4 = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Escrevendo (4.93) em

termos de suas componentes da solução $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)^T$ temos

$$i\lambda\varphi - \Phi = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.95)$$

$$i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\Theta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.96)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.97)$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(u_x + v) - \sigma\Theta = \rho_2 f_4 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.98)$$

$$i\lambda\theta - \Theta = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.99)$$

$$i\lambda\rho_3\Theta - \delta\theta_{xx} - \gamma\Theta_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0, L). \quad (4.100)$$

Isolando Φ , Ψ e Θ dadas nas igualdades (4.95), (4.97) e (4.99), respectivamente, e substituindo nas igualdades restantes, concluímos que

$$-\lambda^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + i\lambda\sigma\theta_x = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.101)$$

$$-\lambda^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - i\lambda\sigma\theta = \rho_2 f_4 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.102)$$

$$-\lambda^2\rho_3\theta - \delta\theta_{xx} - i\lambda\gamma\theta_{xx} + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0, L). \quad (4.103)$$

O sistema reduzido (4.101)-(4.103) pode ser resolvido por

$$\varphi(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \psi(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \theta(x) = C \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (4.104)$$

onde A , B e C dependem de λ e serão determinados posteriormente. Note que φ , ψ e θ dados acima satisfazem (4.92). Portanto, o sistema (4.101)-(4.103) é equivalente ao abaixo:

$$P_1(\lambda)A - k\frac{n\pi}{L}B + i\lambda\sigma\frac{n\pi}{L}C = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.105)$$

$$-k\frac{n\pi}{L}A + P_2(\lambda)B - i\lambda\sigma C = \rho_2 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.106)$$

$$-i\lambda\sigma\frac{n\pi}{L}A + i\sigma\lambda B + P_3(\lambda)C = 0 \quad \text{em} \quad (0, L), \quad (4.107)$$

onde

$$P_1(\lambda) = -\rho_1\lambda^2 + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad (4.108)$$

$$P_2(\lambda) = -\rho_2\lambda^2 + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k,$$

$$P_3(\lambda) = -\rho_3\lambda^2 + (\delta + i\lambda\gamma)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

Observe que, se D e D_B são, respectivamente, a matriz dos coeficientes e a matriz dos coeficientes substituindo a segunda coluna pelo termo não homogêneo $(0, \rho_2, 0)^T$ associadas ao

sistema (4.105)-(4.107), então

$$\det D = \frac{1}{L^2} [R(\lambda) - \sigma^2 \lambda^2 \pi^2 n^2 (P_2(\lambda) - 2k) - \lambda^2 L^2 \sigma^2 P_1(\lambda)]$$

e

$$\det D_B = \frac{1}{L^2} (L^2 \rho_2 P_1(\lambda) \cdot P_3(\lambda) - \lambda^2 \sigma^2 \pi^2 n^2),$$

onde

$$R(\lambda) = P_3(\lambda)(L^2 P_1(\lambda) \cdot P_2(\lambda) - k^2 \pi^2 n^2).$$

Veja que $\det D = \pm\infty$, uma vez que

$$\operatorname{Im} R(\lambda) \approx c \cdot n^7, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad -\sigma^2 \lambda^2 \pi^2 n^2 (P_2(\lambda) - 2k) - \lambda^2 L^2 \sigma^2 P_1(\lambda) \approx n^6, \quad n \rightarrow \infty.$$

Com isto, o sistema (4.105)-(4.107) possui solução. Usando a Regra de Cramer, temos $B = \frac{\det D_B}{\det D}$. Portanto

$$B = \frac{L^2 \rho_2 P_1(\lambda) \cdot P_3(\lambda) - \lambda^2 \rho_2 \sigma^2 \pi^2 n^2}{R(\lambda) - \sigma^2 \lambda^2 \pi^2 n^2 (P_2(\lambda) - 2k) - \lambda^2 L^2 \sigma^2 P_1(\lambda)}. \quad (4.109)$$

Considere λ tal que

$$P_2(\lambda) = -\rho_2 \lambda^2 + b \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + k = \Lambda, \quad (4.110)$$

onde a constante Λ , que não dependerá de n , será determinada posteriormente. Observando primeiramente que (4.110) e (4.108) nos fornece $\rho_1 \rho_2 \chi n^2 \pi^2 + \rho_1 L^2 \Lambda - \rho_1 L^2 k = \rho_2 L^2 P_1(\lambda)$, temos

$$R(\lambda) = \frac{P_3(\lambda)}{\rho_2} \{ L^2 [\rho_1 \rho_2 \chi n^2 \pi^2 + \rho_1 L^2 \Lambda - \rho_1 L^2 k] \Lambda - \rho_2 k^2 n^2 \pi^2 \}. \quad (4.111)$$

Tomando $\Lambda = \frac{k^2}{\rho_1 \chi L^2}$, segue por (4.110) que

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\rho_2} \left[k + b \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 - \frac{k^2}{\rho_1 \chi L^2} \right]}. \quad (4.112)$$

Além disso, concluímos a partir de (4.111) que

$$R(\lambda) = \frac{\rho_1 L^2 P_3(\lambda)}{\rho_2} \Lambda (\Lambda - k) \approx c \cdot n^3, \quad c > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Com isto,

$$R(\lambda) - \sigma^2 \lambda^2 \pi^2 n^2 (P_2(\lambda) - 2k) - \lambda^2 L^2 \sigma^2 P_1(\lambda) \approx c \cdot n^4, \quad c > 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

e como temos também $L^2 \rho_2 P_1(\lambda) \cdot P_3(\lambda) - \lambda^2 \rho_2 \sigma^2 \pi^2 n^2 \approx c \cdot n^5$, $n \rightarrow \infty$, para um valor

grande de n , deduzimos

$$B \approx c \cdot n, \quad c > 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Finalmente obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_2 \|\Psi\|_2^2 = \rho_2 |B|^2 \lambda^2 \int_0^L \left| \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \right|^2 dx = \infty.$$

□

Observação 5. Assim como na Observação 2, destacamos que a escolha da condição de fronteira mista (4.14b) foi necessária para haver compatibilidade com as soluções apresentadas em (4.104). Novamente, ressaltamos que encontrar um contraexemplo que produz a falta de decaimento exponencial para o sistema termoelástico com condição de Dirichlet (4.14a) na fronteira parece ser mais complicado, também permanecendo um caso em aberto.

4.5 OTIMALIDADE DO DECAIMENTO POLINOMIAL

Teorema 4.13. Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \sigma, \delta, \gamma > 0$ e $\chi \neq 0$. Então, a taxa $t^{-1/2}$ dada pelo Teorema 4.4 não pode ser melhorada para $j = 2$. Em outras palavras, o decaimento polinomial a seguir é ótimo

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.113)$$

Em particular, o sistema de Timoshenko termoelástico (4.12)-(4.14), com condições de fronteira (4.14b), é polinomialmente estável com taxa ótima $t^{-1/2}$ dependendo da regularidade dos dados iniciais.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que a taxa do tipo $t^{-1/2}$ não é ótima. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}_2^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall F \in \mathcal{H}_2,$$

onde $S(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$ é o semigrupo gerado por \mathcal{A}_j em \mathcal{H}_j . Usando definição de norma em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ e Definição 2.32, podemos escrever

$$\|S(t)\mathcal{A}_2^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = O(t^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.114)$$

Aplicando o Teorema de Borichev e Tomilov em (4.114), deduzimos

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} = O(|\lambda|^{2-\varepsilon}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Da igualdade acima, concluímos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2} \leq C|\lambda|^{2-\varepsilon} \|F\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall F \in \mathcal{H}_2, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.115)$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $F_n = (0, 0, 0, \sin(\frac{n\pi}{L}x), 0, 0)^T \in \mathcal{H}_2$, conseguimos (no Teorema 4.12) λ_n real e $U_n \in D(\mathcal{A}_2)$ tais que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq C|\lambda_n|^2 \|F_n\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (4.116)$$

Em particular para estas sequências vale (por (4.115) e (4.116)) que

$$|\lambda_n|^2 \leq C|\lambda_n|^{2-\varepsilon}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo, pois $\lambda_n \rightarrow \infty$ (ver (4.112)). \square

4.6 APÊNDICE B

4.6.1 Desigualdade de Observabilidade para Sistemas do Tipo Timoshenko

No que segue mostraremos duas desigualdades, as quais são comumente chamadas por alguns autores de “desigualdades de observabilidade”, para uma classe ampla (e abstrata) de sistemas do tipo Timoshenko. Mostraremos uma inequação de observabilidade para o problema homogêneo relacionado ao sistema de Timoshenko. Tal resultado é provado pela primeira vez por Muñoz Rivera e Ávila em [25]. Este resultado também pode ser visto em [3].

Iniciamos considerando o seguinte sistema de equações:

$$i\lambda u - v = g_1 \quad \text{em } (0, l), \quad (4.117)$$

$$i\lambda \rho_1 v - (k(u_x + w))_x = g_2 \quad \text{em } (0, l), \quad (4.118)$$

$$i\lambda w - z = g_3 \quad \text{em } (0, l), \quad (4.119)$$

$$i\lambda \rho_2 z - (b w_x)_x + k(u_x + w) = g_4 \quad \text{em } (0, l), \quad (4.120)$$

onde $g_1 \in H_0^1(0, l)$ ou $H_*^1(0, l)$, $g_3 \in H_0^1(0, l)$, $g_2 \in L^2(0, l)$ ou $L_*^2(0, l)$, $g_4 \in L^2(0, l)$, e ρ_1, ρ_2, k, b satisfazem

$$\rho_1, \rho_2, k, b > 0. \quad (4.121)$$

Denotaremos por V e G as seguintes funções vetoriais $V = (u, v, w, z)^T$ e $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)^T$. Além disso, dados quaisquer $a_1, a_2 \in [0, l]$, com $a_1 < a_2$, a notação $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$ significa

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 = \int_{a_1}^{a_2} (|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2) dx.$$

Lema 4.14. *Sob as notações acima, seja $V = (u, v, w, z)^T$ uma solução regular de (4.117)-(4.120) e suponhamos que $0 \leq a_1 < a_2 \leq l$. Então, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tais que, para $j = 1, 2$,*

$$|u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2 \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, l}^2, \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} \|V\|_{a_1, a_2}^2 &\leq C_1 [|u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2] \\ &\quad + C_1 \|G\|_{0, l}^2. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Demonstração. Consideremos uma função fixada $q_1 \in C^1[a_1, a_2]$. Tomando o produto interno de $q_1 \overline{k(u_x + w)}$ com (4.118) em $L^2(a_1, a_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k \overline{g_2(u_x + w)} dx &= - \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[i\lambda(u_x + w)]} dx \\ &\quad - \int_{a_1}^{a_2} q_1 [k(u_x + w)]_x \overline{[k(u_x + w)]} dx. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Denotemos o lado direito de (4.124) por $J_1 + J_2$. Usando as equações (4.117), (4.119) e integrando por partes, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} J_1 &= - \frac{1}{2} q_1 \rho_1 k |v|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 dx \\ &\quad - \operatorname{Re} \left(\int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \bar{z} dx \right) - \operatorname{Re} \left(\int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \overline{[g_{1,x} + g_3]} dx \right), \end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Re} J_2 = - \frac{1}{2} q_1 k^2 |u_x + w|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 dx.$$

Assim, tomando parte real em (4.124) e usando estas igualdades, obtemos

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (q_1 \rho_1 k |v|^2 + q_1 k^2 |u_x + w|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} ([q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2) dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 \rho_1 k v \bar{z} dx + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k [\rho_1 v \overline{[g_{1,x} + g_3]} + g_2 \overline{[u_x + w]}] dx. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Agora fixando uma outra função $q_2 \in C^1[a_1, a_2]$. Multiplicando (4.120) por $q_2 b \bar{w}_x$ e integrando sobre (a_1, a_2) , temos

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b g_4 \bar{w}_x dx &= - \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b z \overline{[i\lambda w_x]} dx - \int_{a_1}^{a_2} q_2 (b w_x)_x \overline{[b w_x]} dx \\ &\quad + \int_{a_1}^{a_2} q_2 k b (u_x + w) \bar{w}_x dx. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Denotando o lado direito de (4.126) por $J_3 + J_4 + J_5$. Então, integrando por partes J_3, J_4 e usando a equação (4.119), resulta que

$$\operatorname{Re} J_3 = - \frac{1}{2} q_2 \rho_2 b |z|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2 dx - \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_2 b z \bar{g}_{3,x} dx$$

e

$$\operatorname{Re} J_4 = -\frac{1}{2} q_2 b^2 |w_x|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_{2,x} b^2 |w_x|^2 dx.$$

Além disso, integrando por partes em J_5 e usando (4.118)-(4.119), temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} J_5 &= \operatorname{Re} \left(q_2 b k (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} dx \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b (\rho_1 v \bar{g}_3 + g_2 \bar{w}) dx - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k(q_2 b)_x (u_x + w) \bar{z} dx \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k(q_2 b)_x (u_x + w) \bar{g}_3 dx. \end{aligned}$$

Retornando a (4.126), tomando sua parte real e substituindo estas três últimas identidades, deduzimos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \left(q_2 \rho_2 b |z|^2 + q_2 b^2 |w_x|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \left([q_2 \rho_2 b]_x |z|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 \right) dx \\ &= -\operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 \rho_1 b v \bar{z} dx - \operatorname{Re} \left(q_2 b k (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right) \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b (\rho_2 z \bar{g}_{3,x} - \rho_1 v \bar{g}_3 + g_4 \bar{w}_x - g_2 \bar{w}) dx \tag{4.127} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k(q_2 b)_x (u_x + w) \bar{z} dx + \frac{1}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k(q_2 b)_x (u_x + w) \bar{g}_3 dx. \end{aligned}$$

Combinando (4.125) e (4.127), chegamos a

$$\begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2} \left(q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + (q_1 \rho_1 k)_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + (q_2 \rho_2 b)_x |z|^2 \right) dx \\ &= \left(q_1 k^2 |u_x + w|^2 + q_1 \rho_1 k |v|^2 + q_2 b^2 |w_x|^2 + q_2 \rho_2 b |z|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \tag{4.128} \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} (q_1 \rho_1 k - q_2 \rho_1 b) v \bar{z} dx + P(a_j) + J_6 + J_7, \end{aligned}$$

para quaisquer $q_1, q_2 \in C^1[a_1, a_2]$, onde

$$\begin{aligned} P(a_j) &= -2 \operatorname{Re} \left(q_2 b k (u_x + w) \bar{w} \Big|_{a_1}^{a_2} \right), \\ J_6 &= \frac{2}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k(q_2 b)_x (u_x + w) \bar{z} dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_7 &= 2\operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_2 b (\rho_2 z \bar{g}_{3,x} - \rho_1 v \bar{g}_3 + g_4 \bar{w}_x - g_2 \bar{w}) dx \\
&\quad + \frac{2}{\lambda} \operatorname{Im} \int_{a_1}^{a_2} k [q_2 b]_x (u_x + w) \bar{g}_3 dx \\
&\quad + 2\operatorname{Re} \int_{a_1}^{a_2} q_1 k \left(\rho_1 v \overline{[g_{1,x} + g_3]} + g_2 \overline{[u_x + w]} \right) dx.
\end{aligned}$$

Agora estamos aptos para concluir (4.122)-(4.123). Com efeito, vamos considerar primeiro o caso $j = 2$. Assim, escolhendo q_1 e q_2 de forma que

$$(q_1 \rho_1 k)(x) = \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau \quad \text{e} \quad (q_2 \rho_1 b)(x) = \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau,$$

para $x \in [a_1, a_2]$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (4.128) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \left(q_{1,x} k^2 |u_x + w|^2 + [q_1 \rho_1 k]_x |v|^2 + q_{2,x} b^2 |w_x|^2 + [q_2 \rho_2 b]_x |z|^2 \right) dx \\
&= (q_1 k^2)(a_2) |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + (q_1 \rho_1 k)(a_2) |v(a_2)|^2 \\
&\quad + (q_2 b^2)(a_2) |w_x(a_2)|^2 + (q_2 \rho_2 b)(a_2) |z(a_2)|^2 + P(a_2) + J_6 + J_7,
\end{aligned} \tag{4.129}$$

com

$$P(a_2) = -2\operatorname{Re} \left\{ (q_2 b k)(a_2) [u_x(a_2) + w(a_2)] \overline{w(a_2)} \right\}.$$

Agora observe que

$$|J_6| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|V\|_{a_1, a_2}^2 \quad \text{e} \quad |J_7| \leq C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, l},$$

para alguma constante $C > 0$. Mais ainda, da equação (4.119), da desigualdade de Young e da imersão $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$, obtemos

$$|P(a_2)| \leq \frac{C}{|\lambda|} |u_x(a_2) + w(a_2)|^2 + \frac{C}{|\lambda|} |z(a_2)|^2 + C \|G\|_{0, l}^2.$$

Portanto, substituindo estas três últimas estimativas em (4.129) e tomando n e $|\lambda| > 1$ suficientemente grandes, as estimativas (4.122)-(4.123) são verificadas para $j = 2$.

O caso $j = 1$ é similar. De fato, para este caso escolhemos q_1 e q_2 tais que

$$(q_1 \rho_1 k)(x) = - \int_x^{a_2} e^{-n\tau} d\tau \quad \text{e} \quad (q_2 \rho_1 b)(x) = - \int_x^{a_2} e^{-n\tau} d\tau,$$

para $x \in [a_1, a_2]$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, retornando a (4.128) e procedendo similarmente como acima, as estimativas (4.122)-(4.123) podem ser concluídas para $j = 1$. \square

Uma importante consequência do Lema 4.14 é o corolário a seguir, o qual será o resultado utilizado nas aplicações para recuperar estimativas globais. Vejamos:

Corolário 4.15. *Seja $V = (u, v, w, z)^T$ uma solução regular do sistema (4.117)-(4.120). Se para algum subintervalo $(a_1, a_2) \subset (0, l)$ tivermos que*

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 = \int_{a_1}^{a_2} \left(|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2 \right) dx \leq \Lambda, \quad (4.130)$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0, l}^2 = \int_0^l \left(|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2 \right) dx \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, l}^2. \quad (4.131)$$

Demonstração. A prova segue combinando (4.122)-(4.123) com a hipótese (4.130). De fato, de (4.122) e (4.130), para $j = 1, 2$, temos

$$|u_x(a_j) + w(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 + |w_x(a_j)|^2 + |z(a_j)|^2 \leq C_0\Lambda + C_0\|G\|_{0, l}^2. \quad (4.132)$$

Usando (4.123) com $a_1 = 0$ e (4.132) com $j = 2$, obtemos

$$\int_0^{a_2} \left(|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2 \right) dx \leq C_2\Lambda + C_2\|G\|_{0, l}^2,$$

onde $C_2 = C_1C_0 + C_1 > 0$. Analogamente, usando (4.123) com $a_1 = a_2$, $a_2 = l$ e (4.132) com $j = 1$, também concluímos que

$$\int_{a_2}^l \left(|u_x + w|^2 + |v|^2 + |w_x|^2 + |z|^2 \right) dx \leq C_2\Lambda + C_2\|G\|_{0, l}^2.$$

Portanto, adicionando estas duas últimas desigualdades, a estimativa (4.131) segue como desejado. \square

4.7 RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE O CAPÍTULO 4

Observe que a condição de fronteira mista presente em [30, Seção 2], dada por

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = \theta_x(x, t) = 0, \quad x = 0, L \quad \text{e} \quad t \geq 0, \quad (4.133)$$

é diferente da presente neste trabalho, dada em (4.14b). Também, vamos notar que a constante κ presente em (2.6)-(2.7) daquele trabalho faz o mesmo papel da constante k presente em (4.12).

Os autores mostram em [30, Seção 4] que o sistema (1.14)-(1.17) daquele trabalho (que, a menos da condição de fronteira (4.14b), equivale ao sistema (4.12)-(4.14)) não é exponencialmente estável se $\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$. Na Seção 5, é provado que o sistema com condições de fronteira (4.133) é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi = 0$; com condições de

fronteira (4.14a) é mostrado que é exponencialmente estável se $\chi = 0$. Por fim, na Seção 6, é mostrado que se $\chi \neq 0$, então o sistema (1.14)-(1.17) com condições de fronteira mista (4.133) tem decaimento polinomial com taxa ótima da forma $t^{-1/2}$; é provado que o sistema com condições de fronteira (4.14a) tem decaimento polinomial com taxa da forma $t^{-1/4}$.

Um dos principais resultados da Seção 4.3 é o Teorema 4.4, onde provamos que o problema (4.12)-(4.14) é polinomialmente estável com taxa dependendo dos dados iniciais, mas independente das condições de fronteira consideradas em (4.14). Com isso, este resultado (via estimativa (4.57)) contribui com a literatura no que concerne estabilidade para sistemas de Timoshenko (e sistemas relacionados) no seguinte aspecto: como a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ mostrada em (4.57), para $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, é a mesma para ambas as condições de fronteira em (4.14), então no caso particular da condição de fronteira de Dirichlet (4.14a) (isto é, $j = 1$), melhoramos a taxa de decaimento $t^{-1/4}$ obtida em [30, Teorema 6.2]. Isto se deve ao fato de termos usado estimativas localizadas e o resultado de observabilidade do Apêndice B ao invés de estimar termos de fronteira via Teorema do Traço como em [30].

5 UM SISTEMA TERMO-VISCOELÁSTICO DE TIMOSHENKO

5.1 DEDUÇÃO DO MODELO TERMO-VISCOELÁSTICO COM LEI TÉRMICA DO TIPO III

Consideraremos um sistema de Timoshenko e termo-viscoelástico unidimensional, onde a condução de calor é dada também pelas teorias de Green e Naghdi para o tipo III, dado em [15]. A equação de movimento e o balanço de energia no sistema Timoshenko são dados por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = S_x, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - S, \\ \rho_3 v_t = -q_x - \sigma(\varphi_x + \psi)_t. \end{cases} \quad (5.1)$$

As duas variáveis consideradas no sistema são o deslocamento vertical e ângulo de rotação de uma seção transversal com relação a seção normal, as quais denotamos por $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ respectivamente, ambas dependendo da posição $x \in [0, L]$ e do tempo $t \geq 0$, onde L é o comprimento da viga. Além disso, v é a diferença de temperatura, σ é uma constante de acoplamento, q é o fluxo de calor, S denota a força de cisalhamento e M o momento fletor. Neste caso, as leis constitutivas empregadas para essas três últimas componentes mencionadas são as seguintes:

$$\begin{cases} S = k(\varphi_x + \psi) - \sigma v, \\ M = b\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s) ds, \\ q = -\delta p_x - \gamma p_{xt}, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde p é o chamado deslocamento térmico, cuja taxa de variação temporal é a temperatura empírica v , ou seja, $p_t = v$. As constantes b, κ, ρ_1 e ρ_2 serão consideradas como em (1.5). A função g é chamada de núcleo da memória, sendo a princípio considerada uma função positiva e integrável sobre $(0, \infty)$.

Substituindo (5.2) em (5.1) e usando que $p_t = v$, obtemos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma v_x = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s) ds + k(\varphi_x + \psi) - \sigma v = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 v_{tt} - \delta v_{xx} - \gamma v_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_{tt} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (5.3)$$

com condições iniciais dada por

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \psi(x, s) = \psi_0(x, s), \psi_t(x, 0) = \partial_t \psi(x, t)|_{t=0} := \psi_1(x), s \leq 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \end{cases} \quad (5.4)$$

e condições de fronteira dadas por

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = v(x, t) = 0, & x = 0, L, \\ \psi(x, t) = 0, & x = 0, L, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.5a)$$

ou

$$\begin{cases} \varphi_x(x, t) = v(x, t) = 0, & x = 0, L, \\ \psi(x, t) = 0, & x = 0, L, t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.5b)$$

Assim como no problema termoelástico da Seção 4.1, a fim de exibir a natureza dissipativa do sistema (5.3), introduzimos uma nova variável

$$\theta(x, t) = \int_0^t v(x, s) ds + \frac{1}{\delta} z(x), \quad (5.6)$$

onde $z \in H_0^1(0, L)$ (ou $z \in H_*^1(0, L)$) é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} z_{xx} = \rho_3 v_1 - \gamma v_{0,xx} + \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1), & x \in (0, L), \\ z(x) = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (5.7)$$

Observe que da terceira equação de (5.3), podemos escrever

$$-\delta v_{xx} + \partial_t(\rho_3 v_t - \gamma v_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t) = 0. \quad (5.8)$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima de 0 a t e pondo δ em evidência nos termos convenientes, deduzimos

$$-\delta \left\{ \int_0^t v_{xx}(\cdot, s) ds + \frac{1}{\delta} [\rho_3 v_1 - \gamma v_{0,xx} + \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1)] \right\} + \rho_3 v_t - \gamma v_{xx} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0.$$

Note também que, por (5.6), temos $\theta_t(x, t) = v(x, t)$. Portanto, a partir de (5.7) podemos reescrever a igualdade acima como

$$\rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0. \quad (5.9)$$

Por outro lado, assim como feito para o problema viscoelástico na Seção 3.1, devemos introduzir a história de deslocamento relativo com respeito ao ângulo de rotação ψ , ou seja, definamos a seguinte variável

$$\eta = \eta(x, t, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t - s), \quad x \in (0, L), t \geq 0, s > 0. \quad (5.10)$$

De (5.10), podemos reescrever o termo integral de (5.3) como

$$\int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t - s) ds = \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \psi_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(t, s) ds. \quad (5.11)$$

Além disso, derivando (5.10) com relação a t e s e considerando as condições iniciais e de fronteira para ψ , podemos escrever

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ \eta(x, t, s) = 0 & \text{em } x = 0, L, t \geq 0, s > 0 \\ \eta(x, t, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \eta(x, t, s) = 0 & \text{em } x \in (0, L), t \geq 0, \\ \eta(x, 0, s) = \psi_0(x) - \psi_0(x, -s) := \eta_0(x, s) & \text{em } x \in (0, L), s > 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Definindo $\beta = b - b_0 = b - \int_0^\infty g(s)ds > 0$ e usando (5.6)-(5.12), podemos reescrever (5.3)-(5.5) como

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_{tx} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds + k(\varphi_x + \psi) - \sigma \theta_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t, & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (5.13)$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, L), \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), & x \in (0, L), s > 0, \\ \eta(x, t, 0) = 0, & x \in (0, L), t \geq 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

e condições de fronteira

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = \psi(x, t) = \theta(x, t) = 0, & x = 0, L, t \geq 0, \\ \eta(x, t, s) = 0, & x = 0, L, t \geq 0, s > 0, \end{cases} \quad (5.15a)$$

ou

$$\begin{cases} \varphi_x(x, t) = \psi(x, t) = \theta(x, t) = 0, & x = 0, L, t \geq 0, \\ \eta(x, t, s) = 0, & x = 0, L, t \geq 0, s > 0, \end{cases} \quad (5.15b)$$

onde as relações de (θ_0, θ_1) com (v_0, v_1) e η_0 com ψ_0 são

$$\begin{cases} \theta_1 = v_0, \\ \rho_3 v_1 = \delta \theta_{0,xx} + \gamma \theta_{1,xx} - \sigma(\varphi_{1,x} + \psi_1) & \text{e} \\ \eta_0(x, s) = \psi_0(x) - \psi_0(x - s). \end{cases}$$

Na próxima seção apresentamos um resultado de existência e unicidade para o PVIF (5.13)-(5.15) via semigrupos lineares.

5.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_{tx} = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds - \sigma \theta_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0 & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t & \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (5.16)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), & x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, L), \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), \eta(x, t, 0) = 0, & x \in (0, L), s > 0, t \geq 0, \end{cases} \quad (5.17)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, & t \geq 0, s > 0, \end{cases} \quad (5.18a)$$

ou Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, & t \geq 0, s > 0. \end{cases} \quad (5.18b)$$

Assumiremos que o núcleo de memória g está na classe $C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ e satisfaz

$$0 < \int_0^\infty g(s) ds < b \text{ e } 0 < k_1 g(s) \leq -g'(s), \quad s \in \mathbb{R}^+. \quad (5.19)$$

Com isto, mostraremos que o PVIF (5.16)-(5.18) possui uma única solução utilizando teoria de semigrupos lineares. Para isso, denotamos $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$, $\Theta = \theta_t$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)^T$. Para contemplar as condições de fronteiras em (5.18), consideramos o espaço de fase

$$\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M} \text{ (para (5.18a))}$$

e

$$\mathcal{H}_2 = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M} \text{ (para (5.18b))},$$

onde $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0, L))$, com produto interno dado por

$$(U, W)_{\mathcal{H}_j} = \rho_1(\Phi, \tilde{\Phi})_2 + \rho_2(\Psi, \tilde{\Psi})_2 + \rho_3(\Theta, \tilde{\Theta})_2 + \beta(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 + \delta(\theta_x, \tilde{\theta}_x)_2 \\ + k(\varphi_x + \psi, \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_2 + \int_0^\infty g(s)(\eta_x(s), \tilde{\eta}_x(s))_2 ds$$

e norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 = \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_3\|\Theta\|_2^2 + \beta\|\psi_x\|_2^2 + \delta\|\theta_x\|_2^2 + k\|\varphi_x + \psi\|_2^2 \\ + \int_0^\infty g(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds,$$

para os elementos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)^T$ e $W = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\Theta}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Assim, podemos converter (5.16)-(5.18) no seguinte problema de Cauchy Abstrato:

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_j U, & t > 0, \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1, \eta_0)^T, \end{cases} \quad (5.20)$$

onde $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, é definido por

$$\mathcal{A}_j U = \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds)_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta \\ \Theta \\ \frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} - \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) \\ \Psi - \eta_s \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

onde \mathcal{A}_j é igual a

$$\begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_{xx} & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\rho_1}\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2}I_d + \frac{\beta}{\rho_2}\partial_{xx} & 0 & 0 & \frac{\sigma}{\rho_2}I_d & \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\partial_{xx}(\cdot, s)ds \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{\rho_3}\partial_x & 0 & -\frac{\sigma}{\rho_3}I_d & \frac{\delta}{\rho_3}\partial_{xx} & \frac{\gamma}{\rho_3}\partial_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & -\partial_s(\cdot, s) \end{bmatrix},$$

para todo U no domínio

$$D(\mathcal{A}_1) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid \Phi, \Psi, \Theta \in H_0^1(0, L), \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0, \right. \\ \left. \varphi, \delta\theta + \gamma\Theta, \beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L) \right\} \text{ (para (5.18a))}$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) = \left\{ U \in \mathcal{H}_2 \mid \Phi \in H_*^1(0, L), \varphi_x, \Psi, \Theta \in H_0^1(0, L), \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0, \right. \\ \left. \varphi, \delta\theta + \gamma\Theta, \beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L) \right\} \text{ (para (5.18b)).}$$

O objetivo é usar o Teorema de Lumer-Phillips para mostrar que \mathcal{A}_j , definido em (5.21), é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$ sobre o espaço \mathcal{H}_j , para $j = 1, 2$. Iniciaremos mostrando alguns lemas:

Lema 5.1. *Suponhamos que g satisfaz (5.19). Então \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , ou seja, $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq 0$ para todo $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$.*

Demonstração. Seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)^T \in D(\mathcal{A}_j)$ e relembando $\mathcal{A}_j U$ dado em (5.21), temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= \left(\left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \sigma\Theta, \Psi \right)_2 \\ &\quad + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 + ((\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} - \sigma(\Phi_x + \Psi), \Theta)_2 + \beta(\Psi_x, \psi_x)_2 \\ &\quad + \delta(\Theta_x, \theta_x)_2 + \int_0^\infty g(s)((\Psi - \eta_s(s))_x, \eta_x(s))_2 ds \\ &= + (k(\varphi_x + \psi)_x - \sigma\Theta_x, \Phi)_2 \\ &= k((\varphi_x + \psi)_x, \Phi)_2 - \sigma(\Theta_x, \Phi)_2 - k(\varphi_x + \psi, \Psi)_2 + \sigma(\Theta, \Psi)_2 \\ &\quad + ((\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx}, \Theta)_2 + \int_0^\infty g(s)(\Psi_x, \eta_x(s))_2 ds \\ &\quad + \left(\left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx}, \Psi \right)_2 - \sigma(\Phi_x + \Psi, \Theta)_2 + \beta(\Psi_x, \psi_x)_2 \\ &\quad + \delta(\Theta_x, \theta_x)_2 + k(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))_2 ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= k[(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2 - \overline{(\Phi_x + \Psi, \varphi_x + \psi)_2}] + \delta[-\overline{(\Theta_x, \theta_x)_2} + (\Theta_x, \theta_x)_2] \\ &\quad + \sigma[\overline{(\Phi_x + \Psi, \Theta)_2} - (\Phi_x + \Psi, \Theta)_2] + \beta[-\overline{(\Psi_x, \psi_x)_2} + (\Psi_x, \psi_x)_2] \\ &\quad + \int_0^\infty g(s)[(\Psi_x, \eta_x(s))_2 - \overline{(\Psi_x(s), \eta_x(s))_2}] ds - \gamma\|\Theta_x\|_2^2 \\ &\quad - \int_0^\infty g(s)(\eta_{sx}(s), \eta_x(s))_2 ds. \end{aligned}$$

Tomando a parte real e lembrando que $\operatorname{Re}(z - \bar{z}) = 0$, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} &= -\gamma \|\Theta_x\|_2^2 - \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1/y} g(s) \frac{d}{ds} \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \\ &= -\gamma \|\Theta_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde procedemos como em (3.19)-(3.22). Portanto, da condição (5.19), concluímos que \mathcal{A}_j é dissipativo em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$.

□

Lema 5.2. *Suponhamos que g satisfaz (5.19). Então, $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$, para $j = 1$ e 2 .*

Demonstração. Afirmação 1: O operador $-\mathcal{A}_j$ definido em (5.21) é sobrejetor, para $j = 1, 2$.

Com efeito, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T$ obteremos $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)^T$ em \mathcal{H}_j tal que $-\mathcal{A}_j U = F$, para $j = 1, 2$, ou seja,

$$\begin{cases} -\Phi = f_1, & (5.23a) \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x + \frac{\sigma}{\rho_1}\Theta_x = f_2, & (5.23b) \\ -\Psi = f_3, & (5.23c) \\ -\frac{1}{\rho_2} \left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) - \frac{\sigma}{\rho_2}\Theta = f_4, & (5.23d) \\ -\Theta = f_5, & (5.23e) \\ -\frac{1}{\rho_3}(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \frac{\sigma}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) = f_6, & (5.23f) \\ \eta_s - \Psi = f_7. & (5.23g) \end{cases}$$

Com base nas equações (5.23a), (5.23c) e (5.23e), consideraremos

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1(0, L) \quad (\text{ou } H_*^1(0, L)), \quad \Psi = -f_3 \in H_0^1(0, L) \quad \text{e} \quad \Theta = -f_5 \in H_0^1(0, L).$$

Além disso, com base na e (5.23g) e na escolha de Ψ feito acima, tomaremos $\eta_s = f_7 - f_3 \in \mathcal{M}$. Procedendo de modo análogo ao apresentado em (3.24)-(3.27), obtemos $\eta \in \mathcal{M}$.

O Teorema 2.29 nos fornece

$$\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds \quad \text{e} \quad \gamma\Theta_{xx} \in H^{-1}(0, L).$$

Vamos então definir

$$\left\langle \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(s)ds, \tilde{\psi} \right\rangle = - \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds, \tilde{\psi}_x \right)_2, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L)$$

e

$$\langle \Theta_{xx}, \tilde{\theta} \rangle = -(\Theta_x, \tilde{\theta}_x)_2, \quad \forall \tilde{\theta} \in H_0^1(0, L).$$

Considerando ainda

$$g_1 = \rho_1 f_2 - \sigma \Theta_x \in L^2(0, L) \text{ (ou } L_*^2(0, L)), \quad g_3 = \rho_3 f_6 - \sigma(\Phi_x + \Psi) + \gamma \Theta_{xx} \in H^{-1}(0, L) \quad (5.24)$$

e

$$g_2 = \rho_2 f_4 + \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds + \sigma \Theta \in H^{-1}(0, L), \quad (5.25)$$

segue de $H_0^1(0, L) \subset H^{-1}(0, L)$ que são antilineares e contínuos os funcionais abaixo

$$\begin{aligned} g_2 : H_0^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{\psi} &\mapsto \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle = \rho_2 (f_4, \tilde{\psi})_2 - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \tilde{\psi}_x \right)_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_3 : H_0^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \tilde{\theta} &\mapsto \langle g_3, \tilde{\theta} \rangle = \rho_3 (f_6, \tilde{\theta})_2 - \gamma (\Theta_x, \tilde{\theta}_x)_2 - \sigma (\Phi_x + \Psi, \tilde{\theta})_2. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Lema 2.59 que existe uma única terna de funções (φ, ψ, θ) em $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ ($g_1 \in L_*^2(0, L)$) ou em $H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ (se $g_1 \in L^2(0, L)$), tais que

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = g_1 & \text{em } L^2(0, L) \text{ (ou } L_*^2(0, L)), & (5.26a) \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta \psi_{xx} = g_2 & \text{em } H^{-1}(0, L), & (5.26b) \\ -\delta \theta_{xx} = g_3 & \text{em } H^{-1}(0, L). & (5.26c) \end{cases}$$

O Lema 2.59 nos fornece $\varphi \in H^2(0, L)$. Além disso, o mesmo lema nos diz que, se $g_1 \in L_*^2(0, L)$, então $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$. Da igualdade em (5.26b), temos

$$\langle k(\varphi_x + \psi) - \beta \psi_{xx}, \tilde{\psi} \rangle = \langle g_2, \tilde{\psi} \rangle, \quad \forall \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L).$$

Usando agora a definição de g_2 em (5.25) e aplicando o Teorema da Representação de Riesz, podemos escrever

$$k(\varphi_x + \psi, \tilde{\psi})_2 + \beta(\psi_x, \tilde{\psi}_x)_2 = \rho_2 (f_4, \tilde{\psi})_2 - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \tilde{\psi}_x \right)_2 + \sigma (\Theta, \tilde{\psi})_2, \quad (5.27)$$

para todo $\tilde{\psi} \in H_0^1(0, L)$. Em particular, (5.27) é válida para qualquer função $\tilde{\psi} \in C_0^1(0, L) \subset$

$H_0^1(0, L)$. Pela definição de derivada fraca, concluímos que

$$\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds + \beta\psi \right)_{xx} = k(\varphi_x + \psi) - \rho_2 f_4 \quad \text{em } L^2(0, L)$$

e

$$\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L).$$

Procedendo de modo análogo ao caso anterior, a partir da definição de g_3 dada em (5.24) concluímos que $\delta\theta + \gamma\Theta \in H^2(0, L)$, e ainda

$$(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} = \sigma(\Phi_x + \Psi) - \rho_3 f_6 \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Logo, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)^T$ como considerado acima pertence a $D(\mathcal{A}_j)$ para $j = 1$ ou 2 . Isto completa a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: $-\mathcal{A}_j$, definido em (5.21) é injetor, para $j = 1$ e 2 .

De fato, considere $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1$ ou 2 , tal que $-\mathcal{A}_j U = 0$. Mostraremos que $U = 0$. Escrevendo $-\mathcal{A}_j U = 0$ em termos de seus componentes, temos

$$\begin{cases} -\Phi = 0, & (5.28a) \\ -k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\Theta_x = 0, & (5.28b) \\ -\Psi = 0, & (5.28c) \\ -\left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\Theta = 0, & (5.28d) \\ -\Theta = 0, & (5.28e) \\ -(\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = 0, & (5.28f) \\ \eta_s - \Psi = 0. & (5.28g) \end{cases}$$

Das igualdades em (5.28a), (5.28c), (5.28e) e (5.28g), obtemos Φ, Ψ, θ e η_s nulos em $H_0^1(0, L)$ (ou $H_*^1(0, L)$), $H_0^1(0, L)$, $H_0^1(0, L)$ e \mathcal{M} , respectivamente. Usando a desigualdade dada em (3.27), segue que $\eta = 0$ em \mathcal{M} .

Note que $(\varphi, \psi, \theta) = 0$ satisfaz

$$\begin{cases} -k(\varphi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } L^2(0, L) \quad (\text{ou } L_*^2(0, L)), & (5.29a) \\ k(\varphi_x + \psi) - \beta\psi_{xx} = 0 & \text{em } H^{-1}(0, L), & (5.29b) \\ -\delta\theta_{xx} = 0 & \text{em } H^{-1}(0, L). & (5.29c) \end{cases}$$

Da unicidade de solução para (5.29a)-(5.29c) garantida pelo Lema 2.59, segue que $\varphi = \psi = \theta = 0$. Portanto, concluímos que $U = 0$, o que prova a Afirmação 2.

As Afirmações 1 e 2 nos garantem que o operador \mathcal{A}_j^{-1} , definido em (5.21) existe, para $j = 1, 2$.

Afirmção 3: O operador \mathcal{A}_j^{-1} definido em (5.21) é limitado para $j = 1, 2$.
É suficiente mostrar que existe uma constante universal C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad \forall F \in \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2,$$

com U solução da equação resolvente

$$-\mathcal{A}_j U = F, \quad (5.30)$$

que já está descrito em termos de suas componentes no sistema (5.23a)-(5.23g).

Das equações (5.23a), (5.23c), (5.23e) e da desigualdade de Poincaré, obtemos imediatamente

$$\rho_1 \|\Phi\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad \rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \quad \text{e} \quad \|\Theta\|_2^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad (5.31)$$

para alguma constante positiva C . Agora, tomando o produto interno de (5.30) com U em \mathcal{H}_j e usando (5.22) e (5.19), segue que

$$\begin{aligned} \gamma \|\Theta_x\|_2^2 + \frac{k_1}{2} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 &\leq \gamma \|\Theta_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \\ &\leq \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \frac{2}{k_1} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad \text{e} \quad \|\Theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.32)$$

Tomando o produto interno em $L^2(0, L)$ (ou $L_*^2(0, L)$) de (5.23b) com φ , de (5.23d) com ψ , fazendo integração por partes e, por fim, somando as igualdades obtidas, podemos escrever

$$k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 = - \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds, \psi_x \right)_2 + \rho_1 (f_2, \varphi)_2 + \rho_2 (f_4, \psi)_2 + \gamma (\Theta, \varphi_x + \psi)_2.$$

Com isso, aplicando a desigualdade de Chauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 &\leq \sqrt{\frac{b_0}{\beta}} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\sqrt{\beta} \|\psi_x\|_2) + \frac{\gamma}{\sqrt{k}} \|\Theta\|_2 (\sqrt{k} \|\varphi_x + \psi\|_2) \\ &\quad + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Usando a desigualdade de Young para $\varepsilon = 1/2$, segue da estimativa acima que

$$k \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C (\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \|\Theta\|_2^2).$$

Deste modo, somando membro a membro as estimativas obtidas em (5.31)-(5.32), obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C(\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \|\Theta\|_2^2) + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Usando novamente a estimativa para η dada em (5.32) e para Θ dada em (5.31), podemos escrever

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma outra constante positiva C .

Finalmente, aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = 1/2$, concluímos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

o que prova a Afirmação 3 e conclui a prova do Lema 5.2. \square

Teorema 5.3. *Suponhamos que g satisfaz (5.19). Então, o operador \mathcal{A}_j , definido em (5.21), é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}_j t}$ em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$.*

Demonstração. Segue como consequência dos Lemas 5.1 e 5.2 e fazendo considerações análogas à demonstração do Teorema 3.3. \square

Teorema 5.4. *Suponhamos que g satisfaz (5.19). Então, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$, o problema (5.20) possui uma única solução na classe*

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}_j)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H}_j),$$

dada por $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t} U_0$, $j = 1, 2$.

Demonstração. Segue do Teorema 5.3 e Teorema 2.55. \square

5.3 ESTABILIDADE

Nesta seção apresentaremos os resultados de estabilidade para a solução $U(t) = e^{\mathcal{A}_j t} U_0$ do problema (5.20) e, portanto, para a solução do sistema (5.16)-(5.18).

Teorema 5.5. *Suponhamos que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, b, \beta, \sigma, \delta, \gamma > 0$ e que g satisfaça (5.19). Então, existem constantes $C, w > 0$ independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}_j$ tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_j} \leq C e^{-w t} \|U_0\|_{\mathcal{H}_j}, \quad t > 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.33)$$

Em outras palavras, o sistema de Timoshenko termo-viscoelástico (5.16)-(5.18) é exponencialmente estável, independente de qualquer relação entre os coeficientes.

Para a demonstração do Teorema 5.5, mostraremos nas próximas subseções as condições do Teorema de Prüss e, em seguida, com ajuda da desigualdade de observabilidade mostrada no Apêndice C deste capítulo e resultados teóricos da teoria de semigrupos, concluiremos a prova do Teorema 5.5 na Subseção 5.3.3.

5.3.1 Primeira condição do Teorema de Prüss

O resultado principal desta subseção é mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$ é válida independentemente da condição de fronteira (5.18a) ou (5.18b) e do valor de χ definido, por exemplo, em (3.39).

Suponhamos que não seja válido $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$. Então, pelo Teorema 3.29 (presente no Apêndice A do Capítulo 3), existe $w > 0$, uma sequência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\xi_n \rightarrow w$, $|\xi_n| < w$ e uma sequência de funções

$$U_n = (\varphi_n, \Phi_n, \psi_n, \Psi_n, \theta_n, \Theta_n, \eta_n)^T \in D(\mathcal{A}_j) \quad \text{com} \quad \|U_n\|_{\mathcal{H}_j} = 1, \quad (5.34)$$

tais que

$$i\xi_n U_n - \mathcal{A}_j U_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{H}_j, \quad j = 1, 2. \quad (5.35)$$

Escrevendo em termos de suas componentes, temos

$$(A) \left\{ \begin{array}{ll} i\xi_n \varphi_n - \Phi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L) \text{ ou } H_*^1(0, L), \\ i\xi_n \rho_1 \Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x + \sigma \Theta_{n,x} \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \text{ ou } L_*^2(0, L), \\ i\xi_n \psi_n - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ i\xi_n \rho_2 \Psi_n + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) \\ \quad - (\beta \psi_n + \int_0^\infty g(s) \eta_n(s) ds)_{xx} - \sigma \Theta_n \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), \\ i\xi_n \theta_n - \Theta_n \rightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), \\ i\xi_n \rho_3 \Theta_n - (\delta \theta_n + \gamma \Theta_n)_{xx} + \sigma(\Phi_{n,x} + \Psi_n) \rightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), \\ i\xi_n \eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n \rightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}, \end{array} \right.$$

onde

$$b_0 := \int_0^\infty g(s) ds, \quad \beta := b - b_0. \quad (5.36)$$

Lema 5.6. *Considere $j = 1, 2$. Suponhamos que U_n satisfaça (5.35) e que g satisfaça (5.19). Se $n \rightarrow \infty$, então*

$$\Theta_n, \theta_n \rightarrow 0, \quad \text{em } H_0^1(0, L).$$

Demonstração. Tomando o produto interno com U_n em \mathcal{H}_j no limite em (5.35) para $\xi_n \in \mathbb{R}$ e parte real, temos por (5.22) que

$$\gamma \|\Theta_{n,x}\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_{n,x}(s)\|_2^2 ds = \text{Re}(-\mathcal{A}_j U_n, U_n)_{\mathcal{H}_j} \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\gamma \|\Theta_{n,x}\|_2^2 + \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_{n,x}(s)\|_2^2 ds \longrightarrow 0.$$

Logo, usando que $g(s) > 0$, $s > 0$, o lema segue pelo Teorema do Confronto e usando a quinta convergência de (A). \square

O sistema (A), via Lema 5.6, nos fornece

$$\begin{cases} i\xi_n \varphi_n - \Phi_n \longrightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L) \text{ ou } H_*^1(0, L), & (5.37a) \\ i\xi_n \rho_1 \Phi_n - k(\varphi_{n,x} + \psi_n)_x \longrightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L) \text{ ou } L_*^2(0, L), & (5.37b) \\ i\xi_n \psi_n - \Psi_n \longrightarrow 0 & \text{em } H_0^1(0, L), & (5.37c) \\ i\xi_n \rho_2 \Psi_n + k(\varphi_{n,x} + \psi_n) - \left(\beta \psi_n + \int_0^\infty g(s) \eta_n(s) ds \right)_{xx} \longrightarrow 0 & \text{em } L^2(0, L), & (5.37d) \\ i\xi_n \eta_n + \eta_{n,s} - \Psi_n \longrightarrow 0 & \text{em } \mathcal{M}. & (5.37e) \end{cases}$$

Observe que (5.37a)-(5.37e) é exatamente igual ao sistema (3.45a)-(3.45e) e, procedendo da mesma maneira a apresentada na Seção 3.3.1 a partir do sistema mencionado, concluímos que as demais componentes de U_n também convergem para 0, o que contradiz (5.34). Portanto, temos o resultado seguinte.

Teorema 5.7. *Sob mesmas hipóteses do Teorema 5.5, o operador $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$, dado em (5.21), é tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$.*

5.3.2 Segunda condição do Teorema de Prüss

Nesta seção provaremos a segunda condição para o Teorema de Prüss, a qual podemos escrever como

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_j)} < \infty, \quad j = 1, 2,$$

onde o operador $\mathcal{A}_j : D(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_j$ é definido como em (5.21). Para tanto, é suficiente provar que existe $C > 0$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_j} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}_j}$ para todo $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in \mathcal{H}_j$ e $U \in D(\mathcal{A}_j)$ solução da equação resolvente $(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)U = F$, $j = 1, 2$.

Note inicialmente que, se g satisfaz (5.19), então (5.22) nos fornece

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds - \gamma \|\Theta_x\|_2^2 \quad (5.38)$$

e

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} \leq -\frac{k_1}{2} \int_0^\infty g(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds - \gamma \|\Theta_x\|_2^2. \quad (5.39)$$

Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{H}_j$ e considerando $j = 1, 2$, nosso ponto de partida é considerar a

seguinte equação resolvente para o operador \mathcal{A}_j , definido em (5.21):

$$i\lambda U - \mathcal{A}_j U = F, \quad j = 1, 2, \quad (5.40)$$

a qual, em termos de suas componentes, pode ser escrita como

$$\begin{cases} i\lambda\varphi - \Phi = f_1, & (5.41a) \\ i\lambda\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma\Theta_x = \rho_1 f_2, & (5.41b) \\ i\lambda\psi - \Psi = f_3, & (5.41c) \\ i\lambda\rho_2\Psi - \left(\beta\psi + \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \right)_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \sigma\Theta = \rho_2 f_4, & (5.41d) \\ i\lambda\theta - \Theta = f_5, & (5.41e) \\ i\lambda\rho_3\Theta - (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + \sigma(\Phi_x + \Psi) = \rho_3 f_6, & (5.41f) \\ i\lambda\eta + \eta_s - \Psi = f_7. & (5.41g) \end{cases}$$

A seguir, apresentaremos alguns lemas auxiliares que nos permitirão confirmar nosso objetivo, a saber, o de obter um resultado sobre estabilidade exponencial. No que segue, todas as constantes “ C ” no enunciado dos lemas serão universais e independentes do parâmetro λ ; as que tiverem índices com relação a ε , como no Corolário 5.14 apresentado adiante, dependerão somente desta variável.

Lema 5.8. *Suponhamos que g satisfaça (5.19). Se $U \in D(\mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, é solução da equação resolvente (5.40), então*

$$\|\Theta\|_2^2, \|\Theta_x\|_2^2, \int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (5.42)$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Tomando o produto interno em \mathcal{H}_j de ambos os lados em (5.40) com U para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos por (5.38) que

$$\operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j} = \gamma\|\Theta_x\|_2^2 + \int_0^\infty -g'(s)\|\eta_x(s)\|_2^2 ds \leq |\operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

donde segue as duas últimas estimativas em (5.42). Finalmente, usando a desigualdade de Poincaré,

$$\|\Theta\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

o que completa a prova do lema. □

Lema 5.9. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 5.8, existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.43)$$

Demonstração. Por (5.39), temos

$$\frac{k_1}{2} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \operatorname{Re}(-\mathcal{A}_j U, U)_{\mathcal{H}_j}.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j} \|U\|_{\mathcal{H}_j},$$

onde $C = \frac{2}{k_1}$. □

Lema 5.10. *Sob mesmas hipóteses e notações do Lema 5.8, existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2, \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \quad (5.44)$$

Demonstração. Derivando (5.41e) com relação a x e tomando o produto interno da equação resultante com θ_x em $L^2(0, L)$, obtemos

$$i\lambda \|\theta_x\|_2^2 - \int_0^L \Theta_x \overline{\theta_x} dx = \int_0^L f_{5,x} \overline{\theta_x} dx. \quad (5.45)$$

Assim, isolando $\|\theta_x\|_2^2$ em (5.45), em seguida aplicando a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1/2$) e o Lema 5.8, temos

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{1}{2} \|\theta_x\|_2^2,$$

para alguma constante positiva $C > 0$. Portanto, para $|\lambda| \geq 1$, o resultado para θ_x segue. Por fim, a estimativa para $\delta\theta_x + \gamma\Theta_x$ segue da estimativa anterior para θ_x e da estimativa de Θ_x dada no Lema 5.8. Isto conclui a prova de (5.44). □

No que segue, usaremos funções de corte, ou seja, definidas localmente, para obter estimativas locais, mas independente das condições de fronteira. Consideremos números arbitrários $l_0 \in (0, L)$ e $\delta > 0$ de forma que o intervalo $(l_0 - \delta, l_0 + \delta) \subset (0, L)$ e uma função $s \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$\operatorname{supp} s \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta), \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad x \in (0, L) \quad (5.46)$$

e

$$s(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \in [l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2]. \quad (5.47)$$

Lema 5.11. *Sob as mesmas hipóteses e notações do Lema 5.8 e notações acima, existe uma*

constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} \int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Em particular, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \quad (5.49)$$

Demonstração. Derivando (5.41a), adicionando a (5.41c) e inserindo a expressão resultante em (5.41f), obtemos

$$i\lambda\rho_3\Theta - (\delta\theta + \gamma\Theta)_{xx} + i\lambda\sigma(\varphi_x + \psi) = \rho_3f_6 + \sigma(f_{1,x} + f_3). \quad (5.50)$$

Tomando o produto interno de (5.50) com $sk(\overline{\varphi_x + \psi})$ em $L^2(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} &\underbrace{i\lambda\rho_3 \int_0^L \Theta ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx}_{:=I_1} - \underbrace{\int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x)_x ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx}_{:=I_2} \\ &= -i\lambda\sigma \int_0^L (\varphi_x + \psi) ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx + \rho_3 \int_0^L f_6 ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx \\ &\quad + \sigma \int_0^L (f_{1,x} + f_3) ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Das equações (5.41a) e (5.41c), segue que

$$I_1 = \rho_3 \int_0^L (ks\Theta)_x \overline{\Phi} dx - \rho_3 \int_0^L \Theta ks\overline{\Psi} dx - \rho_3 \int_0^L \Theta ks(\overline{\varphi_x + \psi}) dx.$$

Agora, integrando por partes, temos

$$I_2 = - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) ks_x(\overline{\varphi_x + \psi}) dx - \underbrace{\int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) ks(\overline{\varphi_x + \psi})_x dx}_{:=I_3}.$$

Da equação (5.41b), concluímos que

$$I_3 = - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) s(i\lambda\rho_1\overline{\Phi}) dx - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \sigma s\overline{\Theta_x} dx + \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \rho_1 s\overline{f_2} dx.$$

Substituindo a estimativa I_3 em I_2 , em seguida substituindo as estimativas dadas em I_2 e I_1 em

(5.51), obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda \int_0^L (\varphi_x + \psi) k s \overline{(\varphi_x + \psi)} dx &= \rho_3 \int_0^L f_6 k s \overline{(\varphi_x + \psi)} dx + \sigma \int_0^L (f_{1,x} + f_3) k s \overline{(\varphi_x + \psi)} dx \\
&- \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) k s_x \overline{(\varphi_x + \psi)} dx \\
&- \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) \sigma s \overline{\Theta_x} dx + \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) s \rho_1 \overline{f_2} dx \\
&- \rho_3 \int_0^L (k s \Theta)_x \overline{\Phi} dx + \rho_3 \int_0^L \Theta k s \overline{\Psi} dx \\
&+ \rho_3 \int_0^L \Theta k s \overline{(f_{1,x} + f_3)} dx - \int_0^L (\delta\theta_x + \gamma\Theta_x) i \lambda s \rho_1 \overline{\Phi} dx.
\end{aligned}$$

Tomando módulo em ambos os lados da igualdade acima, usando a desigualdade de Poincaré para Θ e $\text{supp } s \subset (l_0 - \delta/2, l_0 + \delta/2)$, segue que

$$\begin{aligned}
|\lambda| \int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C |\lambda| \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ C \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|\Theta_x\|_2. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Young e os Lemas 5.9 e 5.10 em (5.52), em seguida dividindo ambos os membros da desigualdade resultante por $|\lambda|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx &\leq C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2. \tag{5.53}
\end{aligned}$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (5.41b) com $-s\overline{\varphi}$ em $L^2(0, L)$, integrando por partes e aplicando (5.41a), vem

$$\rho_1 \int_0^L s |\Phi|^2 dx = k \int_0^L s |\varphi_x + \psi|^2 dx - k \int_0^L s (\varphi_x + \psi) \overline{\psi} dx + I_4 + I_5, \tag{5.54}$$

onde

$$I_4 = \frac{i\sigma}{\lambda} \int_0^L s \Theta_x \overline{(\Phi + f_1)} dx - \rho_1 \int_0^L s (\Phi \overline{f_1} + f_2 \overline{\varphi}) dx \quad \text{e} \quad I_5 = k \int_0^L s' (\varphi_x + \psi) \overline{\varphi} dx.$$

Das desigualdades triangular, Poincaré e Hölder, podemos concluir facilmente que

$$|I_4| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j},$$

para alguma constante $C > 0$. Somando as equações (5.41a) e (5.41c), segue que

$$|\operatorname{Re} I_5| \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, tomando parte real em (5.54) e observando que $\operatorname{supp} s \subset (l_0 - \delta, l_0 + \delta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\varphi_x + \psi| |\psi| dx + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\leq C \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \left(\int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\varphi_x + \psi|^2 dx \right)^{1/2} \|\psi\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Da estimativa (5.53), da desigualdade de Young e (5.42), resulta que

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx &\leq C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \left(\int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j} \right) \|\psi\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + C \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \left(\int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx \right)^{1/4} \|\psi\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|F\|_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, (5.44) e (5.42), segue da equação (5.41c) que

$$\begin{aligned} \int_{l_0 - \delta}^{l_0 + \delta} s |\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left[\left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}_j} \right] (\|U\|_{\mathcal{H}_j} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}) \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} (\|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} + \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3}) + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2, \end{aligned}$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Aplicando a desigualdade de Young e (5.44) mais uma

vez, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s|\Phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Combinando (5.53) e (5.55), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} s(|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \left(\|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}_j} \\
&\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|^{4/3}} \|\delta\theta_x + \gamma\Theta_x\|_2^{2/3} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{4/3} \\
&\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Young e novamente a estimativa (5.42). Da definição de s em (5.46)-(5.47), a estimativa (5.48) segue.

Em particular, usando a desigualdade de Young e aplicando (5.42) e (5.44) várias vezes, também usando as propriedades de s em (5.46)-(5.47), a estimativa em (5.49) segue. \square

Lema 5.12. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 5.8, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}_j}\|F\|_{\mathcal{H}_j} + C\|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\frac{\|\Phi\|_2}{|\lambda|} + \|\psi_x\|_2 \right).$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (5.41d) com $\int_0^\infty g(s)\overline{\eta(s)}ds$ em $L^2(0, L)$ e fazendo integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)f_4\overline{\eta(s)}dsdx &= \underbrace{i\lambda\rho_2b \int_0^L \int_0^\infty g(s)\Psi\overline{\eta(s)}dsdx}_{:=R_1} - \sigma \int_0^L \int_0^\infty g(s)\Theta\overline{\eta(s)}dsdx \\
&\quad + \beta \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x(s)}\psi_xdsdx + \int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\eta_x(s)ds \right|^2 dx \\
&\quad + k \int_0^L \int_0^\infty g(s)(\varphi_x + \psi)\overline{\eta(s)}dsdx.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (5.41g) em R_1 , resulta que

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) |\Psi|^2 ds dx &= \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi \overline{f_5} ds dx - \underbrace{\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Psi \overline{\eta_x(s)} ds dx}_{:=R_2} \\
&- \beta \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} \psi_x ds dx - b \underbrace{\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx}_{:=R_3} \\
&- \underbrace{k \int_0^L \int_0^\infty g(s) (\varphi_x + \psi) \overline{\eta(s)} ds dx}_{:=R_4} + \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_4 \overline{\eta(s)} ds dx \\
&+ \sigma \int_0^L \int_0^\infty g(s) \Theta \overline{\eta(s)} ds dx. \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Integrando R_2 por partes e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|R_2| \leq \rho_2 \sqrt{b_0} \|\Psi\|_2 \left(- \int_0^\infty g'(s) \|\eta(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Young (com $\varepsilon = 1/2$), temos

$$|R_2| \leq \frac{\rho_2 b_0}{2} \|\Psi\|_2^2 + \frac{\rho_2 L^2}{2} \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds. \tag{5.57}$$

Além disso, pela desigualdade para integrais e de Hölder, chegamos a

$$\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) ds \right|^2 dx \leq \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x(s)| ds \right)^2 dx \leq b_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2. \tag{5.58}$$

Observe que as equações (5.41a) e (5.41c) nos fornece

$$\begin{aligned}
R_4 &= -\frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} ds \Phi dx - \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x(s)} ds f_1 dx \\
&+ \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds f_3 dx + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta(s)} ds \Psi dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Poincaré para η , f_1 e f_3 , podemos escrever

$$\begin{aligned}
R_4 &\leq C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_{1,x} + f_3\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_{3,x}\|_2 \\
&+ \frac{1}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Psi\|_2, \tag{5.59}
\end{aligned}$$

para algum $C > 0$. Usando Hölder em (5.56) e aplicando as estimativas (5.57)-(5.59), podemos

escrever

$$\begin{aligned} \rho_2 \|\Psi\|_2^2 &\leq C \|\Psi\|_2 \|f_5\|_{\mathcal{M}} + C \|\Psi\|_2^2 + C \int_0^\infty -g'(s) \|\eta_x(s)\|_2^2 ds + C \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 \\ &\quad + C \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_4\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Theta\|_2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_{1,x} + f_3\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|f_{3,x}\|_2 + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} (\|\Psi\|_2)}_{:=R_5}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon = \rho_2/2$ em R_5 , segue para $|\lambda| > 1$ que

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\psi_x\|_2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Phi\|_2 + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \|\Theta\|_2.$$

Fazendo uso dos Lemas 5.8 e 5.9, deduzimos

$$\rho_2 \|\Psi\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\|\psi_x\|_2 + \frac{\|\Phi\|_2}{|\lambda|} \right),$$

para alguma constante positiva C . □

Lema 5.13. *Sob as mesmas hipóteses e notações do Lema 5.8, existe uma constante positiva C tal que*

$$\beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + C \|\Psi\|_2^2, \quad j = 1, 2.$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (5.41d) com $\bar{\psi}$ em $L^2(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} &\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \Psi \bar{\psi} dx}_{:=S_1} + \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx + b \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \bar{\psi}_x ds dx + k \int_0^L \varphi_x \bar{\psi} dx \\ &+ k \int_0^L |\psi|^2 dx - \sigma \int_0^L \Theta \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Substituindo ψ dado em (5.41c) em S_1 , segue que

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= -b \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \bar{\psi}_x ds dx - \underbrace{k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\psi} dx}_{:=S_2} \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \bar{f}_3 dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx \\ &\quad + \sigma \int_0^L \Theta \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Usando (5.41c) em S_2 , obtemos

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L |\psi_x|^2 dx &= -b \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x(s) \bar{\psi}_x ds dx + \frac{ik}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{\Psi} dx + \sigma \int_0^L \Theta \bar{\psi} dx. \\ &+ \frac{ik}{\lambda} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \bar{f}_3 dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \bar{\psi} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \bar{f}_3 dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando desigualdade de Hölder, em seguida desigualdade de Poincaré para ψ e f_3 , podemos escrever

$$\begin{aligned} \beta \|\psi\|_2^2 &\leq C \|\psi_x\|_2 \|\eta\|_{\mathcal{M}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + C \|\Psi\|_2^2 + C \|\Psi\|_2 \|f_{3,x}\|_2 \\ &+ C \|\varphi_x + \psi\|_2 \|f_{3,x}\|_2 + C \|\psi_x\|_2 \|f_4\|_2 + \|\Theta\|_2 \|\psi\|_2, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C . Usando a desigualdade de Young para $\varepsilon = \beta/4$ na estimativa anterior, concluímos que

$$\beta \|\psi_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j} + \frac{C}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \|\Psi\|_2 + C \|\Psi\|_2^2.$$

para algum $C > 0$. Portanto, a estimativa deste lema fica provado com $|\lambda| \geq 1$. \square

Corolário 5.14. *Com as mesmas hipóteses dos Lema 5.13, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2.$$

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 5.12 e 5.13 que

$$\begin{aligned} \|\psi_x\|_2^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\varphi_x + \psi\|_2 \left[\|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^{1/2} \left(\frac{\|\Phi\|_2^{1/2}}{|\lambda|^{1/2}} + \|\psi_x\|_2^{1/2} \right) \right] \\ &+ C \|\eta\|_{\mathcal{M}} \left(\frac{\|\Phi\|_2}{|\lambda|} + \|\psi_x\|_2 \right) + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C . Usando que $\|\varphi_x + \psi\|_2$, $\|\Phi\|_2$, $\|\psi_x\|_2 \leq K \|U\|_{\mathcal{H}_j}$ para algum real $K > 0$ e considerando $|\lambda| \geq 1$, deduzimos

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{3/2} \|F\|_{\mathcal{H}_j}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^{3/2} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|\eta\|_{\mathcal{M}} + C \|U\|_{\mathcal{H}_j} \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad (5.62)$$

para algum $C > 0$. Usando a desigualdade de Young em (5.62) com os pares conjugados $(4/3, 4)$ e com $(1/2, 1/2)$ para $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\|\psi_x\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|U\|_{\mathcal{H}_j} + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Aplicando o Lema 5.9 e fazendo uso da desigualdade de Young mais uma vez, o corolário segue. \square

5.3.3 Prova do Decaimento Exponencial (Teorema 5.5)

A conclusão da prova do Teorema 5.5 é baseada na caracterização de estabilidade exponencial para C_0 -semigrupos de contrações, conforme lembrado no Teorema 2.56.

Do Teorema 5.7 já sabemos que a primeira condição de (2.5) do Teorema 2.56 é satisfeita. Para concluir a segunda condição em (2.5), consideremos inicialmente $\varepsilon > 0$ dado. Temos de (5.49), que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C_\varepsilon = C(\varepsilon) > 0$. Consequentemente,

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} (|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \int_0^L |\psi_x|^2 dx,$$

para constantes $C, C_\varepsilon > 0$. Aplicando o Corolário 5.14, concluímos que

$$\int_{l_0-\delta/2}^{l_0+\delta/2} (|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2,$$

para alguma constante $C_\varepsilon > 0$.

Agora é o momento preciso em que aplicaremos os resultados de observabilidade apresentados no Apêndice C. Com efeito, de (5.41a)-(5.41b), vemos que $V = (\varphi, \Phi)^T$ é a solução de (5.65)-(5.66) com

$$g_1 = f_1 \quad \text{e} \quad g_2 = \rho_1 f_2 - (\sigma \Theta)_x + k\psi_x,$$

e, então, a condição (5.71) é verificada para $a_1 = l_0 - \delta/2$ e $a_2 = l_0 + \delta/2$. Deste modo, aplicando o Corolário 5.16, o Lema 5.8, o Corolário 5.14 e as desigualdades de Young e Poincaré, deduzimos

$$\int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\psi_x\|_2^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2, \quad (5.63)$$

para alguma constante $C, C_\varepsilon > 0$. Vale a pena ressaltar que a aplicação do Corolário 5.16 foi fundamental na estimativa (5.63), o qual é consequência imediata do Lema 5.15 que estabelece a desigualdade de observabilidade para sistemas do tipo ondas, que é um caso particular do tipo Timoshenko.

Aplicando a desigualdade triangular e de Poincaré, segue que

$$\|\varphi_x + \psi\|_2^2 \leq 2\|\varphi_x\|_2^2 + 2L^2\|\psi_x\|_2^2,$$

donde, redefinindo ε , (5.63) nos fornece

$$\int_0^L (|\varphi_x + \psi|^2 + |\Phi|^2) dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\psi_x\|_2^2, \quad (5.64)$$

para algumas outras constantes $C, C_\varepsilon > 0$.

Somando membro a membro as desigualdades obtidas em (5.64) e nos Lemas 5.12 e 5.13, em seguida usando a desigualdade de Young, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\varphi_x + \psi|^2 + \beta|\psi_x|^2 + |\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2) dx &\leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C \|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + C \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \|\Phi\|_2^2 + C_\varepsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2, \end{aligned}$$

A partir da última estimativa, usando os Lemas 5.8, 5.9 e 5.10 e o Corolário 5.14, em seguida aplicando a desigualdade de Young com o mesmo $\varepsilon > 0$ na desigualdade resultante, podemos escrever

$$\|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}_j}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}_j}^2 + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \|\Phi\|_2^2.$$

Tomando $\varepsilon < \rho_1$ e $|\lambda| > 1$ suficientemente grande, e lembrando a equação resolvente (5.40), concluímos

$$\|(i\lambda I_d - \mathcal{A}_j)^{-1} F\|_{\mathcal{H}_j} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}_j}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

o que prova a segunda condição de (2.5). Isto prova o Teorema 5.5, ou seja, concluímos que o problema (5.20) é exponencialmente estável com (5.33) sendo satisfeita.

5.4 APÊNDICE C

5.4.1 Desigualdade de Observabilidade para Sistemas do Tipo Onda

No que segue vamos mostrar duas desigualdades, adaptadas para a equação da onda, a qual podem ser vista como um caso particular ao provado para o sistema de Timoshenko, no Apêndice B do Capítulo 4.

Iniciamos considerando o seguinte sistema de equações:

$$i\lambda u - v = g_1 \quad \text{em } (0, l), \quad (5.65)$$

$$i\lambda \rho_1 v - (ku_x)_x = g_2 \quad \text{em } (0, l), \quad (5.66)$$

onde $g_1 \in H_0^1(0, l)$ ou $H_*^1(0, l)$, $g_2 \in L^2(0, l)$ ou $L_*^2(0, l)$, e $\rho_1, k > 0$. Denotaremos por V e G as seguintes funções vetoriais $V = (u, v)^T$ e $G = (g_1, g_2)^T$. Além disso, dados quaisquer $a_1, a_2 \in [0, l]$, com $a_1 < a_2$, a notação $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$ significa

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 = \int_{a_1}^{a_2} (|u_x|^2 + |v|^2) dx.$$

Lema 5.15. *Sob as notações acima, seja $V = (u, v)^T$ uma solução regular de (5.65)-(5.66) e suponhamos que $0 \leq a_1 < a_2 \leq l$. Então, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tais que, para $j = 1, 2$,*

$$|u_x(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{0, l}^2, \quad (5.67)$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 [|u_x(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2] + C_1 \|G\|_{0, l}^2. \quad (5.68)$$

Demonstração. Consideremos uma função fixada $q \in C^1[a_1, a_2]$. Tomando o produto interno de (5.66) com $qk\overline{u_x}$ em $L^2(a_1, a_2)$, obtemos

$$\int_{a_1}^{a_2} qk g_2 \overline{u_x} dx = - \int_{a_1}^{a_2} q\rho_1 k v(\overline{i\lambda u_x}) dx - \int_{a_1}^{a_2} q(ku_x)_x \overline{(ku_x)} dx. \quad (5.69)$$

Denotemos o lado direito de (5.69) por $J_1 + J_2$. Usando a equação (5.65) e integrando por partes, segue que

$$\operatorname{Re} J_1 = - \frac{1}{2} q\rho_1 k |v|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (q\rho_1 k)_x |v|^2 dx - \operatorname{Re} \left(\int_{a_1}^{a_2} q\rho_1 k v \overline{g_{1,x}} dx \right),$$

e

$$\operatorname{Re} J_2 = - \frac{1}{2} qk^2 |u_x|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} q_x k^2 |u_x|^2 dx.$$

Assim, tomando parte real em (5.69) e usando as igualdades para J_1 e J_2 acima, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} (q\rho_1 k |v|^2 + qk^2 |u_x|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} ([q\rho_1 k]_x |v|^2 + q_x k^2 |u_x|^2) dx \\ & = \operatorname{Re} \underbrace{\int_{a_1}^{a_2} qk (\rho_1 v \overline{g_{1,x}} + g_2 \overline{u_x}) dx}_{:=J}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

para qualquer $q \in C^1[a_1, a_2]$.

Com isso, estamos aptos para concluir (5.67)-(5.68). Com efeito, vamos considerar primeiro o caso $j = 2$. Assim, escolhemos q de forma que

$$(qk)(x) = \int_{a_1}^x e^{n\tau} d\tau,$$

para $x \in [a_1, a_2]$ e $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$|J| \leq C \|V\|_{a_1, a_2} \|G\|_{0, l},$$

para alguma constante $C > 0$.

Logo, substituindo a estimativa para J em (5.70) e tomando n e $|\lambda| > 1$ suficientemente grandes, as estimativas (5.67)-(5.68) são verificadas para $j = 2$.

O caso $j = 1$ é similar. De fato, para este caso escolhemos q tal que

$$(qk)(x) = - \int_x^{a_2} e^{-n\tau} d\tau,$$

para $x \in [a_1, a_2]$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, retornando a (5.70) e procedendo similarmente como acima, as estimativas (5.67)-(5.68) podem ser concluídas para $j = 1$. \square

Uma importante consequência do Lema 5.15 é o corolário a seguir, o qual será o resultado utilizado nas aplicações para recuperar estimativas globais. Vejamos:

Corolário 5.16. *Seja $V = (u, v)^T$ uma solução regular do sistema (5.65)-(5.66). Se para algum subintervalo $(a_1, a_2) \subset (0, l)$ tivermos que*

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 = \int_{a_1}^{a_2} (|u_x|^2 + |v|^2) dx \leq \Lambda, \quad (5.71)$$

então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0, l}^2 = \int_0^l (|u_x|^2 + |v|^2) dx \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, l}^2. \quad (5.72)$$

Demonstração. A prova segue combinando (5.67)-(5.68) com a hipótese (5.71). De fato, de (5.67) e (5.71), para $j = 1, 2$, temos

$$|u_x(a_j)|^2 + |v(a_j)|^2 \leq C_0\Lambda + C_0\|G\|_{0, l}^2. \quad (5.73)$$

Usando (5.68) com $a_1 = 0$ e (5.73) com $j = 2$, obtemos

$$\int_0^{a_2} (|u_x|^2 + |v|^2) dx \leq C_2\Lambda + C_2\|G\|_{0, l}^2,$$

onde $C_2 = C_1C_0 + C_1 > 0$. Analogamente, usando (5.68) com $a_1 = a_2$, $a_2 = l$ e (5.73) com $j = 1$, também obtemos

$$\int_{a_2}^l (|u_x|^2 + |v|^2) dx \leq C_2\Lambda + C_2\|G\|_{0, l}^2.$$

Portanto, adicionando estas duas últimas desigualdades, a estimativa (5.72) segue como desejado. \square

5.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE O CAPÍTULO 5

Observe que a condição de fronteira mista presente em [30, Seção 7], dada por

$$\varphi(x, t) = \psi_x(x, t) = \theta_x(x, t) = \eta_x(x, t, s), \quad x \in 0, L, \quad \text{e} \quad t \geq 0, \quad s > 0, \quad (5.74)$$

é diferente da presente neste trabalho, em (5.18b). Também, vamos notar que a constante κ presente no sistema (7.1) do mesmo artigo faz o mesmo papel da constante k presente em (5.16) da presente dissertação.

Os autores indicam em [30, Seção 7] um estudo de um sistema que dá origem a (5.16)-(5.18), porém lá ocorre a seguinte diferença: a condição de fronteira (5.74) é considerada no lugar de (5.18b). Sugerem ainda que usando as ideias descritas, com adaptações necessárias, poderia se obter os resultados para os principais teoremas nas Seções 4, 5 e 6 daquele trabalho. Na Seção 4 é mostrado que o sistema (1.14)-(1.17) de [30] (que, a menos da condição de fronteira (4.14b), equivale ao sistema (4.12)-(4.14) deste trabalho) não é exponencialmente estável se $\chi = \frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \neq 0$. Em suma, os autores sugerem que o sistema (5.16)-(5.18), com a diferença de condição de fronteira mencionada no caso misto, em geral não é exponencialmente estável.

No entanto, o principal resultado da Seção 5.3 é o Teorema 5.5, onde provamos que o problema (5.16)-(5.18) é exponencialmente estável, ou seja, a taxa é independente dos dados iniciais em \mathcal{H}_j , $j = 1, 2$, das condições de fronteira consideradas em (5.18) e de χ . Com isso, este resultado (via estimativa (5.33)) contribui com a literatura no que concerne estabilidade para sistemas de Timoshenko (e sistemas relacionados) no seguinte aspecto: como a taxa de decaimento esperada com base na Seção 6 e sugestão dos autores em [30, Seção 7] seria polinomial na forma $t^{-1/2}$ para $U_0 \in D(\mathcal{A}_j)$ no melhor dos casos (isto é, considerando $\chi = 0$), melhoramos a taxa de decaimento para um nível exponencial, a qual foi obtida no Teorema 5.5, bem como ficou evidenciado que esse decaimento é o mesmo para qualquer condição de fronteira em (5.18) e independente da relação dos coeficientes dado por meio de letra χ , usados em [30, Seção 6].

REFERÊNCIAS

- [1] R. A. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*. vol. 140. Elsevier, 2003.
- [2] M. S. Alves, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma and J. E. Muñoz Rivera, *Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic Timoshenko systems*, *Z. Angew. Math. Phys.* 67 (2016), no. 3, Art. 70, 16 pp.
- [3] M. S. Alves, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma and J. E. Muñoz Rivera, *Non-homogeneous thermoelastic Timoshenko systems*, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, v. 48 (3), p. 461–484, 2017.
- [4] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J.E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. *J. Differential equations* 194 (2003), no. 1, 82-115.
- [5] L. Boltzmann, *Zur theorie der elastischen Nachwirkung*, *Wied. Ann.* 5 (1878), 430-432.
- [6] L. Boltzmann, *Zur theorie der elastischen Nachwirkung*. *Wien. Ber.* 70 (1874), 275-306.
- [7] A. Borichev and Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, *Math. Ann.* 347 (2010) 455-478.
- [8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, Springer New York, 2010.
- [9] M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, PR, 2009.
- [10] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and V. Komornik, *Introdução à Análise Funcional*. Eduem, Maringá, PR, 2011.
- [11] K. Engel and R. Nagel, *A short Course on Operator Semigroups*. Springer. New York, 2006.
- [12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [13] L. Gearhart, *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 236 (1978) 385-394.
- [14] M. Grasselli and V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory*. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* 50 (2002) 155-178.

- [15] A. E. Green and P. M. Naghdi, *A re-examination of the basic postulates of thermomechanics*, Proc. R. Soc. Lond. A 432 (1991) 171–194.
- [16] A. E. Green and P. M. Naghdi, *On undamped heat waves in an elastic solid*, J. Thermal Stresses 15 (1992) 253-264.
- [17] A. E. Green and P. M. Naghdi, *Thermoelasticity without energy-dissipation*, J-Elasticity 31 (3) (1993) 189-208.
- [18] A. E. Green and P. M. Naghdi, *A new thermoviscous theory for fluids*, J. Non-Newton. Fluid Mech. 56(3) (1995) 289–306.
- [19] A. E. Green and P. M. Naghdi, *An extended theory for incompressible viscous fluid flow*, J. Non-Newton. Fluid Mech. 66(2–3) (1996) 233–255.
- [20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, 1989.
- [21] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. Projeto Euclides-IMPA. Edição 3, Volume 1, 1993.
- [22] Z. Liu and B. Rao, *Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system*, Z. Angew. Math. Phys. 60 (2009), no. 1, 54-69.
- [23] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1999.
- [24] J. E. Muñoz Rivera, *Estabilização de semigrupos e aplicações*. Série de métodos matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.
- [25] J. E. Muñoz Rivera and A. I. Ávila, *Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body*, J. Differential Equations 258 (2015), no. 10, 3468-3490.
- [26] J. E. Muñoz Rivera and H. D. Fernández Sare, *Stability of Timoshenko systems with past history*. J. Math. Anal. Appl. 339 (2008) 482–502.
- [27] J. T. Oden and L. F. Demkowicz, *Applied Functional Analysis*. Computational Mechanics and Applied Analysis, 1996.
- [28] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [29] J. Prüss, *On the spectrum of C_0 -semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984) 847-857.
- [30] M. L. Santos and D.S. Almeida Júnior, *On Timoshenko-type systems with type III thermoelasticity: Asymptotic behavior*, J. Math. Anal. Appl. 448 (2017), 650-671.

- [31] B. T. S. Sozzo, *Boa Colocação para Equações Diferenciais Via Semigrupos*. Dissertação (Dissertação em matemática) – UEL, Londrina, 2018.
- [32] S. P. Timoshenko, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, Series 6, 41, issue 245, (1921) 744-746.
- [33] S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.
- [34] E. Zeidler and L. Boron, *Nonlinear Function Analysis and Its Applications II/ A: Linear Monotone Operators*. Transl. by the Author and by Leo F. Boron. Springer New York, 1989.